Präsentation zum Praktikum “Einführung in die Rechnerarchitektur“

Moore Kurven

Anton Baumann Felix Brandis Michal Cizevskij

Problemstellung

Lösungsansatz

Performanz

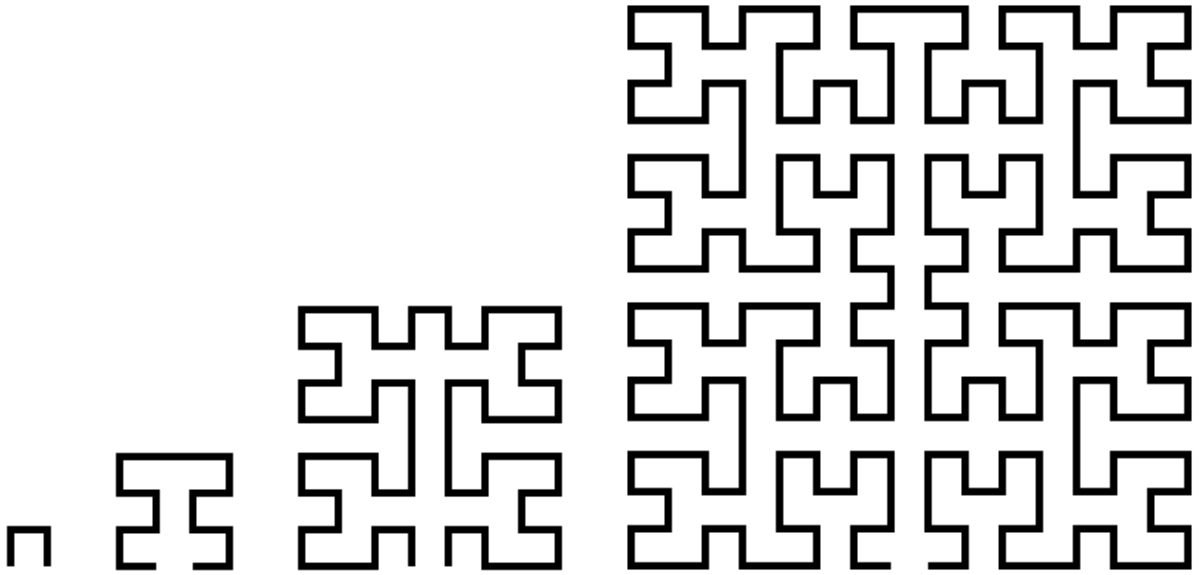
Problemstellung

Lösungsansatz

Performanz

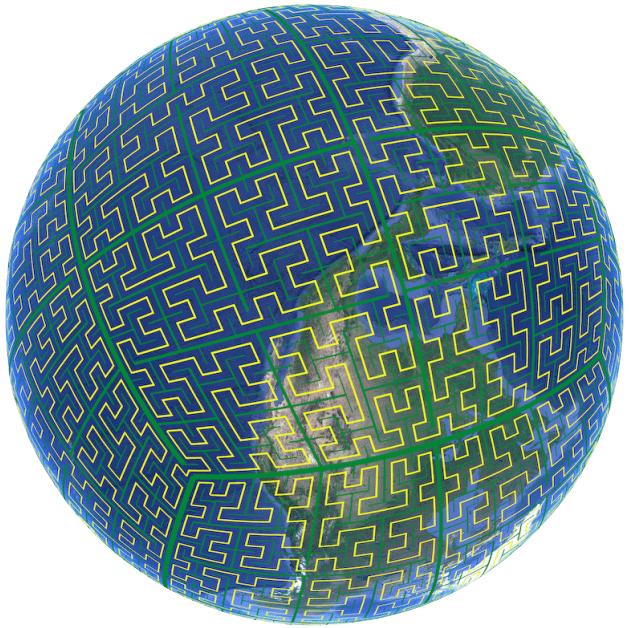
Moore Kurven

- Eliakim Hastings Moore (1862 – 1932)
- raumfüllend für Grad $n \to \infty$
- Seitenlänge: 2^n
- Anzahl Punkte : 4^n



Anwendungen

- bijektive Mappings zwischen $\mathbb{R}^1 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$ (auch für höhere Dimensionen)
- Dithering in der Bildverarbeitung
- Anordnung von Daten im Speicher
- spatial indexing (Google’s S2 library)



Problemstellung

Lösungsansatz

Performanz

Lösungsansatz

Berechnung eines einzelnen Punkts:

Idee:

1. Hilbert Kurve des Grads n-1 ausrechnen
2. entsprechenden Punkt verschieben:

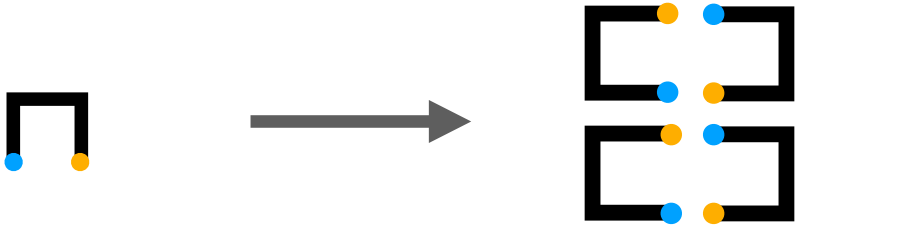
Lösungsansatz

Berechnung eines einzelnen Punkts:

Idee:

1. Hilbert Kurve des Grads n-1 ausrechnen
2. **entsprechenden Punkt verschieben:**

- Startpunkt
- Endpunkt



Hilbert Kurve Grad n-1 Moore Kurve Grad n

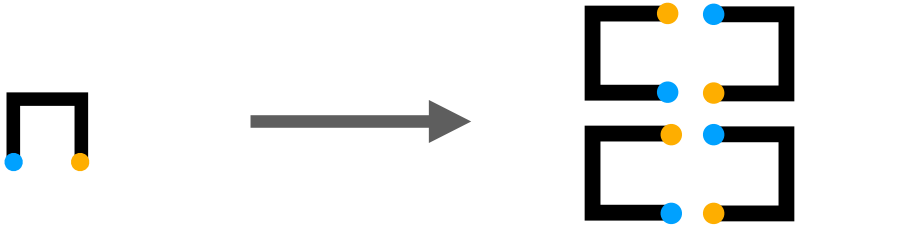
Lösungsansatz

Berechnung eines einzelnen Punkts:

Idee:

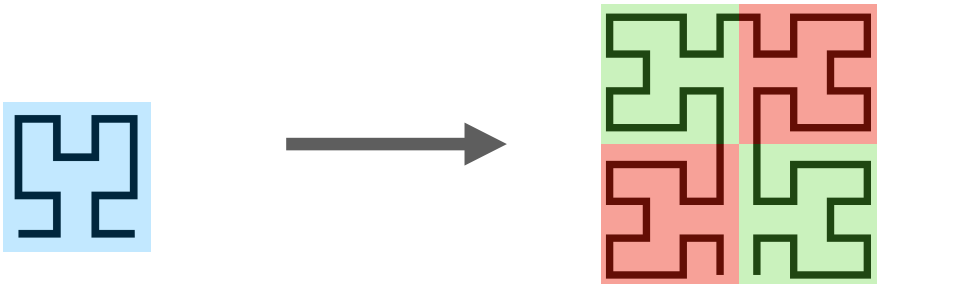
1. Hilbert Kurve des Grads n-1 ausrechnen
2. **entsprechenden Punkt verschieben:**

- Startpunkt
- Endpunkt



Hilbert Kurve Grad n-1 Moore Kurve Grad n

Beispiel:



Hilbert Kurve Grad 2 Moore Kurve Grad 3

Lösungsansatz

Berechnung eines einzelnen Punkts:

Idee:

1. Hilbert Kurve des Grads n-1 ausrechnen:

2. entsprechenden Punkt verschieben ✅

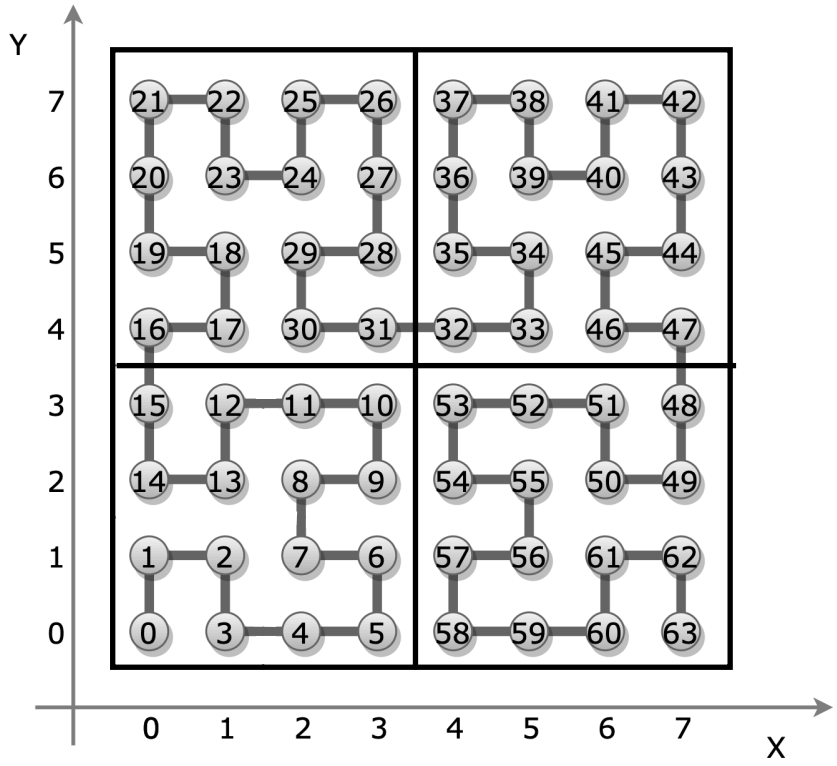
Lösungsansatz

Berechnung eines einzelnen Punkts:

Idee:

1. Hilbert Kurve des Grads n-1 ausrechnen:

2. entsprechenden Punkt verschieben ✅



Hilbert Kurve Grad 3

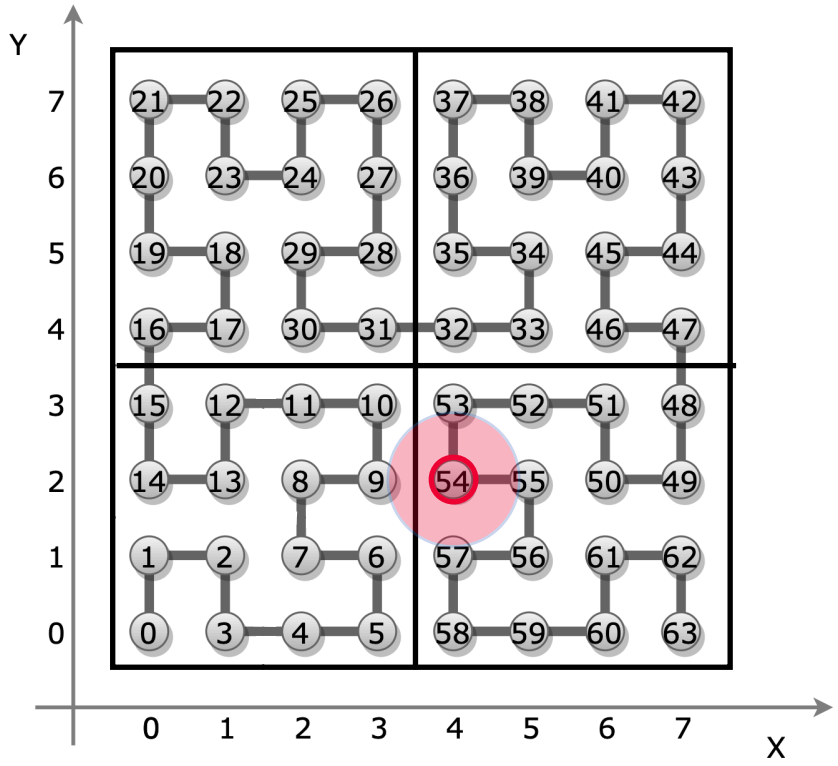
Lösungsansatz

Berechnung eines einzelnen Punkts:

Idee:

1. Hilbert Kurve des Grads n-1 ausrechnen

2. entsprechenden Punkt verschieben ✅

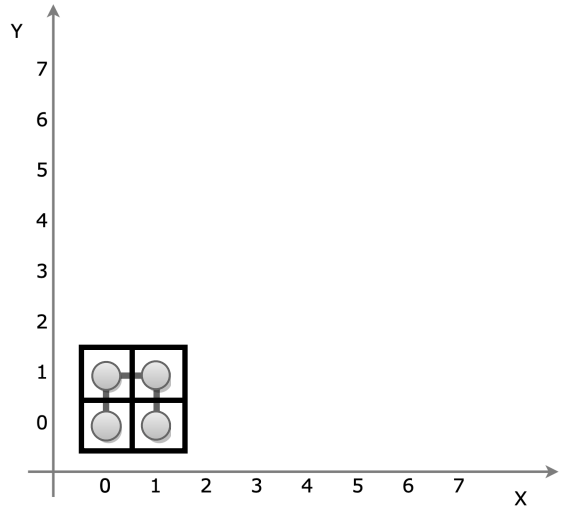


$54_{10} = 110110_2$

Hilbert Kurve Grad 3

Lösungsansatz

$54_{10} = 110110_2$

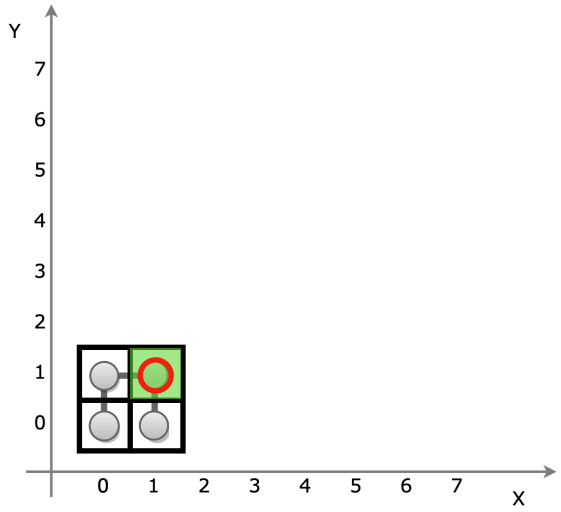


110110_2

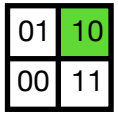
01	10
00	11

Lösungsansatz

$54_{10} = 110110_2$

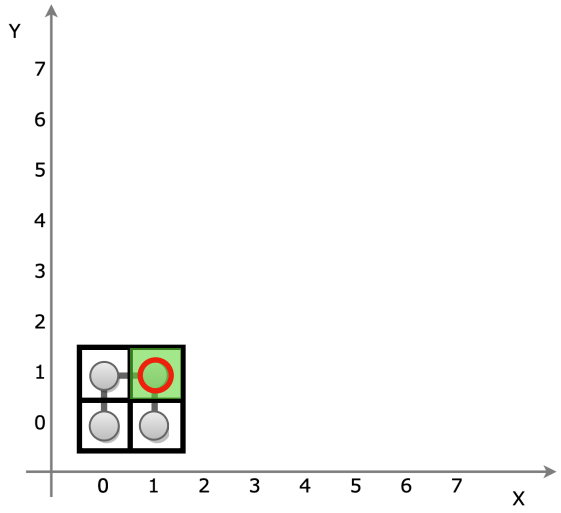


110110_2



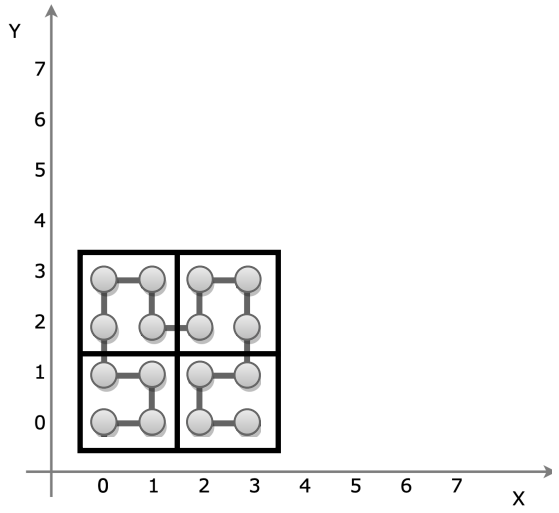
Lösungsansatz

$54_{10} = 110110_2$



$1101\mathbf{10}_2$

01	10
00	11

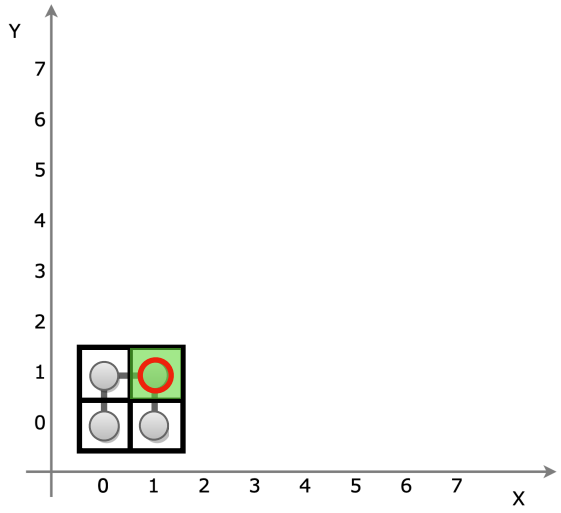


110110_2

01	10
00	11

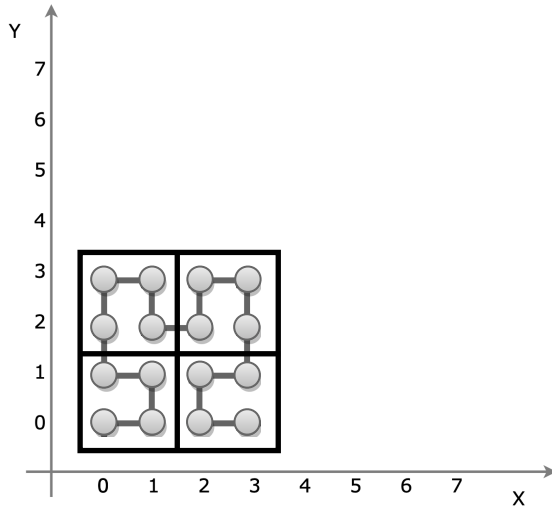
Lösungsansatz

$54_{10} = 110110_2$



110110_2

01	10
00	11

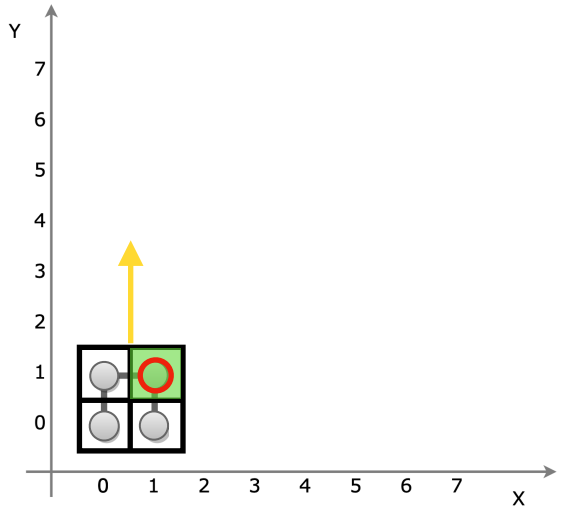


110110_2

01	10
00	11

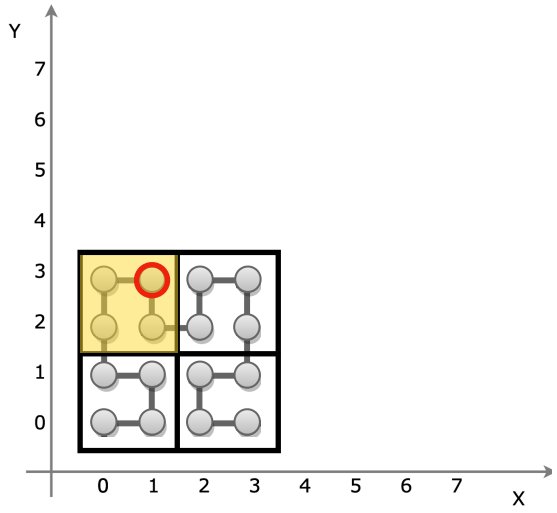
Lösungsansatz

$54_{10} = 110110_2$



110110_2

01	10
00	11

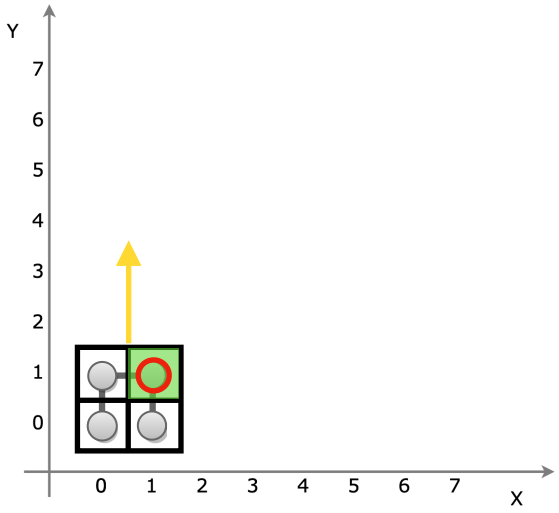


110110_2

01	10
00	11

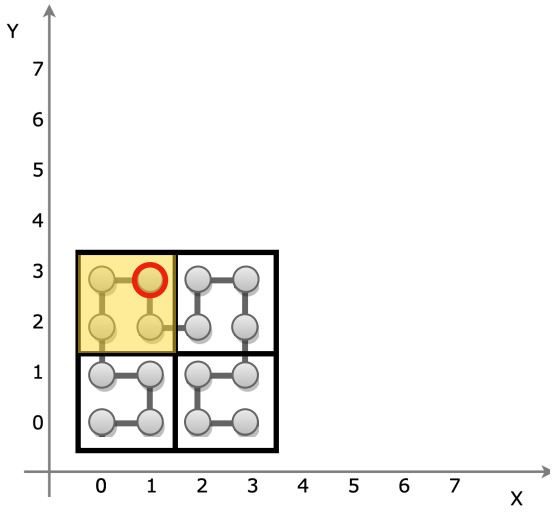
Lösungsansatz

$54_{10} = 110110_2$



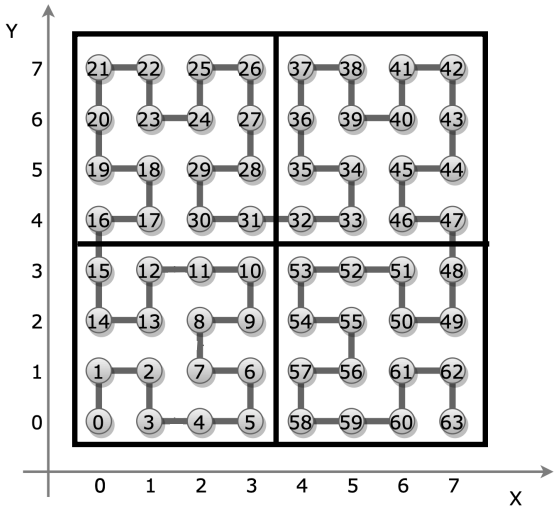
110110_2

01	10
00	11



110110_2

01	10
00	11

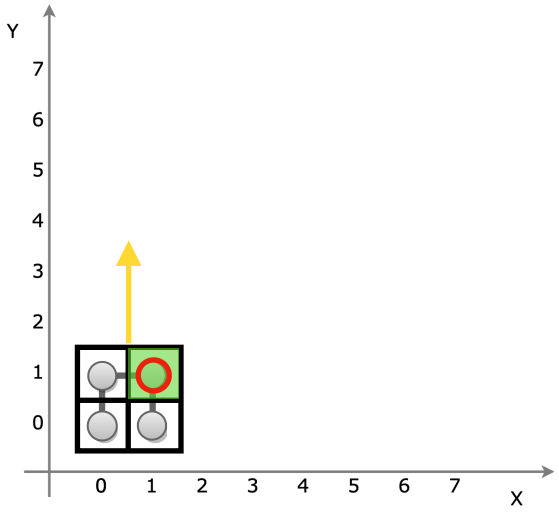


110110_2

01	10
00	11

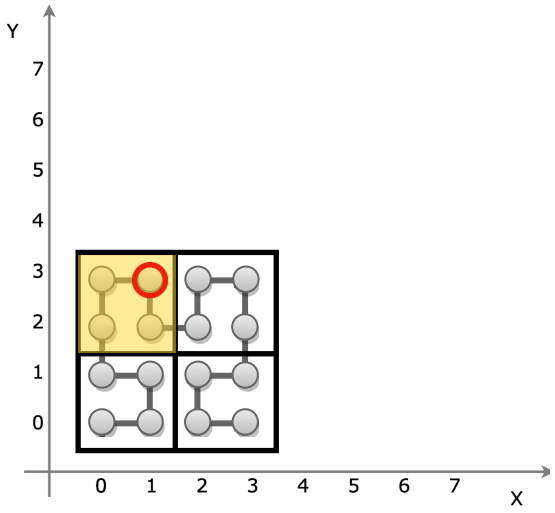
Lösungsansatz

$54_{10} = 110110_2$



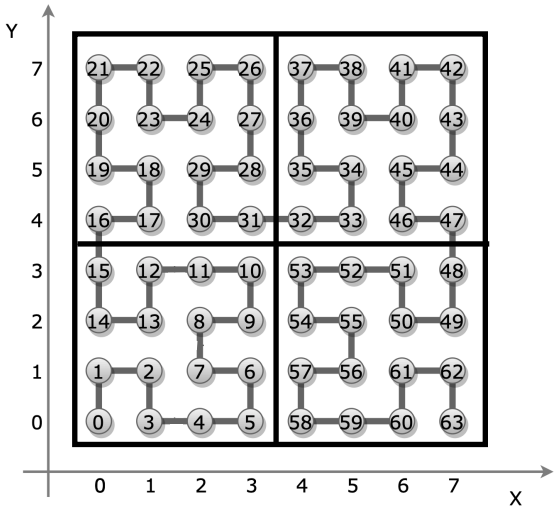
110110_2

01	10
00	11



110110_2

01	10
00	11

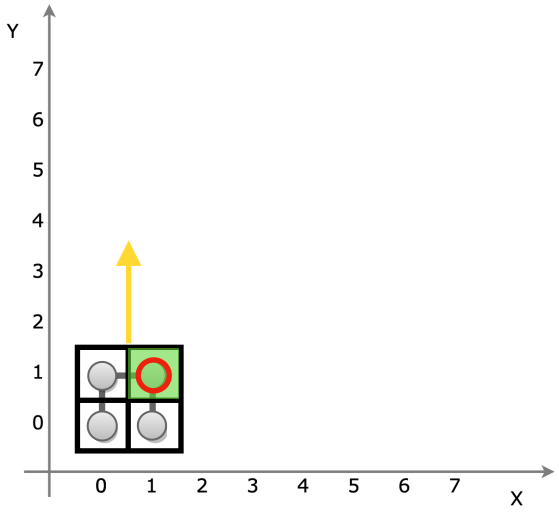


110110_2

01	10
00	11

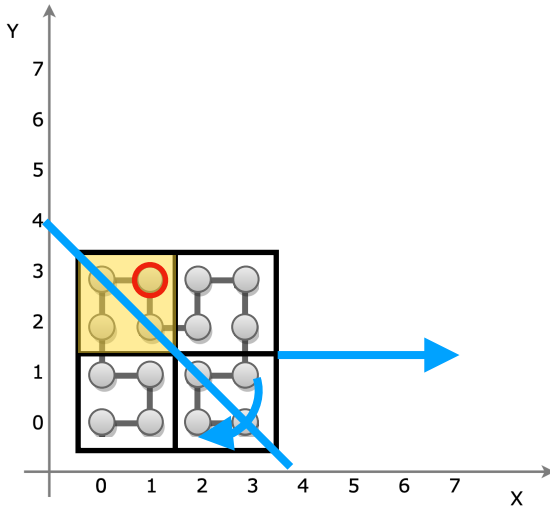
Lösungsansatz

$54_{10} = 110110_2$



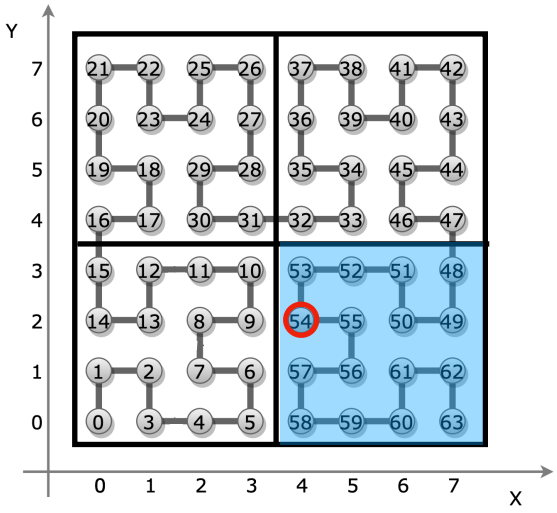
110110_2

01	10
00	11



110110_2

01	10
00	11



110110_2

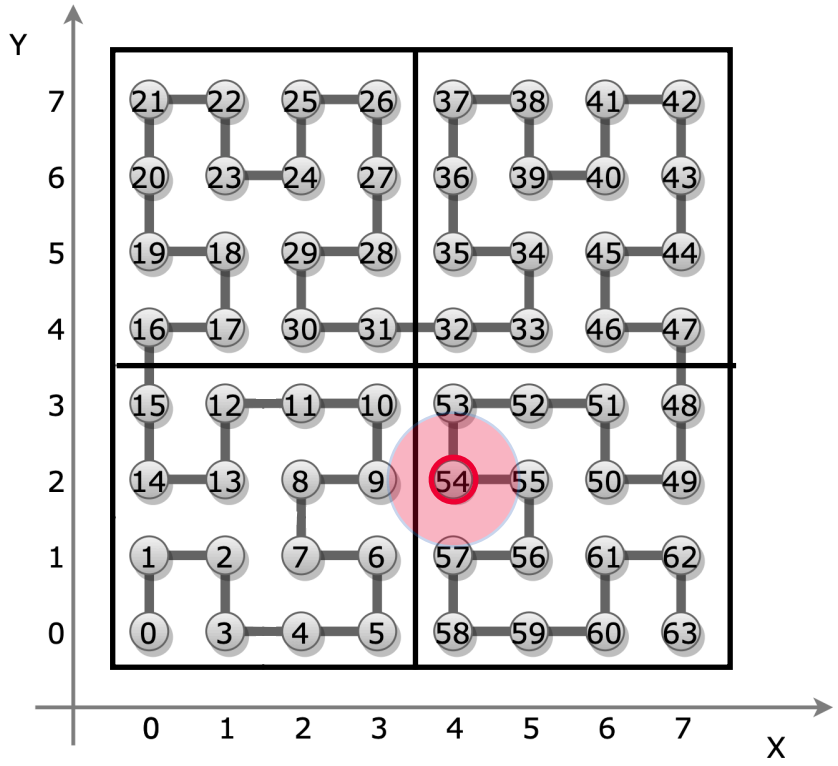
01	10
00	11

Lösungsansatz

Berechnung eines einzelnen Punkts:

Idee:

1. Hilbert Kurve des Grads n-1 ausrechnen ✓
2. entsprechenden Punkt verschieben ✓



$54_{10} = 110110_2$

Hilbert Kurve Grad 3

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Naiver Ansatz:

Wiederhole obigen Algorithmus für jeden Punkt

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Naiver Ansatz:

Wiederhole obigen Algorithmus für jeden Punkt

Nachteile:

- Neuberechnung für jeden der 4^n Punkte
- keine Wiederverwendung alter Rechenergebnisse
- Aufwand hängt von Grad der Kurve ab

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Naiver Ansatz:

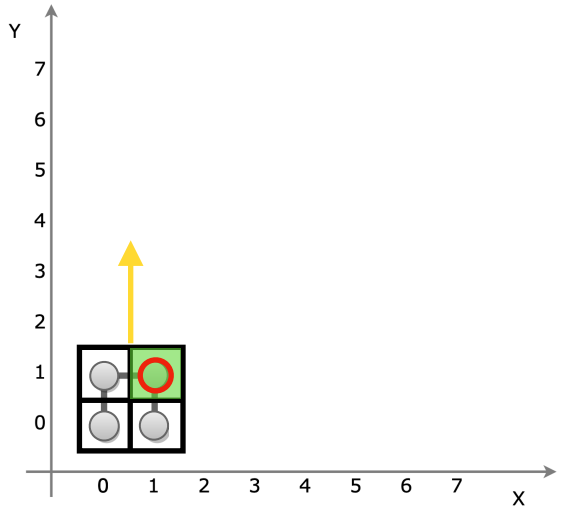
Wiederhole obigen Algorithmus für jeden Punkt

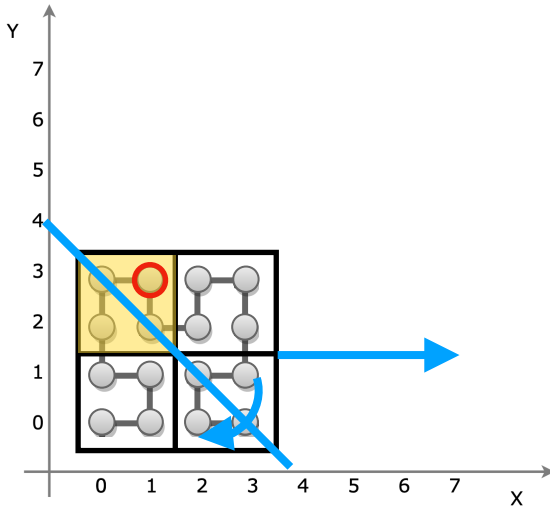
Nachteile:

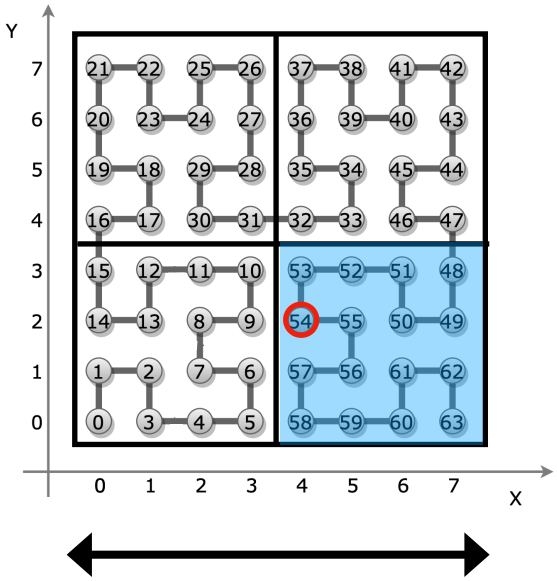
- Neuberechnung für jeden der 4^n Punkte
- keine Wiederverwendung alter Rechenergebnisse
- Aufwand hängt von Grad der Kurve ab:

Aufwand pro Punkt:

Lösungsansatz







Seitenlänge = 2^n

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Naiver Ansatz:

Wiederhole obigen Algorithmus für jeden Punkt

Nachteile:

- Neuberechnung für jeden der 4^n Punkte
- keine Wiederverwendung alter Rechenergebnisse
- Aufwand hängt von Grad der Kurve ab:

Aufwand pro Punkt:

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Naiver Ansatz:

Wiederhole obigen Algorithmus für jeden Punkt

Nachteile:

- Neuberechnung für jeden der 4^n Punkte
- keine Wiederverwendung alter Rechenergebnisse
- Aufwand hängt von Grad der Kurve ab:

Aufwand pro Punkt: $log_2(2^n) \cdot c = n \cdot c$

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Naiver Ansatz:

Wiederhole obigen Algorithmus für jeden Punkt

Nachteile:

- Neuberechnung für jeden der 4^n Punkte
- keine Wiederverwendung alter Rechenergebnisse
- Aufwand hängt von Grad der Kurve ab:

Aufwand pro Punkt: $log_2(2^n) \cdot c = n \cdot c$

$\Rightarrow$ steigt linear mit Grad der Kurve

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz:

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz:

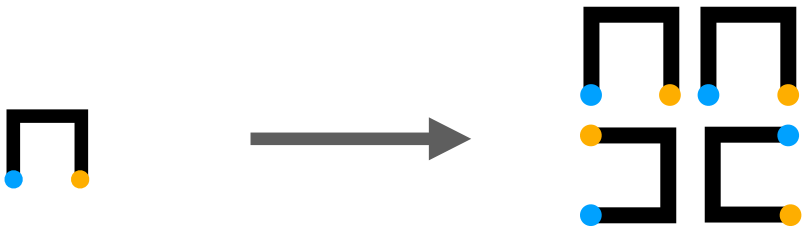
Idee: verwende bereits errechnete Zwischenergebnisse, baue Hilbert Kurve iterativ auf, wie Hilbert $\longrightarrow$ Moore

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz:

- Startpunkt
- Endpunkt



Hilbert Kurve Grad n-1

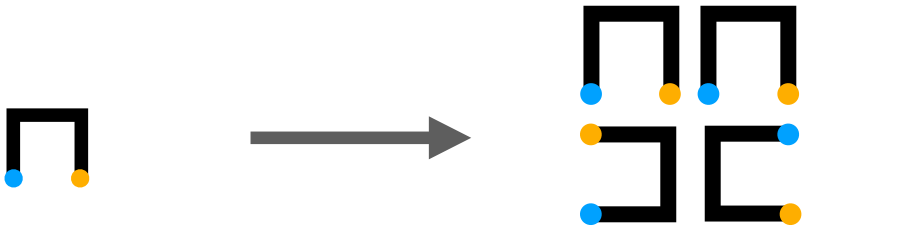
Hilbert Kurve Grad n

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz:

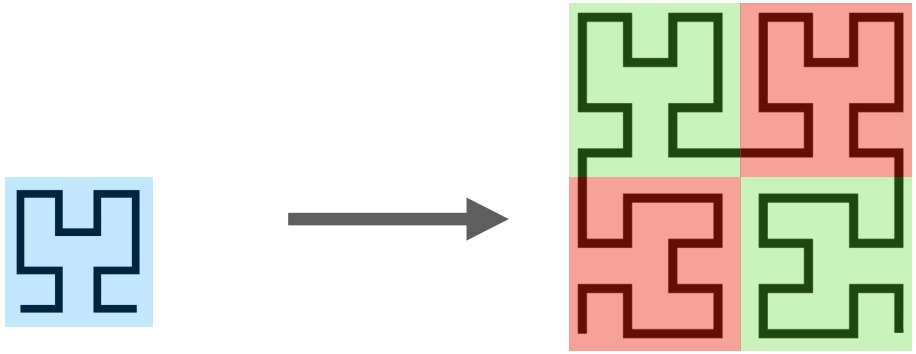
- Startpunkt
- Endpunkt



Hilbert Kurve Grad n-1

Hilbert Kurve Grad n

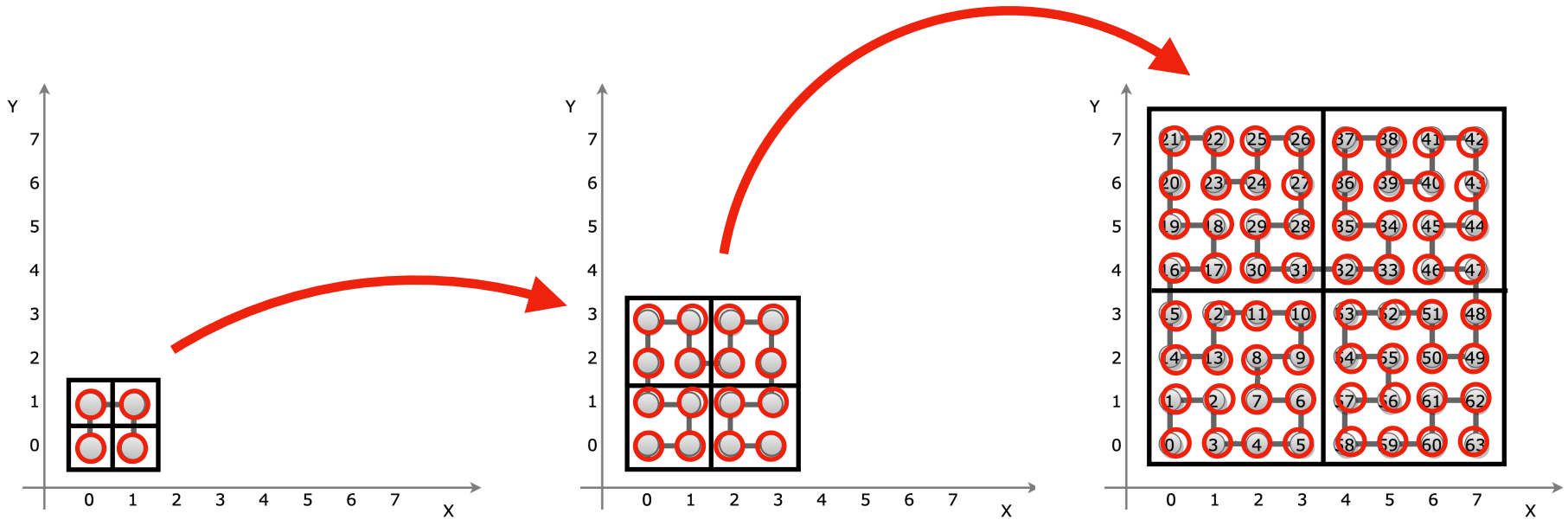
Beispiel:



Hilbert Kurve Grad 2

Hilbert Kurve Grad 3

Lösungsansatz



Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz:

Idee: verwende bereits errechnete Zwischenergebnisse, baue Hilbert Kurve iterativ auf, wie Hilbert $\longrightarrow$ Moore

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz:

Idee: verwende bereits errechnete Zwischenergebnisse, baue Hilbert Kurve iterativ auf, wie Hilbert $\longrightarrow$ Moore

Nachteile:

- kein einzelner Punkt an gegebenem Index berechenbar
- mehr Speicherzugriffe

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz:

Idee: verwende bereits errechnete Zwischenergebnisse, baue Hilbert Kurve iterativ auf, wie Hilbert $\longrightarrow$ Moore

Nachteile:

- kein einzelner Punkt an gegebenem Index berechenbar
- mehr Speicherzugriffe

Vorteil:

- durchschnittlich konstanter Rechenaufwand pro Punkt

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz: konstanter Rechenaufwand pro Punkt

$$I : Op(1) = c$$

$$II : Op(n) = Op(n-1) + 4^{n-1} \cdot c$$

$$= Op(n-2) + 4^{n-2} \cdot c + 4^{n-1} \cdot c$$

$$= c \cdot (4^0 + \ldots + 4^{n-2} + 4^{n-1})$$

$$= c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 4^i$$

$$= c \cdot \frac{1}{3}(4^n - 1)$$

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz: avg konstanter Rechenaufwand pro Punkt

$$I : Op(1) = c$$

$$\begin{aligned} II : Op(n) &= Op(n-1) + 4^{n-1} \cdot c \\ &= Op(n-2) + 4^{n-2} \cdot c + 4^{n-1} \cdot c \\ &= c \cdot (4^0 + \ldots + 4^{n-2} + 4^{n-1}) \\ &= c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 4^i \\ &= c \cdot \frac{1}{3}(4^n - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} avg\_Cost(n) = \frac{Op(n)}{4^n} &= c \cdot \left(\frac{4^n}{3 \cdot 4^n} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} \right) \\ &= \frac{1}{3}c - c \cdot \frac{1}{3 \cdot 4^n} \end{aligned}$$

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz: konstanter Rechenaufwand pro Punkt

$$I : Op(1) = c$$

$$II : Op(n) = Op(n-1) + 4^{n-1} \cdot c$$

$$= Op(n-2) + 4^{n-2} \cdot c + 4^{n-1} \cdot c$$

$$= c \cdot (4^0 + \ldots + 4^{n-2} + 4^{n-1})$$

$$= c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 4^i$$

$$= c \cdot \frac{1}{3}(4^n - 1)$$

$$avg\_Cost(n) = \frac{Op(n)}{4^n} = c \cdot \left(\frac{4^n}{3 \cdot 4^n} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} \right)$$

$$= \frac{1}{3}c - c \cdot \frac{1}{3 \cdot 4^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} avg\_Cost(n) = \lim_{n \to \infty} \frac{Op(n)}{4^n} = \frac{1}{3}c$$

Lösungsansatz

Berechnung der gesamten Kurve:

Dynamischer Ansatz:

Idee: verwende bereits errechnete Zwischenergebnisse, baue Hilbert Kurve iterativ auf, wie Hilbert $\longrightarrow$ Moore

Nachteile:

- kein einzelner Punkt an gegebenem Index berechenbar
- mehr Speicherzugriffe

Vorteil:

- konstanter Rechenaufwand pro Punkt

Problemstellung

Lösungsansatz

Performanz

Lösungsansatz

a) Berechnung eines einzelnen Punktes

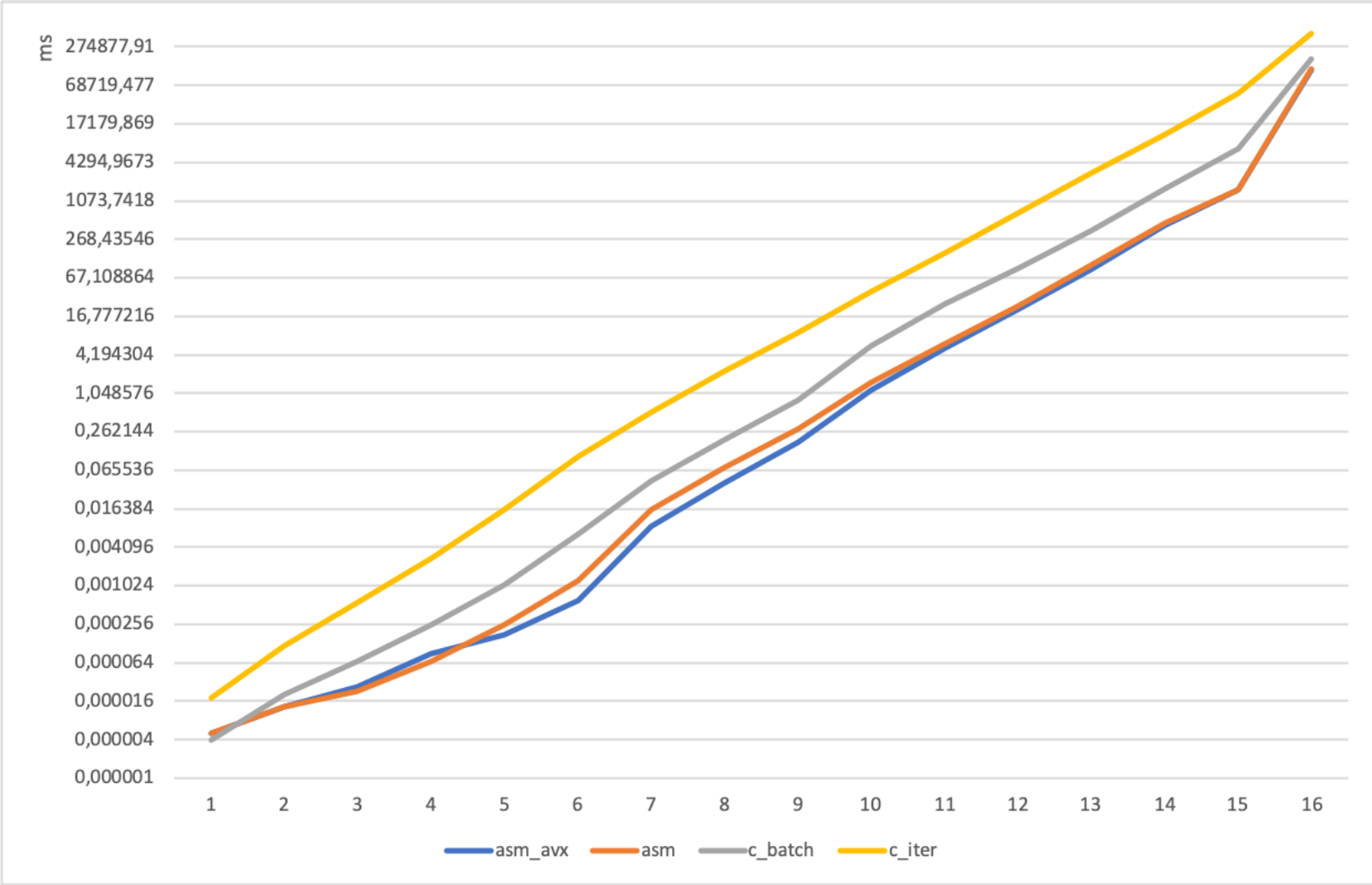
   -

Problemstellung

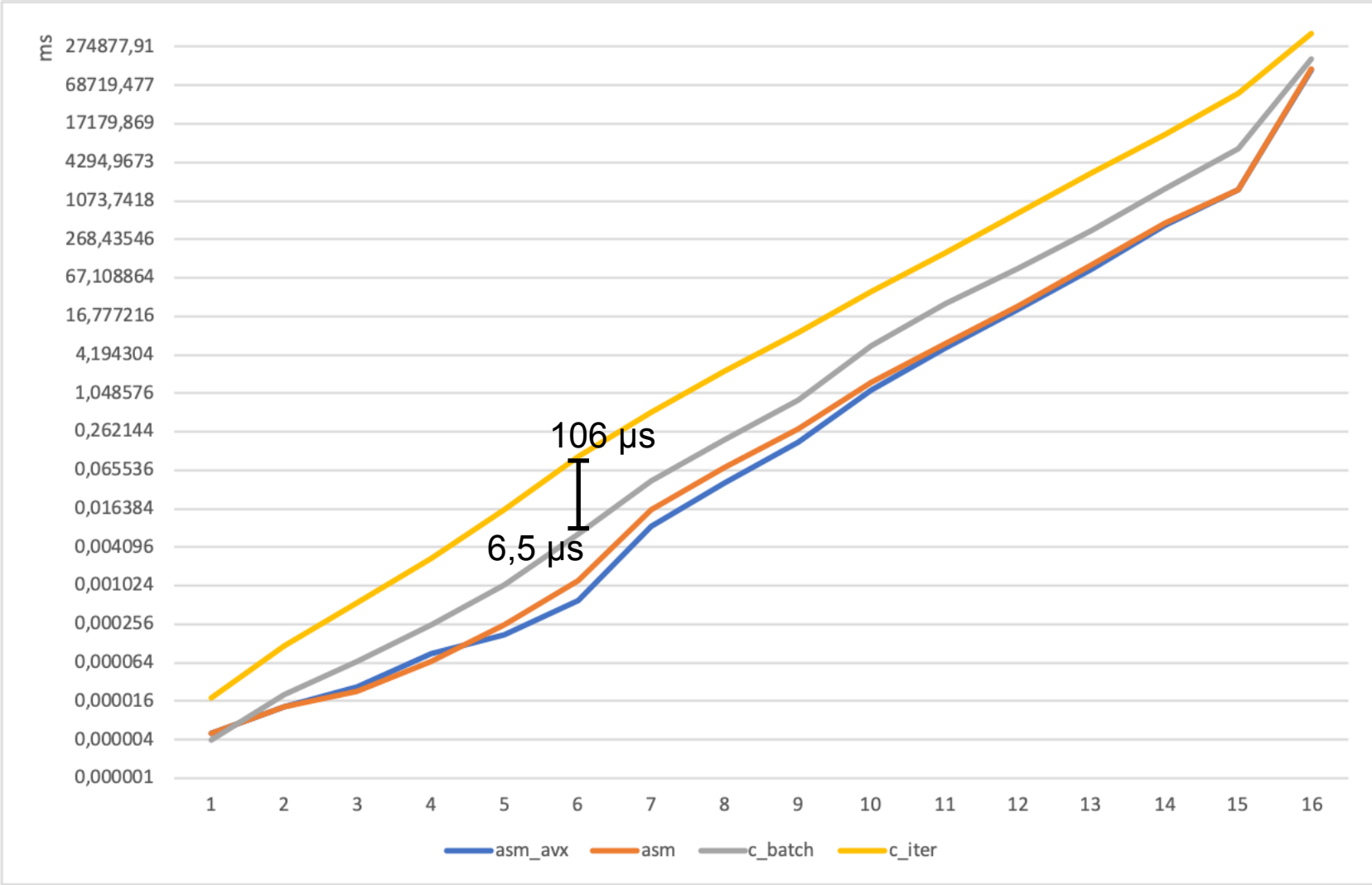
Lösungsansatz

Performanz

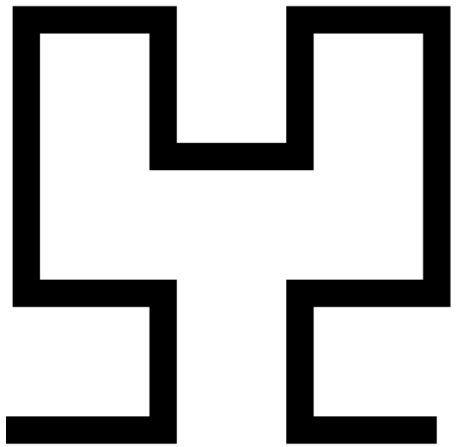
Performanz


ms
274877,91
68719,477
17179,869
4294,9673
1073,7418
268,43546
67,108864
16,777216
4,194304
1,048576
0,262144
0,065536
0,016384
0,004096
0,001024
0,000256
0,000064
0,000016
0,000004
0,000001
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
asm_avx
asm
c_batch
c_iter

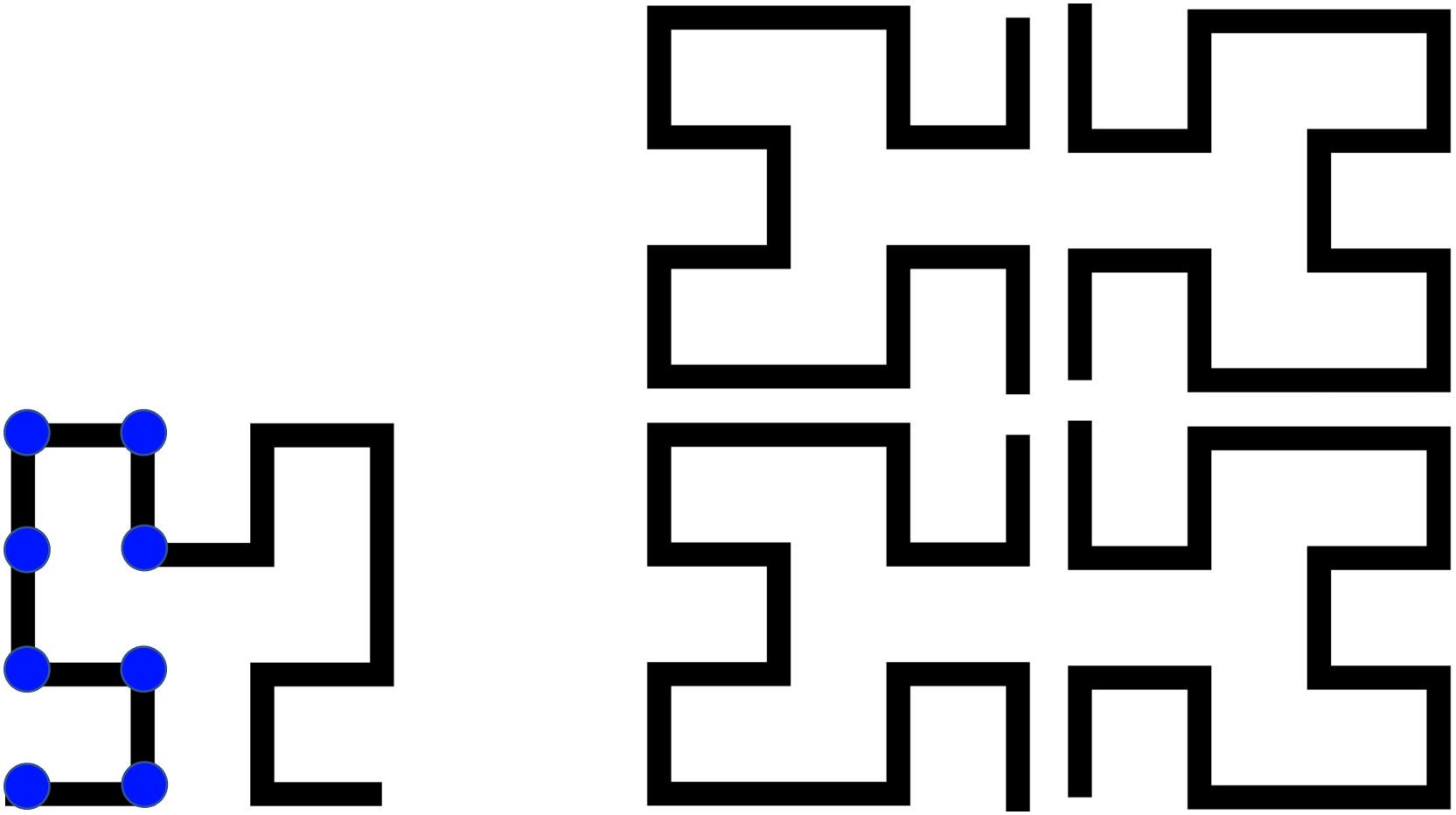
Performanz


ms
274877,91
68719,477
17179,869
4294,9673
1073,7418
268,43546
67,108864
16,777216
4,194304
1,048576
0,262144
0,065536
0,016384
0,004096
0,001024
0,000256
0,000064
0,000016
0,000004
0,000001
106 µs
6,5 µs
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
asm_avx
asm
c_batch
c_iter

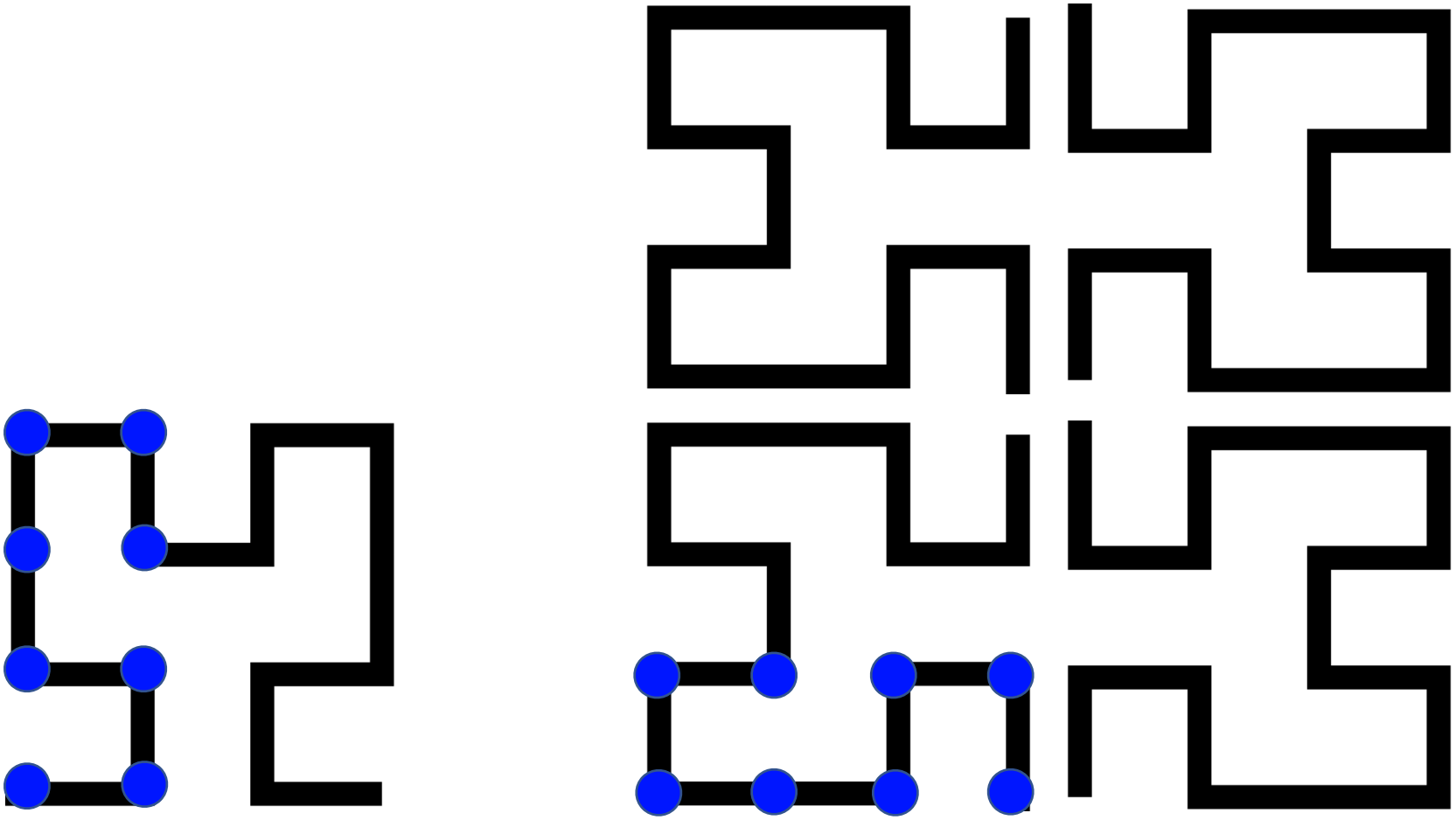
Performanz / SIMD



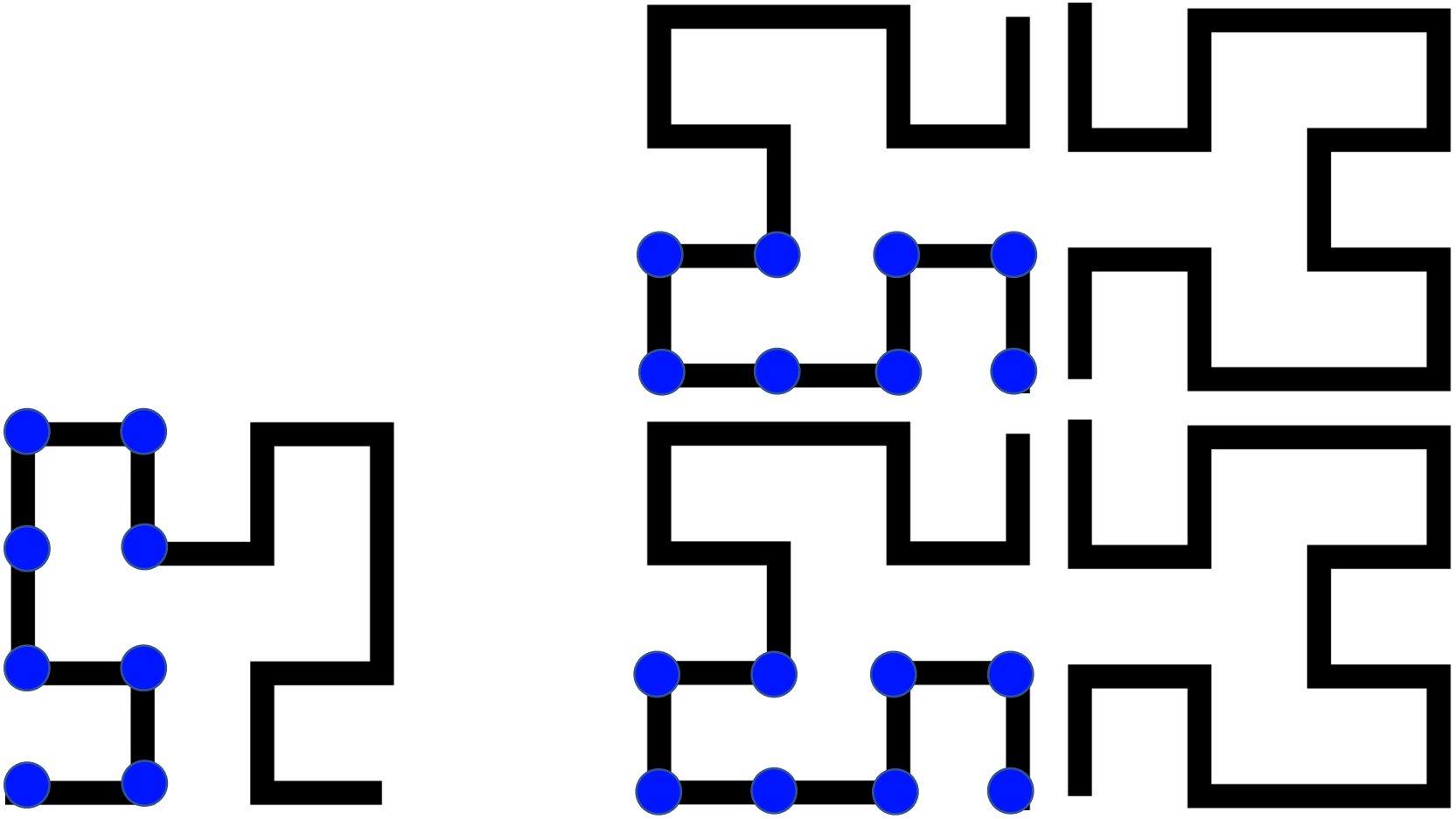
Performanz / SIMD



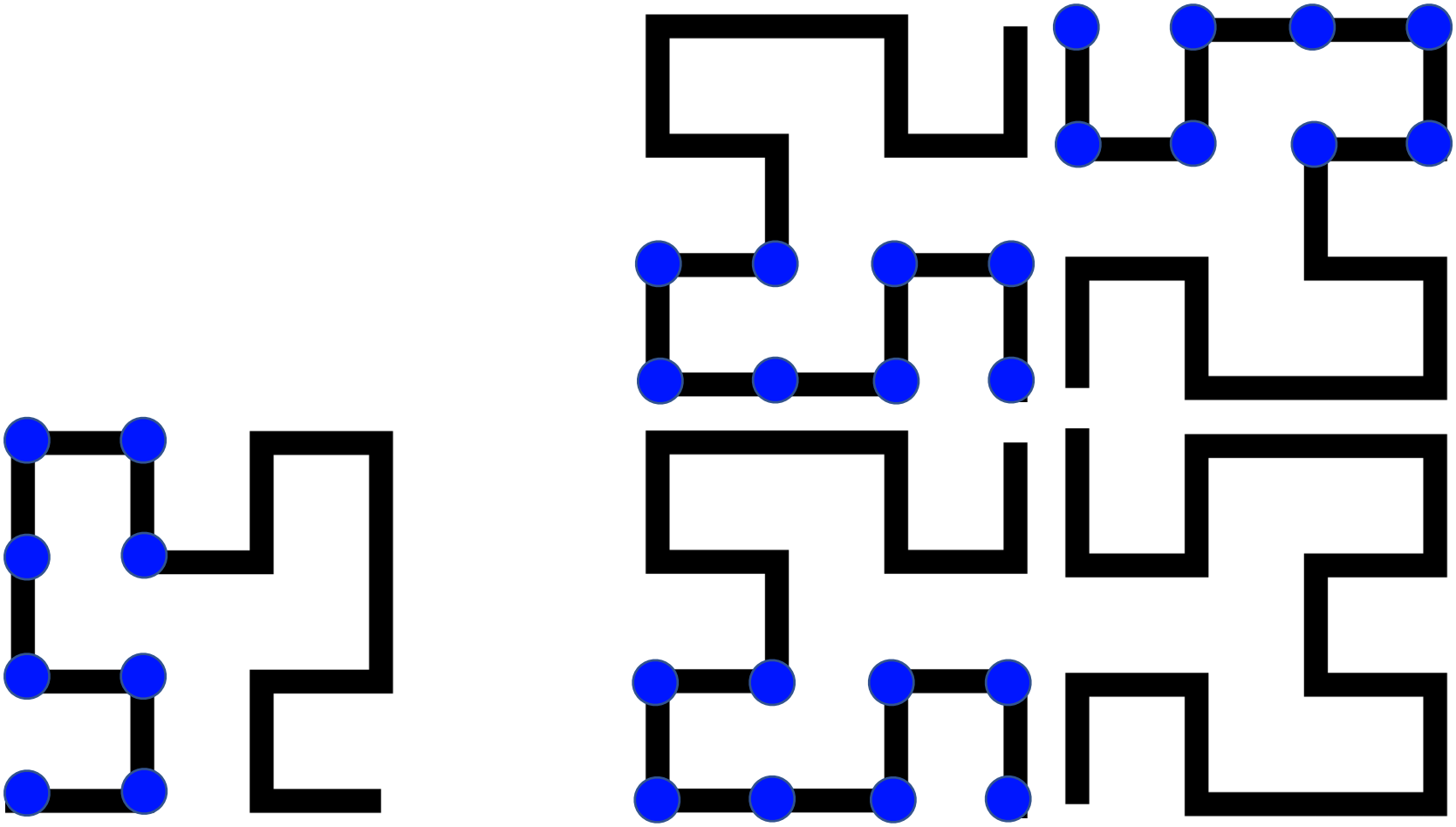
Performanz / SIMD



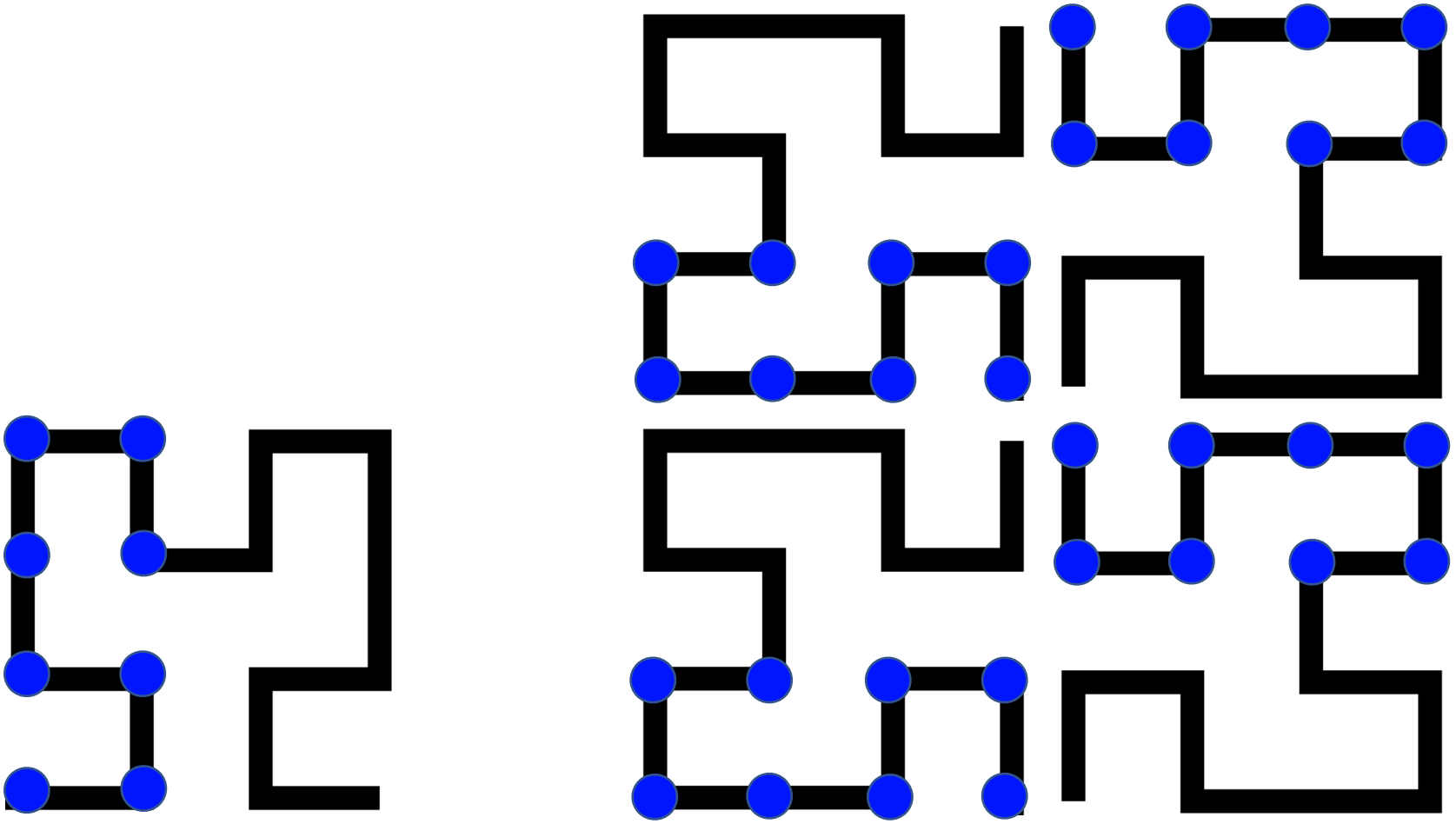
Performanz / SIMD



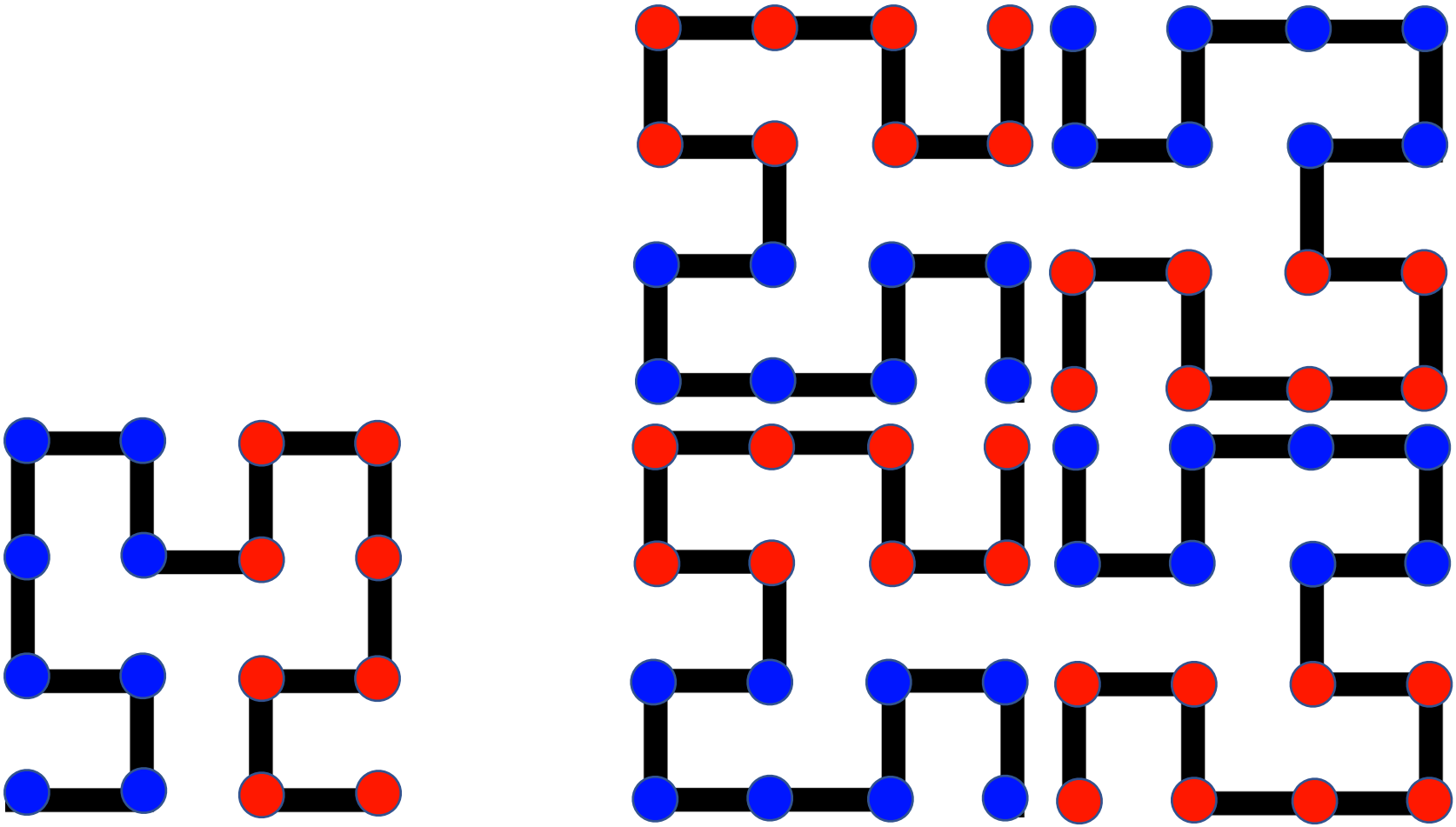
Performanz / SIMD



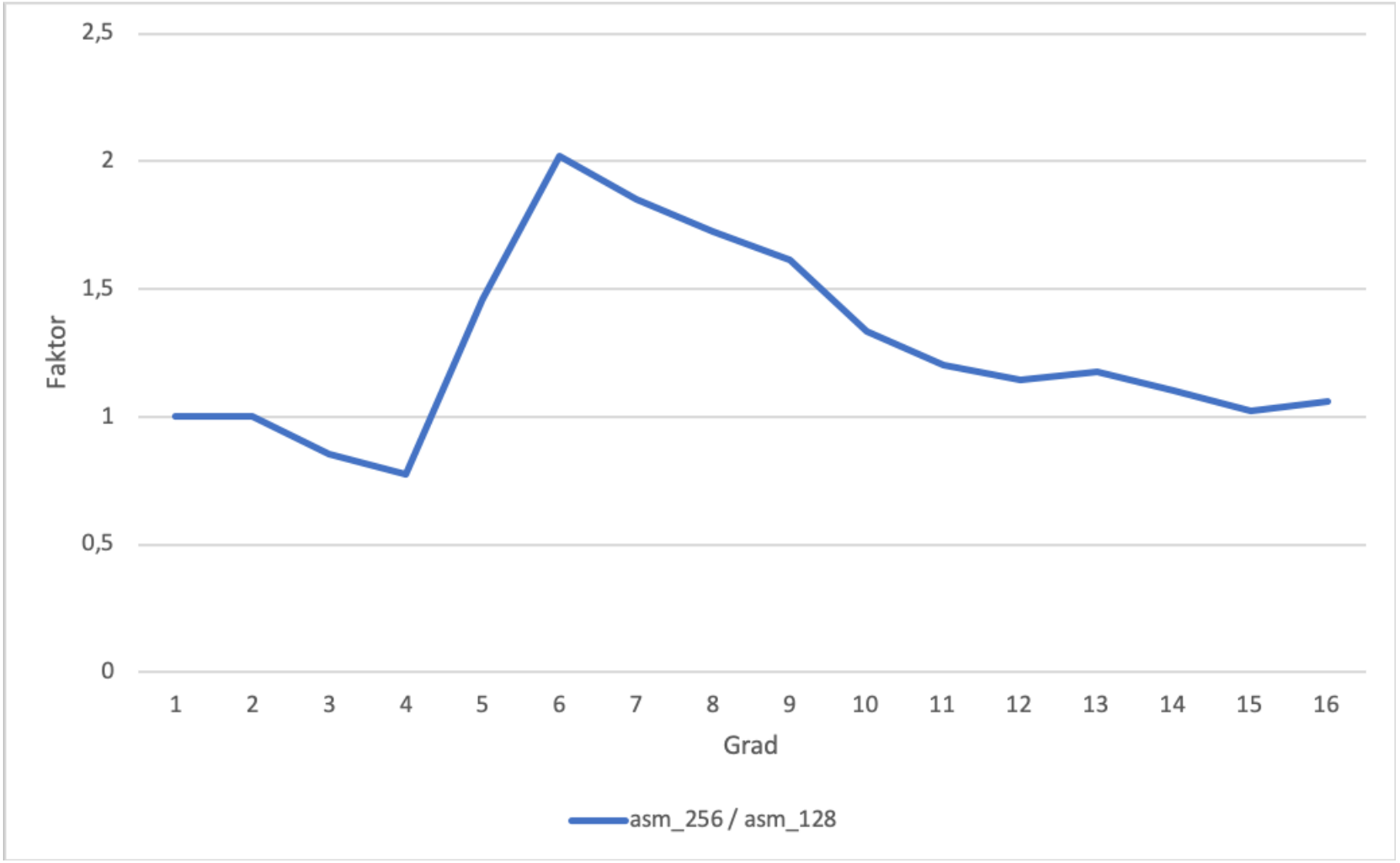
Performanz / SIMD



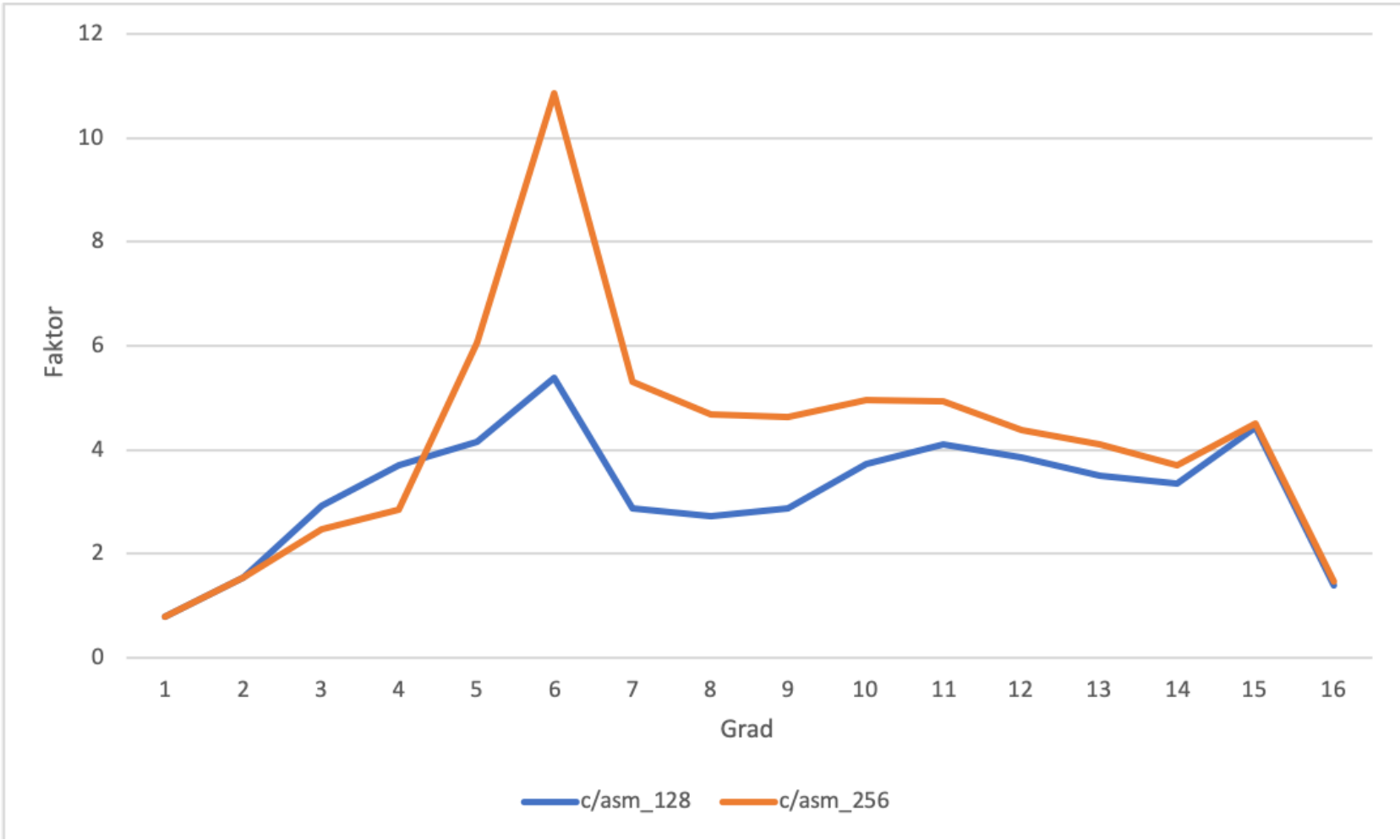
Performanz / SIMD



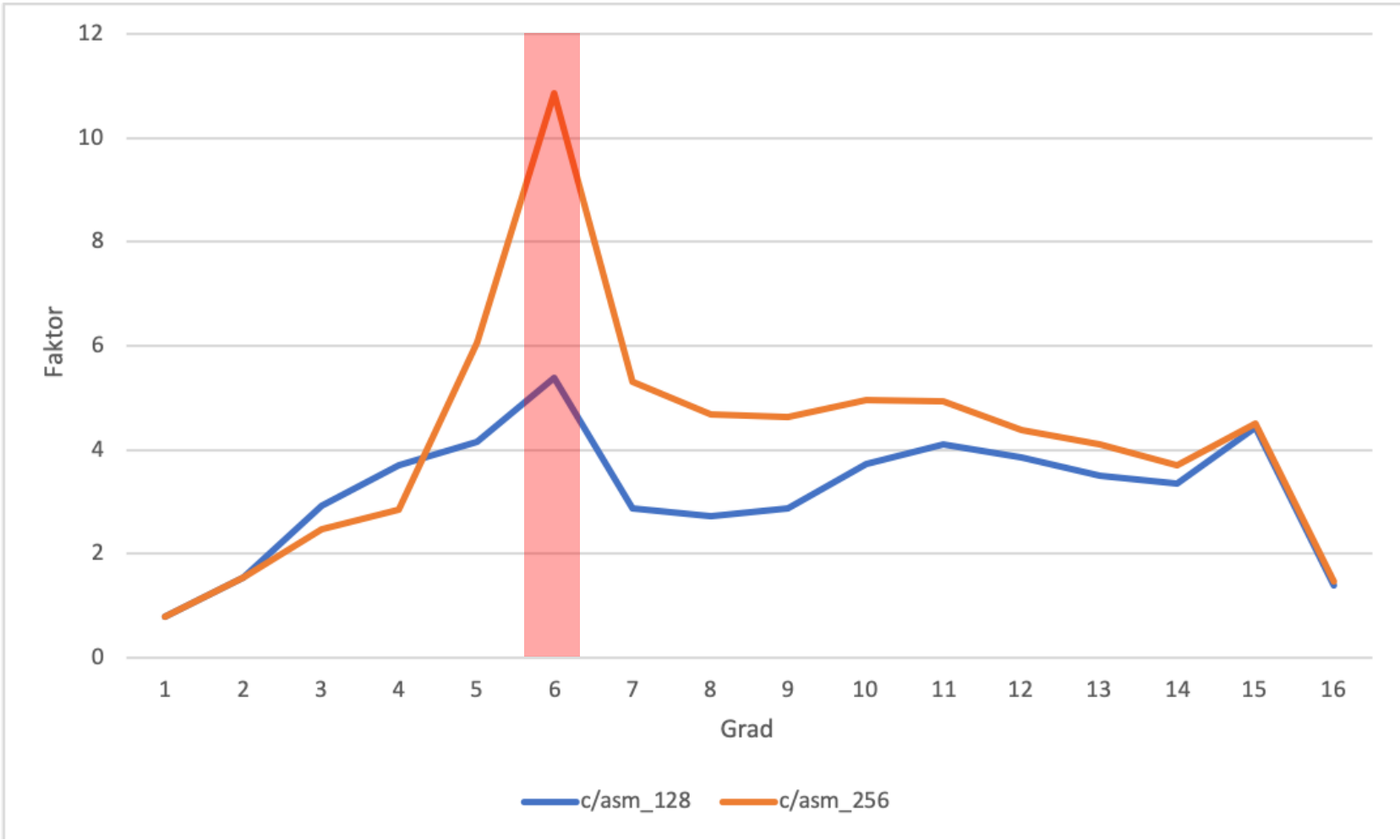
Performanz / SIMD



Performanz / SIMD



Performanz / Cache



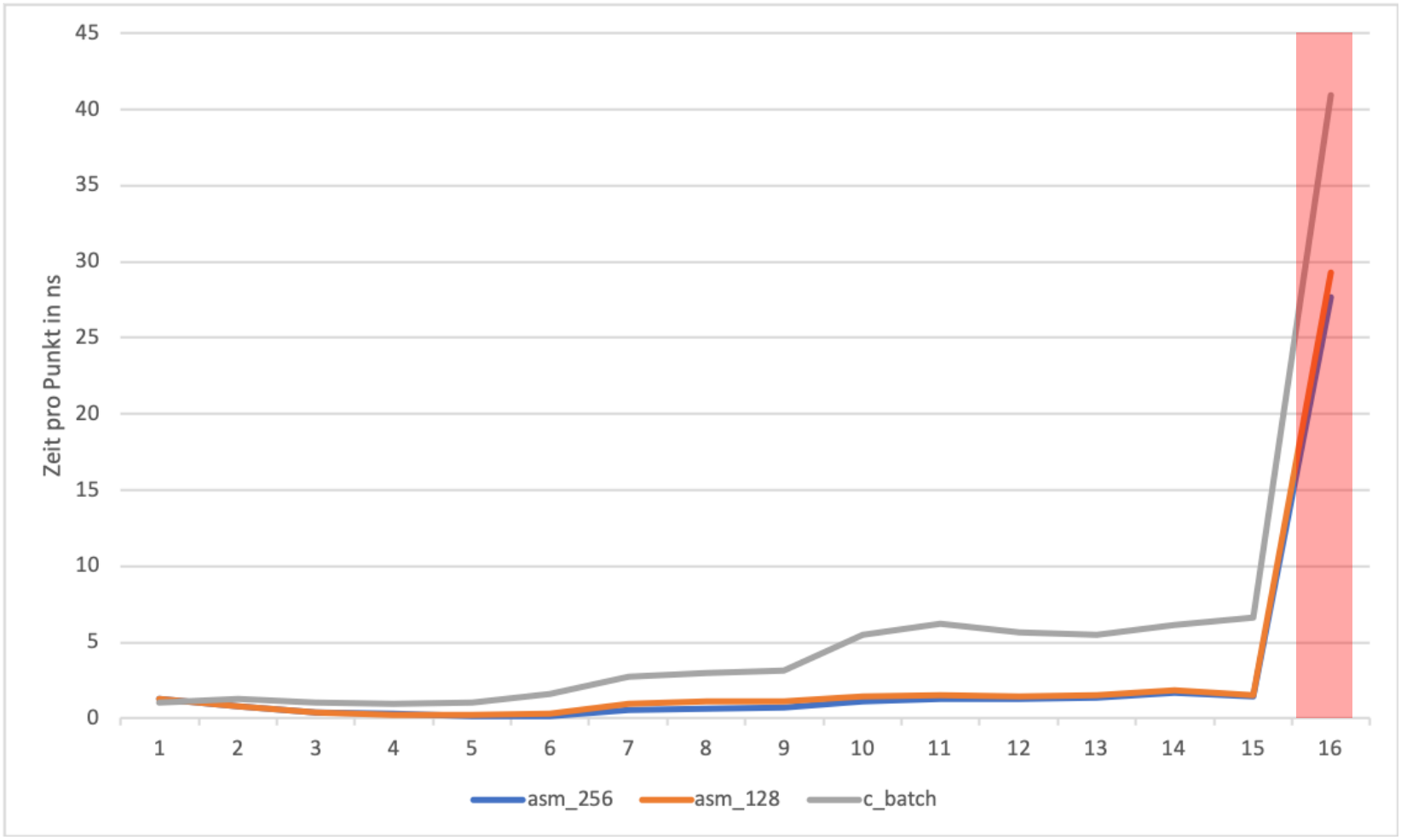
Performanz / Cache

- Performance-Spike bei Grad 6
- Annahme: Programm bis Grad 6 sehr Cache-freundlich
  - mit *perf*-Tool sehr wenige L1-Misses gemessen
  - L1-Cache auf Maschine: 32 KiB
  - Moore Kurve mit Grad 6 benötigt genau 32 KiB an Speicher

Performanz / Cache

- Performance-Spike bei Grad 6
- Annahme: Programm bis Grad 6 sehr Cache-freundlich
  - mit *perf*-Tool sehr wenige L1-Misses gemessen
  - L1-Cache auf Maschine: 32 KiB
  - Moore Kurve mit Grad 6 benötigt genau 32 KiB an Speicher
- Effizienzeinbruch bei Grad 7:
  - deutlich mehr L1-Cache-Misses
  - Speicherzugriffe haben nun großen Einfluss auf Laufzeit

Performanz / RAM-Größe



Performanz / RAM-Größe

- enormer Performance Einbruch bei Grad 16
- Moore Kurve (Grad 16) benötigt *32 GiB* an Speicher
- RAM auf Testmaschine nur *16 GiB*
- *s*tarke Zunahme an **Pagefaults**

Zusammenfassung

- Zwei Algorithmen:
  - Punkt für Punkt
  - Dynamischer Ansatz
- Weitere Optimierungsmöglichkeiten
  - dynamische Anpassung der *Int*-Breite
  - evtl. mehr Parallelisierung durch *AVX-512*
  - Experimentieren mit anderen Datenstrukturen (*x[i]* nah im Speicher an *y[i]*)

Danke