

# Documentation de certaines notions des mathématiques scientifiques

## 1. Vecteur

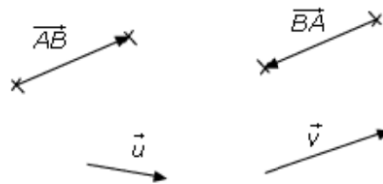
Un vecteur est un objet géométrique caractérisé par une direction, un sens, et une longueur. Il se représente par une flèche.

Deux points A et B suffisent à définir un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :

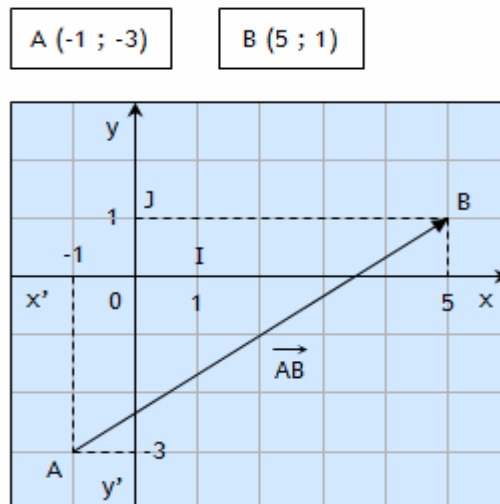
- Sa direction est celle de la droite (AB).
- Son sens est de A vers B.
- Sa longueur est la distance de A à B.

On peut aussi définir le vecteur  $\overrightarrow{BA}$ , de même direction et de même longueur mais dont le sens est de B vers A.

Si le vecteur n'est pas défini à partir de deux points particuliers, on le note souvent  $\vec{u}$ , ou  $\vec{v}$  etc.



Coordonnées d'un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :



$\overrightarrow{AB}$	$\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix}$
-----------------------	--

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$
---

$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} 5 - (-1) = 6 \\ 1 - (-3) = 4 \end{vmatrix}$	$\overrightarrow{AB} = 6 \vec{i} + 4 \vec{j}$
--	---

## 2. Matrice

Une matrice  $n \times m$  est un tableau de nombres à  $n$  lignes et  $m$  colonnes :  
 $n$  et  $m$  sont les dimensions de la matrice.

- Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes
- Une matrice ligne est une matrice dont le nombre de lignes est égal à 1
- Une matrice colonne est une matrice dont le nombre de colonnes est égal à 1

Exemples :

- La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  est une matrice carrée (de dimension  $2 \times 2$  - ou on peut dire, plus simplement, de dimension 2).
- La matrice  $B = (1 \quad 2 \quad 0,5)$  est une matrice ligne (de dimension  $1 \times 3$ ).
- La matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  est une matrice colonne (de dimension  $4 \times 1$ ).

## 3. Probabilité, loi de probabilité (deux exemples)

Les probabilités sont la branche des mathématiques qui calcule la probabilité d'un événement, c'est-à-dire la fréquence d'un événement par rapport à l'ensemble des cas possibles.

Cette branche des mathématiques est née des jeux du hasard, plus précisément du désir de prévoir l'imprévisible ou de quantifier l'incertain. Il faut avant tout préciser ce qu'elle n'est pas : elle ne permet pas de prédire le résultat d'une unique expérience.

Les lois de probabilité permettent de modéliser certaines situations de la vie réelle, avant d'aborder certaines lois de probabilité, il faut d'abord savoir ce qu'est une variable aléatoire.

Une variable aléatoire (réelle) est une fonction qui associe une valeur (réelle) à chaque issue possible pour une expérience aléatoire. La loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$ , donne la probabilité de chaque événement pour lequel la variable aléatoire est définie.

Deux exemples de lois de probabilité :

La loi de Bernoulli :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience dans laquelle il n'y a que deux issues : réussite ou échec. Pour définir la loi de Bernoulli, nous n'avons besoin que de la probabilité de réussite.

Un jeu de pile ou face fournit un exemple d'une loi de Bernoulli. Nous pouvons considérer pile comme une « réussite » et face comme un « échec » — ou inversement.

La loi uniforme :

Si toute issue a une probabilité égale d'arriver, la variable aléatoire associée suit une loi uniforme. Il faut distinguer entre la loi uniforme discrète et la loi uniforme continue. Le résultat du lancer d'un dé équilibré suit une loi uniforme discrète. Chacun des résultats a une probabilité de 1/6 d'arriver

#### 4. Variables indépendantes

Une variable indépendante est une variable dont la variation influence la valeur des variables dépendantes. La variable dépendante représente ce que l'on cherche à mesurer dans une expérience ou à évaluer dans une équation mathématique, alors que les variables indépendantes sont les éléments indispensables au calcul.

Dans une équation mathématique élémentaire, telle que :

$a = b/c$ , les variables indépendantes, b et c, déterminent la valeur de a.

Prenons un exemple simple :

Un enseignant souhaite comparer le nombre d'étudiants retardataires habillés en noir au nombre de ceux habillés en rose. Dans cette situation, la couleur du vêtement est la variable indépendante et la différence du nombre d'étudiants, classés par couleur de vêtement, est la variable dépendante.

#### 5. Espérance, variance et écart type

Si X est une variable muni d'une loi de probabilité p dont les différentes valeurs prises sont  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_k$  alors on peut définir une grandeur appelée "espérance", notée E telle que:

$$E(X) = x_1.p(X = x_1) + x_2.p(X = x_2) + x_3.p(X = x_3) + x_4.p(X = x_4) + \dots + x_k.p(X = x_k)$$

On peut également noter cette formule:

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i.p(X = x_i)$$

On simplifie souvent en remplaçant la notation  $p(X = x_i)$  par  $p_i$  ce qui donne:

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i.p_i$$

Si l'expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois alors la fréquence de chaque valeur obtenue tend à se rapprocher de plus en plus de la probabilité qui lui

est associée et dans cas la moyenne (qui peut s'exprimer  $\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i.f_i$ ) tend également à se rapprocher et à se confondre avec l'espérance.

On peut donc interpréter l'espérance comme la valeur moyenne que l'on peut "espérer" obtenir en répétant une expérience aléatoire un nombre de fois assez grand.

Puisque l'on peut définir une grandeur (l'espérance) comparable à la moyenne on peut également définir des grandeurs qui en dérivent telles que la variance et l'écart type.

La variance  $V$  d'une variable aléatoire  $X$  est définie par la relation suivante:

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - E(X))^2 \cdot p_2 + (x_3 - E(X))^2 \cdot p_3 + (x_4 - E(X))^2 \cdot p_4 \\ \dots\dots\dots + (x_k - E(X))^2 \cdot p_k$$

Ce qui donne en écriture condensée:

$$V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(x))^2 \cdot p_i$$

Tout comme la variance statistique, l'expression de cette variance peut être simplifiée et s'écrire:

$$V(X) = \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot p_i \right] - (E(x))^2$$

L'écart type

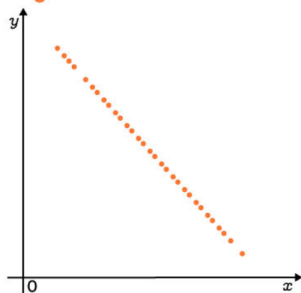
A la différence des statistique l'écart type des probabilité se note  $\sigma$  (lettre grecque sigma) mais sa définition reste la même: il s'agit de la racine carrée de la variance:

$$\sigma = \sqrt{V}$$

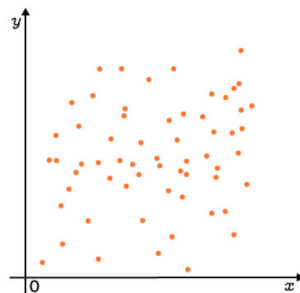
## 6. Corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation linéaire, généralement noté  $r$ , quantifie la force du lien linéaire entre les deux caractères d'une distribution. Pour le déterminer, on peut procéder par estimation de son allure graphique ou utiliser une formule mathématique.

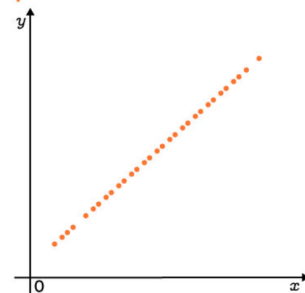
Corrélation linéaire parfaite, négative ( $r = -1$ )



Corrélation nulle ( $r = 0$ )



Corrélation linéaire parfaite, positive ( $r = 1$ )



Le coefficient de corrélation aura toujours une valeur qui se situe dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Le coefficient de corrélation linéaire d'une distribution peut donner une idée de l'allure qu'a le nuage de points et inversement. D'abord, le signe du coefficient, positif ou négatif, indique le sens de la pente de la droite de régression. Pour bien comprendre le coefficient de corrélation, voici trois nuages de points qui illustrent bien ces valeurs extrêmes, soit -1, 0 et 1.

En d'autres mots, plus la valeur du coefficient de corrélation linéaire est près de 1 ou -1, plus le lien linéaire entre les deux variables est fort.

À l'inverse, plus sa valeur est près de 0, plus le lien linéaire entre les deux variables est faible.

## 7. Moyenne, médiane, maximum, minimum

La moyenne se calcule en divisant la somme des valeurs par le nombre d'observations.

Pour trouver la médiane, il faut classer les valeurs du plus petit au plus grand. Il suffit de regarder où se trouve le chiffre médian dans une distribution. Il y a autant de sujets inférieurs à la médiane que supérieurs à la médiane.

Il s'agit donc de la distribution qui la partage en deux parties égales.

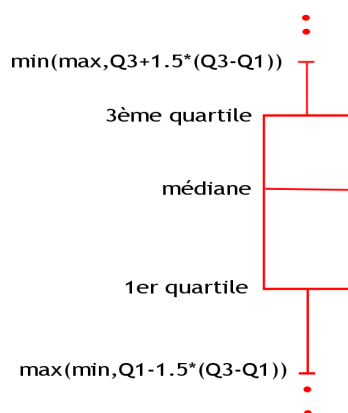
Le maximum est la valeur la plus haute dans un ensemble de données, et le minimum est la valeur la plus basse dans cet ensemble.

## 8. Quartiles en statistique

En statistiques et en théorie des probabilités, les quantiles sont les valeurs qui divisent un jeu de données en intervalles de même probabilité. Il y a donc un quantile de moins que le nombre de groupes créés. Par exemple, les quartiles sont les trois quantiles qui divisent un ensemble de données en quatre groupes de même probabilité.

## 9. Boxplot en statistique

Un box-plot est un graphique simple composé d'un rectangle duquel deux droites sortent afin de représenter certains éléments des données.



- La valeur centrale du graphique est la médiane (il existe autant de valeurs supérieures qu'inférieures à cette valeur dans l'échantillon).
- Les bords du rectangle sont les quartiles (Pour le bord inférieur, un quart des observations ont des valeurs plus petites et trois quart ont des valeurs plus grandes, le bord supérieur suit le même raisonnement).
- Les extrémités des moustaches sont calculées en utilisant 1.5 fois l'espace interquartile (la distance entre le 1er et le 3ème quartile).  
On peut remarquer que 50% des observations se trouvent à l'intérieur de la boîte. Les valeurs à l'extérieur des moustaches sont représentées par des points. On ne peut pas dire que si une observation est à l'extérieur des moustaches alors elle est une valeur aberrante. Par contre, cela indique qu'il faut étudier plus en détail cette observation.

## 10. Histogramme en statistique

L'histogramme est un outil fréquemment utilisé pour résumer des données discrètes ou continues qui sont présentées par intervalles de valeurs. Il est souvent employé pour montrer les caractéristiques principales de la distribution des données de façon pratique. Il est utile pour résumer de grands ensembles de données (plus de 100 observations). Il peut également faciliter la détection d'observations inhabituelles (valeurs aberrantes) ou les intervalles sans points de données.

Un histogramme sépare les valeurs possibles des données en classes ou groupes. Pour chaque groupe, on construit un rectangle dont la base correspond aux valeurs de ce groupe et la hauteur correspond au nombre d'observations dans le groupe.

L'histogramme a une apparence semblable au graphique à barres verticales, mais il n'y a pas d'écart entre les barres. En règle générale, l'histogramme possède des barres d'une largeur égale. Le graphique 5.7.1 est un exemple d'histogramme qui montre la distribution du revenu, une variable continue, parmi les employés d'une compagnie.

## 11. Théorème Centrale Limit

Le théorème central limite (aussi appelé théorème limite central, théorème de la limite centrale ou théorème de la limite centrée) établit la convergence en loi de la somme d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Intuitivement, ce résultat affirme qu'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend (le plus souvent) vers une variable aléatoire gaussienne.

Ce théorème et ses généralisations offrent une explication de l'omniprésence de la loi normale dans la nature : de nombreux phénomènes sont dus à l'addition d'un grand nombre de petites perturbations aléatoires.

## 12. Dérivée

La dérivée d'une fonction est le moyen de déterminer combien cette fonction varie quand la quantité dont elle dépend, son argument, change. Plus précisément, une dérivée est une expression (numérique ou algébrique) donnant le rapport entre les variations infinitésimales de la fonction et les variations infinitésimales de son argument. Par exemple, la vitesse est la dérivée du déplacement par rapport au temps, et l'accélération est la dérivée, par rapport au temps, de la vitesse.

src :

<https://www.maxicours.com/se/cours/vecteurs-et-translations/>

[https://www.editions-petiteelisabeth.fr/calculs\\_coordonnees\\_vecteur.php](https://www.editions-petiteelisabeth.fr/calculs_coordonnees_vecteur.php)

[https://www.unilim.fr/pages\\_perso/jean.debord/math/matrices/matrices.htm](https://www.unilim.fr/pages_perso/jean.debord/math/matrices/matrices.htm)

<https://www.maths-cours.fr/cours/introduction-aux-matrices-spe>

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Probabilit%C3%A9s\\_\(math%C3%A9matiques\\_%C3%A9l%C3%A9mentaires\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Probabilit%C3%A9s_(math%C3%A9matiques_%C3%A9l%C3%A9mentaires))

<https://www.methodemaths.fr/probabilites/>

<https://www.studysmarter.fr/resumes/mathematiques/statistiques-et-probabilites/loi-de-probabilite/>

<https://www.lemagit.fr/definition/Variable-independante#:~:text=Une%20variable%20ind%C3%A9pendante%20est%20une,les%20%C3%A9l%C3%A9ments%20indispensables%20au%20calcul>

<https://www.mathematiques-lycee.com/cours-premiere-s-statistiques-probabilit%C3%A9s/1eres-02-esperance-variance-ecart-type.html>

<https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/mathematiques/le-coefficient-de-correlation-lineaire-m1377>

<https://commentprogresser.com/statistique-parametre-statistiques-moyenne-mediane-etendue-ecart-type.html>

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Quantile>

<https://www.stat4decision.com/fr/le-box-plot-ou-la-fameuse-boite-a-moustache/>

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me\\_central\\_limite](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_central_limite)

<https://www.techno-science.net/definition/6280.html>