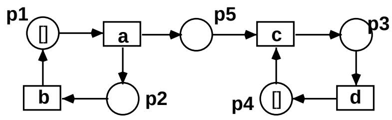
FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Musterlösung 8 : Petrinetze: Invarianten, Überdeckungsgraph

Präsenzaufgabe 8.1: Überprüfe, ob das folgende Netz lebendig ist. Leider ist das Netz unbeschränkt, so dass wir den Algorithmus 3.1 nicht anwenden können, denn der konstruiert nur für beschränkte Netze den kompletten Erreichbarkeitsgraphen. Also muss Lebendigkeit auf anderem Wege nachgewiesen werden.



1. Zeige zunächst, dass es Invarianten i_1 und i_2 gibt, aus denen folgende Gleichungen für alle erreichbaren Markierungen m folgen (Bestimme auch die Konstanten c und c'.):

$$m(p_1) + m(p_2) = c \qquad m(p_3) + m(p_4) = c'$$

2. Zeige, dass alle erreichbaren Markierung von der folgenden Form sind: $(1, 0, 1, 0, n)$, $(1, 0, 0, 1, n)$, $(0, 1, 0, 1, n)$ oder $(0, 1, 1, 0, n)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
3. Beweise damit, dass N lebendig ist.
4. Konstruiere den Überdeckungsgraphen.
5. Beschreibe mit eigenen Worten den Hinweis zur Aufgabe 8.4.

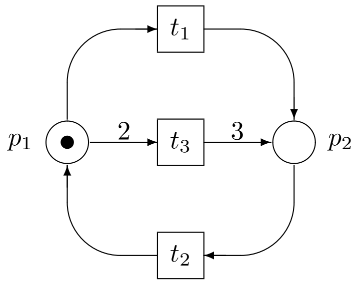
Lösung: Es handelt sich um das $\bar{B}LR$-Beispiel aus dem Skript.

Der RG-Graph ist nicht endlich. Also muss muss für Lebendigkeit argumentiert werden. Man kann durch Induktion zeigen, dass alle erreichbaren Markierung von der folgenden Form sind: $(1, 0, 1, 0, n)$, $(1, 0, 0, 1, n)$, $(0, 1, 0, 1, n)$ oder $(0, 1, 1, 0, n)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dabei kann man die Invarianten $m(p_1) + m(p_2) = 1$ sowie $m(p_3) + m(p_4) = 1$ nutzen.

Jede dieser Markierungen kann durch Schalten von b und/oder d dann $(1, 0, 0, 1, n)$ erreichen. Diese Markierung aktiviert dann $(1, 0, 0, 1, n) \xrightarrow{abcd} (1, 0, 0, 1, n)$. Also ist das Netz lebendig.

Die immer erreichbaren Markierung der Form $(1, 0, 0, 1, n)$ können durch die Folge $(cd)^n$ wieder in die Initialmarkierung überführt werden. Das Netz ist somit reversibel.

Präsenzaufgabe 8.2: Gegeben sei das folgende P/T Netz:



1. Sei i eine S-Invariante des Netzes. Gilt dann für alle erreichbaren Markierungen m die folgende, von i abgeleitete Invariantengleichung?

$$i(p_1) \cdot m(p_1) + i(p_2) \cdot m(p_2) = const.$$

   Lösung: Ja, dies ist der Satz von Lautenbach.

2. Zeige, dass für alle aus der Anfangsmarkierung $m_0 = (1, 0)$ erreichbaren Markierungen die folgende Invariantengleichung gilt:

$$1 \cdot m(p_1) + 1 \cdot m(p_2) = 1 \cdot m_0(p_1) + 1 \cdot m_0(p_2) = 1$$

3. Zeige, dass der zur Gleichung zugehörige Vektor $i = (1, 1)^{tr}$ jedoch *kein* Invariantenvektor ist. Erläutere die Ursachen!

   Lösung: Mit $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ folgt $\Delta^{tr} i = (0, 0, 1)^{tr} \neq 0$. Man beachte, dass für dieses Beispiel die Anfangsmarkierung gerade so gewählt ist, dass in keiner erreichbaren Markierung t_3 aktiviert ist. Für eine andere Anfangsmarkierung, z.B. $m = (2, 0, 0)^{tr}$ ist t_3 aktiviert, und die Invariantengleichung ist ungültig.

Übungsaufgabe 8.3: Die Implikation im Satz von Lautenbach (Satz 3.25) kann zu einer Äquivalenz verschärft werden, wenn wir Netze ohne tote Transitionen betrachten. Hierbei heißt eine Transition tot, wenn sie von keiner erreichbaren Markierung aktiviert wird. Beweise dazu:

von
6

Sei N ein P/T-Netz ohne tote Transitionen. Gilt für alle erreichbaren Markierungen $m \in R(N, m_0)$ die Gleichung $i^{tr} \cdot m = i^{tr} \cdot m_0$, dann ist i auch eine S-Invariante.

Lösung: Sei t eine Transition. Da t nicht tot ist, existieren erreichbare Markierungen $\vec{m}$ und $\vec{m}'$ mit $\vec{m} \xrightarrow{t} \vec{m}'$. Nach Annahme gilt $\vec{i} \cdot \vec{m} = \vec{i} \cdot \vec{m}'$. Multipliziert man $\vec{m}' = \vec{m} + \vec{t}$ mit $\vec{i}$, so erhält man:

$$\vec{i} \cdot \vec{m} = \vec{i} \cdot \vec{m}' = \vec{i} \cdot (\vec{m} + \Delta(t)) = \vec{i} \cdot \vec{m} + \vec{i} \cdot \Delta(t)$$

Also $\vec{i} \cdot \vec{m}' - \vec{i} \cdot \vec{m} = \vec{0} == \vec{i} \cdot \Delta(t) = \vec{i} \cdot \vec{t}$. Da t eine beliebige Transition war, gilt $\vec{t} \cdot \vec{i}$ für alle Transitionen. Somit gilt $\vec{0} = [\vec{t_1}, \ldots, \vec{t_n}] \cdot \vec{i} = \Delta[\vec{t_1}, \ldots, \vec{t_n}] \cdot \vec{i}$, d.h. $\vec{i}$ ist eine S-Invariante.

Übungsaufgabe 8.4: Sei N ein P/T Netz und t eine Transition.

von
6

1. Zeige: Es gibt genau dann eine erreichbare Markierung m, die t aktiviert, wenn eine mit t beschriftete Kante im Überdeckungsgraphen existiert.

Lösung: Es gilt:

(a) Angenommen es existiert eine erreichbare Markierung, die t aktiviert, d.h. $\mathbf{m}_0 \xrightarrow[N]{w_1} \mathbf{m}_1 \xrightarrow[N]{t}$ gilt. Nach Satz 3.32 existieren dann eine ω-Markierung $\hat{\mathbf{m}}_1$, so dass $\mathbf{m}_0 \xrightarrow[C]{w_1} \hat{\mathbf{m}}_1 \xrightarrow[C]{t}$ $\wedge \hat{\mathbf{m}}_1 \geq_\omega \mathbf{m}_1$ gilt. Also kommt t im CG vor.

(b) Angenommen t komme im CG vor, d.h. $\mathbf{m}_0 \xrightarrow[C]{w_1} \hat{\mathbf{m}}_1 \xrightarrow[C]{t}$. Wir betrachtren nun alle Stellen p mit $\hat{\mathbf{m}}_1(p) = \omega$ im Vorbereich von t. Da in N stets eine Markierung m erreicht werden kann, die für jede ω-Komponente in $\hat{\mathbf{m}}_1$ simultan einen beliebigen Wert überschreitet, also insbesondere auch das Kantengewicht im Vorbereich, aktiviert m auch t.

2. Zeige: Wenn eine Transition t fleißig ist (siehe letztes Blatt), dann existiert im Überdeckungsgraphen ein Kreis, der eine mit t beschriftete Kante enthält.

Lösung: Ist t fleißig, so existiert für jedes n eine Feuersequenz, die t mindestens n-mal aktiviert: $\mathbf{m} \xrightarrow{w_1 t \cdots w_n t}$. Diese Folge ist im Überdeckungsgraphen auch schaltbar, es werden aber i.a. noch ω-Komponenten hinzugefügt:

$$\mathbf{m} \xrightarrow[CG]{w_1 t} \mathbf{m}_1 \xrightarrow[CG]{w_2 t} \mathbf{m}_2 \xrightarrow[CG]{w_3 t} \cdots$$

Da jeder Überdeckungsgraphen aber endlich ist, muss sich ein Zustand wiederholen, sobald wir n größer als die Anzahl der Knoten wählen, d.h. es muss ein k mit $\mathbf{m}_k \xrightarrow[CG]{w} \mathbf{m}_k$ geben, also einen Kreis.

Hinweis. Sie können folgende Eigenschaft verwenden:

Sei $\bar{m}$ ein Knoten im Überdeckungsgraph, der $\bar{m}(p) = \omega$ für mehrere Plätze p erfüllt, dann ist im P/T Netz stets eine Markierung m erreichbar, die alle diese Plätze gleichzeitig *über jede Schranke n bringt:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in R(N, \bar{m}_0) : m \leq_\omega \bar{m} \wedge (\forall p \in P : \bar{m}(p) = \omega \Longrightarrow m(p) \geq n)$$

Hierbei besagt $m_1 \leq_\omega m_2$, dass die beiden Markierungen in allen endlichen Markierungen gleich sind:

$$m_1 \leq_\omega m_2 \iff \forall p \in P : m_1(p) = m_2(p) \vee m_2(p) = \omega,$$