PRÁCTICA 3:
Planificación de una trayectoria 4-3-4 para un manipulador RR

Cuando queremos mover el extremo del robot desde un punto inicial a un punto final, la trayectoria más lógica suele ser una línea recta. No obstante, hay ocasiones en las que no nos interesa que sea así, como, por ejemplo, si queremos evitar obstáculos que potencialmente habría en esa trayectoria en línea recta. Este es el caso de las tareas que consisten en mover objetos de un lugar a otro en un almacén. Además, aún suponiendo que no haya obstáculos en el camino, hacer el movimiento en línea recta implicaría arrastrar el objeto por el suelo. Para esquivar posibles obstáculos y evitar arrastrar el objeto es habitual usar una trayectoria en forma de U invertida. Esto implica definir dos puntos intermedios en la ruta: un punto de despegue y un punto de asentamiento, situados justo encima del punto inicial y del punto final respectivamente (véase Figura 1).

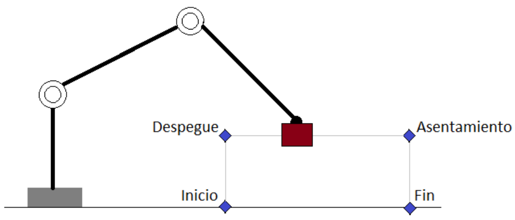

Figura 1: Esquema de una trayectoria 4-3-4

Es posible modelar una trayectoria de este tipo usando un polinomio de grado elevado. En concreto, con un polinomio de grado 7 es posible asegurar que se cumplen las 8 condiciones que, al menos, requiere esta trayectoria: 4 correspondientes a la posición (paso por los punto de inicio, despegue, asentamiento y fin) y 4 correspondientes a la velocidad (velocidad nula al comienzo y al final y continuidad en los puntos intermedios). Además, sería conveniente añadir condiciones que garanticen la continuidad en la aceleración, lo que requería de un polinomio de mayor grado.

No obstante, es complicado operar con polinomios de grado elevado (supone mayor carga computacional) y a menudo conducen a movimientos extraños. Por ello, es preferible dividir la trayectoria en 3 segmentos (uno del punto de inicio al punto de despegue, otro del punto de despegue al punto de asentamiento y otro del punto de asentamiento al punto de fin) y usar varios polinomios (uno por segmento) de menor grado. Además, para que el movimiento se realice de manera suave, esto es, sin cambios bruscos de velocidad o aceleración, es necesario asegurar la continuidad de la posición, la velocidad y la aceleración en los puntos intermedios. En total, serían necesarias las siguientes condiciones:

- En τ_0 (tiempo de paso por el punto de inicio):

    - Posición: Debe estar en el punto de inicio.
    - Velocidad: Debe ser nula (parte del reposo).
    - Aceleración: Debe ser nula (parte del reposo).
- En τ_1 (tiempo de paso por el punto de despegue)
    - Posición: Debe estar en el punto de despegue.
    - Continuidad en la posición.
    - Continuidad en la velocidad.
    - Continuidad en la aceleración.
- En τ_2 (tiempo de paso por el punto de asentamiento)
    - Posición: Debe estar en el punto de asentamiento.
    - Continuidad en la posición.
    - Continuidad en la velocidad.
    - Continuidad en la aceleración.
- En τ_3 (tiempo de paso por el punto de fin)
    - Posición: Debe estar en el punto de fin.
    - Velocidad: Debe ser nula (termina en reposo).
    - Aceleración: Debe ser nula (termina en reposo).

Estas 14 condiciones pueden satisfacerse con 3 polinomios de grados 4, 3 y 4 (cada uno de los cuales modelaría un segmento de la trayectoria y satisfaría 5, 4 y 5 condiciones respectivamente). Tendrían la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= c_{14}t^4 + c_{13}t^3 + c_{12}t^2 + c_{11}t + c_{10} &(1)\\
f_2(t) &= c_{23}t^3 + c_{22}t^2 + c_{21}t + c_{20} &(2)\\
f_3(t) &= c_{34}t^4 + c_{33}t^3 + c_{32}t^2 + c_{31}t + c_{30} &(3)
\end{aligned}
$$

Este tipo de trayectorias se suelen implementar como trayectorias en espacio de las articulaciones, por lo que es necesario definir los tres polinomios anteriores para cada articulación de forma independiente. Además, es conveniente introducir una variable de tiempo normalizada $t \in [0, 1]$, que permita simplificar los cálculos al evitar tener que contabilizar los desfases temporales, de tal manera que todos los segmentos comiencen en $t = 0$ y terminen en $t = 1$.

Matemáticamente, este cambio de variable queda expresado como:

$$t = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{t_i}$$

donde:

- τ es el tiempo real en segundos.
- τ_i es el tiempo real al final del i-ésimo segmento.
- t_i es el tiempo real requerido para el segmento i-ésimo.
- t es el tiempo normalizado en el intervalo $[0, 1]$.

Usar una variable de tiempo normalizada ($t = f(\tau)$) requiere redefinir las expresiones de la velocidad y la aceleración:

$$\dot{f}_i(\tau) = \frac{df_i(t)}{d\tau} = \frac{df_i(t)}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{df_i(t)}{dt}\frac{d(\frac{\tau-\tau_{i-1}}{t_i})}{d\tau} = \dot{f}_i(t)\frac{1}{t_i} \quad (4)$$

$$\ddot{f}_i(\tau) = \frac{d^2f_i(t)}{d\tau^2} = \frac{d^2f_i(t)}{dt^2}\frac{dt^2}{d\tau^2} = \frac{d^2f_i(t)}{dt^2}\frac{d(\frac{\tau-\tau_{i-1}}{t_i})^2}{d\tau^2} = \ddot{f}_i(t)\frac{1}{t_i^2} \quad (5)$$

$$(6)$$

Los coeficientes c_{ij} de los polinomios descritos en las expresiones 1, 2 y 3 se calculan a partir de las ecuaciones que definen las condiciones en cuanto a posición, velocidad y aceleración que debemos imponer:

- **Primer segmento**:

  $f_1(t) = c_{14}t^4 + c_{13}t^3 + c_{12}t^2 + c_{11}t + c_{10}$

  Velocidad $\rightarrow \dot{f}_1(\tau) = \frac{\dot{f}_1(t)}{t_1} = \frac{4c_{14}t^3+3c_{13}t^2+2c_{12}t+c_{11}}{t_1}$

  Acelaración $\rightarrow \ddot{f}_1(\tau) = \frac{\ddot{f}_1(t)}{t_1^2} = \frac{12c_{14}t^2+6c_{13}t+2c_{12}}{t_1^2}$

  Las condiciones en $\tau = \tau_0$, $t = 0$ (inicio del primer segmento) son:

$$f_1(\tau = \tau_0) = f_1(t = 0) = p_I \Rightarrow \boxed{c_{10} = p_I} \quad (7)$$

$$\dot{f}_1(\tau = \tau_0) = \frac{\dot{f}_1(t = 0)}{t_1} = \frac{c_{11}}{t_1} = v_I \Rightarrow \boxed{c_{11} = v_I t_1} \quad (8)$$

$$\ddot{f}_1(\tau = \tau_0) = \frac{\ddot{f}_1(t = 0)}{t_1^2} = \frac{2c_{12}}{t_1^2} = a_I \Rightarrow \boxed{c_{12} = \frac{a_I t_1^2}{2}} \quad (9)$$

  Las condiciones en $\tau = \tau_1$, $t = 1$ (final del primer segmento) son:

$$f_1(\tau = \tau_1) = f_1(t = 1) = c_{14} + c_{13} + \frac{a_I t_1^2}{2} + v_I t_1 + p_I = p_D \quad (10)$$

$$\dot{f}_1(\tau = \tau_1) = \frac{\dot{f}_1(t = 1)}{t_1} = \frac{4c_{14} + 3c_{13} + a_I t_1^2 + v_I t_1}{t_1} = v_D \quad (11)$$

$$\ddot{f}_1(\tau = \tau_1) = \frac{\ddot{f}_1(t = 1)}{t_1^2} = \frac{12c_{14} + 6c_{13} + a_I t_1^2}{t_1^2} = a_D \quad (12)$$

- **Segundo segmento**:

  $f_2(t) = c_{23}t^3 + c_{22}t^2 + c_{21}t + c_{20}$

  Velocidad $\rightarrow \dot{f}_2(\tau) = \frac{\dot{f}_2(t)}{t_2} = \frac{3c_{23}t^2+2c_{22}t+c_{21}}{t_2}$

  Acelaración $\rightarrow \ddot{f}_2(\tau) = \frac{\ddot{f}_2(t)}{t_2^2} = \frac{6c_{23}t+2c_{22}}{t_2^2}$

  Las condiciones en $\tau = \tau_1$, $t = 0$ (inicio del segundo segmento) son:

$$f_2(\tau = \tau_1) = f_2(t = 0) = p_D \Rightarrow \boxed{c_{20} = p_D} \quad (13)$$

$$\dot{f}_2(\tau = \tau_1) = \frac{\dot{f}_2(t = 0)}{t_2} = \frac{c_{21}}{t_2} = v_D \quad (14)$$

$$\ddot{f}_2(\tau = \tau_1) = \frac{\ddot{f}_2(t = 0)}{t_2^2} = \frac{2c_{22}}{t_2^2} = a_D \quad (15)$$

Combinando las ecuaciones 11 y 14 (continuidad en la velocidad al pasar del primer a segundo segmento):

$$\frac{4c_{14}+3c_{13}+a_It_1^2+v_It_1}{t_1}=\frac{c_{21}}{t_2} \tag{16}$$

Combinando las ecuaciones 12 y 15 (continuidad en la aceleración al pasar del primer a segundo segmento):

$$\frac{12c_{14}+6c_{13}+a_It_1^2}{t_1^2}=\frac{2c_{22}}{t_2^2} \tag{17}$$

Las condiciones en $\tau=\tau_2$, $t=1$ (final del segundo segmento) son:

$$f_2(\tau=\tau_2)=f_2(t=1)=c_{23}+c_{22}+c_{21}+p_D=p_A \tag{18}$$

$$\dot{f}_2(\tau=\tau_2)=\frac{\dot{f}_2(t=1)}{t_2}=\frac{3c_{23}+2c_{22}+c_{21}}{t_2}=v_A \tag{19}$$

$$\ddot{f}_2(\tau=\tau_2)=\frac{\ddot{f}_2(t=1)}{t_2^2}=\frac{6c_{23}+2c_{22}}{t_2^2}=a_A \tag{20}$$

- **Tercer segmento**:
Hacemos un nuevo cambio de variable para facilitar la resolución: $\bar{t}=t-1$. El cambio no afecta a las derivadas (suma de constante).
    $f_3(\bar{t})=c_{34}\bar{t}^4+c_{33}\bar{t}^3+c_{32}\bar{t}^2+c_{31}\bar{t}+c_{30}$
    Velocidad $\rightarrow \dot{f}_3(\tau)=\frac{\dot{f}_3(\bar{t})}{t_3}=\frac{4c_{34}\bar{t}^3+3c_{33}\bar{t}^2+2c_{32}\bar{t}+c_{31}}{t_3}$
    Acelaración $\rightarrow \ddot{f}_3(\tau)=\frac{\ddot{f}_3(\bar{t})}{t_3^2}=\frac{12c_{34}\bar{t}^2+6c_{33}\bar{t}+2c_{32}}{t_3^2}$
Las condiciones en $\tau=\tau_3$, $t=1$, $\bar{t}=0$ (final del tercer segmento) son:

$$f_3(\tau=\tau_3)=f_3(\bar{t}=0)=p_F \quad\Rightarrow\boxed{c_{30}=p_F} \tag{21}$$

$$\dot{f}_3(\tau=\tau_3)=\frac{\dot{f}_3(\bar{t}=0)}{t_3}=\frac{c_{31}}{t_3}=v_F \quad\Rightarrow\boxed{c_{31}=v_Ft_3} \tag{22}$$

$$\ddot{f}_3(\tau=\tau_3)=\frac{\ddot{f}_3(\bar{t}=0)}{t_3^2}=\frac{2c_{32}}{t_3^2}=a_F \quad\Rightarrow\boxed{c_{32}=\frac{a_Ft_3^2}{2}} \tag{23}$$

Las condiciones en $\tau=\tau_2$, $t=0$, $\bar{t}=-1$ (inicio del tercer segmento) son:

$$f_3(\tau=\tau_2)=f_3(\bar{t}=-1)=c_{34}-c_{33}+\frac{a_Ft_3^2}{2}-v_Ft_3+p_F=p_A \tag{24}$$

$$\dot{f}_3(\tau=\tau_2)=\frac{\dot{f}_3(\bar{t}=-1)}{t_3}=\frac{-4c_{34}+3c_{33}-a_Ft_3^2+v_Ft_3}{t_3}=v_A \tag{25}$$

$$\ddot{f}_3(\tau=\tau_2)=\frac{\ddot{f}_3(\bar{t}=-1)}{t_3^2}=\frac{12c_{34}-6c_{33}+a_Ft_3^2}{t_3^2}=a_A \tag{26}$$

Combinando las ecuaciones 19 y 25 (continuidad en la velocidad al pasar del segundo a tercer segmento):

$$\frac{3c_{23} + 2c_{22} + c_{21}}{t_2} = \frac{-4c_{34} + 3c_{33} - a_F t_3^2 + v_F t_3}{t_3} \tag{27}$$

Combinando las ecuaciones 20 y 26 (continuidad en la aceleración al pasar del segundo a tercer segmento):

$$\frac{6c_{23} + 2c_{22}}{t_2^2} = \frac{12c_{34} - 6c_{33} + a_F t_3^2}{t_3^2} \tag{28}$$

donde p_i, v_i y a_i representan respectivamente la posición, la velocidad y la aceleración articulares de una articulación concreta en el punto i, con $i \in [I, D, A, F]$ que se corresponden con los puntos de inicio, despegue, asentamiento y fin.

A partir de las condiciones impuestas se obtienen de forma directa 7 de los 14 coeficientes. Los coeficientes restantes se obtienen mediante un sistema de 7 ecuaciones y 7 incognitas formado por las ecuaciones 10, 16, 17, 18, 24, 27 y 28, que se puede resolver de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{14} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \\ c_{33} \\ c_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{t_1} & \frac{4}{t_1} & -\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{t_1^2} & \frac{12}{t_1^2} & 0 & -\frac{2}{t_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t_2} & \frac{2}{t_2} & \frac{3}{t_2} & -\frac{3}{t_3} & \frac{4}{t_3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{t_2^2} & \frac{6}{t_2^2} & \frac{6}{t_3^2} & -\frac{12}{t_3^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_D - p_I - \frac{a_I t_1^2}{2} - v_I t_1 \\ -a_I t_1 - v_I \\ -a_I \\ p_A - p_D \\ p_A - p_F - \frac{a_F t_3^2}{2} + v_F t_3 \\ -a_F t_3 + v_F \\ a_F \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

Implemente una función en Python que calcule los coeficientes de los tres polinomios que definen una trayectoria 4-3-4 para una articulación concreta, a partir de los valores de la articulación, $[p_I, p_D, p_A, p_F]$, y de los tiempos totales de cada segmento, $[t_1, t_2, t_3]$. La función debe tener la siguiente interfaz:

```
def trayectoria434(qI, qD, qA, qF, t1, t2, t3)
    <código de la función>
    return (f1, f2, f3)
```

donde:

- `qI`, `qD`, `qA` y `qF` son los valores de la articulación en los puntos de inicio (p_I), despegue (p_D), asentamiento (p_A) y fin (p_F)
- `t1`, `t2` y `t3` es la duración de cada segmento.
- `f1`, `f2` y `f3` son vectores con los coeficientes de cada segmento de la trayectoria, esto es, $f_1 = [c_{14}, c_{13}, c_{12}, c_{11}, c_{10}]$, $f_2 = [c_{23}, c_{22}, c_{21}, c_{20}]$ y $f_3 = [c_{34}, c_{33}, c_{32}, c_{31}, c_{30}]$.

Ejercicio 2

Implemente un script en Python que represente, en espacio cartesiano, una trayectoria 4-3-4 de un manipulador RR cuyos brazos, l_1 y l_2, tienen longitud 1. La trayectoria debe pasar por los siguientes puntos:

- Punto de inicio $\rightarrow [1,\ 0]$
- Punto de despegue $\rightarrow [1,\ 0{,}1]$.
- Punto de asentamiento $\rightarrow [1{,}5,\ 0{,}1]$.
- Punto de fin $\rightarrow [1{,}5,\ 0]$.

Tenga en cuenta que debe calcular la trayectoria en el espacio de las articulaciones. Por tanto debe seguir los siguientes pasos:

1. Calcular los valores de las articulaciones en los puntos de la ruta (problema cinemático inverso). Use la función `pci` de la práctica 2.
2. Para cada articulación, definir una función que "pase" por los valores de la articulación correspondientes a los puntos de la ruta. En este caso (trayectoria 4-3-4) será una función definida a trozos. Haga uso de la función `trayectoria434` implementada en el ejercicio anterior y suponga una duración de cada segmento de la trayectoria de $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ s.
3. Para cada articulación, muestree la función definida en el paso anterior durante 3 segundos con un periodo de muestreo de 0,05 segundos. Tenga en cuenta el cambio de variable realizado.
4. A partir de los valores de la variables de articulación obtenidos en el paso anterior, represente la trayectoria en espacio cartesiano (implica resolver el problema cinemático directo). Haga uso de la función `animacion_trayectoria_pcd` de la práctica 2.

A la vista de la representación de la trayectoria, ¿se ajusta a lo esperado?, ¿pasa por los puntos de la ruta?

Ejercicio 3

Para cada articulación, calcule la velocidad y la aceleración articular como la primera y la segunda derivada, respectivamente, de la función que modela los valores de la variable de articulación (definida en el paso 2 del ejercicio anterior). Puede usar la función `polyder` de `numpy`.

Represente la trayectoria calculada en el ejercicio anterior en espacio de las articulaciones, esto es, muestre el valor de las articulaciones q_1 y q_2 a lo largo del tiempo. Represente también la velocidad y aceleración articular en función del tiempo. Comente el resultado.