Transformación de Denavit-Hartenberg (algoritmo).

Dr. Roberto Carlos García Gómez

El problema cinemático

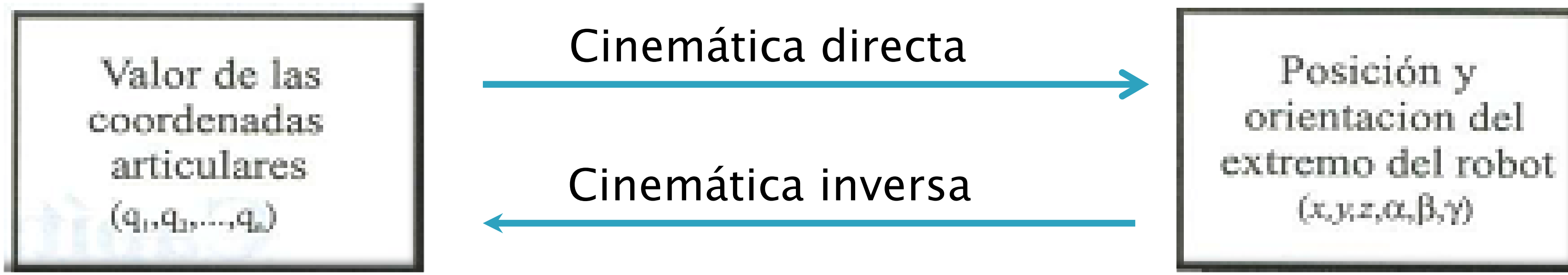
- La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia.

- La cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación de la herramienta del robot con los valores que toman sus coordenadas de sus articulaciones.

- Existen dos problemas fundamentales a resolver con respecto a la cinemática del robot:

- Cinemática Directa. Consiste en determinar la posición y orientación del extremo final del robot con respecto al sistema de la base del robot a partir de conocer los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos.

- Cinemática Inversa. Resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación conocidas del extremo.



Cinemática Directa (ángulos para encontrar posición):

Se conoce

a) La longitud de cada eslabón.

b) El ángulo de cada articulación.

Se busca

La posición de cualquier punto (coordenadas con respecto a la base)

Cinemática Inversa (posición para encontrar ángulos):

Se conoce

a) La longitud de cada eslabón.

b) La posición de cualquier punto (coordenadas con respecto a la base).

Se busca

El ángulo de cada articulación necesitados para obtener la posición

El problema cinemático directo

El problema cinemático directo se reduce a encontrar la matriz de transformación homogénea (T) que relacione la posición y orientación del extremo del robot respecto a su sistema de referencia fijo (base del robot). La matriz T está en función de los parámetros de las articulaciones el robot. Para un robot de n grados de libertad tenemos:

$$x = f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots q_n)$$
$$y = f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots q_n)$$
$$z = f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots q_n)$$
$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots q_n)$$
$$\beta = f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots q_n)$$
$$\gamma = f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots q_n)$$

Donde:

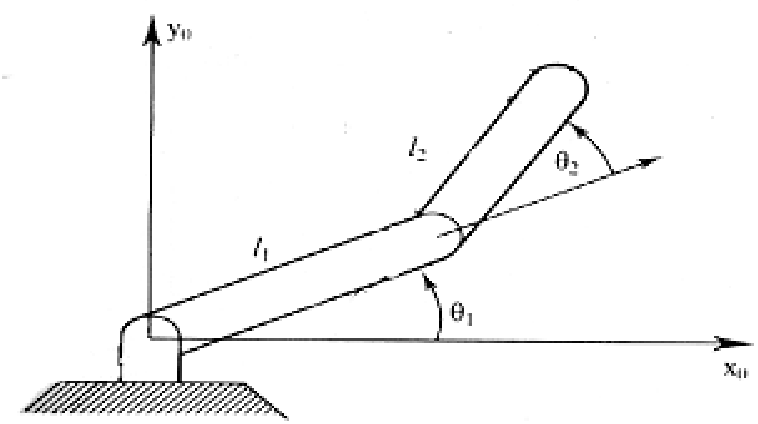
$$Para\ articulaciones\ prismáticas\ las\ variables\ son\ distancias.$$
$$Para\ articulaciones\ revolutas\ las\ variables\ son\ ángulos.\ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots q_n \rightarrow Son\ las\ variables\ de\ las\ articulaciones.$$

$$x, y, z\ \rightarrow Coordenadas\ de\ la\ posición\ del\ extremo\ del\ robot$$

$$\alpha, \beta, \gamma\ \rightarrow Ángulos\ de\ la\ orientacion\ del\ extremo\ del\ robot$$

Método geométrico

- Las funciones mencionadas pueden ser encontradas mediante métodos geométricos para el caso de robots de 2 grados de libertad (cada relación articulación-eslabón constituye un grado de libertad:



$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2\, sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Método de las matrices de transformación homogéneas.

Para robots de más de 2 grados de libertad es difícil aplicar métodos geométricos para la solución de su cinemática directa.

A cada eslabón se le asocia un sistema coordenado y utilizando transformaciones homogéneas es posible representar las rotaciones y traslaciones relativas entre los diferentes eslabones que componen el robot.

Siendo la matriz : $A_{i-1}^{\;i}$

La matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot.

Se puede representar de forma parcial o total la cadena cinemática que forma el robot:

$$\mathrm{A}_0^n = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{i-1}^{\;i}$$

Encontrar la forma explícita de la función que relaciona el espacio de articulaciones del robot (dimensiones de los eslabones y giros relativos) con el espacio cartesiano de posiciones/orientaciones.

$$(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \ldots, q_n)$$

Resolución cinemática directa

$$S_n = T . S_o$$

- S_n es el origen del sistema de referencia del extremo del robot (pinza) en coordenadas generalizadas
- S_0 es el origen del sistema de referencia de la base del robot

Algoritmo de Denavit-Hartenberg

En 1955 Denavit y Hartenberg propusieron un método matricial que permite establecer de manera sistemática un sistema de coordenadas. La representación de Denavit-Hartenberg (D-H) establece que seleccionándose adecuadamente los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón, será posible pasar de uno al siguiente mediante 4 transformaciones básicas que dependen exclusivamente de las características geométricas del eslabón.

Reduciéndose al siguiente patrón de transformaciones que permiten relacionar el sistema de referencia del elemento i con respecto al sistema del elemento i-1:

Rotación alrededor del eje Z_{i-1} un ángulo θ_i
Traslación a lo largo de Z_{i-1} una distancia d_i
Traslación a lo largo de X_i una distancia a_i
Rotación alrededor del eje X_i un ángulo α_i

$$A_{i-1}^{\;i} = T(z,\theta_i)\cdot T(0,0,d_i)\cdot T(a_i,0,0)\cdot T(x,\alpha_i)$$

Desarrollando la expresión:

$$A_{i-1}^{\;i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenemos la expresión general de DH, donde θ_i, d_i, a_i, α_i son los parámetros DH del eslabón i:

$$A_{i-1}^{\;i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que la matriz A^i_{i-1} relacione los sistemas coordenados O_i y O_{i-1} es necesario que los sistemas coordenados se determinen mediante los siguientes pasos:

1. Numerar y etiquetar el eslabón fijo (base) como O.
2. Numerar y etiquetar los eslabones móviles desde 1 hasta n eslabón móvil.
3. Localizar y numerar el eje de cada articulación y etiquetarla comenzando desde z_0 hasta z_{n-1}. Si la articulación es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si la articulación es prismática, el eje será a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

Establecimiento del sistema coordenado de la base:

4. Establecer el sistema coordenado de la base estableciendo el origen como O_0 en cualquier punto del eje z_0. arbitrariamente establecer los ejes x_0 y y_0 respetando la regla de la mano derecha.

Establecimiento de los sistemas coordenados de las demás articulaciones:

5. Localizar el origen O_i
   a. En la intersección del eje z_i con la línea normal común a la intersección de z_i y z_{i-1}.
   b. En la intersección de z_i y z_{i-1}, si es que z_i y z_{i-1} se intersectan.
   c. En la articulación i, si z_i y z_{i-1} son paralelos.
6. Establecer x_i:
   a. A lo largo de la línea normal común entre los ejes z_i y z_{i-1} que pasan por O_i.
   b. En la dirección normal al plano formado por z_i y z_{i-1}, si es que estos dos ejes se intersectan.
7. Establecer y_i de acuerdo a la regla de la mano derecha.

Establecimiento de los sistemas coordenados de la herramienta:

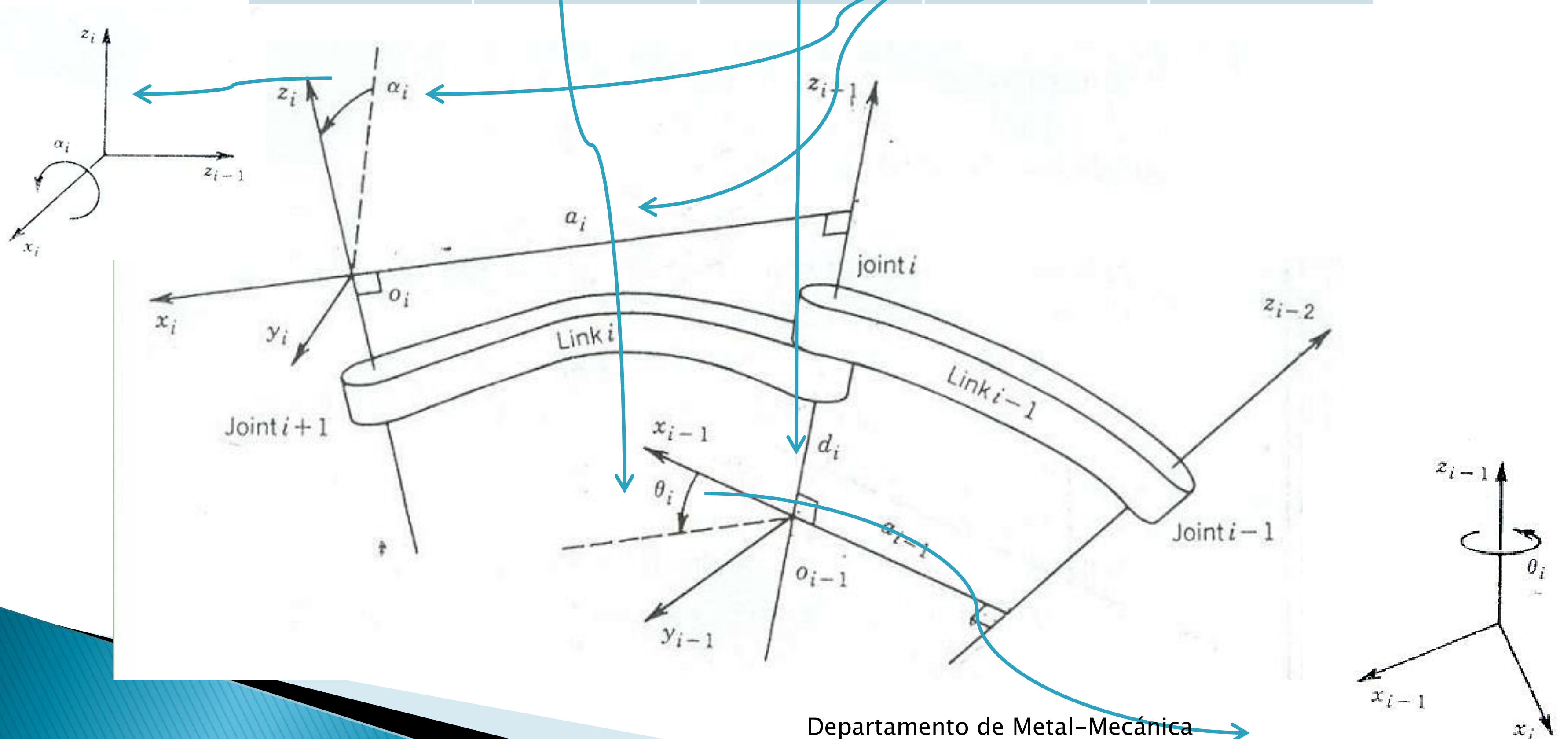
8. Localizar el sistema coordenado n-ésimo en el extremo del robot. Si es una articulación rotacional, establecer z_n a lo largo de la dirección z_{n-1} y establecer el origen O_n de la manera que más convenga a lo largo de z_n, preferente en el centro de la pinza o la punta de cualquier herramienta que el robot tenga montada.

9. Establecer x_n y y_n de acuerdo a la regla de la mano derecha. Si la herramienta es una pinza, es común establecer el eje y_n entre los "dedos" de la pinza y x_n será ortonormal a z_n y y_n.

Obtener las matrices de transformación homogéneas

10. Crear una tabla con los parámetros D-H de los eslabones:

Eslabón i	θ_i	d_i	a_i	α_i



Donde:

θ_i = Es el ángulo formado por los ejes x_{i-1} y x_i medido en un plano perpendicular a z_{i-1}utilizando la regla de la mano derecha. Este es un parámetro variable en articulaciones rotatorias.

d_i = Es la distancia a lo largo del eje z_{i-1} desde el origen O_{i-1} hasta la intersección del eje x_i con el eje z_{i-1}. Este es un parámetro variable en articulaciones prismáticas.

a_i = Para articulaciones

rotatorias: es la distancia a lo largo del eje x_i desde el origen O_i hasta la intersección del eje z_i con el eje z_{i-1}.

prismáticas: es la distancia más corta entre los ejes

αi = Es el ángulo formado por los ejes z_i y z_{i-1} medido en un plano perpendicular al eje x_i utilizando la regla de la mano derecha.

11. Realizar la matriz D-H de transformación homogénea Aii-1 para cada eslabón de acuerdo a los datos de la tabla del punto anterior.

12. Obtener la matriz de transformación que relacione el sistema coordenado de la base con el sistema coordenado del extremo del robot, resultando en la posición y la orientación del sistema coordenado de la herramienta expresado en coordenadas de la base.

$$T = A_0^n = \prod_{i=1}^{n} A_{i-1}^{i}$$

Ejemplo.