LUCRARE DE VERIFICARE
ALGEBRA
Varianta A

1. a) Să se definească urmatoarele noţiuni şi să se dea câte un exemplu pentru fiecare: relaţie, element minimal, nucleu al unui morfism de grupuri.
b) Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H_i \leq G$, $i \in I$ o familie de subgrupuri. Să se arate că $\bigcap_{i\in I} H_i \leq G$.
c) Fie $f : A \to B$ o funcţie cu proprietatea că $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$ pentru orice multime C şi orice două funcţii $g_1, g_2 : C \to A$. Să se arate că f este injectivă.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to [1,\infty)$ unde

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x-1 \text{ pentru } x \in (-\infty, 2] \\ x+1 \text{ pentru } x \in (2,\infty) \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = x^2 + 1.$$

a) Să se verifice dacă funcţie f este injectivă şi/sau surjectivă.
b) Dacă există să se determine funcţia inversă f^{-1}.
c) Să se determine compunerile $f \circ g$ şi/sau $g \circ f$ (dacă ele există).
d) Să se găsescă un exemplu de două submulţimi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ pentru care

$$g(A \cap B) \neq g(A) \cap g(B).$$

3. a) Să se arate că relaţia $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \equiv)$ dată prin

$$\forall x, y \in \mathbb{C} : x \equiv y \text{ ddacă } x^3 = y^3$$

este o relaţie de echivalenţă.
b) Să se determine mulţimea factor $\mathbb{C}/_{\equiv}$, în raport cu relaţia de echivalenţă definită la a).
c) Să se arate că relaţia $(\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \precsim)$ definită prin

$$A \precsim B, \text{ unde } A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}, B = [b_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \text{ ddacă } a_{i,j} \leq b_{i,j} \text{ în } \mathbb{R}, \forall i, j$$

este o relaţie de ordine. Exista elemente incomparabile în mulţimea ordonată $(\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \precsim)$?

4. a) Să se arate că formula

$$x * y = xy - 3x - 3y + 12$$

defineşte o operaţie pe $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, iar $(\mathbb{R} \setminus \{3\}, *)$ este un grup.
b) Să se determine un izomorfism $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}\setminus\{3\}, *)$ de forma $f(x) = x+a$.
c) Fie $(G,\cdot)$ un grup. Să se arate că $f : G \to G, f(x) = x^{-1}$ este un morfism de grupuri ddacă G este comutativ.

LUCRARE DE VERIFICARE
ALGEBRA
Varianta B

1. a) Să se definească urmatoarele noţiuni şi să se dea câte un exemplu pentru fiecare: funcţie, infimum, subgrup.
b) Fie $f : G \to H$ un izomorfism de grupuri. Să se arate că $f^{-1} : H \to G$ este morfism de grupuri.
c) Fie $(A, A \equiv)$ o relaţie de echivalenţă. Pentru orice element $a \in A$ notăm cu $[a] = \{x \in A \mid a \equiv x\}$ clasa lui de echivalenţă. Să se arate că pentru $a, b \in A$ avem $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ unde

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ pentru } x \in (-\infty, 1] \\ 2x - 3 \text{ pentru } x \in (2, \infty) \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = x^2 + 1.$$

a) Să se verifice dacă funcţie f este injectivă şi/sau surjectivă.
b) Dacă există să se determine funcţia inversă f^{-1}.
c) Să se determine compunerile $f \circ g$ şi/sau $g \circ f$ (dacă ele există).
d) Să se găsescă un exemplu de două funcţii $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $h_1 \neq h_2$, dar $h_1 \circ g = h_2 \circ g$.

3. a) Să se arate că relaţia $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \equiv)$ dată prin

$$\forall x, y \in \mathbb{C} : x \equiv y \text{ ddacă } x^4 = z^4$$

este o relaţie de echivalenţă.
b) Să se determine mulţimea factor $\mathbb{C}/_{\equiv}$, în raport cu relaţia de echivalenţă definită la a).
c) Considerăm mulţimea $\mathbb{Z}^{\{1,2\}} = \{f : \{1, 2\} \to \mathbb{Z} \mid f \text{ este funcţie}\}$. Să se arate că relaţia $(\mathbb{Z}^{\{1,2\}}, \mathbb{Z}^{\{1,2\}}, \precsim)$ definită prin

$$\forall f, g \in \mathbb{Z}^{\{1,2\}} : \quad f \precsim g \text{ ddacă } f(1) \leq g(1), f(2) \leq g(2) \text{ în } \mathbb{Z}$$

este o relaţie de ordine. Exista elemente incomparabile în mulţimea ordonată $(\mathbb{Z}^{\{1,2\}}, \precsim)$?

4. a) Să se arate că formula

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2$$

defineşte o operaţie pe $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, iar $(\mathbb{R} \setminus \{-2\}, *)$ este un grup.
b) Să se determine un izomorfism $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{-2\}, *)$ de forma $f(x) = x + a$.
c) Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se arate că $f : G \to G, f(x) = x^2$ este un morfism de grupuri ddacă G este comutativ.