KLAUSUR
ALGEBRA
Variante A

1. a) Man definiere and man finde je ein Beispiel für die folgende Begriffe: Funktion, Ordnungsrelation, Gruppe.
b) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen. Man zeige, dass wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g auch surjektiv.
c) Seien $f : G \to H$ und $g : H \to K$ zwei Gruppenhomomorphismen. Man zeige, dass $g \circ f$ auch ein Gruppenhomomorphismus ist.

2. Man betrachte die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ wobei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ für } x \in (-\infty, 1] \\ x + 1 \text{ für } x \in (2, \infty) \end{cases} \quad \text{und } g(x) = x^2 + 1.$$

a) Man überprüfen ob die Funktion f injektiv und/oder surjektiv ist.
b) Ob es existiert, man berechne die umgekehrte Funktion f^{-1}.
c) Man berechne Zusammengesetztefunktionen $f \circ g$ und/oder $g \circ f$ (ob sie existieren).
d) Man finde ein Beispiel für eine Teilmenge $X \subseteq (0, \infty)$ so dass $g(g^{-1}(X)) \neq X$.

3. a) Man zeige, dass die Relation $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \equiv)$ gegeben durch

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv y \text{ g.d.w } 3 | x + 2y$$

eine Äquivalenzrelation ist.
b) Man bestimme die Faktormenge $Z/\equiv$, modulo die Äquivalenzrelation die bei a) definiert wird.
c) Man zeige, dass die Relation $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \leq)$ wobei

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : a + ib \leq c + id \text{ g.d.w. } a \leq c \text{ und } d \leq d$$

eine Ordungsrelation ist. Existieren in $\mathbb{C}$ unvergleichbare Elemente bezüglich dieser Ordnungsrelation?

4. a) Man zeige, dass

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(R)$ ist.
b) Man zeige, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $f(x) = \cos(x) + i \sin(x)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.
c) Man finde einen injektive Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \to (S(\mathbb{Z}), \circ)$, wobei $S(\mathbb{Z})$ die Symmetrischegruppe der Menge $\mathbb{Z}$ ist.

LUCRARE DE VERIFICARE
ALGEBRA
Varianta A

1. a) Să se definească ųrmatoarele noţiuni şi să se dea câte un exemplu pentru fiecare: funcţie, relaţie de ordine, grup.
b) Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ doă funţii. Să se arate că dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este de asemenea surjectivă.
c) Fie $f : G \to H$ şi $g : H \to K$ două homomorfisme de grupuri. Să se arate că $g \circ f$ este de asemenea un homomorfism de grupuri.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ unde

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ pentru } x \in (-\infty, 1] \\ x + 1 \text{ pentru } x \in (2, \infty) \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = x^2 + 1.$$

a) Să se verifice dacă funcţie f este injectivă şi/sau surjectivă.
b) Dacă există să se determine funţia inversă f^{-1}.
c) Să se determine compunerile $f \circ g$ şi/sau $g \circ f$ (dacă ele există).
d) Să se găsescă un exemplu de submulţime $X \subseteq (0, \infty)$ aşa încât $g(g^{-1}(X)) \neq X$.

3. a) Să se arate că relaţia $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \equiv)$ dată prin

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv y \text{ ddacă } 3 | x + 2y$$

este o relaţie de echivalenţă.
b) Să se determine mulţimea factor $Z/\equiv$, modulo relaţia de echivalenţă definită la a).
c) Să se arate că relaţia $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \leq)$ unde

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : a + ib \leq c + id \text{ ddacă } a \leq c \text{ şi } d \leq d$$

este o relaţie de ordine. Există în $\mathbb{C}$ elemente incomparabile în raport cu această relaţie?

4. a) Să se arate că

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$$

este un subgrup al grupului $\mathrm{GL}_2(R)$.
b) Să se arate că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $f(x) = \cos(x) + i \sin(x)$ este un homomorfism de grupuri.
c) Să se găsescă un homomorfism injectiv de grupuri $(\mathbb{Z}, +) \to (S(\mathbb{Z}), \circ)$, unde $S(\mathbb{Z})$ este grupul simetric al mulţimii $\mathbb{Z}$.

KLAUSUR
ALGEBRA
Variante B

1. a) Man definiere and man finde je ein Beispiel für die folgende Begriffe: Relation, Partition, Untergruppe.
b) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen. Man zeige, dass wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f auch injektiv.
c) Sei $f : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus. Man zeige, dass f^{-1} auch ein Gruppenisomorphismus ist.

2. Man betrachte die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wobei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x+1 \text{ für } x \in (-\infty, -1] \\ -3x-1 \text{ für } x \in (-1, \infty) \end{cases} \qquad \text{und } g(x) = x^2 - 4x + 3.$$

a) Man überprüfen ob die Funktion f injektiv und/oder surjektiv ist.
b) Ob es existiert, man berechne die umgekehrte Funktion f^{-1}.
c) Man berechne Zusammengesetztefunktionen $f \circ g$ und/oder $g \circ f$ (ob sie existieren).
d) Man finde ein Beispiel für eine Teilmenge $X \subseteq (0, \infty)$ so dass $g^{-1}(g(X)) \neq X$.

3. a) Man zeige, dass die Relation $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \equiv)$ gegeben durch

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv y \text{ g.d.w } 5|x + 4y$$

eine Äquivalenzrelation ist.
b) Man bestimme die Faktormenge $Z/\equiv$, modulo die Äquivalenzrelation die bei a) definiert wird.
c) Man zeige, dass die Relation $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \leq)$ wobei

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \leq g \text{ g.d.w. } f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

eine Ordungsrelation ist. Existieren in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ unvergleichbare Elemente bezüglich dieser Ordnungsrelation?

4. a) Man zeige, dass

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

eine Untergruppe von $GL_2(R)$ ist.
b) Man zeige, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = 2^x$ ein Gruppenhomomorphismus ist.
c) Man finde einen injektive Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \to (S(\mathbb{R}), \circ)$, wobei $S(\mathbb{R})$ die Symmetrischegruppe der Menge $\mathbb{R}$ ist.

LUCRARE DE VERIFICARE
ALGEBRA
Varianta B

1. a) Să se definească ųrmatoarele noţiuni şi să se dea câte un exemplu pentru fiecare: relaţie, partiţie, subgrup.
b) Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ doă funţii. Să se arate că dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este de asemenea injectivă.
c) Fie $f : G \to H$ un izomorfism de grupuri. Să se arate că f^{-1} este de asemenea un izomorfism de grupuri.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ unde

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x+1 \text{ pentru } x \in (-\infty, -1] \\ -3x-1 \text{ pentru } x \in (-1, \infty) \end{cases} \qquad \text{şi } g(x) = x^2 - 4x + 3.$$

a) Să se verifice dacă funcţie f este injectivă şi/sau surjectivă.
b) Dacă există să se determine funţia inversă f^{-1}.
c) Să se determine compunerile $f \circ g$ şi/sau $g \circ f$ (dacă ele există).
d) Să se găsescă un exemplu de submulţime $X \subseteq (0, \infty)$ aşa încât $g^{-1}(g(X)) \neq X$.

3. a) a) Să se arate că relaţia $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \equiv)$ dată prin

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \equiv y \text{ ddacă } 5|x + 4y$$

este o relaţie de echivalenţă.
b) Să se determine mulţimea factor $Z/\equiv$, modulo relaţia de echivalenţă definită la a).
c) Să se arate că relaţia $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \leq)$ unde

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \leq g \text{ ddacă } f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

este o relaţie de ordine. Există în $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ elemente incomparabile în raport cu această relaţie?

4. Să se arate că

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

este un subgrup al grupului $\mathrm{GL}_2(R)$.
b) Să se arate că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = 2^x$ este un homomorfism de grupuri.
c) Să se găsescă un homomorfism injectiv de grupuri $(\mathbb{R}, +) \to (S(\mathbb{R}), \circ)$, unde $S(\mathbb{R})$ este grupul simetric al mulţimii $\mathbb{R}$.