Algebre booleene, funcții booleene, circuite logice

Curs 11

Algebre booleene

- introduse de George Boole (1815 - 1864)
- stau la baza definirii funcțiilor booleene → sunt utilizate în realizarea circuitelor logice

Definirea axiomatică

O algebră booleană este o structură $(A, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1)$ unde:

1) $|A| \geq 2$, A conținând cel puțin 2 elemente diferite, 0 și 1, $0 \neq 1$
2) $\wedge, \vee$ sunt operații binare
3) $\bar{\ }$ operator unar
4) există elementul unic 0 - elementul zero, cu proprietățile:

$$x \wedge 0 = 0 \wedge x = 0, \quad x \vee 0 = 0 \vee x = 0, \quad \forall x \in A$$

5) există elementul unic 1 - elementul unitate, cu proprietățile:

$$x \wedge 1 = 1 \wedge x = x, \quad x \vee 1 = 1 \vee x = 1, \quad \forall x \in A$$

6) elementul zero, 0 și elementul unitate, 1 sunt primul respectiv ultimul element, iar $\bar{x}$ este complementul lui x:

$$x \wedge \bar{x} = 0, \quad x \vee \bar{x} = 1, \quad \forall x \in A$$

7) dubla negație:

$$\bar{\bar{x}} = x, \quad \forall x \in A$$

8) operațiile $\wedge, \vee$ sunt comutative:

$$x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x, \quad \forall x, y \in A$$

9) operațiile $\wedge, \vee$ sunt asociative:

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \ (= x \wedge y \wedge z)$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \ (= x \vee y \vee z) \quad \forall x, y, z \in A$$

10) au loc proprietățile de distributivitate ale operatorilor $\vee$ și $\wedge$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \forall x, y, z \in A$$

11) are loc proprietatea de idempotență pentru ambele operații:

$x \wedge x = x$ și $x \vee x = x$,

12) au loc legile lui DeMorgan

$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ $\quad, \forall x, y \in A$

13) au loc proprietățile de absorbție:

$x \wedge (x \vee y) = x$
$x \vee (x \wedge y) = x$ $\quad, \forall x, y \in A$

! Obs
Într-o algebră booleană are loc principiul dualității:
„Pentru orice egalitate între două expresii booleene $U = V$, există o nouă egalitate $U' = V'$, obținută prin interschimbarea operatorilor $\wedge, \vee$ și a elementelor $0, 1$"

! Obs: Majoritatea axiomelor algebrei booleene sunt perechi de axiome duale.

Algebră booleană binară

$\mathcal{B} = (B_2 = \{0,1\}, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1)$

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

alte exemple

$(\mathcal{F}_p, \wedge, \vee, \neg, F, T)$

$(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, C, \emptyset, X)$

Funcții booleene

Fie $\mathcal{B} = (B_2, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1)$ algebra booleană binară, $B_2 = \{0,1\}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. O funcție booleană cu n variabile este o funcție definită recursiv astfel:

1) Funcția proiecție $P_i : B_2^n \to B_2$, $P_i(x_1, \dots, x_i, \dots x_n) = x_i$, care păstrează doar variabila x_i, este o funcție booleană.

2) Dacă avem două funcții booleene $f, g : B_2^n \to B_2$ atunci $f \wedge g$, $f \vee g$, $\overline{f}$ sunt funcții booleene, unde:

$(f \wedge g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \wedge g(x_1, \dots, x_n)$
$(f \vee g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \vee g(x_1, \dots, x_n)$
$\overline{f}(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}$

– Orice funcție booleană este obținută prin aplicarea de un număr finit de ori a regulilor 1 și 2 de mai sus.

Toate funcțiile booleene definite pe $B_2^n \to B_2$ pentru $n=1$

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Teoreme

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, există 2^{2^n} funcții booleene de n variabile
- Mulțimea tuturor funcțiilor booleene de $n \in \mathbb{N}^*$ variabile formează o algebră booleană: $(FB(n), \wedge, \vee, \bar{\ }, f_0, f_{2^{2^n}-1})$ unde $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ și $f_{2^{2^n}-1}(x_1, \dots, x_n) = 1$ funcțiile constante 0, respectiv 1.

Notații

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{dacă } \alpha = 1 \\ \bar{x}, & \text{dacă } \alpha = 0 \end{cases}, \quad x \in \{0,1\}$$

pentru $x, \alpha \in \{0,1\}$, au loc: $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$

$0^0 = \bar{0} = 1$

$0^1 = 0$

$1^0 = \bar{1} = 0$

$1^1 = 1$

astfel se obține: $x^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = \alpha \\ 0, & \text{dacă } x \neq \alpha \end{cases}, \quad x, \alpha \in \{0,1\}$

Formele canonice ale funcțiilor booleene

- O funcție booleană $f: (B_2)^n \to B_2$, $n \in \mathbb{N}^*$ poate fi transformată în cele două forme echivalente:
  - forma canonică disjunctivă (FCD)

$$(1)\ f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n} \left(f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}\right)$$

  - forma canonică conjunctivă (FCC)

$$(2)\ f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n} \left(f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \vee x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}\right)$$

- O funcție booleană $f: (B_2)^n \to B_2$, $n \in \mathbb{N}^*$ este unic determinată de valorile sale $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, unde $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n$
  - forma canonică disjunctivă

$$(1) \Longleftrightarrow (1')\ f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n \\ \text{și } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1}} \left(x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}\right)$$

  - forma canonică conjunctivă

$$(2) \Longleftrightarrow (2')\ f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (B_2)^n \\ \text{și } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0}} \left(x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}\right)$$

!Obs

[FCC este utilă când există un număr mic de zerouri și un număr mare de valori 1 (realizări)

[FCD este recomandată în caz contrar, când există un număr mare de zerouri ale funcției și un număr mic de valori 1.

[funcția booleană f_0 nu poate fi scrisă în forma canonică disjunctivă (FCD) pt că NU ia valoarea 1 pt niciun argument

funcția booleană $f_{2^{2^n}-1}$ nu poate fi scrisă în forma canonică conjunctivă (FCC) pt că NU ia valoarea 0 pt niciun argument

Definiție

Fie $f:(B_2)^n \longrightarrow B_2$, $n \in \mathbb{N}^*$ o funcție booleană cu n variabile.

- o conjuncție de variabile se numește **monom**
- un monom care conține toate cele n variabile se numește **monom canonic** sau **minterm** de n variabile. Are forma

$$x_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_i \in B_2$$

- disjuncția care conține toate cele n variabile, având forma:

$x_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n}$ se numește **maxterm** de n variabile

Proprietăți

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, există exact 2^n maxtermi: $M_0, M_1, \dots, M_{2^n-1}$ și mintermi: $m_0, m_1, \dots, m_{2^n-1}$
- maxterm = funcție booleană care ia valoarea 0 doar pt un argument
- minterm = funcție booleană care ia valoarea 1 doar pt un argument

!Obs

1) Indicele unui minterm de n variabile este obținut prin conversia în zecimal a numărului binar format cu cifrele ce reprezintă puterile celor n variabile ale expresiei acestuia

2) Indicele unui maxterm de n variabile este obținut prin conversia în zecimal a numărului binar format cu dualele cifrelor ce reprezintă puterile celor n variabile ale expresiei acestuia.

Propoziție

- Conjuncția a doi mintermi distincți este 0:
  $m_i \wedge m_j = 0$, $\forall i \neq j$, $i,j = \overline{0, 2^n-1}$
- Disjuncția a doi maxtermi distincți este 1:
  $M_i \vee M_j = 1$, $\forall i \neq j$, $i,j = \overline{0, 2^n-1}$
- Un minterm și un maxterm cu același indice sunt funcții duale.
  $M_i = \overline{m_i}$ și $M_j = \overline{m_j}$, $\forall i = \overline{0, 2^n-1}$