Tema nr. 7

Date $(n+1)$ puncte distincte, x_0, x_1, ..., x_n ($x_i \in \mathbf{R}\ \forall i$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$) şi cele $(n+1)$ valori în aceste puncte ale unei funcţii necunoscute f , $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

să se aproximeze funcţia f în $\bar{x}$, $f(\bar{x})$, pentru un $\bar{x}$ dat, $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$:

- utilizând forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange şi schema lui Aitken de calcul a diferenţelor divizate; să se afişeze $L^{(n)}(\bar{x})$ şi $|L^{(n)}(\bar{x}) - f(\bar{x})|$;

- folosind interpolarea trigonometrică. În acest caz se consideră că funcţia f este periodică de perioadă 2π iar nodurile de interpolare sunt în număr impar $n = 2m$, $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2m} < 2\pi$. Să se afişeze $T_n(\bar{x})$ şi $|T_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|$.

Nodurile de interpolare $\{x_i, i = 0, ..., n\}$ se vor genera astfel: x_0 şi x_n se citesc de la tastatură sau dintr-un fişier astfel ca $x_0 < x_n$, iar x_i se generează aleator astfel ca $x_i \in (x_0, x_n)$ şi $x_{i-1} < x_i$; valorile $\{y_i, i = 0, ..., n\}$ se construiesc folosind o funcţie f declarată în program (exemple de alegere a nodurilor x_0, x_n şi a funcţiei $f(x)$ se găsesc la sfârşitul acestui document), $y_i = f(x_i), i = 0, ..., n$;

Bonus (10 pt): Să se facă graficul funcţiei f şi al funcţiilor aproximative calculate $L^{(n)}$ şi T_n

Interpolare numerică

Se cunosc valorile unei funcţii într-un număr finit de puncte, $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline f & y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{array} \quad , \ x_i \neq x_j \ \ \forall\, i \neq j \ , \quad y_i = f(x_i) \ \ i = \overline{0,n}$$

Pentru a aproxima funcţia f în $\bar{x}$, $f(\bar{x})$, $\bar{x} \neq x_i$ se construieşte o funcţie elementară $S(x)$ care satisface:

$$S(x_i) = y_i \ , \quad i = \overline{0,n}.$$

Valoarea aproximativă pentru $f(\bar{x})$ este $S(\bar{x})$:

$$f(\bar{x}) \approx S(\bar{x})$$

Considerăm două moduri de construcţie a funcţiei S:

1. polinom de grad n - polinomul de interpolare Lagrange;
2. combinaţie liniară de funcţii sin şi cos.

Polinomul de interpolare Lagrange

Unicul polinom de grad n, $L^{(n)}$, ce satisface relaţia de interpolare:

$$L^{(n)}(x_i) = y_i \quad , \quad i = \overline{0,n}$$

poate fi scris în mai multe feluri. O primă formă este următoarea:

$$L^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

O a doua formă este forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange:

$$\begin{aligned} L^{(n)}(x) = \quad & y_0 + [x_0, x_1]_f (x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]_f (x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & +[x_0, \ldots, x_n]_f (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Această formă are avantajul că dacă se mai adaugă un nod (x_{n+1}, y_{n+1}), valoarea polinomului Lagrange $L^{(n+1)}$ se calculează simplu din $L^{(n)}$ astfel:

$$L^{(n+1)}(x) = L^{(n)}(x) + [x_0, \ldots, x_{n+1}]_f (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

Coeficienţii:

$$[x_0, x_1, ..., x_k]_f = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)}$$

se numesc diferenţe divizate de ordin k ale funcţiei f pe nodurile $x_0, \ldots, x_k$. Calculul diferenţelor divizate este mai economic din punct de vedere numeric dacă se foloseşte definiţia recursivă:

$$[x_0, x_1]_f = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad , \quad [x_0, x_1, x_2]_f = \frac{[x_2, x_1]_f - [x_1, x_0]_f}{x_2 - x_0}$$

$$[x_0, ..., x_{k+1}]_f = \frac{[x_{k+1}, \ldots, x_1]_f - [x_k, \ldots, x_0]_f}{x_{k+1} - x_0}$$

Schema lui Aitken de calcul a diferenţelor divizate

Schema lui Aitken este un procedeu rapid, în n paşi, de calcul a diferenţelor divizate necesare construirii polinomului Lagrange în forma Newton. Modul de calcul este ilustrat în tabelul de mai jos:

		Pas 1	Pas 2		Pas n
x_0	y_0				
x_1	y_1	$[x_0, x_1]_f$			
x_2	y_2	$[x_1, x_2]_f$	$[x_0, x_1, x_2]_f$		
x_3	y_3	$[x_2, x_3]_f$	$[x_1, x_2, x_3]_f$		
$\vdots$					
x_{n-1}	y_{n-1}	$[x_{n-2}, x_{n-1}]_f$	$[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]_f$		
x_n	y_n	$[x_{n-1}, x_n]_f$	$[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]_f$	$\cdots$	$[x_0, ..., x_n]_f$

La pasul k se calculează diferenţele divizate de ordin k:

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]_f, [x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}]_f, \ldots, [x_{n-k}, \ldots, x_n]_f$$

folosind doar diferenţlele divizate de la pasul anterior şi nodurile x_i. La fiecare pas, calculele se pot face în acelaşi vector y. După calcularea diferenţelor divizate de ordin k (pasul k) vectorul y are următoarea structură:

$$y = (y_0, [x_0, x_1]_f, [x_0, x_1, x_2]_f, \ldots, [x_0, x_1, \ldots, x_k]_f, \ldots, [x_{n-k}, \ldots, x_n]_f)$$

După pasul n vectorul y va conţine toate diferemţele divizate de care avem nevoie pentru a calcula L_n:

$$y = (y_0, [x_0, x_1]_f, [x_0, x_1, x_2]_f, \ldots, [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]_f, [x_0, x_1, \ldots, x_n]_f)$$

Valoarea funcţiei f în punctul $\bar{x}$ se va aproxima prin $L_n(\bar{x})$.

Interpolare trigonometrică

Interpolarea trigonometrică se foloseşte pentru aproximarea funcţiilor periodice de perioadă T:

$$f(x+T) = f(x) \quad , \quad \forall x.$$

Vom considera cazul $T = 2\pi$. Presupunem că avem un număr impar de puncte de interpolare $n = 2m$ din intervalul $[0, 2\pi)$:

$$0 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < 2\pi.$$

Funcţia f se aproximează ca o combinaţie liniară de funcţii sin şi cos astfel:

$$f(x) \approx T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(k\,x) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sin(k\,x).$$

Notăm cu:

$$\phi_0(x) = 1 \quad , \quad \phi_{2k-1}(x) = \sin(k\,x) \quad , \quad \phi_{2k}(x) = \cos(k\,x) \quad , \quad k = 1, \ldots, m.$$

Coeficienţii $\{a_k; k = 0, \ldots m\}$ şi $\{b_k; k = 1, \ldots m\}$ se găsesc rezolvând sistemul liniar:

$$TX = Y \quad , \quad X = (a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_m, a_m)^T$$

$$T = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \ldots & \phi_{n-1}(x_0) & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \ldots & \phi_{n-1}(x_1) & \phi_n(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \ldots & \phi_{n-1}(x_2) & \phi_n(x_2) \\ \vdots & & & & & \\ \phi_0(x_{n-1}) & \phi_1(x_{n-1}) & \phi_2(x_{n-1}) & \ldots & \phi_{n-1}(x_{n-1}) & \phi_n(x_{n-1}) \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \ldots & \phi_{n-1}(x_n) & \phi_n(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ b_m \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2m+1}.$$

Rezolvarea acestui sistem liniar se poate face folosind una din funcţiile de rezolvare a sistemelor liniare din biblioteca utilizată la *Tema 2*.

$$f(\bar{x}) \approx T_n(\bar{x}) = a_0\phi_0(\bar{x}) + b_1\phi_1(\bar{x}) + a_1\phi_2(\bar{x}) + \cdots + b_m\phi_{2m-1}(\bar{x}) + a_m\phi_{2m}(\bar{x}).$$

Date de intrare - exemple

$$x_0 = a = 1 \quad , \quad x_n = b = 5 \quad , \quad f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 12$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_n = \frac{31\pi}{16} \quad , \quad f(x) = \sin(x) - \cos(x)$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_n = \frac{31\pi}{16} \quad , \quad f(x) = \sin(2x) + \sin(x) + \cos(3x)$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_n = \frac{63\pi}{32} \quad , \quad f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$$