Tema nr. 3

În fişierele a.txt, b.txt, aplusb.txt, aorib.txt postate pe pagina laboratorului, sunt memorate, pentru 4 matrici rare (cu *'puţine'* elemente $a_{ij} \neq 0$) şi 4 vectori, următoarele elemente:

- n dimensiunea datelor,
- b_i *, i=1,2, … , n* elementele vectorului $b \in \mathbb{R}^n$,
- $a_{ij} \neq 0$*, i, j -* elementele nenule din matricea rară $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, indicii de linie şi indicii de coloană ai respectivului element.

Folosind fişierele ataşate, să se citească dimensiunea matricilor, vectorul b şi să se genereze structurile de date necesare pentru memorarea economică a matricii rare (schema economică de memorare este descrisă mai jos). Se presupune că elementele nenule ale matricii sunt plasate aleator în fişier (nu sunt ordonate după indicii de linie sau de coloană, sau altfel). Matricile din fişierele a.txt şi b.txt au cel mult 10 elemente nenule pe fiecare linie (să se verifice !!!).

Fie $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ două matrici rare şi $x \in \mathbb{R}^n$ un vector cu elemente reale. Folosind schema de memorare rară prezentată mai jos, să se calculeze:

- $A+B$ suma matricilor,
- $A*B$ produsul matricilor,
- $A*x$ produsul matrice vector.

Să se verifice că suma/produsul matricilor din fisierele a.txt și b.txt este matricea din fișierul aplusb.txt/aorib.txt. Două elemente care au aceeași indici de linie și coloană (i,j) sunt considerate egale dacă $|c_{ij}-d_{ij}| < \varepsilon$. Pentru $x_i=n-i,\ i=1,\dots,n$, să se verifice că $A*x$ (A fiind una din matricile memorate în a.txt sau b.txt) este chiar vectorul b din același fișier:

$$A*(2017, 2016, \dots 3,1)^T = b.$$

Observații: 1) La rezolvarea problemelor de mai sus să nu se recurgă la alocarea de matrici clasice şi nici să nu se folosească o funcție ***val(i,j)*** care returnează pentru orice ***(i,j)*** valoarea elementului corespunzător din matrice.

2) La adunarea matricilor din a.txt cu b.txt rezultatul este o matrice cu maxim 20 elemente nenule pe linie. În cazul înmulțirii gradul de umplere al matricii pe linii nu poate fi precizat dinainte.

3) Implementarea schemei de memorare rară descrisă în acest fișier este **obligatorie** (neimplementarea ei se penalizează). Cei care aleg o altă schemă de memorare a matricilor rare trebuie să prezinte suplimentar un fişier documentație care să explice schema folosită şi să prezinte un exemplu (cel mult 5×5, se poate folosi exemplul din temă) care să precizeze conținutul structurilor de date utilizate pentru memorarea matricii rare.

4) Dacă în fișierele atașate apar mai multe valori cu aceeași indici de linie și coloana:

val_1 , i, j

…

val_2 , i, j

…

val_k , i, j

o astfel de situație are următoarea semnificație:

$$a_{ij} = val_1 + val_2 + \cdots + val_k \,.$$

Memorarea matricilor rare (schema de memorare economică)

Pentru matricile rare se memorează doar elementele nenule ale matricii şi informaţii privind indicii de linie şi de coloană ale respectivelor elemente astfel încât să putem reface toată informaţia din matricea în formă clasică.

Vom nota cu NN numărul de elemente nenule ale matricii A, cu excepţia celor diagonale. În total matricea A ar trebui să aibă maxim NN+n elemente nenule.

Matricea A se memorează folosind 3 vectori:

- un vector pentru elementele diagonalei matricii A (de dim n)
- un vector pentru celelalte valori nenule (de dim NN+n),
- un vector care memorează indicii de coloană ai elementelor din vectorul precedent (de dim NN+n).

Schema de memorare propusă trebuie să ţină cont de faptul că avem nevoie de acces rapid la liniile matricii A. Vom memora elementele nediagonale nenule ale matricii A în ordinea crescătoare a indicilor de linie, în cadrul liniei nu e neapărat ca elementele să fie memorate în ordinea crescătoare a indicilor de coloană.

Matricea ***A*** se memorează folosind 3 vectori:

$$\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n} \quad , \quad \boldsymbol{d_i = a_{ii} \neq 0} \ , \ \forall \boldsymbol{i = 1,...,n}$$

$\boldsymbol{val} \in \mathbb{R}^{NN+n}$ $\boldsymbol{val_k = a_{ij} \neq 0}$ − in ordinea liniilor,

vectorul ***val*** contine si elemente $\boldsymbol{val_k = 0}$ pentru a marca inceputul unei linii

$\boldsymbol{col} \in \mathbb{N}^{NN+n}$ $\boldsymbol{col_k = j \neq i}$ **(**indicele de coloana al elementului din $\boldsymbol{val_k}$**)**

$$\boldsymbol{col_k \in \{1,2,...,n\}}$$

pentru $\boldsymbol{val_k = 0}$ avem $\boldsymbol{col_k = -i}$

Vectorii ***val*** şi ***col*** pot fi comasaţi într-un singur vector dacă folosim o structură pentru (***val, indice_coloana)***.

În vectorul ***val*** apar elemente de valoare ***0*** pentru a marca sfârşitul unei linii şi începutul următoarei linii. Dacă $\boldsymbol{val_k=0}$ atunci putem pune în $\boldsymbol{col_k=-i}$ adică minus indicele liniei care începe în vectorii ***val*** şi ***col*** de la poziția $\boldsymbol{k+1}$.

Exemplu:

Matricea:

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{102.5} & \mathbf{0.0} & \mathbf{2.5} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{3.5} & \mathbf{104.88} & \mathbf{1.05} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.33} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{100.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{1.3} & \mathbf{0.0} & \mathbf{101.3} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.73} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{1.5} & \mathbf{102.23} \end{pmatrix}$$

se memorează astfel:

$$\boldsymbol{n=5 \quad , \quad NN=7}$$

$$\boldsymbol{d=\left(102.5 \quad 104.88 \quad 100.0 \quad 101.3 \quad 102.23\right)^T}$$

$$\boldsymbol{val=\left(0 \quad 2.5 \quad 0 \quad 1.05 \quad 3.5 \quad 0.33 \quad 0 \quad 0 \quad 1.3 \quad 0 \quad 0.73 \quad 1.5 \quad 0\right)^T}$$

$$\boldsymbol{col=\left(-1 \quad 3 \quad -2 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad -3 \quad -4 \quad 2 \quad -5 \quad 1 \quad 4 \quad -6\right)^T}$$