Tema nr. 8

1. Fie P un polinom de grad n cu coeficienţi reali:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \quad a_0 \neq 0$$

   Să se calculeze intervalul $[-R, R]$ în care se găsesc toate rădăcinile reale ale polinomului P. Să se implementeze metoda lui Laguerre de aproximare a rădăcinilor unui polinom. Pentru calculul valorii unui polinom într-un punct să se folosească schema lui Horner. Să se aproximeze cât mai multe rădăcini ale polinomului P cu metoda Laguerre pornind de la puncte de start x_0, x_1, x_2 diferite. Rezultatele se vor afişa pe ecran şi se vor memora într-un fişier. În fişierul respectiv se vor scrie doar rădăcinile distincte (2 valori reale v_1 şi v_2 sunt considerate diferite dacă $|v_1 - v_2| > \epsilon$).

   Bonus 15 pt.: găsirea rădăcinilor complexe ale polinomului P.

2. Fie $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ o funcţie reală. Să se aproximeze un punct de minim (local sau global) al funcţiei F folosind metoda secantei. Să se compare soluţiile obţinute folosind cele două moduri de aproximare a derivatei funcţei F.

Metoda Laguerre de aproximare a rădăcinilor reale ale unui polinom

Fie P un polinom de grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \ , \quad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

Toate rădăcinile reale ale polinomului P se află în intervalul $[-R,\ R]$ unde R este dat de:

$$R = \frac{|a_0| + A}{|a_0|} \quad , \quad A = \max\{|a_i| \ ; \ i = \overline{1,n}\} \tag{2}$$

Pentru a aproxima o rădăcină reală x^* (din intervalul [-R, R]) a polinomului P definit de (1), se construieşte un şir de numere reale, $\{x_k\}$, care converge la rădăcina $x^* \in [-R,\ R]$ căutată ($x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$) .

Pornind cu x_0 o valoare reală dată, şirul $\{x_k\}$ se construieşte astfel (x_{k+1} se calculează din x_k):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{n\,P(x_k)}{P'(x_k) + \text{semn}(\,P'(x_k)\,)\,\sqrt{H(x_k)}}\ ,\ k = 0, 1, \ldots \\ x_{k+1} &= x_k - \Delta\ x_k\ (\Delta\ x_k = \frac{n\,P(x_k)}{P'(x_k) + \text{semn}(\,P'(x_k)\,)\,\sqrt{H(x_k)}}) \\ H(x_k) &= (n-1)^2\,[P'(x_k)]^2 - n(n-1)P(x_k)P''(x_k) \end{aligned} \tag{3}$$

Prin P' şi P'' am notat prima şi respectiv a doua derivată a polinomului P. Pentru $x \in \mathbf{R}$ funcţia semn(x) se defineşte astfel:

$$\text{semn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \geq 0 \\ -1 & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Observaţie importantă: Alegerea iteraţiei iniţiale, x_0, poate determina convergenţa sau divergenţa şirului x_k la x^*. De obicei, o alegere a iteraţiei iniţiale x_0 în vecinătatea lui x^* asigură convergenţa $x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$.

Nu este nevoie de memorat întreg şirul $\{x_k\}$ ci doar 'ultimul' element x_{k_0} calculat. Se consideră că o valoare $x_{k_0} \approx x^*$ (este 'ultimul' element calculat) atunci când diferenţa dintre două iteraţii succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \epsilon$$

unde ϵ este precizia cu care vrem să aproximăm soluţia x^*. Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluţiei x^* cu metoda lui Laguerre este următoarea:

Metoda lui Laguerre

$x = (x_0) =$ ales aleator ; k=0 ;
(pentru convergenţa şirului $\{x_k\}$ este de preferat de ales iteraţia iniţială x_0 în vecinătatea soluţiei căutate)

do
{
calculează $\Delta\, x$ folosind formula (3) ;
if ($H(x) < 0$) EXIT;
(se poate încerca schimbarea iteraţiei iniţiale x_0)
if (numitorul din $\Delta\, x$ este în [-ϵ, ϵ]) EXIT;
(se poate încerca schimbarea iteraţiei iniţiale x_0)
$x = x - \Delta\, x$;
k=k+1;
}
while ($|\Delta\, x| \geq \epsilon$ şi $k \leq k_{\max}$ şi $|\Delta\, x| \leq 10^8$)
if ($|\Delta\, x| < \epsilon$) $x_k \approx x^*$;
else *divergenţă* ; (de încercat schimbarea lui x_0)

Schema lui Horner de calcul al valorii $P(v)$

Fie P un polinom de grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \ a_i \in \mathbf{R}\ \forall i \ , \ \ a_0 \neq 0 \quad (4)$$

Putem scrie polinomul P şi astfel:

$$P(x) = ((\cdots(((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \cdots)x + a_{n-1})x + a_n$$

Ţinând cont de această grupare a termenilor, obţinem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului P într-un punct $v \in \mathbf{R}$ oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{array}{rcl} b_0 & = & a_0 \ , \\ b_i & = & a_i + b_{i-1}v \ , \quad i = \overline{1, n} \end{array} \qquad (5)$$

În şirul de mai sus:

$$P(v) := b_n$$

iar ceilalţi termeni b_i calculaţi, sunt coeficienţii polinomului cât, Q, din împărţirea cu rest:

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x - v)Q(x) + r \ , \\ Q(x) & = & b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1} \ , \\ r & = & b_n = P(v). \end{array} \qquad (6)$$

Pentru a calcula $P(v)$ (b_n) cu formulele (5) se poate folosi o singură valoare reală $b \in \mathbf{R}$ şi nu un vector $b \in \mathbf{R}^n$.

Exemple

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \ , \\
& \quad a_0 = 1.0\,, \quad a_1 = -6.0\,, \quad a_2 = 11.0\,, \quad a_3 = -6. \\
P(x) &= (x-\frac{2}{3})(x-\frac{1}{7})(x+1)(x-\frac{3}{2}) \\
&= \frac{1}{42}(42x^4 - 55x^3 - 42x^2 + 49x - 6) \\
& \quad a_0 = 42.0\,, \quad a_1 = -55.0\,, \quad a_2 = -42.0\,, \quad a_3 = 49.0\,, \quad a_4 = -6.0. \\
P(x) &= (x-1)(x-\frac{1}{2})(x-3)(x-\frac{1}{4}) \\
&= \frac{1}{8}(8x^4 - 38x^3 + 49x^2 - 22x + 3) \\
& \quad a_0 = 8.0\,, \quad a_1 = -38.0\,, \quad a_2 = 49.0\,, \quad a_3 = -22.0\,, \quad a_4 = 3.0. \\
P(x) &= (x-1)^2(x-2)^2 \\
&= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4
\end{aligned}$$

Calcul valorii polinomului P cu argumente complexe

Fie numărul compex $z = c + id$. Vrem să calculăm numărul complex:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = C + iD$$

Polinomul real de gradul 2 care are ca rădăcini numerele z şi $\bar{z} = c - id$ este:

$$T(x) = x^2 + px + q = (x-z)(x-\bar{z}) \quad \text{cu} \quad p = -2c \ , \ q = c^2 + d^2$$

Facem împărţirea cu rest a polinomului P la polinomul T:

$$\begin{aligned} P(x) &= T(x)Q(x) + R(x) \\ Q(x) &= b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \cdots + b_{n-3}x + b_{n-2} \ , \\ R(x) &= r_0x + r_1 \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Coeficienţii reali $\{b_i\}$ şi $\{r_i\}$ ai polinoamelor Q şi R se pot calcula identificând coefiecienţii puterilor lui x din membrul stâng ai relaţiei (7) cu cei ai membrului drept. Se deduce următoarea formulă de recurenţă:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \quad , \quad b_1 = a_1 - p\,b_0 \\ b_i &= a_i - p\,b_{i-1} - q\,b_{i-2} \quad , \quad i = 2, \ldots n \\ r_0 &= b_{n-1} \quad , \quad r_1 = b_n + p\,b_{n-1}. \end{aligned}$$

Dacă folosim relaţia (7) pentru $x = z$, avem:

$$P(z) = T(z)\,Q(z) + R(z) = R(z) = r_0\,z + r_1 = (r_0\,c + r_1) + i\,r_0\,d.$$

Prin urmare, obţinem:

$$\begin{aligned} C &= r_0\,c + r_1 = b_{n-1}\,c + b_n + p\,b_{n-1} \\ D &= r_0\,d = b_{n-1}\,d. \end{aligned}$$

Minimizarea funcţiilor de o variabilă

Fie $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ o funcţie reală de două ori derivabilă, $F \in C^2(\mathbf{R})$, pentru care vrem să aproximăm soluţia x^* a problemei de minimizare:

$$\min\{F(x); x \in V\} \quad \longleftrightarrow \quad F(x^*) \leq F(x) \quad \forall x \in V \tag{8}$$

unde $V = \mathbf{R}$ (x^* este punct de minim global) sau $V = [\bar{x} - r, \bar{x} + r]$ (punct de minim local). Se numeşte *punct critic* pentru funcţia F, un punct $\tilde{x}$ care este rădăcină a primei derivate a lui F:

$$F'(\tilde{x}) = 0. \tag{9}$$

Se ştie că pentru funcţiile de două ori derivabile, punctele de minim ale funcţiei F se găsesc printre punctele critice. Un punct critic este punct de minim dacă:

$$F''(x^*) > 0.$$

Vom căuta punctele de minim ale lui F printre soluţiile ecuaţiei (9). Mai jos este descrisă metoda secantei de aproximare a unei rădăcini a ecuaţiei neliniare:

$$g(x) = 0 \qquad (g(x) = F'(x)).$$

Metoda secantei

Rădăcina x^* se aproximează construind un şir $\{x_k\}$ care, în anumite condiţii, converge la soluţia x^* căutată. Convergenţa şirului depinde de alegerea primelor elemente ale şirului.

Elementul $k + 1$ al şirului, x_{k+1}, se construieşte pornind de la două elemente precedente, x_{k-1} şi x_k, astfel:

> x_{k+1} este punctul de intersecţie al axei Ox cu dreapta care uneşte punctele $(x_{k-1}, g(x_{k-1}))$ şi $(x_k, g(x_k))$.

Se deduce următoarea relaţie:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})g(x_k)}{g(x_k) - g(x_{k-1})} = x_k - \Delta x_k \,, \quad k = 0, 1, \dots \,, \quad x_0 \text{ şi } x_1 - \text{daţi} \tag{10}$$

Elementul x_{k+1} nu poate fi calculat atunci când $g(x_k) = g(x_{k-1})$, în acest caz se poate pune $\Delta x_k = 10^{-5}$.

$$g(x_k) = g(x_{k-1}) \longrightarrow \Delta x_k = 10^{-5}.$$

Convergenţa şirului $\{x_k\}$ la x^* depinde de alegerea primelor două elemente ale şirului, x_0 şi x_1.

Observaţie importantă: Ca şi în cazul metodei Laguerre, alegerea datelor iniţiale, x_0, x_1, pot determina convergenţa sau divergenţa şirului x_k la x^*. De obicei, o alegere a datelor iniţiale în vecinătatea lui x^* asigură convergenţa $x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$.

Nu este necesară memorarea întregului şir $\{x_k\}$ ci avem nevoie doar de 'ultimul' element x_{k_0} calculat. Se consideră că o valoare x_{k_0} aproximează rădăcina căutată, x^*, $x_{k_0} \approx x^*$ (x_{k_0} este ultimul element al şirului care se calculează) atunci când diferenţa dintre două iteraţii succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \epsilon$$

unde ϵ este precizia cu care vrem să aproximăm soluţia x^*. Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluţiei x^* este următoarea:

Schema de calcul

$x = (x_0$ sau $x_1)$; // x_0, x_1 se aleg aleator ;
$k = 0$;
//(pentru convergenţa şirului $\{x_k\}$ este bine de ales
// datele iniţiale x_0, x_1 în vecinătatea soluţiei căutate)
do
{
- calculează $\Delta\, x$ cu formula (10) ;
- if (numitorul din $\Delta\, x$ este în [-ϵ, ϵ]) $\Delta\, x = 10^{-5}$;
- $x = x - \Delta\, x$;
- k=k+1;
}
while ($|\Delta\, x| \geq \epsilon$ şi $k \leq k_{\max}$ şi $|\Delta\, x| \leq 10^8$)
if ($|\Delta\, x| < \epsilon$) $x_k \approx x^*$;
else *"divergenţă"* ; //(de încercat schimbarea datelor iniţiale)

Pentru a calcula valoarea derivatei funcţiei F într-un punct oarecare se pot folosi următoarele două formule de aproximare:

$$F'(x) \approx G_i(x,h) \quad , \quad i = 1,2$$

unde

$$G_1(x,h) = \frac{3F(x) - 4F(x-h) + F(x-2h)}{2h}$$

$$G_2(x,h) = \frac{-F(x+2h) + 8F(x+h) - 8F(x-h) + F(x-2h)}{12h}$$

cu $h = 10^{-5}$ sau 10^{-6} (poate fi considerat ca parametru de intrare). Se poate verifica dacă punctul critic calculat cu metoda secantei este punct de minim verificând relaţia:

$$F''(x^*) > 0.$$

Pentru a aproxima derivata secundă F'' se poate folosi formula:

$$F''(x) \approx \frac{-F(x+2h) + 16F(x+h) - 30F(x) + 16F(x-h) - F(x-2h)}{12h^2}$$

Exemple

$$F(x) = x^2 - 4x + 3 \quad , \quad x^* = 2$$

$$F(x) = x^2 + e^x \quad , \quad x^* \approx -0.351734$$

$$F(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \quad , \quad x^* \in \{1,2\}$$