En mecánica, el funcional a optimizar será el lagrangiano L y la integral que minimizaremos será la acción:

$$\boxed{\int L\,dt = \text{"Acción"}}$$

"Principio de Hamilton": Este principio establece que de todos los caminos o trayectorias posibles, entre 2 extremos fijos, la trayectoria correcta / verdadera (la soluø) será aquella en que la acción sea un extremo, con $\boxed{L = T - U}$

$$\Rightarrow \text{E-L}: \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0} \qquad \sigma, 1, \dots, n-K$$

Como el lagrangiano se define como $L = T - U$, entonces el principio de Hamilton nos dirá que la partícula minimizará la diferencia integrada entre la energía cinética T y la potencial U.

Como las ecs. de Lagrange son equivalentes a las leyes de Newton, para un sist. conservativo, podemos considerar al principio de Hamilton como un enunciado fundamental de la mecánica.

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0}$$ "Ppio. de Hamilton"

Fuerzas de Restricción

23 · marzo.

P. Hamilton $\longrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$

· consideremos L en términos de todas las variables del problema.

son las coord. generalizadas sin restricciones.

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dots, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

P. Hamilton:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\sigma=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \cdot \delta \dot{q}_\sigma \right) dt$$

· si imponemos extremos fijos: $\delta q_\sigma(t_1) = \delta q_\sigma(t_2) = 0$

todas las variables tienen que morir en los extremos.

$\longrightarrow$ técnica: $\frac{d}{dt}(A \cdot B)$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\sigma=1}^{n} \delta q_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \right) dt = 0$$

<u>Fuerzas de restricción:</u>

· A menudo es adecuado incorporar las k restricciones holonómicas en el principio de Hamilton vía "multiplicadores de Lagrange".

Si hay otras restricciones

Primero, notemos que este principio es válido incluso si los $\{q_\sigma\}$ no son completa% independientes.

Hay que ver las fuerzas que generan las resticiones.

Las restricciones se escriben como siempre:

$$\boxed{f_j(q_1, \ldots, q_n, t) = C_j \quad , \quad j = 1, \ldots, K}$$

$$\delta f_j = \frac{\partial f_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial q_n}\cdot\delta q_n = \sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma}\cdot\delta q_\sigma = 0$$

cte

deriv. de una cte.

Por cada restricción va a haber una $\vec{F}$ de restricción y un multi. de Lagrange.

→ multiplicamos por un multiplicador λ_j.

↳ luego sumamos en j:

$$\sum_j \lambda_j \delta f_j = \sum_j \lambda_j \sum \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma}\cdot\delta q_\sigma$$

Siguen sumando 0.

$$= \sum_{\sigma=1}^{n}\left(\sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma$$ → Integramos entre t_1 y t_2

Le agregamos un 0.

Vamos a incluir las restricciones para sacar info. (una operación variacional en las restricciones).

$$\text{P. Hamilton} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\sum_{\sigma=1}^{n}\underbrace{\delta q_\sigma}_{\text{puede ser o no ser 0.}}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) + \sum_{j=1}^{K}\lambda_j\frac{\partial f_i}{\partial q_\sigma}\right)}_{\text{Coef.}} dt = 0$$

Coef. nulos $\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma}.}$$ $\sigma = 1, \dots, n$

$f_j(q_1, \dots, q_n, t)$

. $n+k$ ecuaciones , $n+k$ incógnitas $\rightarrow$ $q_\sigma + \lambda_j$

* Rodadura : Roce me ayuda a rodar pero no quita energía.

Los multiplicadores de lagrange nos darán información nueva respecto al problema, ya que nos ayudarán a determinar las fuerzas de restricción / reacción asociados a una restricción f_j, además de las ecs. de movimiento.

Recordemos la forma original de las ecs. de lagrange para n grados de libertad independientes:

fuerza generalizada.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma \quad , \quad \sigma = 1, \dots, n.$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_i}{\partial q_\sigma}.}$$

las sacamos xq las fuerzas de restricc no realizaban W.

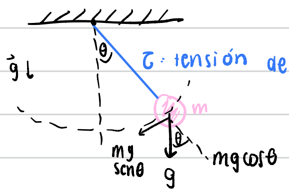
podemos entonces considerar a este nuevo término como fuerzas de restricø:

$$\boxed{Q_\sigma = -\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} + Q_\sigma^r}$$ → restricø.

* La fuerza generalizada Q_σ^r no está incluida en el Lagrangiano. Estas fuerzas no realizan trabajo virtual, ∴ no afectan la energía del sistema.

* El conjunto Q_σ^r representa a las fuerzas generalizadas que ejercen restricciones en el problema, tal que fuerzan a las partículas a seguir trayectorias restringidas.

<u>péndulo plano</u>: Largo fijo → $\boxed{f_1(r,\theta,t) = r = l_0}$



· Variables $n=2$ → r y θ

$q_1 = r$ y $q_2 = \theta$

aprender!

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

$$U = -mg\cos\theta + \text{de}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma}}$$

$$\boxed{L = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \text{de}}$$

$\underline{\sigma = 1}$: $q_1 = r$ $\quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

$\cdot\ \frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{\partial f_1}{\partial r} = 1 \longrightarrow \boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda_1 \cdot 1} = Q_\sigma^r$

$\underline{\sigma = 2}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\,\text{sen}\,\theta \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

$\cdot\ \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \rightarrow m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) + mgr\sin\theta = \lambda_1 \cdot 0 = 0$

no hay restricø en θ.

1 sola restricø.

→ plateado hacerlo cuando hay restricø en θ.
↳ $\theta = \theta_0$

Apliquemos la restricción : $\boxed{r = l_0} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\underline{q_1}$: $\boxed{m \cdot 0 \; - m l_0 \cdot \dot{\theta}^2 - mg \cos\theta = Q_1^r \equiv Q_r}$

$\underline{q_2}$: $\cancel{m} l_0^{\cancel{2}} \ddot{\theta} + \cancel{m} g \cancel{l_0} \sin\theta = 0 \longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0}\sin\theta = 0}$

Volvimos al pasado

$$\boxed{Q_r = -m l_0 \dot{\theta}^2 - mg\cos\theta}$$

Fuerza de tensión que reacciona.

Fuerza centrífuga.

$\frac{mv^2}{R} = \frac{m(r\dot{\theta})^2}{R} = m l_0 \dot{\theta}^2$

componente de la gravedad en $\hat{r}$.

Desafío semanal

→ Solucione el mismo problema t.q:

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(r,\theta,t) &: r = l_0 \\ f_2(r,\theta,t) &: \theta = \theta_0 \end{aligned}}$$

¡ va a salir torque!

Nota sobre Principio de Hamilton:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\,\delta \dot{q}_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\cdot\frac{d}{dt}\delta q_s$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\cdot\delta q_s\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\cdot\delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\cdot\frac{d}{dt}\delta q_s$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\cdot\frac{d}{dt}\delta q_s\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\cdot\delta q_s\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\cdot\delta q_s\right]dt$$

$$\rightarrow = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\cdot\delta q_s\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} = 0$$

; ya que: $\delta q_s(t_1) = \delta q_s(t_2) = 0$ (extremos fijos)

$$\therefore \boxed{\rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{n}\delta q_s\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)dt = 0}$$

Momentum y Hamiltoniano generalizado

28 · mar.

sea un sistema holonómico, conservativo, entonces sabemos que las ecs de lagrange serán:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\right) = 0 \quad , \quad \sigma = 1, \ldots, n-k$$

n-k coord. generalizadas
→ Independientes.

Def momentum generalizado o canónico:

$$\boxed{p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}} \quad \therefore \quad \boxed{\dot{p}_\sigma = \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}}$$

si alguna coord. generalizada no aparece explícitamente en el lagrangiano, entonces:

→ Momentum en esa variable se conserva

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0 \Rightarrow \boxed{p_\sigma = cte}$$

→ En este caso, se dice que la coordenada q_σ corresponde a una "coordenada cíclica".

→ La potencia no crece!

→ El momentum generalizado p_σ, correspondiente a una coord. cíclica, se dice que es una "cte de movimiento".

→ Si ponemos el péndulo con la misma C.I dos veces, va a hacer el mismo movimiento.

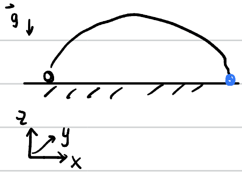
$-q_\sigma$ cíclica → cte movimiento = Integral de movimiento!

Principio de simetría y cantidades conservadas.

La existencia de cantidades dinámicas conservadas está en directa relación con la simetría del problema bajo estudio.
Si el sistema es invariante bajo alguna transformación continua de alguna variable, entonces T y U también serán invariantes ante alteraciones / modificaciones de la variable generalizada q_σ.

Ej 1: "Lanzamiento proyectil"

→ Mov. en 3D bajo potencial 1D.



$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(z).$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

∴ p_x, p_y ctes de movimiento!

$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$

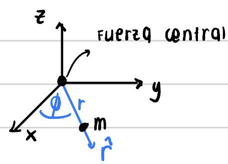
"Conservación del momentum lineal en $\hat{x}$ e $\hat{y}$"

como L no depende explícita# ni de x ni de y, entonces el problema será invariante frente a cualquier transformación / cambio / modificaø de estas variables.

→ Podemos hacer este experimento aquí, en melipilla o en China y observaríamos lo mismo.

<u>Ej 2</u>: "Movimiento en el plano xy dado un potencial central".

→ Si dependiera de ϕ, dado que el potencial es central, dependería de x,y y eso no puede ser.



$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$.

· Naturalmente, este problema es invariante frente a una rotación respecto al eje z.

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi =$ cte de movimiento.

ϕ variable cíclica.

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mr^2\dot\phi = cte$$

$\underline{E-L}$ $$\frac{d}{dt}(p_\phi) = \frac{d}{dt}(\underbrace{mr^2\dot\phi}_{\text{momento angular.}}) = 0$$

$\Rightarrow$ condi. iniciales: $\dot\phi(0) = \omega_0$, $r(0) = r_0$.

$$p_\phi = m r_0^2 \omega_0$$

$$\Rightarrow \cancel{m} r^2 \dot\phi = \cancel{m} r_0^2 \omega_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot\phi(t) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \omega_0.}$$

si conocemos $r(t)$ $\forall t$, entonces conoceremos $\dot\phi(t)$ $\forall t$ $\rightarrow \phi(t)$ $\forall t$.

Hamiltoniano

Miremos ahora la invarianza respecto al tiempo. Definamos de forma gral., una cantidad que denominaremos "Hamiltoniano":

$$\boxed{H = \sum_\sigma p_\sigma \cdot \dot q_\sigma - L.}$$ H funcional

$\Rightarrow$ Es una cant. conservada.

prop. 1: Si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, entonces este será una cte de movimiento.

$$\left[\text{Si} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} H = 0. \right]$$

ya que:

$L = L(q_1, \ldots, q_{n-k}, t)$.

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial q_{n-k}} \cdot dq_{n-k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} d\dot{q}_1 + \ldots \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n-k}} \cdot d\dot{q}_{n-k} + \frac{\partial L}{\partial t} \cdot dt$$

por hipótesis.

$$\underline{\text{Dem}} \quad dH = \sum_\sigma \left(dp_\sigma \cdot \dot{q}_\sigma + p_\sigma \cdot d\dot{q}_\sigma - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} \cdot \partial q_\sigma - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \cdot d\dot{q}_\sigma - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{0} \right)$$

$$dH = \sum_\sigma \left(dp_\sigma \cdot \dot{q}_\sigma + \cancel{p_\sigma \, d\dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} \cdot dq_\sigma - \cancel{p_\sigma \cdot d\dot{q}_\sigma} \right) \cdot \frac{1}{dt}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_\sigma \left(\dot{q}_\sigma \frac{dp_\sigma}{dt} - \dot{q}_\sigma \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} \right) = \sum_\sigma \Big(\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}}_{E-L = 0!} \Big) \dot{q}_\sigma$$

$\therefore$ Si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ H cte de movimiento!

¿Como garantizamos esto?

→ Restricciones tiempo independientes.

→ Potenciales " "

Prop 2 Si sólo hay potenciales tiempo independientes $U = U(x_1, \ldots, x_n)$, con variables también tiempo independientes, entonces no sólo el Hamiltoniano será

Si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} H = 0. \Rightarrow$ H cte de movimiento!

una cte de movimiento, sino que corresponderá también a la energía total:

Si $\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \longrightarrow \boxed{H = T + U = E_{Tot} = cte.}$

$x_1 = x = R\cos\omega t \quad , \quad y_2 = y = R\,\text{sen}\,\omega t$

$f_1(x,y,t) = x^2 + y^2 = R$ → Restricción no depende de tiempo pero sí las variables. → $x_1 = x_1(q_1, \ldots, t)$

Dem

usemos coord. cartesianas:

$$dx_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \cdot dq_\sigma + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \sum_\sigma \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \cdot \dot{q}_\sigma + \cancel{\frac{\partial x_i}{\partial t}} \nearrow 0$$ por hipótesis.

clase 2! → $$\boxed{\dot{x}_i = \sum_\sigma \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \cdot \dot{q}_\sigma}$$

Energía cinética: $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_\sigma \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \cdot \dot{q}_\sigma \cdot \sum_\lambda \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \cdot \dot{q}_\lambda$$

Si $\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \longrightarrow \boxed{H = T + U = E_{Tot} = cte.}$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\sigma}\sum_{\lambda}\underbrace{\left(\sum_{i} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda}\right)}_{\text{"coef. masa"}}\dot{q}_\sigma \dot{q}_\lambda$$

$$\boxed{m_{\sigma\lambda} \equiv \sum_{i} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda}}$$ coef. matriciales.

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{\sigma}\sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda}\cdot\dot{q}_\sigma \dot{q}_\lambda}$$

coef $\longrightarrow$ $x_i, q_\sigma, m_i \in \mathbb{R} \rightarrow \boxed{m_{\sigma\lambda} = m^*_{\sigma\lambda}}$ $\rightarrow$ es una cant. real.

$\rightarrow \boxed{m_{\sigma\lambda} = m_{\lambda\sigma}}$

↳ nos dicen que son hermíticas.

→ potencial tiempo independientes $U = U(x_1, \ldots, x_n)$

→ var. sin dependencia explícita del tiempo.

30 · marzo

$$H = \underbrace{\sum_\sigma p_\sigma \cdot \dot{q}_\sigma}\ - L$$

$$\sum_\sigma p_\sigma \cdot \dot{q}_\sigma = \sum_\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \cdot \dot{q}_\sigma$$

pot. conservativo:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0$$

$$= \sum_\sigma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma$$

$m_{\sigma\lambda} = m_{\lambda\sigma}$

$$\rightarrow p_\sigma = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{1}{2} \sum_\lambda m_{\sigma\lambda} \dot{q}_\lambda + \frac{1}{2} \sum_\lambda m_{\lambda\sigma} \dot{q}_\lambda$$

$$= \sum_\lambda m_{\sigma\lambda} \dot{q}_\lambda$$

$$\rightarrow \sum_\sigma \sum_\lambda m_{\sigma\lambda} \dot{q}_\lambda \dot{q}_\sigma = 2T$$

$$\therefore H = 2T - L = 2T - (T - U) = T + U = E_{cte} = cte.$$

$\rightarrow$ si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$\Downarrow$

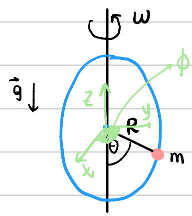
H es cte

si además $\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0$

$\Downarrow$

$H = E_{tot}.$

Ej | 19 Guía 1: Argolla masa m libre de deslizar, sin fricción, en un aro de radio R.

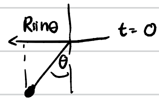


El aro rota con una velocidad cte ω, alrededor del eje vertical.

$\phi = \omega t \rightarrow$ vel. angular cte.

. Tenemos 3 grados de libertad asociados a las 3 coord. cartesianas de m. Supongamos que en $t=0$, m está bajo el eje x:

$$x = R\sin\theta\cos\omega t$$
$$y = R\sin\theta\,\sin\omega t$$
$$z = -R\cos\theta$$



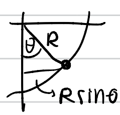
↳ justo bajo el eje x

Éstas ecuaciones definen nuestras restricciones holonómicas, pero también son un cambio de coordenadas simplemente:

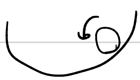
$$\{x, y, z\} \rightarrow \{\theta\}.$$

Lagrangiano:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m R^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta)}$$



Giro en torno a $\hat{z}$ → si $\omega = 0$ no aparece
→ si $\theta = 0$ no aparece.

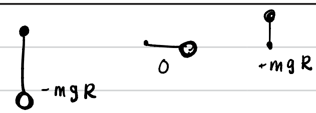


↳ No es un péndulo plano!

↳ Hacer ∇

$U = mgz + cte.$

$\boxed{U = -mgR\cos\theta + cte}$



$$\boxed{L = T - U = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + w^2 \sin^2\theta \right) + mgR\cos\theta - cte.}$$

$\underline{q_1 = \theta}$ $\qquad \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = p_\theta = mR^2\dot\theta \qquad \frac{d}{dt} p_\theta = mR^2\ddot\theta$

→ péndulo + una especie de fuerza@

E-L: $\dot p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} \rightarrow \cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot\theta = \cancel{m}R^{\cancel{2}} w^2 \sin\theta\cos\theta - \cancel{m}g\cancel{R}\sin\theta.$ R

$$\rightarrow \boxed{\ddot\theta + \frac{g}{R}\sin\theta = w^2 \sin\theta\cos\theta}$$

$w \to 0$ péndulo plano!

· Esta ecuación podríamos escribirla como: $\ddot\theta = f(\theta)$

→ Podemos "tratar" de obtener / hallar un "potencial efectivo" que de cuenta de esta fuerza.

Tiene que ver con el potencial que efectiva# rige la dinámica.

Potencial efectivo → $\boxed{f(\theta) = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial \theta}}$

$\left[f(\theta) = \left(w^2\cos\theta - \frac{g}{R} \right) \sin\theta \right]$ → pseudo fuerza (viene de un potencial).

→ $\boxed{\vec F = -\vec\nabla U}$

→ $\ddot\theta = f(\theta)$

Potencial efectivo. Pot. que efectiva% rige la dinámica. → $f(\theta) = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial \theta}$

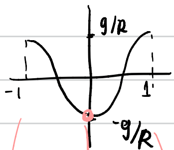
→ Si no gira, U_{eff} coincide con la U potencial.

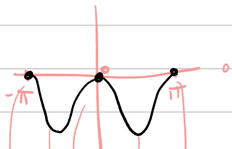
$$U_{eff}' = -f(\theta) = \left(\frac{g}{r} - \omega^2 \cos\theta\right)\sin\theta$$

$$\rightarrow \boxed{U_{eff}(\theta) = -\frac{g}{R}\cos\theta - \frac{\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2} + c_{te}}$$

→ Imponemos.

$c_{te} = 0$!





→ depende de si el giro le gana a la gravedad o no.

exp → estable

inestable

inestable en el 0. ö

estable

ptos. críticos $\rightarrow$ $U_{eff}'(\theta) = 0 = -f(\theta)$.

Equilibrio mecánico $\Rightarrow$ anular fuerzas!

$f(\theta) = \left(\frac{g}{r} - \omega^2 \cos\theta\right) \operatorname{sen}\theta = 0$?

(i) $\theta = \underset{\theta_0}{0}, \underset{\theta_{\pm 1}}{\pm \pi}$ $\rightarrow$ ptos críticos.

(ii) $\boxed{\cos\theta = \frac{g}{R\omega^2}}$ $\rightarrow$ soluc: $\theta_{\pm 2}$ $\rightarrow$ caso par!

$\rightarrow$ 5 ptos críticos.

$\cos\theta : \{-1, 1\} \rightarrow \theta \in \mathbb{R}$

Def: $\omega_c^2 \equiv \frac{g}{R}$ $\qquad$ $\cos\theta = \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \leq 1$

Parámetro de control.

$\rightarrow$ si $\omega_c > \omega$, $\cos\theta$ no tiene solución para este problema físico específico.

$\Rightarrow$ sólo habrán 3 ptos críticos: θ_0, $\theta_{\pm 1}$

$\rightarrow$ si $\omega_c \leq \omega$, $\cos\theta$ si tiene sol. reales para θ

$\Rightarrow$ habrán 5 ptos críticos: $\theta_0, \theta_{\pm 1}, \theta_{\pm 2}$.

ptos. críticos $\rightarrow$ $U_{eff}'(\theta) = 0 = -f(\theta)$.

Equilibrio mecánico $\Rightarrow$ anular fuerzas!

- Este problema vemos la expresión concreta de la batalla entre gravedad y rotación

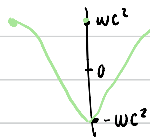
$\underline{U_{eff}(\theta)}$: $U_{eff}(0) = -\omega c^2$, $U_{eff}(\pm\pi) = \omega c^2$

$\Rightarrow \boxed{U_{eff}(0) < U_{eff}(\pm\pi)}$ siempre!

$\underline{\omega_c > \omega}$:

l

g gana en vez de rotaø.



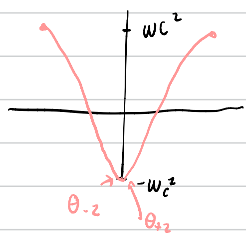
chequear! → $\underline{\omega_c \leq \omega}$ $U_{eff}(\theta_{\pm 2}) = -\frac{\omega^2}{2}\left[1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^4\right]$

→ $\omega >> \omega_c$

$U_{eff}(\theta_2) \to -\frac{\omega^2}{2}$

$\omega \to \omega_c$ $U_{eff}(\theta_{\pm 2}) \to -\omega_c^2 = U(\theta_0)$

↳ bifurcan de la sol θ_0 y después se alejan.



"Bifurcación"