


leer 1º cap. Srednicki

Mec. newtoniana \rightarrow no relativista

$$E = \sqrt{m^2 + p^2} \quad c=1$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

cuántica



$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$



mec. cuántica ici?

$$\hat{H} = \sqrt{m^2 + \hat{p}^2}$$

\rightarrow De Broglie

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

inf. deriv. espaciales y 1 deriv. temporal al expandir en Taylor.
Falla al considerar un potencial $V(\hat{x})$

\rightarrow Dirac

$$\psi \rightarrow \gamma_i \text{ (vector)}$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial t} = H_{ij} \gamma_j$$

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \partial_x \partial_y \end{array} \right)$$

$$H = \gamma^i \partial_i$$

\exists Matrices de Dirac γ

$$\rightarrow i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \psi = 0$$

$$\partial_\mu - e A_\mu$$

campo clásico \rightarrow como cuantizarlo?
invariante de Gauge.

$$A_\mu = \int d^3 k \tilde{A}_\mu e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}}$$

expandir en Fourier

$$\begin{array}{c} \text{cubo} \\ \rightarrow k=p \\ \text{campo en una} \\ \text{caja} \rightarrow C.B. \end{array}$$

$$\rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}^{1/2} \quad \begin{cases} q=+1 \\ q=-1 \end{cases} \rightarrow \exists \text{ positrón } \xi$$

spin $1/2$

describir fotones



campos describen interacciones entre partículas.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$$

Debe ser construido a partir de campos (\neq Dirac).

son integrales en Fourier

$$\hat{H} = \int dk \text{ campos}$$

$$\rightarrow U = e^{i \hat{H} t} \rightarrow \text{cuadro de Heisenberg.}$$

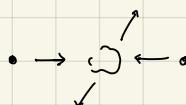
relativistas \leftrightarrow relativistas

$$A_\mu$$

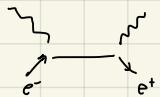
$$\psi$$

para todas las partículas

$$\leftarrow \text{campo de Dirac} \neq \text{función de onda}$$



campos nos informan → cómo interactúan las part. (qué es lo posible)
 ↘ posibilidad de que surjan partículas.



→ fundo da onda describe todo (no sólo part.)

• simetrías ↗ Lorentz
 ↘ Gauge

Diffemorfismos (grav. cuántica).

* Teoría de campos es un lím. de teoría de cuerdas.

CQ.P. 2

desde rel. especial ..

$$\begin{aligned} (t, x^i) \rightarrow x^\mu & \text{ con } x^0 = t \\ x^i = x^i & \\ c=1 \text{ (reescalar las unidades)} & \\ g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & 0 & \\ & 0 & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} & \left. \begin{array}{l} x^2 \equiv x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \\ = -t^2 + \vec{x}^2 \rightarrow \text{invariante de Lorentz} \\ \boxed{x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu} \quad \text{mismo objeto en otro sist. de coordenadas.} \\ \text{reservan la forma del inv. de Lorentz.} \end{array} \right. \\ & \\ x^\mu & \rightarrow \boxed{\Lambda^\mu_\nu} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \rightarrow \text{cambio de coord. lineales.} \\ & \end{aligned}$$

$$\bar{x}^\mu = x^\mu \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ g_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \end{array} \right. \text{invariando.}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu = g_{\mu\nu}} \quad \text{def. de transf. de Lorentz} \rightarrow \text{para cualquier transf. de Lorentz.}$$

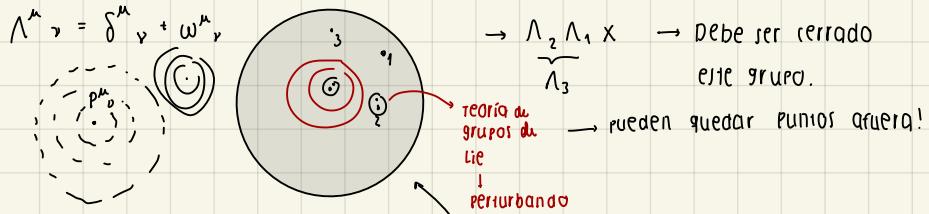
$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu \rightarrow \text{Transf. trivial} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\bar{\rho}}^{\bar{\sigma}} = g_{\bar{\rho}\bar{\mu}} g^{\sigma\rho} \Lambda^\mu_\nu \quad ; \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\rho} = \delta_\nu^\rho$$

el inverso de Λ no es un tensor → no puedo construir inv a través de él.
 (índice cruzado).

$$(\Lambda^{-1})^\sigma_\rho$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Dem}} \quad (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu &= g_{\mu\alpha} g^{\sigma\rho} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\mu_\nu \\ &= g_{\mu\alpha} \underbrace{\Lambda^\mu_\nu}_{\text{la métrica es simétrica}} \Lambda^\alpha_\mu g^{\sigma\rho} \\ &= \underbrace{g_{\nu\beta} g^{\rho\sigma}}_{\text{tensores pueden commutar}} \quad ; \quad \text{tensores} \\ &= \delta_\nu^\sigma \end{aligned}$$



Paridad $P_y^{\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ → no vive en Λ

Reversión temp. $T_y^{\mu} = \begin{pmatrix} -1 & +1 & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \neq g_{\mu\nu}$
 ↴ Transf. de Lorentz.

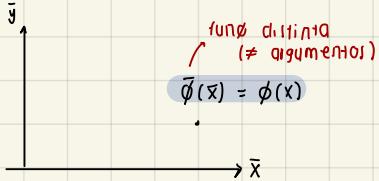
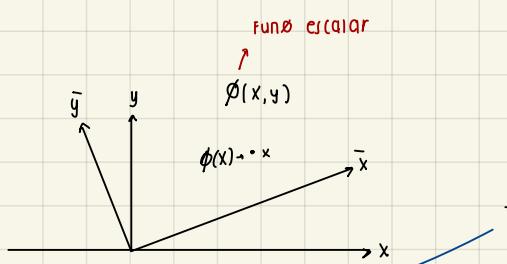
Estas 3 transf. son las que llenan todo el espacio.

$\tilde{P} = \begin{pmatrix} +1 & & \\ -1 & -1 & \\ & & +1 \end{pmatrix}$ → vive en Λ ; invertir de a pares es paridad, → solo 2 orientaciones para cualquier dim.
 ↴ rotación. R_{ij} sino es rotación.

$$\Lambda \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu$$

$$x \rightarrow \bar{x} = \Lambda x$$

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$



transf. pasiva: sistema no cambia

$\phi(x) \rightarrow \bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x) \rightarrow$ Regla de transformación para una transf. de Lorentz.

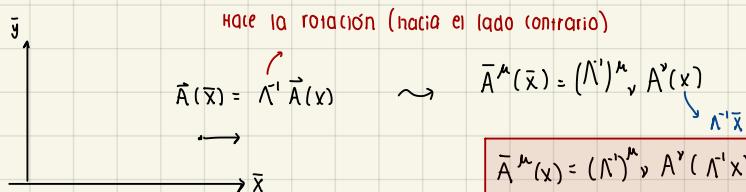
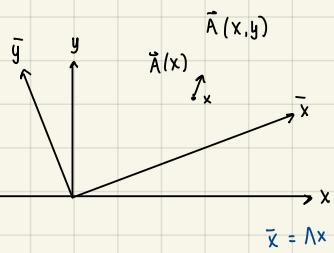
$$\Rightarrow \bar{\phi}\left(\frac{\Lambda x}{\bar{x}}\right) = \phi(x)$$

$$\Rightarrow \bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(\Lambda^{-1}\bar{x})$$

$$\boxed{\phi(x) \rightarrow \bar{\phi}(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)}$$

Funciones vectoriales

(campo de Gauge del campo E-M)

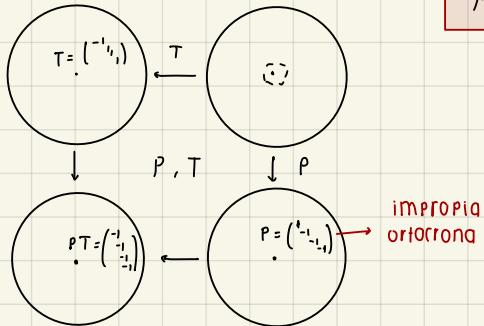


$$\bar{A}^\mu(\bar{x}) = (\Lambda^\mu)_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}\bar{x})$$

$$\boxed{\bar{A}_\mu(x) = \Lambda^\nu{}_\mu A_\nu(\Lambda^{-1}x)}$$

Para grupos de Lie

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta w^\mu{}_\nu$$



Transf. de Lorentz

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$$

$$\det [\Lambda^T \Lambda] = \det [g] = -1$$

$$\det [\Lambda^T \Lambda] = 1$$

$$\det [\Lambda^2] = 1$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{es una rotación}$$

$$\boxed{\det[\Lambda] = \pm 1}$$

transf. de Lorentz propias
↳ la s.
impropria

$$\delta_{ij} R^i{}_k R^j{}_l = \delta_{kl}$$

$$R^T \cdot R = \mathbb{1} \Rightarrow \text{Rotación.}$$

$$-\Lambda^\alpha_\alpha \Lambda^\beta_\beta + \delta_{ij} \Lambda^i_\alpha \Lambda^j_\beta = g_{\alpha\beta}$$

$g_{\alpha\beta}$

$$+(\Lambda^0_0)^2 - \delta_{ij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_0 = +1$$

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \#$$

↓
positivo.

$$(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$$

$$\Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{o} \quad \Lambda^0_0 \leq -1$$

Transformación de Lorentz ortocromas.
Lorentz ortocromas.

Para grupos de Lie

→ No es tensor!

$$\rightarrow \Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \delta w^\mu_\nu$$

$$g_{\mu\nu} (\delta^\mu_\alpha + \delta w^\mu_\alpha) (\delta^\nu_\beta + \delta w^\nu_\beta) = g_{\alpha\beta}$$

$$\cancel{g_{\alpha\beta}} + g_{\mu\beta} \delta w^\mu_\alpha + g_{\alpha\nu} \delta w^\nu_\beta = \cancel{g_{\alpha\beta}}$$

$$\delta w_{\alpha\beta} + \delta w_{\beta\alpha} = 0$$

$$\delta w_{\alpha\beta} = -\delta w_{\beta\alpha}$$

→ lo que se le agrega
a la unidad tiene
que ser antisimétrico.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{I} + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no máximo de
parámetros

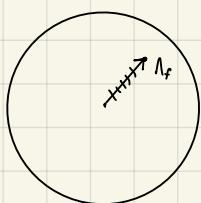
$$\rightarrow \delta w_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

6 generadores → 6 parámetros.

$$Ej: \beta_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \theta_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

boosts.
mejoría t con
espacio

mejoría x con y
(rotación en torno a z
pero eso sólo es en 3D)



$$\Lambda_f = (1 + \delta w)(1 + \delta w) \dots (1 + \delta w)$$

$$\rightarrow \delta w = \frac{w}{N}$$

$$\Lambda_f = e^w$$

Cuántica

$$|\psi\rangle \rightarrow |\bar{\psi}\rangle = U(\Lambda) |\psi\rangle$$

↓
el estado se va
a ver ≠ con una transf.

U representa a Λ
(U es una representación) → unitario

$$\downarrow$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

$$\langle \bar{\psi} | \bar{\psi} \rangle = 1$$

$$U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) = \mathbb{1}$$

$$U^\dagger(\Lambda) = U(\Lambda')$$

$$(U(\Lambda') U(\Lambda) |\psi\rangle = |\psi\rangle)$$

$$\Lambda_2 \Lambda_1 = \Lambda_3$$

↓

$$\Rightarrow U(\Lambda_2) U(\Lambda_1) = U(\Lambda_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{U(\Lambda_2) U(\Lambda_1) = U(\Lambda_2 \Lambda_1)}, \boxed{U(1) = \mathbb{1}}$$

$$U(1 + \delta\omega) = \mathbb{1} + \frac{i}{2\hbar} \underbrace{\delta\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}_{\text{Hermitico}}$$

$$\boxed{U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda') U(\Lambda) = U(\Lambda' \Lambda \Lambda)}$$

Por construcción: $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$

caso particular $\rightarrow \Lambda' = 1 + \delta\omega, (\Lambda'^\alpha \Lambda'^\beta)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + (\Lambda'^\alpha \delta\omega^\beta \Lambda'^\gamma)_{\mu\nu}$

traspuesta
↓
por bajar los índices

$$\rightarrow U^\dagger(\Lambda) \left[1 + \frac{i \delta\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}}{2\hbar} \right] U(\Lambda) = U(1 + \Lambda' \delta\omega \Lambda)$$

$$\downarrow$$

$$= \mathbb{1} + \frac{i}{2\hbar} \delta\omega_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu M^{\mu\nu}$$

$$\rightarrow \cancel{\mathbb{1}} + \frac{i \delta\omega_{\mu\nu}}{2\hbar} U^\dagger(\Lambda) M^{\mu\nu} U(\Lambda) = \cancel{\mathbb{1}} + \frac{i}{2\hbar} \delta\omega_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu M^{\mu\nu}$$

$$\rightarrow \boxed{U^\dagger(\Lambda) M^{\mu\nu} U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta M^{\alpha\beta}}$$

6 operadores
(Matriz de operadores)
↓
generadores

Regla de
transf. de Lorenz.

sirve para...

→ Operadores cuánticos:

(campo escalar:

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) |\psi\rangle$$

vectorial

$$\hat{A}_\mu(t, \vec{x}) |\psi\rangle$$

momento

$$\overrightarrow{P}_\mu, H$$

$$P_\mu$$

$$\rightarrow \boxed{U^\dagger(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu}$$

Reemplazando $\Lambda = 1 + \delta\omega$

↓

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\hbar (g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu) - (\rho \leftrightarrow \sigma))$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \rightarrow L \text{ es el generador de rotaciones}$$

→ srednicki:
 $J_i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{jk}$
 ↓ momento angular.

18. marzo

$$U(\Lambda) M^{\mu\nu} U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta M^{\alpha\beta}$$

$$U(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2\hbar} \delta w_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad \text{generador del grupo de Lorentz.}$$

6 matrices posibles: $M^{01}, M^{02}, M^{03}, \dots$

$$\rightarrow [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\hbar (g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho})$$

→ sólo aparecen los generadores (no parámetros)

→ Álgebra del grupo de Lorentz ≈ conmutación de generadores.

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}$$

$$\rightarrow J_i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{jk} \rightarrow \text{Generadores de rotación: } J$$

$$K_i = M^{j0} \delta_{ij} = M^{i0} \rightarrow \text{no hay diferencia cuando los índices son espaciales.}$$

6 matrices.
 transf. entre x y t → boost. Es una rotación (rotación es un cambio entre ejes)

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

→ Teoría de Grupos

$$[J_i, K_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} K_k \rightarrow \text{rotación seguida por un boost.}$$

$$[K_i, K_j] = -i\hbar \epsilon_{ijk} J_k \neq 0 \rightarrow \text{Álgebra de los boost no cierra.}$$

$$* \Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \delta w^\mu_\nu, \rightarrow \text{antisimétrico}$$

$$\delta w_{\mu\nu} = \theta_x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta_z \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} + \beta_x \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

↓ intercambia x con y.
 ↓ y con z
 ↓ boost intercambia t y espacio.

$$(1 + \frac{i}{2\hbar} \theta_x J_x) |\psi\rangle = |\psi'\rangle$$

rotación infinitesimal

$$(1 + \frac{i}{2\hbar} \theta_y J_y) (1 + \frac{i}{2\hbar} \theta_x J_x) |\psi\rangle = |\psi''\rangle$$

$$(1 - \frac{i}{2\hbar} \theta_y J_y) (1 - \frac{i}{2\hbar} \theta_x J_x) |\psi''\rangle = \boxed{(1 + i \# J_z) |\psi\rangle}$$

→ rotación en z x q el comutador es ≠ 0.

generadores de
transformaciones temp. y
espaciales

$$P_\mu = (H, \vec{P})$$

$$U^\dagger(\Lambda) P^\nu U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu$$

$$\Rightarrow [J_i, H] = 0 \rightarrow \text{números cuánticos de } J \text{ se conservan en el t.}$$

$$[J_i, P_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} P_k \rightarrow J \text{ actúa sobre el momento}$$

$$(1 + \dots + J) P_j | \vec{p} \rangle = P_j | \vec{p} \rangle$$

Tiene carácter espacial. (traslada el vector de j a k)

$$[K_i, H] = i\hbar c P_i$$

$$[K_i, P_j] = \frac{i\hbar}{c} \delta_{ij} H$$

$$[P_i, P_j] = 0$$

$$[H, P_i] = 0$$

$$U(\Lambda) = e^{i\frac{\hbar}{2c} \delta\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}} \rightarrow \text{ACTÚA sobre los estados cuánticos}$$

(Sirve solo para transf. infinitesimales)

$$T(a) = e^{-\frac{i}{\hbar} P^\mu a_\mu} \quad \left. \begin{array}{l} T^\dagger(a) \hat{\psi}(x) T(a) = \psi(x-a), \\ \rightarrow \text{cuadro de Heisenberg} \end{array} \right\}$$

Ejercicio!

$$U^\dagger(\Lambda) \psi(x) U(\Lambda) = \psi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\bar{\psi}(\bar{x}) = \psi(x) \quad ; \quad \bar{x} = \Lambda x$$

$$[\psi(x) = \psi(\Lambda^{-1}x)]$$

$$\bar{A}^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$$

$$U^\dagger(\Lambda) A^\mu(x) U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) / \partial_\nu []$$

$$U^\dagger(\Lambda) \partial^\mu \psi(x) U(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \bar{\partial}^\nu \psi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\bar{x} = \Lambda^{-1}x$$

Cuantizar una teoría libre

Lecturas: Dirac.

→ ver generalizada

$$L = L(t, r, \dot{r})$$

↙ r(t)

$$S = \int dt L(t, r, \dot{r}) \quad ; \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$$

$$\rightarrow H = \dot{r}p - L$$

corchete de Poisson.

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} \rightarrow [x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

↓
son autovalores de
comunicadores

Teoría con 1 solo campo.

$$\rightarrow S = \int dt \underbrace{d^3x}_{d^4x} \mathcal{L}(x, \phi(x), \partial\phi(x))$$

↓ densidad Lagrangiana

↓ ∂_μ (4 deriv.).

↓ campo clásico (como el E-M)

Momento canónico:

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

con deriv. temp.

Lagrangiano del oscilador armónico:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2$$

no queremos romper Lorentz:
no ponemos t.
ponemos unidad

$$\rightarrow \frac{S}{\hbar} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \dot{\phi}^2 \right]$$

unidades de momento angular

'x o 't : $[m] = [L^1]$

(dimensional)

$$(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$$

$$= -\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2$$

$$\rightarrow [\phi] = [m] = [L^1]$$

Klein-Gordon

$$-\partial^2\phi + m^2\phi = 0$$

$$\boxed{\ddot{\phi} - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0}$$

condiciones iniciales ←
las evolucionan en el t.

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \frac{m^2}{2} \phi^2$$

$$H(t) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right] \rightarrow \text{llegar a } \{x_i, p_j\}$$

$q [x_i, p_j]$

$$[\phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{y}, t)] = i\hbar \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

→ momento canónico.

→ relación de commutación
al mismo tiempo.

$$\Pi = \dot{\phi}$$

Op. Hamiltoniano (en base a operadores) → \hat{H}

$$\hat{H}|p\rangle = E|p\rangle$$

$$\hat{H}|\vec{p}\rangle = \sqrt{p^2 + m^2} |\vec{p}\rangle$$

20 marzo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[(\partial \psi)^2 + m^2 \psi^2 \right] \rightarrow \Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$$

$$\Rightarrow -\partial^2 \psi + m^2 \psi^2 = 0$$

$$\ddot{\psi} - \nabla^2 \psi + m^2 \psi = 0$$

1 campo → 1 momento densidad hamiltoniana:
canónico. $\mathcal{H} = \Pi \dot{\psi} - \mathcal{L}$

construir la teoría

$$\rightarrow [\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{y}, t)] = i\hbar \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

cuántica.

es un continuo que cambia
de un punto a otro.

$$\hat{\Pi}(x, y) = \dot{\hat{\psi}}(\vec{x}, t)$$

restricción que se debe

satisfacer ∀t

$$\rightarrow -\partial^2 \hat{\psi}(\vec{x}, t) + m^2 \hat{\psi}(\vec{x}, t) = 0 \rightarrow \text{función lineal}$$

↓
Fourier.



Teoría cuántica relativista pero no todos los objetos son inv. de Lorentz.

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{\phi} \dot{\phi} + \frac{1}{2} (\nabla \phi) \cdot (\nabla \dot{\phi}) + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi} \dot{\phi}$$

Esperamos que

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = e^{-i\hat{H}t} \hat{\phi}(\vec{x}, 0) e^{+i\hat{H}t}$$

Fourier sobre \vec{x}

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} f(\vec{k}, t) e^{+i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad ; \quad \omega = \sqrt{k^2 + m^2}$$

sólo en la parte espacial no es inv. de Lorentz

inv. de Lorentz

$$\Rightarrow \ddot{f} + \underbrace{[k^2 + m^2]}_{\omega^2} f = 0$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k, t) = \hat{a}(\vec{k}) e^{-i\omega t} + \hat{b}(\vec{k}) e^{+i\omega t}$$

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int d\vec{k} [\hat{a}(\vec{k}) e^{-i\omega t} + \hat{b}(\vec{k}) e^{+i\omega t}] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

$$= \int d\vec{k} [\hat{a}(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \hat{b}(\vec{k}) e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})}]$$

$\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ cambio de coord: $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$

$$\hat{\phi}^+(\vec{x}, t) = \int d\vec{k} [\hat{a}^+(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{b}^+(\vec{-k}) e^{+i\vec{k} \cdot \vec{x}}]$$

(campos reales \rightarrow hermíticos $\rightarrow \hat{\phi}^+(\vec{x}, t) = \hat{\phi}(\vec{x}, t) \Rightarrow \hat{a}^+(\vec{k}) = \hat{b}(-\vec{k})$)

$$\hat{b}^+(-\vec{k}) = \hat{a}(\vec{k}).$$

$$\hat{\Pi}(\vec{x}, t) = \int d\vec{k} [\hat{a}(\vec{k}) (-i\omega_k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{b}^\dagger(\vec{k}) i\omega_k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}]$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{y}, t)] = \int d\vec{k} \int d\vec{q} [e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\vec{q} \cdot \vec{y}} (-i\omega_q) [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{q})]]$$

dependencia temporal

$-i(\omega_k - \omega_q)t$

$\propto \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q})$

$$+ e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{q} \cdot \vec{y}} (+i\omega_q) [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{q})]$$

$\propto \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q})$

$$+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\vec{q} \cdot \vec{y}} (-i\omega_q) [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}(\vec{q})]$$

$$+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{q} \cdot \vec{y}} (+i\omega_q) [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{q})]]$$

0

$$w t - \vec{k} \cdot \vec{x} = -K_0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

$$= -K_\mu x^\mu = -\vec{k} \cdot \vec{x}$$

$$K_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{x} = -\vec{k} \cdot \vec{x} + wt)$$

$$w = \sqrt{k^2 + m^2}$$

$$x = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} t \\ \vec{y} \end{pmatrix}$$

$$= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \xrightarrow{\text{indep. temporal.}}$$

sólo el módulo para que sea inv. ante rotaciones.

$$\rightarrow [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{q})] = S(\vec{k}) S^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) (2\pi)^3 \xrightarrow{\text{siempre va con la delta de Dirac.}}$$

$$\rightarrow [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}(\vec{q})] = -S(\vec{k}) S^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) (2\pi)^3$$

$$\Rightarrow \int d\vec{k} \frac{1}{2w_k} \left[e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{k} \cdot \vec{y}} (+i\omega_k) + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\vec{k} \cdot \vec{y}} (-i\omega_k) \right] S(\vec{k}) = \dots$$

$$\Rightarrow \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 (2w_k)} \frac{S(\vec{k})}{2} \left[1 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right] = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$$

$$\Rightarrow S(\vec{k}) = 2w(\vec{k})$$

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = 2w(\vec{k})(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \xrightarrow{\text{op. de creación y destrucción del oscilador armónico.}}$$

↓
El campo puede ser expandido en una base de op. de creación y destrucción.

Ponerle un suelo al ←
op. escalera

$$a(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \rightarrow \text{cualquier op. lo puedo expandir en op. de creación y destrucción.}$$

$$a^\dagger(\vec{k})|0\rangle = ?$$

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')]|0\rangle = \underbrace{a(\vec{k})(a^\dagger(\vec{k}')|0\rangle)}_0 - a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k})|0\rangle \\ = 2w_k(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')|0\rangle$$

Definimos:

$$|\vec{k}\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle \quad \rightarrow \text{creamos y destruimos partículas.}$$

↑ 1º estado excitado.

$$\mathcal{H} \rightarrow \hat{H} = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \right]$$

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \omega_k (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right]$$

\therefore Transf. de Bogoliubov. $\exists \begin{cases} a(\vec{k}) = \alpha b(\vec{k}) + \beta^* b^\dagger(-\vec{k}) \\ a^\dagger(\vec{k}) = \alpha^* b^\dagger(\vec{k}) + \beta b(-\vec{k}) \end{cases} \quad \left[[b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k})] = 2\omega_k \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')] \right]$

$\left| \alpha \right|^2 - \left| \beta \right|^2 = 1.$

si el nuevo set es $b \rightarrow$ habría un nuevo vacío $|0_b\rangle$.

$$\hat{H} = \int d\vec{k} \left[b^\dagger b + b b^\dagger + b b + b^\dagger b^\dagger \right] \rightarrow \text{Hamiltoniano no diagonal en la base de partículas.}$$

$$\hat{H}|0\rangle = (2\pi)^{13} \delta^{(3)}(0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k = \infty \rightarrow \text{vacío tiene E infinita}$$

↳ suma de osciladores armónicos. \rightarrow problema al incorporar gravedad.

$$\Rightarrow \hat{H}|\vec{k}\rangle = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} |\vec{k}\rangle$$

estados de part. libres

$$|\vec{k}\rangle = a^\dagger(k_1) \dots a^\dagger(k_n) |0\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{H}|\gamma\rangle = (\sqrt{k_1^2 + m^2} + \sqrt{k_2^2 + m^2} + \dots) |0\rangle.$$

$$H |\vec{k}\rangle = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} |\vec{k}\rangle$$

$$|\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3, \dots \vec{K}_n\rangle \propto |Q_{\vec{K}_1}^+, \dots Q_{\vec{K}_n}^+|0\rangle$$

Normalità

$$\langle \vec{K} | \vec{K}' \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{K} - \vec{K}') \cdot 2w$$

$v(\varphi) \xrightarrow{\text{Taylor de un potencial}}$

$$\chi = -\frac{1}{2} (\partial \Psi)^2 - \frac{m^2}{2} \Psi^2 - \frac{g}{3!} \Psi^3 - \frac{\lambda}{4!} \Psi^4 + \dots \rightarrow \text{Interações} \\ \underbrace{\text{particulas}}_{\text{libres.}} \quad \underbrace{\text{INV. bajo transf. de}}_{\text{Lorenz}} \quad \text{bárticas.}$$

· g y λ son pequeños

Leer cap. 4

CAP. 5

LST Estado:

$$|\vec{k}\rangle = a^{\dagger}(\vec{k})|0\rangle$$

$$\psi(\vec{x}, t) = \int d\vec{k} \left[a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a(\vec{k}) e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad (\vec{k}\cdot\vec{x} = -\omega t + \vec{k}\cdot\vec{x})$$

Transf. inverso:

$$Q(\vec{k}) = \int d^3x e^{-ik \cdot x} [i\dot{\psi} + w(k)\psi]$$

$$q^{\dagger}(\vec{k}) = \int d^3x e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[-i\dot{\psi} + \omega(k)\psi \right]$$

$$Q(\vec{k}) = i \int d^3x e^{-ik \cdot x} \boxed{\partial_0} \psi \quad A^\leftrightarrow B = A \circ B - (aA)B$$

$$Q^\dagger(\vec{k}) = -i \int d^3x e^{+ik \cdot x} \vec{\partial}_\mu \psi$$

- Ondas planas viven en todas partes \rightarrow formar paquetes gaussianos
(superposición de ondas planas)

Darle mayor importancia a
cieras ondas planas.



$|\Psi(+\infty)\rangle \rightarrow$ proyectarlo a ondas planas.

$\langle \text{out} | \Psi(+\infty) \rangle$

↓
estador de partículas
asimptóticos.



$d \rightarrow 0$
(delta)



$|\Psi(-\infty)\rangle = |\text{in}\rangle$

colección de ondas
planas.

$$a_i^\dagger \equiv \int d^3k \underbrace{f_i(\vec{k})}_{\text{paquete}} a_i^\dagger(\vec{k}) \quad ; \quad f_i(\vec{k}) = e^{-(\vec{k}-\vec{k}_i)^2/4\sigma^2}$$

$$a_i^\dagger(\vec{k}, t) = -i \int d^3k e^{-ik \cdot x} \hat{\partial}_0 \varphi \rightarrow \text{indep. del tiempo sólo si es K-G}$$

$\times \rightarrow x \neq$ er una teoría Arbitraria.

paquetes como partículas ←
en el pasado.

$$|i\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} a_1^\dagger(t) a_2^\dagger(t) |0\rangle$$

$$|f\rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} a_1^\dagger(t) a_2^\dagger(t) |0\rangle \quad \text{en el futuro}$$

Prob. de que el paquete inicia
termine en el producto final.

Notamos que ←

$$\langle f | i \rangle = ?$$

$$a_1^\dagger(+\infty) - a_1^\dagger(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \partial_0 a_1^\dagger(t)$$

$$= -i \int d^3k f_1(\vec{k}) \underbrace{\int dt \int d^3x (\partial_0 (e^{+ik \cdot x} \hat{\partial}_0 \varphi(x)))}_{\int d^4x}$$

$$= -i \int d^3k f_1(\vec{k}) \int d^4x e^{ik \cdot x} (\partial_0^2 + m^2) \varphi(x)$$

\uparrow
 $k^2 + m^2 \neq 0$
 \downarrow
 $-\nabla^2$

No se satisface K-G.

Resultado

$$a_i^+(+\infty) - a_i^+(-\infty) = -i \int dk f_i(k) \int d^4x e^{ik \cdot x} (-\partial^2 + m^2) \psi(x)$$

permite que todo sea
regular lejos del paquete.

$$a_i^+(-\infty) = a_i^+(+\infty) + -i \underbrace{\int dk f_i(k) \int d^4x e^{ik \cdot x} (-\partial^2 + m^2) \psi(x)}_{0 \text{ si fuera } k=0}$$

$$\cdot a_i(+\infty) = a_i(-\infty) + i \int d^3k f_i(k) \int d^4x e^{-ik \cdot x} (-\partial^2 + m^2) \psi(x)$$

$$\langle f | i \rangle = \langle 0 | a_{i'}^+(+\infty) a_{i'}^+(-\infty) a_i^+(-\infty) a_i^+(+\infty) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T a_{i'}^+(+\infty) a_{i'}^+(-\infty) a_i^+(-\infty) a_i^+(+\infty) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T (a_{i'}^+(-\infty) + \dots) (a_i^+(-\infty) + \dots) (a_i^+(+\infty) + i\dots) (a_{i'}^+(+\infty) + i\dots) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T a_{i'}^+(-\infty) a_{i'}^+(-\infty) a_i^+(-\infty) a_i^+(+\infty) | 0 \rangle + \dots$$

$$= \langle 0 | T a_i^+(-\infty) a_i^+(-\infty) a_{i'}^+(-\infty) a_{i'}^+(+\infty) | 0 \rangle + \dots$$

$$= \langle 0 | a_i^+(-\infty) \dots a_{i'}^+(-\infty) | 0 \rangle + \dots$$

todo el resto será 0 excepto el
el de destrucción el
que no tiene ni a_i ni a_i^* .
va a ser 0.

$$= i^{n+n'} \int d^4x_1 e^{ik_1 \cdot x_1} (-\partial_1^2 + m^2) \dots \int d^4x_{n'} e^{-ik_{n'} \cdot x_{n'}} (-\partial_{n'}^2 + m^2) \dots$$

$$\times \underbrace{\langle 0 | T \psi(x_1) \psi(x_2) \dots \psi(x_{n'}) | 0 \rangle}_{\text{función de correlación de } n \text{ puntos.}}$$

(S. 45)

$f_i(k)$

$\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_i)$

→ Hago la gaussiana como una δ .

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | i \rangle|^2$$

Integral de camino

$F_{\mu\nu} \rightarrow \hat{F}_{\mu\nu} \rightarrow$ fortalemos que sea
 ↵ hermítico (observable) → forma de cuantizarlo.
 $\langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = F.$

campos nos permiten calcular otros op. como H .

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad U(t_0, t_0) = 1$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle; \quad U(t_3, t_2) U(t_2, t_1) = U(t_3, t_1)$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = \hat{H} U(t, t_0)$$

$$, \quad U^{-1}(t, t_0) U(t, t_0) = U(t, t_0) U^{-1}(t, t_0) = 1$$

$$|\psi(t_0)\rangle = U^{-1}(t, t_0) |\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t) = U^*(t, t_0)$$

$$\Rightarrow i \frac{d}{dt} U^{-1}(t, t_0) = -U^{-1}(t, t_0) \hat{H}$$

$$U(t, t_0) = 1 + \frac{i\hbar}{\gamma} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') U(t', t) = T e^{i\hbar \int_0^t \hat{H}(t') dt'}$$

Ec. de Dyson → iteramos con $U(t', t)$ al reemplazar.

sequencia \Rightarrow de H
 ↴ sumar en una exp.
 ↴ H con ordenación temporal

$$U(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') U(t', t_0)$$

$$= 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \left[\int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{H}(t') \hat{H}(t'') + \dots \right]$$

$t' > t''$

está ordenado temporalmente
(orden de las integrales)

ahora integraremos en la otra región

no necesaria # ordenados ←

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 T \{ \hat{H}(t_n) \hat{H}(t_{n-1}) \dots \hat{H}(t_1) \}$$

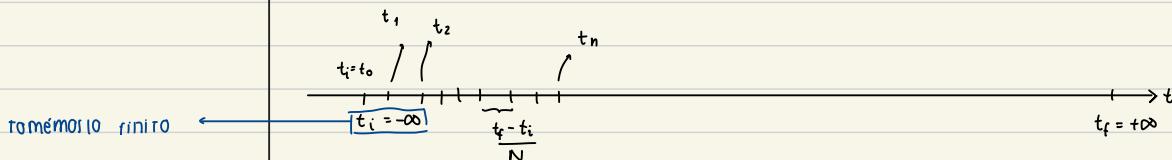
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_1 T \{ \hat{H}(t_n) \dots \hat{H}(t_1) \}$$

$$= T e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')}$$

Fórmula de Dyson.

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} dt'$$

↓
integrar en todo y dividimos en z.



$$U(t_f, t_0) = \prod_{n=1}^N U(t_n, t_{n-1})$$

$$\Delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$$

$$U(t_n, t_{n-1}) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t_n) \Delta t$$

$$\hat{H}(t_n) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}, t_n)$$

← puede depender de t.

2 buenas bases:

$$|p\rangle, |x\rangle$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$$

Diagonalizar \hat{p} y \hat{x} ←

Identidades

$$\int dp_n |p_n\rangle \langle p_n| = 1, \quad \int dx |x\rangle \langle x| = 1$$

$$U(t_n, t_{n-1}) = \int dp_n \left(1 + \frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_n) \Delta t \right) |p_n\rangle \langle p_n|.$$

variable muda.

$$= \int dp_n \left(1 + \frac{\Delta t}{i\hbar} \left[\frac{p_n^2}{2m} + V(\hat{x}, t_n) \right] \right) |p_n\rangle \langle p_n|$$

autoval.

$$= \int dp_n \int dx_n \left(1 + \frac{\Delta t}{i\hbar} \left[\frac{p_n^2}{2m} + V(x_n, t_n) \right] \right) |x_n\rangle \langle x_n| |p_n\rangle \langle p_n|$$

autoval.

var. de integración
(ya no son op.)

Normalizado a la delta de Dirac.

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

$$\rightarrow \int dx_{n-1} |x_{n-1}\rangle \langle x_{n-1}| = 1$$

$$= \int dp_n \int dx_n \int dx_{n-1} \left(1 + \frac{\Delta t}{i\hbar} \left[\frac{p_n^2}{2m} + V(x_n, t_n) \right] \right) |x_n\rangle \langle x_n| |p_n\rangle \langle p_n| |x_{n-1}\rangle \langle x_{n-1}|$$

fila columna
en bases \neq .

para tener la misma base.

$$\langle p | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}$$

$$= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \int dx_n \int dx_{n-1} \left(1 + \frac{\Delta t}{i\hbar} \left[\frac{p_n^2}{2m} + V(x_n, t_n) \right] \right) e^{i\frac{p_n(x_n - x_{n-1})}{\hbar} - \frac{\Delta t}{\hbar} H(p_n, x_n, t_n)} |x_n\rangle \langle x_{n-1}|$$

A orden Δt

$$\left[\dot{x}_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right]$$

$$e^{\frac{\Delta t}{\hbar} H(p_n, x_n, t_n)}$$

$i\frac{\Delta t}{\hbar} [H_n - \dot{x}_n p_n]$

$$U(t_n, t_{n-1}) = \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \int dx_n \int dx_{n-1} e^{-i\frac{\Delta t}{\hbar} (H_n - \dot{x}_n p_n)} |x_n\rangle \langle x_{n-1}|$$

$$U(t_{n-1}, t_{n-2}) = \int \frac{dp_{n-1}}{2\pi\hbar} \int dx_{n-1} \int dx_{n-2} e^{-i\frac{\Delta t}{\hbar} (H_{n-1} - \dot{x}_{n-1} p_{n-1})} |x_{n-1}\rangle \langle x_{n-2}|$$

Extendiendo a un salto arbitrario:

$$\int dx_{n-1} \int dx'_{n-1} \underbrace{\langle x_{n-1} | x'_{n-1} \rangle}_{\delta(x_{n-1} - x'_{n-1})}$$

$$= \int dx_{n-1}$$

Representación integral ←
de camino del propagador

$$U(t_f, t_i) = \underbrace{\left[\prod_{n=1}^N \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right]}_{DP} \left[\prod_{n=0}^N dx_n \right] e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \sum_{n=1}^N (H_n - \dot{x}_n p_n)} |x_N\rangle \langle x_0| ; \boxed{\sum_{n=1}^N \Delta t_n \dot{x}_n = x_N - x_0}$$

verificar!

≡ Integral funcional o de camino ≡

$$U(t_f, t_i) = \boxed{DP \int DX e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [H - \dot{x}p]} |x_N\rangle \langle x_0|} |x(t_f)\rangle \langle x(t_i)|$$

$$|\gamma\rangle = |x\rangle$$

en el espacio de fase
integrar en todos los posibles caminos. → camino newtoniano

Prob. de que llegue ←
a un x' .

$$\langle x' | U(t_f, t_i) | x \rangle = \underbrace{\int DP \int DX}_{\substack{x_0=x \\ x_f=x'}} e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [H - \dot{x}p]} |x_N\rangle \langle x_0|$$

minimiza la acción.
(la fase).

Ahora escribimos el Hamiltoniano de otra forma.

$$H_n - \dot{x}_n p_n = \frac{p_n^2}{2m} + V(x_n, t_n) - \dot{x}_n p_n$$

$$= \frac{(p_n - m\dot{x}_n)^2}{2m} - \frac{m}{2} \dot{x}_n^2 + V(x_n, t_n)$$

$$= \frac{(p_n - m\dot{x}_n)^2}{2m} - L_n = \frac{p_n^2}{2m} - L_n$$

$\frac{p_n}{2m} \rightarrow$ cambio de variable

$$p'_n = p_n - \frac{m\dot{x}_n}{\Delta t} - \frac{m\dot{x}_{n-1}}{\Delta t}, \quad \int dp_n = \int dp'_n, \quad e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} (\frac{p_n^2}{2m} - L_n)} \rightarrow C e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \int \frac{p_n^2}{2m}} e^{\frac{i}{\hbar} \int L_n}$$

$$\Rightarrow U(t_f, t_i) = N \int DX e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(x, \dot{x})} |x(t_f)\rangle \langle x(t_i)|$$

$$N = \int \prod_{n=1}^N dp_n e^{-\int \frac{p_n^2}{2m} dt}$$

$$\langle x_f | U(t_f, t_i) | x_i \rangle = N \int Dx e^{i \frac{L}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L}$$

Notación: $\langle x, t \rangle = U^\dagger(t, t_0) | x \rangle$

$$\langle x', t | x, t \rangle = \langle x' | x \rangle = \delta(x - x')$$

$$\langle x', t_f | x, t_i \rangle = N \int Dx e^{i \frac{L}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L}$$

$x(t_i) = x$
 $x(t_f) = x'$

Dem $\langle x', t_f | T \{ \hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \dots \hat{x}(t_n) \} | x, t_i \rangle$

$$= N \int Dx x(t_1) \dots x(t_n) e^{i \frac{L}{\hbar} \int dt L}$$

$x(t_f) = x_f$
 $x(t_i) = x_i$

} como se describe una fn.
de correla θ de n puntos
ordenador temporal #.
↓
Integral de camino.

cuantizació conocida

$$L = L_0 + X J(t) - V(X) \quad \text{↑ novedad fuerza.}$$

$$L_0 = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2$$

sin fuerza.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ H = \dots \end{array} \right\} \rightarrow \psi_n(x) = \langle x | n \rangle = A_n H_n(ax) e^{-q^2 x^2/2} ; \quad q = \sqrt{\frac{m \omega_0}{\hbar}}$$

$$A_n^2 = \frac{q}{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{q}}{\pi^{1/4}} e^{-q x^2/2}$$

↑ estado de menor
energía.
vacío.

No tenemos el n° de onda \vec{k} .

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

$$|i\rangle \rightarrow |f\rangle$$

$$\langle f | i \rangle = \langle f | U(t_f - t_i) \underbrace{|\psi(-\infty)\rangle}_{\text{conocido}} \quad \text{↑ estado que queremos saber si hay una transición o no.}$$

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle$$

para ver la transisió.

$$\langle 1 | 0 \rangle_{t_i \rightarrow t_f} = \langle 1 | \underbrace{U(t_f - t_i)}_{\text{autoestado de } H} | 0 \rangle$$

$$\langle 1 | e^{\frac{i \omega_0 (t_f - t_i)}{\hbar}} | 0 \rangle = 0 . \quad ; \quad \langle n | m \rangle = \delta_{nm} .$$

El resultado se proyecta en 1?

$$U(t_f - t_i) = N \int Dx e^{i \frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L} |x(t_f)\rangle \langle x(t_i)|$$

ac.

$$\langle 1|0\rangle_{t_i \rightarrow t_f} = N \int Dx e^{i \frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L} \underbrace{\langle 1|x(t_f)\rangle}_{\gamma_o^*(x(t_f))} \underbrace{\langle x(t_i)|0\rangle}_{\gamma_o(x(t_i))}$$

var. de
integrad

No hay prob. de que el

vacío pase al estado 0

↓

forz@ cambia
y es ≠ 0.

$$\dots N \int Dx e^{i \frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (L_0 + x_j)} = 0.$$

$$\langle 0|0\rangle_{t_i \rightarrow t_f} = 1 \rightarrow \text{sin forz@}.$$

$$\langle 0|0\rangle_{t_i \rightarrow t_f}^J = W_o[J]$$

función : depende de todo el perfil de J.

$$\rightarrow \langle 0|0\rangle_{t_i \rightarrow t_f} = N \int Dx e^{i \frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (L_0 + x_j)} \underbrace{\langle 0|x(t_f)\rangle}_{\gamma_o^*(x(t_f))} \underbrace{\langle x(t_i)|0\rangle}_{\gamma_o(x(t_i))}$$

$$W_o[J] = N \int Dx e^{i \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L_0 + x_j)} \gamma_o^*(x(+\infty)) \gamma_o(x(-\infty))$$

entregó la var. de
integrad. N.

* γ_o es el mismo que
para L_0 ya que sabemos
cómo es en el vacío.

$$W_o[0] = 1 = N \int Dx e^{i \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L_0 + x_j)} e^{-\frac{q^2}{2} [x^2(-\infty) + x^2(+\infty)]}$$

$$* f(+\infty) + f(-\infty) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-\epsilon |t-t_0|}$$

$$= N \int Dx e^{i \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L_0 + x_j + i \epsilon(t) x^2)}$$

$\epsilon(t) = \frac{q^2}{2} e^{-\epsilon |t-t_0|}$

al final vamos a
calcular el límite ($\epsilon \rightarrow 0$).

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{x} = x(+\infty) - x(-\infty).$$

$$= N' \int Dx \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L_0 + xJ + i\epsilon(t)x^2)$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m}{2}(w_0^2 - i\epsilon)x^2 + xJ$$

ej. FUNCIÓN de Green

Matriz de índices

continuos (t, t')

$$\sum_j A_{ij} v_i = w_i$$

$$A(t, t')$$

$$A_{ij} = A(i, j)$$

$$v_i = v(i)$$

↓ continuo.

$$v(t)$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' A(t, t') v(t')$$

$$[A \cdot B](t, t') = \int dt' A(t, t') B(t', dt'')$$

$$v \cdot w = \int_{-\infty}^{+\infty} dt v(t) w(t)$$

FUNCIÓNES COMO
MATRIZ.

$$w_o[j] = \dots$$

$$\int dt (L_0 + xJ + i\epsilon x^2) = \frac{m}{2} \int dt \left(\dot{x}^2 - [w_0^2 - i\epsilon] x^2 + \frac{2}{m} xJ \right)$$

$$= -\frac{m}{2} \int dt \left(x \left[\frac{d^2}{dt^2} + w_0^2 - i\epsilon \right] x - \frac{2}{m} xJ \right)$$

$$+ \frac{m}{2} \int dt \underbrace{\frac{d}{dt} (x \dot{x})}_{0}$$

$$\frac{m}{2} \left[x(+\infty) \dot{x}(+\infty) - x(-\infty) \dot{x}(-\infty) \right] = 0 = 0 \rightarrow \text{PUNTOS FÍJOS.}$$

$$\rightarrow A(t, t') \equiv \left[\frac{d^2}{dt^2} + w_0^2 - i\epsilon \right] \delta(t - t')$$

$$= -\frac{m}{2} \left[\int dt dt' x(t) A(t, t') x(t') - \frac{2}{m} \int dt x(t) J(t) \right]$$

$$= -\frac{m}{2} [x^T(t) \cdot A \cdot x + x^T J]$$

$$w_o[J] = N \int Dx e^{i\frac{\hbar}{\lambda} [-\frac{m}{2} x^T A \cdot x + x^T J]}$$

$$1 = w_o[0] = N \int Dx e^{i\frac{\hbar}{\lambda} (-\frac{m}{2} x^T A \cdot x)} \Rightarrow N = \sqrt{\int Dx e \dots}$$

$$-\frac{m}{2} X^T \cdot A \cdot X + X^T \cdot J = \frac{m}{2} y^T \cdot A \cdot y - \frac{1}{2m} J^T \cdot A^{-1}$$

donde $y = x + \frac{1}{m} A^{-1} J$ $\rightarrow D\mathbf{x} = Dy$.

$$W_0[J] = \left[N \int Dy e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} y^T \cdot A \cdot y} \right] e^{+\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} J^T \cdot A^{-1} \cdot J}$$

$= 1$

No depende de y .

$$W_0[J] = e^{\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} J^T \cdot A^{-1} \cdot J}$$

Fourier \leftarrow

$$\delta(t-t') = \int \frac{dw}{2\pi} e^{-i(t-t')w}$$

no permite pasar por arriba del polo.

$$\rightarrow A(t-t') = \int \frac{dw}{2\pi} [w_0^2 - w^2 - i\epsilon] e^{-i(t-t')w}$$

} chequear que A es la inversa.

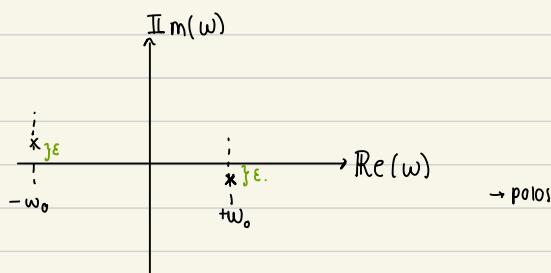
$A^{-1}(t,t') = \int \frac{dw}{2\pi} \frac{1}{[w_0^2 - w^2 - i\epsilon]} e^{-i(t-t')w}$

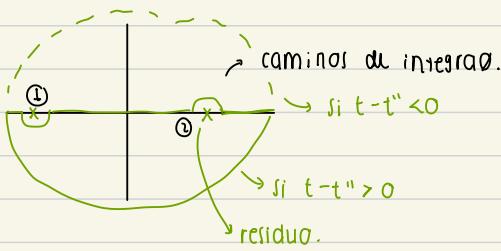
propagador de Feynmann.

$$\Delta(t-t') \sim \left[\frac{dz}{dt'} + w_0^2 + i\epsilon \right] \Delta(t-t') = \delta(t-t'). \rightarrow$$

Es una función de Green del oscilador armónico.

C.B. son las C.I. que nos da el cierto tipo de función de Green que buscamos. (Dado por $i\epsilon$).





$$\Delta(t-t') = \Theta(t-t'') \text{Res}(2) + \Theta(t-t'') \text{Res}(1).$$

$$\rightarrow \Delta(t-t') = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0(t-t')} \Theta(t-t') + \frac{i}{2\omega_0} e^{+i\omega_0(t-t')} \Theta(t'-t)$$

$$\boxed{\Delta(t,t') = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0(t-t')}}$$

$$W_0[J] = e^{\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} \int dt J(t) \int \frac{dw}{i\pi} \frac{1}{w} \dots J(t')} \rightarrow \text{ejercicio}$$

$$\langle 0|0 \rangle^J = W_0[J]$$

$$\langle 0|0 \rangle^J \rightarrow \psi_1(x) = H_1(x) \psi_0(x) \\ = X \psi_0$$

$$\underbrace{\int Dx x e^{\dots x \cdot J}}$$

$$\underbrace{\frac{\delta}{\delta J} \int Dx e^{\dots x}}$$

→ Cualquier transición derivando qr a J!

para el oscilador armónico cuadrático:

$$W_0[J] = e^{\frac{i}{2m} \int dt \int dt' J(t) \underbrace{A^{-1}(t, t')}_{\Delta(t-t')} J(t')}$$

$\langle \dots | \dots \rangle^J_{t_i \rightarrow t_f} = \dots$

\hookrightarrow propagador de Feynmann.

equa θ de mov. la define. \leftarrow

$$\cdot A(t, t') = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \dots \right] \delta(t - t')$$

buscar parte cuadrática,

$$L = \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{\omega_0^2}{2} m x^2 \right] + \dots$$

\hookrightarrow desaparece x , está integrado en el tiempo.

$$- \frac{m}{2} x \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) x + \underbrace{\frac{d}{dt}(x \dot{x})}_{A \rightarrow A^{-1} \text{ es la fun}\phi \text{ de Green.}} \dots$$

Hoy en el aux:

$$p_{0 \rightarrow n} = |\langle n | 0 \rangle|^2 = \dots$$

Desafío:

\hookrightarrow interacciones entre partículas.

oscilador anarmónico \leftarrow

$$L = L_0 - V(x) + xJ$$

ω_0 es para el armónico

$$W[J] = N \int Dx e^{\frac{i}{\hbar} \int dt (L_0 + i\epsilon x^2 + xJ)} \cdot \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt V(x)}}_{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{i}{\hbar} \int dt V(x))^n}{n!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} N \int Dx \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \int dt V(x) \right)^n e^{\frac{i}{\hbar} \int dt (L_0 + i\epsilon x^2 + xJ)}$$

Recuerdo:

$$\int Dx \underbrace{x(t_i)}_{\frac{i\hbar}{i\delta J(t_i)}} e^{\frac{i}{\hbar} \int dt (L_0 + \dots + xJ)}$$

$$\rightarrow \int Dx \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t_i) e^{\frac{i}{\hbar} \int dt (L_0 + \dots + xJ)}$$

$$\left(\int dx(t=-\infty) \int dx(t=-\infty+\varepsilon) \dots \right)$$

$$\int D\chi \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 x(t_1) e^{\frac{i}{\hbar} \int dt (L_0 + \dots + xJ)}$$

$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt_1}_{\sim} \frac{t_1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_1)}$

$$\int D\chi \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 x(t_1) \right)^n e^{\frac{i}{\hbar} \int dt (L_0 + \dots + xJ)}$$

$\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{t_1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(t_n)} \right)^n}_{m}$

$$W[J] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{N} \int D\chi \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \int dt V \left(\frac{t}{i} \frac{\delta}{\delta J(t)} \right) \right)^n e^{\dots}$$

$$W[J] = e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt V \left(\frac{t}{i} \frac{\delta}{\delta J(t)} \right)} W_0[J].$$

$$W[J] = e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt V \left(\frac{t}{i} \frac{\delta}{\delta J(t)} \right)} e^{\frac{i}{2m\hbar} \int dt \int dt' J(t) \Delta(t-t') J(t')}$$

★★

Para un potencial cualquiera.

Derivadas de una gaussiana.

* $\frac{\delta}{\delta f(t')} \int D\chi e^{\frac{i}{\hbar} \int dt x(t) J(t)}$

$$= \int D\chi \left[\underbrace{\frac{\delta}{\delta f(t')} \left(\frac{i}{\hbar} \int dt x(t) J(t) \right)}_{\frac{i}{\hbar} x(t')} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int dt x J}$$

$$* \frac{\delta}{\delta f(t)} \int dt' f(t') g(t')$$

$$= \int dt' \frac{\delta f(t')}{\delta f(t)} g(t').$$

$$= \int dt' \frac{\delta f(t')}{\delta f(t)} g(t')$$

$$= g(t).$$

para campos

$$x(t) \rightarrow \varphi(x)$$

$$Dx \rightarrow D\varphi$$

$$\dot{x}(t) \rightarrow J(x)$$

$$L(t) \rightarrow \mathcal{L}(x) \rightarrow \text{se construye con campos.}$$

$$\int dt \rightarrow \int d^4x$$

$$\Delta(t-t') \rightarrow \Delta(x-x')$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$

||

$$-V(\varphi)$$

↓
potencial del campo.

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

$$K^2 = -\omega^2$$

$$\Delta(x-y) = \int d^4k \frac{1}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-y)} \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon}$$

Fourier en el espacio tiempo.

$$; K^\mu = \underbrace{\eta_{\mu\nu} K^\mu K^\nu}_{-\omega^2 + \vec{k}^2}$$

~ offshell

$$-\omega^2 + \vec{k}^2 \quad \hookrightarrow \text{Polar} \Rightarrow \text{on shell}$$

$$\tilde{Z}_{vacío} \rightarrow$$

$$\hbar = 1$$

$$(Z \equiv W)$$

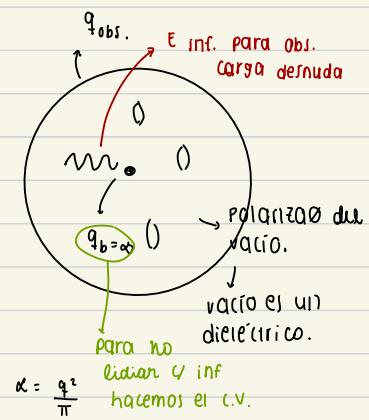
lagrangiano desnudo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial\varphi_b)^2 - \frac{m_b^2}{2} \varphi_b^2 + \frac{g_b}{3!} \varphi_b^3$$

C.V.

$$\varphi = Z_q^{1/2} \bar{\varphi} + \varphi_0 \quad ; \quad m = \bar{m} \frac{Z_m^{1/2}}{Z_q^{1/2}} \quad , \quad g = \dots$$

reescala del campo



$$\alpha = \frac{q^2}{\pi}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\varphi (\partial \varphi) - \frac{Z_m}{2} \varphi^2 + \frac{Z_g}{3!} g \varphi^3 + Y \varphi$$

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{g \varphi^3}{3!} + \mathcal{L}_{c.t.}}$$

↳ interac.

contra términos.

Renormaliz. ~

Oscilador anarmónico:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{\omega_0^2 m}{2} x^2 + \frac{(\alpha x^3 + \Delta \omega m x^2)}{T}$$

↓
pequeño.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \Delta \omega$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \Delta \omega$$

• A orden 0 es la original.
↓

$\Delta \omega$ se elige para que
no hayan resonancias.

$$\rightarrow \mathcal{L}_{c.t.} = -\frac{i}{2} (Z_\varphi - 1) (\partial \varphi)^2 - \frac{1}{2} (Z_m - 1) m^2 \varphi^2 + \frac{(Z_g - 1)}{3!} g \varphi^3 + Y \varphi$$

$$Z[J] = e^{+i \int d^4x g \left(\frac{i}{\delta} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 Z_0[J]}$$

$$Z[J] = \cancel{e^{i \int d^4x g \left(\frac{\delta}{\delta J} \right)^3}} Z_0[J]$$

$$= \sum_{V=0}^{\infty} \frac{1}{V!} \left(g i \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \right)^V \sum_P \frac{1}{P!} \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y) \right]^P$$

↑ vértices

$$i \int d^4x J(x) \rightarrow \bullet(x)$$

$$\frac{1}{i} \Delta(x-y) \rightarrow x \overline{y}$$

factor de simetría.

$$x \bullet y = \frac{1}{2} \int d^4y \int d^4x J(x) \Delta(x-y) J(y)$$

$$Z_0[J] = e^{\bullet \bullet} = \sum_P \left[\bullet \bullet \right]^P$$

$$= \sum_{V=0}^{\infty} \frac{1}{V!} \left(g i \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \right)^V \sum_P \frac{1}{P!} \left[\bullet \bullet \right]^P$$

↑ vértices.

$$\varphi^3 \rightarrow \vee$$

$$\varphi^4 \rightarrow X$$

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta J(x)} (\bullet \bullet)} = \frac{\delta \bullet}{\delta J(x)} + \bullet \frac{\delta \bullet}{\delta J(x)}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{x}{z} = x \frac{1}{2} \rightarrow \bullet \xrightarrow{x} = \int d^4y J(y) \Delta (y-x)$$

factor da simetria.

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} (\bullet \bullet)} = x \overline{y} = \Delta(x-y)$$

Hoy: Derivar reglas de Feynmann.



Leer cap. q!

$$Z_0[J] = e^{\int d^4x J(x)}$$

$$\overrightarrow{x} \longrightarrow i \int d^4x J(x)$$

$$\overrightarrow{x-y} \rightarrow$$

$$\overrightarrow{J} = \frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y i J(x) \Delta(x-y) J(y)$$

P: propagadores.

$$Z_0[J] = e^{\frac{i}{2} \int d^4x J(x)} = 1 + \underbrace{J^2}_{\substack{2 \text{ diagramas} \\ \text{multiplicados}}} + \frac{1}{2!} (J^2)^2 + \frac{1}{3!} (J^2)^3 + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (J^2)^p$$

Multiplicación de diagramas ←

Tiene un $\frac{1}{2}$ factor de simetría

Combinatoria de un diagrama.

$$(J^2) = \overrightarrow{(J)} \times \overrightarrow{(J)}$$

$$\overrightarrow{(J)} = \frac{1}{2} (J^2)$$

$$\overrightarrow{(J^3)} = \frac{1}{3!} (J^2)^3$$

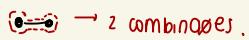
Cant. de veces que puedo permutar

factor de simetría es parte del diagrama.

$$Z_0[J] = e^{\frac{i}{2} \int d^4x J(x)} = 1 + J^2 + \overrightarrow{(J^2)} + \overrightarrow{(J^3)} + \dots$$

$$Z[J] = e^{\frac{i}{2!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{i \delta J(x)} \right)^2 Z_0[J]}$$

$$= \left[\sum \frac{1}{V!} \left(\frac{i g}{3!} \right)^V \left[\int_x \left(\frac{\delta}{i \delta J(x)} \right)^3 \right]^V \right] e^{\frac{i}{2} \int d^4x J(x)}$$

 → 2 combinaciones.

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\frac{i}{2} \int d^4x J(x)} = (\overrightarrow{J}) e^{\frac{i}{2} \int d^4x J(x)}$$

; $\overrightarrow{J} = \int_y i J(y) \Delta(y-x) \rightarrow$ factor de simetría 1.

 → 3!

Orden $V=1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 e^{\frac{i}{2} \int d^4x J(x)} &= \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) e^{\frac{i}{2} \int d^4x J(x)} \\ &= \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left[\overrightarrow{J} e^{\frac{i}{2} \int d^4x J(x)} \right] \\ &= \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left[\overrightarrow{J} e^{\frac{i}{2} \int d^4x J(x)} + (\overrightarrow{J})^2 e^{\frac{i}{2} \int d^4x J(x)} \right] \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{i}{\delta J_x} \right) \left[\Delta(x-x) + (\rightarrow_x)^2 \right] e^{\leftrightarrow}$$

propagador ←
que termina en
el mismo punto

$$\text{Diagrama: } \xrightarrow{x} \xleftarrow{x} = \frac{\Delta(x-x)}{i} = \frac{\Delta(0)}{i}$$

loop

$$= \left(\frac{i}{\delta J_x} \right) \left[\text{Diagrama loop} + (\rightarrow_x)^2 \right] e^{\leftrightarrow}$$

$$= \left[\underbrace{\frac{i}{\delta J_x} (\rightarrow_x)^2}_{2(\rightarrow_x) 0} \right] e^{\leftrightarrow} + \left[(\rightarrow_x)^3 + 0 (\rightarrow_x) \right] e^{\leftrightarrow}$$

$$2(\rightarrow_x) 0$$

$$\frac{\delta}{\delta J} \rightarrow = \frac{\delta}{\delta J} \left(\frac{1}{2} J^2 \right) = J$$

$$\left(\frac{i}{\delta J(x)} \right)^3 e^{\leftrightarrow} = 30 \rightarrow_x e^{\leftrightarrow} + (\rightarrow_x)^3 e^{\leftrightarrow}$$

$$\rightarrow i \frac{g}{3!} \int d^4 x \left(\frac{i}{\delta J(x)} \right)^3 e^{\leftrightarrow} = \left(\frac{i g}{2!} \text{Diagrama loop} \int d^4 x \rightarrow_x \right) e^{\leftrightarrow} + \left[i \frac{g}{3!} \int d^4 x (\rightarrow_x)^3 \right] e^{\leftrightarrow}$$

No depende de x

$$\frac{i g}{2!} \int d^4 x \rightarrow_x \text{Diagrama loop}$$

TADPOLE

se puede
eliminar con
el reajuste.

$$i \frac{g}{3!} \int d^4 x \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \int d^4 y_3 \Delta(y_1 - x) \Delta(y_2 - x) \Delta(y_3 - x) J(y_1) J(y_2) J(y_3)$$

Nº de vértices
= orden de g

vértice: # de derivadas salen las
patas del vértice
por el término x^{α} .

$$\xrightarrow{x} \rightarrow \int d^4 x J(x)$$

$$\xrightarrow{x-y} \rightarrow \frac{\Delta(x-y)}{i}$$

$$\text{Diagrama loop} \rightarrow i g \int d^4 x \dots$$

con el contratermino

$$\gamma\psi \sim \underbrace{iY\delta_{ij}}_{e^{\bullet\bullet}} \left[(\text{---} + \text{---}) e^{\bullet\bullet} + \dots \right]$$

$$\rightarrow \underbrace{(\text{---} + \text{---})}_{\text{o}}_y$$

vértice

Orden $V=2$

$$\cdot \frac{1}{2!} \left[\frac{i9}{3!} \delta_{ij}^3 \right] \left[\underbrace{\frac{i9}{3!} \delta_{ij}^3}_{(--- + \lambda)} \right] e^{\bullet\bullet}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{i9}{3!} \delta_{ij}^3 \right] (--- + \lambda) e^{\bullet\bullet}$$

$$= \frac{1}{2!} \frac{i9}{3!} \int_x \delta_{jx} \delta_{ix} \left[(--- + \text{---}) e^{\bullet\bullet} + (--- + \lambda) (\text{---} e^{\bullet\bullet}) \right]$$

$$= \frac{1}{2!} \frac{i9}{3!} \int \delta_{jx} \left[\text{---} e^{\bullet\bullet} + 2(\text{---} + \lambda) \text{---} e^{\bullet\bullet} + (--- + \lambda) (\text{---} e^{\bullet\bullet} + (\text{---})^2 e^{\bullet\bullet}) \right]$$

Son 2 propagadores

$$\approx \left(\text{---} + \text{---} \text{---} \right) e^{\bullet\bullet}$$

$\frac{1}{2} \frac{1}{3!} \rightarrow$ factor de simetría $2 \cdot 2 \cdot 3$.

diagramas dirigidos.

Todos los diagramas sin preocupa por los factores.

$$\Rightarrow Z[J] = \left(1 + (\text{---} + \text{---}) + (\text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---}) \right)$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} (\text{---})^2 + \frac{1}{2} (\lambda)^2 + \frac{1}{2} (2 \text{---} \text{---})}_{\frac{1}{2!} (\text{---} + \lambda)^2}) e^{\bullet\bullet}$$

$$Z[J] = \left[1 + (\text{---} + \text{---}) + (\text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\lambda + \text{---})^2 \right] e^{\bullet\bullet}$$

$$\Rightarrow Z[J] = \left[1 + (\text{loop} + \text{O-O}) + (\text{O-O-O} + \text{O-O-O-O}) + \dots + \underbrace{\frac{1}{2}(\text{O-O})^2 + \frac{1}{2}(\text{loop})^2}_{\frac{1}{2}(C-O + \text{loop})^2} + \frac{1}{2}(Z \text{ loop} \times C-O) \right] e^{iW}$$

A orden 3 \leftarrow

$$+ \text{O-O-O} + \text{O-O-O-O} + \dots + \text{loop} + \dots + \frac{1}{3!}(\text{O-O} + \text{loop})^3 + \frac{1}{4!}(\text{loop} + \text{O-O-O-O})^2$$

orden 4.

$$* \text{O-O loop O-O} = \frac{1}{2} \text{O-O} \times (\text{loop})^2$$

$$\text{loop loop loop} = \frac{1}{3!} (\text{loop})^3$$

Exponencial de los diagramas conexos

(disconexos salen de la expansión de la exponencial)

$$\Rightarrow Z[J] = e^{\text{loop} + \text{O-O} + \text{loop} + \text{O-O-O} + \dots}$$

$\cdot Z[J] = e^{iW[J]}$, $iW[J] = \text{loop} + \text{O-O} + \dots$

↳ convención.

* En los apuntes complementarios $w = z$

$$iW[J] = \ln Z[J]$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{c,T}$$

clase anteriores $\rightarrow g\phi^3$

Serniki $\mathcal{L}_1 = z_g g\psi^3 \rightarrow$ No hizo la def. anterior.

$$\mathcal{L}_{ct} = \underbrace{\frac{1}{2} (z_m - 1) m^2 \varphi^2}_{\text{vertice}} + Y \varphi + \underbrace{\frac{1}{2} (z_4 - 1) (\partial \varphi)^2}_{\text{vertice}}$$

VÉRTICES φ 2 PAIRS
VÉRTICE VÉRTICE

$$Z[J] = e^{\mathcal{L}_{ct} [\varphi \rightarrow \frac{J}{i\delta T}]} Z_1[J]$$

INTERACCIÓN de 3 PAIRS.

se cancela $\bullet\circ$ →
según Y .

Tiene que ser 0 para →
cancelar los ∞ .

contra términos →
hacen que se anulen.

$$= 1 + \bullet\bullet + \left(\bullet\circ + \circ\bullet \right) + \bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet + \left(\bullet\bullet\bullet \right)_{d=2} + \bullet\circ\circ + \circ\bullet\bullet$$

algo y

$$+ \circ\circ + \Theta + \frac{1}{2} \left(\bullet\bullet + \bullet\bullet + \bullet\circ + \circ\bullet + \dots \right)^2 + \underbrace{\bullet\circ\circ}_{(-\circ\bullet)}$$

imaginario.

$$\left(iY + \cancel{J} \cancel{Z}_3 \frac{\Delta(0)}{\epsilon} \right) = 0.$$

Si \exists  $\Rightarrow \exists$  tal que se cancelen.

* Van a aparecer ∞ : 

∴ la teoría es renormalizable

TADPOLE cancellation →
↳ regla de feynmann.

$$= 1 + \bullet\bullet + \cancel{\bullet\circ} + \cancel{\circ\bullet} + \bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet + \cancel{\bullet\circ\circ} + \cancel{\circ\bullet\bullet}$$

$$+ \circ\circ + \Theta + \frac{1}{2} \left(\bullet\bullet + \bullet\bullet + \bullet\circ + \circ\bullet + \dots \right)^2$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - V(\varphi)$$

g $\varphi^3 + \frac{\lambda \varphi^4}{4!} + \dots$

Efecto túnel



$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$$

en el vacío.

$$\begin{aligned} \langle V(\hat{x}) \rangle &= \langle 0 | V(\hat{x}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \underbrace{\omega_0^2 \hat{x}^2}_{\neq 0} + \frac{g}{3!} x^3 | 0 \rangle \\ &= \dots = \langle V \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle V'(\hat{x}) \rangle &= \langle 0 | \left(\omega_0^2 \hat{x} + \frac{g}{2} \hat{x}^2 \right) | 0 \rangle = \dots = \underbrace{\frac{g}{2} \langle 0 | \hat{x}^2 | 0 \rangle}_{\neq 0} \\ \langle V''(x) \rangle &= \langle 0 | \omega_0^2 + g \hat{x}^2 | 0 \rangle = \omega_0^2 \end{aligned}$$

$$\langle V'''(\hat{x}) \rangle = \langle 0 | g | 0 \rangle = g.$$

$V(0) = 0 \rightarrow$ genera un vértice que las estructuras cambian las prop.

$\hookrightarrow P_{\text{obs}} \neq P_{\text{lagrangiano}}$.

Fluctuaciones cuánticas

←

modifican el $V(x)$.

Notas contra
terminos.

$$V_{\text{obs}} = \langle V \rangle + \langle V' \rangle x + \underbrace{\langle V'' \rangle}_{z_{q-1}} x^2 + \dots$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \nearrow z_{m-1}$$

$$\rightarrow -i(Ak^2 + Bm^2)$$

$$\langle f | i \rangle = (\partial^2 + m^2) (\dots) \quad \underbrace{\langle 0 | T \varphi \varphi \varphi \varphi | 0 \rangle}.$$

x_1, x_2

x_3, x_4

$$\frac{\delta}{\delta J} \frac{\delta}{\delta J} \dots \frac{\delta}{\delta J} Z[J] \Big|_{J=0}$$

sólo sobreviven los diagramas de 4 corrientes.

$$\delta_{J_{x_1}} \delta_{J_{x_2}} \delta_{J_{x_3}} \delta_{J_{x_4}} \left(\text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \dots \right)$$

orden menor
(sin vértices)

↓
2 part. libres.

$$= x_1 - x_3 + x_1 \cancel{x_3} + x_1 - \cancel{x_3} - x_3$$

$$x_2 - x_4 \quad \underbrace{x_2}_{\text{describe ID}} \cancel{x_4} \quad \underbrace{\delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4)}_{\text{partícula libre.}}$$

↓
no se ve en el scattering.

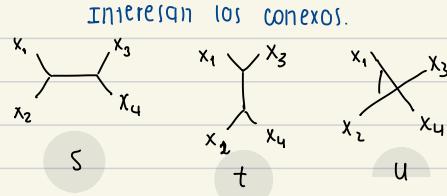
$S = 11 + iT$

$$(\partial^2 + m^2) \Delta = \delta$$

$$S = \langle x_3, x_4 | U(t_f, t_i) | x_1, x_2 \rangle$$

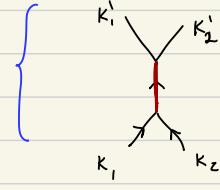
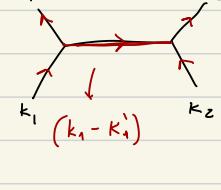
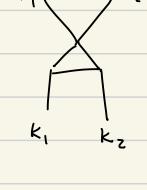
canales:

config. distinguible.



Interesan los conexos.

* leer sec 10, 11 y 12.

| | |
|---|---|
| <p>Amplitud de scattering.</p> <p>Op. de Klein-Gordon ← "amputan las piernas de los diagramas".</p> <p>Ej: árbol:</p>  | <p><u>Cap. 10</u></p> $\langle f i \rangle = ig^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) \left[\frac{1}{(k_1 + k_2)^2 + m^2} + \frac{1}{(k_1 - k'_1)^2 + m^2} + \frac{1}{(k_1 - k'_2)^2 + m^2} \right]$ <p>+ $O(g^4)$</p> <p>diagramas tipo árbol (sin loops)</p>    <p>canal s canal canal</p> |
| | <p>Reglas de Feynman para Amplitudes</p> <p>~~~~~</p> <p><u>Cap. 11</u></p> |
| | $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi S \vec{k}_1 ^2} T ^2, \quad S \equiv \oint (k_1 + k_2)^2 = (\omega_1 + \omega_2)^2$ <p>momento tipo tiempo.</p> <p>$dt = 2 \vec{k}_1 \vec{k}'_1 d\cos\theta$</p> <p>$(k_1 + k_2)^\mu = (\omega_1 + \omega_2, \vec{0})$</p> <p>en este sist. de ref.</p> |
| Hoy: <u>Cap. 12, 13 y 14</u> | <p><u>Cap. 12</u></p> <p>$[m] = +1 \rightarrow \text{masa} \rightarrow \text{cant. para referirnos a otras dim.}$</p> <p>$[m^2] = +2$</p> <p>$[m^{-1}] = -1$</p> <p>$[3m] = +1$</p> <p>$\left(\begin{array}{l} c=1 \\ \hbar=1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{de Newton}}$</p> <p>$8\pi G_N \sim \frac{1}{M_{Pl}^2} \xrightarrow{\text{masa de Planck por ej.}}$</p> <p>$t = 1 = \text{momento angular} \rightarrow m \cancel{\propto} L$ sin unidades ($c=1$) $\rightarrow \frac{t}{L} = 1$.</p> <p>$\Rightarrow [ML] = 0 \rightarrow \text{no tiene unidades.}$</p> <p>$\Rightarrow [L] = -1 \Rightarrow [x] = -1$</p> <p>$\Rightarrow L \sim \gamma_m$</p> |

$$[\partial_\mu] = +1$$

$$-(\partial \phi)^2 + m^2 \phi^2$$

espacio de d \leftarrow
dim.

$$\text{d}^\sigma x = -\text{d}$$

$$[\phi] = ?$$

$e^{\frac{i}{h} \cdot s}$ → s tiene unidades de $\hbar = 1$

$$\rightarrow [S] = 0$$

$$\rightarrow S = \int d^4x \ m^2 \phi^2$$

$$\rightarrow [S] = 0 = \left[d^4 x m^2 \phi^2 \right] \quad \rightarrow [\phi] = +1$$

-4 2 2

En dim. d:

$$\rightarrow [S] = O = [d^4 x m^2 \phi^2] \quad \rightarrow [\phi] = \frac{d-2}{2} \quad \rightarrow [\phi] = \lambda.$$

$$g \varnothing^3$$

$$\cdot \text{ Si } S \supseteq \int d^d x \ g \phi^3$$

$$[d^d \times g \phi^3]$$

\downarrow \downarrow
 $-d$ $\left(\frac{d-2}{2}\right) \cdot 3$

$$\Rightarrow 0 = [g] + -d + \left(\frac{d-2}{2}\right) \cdot 3$$

$$\Rightarrow [g] = d - \frac{3(d-2)}{2}$$

→ en $d=6$

$$[g] = 6 - \frac{3 \cdot 4}{2} = 0 \rightarrow g \text{ se vuelve adimensional.}$$

$$[d^4x \ \lambda \phi^4] = 0$$

$$\Rightarrow [\lambda] = d-2(d-2) = 4-d$$

$$\rightarrow cn \quad d = 4$$

↳ λ no tiene dim.

* La carga E-M tiene dim. 0 en dim. 4.

$$\Delta(x-y) = i \langle 0 | T \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle \quad \text{para teoría libre.}$$

* Teorías son renormalizables cuando el acoplamiento es positivo.

$$M_{\text{Pl}}^{(d=4)} = V M_{\text{Pl}}$$

↓
masa de Planck
en otra dim.

Siempre podemos elegir Y para que se cancele.

$$= \dots$$

$$= \int d^d k \dots$$

PROP. EXACTO

$$\Delta(x-y) = i \langle 0 | T \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle \rightarrow \text{válida con todas las interacciones} \rightarrow g\psi^3, \lambda\psi^4$$

demandamos que:

$$\langle 0 | \psi | 0 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow Y = \dots$$

→ cancelación de renuncias.

$$\text{Diagrama: } \textcircled{1} - \bullet + \begin{array}{c} x \\ y \end{array} - \bullet = 0.$$

$$\psi \rightarrow \psi + Y$$

$$\langle k | \psi(x) | 0 \rangle = e^{-ik \cdot x}$$

1 part.

→ Esto es cierto para una teoría completa (ap. complementarios del profe).

$$= i \langle 0 | T \psi(x) \mathbb{1} \psi(y) | 0 \rangle$$



$$\mathbb{1} = |0\rangle\langle 0| + \int d\vec{k} |\vec{k}\rangle\langle \vec{k}| + \int \dots |\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2| + \dots$$

Es como

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \dots$$

ejemplos de multipartículas

$$\mathbb{1} = |0\rangle\langle 0| + \int d\vec{k} |\vec{k}\rangle\langle \vec{k}| + \sum_n \int d\vec{k} |\vec{k}, n\rangle\langle \vec{k}, n| \quad \begin{matrix} \text{momento total: } (\vec{k}_1, \vec{k}_2) \\ \downarrow \\ \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \end{matrix}$$

EN Fourier →

$$\Delta(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}(x-y)} \tilde{\Delta}(\vec{k})$$

inv. de Lorentz → No depende de la dirección.

Para la teoría libre

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon}$$

$x^0 > y^0$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(x-y) &= \langle 0 | \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle \\ &= \underbrace{\langle 0 | \psi(x) | 0 \rangle}_{\textcircled{o}} \underbrace{\langle 0 | \psi(y) | 0 \rangle}_{\textcircled{o}} + \int d\tilde{k} \langle 0 | \psi(x) | \tilde{k} \rangle \langle \tilde{k} | \psi(y) | 0 \rangle. \\ &\quad + \sum_n \int d\tilde{k} \langle 0 | \psi(x) | \tilde{k}, n \rangle \langle \tilde{k}, n | \psi(y) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

$x^0 > y^0$

$$\rightarrow \tilde{\Delta}(x-y) = \int d\tilde{k} e^{ik \cdot (x-y)} + \sum_n \int d\tilde{k} \underbrace{\langle 0 | \psi(x) | \tilde{k}, n \rangle}_{\propto e^{ik \cdot x}} \underbrace{\langle \tilde{k}, n | \psi(y) | 0 \rangle}_{\propto e^{-ik \cdot y}}.$$

$$e^{-ik^0(x-y) + i\vec{k} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \sqrt{k^2 + m^2}$$

$$\cdot \langle \tilde{k}, n | \psi(x) | 0 \rangle = \underbrace{\langle \tilde{k}, n |}_{\textcircled{l}} \underbrace{e^{-ip \cdot x}}_{|0\rangle} \psi(0) \underbrace{e^{ip \cdot x}}_{|0\rangle} \rightarrow \text{transformado}$$

\rightarrow por def. el vacío no tiene momento.

$$= -i k^0 (x^0 - y^0) + i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})$$

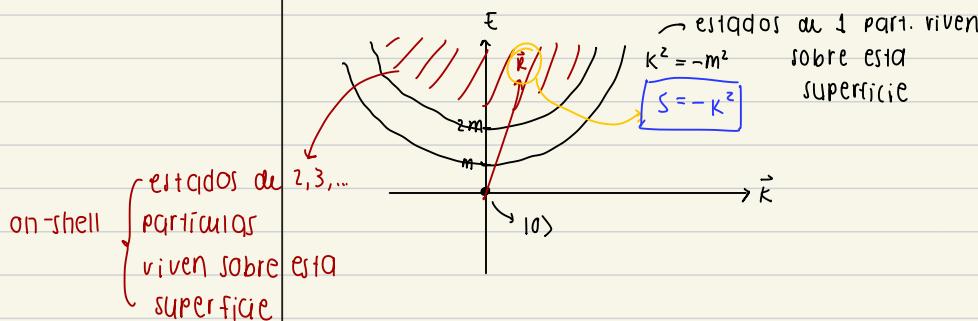
\rightarrow energía inv. de Lorentz

$$\rightarrow S = -(k_1 + k_2 + k_3)^2$$

$$S = -(k_1 + k_2 + k_3)^2$$

(caso multipart.)

$$s \geq 4m^2 = (2m)^2 \rightarrow \text{valor min. de } s \text{ para 2 part.}$$

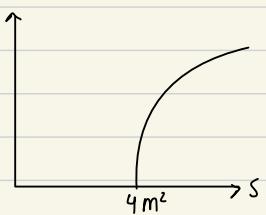


$x^0 > y^0$

$$\rightarrow \langle 0 | \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle = \int d\tilde{k} e^{ik \cdot (x-y)} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \int d\tilde{k} e^{ik \cdot (x-y)}$$

$$\cdot \rho(s) \equiv \sum_n | \langle \tilde{k}, n | \psi(0) | 0 \rangle |^2 \delta(s - M^2)$$

$$k^0 = (\tilde{k}^2 + M^2)^{1/2}$$



Última clase

 $x^0 > y^0$

$$\langle 0 | \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle = \int d\tilde{k} e^{+ik(x-y)} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \int d\tilde{k} e^{ik(x-y)} ; \rho(s) = \sum_n |\langle \tilde{k}, n | \psi(0) | 0 \rangle|^2 \delta(s - M^2)$$

$M^2 \equiv -(\sum_i k_i)^2$

$$k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

$$k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + s}$$

Propagador exacto

$$-i \Delta(x-y) = \langle 0 | T \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle$$

 $y^0 > x^0$

$$\langle 0 | \psi(y) \psi(x) | 0 \rangle = \int d\tilde{k} e^{-ik(x-y)} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \int d\tilde{k} e^{-ik(x-y)}$$

se "prende" cada una ←
cuando sea necesario.

$$\Delta(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \psi(y) \psi(x) | 0 \rangle.$$

Identidad

$$d\tilde{k} = \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} 2k^0$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2 - i\epsilon} = i \Theta(x^0 - y^0) \int d\tilde{k} e^{ik(x-y)} + i \Theta(y^0 - x^0) \int d\tilde{k} e^{-ik(x-y)}$$

↳ int. en k^0 , pasar por los polos.

$$\Delta(x-y) = \langle 0 | T \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle$$

↑↑
libre

polo simple en
 m^2 .

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x-y)} \left[\frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \frac{1}{k^2 + s - i\epsilon} \right]$$

on shell

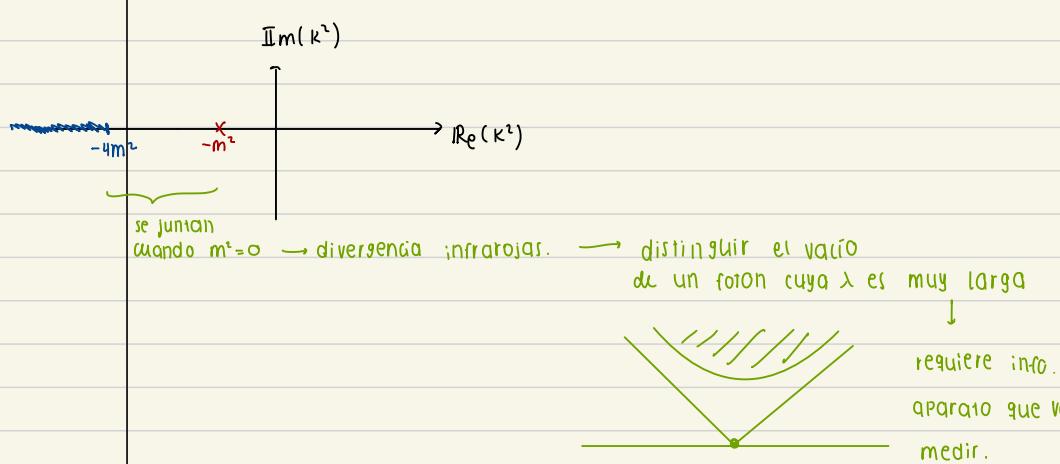
no están amarradas

las amarran el polo.

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon}.$$

Prop. de Feynman

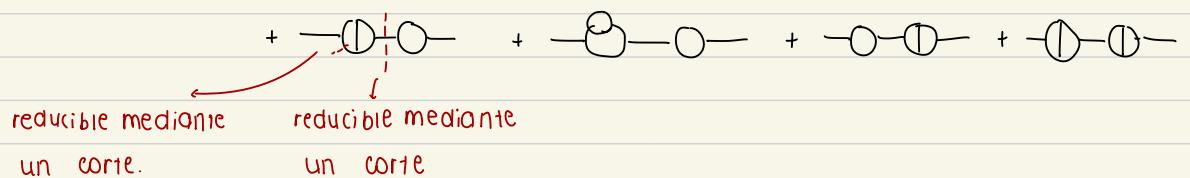
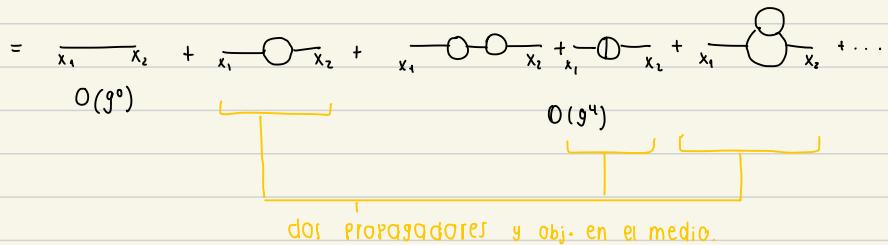
El valor de la masa es el lugar del polo del propagador exacto.



Prop. exaciO:

$$\frac{1}{i} \Delta(x, -x_i) = \langle 0 | T \varphi(x_i) \varphi(x_i) | 0 \rangle \\ = \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \frac{\delta}{\delta J(x_i)} W \Big|_{J=0} \rightarrow \text{sobreviven diag. q z corrientes.}$$

$g\psi^3 \rightarrow$
diagramas con 2 patas externas.



$$\frac{1}{i} \Delta(x, -x_i) = x_1 \xrightarrow{} \left[-\text{O} + \text{O} + \text{O} \right] \xrightarrow{} x_2$$

diagramas irreducibles

$$+ x_1 \xrightarrow{} \left[\text{O} + \text{O} + \text{O} \right] \xrightarrow{} \left[\text{O} + \text{O} + \text{O} \right] \xrightarrow{} x_2$$

$$+ x_1 \xrightarrow{} [\text{O}] \xrightarrow{} [\text{O}] \xrightarrow{} [\text{O}] \xrightarrow{} x_2$$

+ ...

Moviéndonos a Fourier

Repasar Reglas de Feynman!

$\Pi \rightarrow$ autofunc.

Serie geom.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$1 + 2 + 4 + 8 \dots = -1$$

Series no conv. en cuantos sean inf.

$$\frac{i}{i} \Delta(k^2) = \frac{1}{k} + \left(\text{Diagrama de loop con } \frac{q}{k-k-q} \right) + \text{Diagrama de loop simple}$$

damas info. del momento que acarrea el prop.

$$\tilde{\Delta}(k) g^2 \left[\int d^d q \tilde{\Delta}(q) \tilde{\Delta}(k-q) \right] \tilde{\Delta}(k)$$

$$= \frac{1}{i} \tilde{\Delta}(k^2) + \frac{1}{i} \tilde{\Delta}(k^2) \left[i \Pi(k^2) \right] \frac{1}{i} \tilde{\Delta}(k^2)$$

diag. irred.

$$+ \frac{1}{i} \tilde{\Delta}(k^2) \left[i \Pi(k^2) \right] \frac{\tilde{\Delta}(k^2)}{i} \left[i \Pi(k^2) \right] \frac{\tilde{\Delta}(k^2)}{i} + \dots$$

$$= \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon - \Pi(k^2)}$$

→ Resumamos (no haber sacado la expansión).

$$= \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \left[\frac{1}{1 - \Pi/(k^2 + m^2 - i\epsilon)} \right]$$

* Propagador exacto tiene un polo en m^2 pero Π no puede modificar la expresión del polo.
(Pueden aparecer + polos)

$$i\Pi(k^2) = -\text{Diagrama de loop} + \text{Diagrama de loop simple}$$

con contraterminos (z_4 y z_m) → $1 - z_4 = A$
 $1 - z_m = B$.

$$= \frac{1}{2} (ig)^2 \left(\frac{1}{i} \right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}((l+k)^2) \tilde{\Delta}(l^2) - i(A k^2 + B m^2) + O(g^4).$$

factor de sim. ↓
cada prop.

$$\int d^d l \frac{1}{l^2} \sim \ln(\Lambda) \rightarrow \text{diverge.}$$

loops divergen (algunos)

$$i\pi(k^2) = -\oint + \infty$$

$$= \frac{i}{2} (ig)^2 \left(\frac{i}{i}\right)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}((l+k)^2) \tilde{\Delta}(l^2) - (Ak^2 + Bm^2) + O(g^4)$$

$$\Delta(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon - \pi(k^2)}$$

① $k^2 = -m^2$ es un polo simple de $\Delta(k^2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi(-m^2) = 0 & \Leftarrow \textcircled{1} \\ \pi'(-m^2) = 0 & \Leftarrow \textcircled{2} \end{cases} \sim \text{para que no cambie el residuo.}$$

② Residuo de $\Delta(k^2)$ en $k^2 = -m^2$ es = 1.

$$\Delta(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} ds \rho(s) \dots$$

↓
Res ($\Delta(k^2 = -m^2)$) = 1

Obj. de la clase

* Tenemos 2 o 3 y 2 condiciones para det. A y B.

Int. sin frontera ↪

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l+k)^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{l^2 + m^2 - i\epsilon} = ?$$

TRUCO

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int dF_n (x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n)^{-n}$$

↓
 $\int dF_n = (n-1)! \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n \text{ int}} dx_1 \dots dx_n \delta(x_1 + \dots + x_n - 1)$
 delta bajo las n int. a n-1.

* m absorbe el iε

$$\cdot \int dF_n \cdot 1 = 1.$$

$$\tilde{\Delta}((k+l)^2) \tilde{\Delta}(l^2) = \frac{1}{l^2 + m^2} \cdot \frac{1}{((l+k)^2 + m^2)}$$

$$= \int_0^1 dx \left[x ((l+k)^2 + m^2) + (1-x)(l^2 + m^2) \right]^{-2}$$

↓ por la δ
 $x + x_2 = 1$
 $\rightarrow x_2 = 1 - x$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 dx \left[l^2 + 2x l \cdot k + x k^2 + m^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \int_0^1 dx \left[(l+xk)^2 + x(1-x)k^2 + m^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \int_0^1 dx \left[q^2 + D \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{donde} \quad q \equiv l + xk \rightarrow d^d l = d^d q \\
 &\qquad \qquad \qquad D = x(1-x)k^2 + m^2 \\
 &\qquad \qquad \qquad \downarrow \text{de c/r a } l. \\
 &\qquad \qquad \qquad x \in [0,1]
 \end{aligned}$$

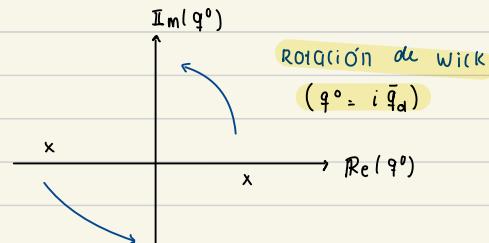
$$\Rightarrow \int d^d q \frac{1}{[q^2 - D]^2}$$

$$\cdot D = X(1-X)k^2 + m^2 - iE.$$

→ tomando sólo la int. en g°

$$\int d\mathbf{q}^6 \frac{1}{[\mathbf{q}^2 + D - i\epsilon]^2}$$

↓
decir rápidamente cuánto a g. en ∞
podemos deformar el camino de integración sin cruzar polos.



Nomenclature:

$$\begin{aligned} d^d q &= dq^0 dq^1 dq^2 \dots d^{d-1} q = i d^d \bar{q} \quad \leadsto q^i = \bar{q}_i \\ \leadsto d^d \bar{q} &= d\bar{q}_0 d\bar{q}_1 d\bar{q}_2 \dots d\bar{q}_d \end{aligned}$$

$$* \quad -(q^0)^2 + (q^1)^2 + \dots + (q^{d-1})^2$$

cambia la →
signatura del ESP.
tiempo.

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2} g^2 I(k^2) - A k^2 - B m^2 + O(g^4)$$

se elimina i con
 $i d^{\partial \tilde{q}}$ y con los
 contraterminos.

$$J(k^z) = \int_0^1 dx \int \frac{d\bar{q}}{(z\pi)^d} \frac{1}{(\bar{q}^z + D)^d}$$

podemos olvidar los ie xq integraron en el eje imaginario.

$$\cdot d=4 \rightarrow \int^{\infty} \frac{dq}{q} = \ln(\infty) \rightarrow \text{diverge.}$$

10

Depende del radio
(no de los óngulos)

$$\text{como:}$$

$$\int d^3x \ f(r)$$

$$= \int dr \ r^2 \ d\Omega.$$

pueden faltar factores.

- d será un parámetro continuo.
↳ int. va q ser convergente
- A valor de d excepto
- Para cuando d es discreto.

serie:

$$1 + 2 + 4 + \dots$$

$$= 1 + 2(1 + 2 + 4 + \dots)$$

$$\rightarrow (-) = 1 + 2(-)$$

$$\rightarrow (-) = -1 \sim \text{nunca abrió}$$

haber sido expandido.

* Collins.

$$\int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} = \int d\bar{q} Q_d \bar{q}^{d-1}$$

$$Q_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}d)}$$

$$\rightarrow \int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{(\bar{q}^2)^a}{(\bar{q}^2 + D)^b} = \frac{\Gamma(b-a-\frac{1}{2}d) \Gamma(a+\frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(b) \Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(b-a-d/2)}$$

↓
solo finito para
 $2a-2b+d < 0$

para \bar{q} grande

$$\sim \int d\bar{q} \bar{q}^{d-1} \bar{q}^{2a} \bar{q}^{-2b} \rightarrow 0$$

→ para que converga.
→ asumimos que se cumple
para un radio de convergencia pero luego
asumimos que se cumple $\forall a, b$.

sigue siendo finito \forall
valor de a, b .

~~~~~

$$\cdot \epsilon = 6 - d$$

$$\cdot g(d) = g \tilde{\mu}^{\epsilon/2}$$

para viver en "masa"  
cualquier dim. 6.

$$\Pi(+K^2) = \frac{1}{2} \propto \Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2}) \int_0^1 dx D \left( \frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{D} \right)^{\epsilon/2}$$

$$-AK^2 - BM^2 + O(\alpha^2)$$

adimensional  $\leftarrow$

como una

$$\cdot \alpha \equiv \frac{g^2}{(4\pi)^3} \rightarrow \text{otra de estructura fina.}$$

~~~~~

• Diverge en el $\Gamma \sim 1/\epsilon$.

↳ divergencias puntuales en una recta

en el plano \mathbb{C}

↳ indep. de si cambiamos a otra dim. \mathbb{N} .

• $-AK^2 - BM^2$ tienen que absorber el $1/\epsilon$

Continuación..

6. mayo.

Diverge con $\epsilon = 0$

(dim 6)

Hay que expandir T
y $(\cdot)^{\frac{1}{\epsilon}}$ no es trivial.

contratérmino se
hará cargo de la
divergencia.

↳ lo que sobrevive en
la div. es $\sim k^2$

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2} \alpha \underbrace{\Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2})}_{\sim \frac{1}{\epsilon}} \int_0^1 dx D \left(\frac{4\pi \tilde{\mu}}{D} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} - A k^2 - B m^2 + O(\alpha^2) ; \alpha = \frac{g^2}{(4\pi)^3}$$

$$\epsilon = 6 - d.$$

$$\rightarrow T^{\frac{1}{\epsilon}} = 1 + \frac{\epsilon}{2} (\ln F + O(\epsilon^2))$$

$$D = x(1-x)k^2 + m^2$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pi(k^2)$$

$$g(d) = \tilde{\mu}^{3/2} g$$

$$= -\frac{1}{2} \alpha \left[\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 \right) \underbrace{\left(\frac{1}{6} k^2 + m^2 \right)}_{\int_0^1 D dx} + \int_0^1 dx D \ln \left(\frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{e^\epsilon D} \right) \right] - A k^2 - B m^2 + O(\alpha^2)$$

$$\tilde{\mu} \approx \sqrt{4\pi} e^{-\frac{1}{2}\epsilon} \tilde{\mu}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} T(-n+x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{x} - \Gamma + \sum_{k=1}^n k^{-1} + O(x) \right]$$

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx D \ln \left(\frac{D}{m^2} \right) - \left\{ \frac{1}{6} \alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\mu}{m} \right) + \frac{1}{2} \right] + A \right\} k^2$$

$$- \left\{ \alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\mu}{m} \right) + \frac{1}{2} \right] + B \right\} m^2$$

• Re definimos

$$A = -\frac{1}{6} \alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\mu}{m} \right) + \frac{1}{2} + \underline{k_A} \right] + O(\alpha^2) \rightarrow \text{Ahora la dependencia es } k_A \text{ y } k_B$$

$$B = -\alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\mu}{m} \right) + \frac{1}{2} + \underline{k_B} \right] + O(\alpha^2)$$



En el fondo las div. nunca estuvieron ahí.

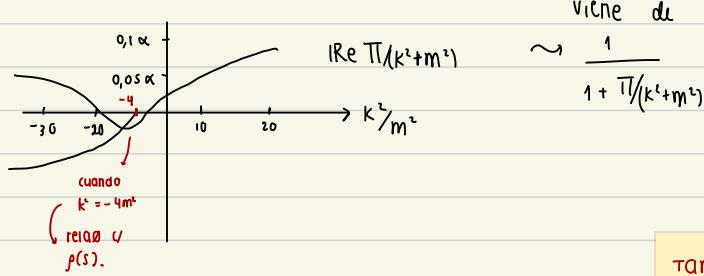
$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx D \ln \left(\frac{D}{m^2} \right) + \alpha \left(\frac{1}{6} k_A k^2 + k_B m^2 \right) + O(\alpha^2)$$

condiciones

$$\Pi(-m^2) = 0$$

$$\Pi'(-m^2) = 0$$

$$\boxed{\Pi(k^2) = \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx D \ln \left(\frac{D}{D_0} \right) - \frac{1}{12} \alpha (k^2 + m^2) + O(\alpha^2)} \rightarrow \text{de orden } \alpha.$$



viene de

$$\sim \frac{1}{1 + \text{Re } \Pi(k^2 + m^2)}$$

CAP 15 aporta un branch cut.

$$\tilde{\Delta}(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} p(s) \frac{1}{k^2 + s - i\varepsilon} ds$$

↑

$\rightarrow \Pi(-m^2) = 0$

\rightarrow no se corre el polo

$\rightarrow \Pi'(-m^2) = 0 \rightarrow$ viene del residuo.

Tarea: Analizar resultado final:

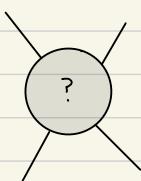
$$p(s) = \frac{1}{\Pi} \frac{\text{Im } \Pi(-s)}{(-s + m^2 + \text{Re } \Pi(-s))^2 + (\text{Im } \Pi(-s))^2}$$

Estudiar el vértice



PROPOSITO de dif el prop. exacto:

$$\langle \tilde{\psi} \psi \rangle(k^2) = \boxed{\dots} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$



$$= \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

orden α^2

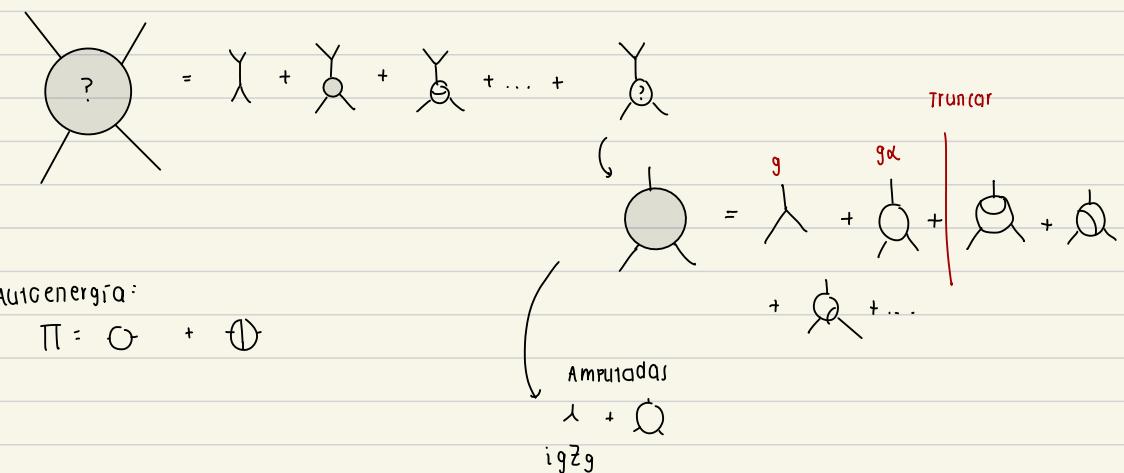
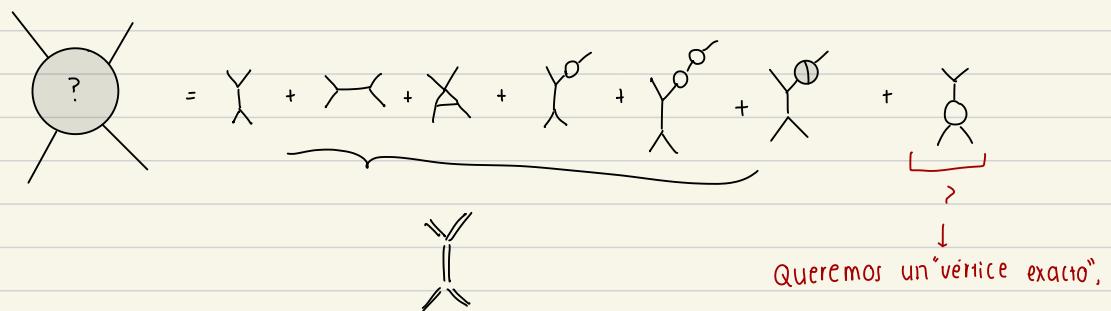
... \downarrow cambia los canales s.

representan part. que no se ven.
↓ los ignoramos.

$$\rightarrow \boxed{\text{---} + \text{---}} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

↓ propagador exacto.

- Correcciones cuánticas
- ↳ sucesión de diagramas.



Obj. exactos: calcular todas las correcciones cuánticas

Decidimos que todas vayan hacia adentro
 $\Rightarrow k_1 = -(k_2 + k_3)$

$$\begin{aligned}
 \overline{\Delta}_{k^2} &= \Delta(k^2) \\
 \text{Diagram: } &= i V_3(k_1, k_2, k_3) \rightarrow \text{Vértice exacto} = \text{función de 3 pts.} \\
 &\quad \text{Fungo de 3 pts.} \\
 \text{Diagram: } &= i g \overline{Z}_g + (i g \overline{Z}_g)^3 \left(\frac{1}{i} \right)^3 \int \frac{d\ell}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}(\ell^2) \tilde{\Delta}((\ell - k_1)^2) \tilde{\Delta}((\ell + k_1)^2) \\
 &\quad \text{3 vértices} \downarrow \\
 &\quad \text{3 propagadores (sin partes externas)} \\
 &\quad \text{Este loop diverge.} \\
 \text{Diagram: } &+ \text{Diagram: } k_1 + l - k_1 \quad \text{eleva el orden del cálculo.} \\
 &\quad k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\
 \overline{Z}_g &= 1 + \alpha \# \\
 \rightarrow \overline{Z}_g^3 &= 1 + O(\alpha^2 \dots) \\
 \Rightarrow \overline{Z}_g^3 &= 1
 \end{aligned}$$

[PASOS]

$$\rightarrow \int d^d l \frac{1}{(l^2 + m^2)} \cdot \frac{1}{((l - k_1)^2 + m^2)} \cdot \frac{1}{((l + k_2)^2 + m^2)} \rightarrow \text{truco de Feynman.}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{1}{A_1} \frac{1}{A_2} \frac{1}{A_3} = \int_0^1 dx_1 \int dx_2 \frac{1}{(\dots)^{*3}}$$

↳ lidar con el polo
↳ rotas de Wick.

✓
Int. euclídea

$$\int d^d q \frac{()^\alpha}{()^\beta} = \Gamma^\alpha \Gamma^\beta$$

$$\frac{V_3(k_1, k_2, k_3)}{g} = \left(\begin{array}{c} k_1 \\ k_3 \\ k_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} k_1 \\ l \\ k_3 \\ k_2 \end{array} \right) \frac{1}{g} \quad (k_1 + k_2 + k_3 = 0)$$

$$z_g = 1 + O(g^2) \rightarrow$$

↳ no necesitamos poner
\$z_g\$ en \$g^2\$

$$= z_g + (ig)^2 \left(\frac{1}{i} \right)^3 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \underbrace{\tilde{\Delta}((l-k_1)^2) \tilde{\Delta}((l+k_2)^2) \tilde{\Delta}(l^2)}_{\text{rule of Feynmann}} + O(g^4)$$

$$\frac{1}{(l-k_1)^2 + m^2} \cdot \frac{1}{(l+k_2)^2 + m^2} \cdot \frac{1}{l^2 + m^2}$$

ϵ

rule of Feynmann.

$$= \int dF_3 \left[x_1(l-k_1)^2 + x_2(l+k_2)^2 + x_3 l^2 + m^2 \right]$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$$* \int dF_3 = 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

$$= \int dF_3 [q^2 + D]^{-3} \quad ; \quad q = l - x_1 k_1 - x_2 k_2$$

$$\begin{aligned} D &= x_1(1-x_1) k_1^2 \\ &\quad + x_2(1-x_2) k_2^2 \\ &\quad + 2x_1 x_2 k_1 \cdot k_2 + m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= x_3 x_1 k_1^2 + x_3 x_2 k_2^2 \\ &\quad + x_1 x_2 k_3^2 + m^2 \end{aligned}$$

\downarrow
 $-i\epsilon$

$$= z_g + (ig)^2 \left(\frac{1}{i} \right)^3 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int dF_3 [q^2 + D]^{-3}$$

ubicación de los polos:

$$\left. \begin{aligned} q^0 &= i\bar{q}_d \\ q^i &= \bar{q}_i \end{aligned} \right\} d^d q = i d^d \bar{q}$$

Ahora es una integral euclídea.
(y no Minkowski).

$$\begin{aligned} q^2 &= -(q^0)^2 + (q^1)^2 + \dots + (q^{d-1})^2 \\ &= (\bar{q}_1)^2 + (\bar{q}_2)^2 + \dots + (\bar{q}_d)^2 \end{aligned}$$

Puede aplicarse el truco a:

$$z(J) = \int D\phi e^{i \int d^d x \bar{\chi} \chi + \dots}$$

$\int D\phi e^{-\int d^d x \bar{\chi} \chi + \dots}$
que no tenga fase
es más riguroso.

$$\int dx e^{-x^2} = \int D\phi e^{-\int d^d x (\bar{\chi}^2 + m^2 \phi^2)}$$

Int. euclídea.

$$= z_g + (ig)^2 \left(\frac{1}{i}\right)^3 \int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \int dF_3 [\bar{q}^2 + D]^{-3}$$

Recordar:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(\bar{q}^2)^a}{(\bar{q}^2 + D)^b} = \frac{\Gamma(b-a - \frac{1}{2}d) \Gamma(a + \frac{1}{2}d)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(b) \Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(b-a - \frac{d}{2})}$$

$d+2a < 2b$ converge

pero es cierto al final \forall

$$= z_g + \frac{1}{2} \alpha \underbrace{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\sim \gamma_\varepsilon} \int dF_3 \underbrace{\left(\frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{D}\right)^{\varepsilon/2}}_{\text{expandiendo pequeño.}} + O(\alpha^2) ; \quad \alpha = \frac{g^2}{(4\pi)^3}$$

$$\chi^\varepsilon \rightarrow 1 + \varepsilon \cdot \ln x + O(\varepsilon^2)$$

$$\varepsilon = 6-d$$

$$g(d) = \tilde{\mu}^{\varepsilon/2} g$$

Parámetro arbitrario.
debe desaparecer

$$\mu = 4\pi e^{-\delta} \tilde{\mu}^2$$

$$z_g \equiv 1 + C$$

$$\leadsto \frac{V_3(k_1, k_2, k_3)}{g} = z_g + \frac{1}{2} \alpha \left[\frac{2}{\varepsilon} + \underbrace{\int dF_3 \ln\left(\frac{4\pi \tilde{\mu}^2}{D}\right)}_{\ln(\mu/m)} \right] + O(\alpha^2)$$

$$= 1 + \left\{ \alpha \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(\frac{\mu}{m}\right) \right] + C \right\} - \frac{1}{2} \alpha \int dF_3 \ln(D/m^2) + O(\alpha^2)$$

Renombrando:

$$C = -\alpha \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(\frac{\mu}{m}\right) + K_c \right] + O(\alpha^2)$$

K_c es un valor arbitrario q partir del cuál se construye la teoría.

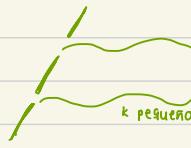
$K_c = 0$
suposició.

$$\frac{V_3(k_1, k_2, k_3)}{g} = 1 + -\frac{1}{2} \alpha \int dF_3 \ln(D/m^2) - K_c \alpha + O(\alpha^2)$$

adimensional

$$V_3(0, 0, 0) = g \rightarrow \lambda$$

λ de onda $\infty \rightarrow g$ lo + vestido posible.

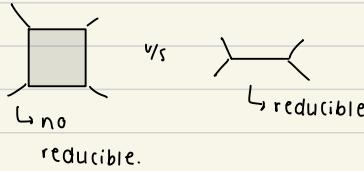


λ grande,
perturbamos lo menos posible a la part.
 g describe esta colisión a la menor E posible.

EN QED:

$$V_3(0,0,0) = e$$

↓
carga eléctrica
conveniente.



Si α decrece \rightarrow se vuelve débilmente acoplado a energías altas.



$$\int d^6 l \frac{1}{l^3} \frac{1}{l^2} \frac{1}{l^2} \frac{1}{l^2} \rightarrow \text{diagrama finito.}$$

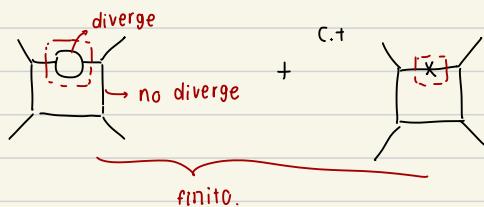
$$= i \frac{g^4}{6 (4\pi)^3} \int d^6 l \left(\frac{1}{D_{1234}} + \frac{1}{D_{1324}} + \frac{1}{D_{1243}} \right) \quad i D_{1234} = x_1 x_4 k_1^2 + x_2 x_4 k_2^2 + \dots$$



¿ES UN VÉRTICE POR SI SOLO?

↳ si para bajas o altas energías.

↳ surge una interacción efectiva $\rightarrow \lambda \phi^4$.



$$-(*+ -O) - (*+ -O)$$

↳ se van estas div.

$\rightarrow O(g^4) + O(g^4)$

cancela los demás ajustándolo en más ordenes

$\# g^4 + \# g^4 + \dots$

$$z \text{ divergencias.}$$

$$z_4, z_m \sim A k^2 + m^2 B$$

$$A = g^2 \frac{1}{\epsilon}, \quad B = g^2 \frac{1}{\epsilon}$$

| | |
|--|--|
|  $\text{---} = \text{---} + \text{---}$ $\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots + \text{---}$ $\Pi(k^2) = \dots$ $V_3(k_1, k_2, k_3) = \dots$ $V_4(k_1, \dots, k_4) = \dots$ $\text{---} \times \left\{ \begin{array}{l} \cdot A = z_\varphi - 1 = \# g^2 + \# g^4 + \# g^6 \\ \qquad \qquad \qquad \downarrow \alpha^1 \qquad \downarrow \alpha^2 \qquad \downarrow \alpha^3 \\ \cdot B = z_m - 1 \\ \cdot C = z_g - 1 = \# g^2 + \# g^4 + \dots \end{array} \right.$ $\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$ | <p>Hemos calculado:</p> $\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots + \text{---} = \frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon + \Pi(k^2)}$ $\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \xleftarrow{\text{A,B}}$ $\Pi(k^2) = \dots$ $V_3(k_1, k_2, k_3) = \dots$ $V_4(k_1, \dots, k_4) = \dots$ $\rightarrow \text{finito } \times q \text{ se renormaliza.}$ $\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$ |
| <p>Correlaciø de n-puntos ↓ amplitud de scattering</p> | <p><u>función partición</u></p> $Z[J] = e^{W[J]}$ $W[J] = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$ $+ \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$ $+ \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$ <p style="text-align: center;">\downarrow un solo diag. enrega el canal s, t y u</p> <p style="text-align: right;">$\text{---} \times \text{---} + \text{---} \times \text{---} + \dots$</p> <p style="text-align: right;">$\text{---} \times \text{---} + \text{---} \times \text{---} + \dots$</p> <p style="text-align: right;">$\text{---} \times \text{---} + \text{---} \times \text{---} + \dots$</p> <p style="text-align: right;">$\text{---} \times \text{---} + \text{---} \times \text{---} + \dots$</p> |

$$\langle 0 | \tau \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle =$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: } \text{Loop with 2 external legs} = \text{Bare Propagator} + \dots \\
 & \text{Note: LSZ amputa las piernas de los diagramas.} \\
 & \text{Diagram: } \text{Loop with 2 external legs} = \left(\text{Bare Propagator} + \text{Loop terms} \right) \\
 & \quad \text{Bare Propagator} = \left(\text{Bare Propagator} + \text{Loop terms} \right) \\
 & \quad \text{Loop terms: } \lambda + \phi + \phi + \dots \\
 & \quad \text{Total: } \lambda + \phi + \phi + \dots + \text{Bare Propagator} + \dots \rightarrow \text{Analizarlo por pedazos.}
 \end{aligned}$$

Potencial del nudo

$$\begin{aligned}
 V(\phi) &= \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{g}{3!} \phi^3 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} z_n g_n \phi^n
 \end{aligned}$$

ϕ renormalizado.

Grado de divergencia ←
superficial
↳ dimensión del diagrama,

$$\int d^d l \frac{1}{l^2} \frac{1}{l^2} \frac{1}{l^2}$$

$$D = d \cdot 1 - 2 \cdot 3 \quad d = 6 \quad \rightarrow \int \frac{dl}{l} \text{ diverge.} \sim \ln(\infty)$$

↳ div. ultravioletas

↳ si $m=0$, para l pequeño:

$$\frac{1}{l^2+m^2} \sim \frac{1}{m^2} \rightarrow \int \frac{d^d l}{m^6} \rightarrow \text{div. infrarroja.}$$

$$\text{Diagram} \rightarrow \int d^d l \frac{1}{l^2} \frac{1}{l^2}$$

$$D = d - 2 \cdot 2 \rightarrow d=6 \rightarrow D=2 \rightarrow \text{diverge cuadrática} \# \hookrightarrow \infty k^2 + \infty m^2$$

$$\text{Diagram} \sim \int d^d l_1 \int d^d l_2 \frac{1}{l^2} \frac{1}{l^2} \dots \frac{1}{l^2}$$

va sea l_1 o l_2 o la suma.
s.

$$D = d \cdot 2 - 2 \cdot 5$$

$$\hookrightarrow d=6 \rightarrow D=12-10=2 \rightarrow \text{diverge cuadrática} \# \hookrightarrow \infty k^2 + \infty m^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } D=4 \\ k^4 \end{array}}$$

\downarrow teoría no renormalizable

$$\text{Diagram} \sim D = d \cdot 3 - 8 \cdot 2 \\ \hookrightarrow d=6 = 18 - 16 = 2.$$

$$\lambda = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + V(\phi)$$

o en regularización dimensional

$$\lambda \phi^4 \rightarrow X \sim \text{Diagram} + \text{Diagram}$$

\downarrow

$D = d-1-2$
en $d=6 \rightarrow D=4$

\downarrow

$\text{En } d=4 \rightarrow D=2$

Inr. bajo Lorenz

$$-\frac{1}{2} (\partial \phi)^2 \sim k^4$$

Parchar la teoría

$$(\partial \phi)^2 + \alpha \frac{(\partial^2 \phi)^2}{\Lambda^2} + \frac{(\partial(\partial^2 \phi))^2}{\Lambda^4}$$

x la dim.

$$g \phi^3 \rightarrow \text{en } d=6$$

$$\left[\text{Diagram} \right] = \left[\text{Diagram} + \dots + \text{Diagram} \right]$$

vértices del tipo n .

loops

prop. internas.

la dimensión:
[g_E]

$$[E, L, I, V_n] = dL - 2I + \sum_{n=3}^{\infty} V_n [g_n]$$

$$\cdot [g_\epsilon] = \underbrace{dL - 2I}_D + \sum_{n=3}^{\infty} V_n [g_n]$$

$$D = [g_\epsilon] - \sum_{n=3}^{\infty} V_n [g_n], \quad [g_n] = d - \frac{1}{2}n(d-2)$$

Siempre voy a poder
armar un diagrama que
haga que D sea positivo

ej:



→ más y más
vértices.

$$= 4 - n$$

↓

D empeora (>0)

Si $n > 4$.

Si $[g_n] > 0$ super renormalizable $\rightarrow d - \frac{1}{2}n(d-2) > 0$

$[g_n] = 0$ renormalizable

$[g_n] < 0$ no renormalizable $\rightarrow d - \frac{1}{2}n(d-2) < 0$

• $d = 4 \rightarrow$ excluir g_5 en adelante.

$$\int^A d^d l \rightarrow \text{cutoffs.}$$



D dice si una teo. es renormalizable o no!

Diagramas esqueletos:



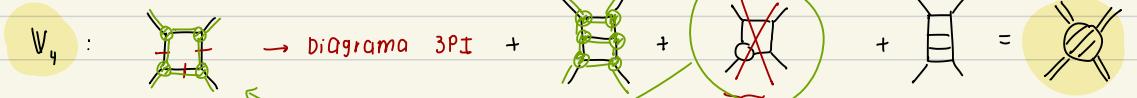
$$\Delta(k^3) = \text{---} = \underbrace{\text{---}}_{\text{esqueleto}} + \underbrace{\text{---}}_{\text{corregíes cuánticas.}} + \dots$$

$$V_3(k_1, k_2, k_3) = \text{---} = \text{---} + \text{---} + \dots$$

se revisten con carne

Diagramas
esqueleto.

Vértices de 4 patas.



$$9\phi^3 \rightarrow 3PI \rightarrow \text{se necesita un 4º corte para reducirlo.}$$

corrección al vértice de
3 patas
↓
no se puede.

$$V_s : \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots =$$

el vértice de 4 patas si existe (contenido arriba).

el vértice de 5 patas existe gracias el paso anterior.

$$V_c : \text{---} + \text{---}$$

Ahora tenemos:

scattering de 2 part: vértices de 4 patas.

$$V_4 = \text{---}$$

$$\text{---} = \text{---} + \text{---}$$

$$V_s = \text{---}$$

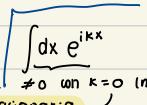
clásica.

Teoría para la cual no hay loops. → a orden tree level xq Δ , V_3 , V_4 , V_s ya tiene los loops contenidos

Acción cuántica

| | |
|---|--|
| <p>en Fourier \leftarrow</p> <p>Ación cuántica \leftarrow ↳ no hay que contar correcciones de loop.</p> <p>↓</p> <p>no hay correcciones cuánticas.</p> <p>Fun. partición:</p> <p>\hbar adimensional pero pequeño.</p> <p>propagador \leftarrow</p> <p>$\Gamma \sim \frac{1}{\Delta}$</p> | <p>Antes:</p> $S[\psi] = \int dx \int dk_1 \int dk_2 \psi(k_1) \psi(k_2) \underbrace{e^{k_1 x}}_{\delta(k_1 + k_2)} \underbrace{e^{k_2 x}}_{\delta(k_1 + k_2)} \xrightarrow{\text{APARECE}} \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array}$ $= \int dk \tilde{\psi}(k) \left[\underbrace{k^2 + m^2}_{\Delta} \right] \tilde{\psi}(-k) + g \int dk_1 \int dk_2 \int dk_3 \delta(\dots) \tilde{\psi}(k_1) \tilde{\psi}(k_2) \tilde{\psi}(k_3).$ <p>Ahora</p> $\Gamma(\psi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\psi}(-k) (k^2 + m^2 - \Pi(k^2)) \tilde{\psi}(k)$ $+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \dots \int \frac{d^d k_n}{(2\pi)^d} \delta(k_1 + k_n)$ $\mathbb{W}_n(k_1, k_2, \dots, k_n) \tilde{\psi}(k_1) \tilde{\psi}(k_2) \dots \tilde{\psi}(k_n)$ <p>$E_0 M_S$:</p> $f(\square) \psi + \dots = 0 \rightarrow \text{teoría completa que describe cómo evoluciona } \psi.$ <p>$Z_T = \int D\psi e^{i\Gamma(\psi) + i \int d^d x J\psi}$</p> <p>↳ loops van a aparecer igual en la matemática. $\langle \emptyset \emptyset \rangle = \dots$</p> <p>$= e^{i W(J)}$; W diag. conexos.</p> <p>$Z_T = \int D\psi e^{\frac{i}{\hbar} (\Gamma(\psi) + \int d^d x J\psi)}$</p> <p>Diagrama = $\hbar^{P-V-E} \dots$ \downarrow $L-1$ loops.</p> <p>$= \hbar^{L-1}$</p> <p>con cada loop hay un \hbar (corrección cuántica). $\rightarrow \hbar \rightarrow 0$</p> <p>↳ los loops explotan. ↓</p> <p>orden arbol = cálculo clásico.</p> <p>coh $\hbar \rightarrow 0$: obtenemos $S[\psi]$ pero sin correcciones.</p> <p>$W_P(J) = \sum_{L=0}^{\infty} \hbar^{L-1} W_{P,L}(J)$</p> <p>$W_{P,0} = W$</p> <p>orden arbol es igual al W de la teoría clásica y todos los loops.</p> |
|---|--|

$$Z_r[J] = \int D\varphi e^{iS[\varphi]}$$



 Aprox de fase estacionaria

$\int dx e^{ikx} \neq 0$ con $k=0$ (no permite que oscile).

$$S[\varphi] = S[\varphi_{ce}] + \dots$$

↳ expande

Acción cuántica

29. mayo.

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(-k) \underbrace{\left(k^2 + m^2 - \Pi(k^2) \right)}_{\Delta^{-1}(k^2)} \tilde{\varphi}(k) \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \dots \int \frac{d^d k_n}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta(k_1 + k_n) \\ &\quad \underbrace{\psi_n(k_1, k_2, \dots, k_n)}_{\psi(k_1) \tilde{\varphi}(k_1) \tilde{\varphi}(k_2) \dots \tilde{\varphi}(k_n)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow Z_\Gamma(J) = \int D\varphi e^{i\Gamma(\varphi)} + \frac{i}{\hbar} \int d^d x J \varphi$$

$$\begin{aligned} Z[\varphi] &= \int D\varphi e^{iS[\varphi] + i \int d^d x J \varphi} = e^{iW[J]} = e^{i \sum_{l=0}^{\infty} W_l[J] \hbar^{l-1}} = e^{i \frac{1}{\hbar} W_0[J]} e^{W_1[J]} \dots \end{aligned}$$

parte clásica.

$$= \hbar \Delta(k^2)$$

$$\text{Diagrama } \textcircled{1} = \frac{1}{\hbar} \psi(k, \dots, k_n)$$

$$\text{Diagrama } \textcircled{2} = \hbar \Delta(k^2)$$

$$\text{Diagrama } \textcircled{3} = \frac{1}{\hbar} J(k^2)$$

$$\text{Diagrama } (E, p, V) \propto \hbar^{p-E-V} = \hbar^{L-1}$$

fuentes

organizar los
diagramas en términos
de loops.
por construcción

$$\rightarrow W_{\Gamma, \hbar}[J] = \sum_l W_{\Gamma, l}[J] \hbar^{l-1} \rightarrow \text{para } l=0$$

↳ sobresale en comparación.

$$\underbrace{W_{\Gamma, 0}[J]}_{\text{todos los diag. posibles.}} = W[J]$$



* Para esta teoría el valor de β y λ son irrelevantes.

APROX. de fase estacionaria:

$$Z_T[J] = \int D\psi e^{iT(\psi) + i \int \psi J}$$

suma en las "historias"

suponemos que la fase no varía:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \frac{\delta}{\delta \psi} [S + \int J\psi] = 0$$

$$S = \int -\frac{1}{2} (\partial\psi)^2 + \frac{m^2\psi^2}{2} - \frac{g}{3!}\psi^3$$

$$-\square\psi_a + \frac{g}{2}\psi_{cl}^2 = J$$

$$\psi = \psi_a[J] + \delta\psi$$

$$= \int D\delta\psi e^{iS[\psi_a + \delta\psi] + \dots}$$

$$-\square\psi + V = J$$

$$D\psi = D\delta\psi$$

$$e^{iS[\psi_a, J]} \int D\delta\psi e^{f(\psi_a)\delta\psi^2}$$

contribución más relevante

a la función partición. \rightarrow tree level.

$$Z_T[J] = \int D\psi e^{i\frac{T(\psi)}{\hbar} + i\int \frac{\psi J}{\hbar}} \approx e^{i\frac{T(\psi_J)}{\hbar} + i\frac{1}{\hbar} \int \psi_J J} \dots$$

$$\psi_J : \boxed{\frac{\delta T}{\delta \psi} = -J}$$

Igualando:

$$W_{T,0}[J] = T(\psi_J) + \int d^d x J\psi_J$$

\Downarrow

$W[J]$

transf. de
legendre

\hookrightarrow de L al g_L .

$$W[J] = T(\psi_J) + \int d^d x J\psi_J$$

Habíamos impuesto = 0
por la cancelación de →
tadpoles (ya no).

$$\langle 0 | \tau \psi(x_1) \dots \psi(x_n) | 0 \rangle = \delta_{j_1} \dots \delta_{j_n} W \Big|_{J=0}$$

$$\langle 0 | \psi(x) | 0 \rangle_J = \frac{\delta}{\delta J(x)} W[J] \rightarrow \text{def. del val. de los expectos.}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x)} \Gamma(\psi_J) + \psi_J(x) + \int d^d y \underbrace{\frac{\delta \psi_J(y)}{\delta J(x)}}_{\substack{\text{disaparece} \\ \text{la int. por la} \\ \varepsilon.}}$$

$$\rightarrow \boxed{\langle 0 | \psi(x) | 0 \rangle_J = \psi_J(x)}$$

resolver el val. de especies
↳ resolviendo la ec. clásica de la acq cuántica!

preserva lorentz. ←

$$\Gamma(\psi) = \int d^d x \left(-\frac{(\partial \psi)^2}{2} + \frac{m^2 \psi^2}{2} - \frac{g \psi^3}{3!} + \# (\square \psi)^2 + \dots \right)$$

para p más grande → λ menor

Buena expansión para

baja E.

CAP 26

↳ continuación de esto.

lím. ultrarelativista →

div. ultravioleta ya las cancelamos c/ A y B...

$$= \int d^d x \left[-U(\psi) - \frac{1}{2} Z(\psi)(\partial \psi)^2 + \frac{1}{2} A(\psi) (\square \psi)^2 + \dots \right]$$

Potencial resumido. · 1 deriv. · Término cinético.
 sin derivadas.

→ teoría efectiva.

T para 2 part. entrantes y 2 salientes.

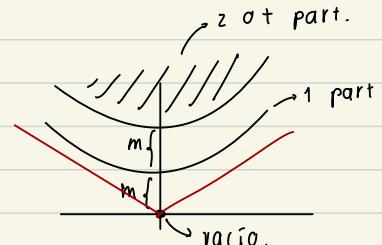
$$T = T_0 \left[1 - \underbrace{\frac{11}{12} \alpha}_{\text{arbol}} \ln \left(s/m^2 \right) + \mathcal{O}(m^0, m^2, \alpha^2) \right]$$

domina para s, u y t grandes

$$T_0 = -g^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \right)$$

Si $m \rightarrow 0 \rightarrow$ falla (diferencia infrarroja)

· Hoy se cree que $m=0$ no lo permite un campo escalar por gravedad



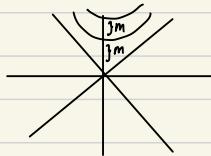
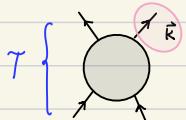
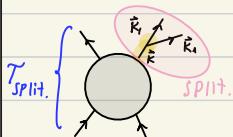
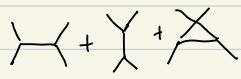
↳ GR + ψ + m = 0 → universo lleno de agujeros negros.

↳ conj. de la fuerza más débil.

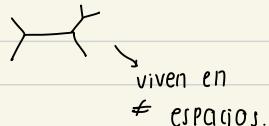
↳ grav. debe ser la más débil.

$$T = T_0 \left[1 - \frac{11}{12} \alpha \ln \left(\frac{s/m^2}{m^2} \right) + O(m^0, \alpha^2, \dots) \right]$$

$$\text{con } T_0 = -g^2 \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \right]$$

 $m \rightarrow 0$: \downarrow un estado de 2 part. es cinemáticamente indistinguible al de 1 part. cuando $m \rightarrow 0$. $\sim \vec{k}$  $\sim \vec{k}_1$
 $\sim \vec{k}_2$ $\gamma + \phi$ 

no se puede sumar con:



$$T_{\text{split}} = ig \frac{-i}{\vec{k} + m^2} T$$

$$dP = |\gamma + \phi|^2 \rightarrow \text{Prob.}$$

$$\downarrow \underbrace{|\gamma + \phi|^2}_{\text{superposición cuántica.}} + \underbrace{|\text{processo distinto}|^2}_{\text{processo distinto.}}$$

$$|T_{\text{obs}}|^2 d\tilde{k} = |T|^2 d\tilde{k} + |T_{\text{split}}|^2 \frac{d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2}{2}$$

Nos olvidamos del δ en el dominio en que la integral.

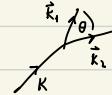
$$1 = (2\pi)^{d-1} 2\omega \delta^{d-1} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}) d\tilde{k} \quad d\tilde{k} = \frac{d^d k}{(2\pi)^d}$$

$$\rightarrow |T_{\text{obs}}|^2 = |T|^2 \left[1 + \frac{g^2}{(k^2 + m^2)^2} \int \int (2\pi)^{d-1} 2\omega \delta^{d-1} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}) \frac{1}{2} d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \right]$$

z cosas
que divergen.

$$(1 + gA + g\infty)(1 + gB - g\cdot\infty) = 1 + gA + g\cancel{\infty} - gB + \mathcal{O}(g^2) \rightarrow \text{converge.}$$

$$\text{Si } m \rightarrow \infty, \quad K^2 = (k_1 + k_2)^2 = -4w_1 w_2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$$



$$d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \sim (w_1^{d-3} dw_1) (w_2^{d-3} dw_2) \sin^{d-3}\theta d\theta$$

$$\frac{d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2}{(K^2)^2} \sim \frac{dw_1}{w_1^{s-d}} \frac{dw_2}{w_2^{s-d}} \frac{d\theta}{\theta^{d-s}}$$

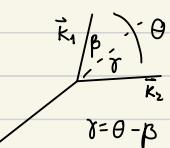
pueden diverger por si solos. (para d=6 diverge logarítmica#).

Queremos que diverga para
que cancele las divergencias
infrarojas.

$d=6 \rightarrow$ espacio-tiempo
 \downarrow
 $d=5 \rightarrow$ dim. espacio
 \downarrow
 $d=4 \rightarrow$ en la superficie.

$\boxed{d=6}$

$$(2\pi)^5 \frac{2w}{2} \delta^5(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{K}) d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \xrightarrow{\text{reduciendo la } \delta} \frac{\Omega_4}{4(2\pi)^5} \frac{w}{w_1 w_2} |k_1|^4 d|k_1| \sin^3 \beta d\beta$$



$$|\vec{k}_1| = \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} |\vec{K}|$$

$$|\vec{k}_2| = \frac{\sin \beta}{\sin \theta} |\vec{K}|$$

$$x = \beta/\theta, \quad \gamma = (1-x)\theta + \dots, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$K^2 + m^2 \approx -x(1-x) \vec{K}^2 \left[\theta^2 + \frac{m^2}{\vec{K}^2} f(x) \right] ; \quad \text{para } \theta \text{ pequeño y } m \text{ pequeño.}$$

$$f(x) = \frac{(1-x+x^2)}{(x-x^2)^2}$$

~~~~~

Dos variables:  $x, \theta$

$$0 < \theta < \delta$$

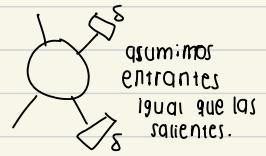
resolución del detector.



$$|\mathcal{T}_{\text{obs}}|^2 = |\mathcal{T}|^2 \left[ 1 + \frac{g\Omega_4}{4(2\pi)^5} \int_0^1 dx (1-x) x \int_0^\delta d\theta \frac{\theta^3}{[\theta^2 + m^2/\vec{K}^2 f(x)]^2} + \dots \right]$$

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\delta^2 \vec{K}^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2}$$

$$|\mathcal{T}_{\text{obs}}|^2 = |\mathcal{T}|^2 \left[ 1 + \frac{1}{12} \alpha \left( \ln \left( \frac{\delta^2 k^2}{m^2} \right) + C \right) + \dots \right]$$



$$= |\mathcal{T}_0|^2 \left[ 1 - \left( \frac{1}{6} \alpha \left( \ln \left( \frac{s}{m^2} \right) \right) \right) \right] \left[ 1 + \left( \frac{1}{3} \alpha \ln \left( \frac{\delta^2 s}{m^2} \right) \right) \right]$$

Hay que inducir estos términos!

$$= |\mathcal{T}_0|^2 \left[ 1 - \alpha \left( \frac{3}{2} \ln \left( \frac{s}{m^2} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{1}{\delta^2} \right) \right) \right] + \alpha^2 \left[ \ln \left( \frac{1}{\delta^2} \right) \right]^2$$

→ Haciendo una máquina + precisa, la predicción empeora.

recordamos:

$$\Pi(k^2) = - \left[ A + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \right] k^2 - \left[ B + \alpha \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \right] m^2 + \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx D(x) \ln \left( \frac{D(x)}{\mu^2} \right) + O(\alpha^2); \quad D(x) = x(1-x)k^2 + m^2.$$

$$\Pi'(k^2) = - \left[ A + \frac{1}{6} \alpha \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \ln \left( \frac{D}{\mu^2} \right) + 1 \right] + O(\alpha^2)$$

$$\Pi(-m^2) = 0$$

$$\Pi'(-m^2) = 0$$

Si  $m^2 = 0$  → antes de elegir A y B.

$$\begin{cases} \Pi(0) = 0 \\ \Pi'(0) = 0 \end{cases} \quad \forall A, B$$

$m_{ph}$  v/s  $m$  →  $m_{ph} \neq m$ .  
masa física.

→ ver clase sig.

$m_{ph}$  cumple con estas condiciones!

$$\begin{cases} \cancel{\Pi(-m_{ph}^2) = 0} \\ \cancel{\Pi'(-m_{ph}^2) = 0} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{es el polo del prop. exac1o:} \\ \Delta(k^2 = -m_{ph}^2) \end{array} \right\}$$

↓  
podemos elegir A y B como queramos.

$$\triangle^{-1}(k^2) = k^2 + m^2 - \Pi(k^2) = 0$$

$\cdot k^2 = -m_{ph}^2$

$$(\delta_x^2 + m_{ph}^2) \triangle(x, y) = \delta(x - y).$$

A y B substrac $\ominus$   
minimal.

$$\Pi(k^2) = -\left[A + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right)\right]k^2 - \left[B + \alpha\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right)\right]m^2$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha \int_0^1 dx D(x) \ln\left(\frac{D(x)}{\mu^2}\right) + O(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow m_{ph}^2 = f(\alpha, \tilde{\mu})$$

Nuevo parámetro  $\mu$ !



$$\Pi(k^2) = - \left[ A + \frac{1}{6} \alpha \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \right) \right] k^2 - \left[ B + \alpha \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \right) \right] m^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 dx D \ln(D/\mu^2)$$

$$\Pi'(k^2) = - \left[ A + \frac{1}{6} \alpha \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \right) \right] k^2 + \frac{1}{2} \alpha \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \ln(D/\mu^2) + 1 \right]$$

Minimal subtraction.  
como una elección de Gauge  
↳ no es fundamental de la naturaleza.

$$\left. \begin{array}{l} A = -\frac{1}{6} \alpha \frac{1}{\epsilon} + O(\alpha^2) \\ B = -\frac{\alpha}{\epsilon} + O(\alpha^2) \end{array} \right\} \bar{MS} \rightarrow \text{esquema.}$$

(método perturbativo)

para decir  $\alpha$  es pequeño, había que introducir  $\mu \rightarrow$  en dim d=6

$$m_{ph}^2 \text{ vs } m^2 ; (-\partial_x^2 + m_{ph}^2) \Delta(x,y) = \delta(x-y) \rightarrow \text{análisis de kaon-n-leman}$$

$E = \sqrt{k^2 + m_{ph}^2}$  ↳ No habla de la teoría ( $\chi$ )

↳ prop. de los estados asintóticos (lejos de la colisión).

$$\left. \begin{array}{l} \Delta'(-m_{ph}^2) = 0 \\ \Delta'(-m_{ph}^2) \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{así se identifica} \\ \text{la masa física.} \end{array}$$

$$Re(\Delta(-m_{ph}^2)) = 1$$

$$El(\phi) \text{ (normalizar)} : \langle 0 | \psi(x) | \bar{x} \rangle = e^{i\bar{x} \cdot x}$$

cambiando la normalización:

$$\langle 0 | \psi(x) | \bar{x} \rangle \sim e^{i\bar{x} \cdot x} R^h.$$

$$Re(\Delta(-m_{ph}^2)) = R$$

$$\Delta(x,y) = \langle 0 | \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle.$$

$$\hookrightarrow Re\left(\frac{\Delta(-m_{ph}^2)}{R}\right) = 1$$

$$\Pi(k^2) = -\frac{1}{12} \alpha (k^2 + 6m^2) + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 dx D \ln(D/\mu^2)$$

$$\tilde{\Delta}_{\bar{MS}}^{-1}(k^2) = k^2 + m^2 - \Pi_{\bar{MS}}(k^2)$$

$$\boxed{k-L} \quad \tilde{\Delta}_{\bar{MS}}^{-1}(-m_{ph}^2) = 0 \quad \sim \quad \boxed{-m_{ph}^2 + m^2 = \Pi_{\bar{MS}}(-m_{ph}^2)}$$

$$\boxed{m_{ph}^2 = m^2 - \Pi_{\bar{MS}}(-m_{ph}^2)} \quad \rightarrow \quad \overbrace{m_{ph}^2}^{\text{orden al (pequeño)}} = m^2 + O(\alpha).$$

orden al (pequeño)

Iteramos  $\rightarrow$

$$m_{ph}^2 = m^2 - \bar{\Pi}_{\bar{MS}} (-m^2 + O(\alpha)) + O(\alpha^2)$$

$$= m^2 - \bar{\Pi}_{\bar{MS}} (-m^2) + O(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow m_{ph}^2 = m^2 - \frac{1}{2} \alpha \left[ \frac{1}{6} m^2 - m^2 + \int_0^1 dx D_0 \ln(D_0/\mu^2) \right] + O(\alpha^2) ; D_0 = [1-x(1-x)] m^2$$

Depende de  $\mu^2$   
arbitrario.

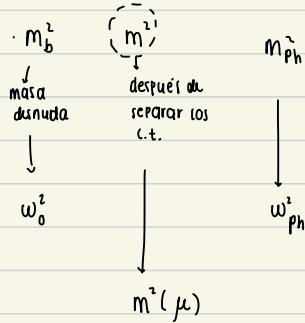
$$m_{ph}^2 = m^2 \left[ 1 + \frac{5}{12} \alpha \left( \ln(\mu^2/m^2) + C' \right) \right] + O(\alpha^2)$$

$$\rightarrow C' = (34 - 3\pi\sqrt{3})/15 = 1.18$$

conceptualmente:

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{x''}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \alpha x^3}$$

modifica la freq. de oscilac.



no puede depender del parámetro arbitrario  $\mu$

$$\boxed{\frac{dm_{ph}^2}{d\mu} = 0} , \frac{dm_b^2}{d\mu} = 0$$

$$\frac{d \ln m_{ph}}{d \ln \mu} = 0 \rightarrow \ln m_{ph} = \ln m + \frac{5}{12} \alpha \ln(\mu/m) + \dots$$

$\propto \alpha \cdot \frac{dm}{d \ln \mu}$  y eso es menor al 1º término.

$$\Rightarrow \frac{d \ln m_{ph}}{d \ln \mu} = \underbrace{\frac{1}{m} \frac{dm}{d \ln \mu}}_0 + \frac{5}{12} \alpha - O(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dm}{d \ln \mu} = -\frac{5}{12} \alpha m}$$

Ecuaciones del grupo de renormalización.

- $\mu$ : unidades de energía.
- $\mu$  no cambia el resultado de  $m_{ph}$ .
- $\mu$  debe mantener el método perturbativo ( $\ln \mu^2/m^2$  no puede ser muy grande).

$$g_b \rightarrow g_z,$$

$\downarrow$

$$g = g(\mu) \rightarrow \boxed{\alpha(\mu)}!$$

↳ pero  $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \sim O(\alpha^2)$  → Hace que no se tome en cuenta la dependencia.



Residuo :

$$R^{-1} = \frac{d}{dk^2} \left[ \Delta_{\bar{m}_S}^{-1}(k^2) \right]_{k^2 = -m_{ph}^2}$$

$$= 1 - \Pi_{\bar{m}_S}(-m_{ph}^2)$$

$$= 1 - \Pi_{\bar{m}_S}(-m^2) + O(\alpha^2)$$

$$R^{-1} = 1 + \frac{1}{12} \alpha \left( \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) + C \right) + O(\alpha^2) ; C = \frac{(1 + -3\pi\sqrt{3})}{3} = 0.23.$$

Efecto anterior :

$$C = -\frac{\alpha}{\epsilon} + -\alpha \ln(\mu/m)$$

En MC :  $C = -\frac{\alpha}{\epsilon}$  se ve a color.

$$\mathcal{V}_{3,\bar{m}_S}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = g \underbrace{\left[ 1 - \frac{1}{2} \alpha \int dF_3 \ln(D/\mu^2) + O(\alpha^2) \right]}_{\text{no es observable}}$$

(depende de  $\mu$ ).

Calculando como → el aux.

$$T = R^{-2} T_0 \left[ 1 - \frac{1}{12} \alpha \left( \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) + O(m^0) \right) + O(\alpha^2) \right] ; T_0 = -g^2 \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \right)$$

Q))

Si cambiamos la normalización del campo,  $\langle 0 | \varphi(x) | \vec{k} \rangle$ , ls z cambia

$$\langle 0 | \varphi_{lsz}(x) | \vec{k} \rangle = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \rightarrow \varphi(x) \neq \varphi_{lsz}(x) \quad \text{) } x q \text{ esto no se cumple.}$$

$$\rightarrow \varphi(x) = R^{1/2} \varphi_{lsz}(x) \quad \text{este es el residuo.}$$

$$\underbrace{\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle}_{\Delta_{\bar{m}_S}(x,y)} = R \underbrace{\langle 0 | \varphi_{lsz}(x) \varphi_{lsz}(y) | 0 \rangle}_{\Delta_{lsz}(x,y)}$$

Revisar ls z !

$$1 = \frac{d}{dk^2} \left[ \frac{\Delta_{\bar{m}_S}^{-1}(k^2)}{R^{-1}} \right]_{k^2 = -m_{ph}^2}$$

$$1 = \frac{d}{dk^2} \left[ \Delta_{lsz}^{-1}(k^2) \right]$$

- $\langle 0 | \varphi_{LSZ}(x_1) \dots \varphi_{LSZ}(x_n) | 0 \rangle$
  - $\langle 0 | \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle \rightarrow \text{No lo podemos usar en LSZ.}$
  - $\downarrow R^{n/2} \langle 0 | \varphi_{LSZ}(x_1) \dots \varphi_{LSZ}(x_n) | 0 \rangle$
- $$\Rightarrow \langle 0 | \varphi_{LSZ} \dots \varphi_{LSZ} | 0 \rangle = R^{-n/2} \langle 0 | \dots | 0 \rangle.$$

$$T = R^{\frac{n}{2}} R^{-\frac{n}{2}} T_0 \left[ 1 - \frac{1}{12} \alpha \left( \ln \left( \frac{s}{\mu^2} \right) + O(m^0) \right) + O(\alpha^2) \right]$$

↓  
son las partes externas (amputadas)

usando  
 $R$ .

$$\varphi_{LSZ} = \varphi / R^{n/2} \quad ; \quad R^{n/2} = R^n R^{-n/2} \rightarrow \text{amputado.}$$

*y normalizado.*

$$\rightarrow T = T_0 \left[ 1 - \alpha \left( \frac{11}{12} \ln \left( \frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{1}{6} \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) + O(m^0) \right) + O(\alpha^2) \right]$$

↓  
infrared  
div.

$$|T|_{\text{obs}}^2 = |T|^2 \left[ 1 + \frac{1}{3} \alpha \ln \left( \frac{\delta s}{m^2} \right) \right]$$

$$= |T_0|^2 \left[ 1 - \alpha \left( \frac{3}{2} \ln \left( \frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{1}{\delta^2} \right) \right) \right] \quad ; \quad \text{no aparece la div. infr.}$$

↳ resuelto del detector.

$$\left[ |T_{\text{obs}}|^2 = |T_0|^2 \left[ 1 - \underbrace{\alpha}_{\alpha(\mu)} \left( \frac{3}{2} \ln \left( \frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{1}{\delta^2} \right) \right) \right] \right]$$

$$0 = \frac{d \ln |T|_{\text{obs}}^2}{d \ln \mu} = \frac{2}{\alpha} \frac{d \alpha}{d \ln \mu} + 3 \alpha$$

$$\rightarrow \frac{d \alpha}{d \ln \mu} = -\frac{3}{2} \alpha^2 \rightarrow \frac{d \alpha}{d \ln \mu} = \beta(\alpha)$$

↓ ≠ para ≠ teorías.

←  
término suprimido  
≈ r a los otros.

$$\text{solu}\theta: \alpha(\mu_2) = \frac{\alpha(\mu_1)}{1 + \frac{3}{2} \alpha(\mu_1) \ln\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}$$

$$\left[ |T_{\text{obs}}|^2 = |T_0|^2 \left[ 1 - \underbrace{\frac{\alpha}{2} \left( \frac{3}{2} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{t}{\delta^2}\right) \right)}_{0} \right] \right]$$

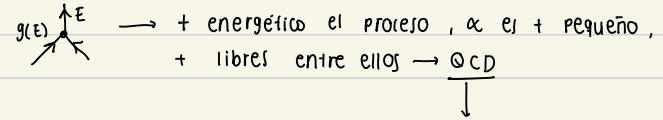
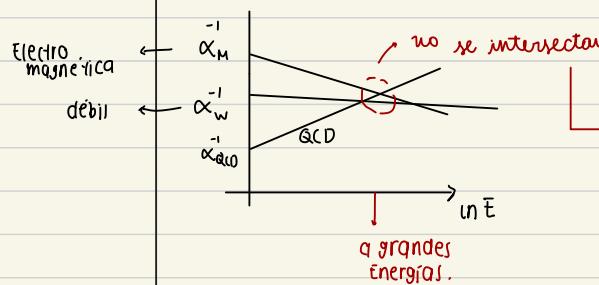
si  $\mu^2 = S$  (q es arbitrario)

$s \rightarrow$  energía del CM.

$$\alpha(E_2) = \frac{\alpha(E_1)}{1 + \frac{3}{2} \alpha(E_1) \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}$$

→ cte de estructura fina depende de E.

Dice qué tan fuerte es el vértice.



teoría asintótica#

libre. ξ

si se intersectaran:

teoría de gran unificación.

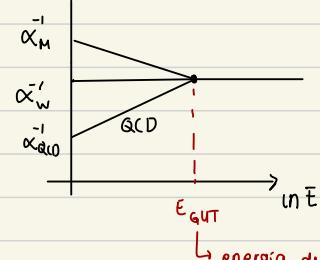
↳ funciona si se utiliza

supersimetría.

pero predice part. que ya no se han visto en el LHC

Documental: Particle Theory

\* Tomo III Weinberg.



energía de gran unificación.

## Grupo de renormalización

Volviendo a la teoría desnuda:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial \varphi_b)^2 - \frac{1}{2} m_b^2 \varphi_b^2 + \frac{1}{3!} g_b \varphi_b^3 + Y_b \varphi_b$$

Teoría renormalizada:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\varphi (\partial \varphi)^2 - \frac{1}{2} Z_m m^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!} Z_g g \tilde{\mu}^{\varepsilon/2} \varphi^3 + Y \varphi$$

no dep. de  
 $\mu$

$$\begin{aligned} \varphi_b &= Z_\varphi^{1/2} \varphi \\ m_b &= Z_\varphi^{-1/2} Z_m^{1/2} m \\ g_b &= Z_\varphi^{-3/2} Z_g g \tilde{\mu}^{\varepsilon/2} \end{aligned}$$

estos dependen de  $\mu$ .

$$Y_b = Z_\varphi^{-1/2} Y$$

→ Forzamos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_b}{\partial \ln \mu} &= 0 \\ \frac{\partial m_b}{\partial \ln \mu} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{d \ln \mu} &= -\frac{3}{2} \alpha^2 \\ \end{aligned} \right\}$$

10. junio

EN el esquema  $\overline{\text{MS}}$

$$Z_\varphi = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \# + \frac{1}{\varepsilon^2} \# + \dots$$

cancela ese  $\infty$ .

$$Z_m = 1$$

$$Z_g = 1$$

Todo depende de  $\mu$ .

$$Z_\varphi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\alpha)}{\varepsilon^n}$$

$\alpha$  hace que sean  $\neq 0$ .

$$Z_m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\alpha)}{\varepsilon^n}$$

$$Z_g = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\alpha)}{\varepsilon^n}$$

Para cálculos de 1 loop:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{6} \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ b_1 &= -\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ c_1 &= -\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned}$$

★

$$|T|_{\text{obs}} = \dots \text{ función de } \alpha, \mu.$$

$$\Rightarrow \alpha(\mu)$$

$$\frac{d}{d\mu} |T|_{\text{obs}} = 0$$

$$\alpha_0 = \frac{g^2}{(4\pi)^3} = z_g^2 z_\varphi^{-3} \tilde{\mu}^\varepsilon \alpha \rightarrow \left[ \frac{d \ln \alpha_0}{d \ln \mu} = 0 \right]$$

$$\mu^2 = 4\pi e^{-\delta} \tilde{\mu}^2$$

Def

pág. 170 → srednicki

$$\begin{aligned} G(\alpha, \varepsilon) &= \ln(z_g^2 z_\varphi^{-3}) \\ &= \ln \left( \left[ 1 + \sum \frac{q_n}{\varepsilon^n} \right]^2 \left[ 1 + \sum \frac{c_n}{\varepsilon^n} \right]^{-3} \right) \\ &= \ln \left( 1 + \frac{\#}{\varepsilon} + \frac{\#}{\varepsilon^2} + \dots \right) \\ &= 0 + \frac{\#}{\varepsilon} + \frac{\#}{\varepsilon^2} + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(\alpha, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(\alpha)}{\varepsilon^n} \xrightarrow{\substack{\text{Garantizado a partir} \\ \text{de los } z_\varphi \text{ y } z_g}}$$

usando \*

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_1(\alpha) &= 2C_1(\alpha) - 3C_1(\alpha) \\ &= -\frac{3}{2}\alpha + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \ln \alpha_0 = G(\alpha, \varepsilon) + \ln \alpha + \varepsilon \ln \tilde{\mu}$$

$$0 = \frac{d \ln \alpha_0}{d \ln \mu} = \frac{\partial G}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \ln \mu} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \ln \mu} + \varepsilon \quad / \cdot \alpha$$

$$0 = \frac{d \alpha}{d \ln \mu} \left( 1 + \alpha \frac{G'_1(\alpha)}{\varepsilon} + \alpha \frac{G'_2(\alpha)}{\varepsilon^2} + \dots \right) + \varepsilon \alpha \quad \rightarrow \forall \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \frac{d \alpha}{d \ln \mu} &= \frac{\#}{\alpha} \varepsilon + \frac{\#}{\beta(\alpha)} + \cancel{\#} \\ &\downarrow \\ &-\alpha \varepsilon \cdot 1 + \varepsilon \alpha = 0 \end{aligned}$$

xq si no no se balancea q nada

$$\frac{d \alpha}{d \ln \mu} = -\alpha \varepsilon + \beta(\alpha)$$

$$0 = (\beta(\alpha) - \alpha^2 G'_1(\alpha)) - \underbrace{\left( \alpha^2 \frac{G'_2(\alpha)}{\varepsilon} - \frac{\beta(\alpha) G'_1}{\varepsilon} \right)}_{\text{NO! dice qué es } G'_2 \dots} + \dots \Rightarrow \boxed{\beta(\alpha) = \alpha^2 G'_1}$$

lo que obtuvimos  
la clase pasada!

←

$$\beta(\alpha) = -\frac{3}{2}\alpha^2 + O(\alpha^3)$$

conocemos

$\Theta_b$  chota!  $\Theta_{ren}$   $\Theta_{obs}$

$$\frac{d\Theta_b}{d\mu} = 0 \quad \frac{d\Theta_{obs}}{d\mu} = 0$$

Análoga:

$$M(\alpha, \varepsilon) \equiv \ln \left( z_n^{1/2} z_\varphi^{-1/2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(\alpha)}{\varepsilon^n}$$

$$\rightarrow M_1 = \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} a_1$$

$$= -\frac{5}{12} \alpha + O(\alpha^2)$$

→  $\alpha$  pequeño pero tenemos info  
de coras de orden mayor.

↳  $\alpha^3 G_3(\alpha) \dots$

$$\Rightarrow \ln m_b = M(\alpha, \varepsilon) + \ln M$$

$$0 = \frac{d \ln m_b}{d \ln \mu} = \frac{d M}{d \alpha} \frac{d \alpha}{d \ln \mu} + \frac{1}{m} \frac{d M}{d \ln \mu} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial \alpha} (-\varepsilon \alpha + \beta(\alpha)) + \frac{1}{m} \frac{dm}{d \ln \mu} = 0$$

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{d \ln \mu} = \left( \varepsilon \alpha - \beta(\alpha) \right) \left( \frac{M'_1}{\varepsilon} + \frac{M''_1}{\varepsilon^2} + \dots \right)$$

$$\underbrace{\frac{1}{m} \frac{dm}{d \ln \mu}}_{\text{no depende } \rightarrow \text{de } \varepsilon.} = \alpha M'_1 + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} (\alpha M''_1 - \beta M'_1)}_0 + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2} (\dots)}_0 \dots$$

$$\gamma_m(\alpha) \equiv \frac{1}{m} \frac{dm}{d \ln \mu}$$

Resultado:

$$\gamma_m(\alpha) = -\frac{5}{12} \alpha + O(\alpha^2)$$

→ "Cómo varía  $m$  c/r a  $\mu$ "

Prop. de la teo.  
desnuda.

$$\tilde{\Delta}_0(k) = i \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle 0 | T \varphi(x) \varphi(0) | 0 \rangle \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{se relacionan a través de} \\ \varphi_0 = z_\varphi^{\nu_2} \varphi$$

$$\rightarrow \tilde{\Delta}_0(k^2) = z_\varphi \tilde{\Delta}(k^2)$$

$$O = \frac{d \ln \tilde{\Delta}_0(k^2)}{d \ln \mu} = \frac{d \ln z_\varphi}{d \ln \mu} + \frac{d \ln \tilde{\Delta}(k^2)}{d \ln \mu} \quad \text{depende de } m, \mu, \alpha$$

$$O = \frac{d \ln z_\varphi}{d \ln \mu} + \frac{1}{\tilde{\Delta}(k^2)} \left( \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \frac{d \alpha}{d \ln \mu} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{d m}{d \ln \mu} \cdot \frac{\partial}{\partial m} \right) \tilde{\Delta}(k^2)$$

Por la expansión del  $\ln(z_\varphi)$ .

$$\ln z_\varphi = \frac{q_1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left( q_2 - \frac{1}{2} q_1^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} (\dots) + \dots$$

$$\frac{\partial \ln z_\varphi}{\partial \alpha} \cdot \frac{d \alpha}{d \ln \mu}$$

$$\left( \frac{q_1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\dots) \right) (-\varepsilon \alpha + \beta(\alpha))$$

dimensión anómala.

$$-\alpha q_1 \rightarrow \gamma_\varphi(\alpha) = -\frac{\alpha q_1}{2} = \frac{1}{12} \alpha + O(\alpha^2)$$

Ecuación Callan-Symanzik.

$$\rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma_n(\alpha) \frac{\partial}{\partial m} + z \gamma_\varphi(\alpha) \right) \tilde{\Delta}(k^2) = 0 \quad \rightarrow \text{Ecuación que debe cumplir } \tilde{\Delta}(k^2) ! \quad (\text{a todo orden}).$$

$$\gamma_\varphi(\alpha) \equiv \frac{1}{2} \frac{d \ln z_\varphi}{d \ln \mu}$$

$$\tilde{\Delta} \sim \frac{1}{k^2 + m^2} + \dots$$

$$\sim \underbrace{\left( \frac{\mu^2}{K^2} \right)^{\gamma_\varphi(\alpha)} \gamma_\varphi(\alpha)}_{K^2} \rightarrow \gamma_\varphi = 0 \text{ resultado para ultrarelativista}$$

comportamiento anómalo.

Afirmando  $\beta(\alpha_s) = 0$

leer discusión del  
Peskin - Schröder.

¿Por qué las teorías que describen el universo son renormalizables?

OS: on-shell (esquema)  
que usamos antes:  
 $m = m_{ph}$ .

$$\rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{2} Z_\phi (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} Z_m m_{ph}^2 \phi^2 - \frac{1}{24} Z_\lambda \lambda_{ph} \phi^4.$$

$\frac{1}{k^2 + m^2}$

on-shell  
 $k^2 = -m_{ph}^2$  → esto lo hace una part.  
↓  
prop.

física  
↳ condicón física.

[cap. 29]

$$g_{ph} = \mathbb{V}_3(0, 0, 0) \rightarrow OS$$

$$\lambda_{ph} = \mathbb{V}_4(0, 0, 0, 0) \rightarrow \bar{MS}$$

$$\cdot Z[J] = \int D\phi e^{iS + \int J\phi}$$

Podemos hacer la rot. de Wick antes.

$$t \rightarrow \tau \rightarrow 4 \text{ dim espacial (minkowskiano)}$$

$$\tau = it$$



$$Z[J] = \int D\phi e^{-S_E - \int J\phi}$$

$$S_E = \int d^4x \mathcal{L}_E$$

$$d^4x = d^3x d\tau$$

$$\cdot \mathcal{L}_E = \frac{1}{2} Z_\phi (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} Z_m m_{ph}^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} Z_\lambda \lambda_{ph} \phi^4$$

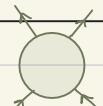
$$(\partial\phi)^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 + (\nabla\phi)^2$$

Nos interesa distinguir estas escalas.

↓

$\Lambda$  marca nuestra presión.

- Física a baja energía no depende de  $\Lambda$



Escala de corte

$$\Lambda \rightarrow p < \Lambda$$

modos

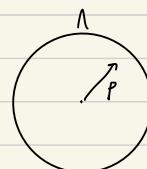
infrarrojos (IR)

→ grandes.

$$p > \Lambda$$

modos UV

↓  
→ pequeñas.



Escala de corte

$$\Lambda \rightarrow \rho < \Lambda$$

modos

infrarrojos (IR)

↓  
λ grandes.

$$\rho > \Lambda$$

modos UV

↓  
λ pequeñas

Ahora distinguimos entre 2 partículas:

(baja E de las part.)  
Energía IR  
(partes externas)



$$\cdot \Psi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \tilde{\Psi}(k)$$

$$= \int_0^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \tilde{\Psi}(k) + \int_\Lambda^\infty \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \tilde{\Psi}(k)$$

$$= \Psi_{IR}(x) + \Psi_{UV}(x)$$

$$\int D\Psi = \int D\Psi_{IR} \int D\Psi_{UV}$$

$$\int D\Psi = \int D\Psi_{K<\Lambda} \int D\Psi_{K>\Lambda}$$

★

$$\Rightarrow Z[J] \approx \int D\Psi_{IR} e^{-S_{eff}(\Psi, \Lambda) - \int J\Psi} ; e^{-S_{eff}(\Psi, \Lambda)} \underset{\Psi}{=} \int D\Psi_{UV} e^{-S_E(\Psi)}$$

Acá que describe cómo hacer cálculos c/  $\Psi_{IR}$ .

[Ansatz]

$$Z_{eff} = \frac{1}{2} \zeta(\Lambda) (\partial\Psi)^2 + \frac{1}{2} m^2(\Lambda) \Psi^2 + \frac{1}{24} \lambda(\Lambda) \Psi^4 + \sum_{d \geq 6} \sum_i C_{d,i}(\Lambda) [\Theta_{d,i}]$$

↑ dima del op. (en términos de masa).

coef. de Wilson

↓

op. nuevos!

→ para seguir c/ los órdenes.

Inv. ante rotaciones ←  
→ d = dim

$\Psi^2 \rightarrow d=2$

→ Z tiene d=4

Ej]  $d=6$ ,  $\Psi^6$ ,  $\Psi^2(\partial\Psi)^2$ ,  $\underbrace{(\partial\Psi)^6}_{i=1}$  → rec. eff. debe predecir lo mismo  
 $\downarrow$        $\downarrow$       ↗  
 $C_{6,1}$        $i=2$       pueden ser = que la teoría normal. → para  $\lambda\Psi^4$

$$d=8, \quad \Psi^8, \quad \Psi^4(\partial\Psi)^2, \quad \underbrace{(\partial\Psi)^8}_{i=2}$$

i=3

\* Luego, no puede depender de  $\Lambda$ .

\* loop son integrados  
de 0 a  $\infty$  y por  
lo tanto en  $Z_{\text{eff}}$  no  
hay loops que cancelar.

$$m^2(\varphi_{IR} + \varphi_{UV})^2$$

$$= m^2 \varphi_{IR}^2 + m^2 \varphi_{UV}^2$$

$$+ 2m^2 \varphi_{IR} \varphi_{UV}$$

↳ no va a aparecer  
en el cálculo ( $E \neq 0$ ).

$$\lambda \varphi^4 = \lambda (\varphi_{IR} + \varphi_{UV})^2$$

$$= \lambda \varphi_{IR}^4 + \lambda \varphi_{IR}^2 \varphi_{UV}^2 + \lambda \varphi_{UV}^4$$

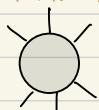
$\times \quad \times \quad \times$  : vértices.  
+ relevantes. (-loops)

\* Ver papers originales  
de Wilson → APS

\* cálculos c/ la teo. efectiva deben ser iguales a la teo. original.

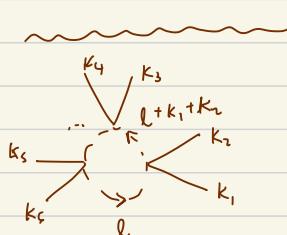
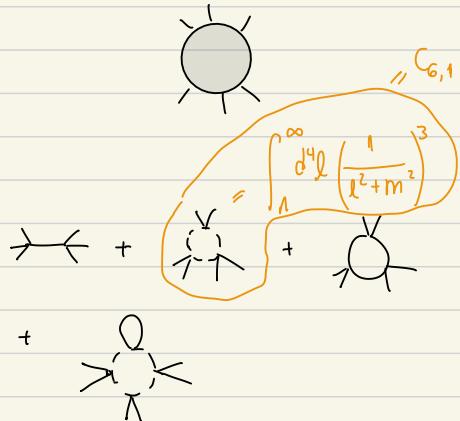
[Teo. Eff.]

Diagrams c/ 6 patas:



$$iC_{6,1}(\Lambda) \quad + \quad \text{diagram with } \lambda \varphi^4 \text{ vertex} \quad + \quad \text{diagram with } \varphi^4 \text{ vertex} \quad + \dots$$

[completa]



$$= \int_{\Lambda}^{\infty} dl \frac{1}{l^2} \frac{1}{(l + k_1 + k_2)^2} \cdot \frac{1}{\dots}$$

$$\Lambda \gg m_{ph} \quad k_1 + k_2 \ll \Lambda \rightarrow \text{1qy/or}$$

$$= \int_{\Lambda}^{\infty} \frac{1}{l^2} \frac{1}{l^2} \frac{1}{l^2} + \boxed{\int_{\Lambda}^{\infty} dl \frac{1}{l^8} \frac{1}{(k_1 + k_2)^2}}$$

↓  
op. c/ 6 patas •  $k^2$   
 $\times \cdot k^2$   
 $\varphi^4 (2p)^2$   
↳ suprimido  $\times k^2$ .

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} z(\Lambda) (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2(\Lambda) \varphi^2 + \frac{\lambda(\Lambda)}{4!} \varphi^4 + \sum c_{d,i} \mathcal{O}_{d,i}$$

$$\mathcal{O}_{c,i} > \varphi^6, \quad \varphi^2 (\partial\varphi)^2$$

$$\mathcal{O}_{d,i} > \varphi^8, \quad \varphi^4 (\partial\varphi)^2, \quad (\partial\varphi)^4$$

$$\mathcal{L} = \dots$$

$$\overline{\varphi_{IR}} \quad \overline{\varphi_{UV}}$$

$$\varphi^4 = (\varphi_{IR} + \varphi_{UV})^4 = \varphi_{IR}^4 + \varphi_{IR} \varphi_{UV}^3 + \varphi_{IR}^2 \varphi_{UV}^2 + \dots$$

teoría eff:

$$\text{Diagrama circular} = \boxed{C_{c,1}} + \text{Diagrama circular } \lambda(\Lambda) \lambda(\Lambda) + \cancel{\text{Diagrama}} \underbrace{k^2 C_{c,2}}_{\text{Hacen match}} + \cancel{\text{Diagrama}} \underbrace{k^2 C_{c,2}}_{\text{con las expansiones de taylor de los siguientes.}} + \lambda \underbrace{C_{c,2}}$$

es el 1º término de la expansión. (es de)

teoría completa.

$$\text{Diagrama circular} = \text{Diagrama circular } \lambda \lambda + \cancel{\text{Diagrama}} \xrightarrow{\substack{\text{momento alto} \\ \text{momento bajo}}} + \boxed{\text{Diagrama}} + \cancel{\text{Diagrama}}$$

original  
 $(\varphi^4)$

no se puede conservar el momento.

$$+ \text{Diagrama circular} + \text{Diagrama circular} + \text{Diagrama circular} + \dots$$

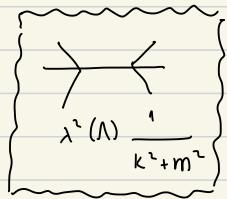
$$= \lambda^3 \int d^4l \frac{1}{l^2 + m^2} \frac{1}{(l + k_1 + k_2)^2 + m^2} \frac{1}{(l - k_3 - k_4)^2 + m^2}$$

$\downarrow$   
 $l \gg k_1, k_2$   
 ↳ podemos hacer un taylor.

$$= \lambda^3 \int d^4l \left( \frac{1}{l^2 + m^2} \right)^3 + \# \underbrace{\frac{k_1 \cdot k_2}{l^2 + m^2}}_{\substack{\text{no hay kronecker} \\ \text{y no de} \\ \text{toronto}}} + \# \underbrace{k_3 \cdot k_4}_{\substack{\text{etc} \\ \text{de } k_i \cdot k_j}} + \dots + (k_i \cdot k_j)^2 + \dots$$

Expansión a orden ←

$$\Rightarrow C_{\epsilon,1} = \lambda^3 \int_1^\infty d^4l \left( \frac{1}{l^2 + m^2} \right)^3$$



### proceso de 4 patas

Teo. eff

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \times \\ \lambda(\Lambda) \end{array} = \times + \dots$$

Teo. completa

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \times \\ \lambda \end{array} = \times + \times \times$$

$$= \lambda^3 \int d^4l \frac{1}{l^2 + m^2} \frac{1}{(l + k)^2 + m^2}$$

$$= \lambda^3 \int_1^\infty d^4l \left( \frac{1}{l^2 + m^2} \right)^2 + O(k^2)$$

$$\rightarrow \lambda(\Lambda) = \lambda + \lambda^2 \int_1^\infty d^4l \left( \frac{1}{l^2 + m^2} \right)^2$$

diverge.

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \supset C_{\epsilon,1} \varphi^6$$

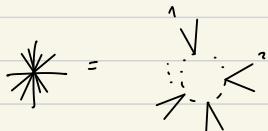
$\downarrow$

$$C_1! C_{\epsilon,1} \rightarrow \text{regla de Feynman.}$$

Vértice de  $z_n$  patas:

Patas externas.

$$-C_{2n,1} (2n)! = \frac{(-\lambda_{ph})^2 (2n)!}{2^n 2n} \int_1^\infty \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^2 + m_{ph}^2} \right)^n$$



al expandir en Taylor

relajó

$$C_{2n,1} = - \frac{(-\lambda_{ph}/2)^n}{32\pi^2 n(n-2)} \frac{1}{\Lambda^{2n-4}} + \dots$$

va a estar multiplicado por  $\varphi^{2n}$ .

coef. de Wilson suprimidos por  $\Lambda$



on-shell

$$-\lambda(\Lambda) = -\bar{z}_\lambda \lambda_{ph} + \frac{3}{2} (-\lambda_{ph})^2 \int_\Lambda^\infty \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^2 + m_{ph}^2} \right)^2 + \dots$$

anula las divergencias

(para el esquema OS)

diverge en el UV de forma logarítmica.

Rehaciendo en la versión euclídea

$$-\mathbb{V}_4(0,0,0,0) = -\bar{z}_\lambda \lambda_{ph} + \frac{3}{2} (-\lambda_{ph})^2 \int_0^\infty \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^2 + m_{ph}^2} \right)^2$$

$-\lambda_{ph}$   
ciclo on-shell

$$\lambda(\Lambda) - \lambda_{ph} = \frac{3}{2} (-\lambda_{ph})^2 \int_0^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^2 + m_{ph}^2} \right)^2$$

→ Todo es finito //

coef. de Wilson con 4 patas:

$$\Rightarrow \lambda(\Lambda) = \lambda_{ph} + \frac{3}{16\pi^2} \lambda_{ph}^2 \left[ \ln(\Lambda/m_{ph}) - \frac{1}{2} \right] + \dots$$

$$\approx \lambda_{ph} \left( 1 + \lambda_{ph} \underbrace{\ln(\Lambda/m_{ph})}_{\substack{\text{lo} \\ \text{suprime}}} \right)$$

$\ll 1$  → para que teo. de perturbaciones funcione.

Haciendo un desarrollo idéntico:

$$\text{---} \rightarrow m^2(\Lambda) = m_{ph}^2 - \frac{\lambda_{ph}}{16\pi^2} \left[ \Lambda^2 - m_{ph}^2 \ln(\Lambda^2/m^2) \right]$$

diverge cuadráticamente en  $\Lambda$ .

$$\Rightarrow m_{ph}^2 \gg \lambda_{ph} \Lambda$$

$$\Rightarrow 1 \gg \frac{\lambda_{ph} \Lambda^2}{m_{ph}^2}$$

~~~~~

Wilson

$$(\Lambda_0) \rightarrow \Lambda < \Lambda_0$$

teo. eff → ¿Cómo cambia si bajamos el valor de Λ_0 ?

(

$$c_{2n,1}(\Lambda_0), \lambda(\Lambda_0), m^2(\Lambda_0)$$

||

○

casumimos
fine tuning)

$$c_{2n,1}(\Lambda), \lambda(\Lambda), m^2(\Lambda)$$

¿Cómo se ve la teo. eff acá?

sólo c/ teo.
efectiva

←

Cómo varía la
teo. efectiva según
valores de Λ

corrección la teo. de
renormalización

↪ $\mu \rightarrow \lambda$

$$m^2(\Lambda) = m^2(\Lambda_0) + \frac{1}{2} \lambda(\Lambda) \int_\Lambda^{\Lambda_0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2(\Lambda_0)}$$

$$\lambda(\Lambda) = \lambda(\Lambda_0) - \frac{3}{2} \lambda^2(\Lambda_0) \int_\Lambda^{\Lambda_0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2 + m^2(\Lambda_0)} \right)^2$$

$$c_{2n,1}(\Lambda) = \underbrace{0}_{C(\Lambda_0)} - \frac{(-1)^n}{2^n 2n} \lambda^n(\Lambda_0) \int_\Lambda^{\Lambda_0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2 + m^2} \right)^n$$