FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 1

Fecha: 18 de Marzo del 2024.

P1. *a)* Considere un sistema el cual tiene un solo grado de libertad. El Lagrangiano que carateriza este sistema depende explícitamente del grado de libertad y sus primeras $n-$derivadas temporales, es decir,

$$L(q, q^{(1)}, \dots, q^{(n)}; t, \{\lambda\}), \quad \text{donde} \quad q^i \equiv \frac{d^i q}{dt^i}, \tag{1}$$

y $\{\lambda\}$ un conjunto de parámetros. Obtenga la ecuación de movimiento minimizando la acción.

b) A partir del siguiente Lagrangiano,

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q,t)}{dt}. \tag{2}$$

Obtenga las ecuaciones de movimiento utilizando Euler-Lagrange. Comente el resultado.

P2. Considere un péndulo esférico de masa m y largo ℓ (Figura 1).

a) Calcule el Lagrangiano del sistema.

b) Obtenga las ecuaciones de movimiento utilizando Euler-Lagrange.

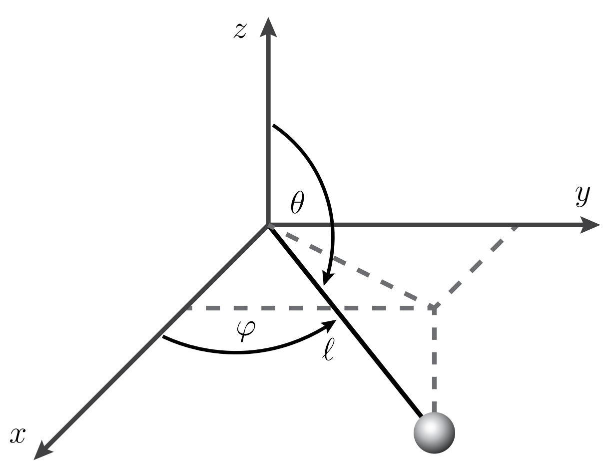


Figura 1: Péndulo esférico.

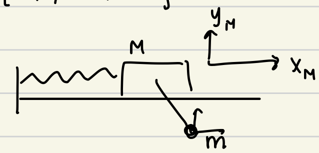
n cant. conservadas ←

⇓

se puede resolver un sist. con n coord. generalizadas.

coordenadas generalizadas:

$\{q_1, \dots, q_n\}$



$(x_M, \theta) \rightarrow$ las cant. mínimas que describen al sistema.

P1 (a)

conj. de parámetros

$$L(q, q^{(1)}, \dots, q^{(n)}, \{\lambda\}) \quad , \quad q^{(i)} = \frac{d^i q}{dt^i}$$

$$S = \int dt \, L(q, \dots, q^{(n)})$$

derivada funcional (variacional) →

$$\delta S = \int dt \, \delta L(q, \dots, q^{(n)})$$

$$= \int dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q^{(1)}} \cdot \delta q^{(1)} + \dots \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}} \delta q^{(n)} \right] \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\delta q) = \delta \dot{q}}$$

$$\cdot \int dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \longrightarrow u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \rightarrow du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

$$dv = \delta \dot{q} \qquad v = \delta q$$

$$= \left(\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q} \right) \Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int dt \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \delta q .$$

0

variaø de los bordes = 0 ← $\delta q(t_1) = \delta(q_2) = 0$

Truco: integral x partes

$$\int e^x x^{10} dx$$

	D	I
+	x^{10}	e^x
−	$10x^9$	⋮
+	$10 \cdot 9 x^8$	⋮
−	⋮	
	$10!$	e^x
	0	e^x

$$\int dt\, \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\, \delta q^{(n)} = \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\, \delta q^{(n-1)}}\Big|_{t_1}^{t_2} - \cancel{\ldots} + (-1)^n \int dt\, \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\right) \delta q .$$

D	I
$+\ \partial L / \partial q^{(n)}$	$\delta q^{(n)}$
$-\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\right)$	$\delta q^{(n-1)}$
$\vdots$	$\vdots$
$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\right)$	δq

$* \ \delta q^{(j)}(t_1) = \delta q^{(j)}(t_2) = 0 \quad \forall\, j = 0, \ldots, n-1$

$$= (-1)^n \int dt\, \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\right) \delta q .$$

$$\rightarrow \delta S = \int dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(1)}}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\right) \right] \delta q \overset{!}{=} 0$$

y nos quedan las ecs. de movi@.

$$= \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(i)}}\right) = 0 .$$

(b) $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}(q,t)$

$$= L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \dot{q}$$

usando E-L:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

- $\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial F}{\partial q}$
- $\frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dF(q,t)}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)} - \frac{\partial L}{\partial q} - \cancel{\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dF}{dt}\right)} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

E-L

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

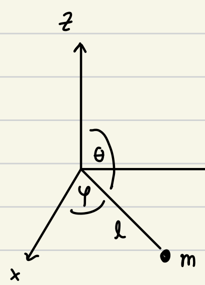
$\longrightarrow$ L' y L tienen la misma dinámica.

$$S = \int dt \left(L(q,\dot{q},t) + \frac{dF}{dt}(q,t) \right)$$

$\downarrow$

F nos queda una cte.

$\boxed{P2}$



$\downarrow g$

(r, φ, θ)

$\downarrow$

Largo cte $\Rightarrow$ coord. generalizadas. (φ, θ)

$x = \ell \cos\varphi \sin\theta \longrightarrow \dot{x} = -\ell\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta + \ell\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta$

$y = \ell \operatorname{sen}\varphi \sin\theta \qquad \dot{y} = \ell\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta + \ell\dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta$

$z = -\ell\cos\theta \qquad \dot{z} = \ell\dot{\theta}\sin\theta.$

$$K = \frac{1}{2}m\Big(\ell^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\sin^2\theta \cancel{- 2\ell^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta} + \ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\varphi\cos^2\theta$$

$$+ \ell^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \cancel{''} + \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\varphi\cos^2\theta.$$

$$+ \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\Big)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \underbrace{\ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta}\right)$$

$$= m/2\left(\ell^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\right)$$

$U = m\vec{g}\cdot\vec{r}$
$= -mgl\cos\theta.$

$L = K - U$
$= \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta.$

b) EoM

θ) $\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) + mgl\sin\theta - ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0$

$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta - ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0$

φ) $\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right) = 0$

$\dot{\varphi}\sin^2\theta = c \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{c}{\sin^2\theta}, \ \forall t.$

$* \ \varphi(t=0) = \varphi_0 \rightarrow$ cte

$\Downarrow$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta - c\cdot\cot a n\theta\cdot\operatorname{cosec}^2\theta = 0. \rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0$ → péndulo simple

$\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\omega^2\sin\theta\,d\theta$

no entendí !

$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2}\,\omega\left[\cos\theta - \cos\theta_0\right]$

$\int \frac{d\theta}{\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \int \omega\,dt$

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\theta/2$

$\int_0^\theta \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \rightarrow \phi = \frac{\theta}{2}$

$k\sin\alpha = \sin\phi$
$k\cos\alpha\,d\alpha = \cos\phi\,d\phi$
$d\phi = \frac{k\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\sin^2\phi}}$
$= \frac{\sqrt{k^2-\sin^2\phi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\,d\alpha$

$\int_0^{\theta/2} \frac{d\phi}{\sqrt{k^2 - \sin^2\phi}} = \int_0^{\sin^{-1}\left(\frac{\sin(\theta/2)}{k}\right)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}$

$= F\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sin\theta/2}{k}\right); k\right) \rightarrow$ amplitud de Jacobi.

$\operatorname{sn}(F(\varphi; k)) = \sin\varphi$

sen elíptico.

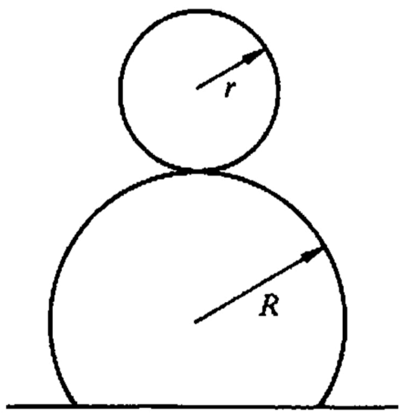
$F\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sin\theta/2}{k}\right); k\right) = \omega t$ / sn.

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 2

Fecha: 01 de abril del 2024.

P1. Un aro de masa m y radio r rueda sin resbalar en un cilindro fijo de radio R, como se muestra en la figura. La única fuerza externa es la gravedad. Si el cilindro pequeño empieza a rodar desde el punto más alto del cilindro grande, utilice el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar en punto en el cual el aro se despega del cilindro.



P2. Considere una superficie de revolución tal que podemos escribir la altura como $z = z(r)$, donde r es el radio polar. Sobre esta superficie se mueve una partíicula de masa m, la cual solo está sujeta a gravedad. Determine las cantidades conservadas del sistema.

P3. El Lagrangiano del oscilador armónico en una dimensión tiene la siguiente forma

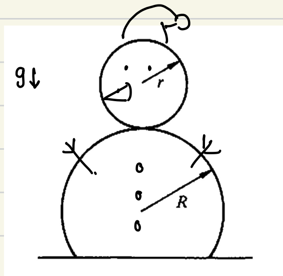
$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \tag{1}$$

Suponga que no conoce la respuesta sobre la solución del movimiento, pero sí sabe que el movimiento debe ser periódico, por lo tanto, puede ser descrito por una serie de Fourier de la forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t), \tag{2}$$

donde ω es la frecuencia angular (incógnita) del movimiento. Considere la acción integral I para dos puntos t_1 y t_2 separados por el periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Muestre que I es el extremo para x no nulo, si y solo si $a_n = 0\ \forall j \neq 1$, con $\omega^2 = k/m$.

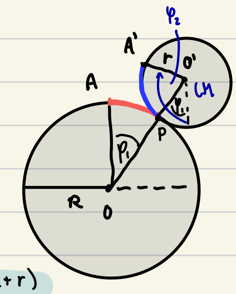
$\boxed{P1}$



Restricciones

- $\rho = R + r \longrightarrow \rho$ cte
- $AP = A'P$

$R\varphi_1 = r(\varphi_2 - \varphi_1)$



$f_1 = \rho - (R+r)$

$f_2 = (R+r)\varphi_1 - r\varphi_2$

$\neq \rho \rightarrow$ Dejar separadas las restricciones!

$$* \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum \lambda_a \frac{\partial f^a}{\partial q^i}$$

$$\overset{\shortparallel}{\lambda_a \frac{\partial f^a}{\partial q^i}}$$

— suma implícita.

$$K_{TOT} = K_{CM} + K_r$$

$$= \frac{1}{2} m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}_1^2\right) + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$U_g = mg\rho\cos\varphi_1$$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}_1^2) + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}_2^2 - mg\rho\cos\varphi_1$$

$\boxed{q^1 = \rho}$

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}_1^2 + mg\rho\cos\varphi_1 = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \rho} + \lambda_2 \cancel{\frac{\partial f_2}{\partial \rho}}^{\,0} = \lambda_1$$

$\boxed{q^2 = \varphi_1}$

$$m\rho^2\ddot{\varphi}_1 + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}_1 - mg\rho\sin\varphi_1 = \lambda_1 \cancel{\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1}}^{\,0} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} = (R+r)\lambda_2$$

$\boxed{q^3 = \varphi_2}$

$$mr^2\ddot{\varphi}_2 = \lambda_1 \cancel{\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2}}^{\,0} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} = -r\cdot\lambda_2 \rightarrow mr^2\ddot{\varphi}_2 = -\lambda_2 r$$

Imponiendo:

$$\rho - (R+r) = 0 \longrightarrow \dot{\rho} = 0 \;,\; \ddot{\rho} = 0$$

$$(R+r)\varphi_1 - r\varphi_2 = 0 \longrightarrow (R+r)\ddot{\varphi}_1 = r\ddot{\varphi}_2$$

$$-m(R+r)\dot{\varphi}_1^2 + mg\cos\varphi_1 = \lambda_1$$

$$m(R+r)^{\cancel{2}}\ddot{\varphi}_1 - mg\cancel{(R+r)}\sin\varphi_1 = \cancel{(R+r)}\lambda_2$$

$$m r^{\cancel{2}} \frac{(R+r)}{\cancel{r}}\ddot{\varphi}_1 = -\lambda_2 \cancel{r} \Rightarrow -m(R+r)\ddot{\varphi}_1 = \lambda_2$$

$$\Big\} \; m(R+r)\ddot{\varphi}_1 - mg\sin\varphi_1 = -m(R+r)\ddot{\varphi}_1 \quad /\cdot\dot{\varphi}_1$$

$$2(R+r)\dot{\varphi}_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - g\sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m(R+r)\dot{\varphi}_1^2 + mg\cos\varphi_1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow (R+r)\dot{\varphi}_1^2 = -g\cos\varphi_1 + c$$

condiciones iniciales $\longrightarrow$ $\dot{\varphi}_1(0) = 0 \Rightarrow c = g$

$$\rightarrow \dot{\varphi}_1^2 = \frac{-g\cos\varphi_1}{R+r} + \frac{g}{R+r}$$

$$+m\cancel{(R+r)}\left(\frac{g(-1+\cos\varphi_1)}{\cancel{R+r}}\right) + mg\cos\varphi_1 = \lambda_1$$

$$-mg + 2mg\cos\varphi_1 = N = 0 \longrightarrow \text{despega}$$

$$2\cos\varphi_1 - 1 = 0$$

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{3}}$$

$\boxed{P2}$ $z = z(r)$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial z}{\partial r}\dot{r}\hat{z} \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial r}\dot{r}$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\dot{r}^2\right) - mg\left(z(r) - z(r_0)\right)$$

· No depende de $\theta \rightarrow$ queda invariante

" " de t explícitamente $\rightarrow$ energía se conserva.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial t}}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}}_{}\right) = 0$$

cte : cant. conservada $\longrightarrow$ Hamiltoniano = Energía

(en ciertos sistemas no).

$\xrightarrow{}$ para $q=\theta$.

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{\text{momentum generalizado}}\right) - \cancel{\frac{\partial L}{\partial q}}^{\,0} = 0 \qquad , \quad P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}$$

$\boxed{\text{P3}}$

$$L = \frac{1}{2} m \dot x^2 - \frac{1}{2} k x^2 \qquad I = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot x, t)\, dt$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \longrightarrow \dot x(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n\omega t)\, n\omega$$

ω: incógnita

$$x^2(t) = \sum_{n,l=0}^{\infty} a_n a_l \cos(n\omega t)\cos(l\omega t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\dot x^2(t) = \sum_{n,l=0}^{\infty} a_n a_l \sin(n\omega t)\sin(l\omega t)\cdot n l \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow I = \int_{t_1}^{t_1 + 2\pi/\omega} L = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} m \sum_{n,l=0}^{\infty} a_n a_l \sin(n\omega t)\sin(l\omega t)\cdot n l \omega^2 - \frac{1}{2} k \sum_{n,l=0}^{\infty} a_n a_l \cos(n\omega t)\cos(l\omega t)\, dt$$

$$* \int_0^{2\pi/\omega} dt\, \sin(n\omega t)\sin(l\omega t) = \int_0^{2\pi/\omega} dt\, \cos\cdot\cos = \frac{\pi}{\omega}\delta_{nl}$$

$$I = \frac{\pi}{2\omega}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 (n^2\omega^2 m - k) \quad , \quad \delta I = \frac{\partial I}{\partial a_j}\delta a_j$$

extremar

$$\delta I = \frac{\pi}{2\omega}\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n^2\omega^2 m - k)\,\delta a_n \overset{!}{=} 0$$

$\cdot\ a_0 k \Rightarrow a_0 = 0$

$$a_n(n^2 m\omega^2 - k) = 0 \longrightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 3

Fecha: 03 de abril del 2024.

P1. Muestre que si el potencial de un Lagrangiano contiene términos dependientes de la velocidad, el momento canónico correspondiente a una rotación del sistema completo no es el momento angular mecánico y que está dado por

$$p_\theta = L_\theta - \sum_i \hat{n} \cdot (\mathbf{r_i} \times \boldsymbol{\nabla}_{v_i} U) \,, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{\nabla}_{v_i}$ es el operador gradiente en el cual las derivadas son con respecto a las componentes de la velocidad y $\hat{n}$ es el vector unitario en la dirección de rotación. Además, obtenga el momento canónico en presencia de un potencial electromagnético.

P2. Pruebe las siguientes propiedades para la función *Hamiltoniano*

$$H \equiv p_i \dot{q}^i - L, \quad \text{donde} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{2}$$

a) Si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, entonces el Hamiltoniano es una constante de movimiento.

b) Si solo hay potenciales y costraints independientes del tiempo, entonces el Hamiltoniano a demás de ser una constante de movimiento, es igual a la energía mecánica total.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \wedge \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = K + U = E = const, \tag{3}$$

donde $x^i = x^i(q^1, \ldots, q^n)$ representan las relaciones entre las coordenadas generalizadas y coordenadas cartesianas.

P3. Considere un péndulo simple formado por una masa m unida a una cuerda de largo l. Inmediatamente posterior al movimiento del péndulo, el largo de la cuerda se acorta a un ritmo constante dado por

$$\frac{dl}{dt} = -\alpha = \text{const}. \tag{4}$$

Considere el punto de suspensión fijo.

a) Calcule el Lagrangiano del sistema y encuentre las ecuaciones de movimiento.

b) Escriba la función Hamiltoniano H dada por $H \equiv p_i q^i - L$, ¿Es igual a la energía del sistema?

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}$

c) ¿Es la función Hamiltoniano una cantidad conservada? ¿La energía se conserva? Explique sus resultados.

P4. Considere que se quiere diseñar un túnel que pase por dentro del planeta Tierra.

a) Encuentre el potencial gravitatorio que siente en el interior de la Tierra, asumiendo que su densidad de masa es constante.

b) Postule el principio variacional que le permite obtener el tiempo de viaje.

c) Muestre que la curva que minimiza el tiempo de viaje es una hipocicloide.

Resumen

Teorema de Noether.

Por cada simetría continua (global), hay una integral de movimiento (on-shell)

↳ conexión entre geometría (simetrías continuas) y prop. de movimiento (integrales de mov.)

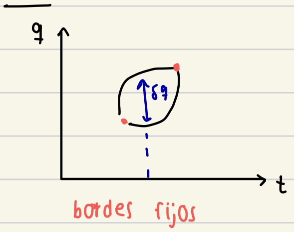
* on-shell: usando E-L

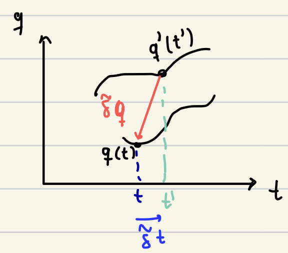
Sea $\bar{\delta}$ una simetría global continua de una acción (off-shell). Si encontramos $\tilde{\delta}t$ y $\tilde{\delta}q$ t.q $\tilde{\delta}S = 0$, entonces

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\tilde{\delta}q + \left(L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\tilde{\delta}t$$

es una integral de mov.

dem.





Setup de Noether no tiene los bordes fijos.
Definamos matemáticamente $\tilde{\delta}$.

- $\tilde{\delta}dt = dt' - dt = d\tilde{\delta}t = \frac{d\tilde{\delta}t}{dt}dt$

- $\tilde{\delta}q = q'(t') - q(t)$

$$= q'(t) + \tilde{\delta}t\,\frac{dq'(t)}{dt} + \ldots - q(t)$$

$$\approx \delta q(t) + \tilde{\delta}t\,\frac{dq'(t)}{dt}$$

De manera general

$$\tilde{\delta} = \delta + \tilde{\delta} t \frac{d}{dt}$$

$$\tilde{\delta} S = \int \tilde{\delta} L + L \tilde{\delta} dt \overset{!}{=} 0$$

$$= \int dt \left[\delta L + \tilde{\delta} t \frac{dL}{dt} + L \frac{d\tilde{\delta} t}{dt} \right]$$

$$= \int dt \left[\delta L + \frac{d}{dt} \left(L \tilde{\delta} t \right) \right]$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q .$$

$$\Rightarrow \tilde{\delta} S = \int dt \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + L \tilde{\delta} t \right) + \cancelto{0}{\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right]} \delta q \right\} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta q + L \tilde{\delta} t \right) = 0$$

$$\boxed{I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tilde{\delta} q + \left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \tilde{\delta} t}$$

Teo. de Noether + general.

$\cdot\; q' = q + \Delta q (q, \dot{q}, t)$

$$L' = L + \frac{\partial L}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \Delta q$$

$$= L + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \Delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \Delta q .$$

$$= L + \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Delta q \right)}_{\Delta G}$$

$$\Rightarrow L' = L + \frac{d}{dt} \Delta G \qquad \Rightarrow \Delta L = L' - L = \frac{d}{dt} \Delta G$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\Delta q\right) = \frac{d}{dt}(\Delta G)$$

$$\Delta C = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\Delta q - \Delta G$$

cuando es sólo temporal.

$$\boxed{\Delta C = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\Delta q - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L\right)\Delta t - \Delta G}$$

$\boxed{\text{Ej}}$

$$V(x,y) = V(x-2y)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2) - V(x-2y)$$

$x \to x+\varepsilon$

$y \to y + \varepsilon/2$

$t \to t$

$$\Rightarrow V(x+\cancel{\varepsilon} - 2y - 2\cancel{\varepsilon/2}) = V(x-2y)$$

$$L' = L \Rightarrow \Delta G = 0$$

$$\Delta C = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot x}}_{p_x}\varepsilon + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot y}}_{p_y}\frac{\varepsilon}{2}$$

$\longrightarrow$ momentos canónicos.

$$L = \frac{1}{2}m\dot x^2 - V(x)$$

$x' = x + \varepsilon\dot x$

$\Rightarrow \dot x' = \dot x + \varepsilon\ddot x$

$t' = t$.

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot x+\varepsilon\ddot x)^2 - V(x+\varepsilon\dot x)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot x^2 + 2\varepsilon\dot x\ddot x + \cancel{O(\varepsilon^2)}) - V(x+\varepsilon\dot x)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot x^2 + 2\varepsilon\dot x\ddot x) - \underbrace{V(x+\varepsilon\dot x)}_{}$$

$$V(x) + \frac{\partial V}{\partial x}\varepsilon\dot x + \cancelto{0}{O(\varepsilon^2)}$$

taylor.

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\varepsilon\dot{x}^2\right) - \frac{\partial V}{\partial x}\varepsilon\dot{x}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{d}{dt}(\varepsilon V(x))$$

$$= L + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\varepsilon\dot{x}^2 - \varepsilon V(x)\right)}_{\Delta G}$$

$\Longrightarrow$ La transformación es una simetría //

$$\cdot\ \Delta C = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\varepsilon\dot{x} - \frac{1}{2}m\varepsilon\dot{x}^2 + V\varepsilon.$$

$$= m\dot{x}^2\varepsilon - \%.$$

$$= \frac{1}{2}m\varepsilon\dot{x}^2 + V\varepsilon = E\varepsilon.$$

$$p_\theta = L_\theta - \sum_i \hat{n}\cdot(\vec{r}_i \times \vec{\nabla}_{v_i} U)$$

$\vec{\nabla}_{v_i}$: op. gradiente $\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \dots\right)$

$\rightarrow U(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial U}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\varphi}} + \cancel{\frac{\partial U}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{\varphi}}}^{\,0}$$

$$\rightarrow \dot{x} = \dot{r}\% + \dot{\theta}\% - r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r}\% + \dot{\theta}\% + r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi$$

$$\dot{z} = \dot{r}\% + \dot{\theta}\%$$

$$\cdot\ \frac{\partial U}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial U}{\partial \dot{x}}(-r\sin\theta\sin\varphi) + \frac{\partial U}{\partial \dot{y}}(r\sin\theta\cos\varphi)$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}y + \frac{\partial U}{\partial \dot{y}}x \quad \rightsquigarrow \quad (x, y, z) \times \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial U}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial U}{\partial \dot{z}}\right)$$

$$= \hat{z}\cdot(\vec{r} \times \vec{\nabla}_{\vec{v}} U)$$

$$= \hat{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}_v U)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial (K - U)}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$= L_\varphi - \sum_{i=1}^{N} \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{\nabla}_{v_i} U)$$

momentum angular.

* No $p_\varphi \neq L_\varphi$ cuando U depende de las velocidades generalizadas.

$\boxed{P3}$

$$\frac{dl}{dt} = -\alpha = \text{const.}$$

a) $L = \frac{1}{2} m (\alpha^2 + l^2 \dot{\theta}^2) + mg\cos\theta\, l$ $r^2 = l^2$

$l = -\alpha t \Rightarrow L$ depende explícitamente del t.
(traslaciones temp. no son simetría).

$\hat{\theta}]$ $\frac{d}{dt}(m l^2 \dot{\theta}) + mgl\sin\theta = 0$

$-2l\alpha\dot{\theta} + l^2\ddot{\theta} + gl\sin\theta = 0$

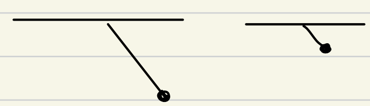
$\ddot{\theta} - \frac{2\alpha}{l}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

b) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = H$

$= m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m (\alpha^2 + l^2 \dot{\theta}^2) - mg\cos\theta\, l$

$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2} m\alpha^2$

$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta + \frac{1}{2} m\alpha^2$



$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ momentum canónico se conserva si L no depende de θ.

* Si L depende del t, $H \neq E$.

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 4

Fecha: 08 de abril del 2024.

P1. Pruebe las siguientes propiedades para la función *Hamiltoniano*

$$H \equiv p_i \dot{q}^i - L, \quad \text{donde} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{1}$$

a) Si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, entonces el Hamiltoniano es una constante de movimiento.

b) Si solo hay potenciales y costraints independientes del tiempo, entonces el Hamiltoniano a demás de ser una constante de movimiento, es igual a la energía mecánica total.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \wedge \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = K + U = E = const, \tag{2}$$

donde $x^i = x^i(q^1, \ldots, q^n)$ representan las relaciones entre las coordenadas generalizadas y coordenadas cartesianas.

P2. Considere que se quiere diseñar un túnel que pase por dentro del planeta Tierra.

a) Encuentre el potencial gravitatorio que siente en el interior de la Tierra, asumiendo que su densidad de masa es constante.

b) Postule el principio variacional que le permite obtener el tiempo de viaje.

c) Muestre que la curva que minimiza el tiempo de viaje es una hipocicloide.

P3. Considere una partícula de masa m bajo la influencia de un potencial cuadrático inverso, es decir, la acción de la partícula es:

$$I[x] = \int dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right). \tag{3}$$

Utilizando el teorema de Noether, obtenga la cantidad asociada a la simetría conformal.

Bibliografía

- Classical Mechanics – Goldstein
  Cap. 2 (Ppio. variacional y Ecs. de Euler-Lagrange)
- Mecánica – Landau
  Cap. 1 (Eq. de mov.)
  Cap. 2 (teorías de conservaø)
- A short review on Noether's theorem, gauge symmetries and boundary terms – Max Bañados e Ignacio Reyes.
  $\boxed{2.1.1 \text{ y } 2.1.2}$

momento canónico generalizado

$\boxed{P1}$ $H \equiv p_i \dot{q}^i - L$, $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$

a) $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \Longrightarrow H = \text{cons.}$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}^{\,0} \qquad * \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{p\dot{q} - L}_{H}\Big) = 0$$

b) $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \;\wedge\; \dfrac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = K + U = E = \text{cte}$

Relaøes entre coord. generalizadas y cartesianas. ←

- $x^i = x^i(q^1, \dots, q^n)$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^i \dot{x}_i$$

- $\dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{\partial x^i}{\partial q^j} \cdot \dot{q}^j$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_i}\right)(\dot{q}^j \dot{q}_j)$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{m}\, \dot{q}^i \dot{q}_j$$

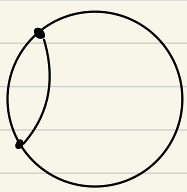
$$H = p_i \dot{q}^i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - (K - U)$$

U no depende $\dot{q}$ ←

$$= \frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - (K - U)$$

$$= \tilde{m}\dot{q}^i \dot{q}_i - \frac{1}{2}\tilde{m}\dot{q}^i \dot{q}_i + U = K + U = E = \text{cte}$$

↳ L no depende explícitamente del t.



$\boxed{\text{P2}}$ $$\vec{F}_G(\vec{r}) = \frac{-GM(r)m}{r^2}\hat{r}$$

no se sabe!

$$\cdot\, M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \left(= \int \rho\, dV = 4\pi \int_0^r dr'(r')^2 \rho \right)$$

$$\underbrace{M(R)}_{\substack{M_T \\ \text{conocida}}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$\Rightarrow M(r) = M_T \frac{r^3}{R^3}$$

$$\vec{F}_G = \frac{-GM_T m r}{R^3}\hat{r}$$

Así, $$V(r) = -\int \vec{F}\cdot\hat{r}\, dr$$

$$= \int_0^r \frac{GM_T m r'}{R^3} dr'$$

$$\boxed{V(r) = \frac{GM_T m\, r^2}{2R^3}}$$

Ppio. variacional:

$$T = \int dt \cdot \frac{ds}{ds} = \int \left(\frac{dt}{ds}\right) ds$$

$$T = \int \frac{ds}{v(r)} \quad \rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{dx^2}{d\theta^2} d\theta^2 + \frac{dy^2}{d\theta^2} d\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{v(r)} d\theta \qquad = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\theta$$

conservaø de la energía $\longleftarrow$

$$E(R) = E(r)$$

$$\frac{GM_T \cancel{m}}{\cancel{2}R} = \frac{GM_T \cancel{m} r^2}{\cancel{2}R^3} + \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m} v^2$$

$$\Rightarrow GM_T\left(\frac{1}{R} - \frac{r^2}{R^3}\right) = v^2$$

$$\Longrightarrow \sqrt{GM_T\left(\frac{1}{R} - \frac{r^2}{R^3}\right)} = v(r).$$

$$T = \int \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{\frac{GM_T}{R^3}\left(R^2 - (x^2 + y^2)\right)}} d\theta$$

$$\cdot\ S = \int dt\, L(q(t), \dot q(t))$$

$$T = \int d\theta\, f(x(\theta), y(\theta), x'(\theta), y'(\theta))$$

Euler - Lagrange pero con θ!

$$\Rightarrow f(x, y, x', y') = \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, K \quad , \quad K = \sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$$

· Si f no es funø explícita de θ, las eq. de E-L son equiv. a:

$$f - x' \frac{\partial f}{\partial x'} = C_1$$

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C_2$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'^2}{y'^2 - x'^2} \sqrt{\frac{x'^2 - y'^2}{R'^2 - (x^2 + y^2)}} = \frac{C_1}{K} \quad , \quad \frac{x'^2}{x'^2 + y'^2} \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{R^2 - (x^2 + y^2)}} = \frac{C_2}{K}$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = \frac{C^2}{K^2}\left(R^2 - (x^2 + y^2)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x(\theta) &= (R-b)\cos\theta + b\cos\theta\left(\frac{R-b}{b}\theta\right) \\ y(\theta) &= (R-b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{R-b}{b}\theta\right) \end{aligned}\right\} \text{hipocicloide.}$$

$\boxed{P3}$

$$I(x) = \int dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right)$$

. Como L no depende explícitamente del tiempo ni $\frac{\partial x_i}{\partial t}$, $x_i = x_i(q, \dots q_n)$

$\Rightarrow$ $H = E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{\alpha}{x^2}$ se conserva.

$\cdot \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(\sqrt{\lambda}\, x)}{d(\lambda t)}$

$\dot{x}' = \boxed{\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$

¡Cuidado la derivada!

(en simetrías conformales)

simetría de weyl : $t \to t' = \lambda t$, $x \to x' = \sqrt{\lambda}\, x$

$$I' = \int dt' \cancel{\lambda} \left(\frac{1}{2} m \frac{\dot{x}^2}{\cancel{\lambda}} - \frac{\alpha}{\cancel{\lambda} x^2} \right) = \%.$$

infinitesimal

$\cdot\ \lambda = 1 + \varepsilon$

$x'(t') = \sqrt{\lambda}\, x$

$$\Delta C = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Delta x - H \Delta t - \Delta G$$

taylor

$x'((1+\varepsilon)t) = \sqrt{1+\varepsilon}\, x$

Taylor

$x'(t) + \boxed{\dot{x}(t)\varepsilon} + O(\cancel{\varepsilon^2})^{0} = x(t) + \frac{\varepsilon}{2} x(t) + O(\cancel{\varepsilon^2})^{0}$

$x'(t) = -\dot{x}(t)\varepsilon t + x(t) + \frac{\varepsilon}{2} x(t)$, $\Delta x = -\dot{x}(t)\varepsilon t + \frac{\varepsilon}{2} x(t)$

sólo queda el término sin prima.

$$I = \int dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) \Rightarrow \int dt \Big(\underbrace{\frac{1}{2} m \left(\dot{x} - \varepsilon t \ddot{x} - \frac{\varepsilon}{2} \dot{x}\right)^2}_{} - \cancel{\frac{1}{2} m \dot{x}^2} - \underbrace{\frac{\alpha}{\left(x - \varepsilon t \dot{x} + \frac{\varepsilon}{2} x\right)^2}}_{} + \cancel{\frac{\alpha}{x^2}} \Big)$$

$$\approx \left(\cancel{\dot{x}^2} - 2\varepsilon t \dot{x} \ddot{x} - \dot{x}^2 \varepsilon \right) \qquad \approx \cancel{\frac{\alpha}{x^2}} + \alpha \left(\frac{2\varepsilon t \dot{x} - \varepsilon x}{x^3} \right)$$

$$= \int dt \frac{d}{dt} (t L)$$

Resumen

Métrica: Es un objeto que nos entrega la noción de producto escalar. Es un mapeo bilineal simétrico que "recibe" dos vectores y entrega un escalar.

$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

- $g(\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{c} + \beta\vec{d}) = g(\vec{a},\vec{c}) + \alpha g(\vec{b},\vec{c}) + \beta g(\vec{a},\vec{d}) + \alpha\beta g(\vec{b},\vec{d})$

$g(\vec{a},\vec{b}) = g(\vec{b},\vec{a})$

$g(\vec{a},\vec{b}) = g(a^i\hat{e}_i, b^j\hat{e}_j) = a^i b^j g(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = a^i b^j g_{ij}$

notación

$g_{i'j'} = g(\hat{e}_{i'}, \hat{e}_{j'}) = \Lambda^i{}_{i'} \Lambda^j{}_{j'} g_{ij}$

$Dw^i = dw^i + \Gamma^i_{jk} w^k dx^j$

(dif. covariantes)

Símbolos de Christoffel

$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}(\partial_j g_{km} + \partial_k g_{im} - \partial_m g_{jk})$

- $g^{ij} \to$ espacio vectorial dual.

*Newton:

$g_{k\ell}[m(\ddot{q}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - F^k] = 0$

Reglas de Índices

i) Índice repetido arriba y abajo denota suma (notación de Einstein)

ii) se puede cambiar de letra a los índices repetidos

iii) Índice arriba (abajo) en el denominador cuenta como índice abajo (arriba).

$1/a_i \sim a^i$

iv) Tres índices repetidos $\Rightarrow$ Red Flag.

↳ para una ecuación

$a^i b_i c_i \to$ no tiene sentido

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 5

Fecha: 15 de abril del 2024.

P1. Suponga la existencia de una métrica **diagonal** g_{ij}, es decir, $g_{ij} = 0\ \forall i \neq j$. Demuestre que para $i \neq j \neq k$, los símbolos de Christoffel tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Gamma^i{}_{jk} &= 0, \\ \Gamma^i{}_{jj} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{ii}}\partial_i g_{jj}, \\ \Gamma^i{}_{ji} &= \partial_j\left(\ln\sqrt{|g_{ii}|}\right), \\ \Gamma^i{}_{ii} &= \partial_i\left(\ln\sqrt{|g_{ii}|}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

P2. Una masa puntual m está restringida a moverse sin fricción en una superficie n-dimensional en ausencia de fuerzas externas. La superficie es descrita por un conjunto de coordenadas generalizadas $(q^1, \ldots, q^n)$ tal que

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j. \tag{2}$$

Muestre que las n ecuaciones de movimiento de la partícula vienen dadas por

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i{}_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k = 0. \tag{3}$$

P3. Un 2-toro $T^2 = S^1 \times S^1$ se puede parametrizar utilizando los ángulos $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$ de la siguiente manera

$$\vec{x}(\theta,\phi) = \left((R + r\cos\phi)\cos\theta, (R + r\cos\phi)\sin\theta, r\sin\phi\right). \tag{4}$$

a) Encuentre los vectores tangente.

b) Obtenga la métrica.

c) Calcule los símbolos de Christoffel.

d) Escriba las ecuaciones de Newton en estas coordenadas.

$\boxed{P1}$ $g_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j$ $\qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

$g^{ij} = \dfrac{1}{g^{ij}}$ $\rightsquigarrow$ la inversa de una matriz diagonal.

Dem

① $\Gamma^{i}_{jk} = 0$

② $\Gamma^{i}_{jj} = -\frac{1}{2} g_{ii}\, \partial_i g_{jj}$

③ $\Gamma^{i}_{ji} = \partial_j \left(\ln \sqrt{|g_{ii}|} \right)$

④ $\Gamma^{i}_{ii} = \partial_i \left(\ln \sqrt{|g_{ii}|} \right)$

$$\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\partial_j g_{km} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk} \right)$$

① $\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{ii} \left(\partial_j \underbrace{g_{ki}}_{=0} + \partial_k \underbrace{g_{ji}}_{=0} - \partial_i \underbrace{g_{jk}}_{=0} \right)$, $i \neq j \neq k$.

m forzado a ser i

$= 0$

② $\Gamma^{i}_{jj} = \frac{1}{2} g^{ii} \left(\partial_j \underbrace{g_{ji}}_{=0} + \partial_j \underbrace{g_{ji}}_{=0} - \partial_i g_{jj} \right)$

$= -\frac{1}{2} g^{ii}\, \partial_i g_{jj}$

$= -\frac{1}{2} \frac{1}{g^{ii}}\, \partial_i g_{jj}$

③ $\Gamma^{i}_{ji} = \frac{1}{2} g^{ii} \left(\partial_j g_{ii} + \cancel{\partial_i g_{ji}} - \cancel{\partial_i g_{ji}} \right)$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{ii}} \cdot \partial_j g_{ii}$

$= \partial_j \left(\ln \sqrt{|g_{ii}|} \right)$

④ $\Gamma^{i}_{ii} = \frac{1}{2} \frac{1}{g_{ii}} \left(\partial_i g_{ii} + \cancel{\partial_i g_{ii}} - \cancel{\partial_i g_{ii}} \right)$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{ii}}\, \partial_i g_{ii}$

$= \partial_i \left(\ln \sqrt{|g_{ii}|} \right)$

P2

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \qquad (q^1, \ldots, q^n). \qquad , \; H = \text{Energía}.$$

conservaø de energía! ←

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j \dot{q}^k = 0 \qquad \left(E \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{q}}\cdot\dot{\vec{q}}\right)$$

$$E = \tfrac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$0 = \tfrac{1}{2} m \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right)$$

$$0 = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt}(g_{ij})\dot{q}^i\dot{q}^j + g_{ij}\ddot{q}^i\dot{q}^j + g_{ij}\dot{q}^i\ddot{q}^j\right)$$

· g no depende del tiempo.

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt}$$

$$= \partial_k g_{ij}\, \dot{q}^k$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \tfrac{1}{2} m \left(\partial_k g_{ij}\dot{q}^k\dot{q}^i\dot{q}^j + g_{ij}\ddot{q}^i\dot{q}^j + g_{ij}\dot{q}^i\ddot{q}^j\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} m\, g_{ij}\left(\ddot{q}^i\dot{q}^j + \dot{q}^i\ddot{q}^j\right) + \tfrac{1}{2} m\, \partial_k g_{ij} q^k \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$$* \quad \underset{\substack{i\to j\\ j\to i}}{g_{ij}\dot{q}^i\ddot{q}^j} = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{simétrica}}}{g_{ji}\dot{q}^j\ddot{q}^i} = g_{ij}\dot{q}^j\ddot{q}^i$$

$$\rightarrow \quad \partial_i g_{jk} = \Gamma^m_{ij} g_{mk} + \Gamma^m_{ik} g_{jm}$$

$$0 = \cancel{m}\, g_{ij}\dot{q}^j\ddot{q}^i + \tfrac{1}{2}\cancel{m}\left(\Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}\right)\dot{q}^k q^j \dot{q}^i$$

$$\Gamma^l_{ki} g_{lj} \;\xrightarrow{\substack{i\to j\\ j\to i}}\; \underbrace{\Gamma^l_{kj} g_{li} + \Gamma^l_{kj} g_{il}}_{2\Gamma^l_{kj} g_{il}}$$

simétrica.

$$0 = g_{ij}\dot{q}^j\ddot{q}^i + \Gamma^l_{kj} g_{il}\dot{q}^i\dot{q}^j\dot{q}^k$$

$$0 = \underbrace{g_{ij}\,\dot q^j \ddot q^i}_{\ddot q^i \dot q_i} + \underbrace{\Gamma^l_{kj}\, g_{il}\,\dot q^i \dot q^j \dot q^k}_{}$$

$l \to i$
$k \to j$
$j \to k$
$i \to l$

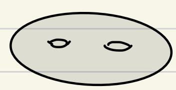
$$\Gamma^i_{jk}\, g_{li}\, \underbrace{\dot q^l \dot q^k \dot q^j}_{\dot q_i \dot q^k \dot q^j}$$

$$0 = \ddot q^i \cancel{\dot q^i} + \Gamma^i_{jk}\, \cancel{\dot q_i}\, \dot q^k \dot q^j$$

$$\boxed{\ddot q^i + \Gamma^i_{jk}\, \dot q^k \dot q^j = 0}$$

Ec. de Newton versión covariante.

$\boxed{P3}$ $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$



Aquí r no cambia. Si cambiara, habría otra componente.

$$\vec{x}(\theta, \phi) = \big((R + r\cos\phi)\cos\theta,\ (R + r\cos\phi)\sin\theta,\ r\sin\phi \big)$$

a) $$\hat e_\theta = \frac{\partial \vec x}{\partial \theta} = \big(-(R + r\cos\phi)\sin\theta,\ (R + r\cos\phi)\cos\theta,\ 0\big)$$

$$\hat e_\phi = \frac{\partial \vec x}{\partial \phi} = \big(-r\sin\phi\cos\theta,\ -r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi\big)$$

Para obtener la métrica.

$* \ ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$

$\hookrightarrow \underset{g_{\theta\theta}}{\square}\, d\theta^2 + \underset{g_{\phi\phi}}{\square}\, d\phi^2$

b)

$$g_{11} = g_{\theta\theta} = \hat e_\theta \cdot \hat e_\theta = (R + r\cos\phi)^2$$

$$g_{12} = g_{\theta\phi} = \hat e_\theta \cdot \hat e_\phi = (R + r\cos\phi)\cos\theta\, r\sin\theta\sin\phi - r\sin\phi\sin\theta\cos\theta\,(R + r\cos\phi) = 0.$$

$$g_{22} = g_{\phi\phi} = \hat e_\phi \cdot \hat e_\phi = r^2\sin^2\phi\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi$$
$$= r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi$$
$$= r^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Describe la superficie del 2-toro (T^2)

Símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\phi} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{\theta\theta}}\partial_\phi g_{\theta\theta}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{(R+r\cos\phi)^{\cancel{2}}}\cdot -\cancel{2}\,(\cancel{R+r\cos\phi})\cdot r\sin\phi$$

$$= -\frac{r\sin\phi}{(R+r\cos\phi)} = \Gamma^{\theta}_{\phi\theta}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = \ldots\ \partial_\theta\left((R+r\cos\phi)^2\right) = 0$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = \ldots\ \partial_\theta r^2 = 0$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \ldots\partial_\theta r^2 = 0$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\phi} = \ldots\partial_\phi r^2 = 0$$

$$\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\partial_\phi\left((R+r\cos\phi)^2\right) = \frac{(R+r\cos\phi)\sin\phi}{r}$$

Notaφ! —

$$\Gamma^{\theta}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-r\sin\phi}{R+r\cos\phi} \\ \frac{-r\sin\phi}{R+r\cos\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\phi}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{(R+r\cos\phi)\sin\phi}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $m(\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k) = F^i$

↳ Fuerzas externas.

$$m\left(\left[\ddot{\theta} - \frac{2r\sin\phi}{R+r\cos\phi}\dot{\theta}\dot{\phi}\right]\hat{\theta} + \left[\ddot{\phi} + \frac{(R+r\cos\phi)\sin\phi}{r}\dot{\phi}^2\right]\hat{\phi}\right) = F$$

$$\to m\left(\ddot{\theta} + \Gamma^{\theta}_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\right) = F^\theta \to m\left(\ddot{\theta} + \Gamma^{\theta}_{\theta k}\dot{\theta}\dot{q}^k + \Gamma^{\theta}_{\phi k}\dot{\phi}\dot{q}^k\right)$$

$$\cdot\, m\left(\ddot{\theta} + \cancel{\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}}^{\,0}\dot{\theta}^2 + \Gamma^{\theta}_{\theta\phi}\dot{\theta}\dot{\phi} + \Gamma^{\theta}_{\phi\theta}\dot{\phi}\dot{\theta} + \cancel{\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}}^{\,0}\dot{\phi}^2\right)$$

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 6

Fecha: 22 de abril del 2024.

P1. Considere el lagrangiano asociado a una partícula moviéndose en un campo electromagnético

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - q \left(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right), \tag{1}$$

donde ϕ es el potencial escalar y $\vec{A}$ el potencial vector.

a) Considere una transformación de gauge para los potenciales vector y escalar de la forma

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \psi(\mathbf{r}, t). \tag{2}$$

Estudie qué ocurre con el Lagrangiano.

b) Muestre que las ecuaciones de Euler-Lagrange utilizando (1) son consistentes con la fuerza de Lorentz

$$m\mathbf{a} = q \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \tag{3}$$

Recordar que el campo eléctrico y magnético están dados por

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}. \tag{4}$$

P2. Obtenga la ecuación geodésica de una partícula libre, la cual está en un espacio con elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{5}$$

Auxiliar 6

P0 | P3 - C1

R , $z = f(\phi)$, $U(z) = U(f(\phi))$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$$
$$= R\dot{\phi}\hat{\phi} + \partial f/\partial\phi\,\dot{\phi}\,\hat{z}$$

$\cdot\ \dot{z} = \frac{df}{dt}(\phi) = \frac{df}{\partial\phi}\dot{\phi}$

a) $L = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2\left(R^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)^2\right) - U$

· como L no depende del t $\rightarrow$ H se conserva.

$$H = E = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2\left(R^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)^2\right) + U(f)$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)} = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)\sqrt{\left(R^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)^2\right)}$$

b) $\rightarrow$ $$\boxed{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}\ dt = d\phi\sqrt{\left(R^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)^2\right)}}$$

c) $T = \int_{t_a}^{t_b} dt$ $\rightarrow$ extremar el tiempo.

$$= \int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi\,\frac{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}} \equiv \int \underbrace{L[\overset{\frac{\partial f}{\partial\phi}}{f'}, f, \phi]}_{\text{funcional.}}\, d\phi$$

d) $S = \int dt\, L[\dot{\phi}, \phi, t]$

No depende explícitamente de ϕ.

$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q} - L = H$

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) - \frac{\partial L}{\partial f} = 0$$

e) $L - f\frac{\partial L}{\partial f'} = C$ $\rightarrow$ Id. de Beltrami
(cant. conservada)

P1

$$L = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 - q(\phi - \vec{A}\cdot\vec{v})$$

ϕ : potencial escalar

$\vec{A}$: potencial vector.

a) Transf. de Gauge:

$$\left.\begin{aligned} \phi' &= \phi - \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\psi(\vec{r},t) \end{aligned}\right\} \text{T. de Gauge}$$

$* \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = g_{ij}\, a^i b^j = g^{ij}\, a_i b_j = a^i b_i = a_i b^i$

$$L' = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 - q\left(\phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \vec{A}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{v}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\vec{v}^2 - q(\phi - \vec{A}\cdot\vec{v}) + q\underbrace{(\partial\psi/\partial t + \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{v})}_{\frac{\partial\psi}{\partial t} + \partial^i\psi\, \dot{r}_i}$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial r_i}\dot{r}_i = \frac{d\psi}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} m\vec{v}^2 - q(\phi - \vec{A}\cdot\vec{v}) + \frac{d}{dt}(q\psi).$$

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot r^i \dot r^j - q(\phi - g_{ij} A^i r^j)$$

$$\vec v^2 = \vec v \cdot \vec v = \dot{\vec r} \cdot \dot{\vec r} = g_{ij} \dot r^i \dot r^j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial r^k} = 0$$

Asumimos:

$g_{ij} = g_{ij}(\vec r)$

$\rightarrow \boxed{\dfrac{\partial \dot r^i}{\partial \dot r^k} = \delta^i{}_k}$

· $$\frac{\partial L}{\partial \dot r^k} = \frac{1}{2} m g_{ij} \delta^i{}_k \dot r^j + \frac{1}{2} m g_{ij} \dot r^i \delta^j{}_k + q g_{ij} A^i \delta^i{}_k$$

$$= \frac{1}{2} m g_{kj} \dot r^j + \frac{1}{2} m g_{jk} \dot r^j + q g_{jk} A^j$$

$$= m g_{kj} \dot r^j + q g_{jk} A^j$$

· $$\frac{d}{dt}(\%) = m \frac{dg_{kj}}{dt} \dot r^j + m g_{kj} \ddot r^j + q \frac{dg_{ik}}{dt} A^i + q g_{ik} \frac{dA^i}{dt}$$

$$= m \frac{\partial g_{ki}}{\partial r^l} \dot r^l \dot r^j + m g_{kj} \ddot r^j + q \frac{\partial g_{ik}}{\partial r^l} \dot r^l A^i$$

Si elijo coord. cartesianas, elijo g_{ij} como la delta. ←

· $$\frac{\partial L}{\partial r^l} = \frac{1}{2} m \cancelto{0}{\frac{\partial g_{ij}}{\partial r^l}} \dot r^i \dot r^j - q \frac{\partial \phi}{\partial r^l} + q \cancelto{0}{\frac{\partial g_{ij}}{\partial r^k}} A^i \dot r^j$$ → ϕ y g_{ij} dependen de r.

E-L

$$m g_{kj} \ddot r^j + q g_{ik}\left(\frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial A^i}{\partial r^l} \dot r^l\right) + q \frac{\partial \phi}{\partial r^k} - q g_{ij} \frac{\partial A^i}{\partial r^k} \dot r^j = 0.$$

$g_{kj} = \delta_{kj}$ ←

$$m \delta_{kj} \ddot r^j = -q \delta_{ik}\left(\frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial A^i}{\partial r^l} \dot r^l\right) - q \frac{\partial \phi}{\partial r^k} + q \delta_{ij} \frac{\partial A^i}{\partial r^k} \dot r^j$$

$$m \ddot r_k = -q\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial r^l} \dot r^l\right) - \frac{\partial \phi}{\partial r^k} q - q \frac{\partial A_j}{\partial r^k} \dot r^j = 0.$$

$$m \ddot r_k = q \underbrace{\left(-\frac{\partial \phi}{\partial r^k} - \frac{\partial A_k}{\partial t}\right)}_{\vec E} - q\Big(\underbrace{\frac{\partial A_k}{\partial r^l} \cdot \dot r^l}_{\frac{\partial A_k}{\partial r^j} \dot r^j} - \partial_k A_j \dot r^j\Big)$$

$$- q\left(\frac{\partial A_k}{\partial r^j} - \partial_k A_j\right) r^j$$

Prod. cruz.

$$(\vec{\nabla} \times \vec{f})_x = \partial_z f_y - \partial_y f_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon^i{}_{jk} A^j B^k = C^i$$

$$\varepsilon_{mjk} A^j B^k = C_m$$

- $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , \text{ permutações cíclicas } ijk \to (1,2,3),\ (3,1,2),\ (2,3,1) \\ -1 & , \text{ combinações antisimétricas } (3,2,1) \dots \\ 0 & \sim \end{cases}$

Prop: $\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon^{imn} = \delta^m{}_j \delta^n{}_k - \delta^n{}_j \delta^m{}_k$

$$\varepsilon_{ilm}\, \varepsilon^{ijk}\, \partial_j A_k = (\delta^j{}_l \delta^k{}_m - \delta^k{}_l \delta^j{}_m)\, \partial_j A_k$$

$$= \partial_l A_m - \partial_m A_l$$

- $q \dot{r}^j (\partial_k A_j - \partial_j A_k) = q \dot{r}^j \varepsilon_{ikj} \underline{\varepsilon^{ilm} \partial_l A_m}.$

$$= q \dot{r}^j \varepsilon_{ikj} \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A})^i}_{B^i}$$

$$= q\, \varepsilon_{ikj} B^i \dot{r}^j \qquad * \ \varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{jik} = \varepsilon_{kji}$$

$$= q\, \varepsilon_{kji}\, \dot{r}^j B^i = q (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \ //$$

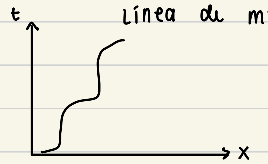
* $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

↳ solo algunas ecs. salen de aquí.

· $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ $\qquad \mu = 0, \dots, 3.$

Línea de mundo.



p2 Ec. geodésica.

Extremar el tiempo propio:

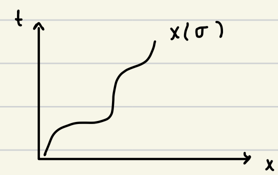
$$\boxed{d\tau^2 = -ds^2}$$

$$d\tau = \sqrt{-ds^2}$$

(1) $$T = \int d\tau = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} d\sigma^2}$$

$$= \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}}\, d\sigma$$

$$= \int L[x', x, \sigma]\, d\sigma. \quad (2)$$



$\sigma = 0$ en A

$\sigma = 1$ en B.

$\rightarrow L = \frac{d\tau}{d\sigma}$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\delta\nu} \frac{dx^\delta}{d\tau} \frac{dx^\nu}{\partial\tau} = 0.$$

$$\int d\tau = \int \frac{d\tau}{d\sigma} d\sigma = \int d\sigma\, L.$$

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \tau} \underbrace{\frac{d\tau}{d\sigma}}_{L.}$$

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 7

Fecha: 6 de mayo del 2024.

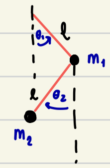
P1. Obtenga los modos normales de vibración para el péndulo doble, asumiendo largos iguales ℓ y distintas masas m_1 y m_2, respectivamente. Estudie qué ocurre en los límites $m_1 \gg m_2$ y $m_2 \gg m_1$.

P2. Una partícula, en tres dimensiones, está sometida a un potencial isotrópico tipo oscilador armónico y posee frecuencia natural ω_0. Asuma que la partícula tiene carga y se ve afectada por un campo electromagnético de la forma $\mathbf{E} = E\hat{x}$, $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Encuentre las frecuencias de vibración. Discuta sus resultados para los límites de campos débil y fuerte.

Aux. 7

P1

$g \downarrow$



* un sist. es integrable si tengo la misma cant. de cant. conservadas y coordenadas generalizadas.

→ problema de 3 cuerpos no es integrable.

· $M \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Ansatz: $Ae^{i\omega t}$

$$|\underbrace{\mathbb{V}}_{\text{potencial}} - \omega_k^2 \underbrace{\mathbb{T}}_{\text{E cinética.}}| = 0$$

* ω son <u>no</u> degenerados.

$$(\mathbb{V} - \omega_k^2 \mathbb{T}) \cdot \vec{a}_k = 0$$

· $\vec{r}_1 = \ell(\sin\theta_1, \cos\theta_1)$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \ell(-\sin\theta_2, \cos\theta_2)$

· $\vec{v}_1 = \ell\dot{\theta}_1(\cos\theta_1, -\sin\theta_1)$

$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \ell(-\cos\theta_2, -\sin\theta_2)\dot{\theta}_2$

$= \ell\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 - \dot{\theta}_2\cos\theta_2, -\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - \sin\theta_2\dot{\theta}_2)$

$K = \frac{1}{2}m_1\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2).$

$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell^2(\dot{\theta}_2^2 - \underbrace{2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1+\theta_2)}))$

$\rightarrow 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\left[1 + \frac{(\theta_1+\theta_2)^2}{2} + \cancel{O((\theta_1+\theta_2)^4)}^{\,0}\right]$

$\approx \frac{1}{2}(m_1+m_2)\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell^2\dot{\theta}_2^2 - m_2\ell^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$

$\mathbb{T} = \cancel{\ell^2}\begin{pmatrix} m_1+m_2 & -m_2 \\ -m_2 & m_2 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $K = (\dot{\theta}_1 \;\; \dot{\theta}_2)\mathbb{T}\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$

$U = -m_1\vec{g}\cdot\vec{r}_1 - m_2\vec{g}\cdot\vec{r}_2$ $K = \dot{\vec{q}}^T\,\mathbb{T}\,\dot{\vec{q}}$

$= -m_1 g\ell\cos\theta_1 - m_2 g\ell(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$ $U = \vec{q}^T\,\mathbb{V}\,\vec{q}$

$$U \approx \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,g\ell\,\theta_1^2 + m_2 g\ell\theta_2^2$$

$$\mathbb{V} = g\ell \begin{pmatrix} m_1+m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

despejando ℓ^2 ¡

$$= \cancel{\ell^2}\,\omega_0^2 \begin{pmatrix} m_1+m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (m_1+m_2)(\omega_0^2-\omega^2) & m_2\omega^2 \\ m_2\omega^2 & m_2(\omega_0^2-\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$(m_1+m_2)\,m_2\,(\omega_0^2-\omega^2)^2 - m_2^2\,\omega^4 = 0$$

$$m_2\left((m_1+m_2)(\omega_0^2-\omega^2)^2 - m_2\omega^4\right) = 0$$

$$(m_1+m_2)\,\omega_0^4 - 2(m_1+m_2)\,\omega_0^2\,\omega^2 + (m_1+\cancel{m_2})\,\omega^4 - \cancel{m_2}\,\omega^4 = 0$$

$$\cancel{m_1}\,\omega^4 - 2\underbrace{(m_1+m_2)}_{m_1}\omega_0^2\,\omega^2 + \underbrace{(m_1+m_2)}_{m_1}\,\omega_0^4 = 0$$

$$\omega_\pm^2 = \frac{(m_1+m_2)}{m_1}\,\omega_0^2 \pm \frac{1}{\cancel{2}m_1}\sqrt{\cancel{4}(m_1+m_2)^2\omega_0^4 - \cancel{4}m_1(m_1+m_2)\,\omega_0^4}$$

$$= \quad '' \quad \pm \frac{\omega_0^2}{m_1}\sqrt{\cancel{m_1^2} + 2m_1m_2 + m_2^2 - \cancel{m_1^2} - \cancel{m_1m_2}}$$

$$= \quad '' \quad \sqrt{(m_1+m_2)\,m_2}$$

$$(m_1+m_2)\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}$$

$$\boxed{\omega_\pm^2 = \frac{m_1+m_2}{m_1}\,\omega_0^2\left(1 \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right)}$$

$$= \omega_0^2\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \pm \sqrt{\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1^2}}\right)$$

$$\begin{pmatrix} (m_1+m_2)(\omega_0^2-\omega_k^2) & +m_2\omega_k^2 \\ m_2\omega_k^2 & m_2(\omega_0^2-\omega_k^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_\pm \\ a^2_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(m_1+m_2)(\omega_0^2-\omega_\pm^2)\, a^1_\pm + m_2\omega_\pm^2\, a^2_\pm = 0.$$

$$m_2\omega_\pm^2\, a^2_\pm = \frac{(m_1+m_2)}{m_2}(\omega_\pm^2-\omega_0^2)$$

$$= \frac{(m_1+m_2)}{m_2}\,\omega_0^2\left(\frac{m_2}{m_1} \pm \sqrt{\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1^2}}\right)$$

$$= \pm\,\omega_0^2\,\frac{m_1+m_2}{m_2}\sqrt{\frac{(m_2+m_1)m_2}{m_1^2}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right)$$

$$\frac{a^2_\pm}{a^1_\pm} = \pm\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}$$

$$\vec{a}^T\,\mathbb{T}\,\vec{a} \doteq 1 \implies 1 = a^2_\pm\left(m_1+m_2+m_2\frac{m_1+m_2}{m_2}\right) = 2(m_1+m_2)\,a^2_\pm$$

de ae
normalizaø.

$$\vec{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}},\ \frac{\pm 1}{\sqrt{m_2}}\right)$$

$$\cdot\ \theta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2(m_1+m_2)}}\Big(C_+\cos(\omega_+t+\phi_+) + C_-\cos(\omega_-t+\phi_-)\Big)$$

$$\theta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2m_2}}\Big(C_+\cos(\omega_+t+\phi_+) - C_-\cos(\omega_-t+\phi_-)\Big)$$

$$\rightarrow\ \theta_1 = A_1\cos(\omega_+t+\phi_+) + A_2\cos(\omega_-t+\phi_-)$$

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \underbrace{\vec{A}}_{\begin{pmatrix} C_+\cdot\frac{1}{\sqrt{2(m_1+m_2)}} \\ C_-\,\frac{\pm 1}{\sqrt{2m_2}}\end{pmatrix}} e^{i\omega_+t+i\omega_-t}$$

$\theta_1(0) = \Theta_0 \quad , \quad 0 = \dot{\theta}_1(0)$
$\theta_2(0) = 0 \quad , \quad 0 = \dot{\theta}_2(0)$.

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2m_2}} \left(C_+ \cos\phi_+ - C_- \cos\phi_- \right)$$

$$\Theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2(m_1+m_2)}} \left(C_+ \cos\phi_+ + C_- \cos\phi_- \right)$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2(m_1+m_2)}} \left(C_+ \omega_+ \sin\phi_+ + C_- \omega_- \sin\phi_- \right)$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2m_2}} \left(C_+ \omega_+ \sin\phi_+ + - C_- \omega_- \sin\phi_- \right)$$

$\phi_+ = \phi_- = 0$.

$C_+ = C_- = 0$

$$\Theta_0 \sqrt{2(m_1+m_2)} = 2C \quad \Rightarrow \quad C = \Theta_0 \sqrt{\frac{m_1+m_2}{2}}$$

$$\theta_1(t) = \frac{\Theta_0}{2} \left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t) \right)$$

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \quad , \quad \Delta\omega = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2}$$

$$\theta_2(t) = \frac{\Theta_0}{2} \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}} \left(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t) \right)$$

$$\omega_\pm = \bar{\omega} \pm \Delta\omega$$

$$* \; \cos(\omega_+ t) \pm \cos(\omega_- t) = (1 \pm 1) \cos(\bar{\omega} t) \cos(\Delta\omega t) - (1 \mp 1) \sin(\bar{\omega} t) \sin(\Delta\omega t).$$

$$\theta_1(t) = \Theta_0 \cos(\bar{\omega} t) \cos(\Delta\omega t)$$
$$\theta_2(t) = -\Theta_0 \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}} \sin(\bar{\omega} t) \sin(\Delta\omega t)$$

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 8

Fecha: 13 de Mayo del 2024.

P1. Sean dos masas m_1 y m_2 que interactúan entre ellas mediante una fuerza central, esto se conoce como el problema de dos cuerpos. Asumiendo que no hay fuerzas externas,

a) ¿Cuántos grados de libertad posee el sistema?

b) Obtenga el lagrangiano del sistema.

c) Utilizando las coordenadas de centro de masa, reduzca el sistema a un problema de una partícula de masa m moviéndose en un potencial $U(r)$.

d) Obtenga las cantidades conservadas.

e) Tomando un potencial gravitatorio, i.e., $U = \alpha/r^n$ con $\alpha < 0$ y $n = 1$, resuelva analíticamente el problema.

f) ¿Qué ocurre si se perturba el potencial de Kepler con un término β/r^3?

g) Analice qué ocurre en el problema de tres cuerpos, ¿es integrable?

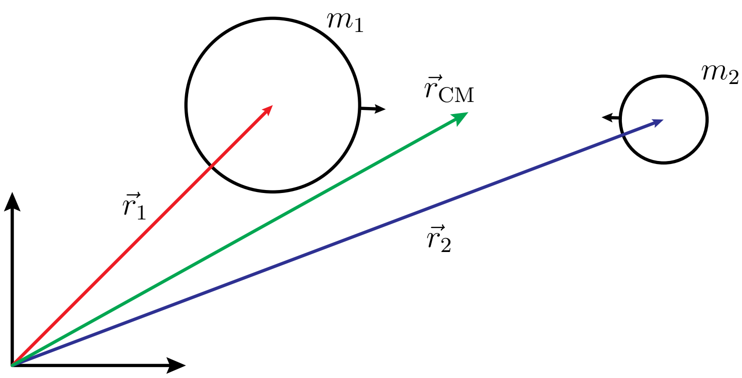


Figura 1: Problema de dos cuerpos.

Problema de 2 cuerpos

· Qualifying exam → Pitch Physics

↳ prob. oscilaciones.

P1

a) 6 coord. generalizadas

7 cant. conservadas ⇒ integrable

b) $L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} - U(\underbrace{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}_{\vec{F}\text{ central}})$

c) $\vec{R}_{CM} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\vec{R}_{CM} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}}_{CM}^{2} - 2 \cancel{\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{R}}_{CM} \cdot \dot{\vec{r}}} + \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^{\,2} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}}_{CM}^{2} + 2 \cancel{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{R}}_{CM}} \dot{\vec{r}} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^{\,2} \right) - U(r).$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{(m_1 + m_2)}_{M} \dot{\vec{R}}_{CM}^{2} + \frac{1}{2} m_1 m_2 \dot{\vec{r}}^{\,2} \left(\frac{m_2 + m_1}{(m_1 + m_2)^2} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \dot{\vec{r}}^{\,2}$$

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

masa reducida

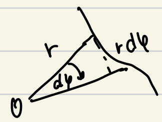
$$= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^{2}}_{cte} + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r)$$

$\boxed{\dot{\vec{R}}_{CM} = cte.}$ $\Rightarrow L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r)$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu \left(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2 \right) - U(r)$$

conservaø momento angular ← $\boxed{\mu r^2 \dot\varphi = \ell}$



2 Ley de Kepler ← $A_{triangulo} \approx \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2} r^2 d\varphi = df$

f: velocidad areolar

$$\mu = 2\mu \dot f$$

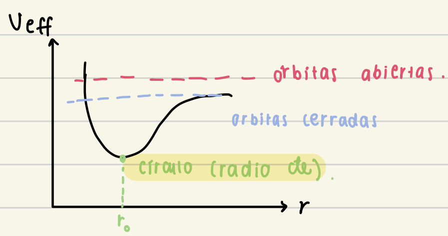
$$E = \frac{1}{2}\mu \dot r^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \left(\frac{\ell}{\mu r^2} \right)^2 - U(r)$$

$$= \frac{1}{2}\mu \dot r^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu r^2} - U(r)}_{U_{eff}}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot r^2 + U_{eff}.$$

$\cdot\ U(r) = \frac{\alpha}{r}$, $\alpha < 0$

Análisis cualitativo.



$$\dot r = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U_{eff}\right)}$$

problema reducido a cuadratura ←

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U_{eff}\right)}} = dt$$

$$\int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U_{eff}\right)}} = \frac{\mu}{\ell}\left(\varphi - \varphi_0\right)$$

$$* \quad \frac{\mu r^2 d\varphi}{\ell} = dt$$

CV

$u = \frac{1}{r}$

$du = \frac{-dr}{r^2}$

$$\int \frac{l\,dr}{r^2\sqrt{2\mu(E-U_{ef})}} = \varphi - \varphi_0 .$$

$$\int \frac{l\,dr}{r^2\sqrt{2\mu\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r}\right)}} = \varphi - \varphi_0$$

$$\int \frac{l\,du}{\sqrt{2\mu\left(E - \frac{l^2}{2\mu}u^2 + \alpha u\right)}} = \varphi - \varphi_0$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{E - y^2 + \frac{\alpha\sqrt{2\mu}}{l}y}} = \varphi - \varphi_0$$

$* y = \frac{lu}{\sqrt{2\mu}} \longrightarrow dy = \frac{l\,du}{\sqrt{2\mu}}$

$$\int \frac{dy}{\left[\underbrace{E + \frac{\alpha^2\mu}{2l^2}}_{\beta^2} - \left(y - \frac{\alpha\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\,l}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$w = y - \frac{\alpha\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\,l}$

$$= \int \frac{dw}{\sqrt{\beta^2 - w^2}}$$

$w = \beta\cos\phi$

$$= \int \frac{\beta\,d\phi\,\sin\phi}{\sqrt{\beta^2 - \beta^2\cos^2\phi}} = \int \frac{d\phi\,\cancel{\sin\phi}}{\cancel{\sin\phi}} = \int d\phi = \phi$$

$$\frac{\beta\sqrt{2\mu}}{l}\cos(\varphi + \varphi_0) + \frac{\mu\alpha}{l^2} = \frac{1}{r}$$

$$\boxed{\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos(\varphi + \varphi_0)}$$

$p = \frac{l^2}{\mu\alpha}$ y $\varepsilon = \frac{l\sqrt{2\mu}}{\mu\alpha}\sqrt{E + \frac{\alpha^2\mu}{2l^2}}$

$\varepsilon = 0 \rightarrow$ circunf.

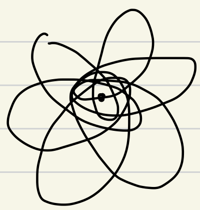
$\varepsilon \in (0,1)$ elipses

$\varepsilon = 1$ parábola

$\varepsilon > 1$ hipérbola.

* Mercurio no tiene trayectorias cerradas

precesión $\rightarrow$



$U(r) = \frac{c}{r}, \frac{c}{r^2}$ oscilador espacial.

órbitas cerradas

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^3}$$

$$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{\cdots\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^3}\right)}}$$

Factorizar en términos de las raíces.

$$\frac{1}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}}$$

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} \longrightarrow r(t) \rightarrow r(\varphi)$$

$$= \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{3\beta}{r^4}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\varphi}\right)\frac{l}{\mu r^2}$$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{u\alpha}{l^2} - \varepsilon \gamma u^2.$$

$$u(\varphi) = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots$$

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 = \frac{\mu\alpha}{l^2} \quad , \quad u_0 = \frac{\mu\alpha}{l^2}(1 + e\cos\varphi)$$

$$\frac{d^2u_1}{d\varphi^2} + u_1 = -\tilde{\gamma}\,(1 + 2e\cos\varphi + e^2\cos^2\varphi)$$

$$u(\varphi) = \frac{\mu\alpha}{l^2}(1 + e\cos\varphi) - \frac{3\mu^3\beta\alpha^2}{l^6}\left(e\varphi\sin\varphi + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos(2\varphi)\,e^2 + 1\right)\right)$$

$$\Delta\varphi \approx 6\frac{\pi G^2M^2}{l^2}$$

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 9

Fecha: 27 de mayo del 2024.

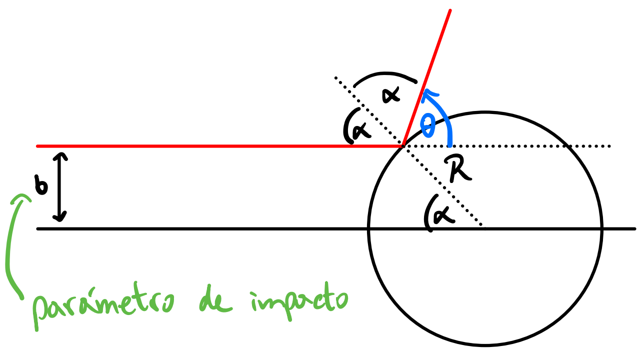
P1. Calcule la sección eficaz diferencial y total para el scattering producido por una esfera dura.

P2. Examine el scattering producido por una fuerza central repulsiva $f = kr^{-3}$. Muestre que la sección eficaz diferencial está dada por

$$\sigma(\Theta)d\Theta = \frac{k}{2E}\frac{(1-x)dx}{x^2(2-x)^2\sin(\pi x)} \tag{1}$$

Auxiliar 9 Mecánica Clásica

P_1 Esfera dura



$$U(r) = \begin{cases} 0 & r > R \\ \infty & r < R \end{cases}$$

$$\boxed{b = R\sin\alpha} = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \boxed{R\cos\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \theta = 2\arccos\left(\frac{b}{R}\right)$$

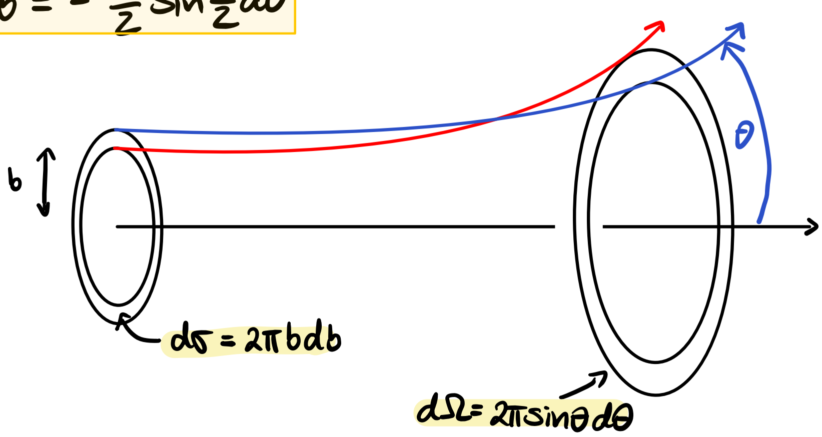
Si $b > R$, la expresión se indefine (lo cual tiene sentido ya que no hay scattering)

Si estoy interesado en partículas scattereadas en un rango infinitesimal angular $d\theta$, qué rango de parámetros de impacto, db, es necesario para tal scattering?

$$b + db = R\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{d\theta}{2}\right) \approx R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = b - \frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{db = -\frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta}$$

En dibujo:



$$d\sigma = 2\pi b\,db \Rightarrow \int d\sigma = \int 2\pi b\left(-\frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta = -2\pi\int_0^{2\pi} R^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = -\pi R^2$$

Ahora usando la fórmula de sección eficaz

$b \qquad \frac{db}{d\theta} = \frac{db}{d\chi} \qquad b \qquad$ módulo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\sin\theta}\left|\frac{ds}{d\theta}\right| = \frac{R\cos\frac{\theta}{2}\left|\left(-\frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\sin\theta} = \frac{R^2}{4}$$

$\sin\theta \rightarrow 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow \sigma_T = \int \underbrace{\frac{R^2}{4}}_{\frac{d\sigma}{d\Omega}}d\Omega = \int \frac{R^2}{4}\underbrace{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{\sin\theta\, d\theta\cdot 2\pi} = R^2\pi$$

P_2

Fuerza $f(r) = \frac{k}{r^3}$

$$V(r) = -\int_\infty^r \frac{k}{r'^3}dr' = \frac{k}{2r^3}$$

esta fórmula se obtiene de esta expresión

Conservación de la energía $\Rightarrow$ $dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\dfrac{dr}{\sqrt{E - \frac{\ell^2}{2mr^2} - U}}$

Para calcular el ángulo de scattering dado el parámetro de impacto usamos la fórmula del Goldstein

a veces denotado por s o b

$$\Theta(s) = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty}\frac{s\,dr}{r\sqrt{r^2\left(1 - \frac{V(r)}{E}\right) - s^2}}$$

Los pasos para llegar a esto es similar a lo que hicimos en el aux. pasado + usar la def. $\ell = m v_0 s = s\sqrt{2mE}$

$$= \pi - 2\int_{r_m}^{\infty}\frac{s\,dr}{r\sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{2E} + s^2\right)}}$$

Para calcular r_m usamos conservación de energía en ∞

$$U_{eff} = \frac{k}{2r_{min}^2} + \frac{M^2}{2mr_m^2} \qquad M^2 \to m^2\rho^2 v_\infty^2 = m^{\cancel{2}}\rho^2 E \cdot 2/\cancel{m} = 2m\rho^2 E$$

$$E = E(r\to\infty) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \underbrace{\frac{k}{2r_m^2} + \frac{1}{2}mr_m^2\dot{\theta}^2}_{} = E(r=r_m)$$

$$\frac{\ell^2}{2mr_m^2} = \frac{s^2 2mE}{2mr_m^2} = \frac{s^2E}{r_m^2}$$

$$\cancel{E} = \frac{\cancel{E}}{r_m^2}\left(\frac{k}{2E} + s^2\right) \Rightarrow \boxed{r_m^2 = \frac{k}{2E} + s^2}$$

$$\Rightarrow \Theta(s) = \pi - 2s\int_{r_m}^{\infty}\frac{dr/r}{\sqrt{r^2 - r_m^2}} = \pi - 2s\int_{r_m}^{\infty}\frac{dr/r^2}{\sqrt{1-(r_m/r)^2}}$$

$$= \pi - \frac{2s}{r_m}\arccos\left(\frac{r_m}{r}\right)\Big|_{r_m}^{\infty} = \pi\left(1 - \frac{s}{\sqrt{\frac{k}{2E}+s^2}}\right) \quad (\star)$$

$$\boxed{x = \frac{\theta}{\pi}} \Rightarrow x = 1 - \frac{s}{\sqrt{\frac{k}{2E}+s^2}} \Rightarrow (1-x)^2\left(\frac{k}{2E}+s^2\right) = s^2$$

$$\Rightarrow s^2\left(1-(1-x)^2\right) = \frac{k}{2E}(1-x)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{k}{2E}}\frac{1-x}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$$

La sección eficaz (diferencial) está dada por:

$$\sigma(\theta)d\theta = \frac{s}{\sin\theta}\left|\frac{ds}{d\theta}\right|d\theta$$

es un poco más fácil calcular $\frac{d\theta}{ds}$

$$(\star) \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = -\pi\frac{\sqrt{\frac{k}{2E}+s^2} - \frac{1}{2}s\frac{2s}{\sqrt{k/2E+s^2}}}{\frac{k}{2E}+s^2} = -\frac{\pi k}{2E}\frac{1}{(k/2E+s^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \underbrace{-\frac{2E}{\pi k}\left(\frac{k}{2E}+s^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta)\,d\theta = \frac{s}{\sin(\pi x)} \frac{2E}{\pi k}\left(\frac{k}{2E} + s^2\right)^{3/2} d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{k}{2E}} \frac{1-x}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \frac{2E}{k}\left(\frac{k}{2E}\right)^{3/2}\left(1 + \frac{(1-x)^2}{1-(1-x)^2}\right)^{3/2} \frac{dx}{\sin(\pi x)}$$

$$= \frac{k}{2E} \frac{1-x}{x^2(2-x)^2} \frac{dx}{\sin(\pi x)}$$

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 10

Fecha: 3 de junio del 2024.

P1. Una barra de longitud R está unida a una manivela que gira la barra con velocidad angular constante Ω, como se muestra en el dibujo de la izquierda. Un disco macizo de grosor despreciable está unido al extremo de la barra de forma que pueda oscilar libremente en torno al eje sobre el que gira la barra. El disco tiene un radio a y una masa m. Una vista lateral de la barra y el disco, mirando a lo largo del eje de rotación hacia la manivela, se muestra en el dibujo de la derecha.

a) Deduzca el momento de inercia relevante, I, del disco alrededor de su centro de masa.

b) Obtenga el Lagrangiano del disco en términos de la coordenada angular ϕ mostrada en el dibujo de la derecha.

c) Encuentre la ecuación del movimiento del disco en términos de la coordenada angular θ mostrada en el dibujo de la derecha.

d) Suponiendo que $g \ll R\Omega$ y $a \ll R$, demuestre que la ecuación de movimiento para θ predice pequeñas oscilaciones alrededor de $\theta = 0$.

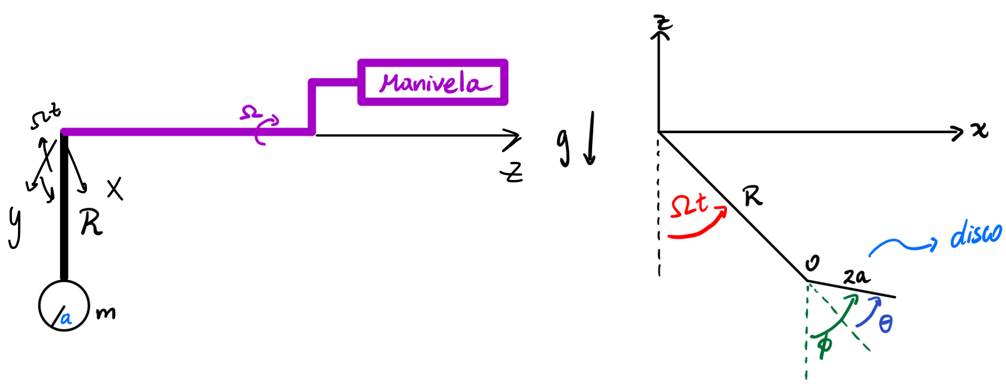


Figura 1: Imagen P1.

P2. Un balón de basketball rueda sin resbalar al rededor de un aro de radio R. El balón rota de tal manera que el punto de contacto traza una circunferencia en la pelota (*i.e.* una circunferencia de perímetro máximo $2\pi r$), y el centro de masas rota con frecuencia angular Ω, en sentido anti-horario visto desde arriba. El plano asociado a la circunferencia que traza el punto de contacto está a un ángulo θ de la horizontal. La pelota tiene momento de inercia $I = \frac{2}{3}mr^2$. Considere gravedad en el problema.

a) Calcule el torque del balón con respecto a su centro de masas dado por la gravedad y las fuerzas de contacto.

b) Determine el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ que describe la rotación del balón relativa a un sistema inercial. Exprese su respuesta en términos de Ω, R, r y vectores unitarios. *Hint*: Considere el sistema de referencia en donde el centro de masas está en reposo, y luego obtenga el resultado en el sistema pedido.

c) Encuentre Ω en términos de g, R, r y θ.

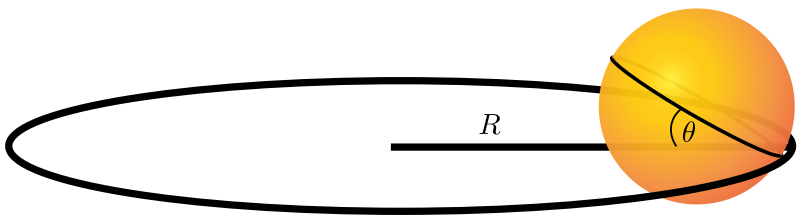


Figura 2: Balón de basketball.

P3. Considere un disco de anchura nula y de densidad constante, con masa m y radio R como se muestra acontinuación

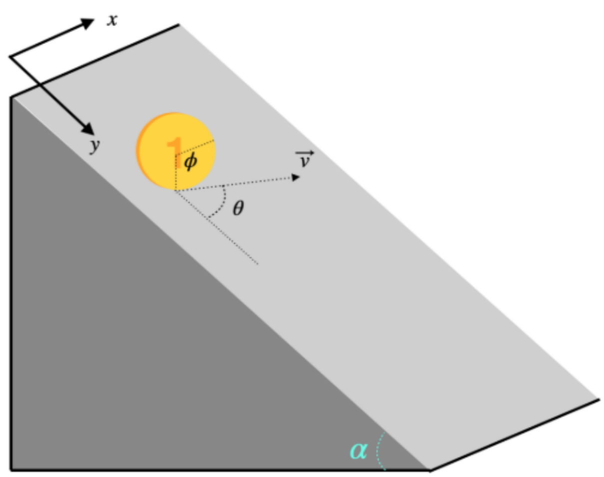


Figura 3: P3.

Usaremos un ángulo ϕ para medir rotaciones alrededor del eje del disco, y θ para medir rotaciones alrededor de un eje perpendicular a la rampa y pasando por el punto de contacto (como se muestra en la figura). Definimos θ tal que en $\theta = 0$ la velocidad instantánea está en dirección $+y$. Llamamos al ángulo del plano α. Asuma que el disco está siempre perpendicular a la rampa y que rueda sin resbalar.

a) Calcule los componentes del tensor de inercia no nulos.

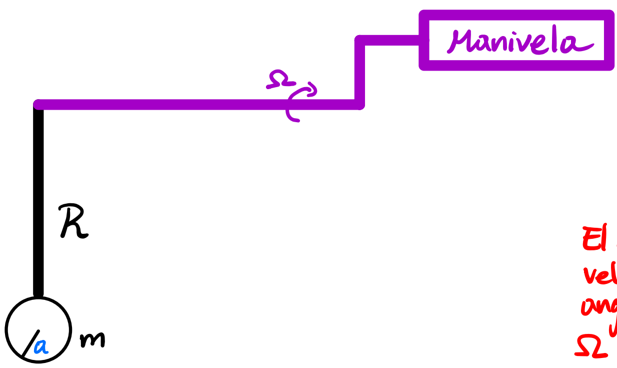
b) Escriba el Lagrangiano del sistema.

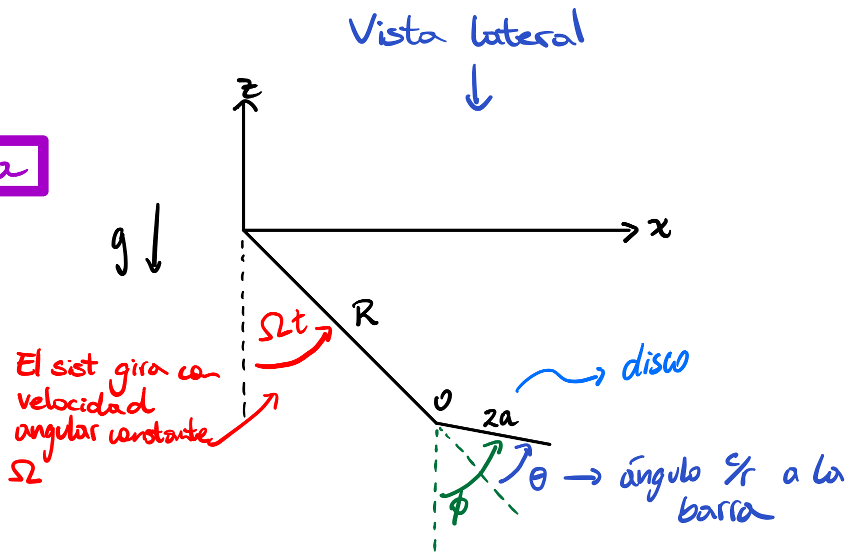
c) Encuentre las ecuaciones de movimiento.

d) Encuentre soluciones explícitas para x e y. Considere condiciones iniciales nulas, excepto para $\omega \equiv d\theta/dt|_{t=0} \neq 0$.

Auxiliar 10: Mecánica Clásica

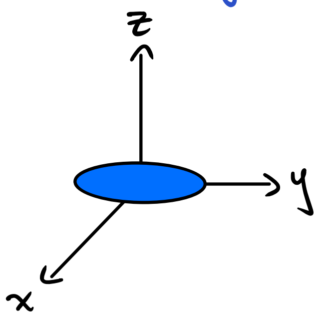
P1





(a) Obtengamos el momento de inercia I relevante del disco c/r a su CM

En este caso, corresponde al eje x (o eje y por simetría) (dado como gira el sist)



Supondremos que este disco es de densidad superficial uniforme σ (como no es dato, el resultado debería ser indep. de σ)

$$\Rightarrow m = \underbrace{\pi a^2}_{\text{área}}\sigma$$

disco de anchura nula

$$I = I_{xx} = \int dA\,\sigma(y^2 + \cancel{z^2}^{\,0}) = \int dA\,\sigma y^2$$

$$I = I_{yy} = \int dA\,\sigma(x^2 + \cancel{z^2}^{\,0}) = \int dA\,\sigma x^2$$

estas integrales, individualmente son difíciles

Truquito:

en polares

$$\Rightarrow 2I = I_{xx} + I_{yy} = \int dA\,\sigma(x^2+y^2) = \int r\,dr\,d\phi\,\sigma r^2 = 2\pi\sigma\int_0^a r^3 dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\sigma a^4 = \frac{\pi}{2}\frac{m}{\pi a^2}a^4 \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{4}ma^2}$$

(b) En nuestro dibujo podemos notar que $\phi = \theta + \Omega t$

Obtengamos el Lagrangiano de 2 formas.

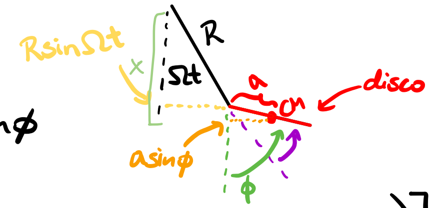
I) Escribimos $K = K_{CM} + K_{rot}$

K_{CM}: centro de masa

K_{rot}: rotacional

Utilizaremos las coordenadas del centro de masas del disco

Describimos el CM (del disco)



$$x = R\sin\Omega t + a\sin\phi, \qquad z = -R\cos\Omega t - a\cos\phi$$

$$\dot{x} = R\Omega\cos\Omega t + a\dot\phi\cos\phi, \qquad \dot z = R\Omega\sin\Omega t + a\dot\phi\sin\phi$$

$$K_{CM} = \frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot z^2) = \frac{1}{2}m\left[R^2\Omega^2 + a^2\dot\phi^2 + 2aR\Omega\dot\phi\left(\cos\Omega t\cos\phi + \sin\Omega t\sin\phi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[R^2\Omega^2 + a^2\dot\phi^2 + 2aR\Omega\dot\phi\cos(\phi-\Omega t)\right]$$

$$\frac{1}{2}\vec\Omega^t I\vec\Omega = \frac{1}{2}I\Omega^2 = \frac{1}{2}I\dot\phi^2$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\dot\phi^2 = \frac{1}{8}ma^2\dot\phi^2$$

rotación del CM c/r a O.

$$U = mgz = mg(-R\cos\Omega t - a\cos\phi)$$

$$\boxed{L = K - U = \frac{5}{8}ma^2\dot\phi^2 + maR\Omega\dot\phi\cos(\phi-\Omega t) + mga\cos\phi + mgR\cos\Omega t}$$

II) Sea $\vec r_i = \vec r_0 + \vec r_i{}' \Rightarrow \dot{\vec r}_i = \dot{\vec r}_0 + \dot{\vec r}_i{}'$

posición del punto de unión barra-disco (O)

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i\dot{\vec r}_i^{\,2} = \frac{1}{2}m\dot{\vec r}_0^{\,2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\vec r}_i'^{\,2}}_{\equiv \frac{1}{2}I'\dot\phi^2} + \underbrace{\left(\sum_i m_i\dot{\vec r}_i{}'\right)}_{\text{momentum del CM relativo a } O}\cdot\dot{\vec r}_0$$

I': momento de inercia c/r a O

$$\vec r_0 = R\sin\Omega t\,\hat x - R\cos\Omega t\,\hat z \Rightarrow \dot{\vec r}_0 = R\Omega\cos\Omega t\,\hat x + R\Omega\sin\Omega t\,\hat z$$

$$\sum_i m_i\vec r_i{}' = m(a\sin\phi\,\hat x - a\cos\phi\,\hat z)$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i\dot{\vec r}_i{}' = m(a\dot\phi\cos\phi\,\hat x + a\dot\phi\sin\phi\,\hat z)$$

$$\left(\sum_i m_i\dot{\vec r}_i\right)\cdot\dot{\vec r}_0 = ma\dot\phi\Omega\underbrace{\left(\cos\Omega t\cos\phi + \sin\Omega t\sin\phi\right)}_{\cos(\phi-\Omega t)}$$

Ahora veamos el momento de inercia:

Usando teorema de los ejes paralelos

a) · $dm = \sigma dA \Rightarrow \quad m = \sigma \pi a^2$

Escribimos el momento $I = \int dm \left(|\vec{\rho}_i|^2 \mathbb{I} - \vec{\rho}_i \vec{\rho}_i^{\,t} \right)$

anchura nula.

$$\hookrightarrow I_{xx} = \int \underbrace{\frac{m}{\pi a^2}}_{\sigma} \cdot dA \left(\cancel{x^2} + y^2 + \cancel{z^2} - \cancel{x^2} \right)$$

$$= \int \frac{m}{\pi a^2} \underbrace{dA}_{r\,dr\,d\phi} y^2$$

$$I_{yy} = \int \frac{m}{\pi a^2} dA\, x^2$$

Como es simétrica:

$$2I = I_{xx} + I_{yy} = \int dA \frac{m}{\pi a^2} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2} = \int \frac{m}{\pi a^2} r^2 \cdot r\,dr\,d\phi = \int \frac{m}{\pi a^2} r^3 dr\, d\phi = \frac{2\cancel{\pi} m}{\cancel{\pi} a^2} \int_0^a r^3 dr$$

$$= \frac{2m}{a^2} \cdot \frac{a^4}{4}$$

$$2I = \frac{ma^2}{2}$$

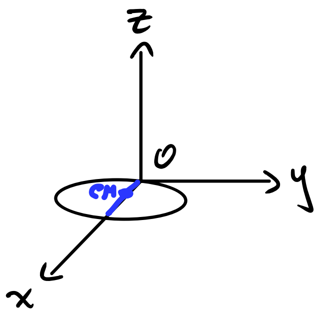
$$\Rightarrow \quad I = \frac{ma^2}{4}$$

b) $\phi = \theta + \Omega t$

· $K = K_{CM} + K_{rot} \rightarrow$ Rotación del CM.

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} m a^2 \cdot \dot{\phi}^2$$

$$I_O = I_{cm} + m(\underbrace{|\vec{R}|^2}_{a^2}\mathbb{1} - \vec{R}\otimes\vec{R}), \qquad \vec{R} = a\hat{x}$$



$$\Rightarrow I_O = \frac{1}{4}ma^2 + ma^2 = \frac{5}{4}ma^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{5}{8}ma^2\dot{\phi}^2$$

$$\therefore K = \frac{5}{8}ma^2\dot{\phi}^2 + maR\Omega\dot{\phi}\cos(\phi - \Omega t) \Rightarrow$$ Lo mismo que antes!

(c) Encontremos las EoM en función de θ. Saquemos las EoM en función de ϕ y luego hacemos el cambio $\phi \to \theta$:

$$L = \frac{5}{8}ma^2\dot{\phi}^2 + maR\Omega\dot{\phi}\cos(\phi - \Omega t) + mga\cos\phi + mgR\cos\Omega t$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}ma^2\ddot{\phi} - maR\Omega(\cancel{\dot{\phi}} - \Omega)\sin(\phi - \Omega t) + \cancel{maR\Omega\dot{\phi}\cos(\phi - \Omega t)} + mga\sin\phi = 0$$

$$\frac{5}{4}\cancel{m}a^2\ddot{\phi} + \cancel{m}aR\Omega^2\sin(\phi - \Omega t) + \cancel{m}ga\sin\phi = 0$$

$* \ \phi = \theta + \Omega t$

$\Rightarrow \theta = \phi - \Omega t$

$\dot{\phi} = \dot{\theta} + \Omega, \quad \ddot{\phi} = \ddot{\theta}$

$$\frac{5}{4}\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin(\theta + \Omega t) + \frac{R\Omega^2}{a}\sin\theta = 0$$

$\hookrightarrow$ EoM en función de θ

(d) Asumiendo $g \ll R\Omega^2$ y $a \ll R$, Usemos pequeñas oscilaciones y veamos si obtenemos un resultado coherente

p.o.: $\sin\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1$

$$\sin(\theta + \Omega t) = \sin\theta\cos\Omega t + \cos\theta\sin\Omega t \approx \theta\cos\Omega t + \sin\Omega t$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\theta\cos\Omega t + \frac{g}{a}\sin\Omega t + \frac{R\Omega^2}{a}\theta = 0$$

$$\frac{5}{4}\ddot{\theta} + \frac{1}{a}(g\underbrace{\cos\Omega t}_{\in[0,1]} + R\Omega^2)\theta = -\frac{g}{a}\sin\Omega t$$

$\searrow \approx R\Omega^2$ ya que $g \ll R\Omega^2$

Solucion estacionaria : $\theta(t) = A\sin\Omega t$

$$\underbrace{\left(-\frac{5}{4}+\frac{R}{a}\right)}_{\approx \frac{R}{a} \text{ ya que } a \ll R}\Omega^2 A\sin\Omega t = -\frac{g}{a}\sin\Omega t$$

$$\Rightarrow A = -\frac{g}{R\Omega^2}$$

$$\therefore \theta(t) = -\frac{g}{R\Omega^2}\sin\Omega t$$

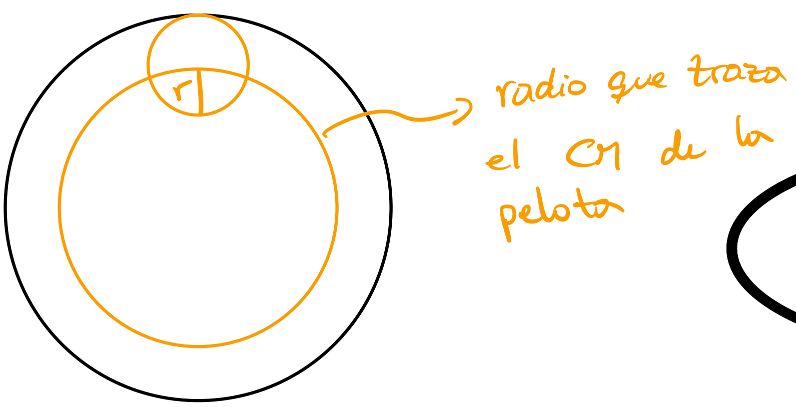
Vemos que $|A| = \frac{g}{R\Omega^2} \ll 1$ → pequeñas oscilaciones!

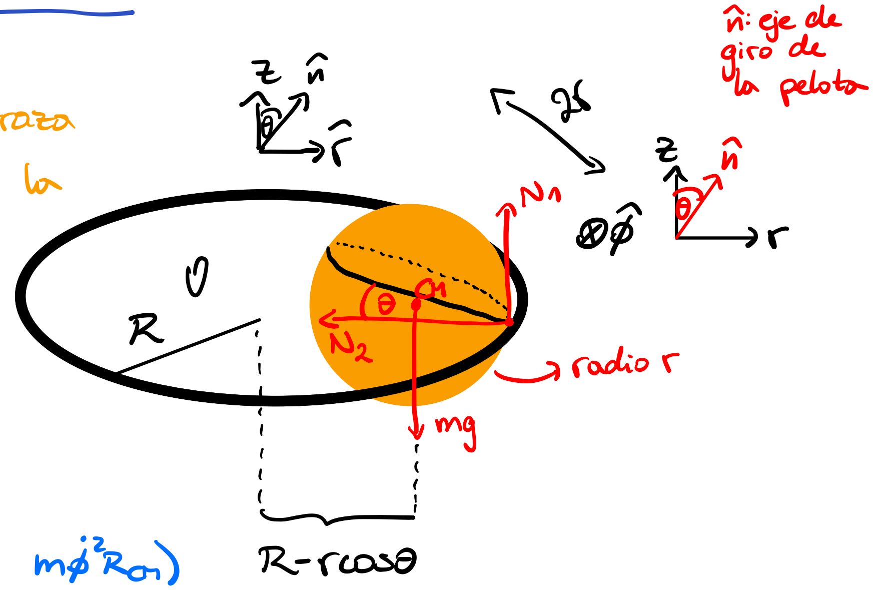
$\Rightarrow$ justifica la aproximación

P_2

(a) Las fuerzas que actuan son la gravedad (actuando en el centro de masas) y la fuerza de contacto que el aro ejerce a la pelota.

Esta fuerza de contacto está formada por una parte vertical (N_1) para compensar la gravedad, y otra horizontal (N_2) para proveer la aceleración centrípeta necesaria de la pelota cuando su centro de masas se mueve al rededor del círculo con frecuencia Ω. Notemos además que el radio que traza el CM es $\underline{R - r\cos\theta}$.





$N_1 = mg$ (no hay otra fuerza)

$N_2 = m\Omega^2(R - r\cos\theta)$ (aceleración $m\dot{\phi}^2 R_{cm}$)

Veamos el torque c/r al CM. La gravedad actúa en este mismo punto, por lo que no ejerce torque. Las fuerzas de contacto N_1 y N_2 si lo hacen.

Dado nuestro sist. de coordenadas:

$$\|\vec{T}\| = N_1 r\cos\theta - N_2 r\sin\theta = mgr\cos\theta - m\Omega^2 r(R - r\cos\theta)\sin\theta$$

(b) En el sist. de ref. en el cual el CM está en reposo, la velocidad angular $\vec{\omega}_s$ del balón está solamente en la dirección $-\hat{n}$

$\Rightarrow \vec{\omega}_s = -\omega_s \hat{n}$ El balón gira en sentido antihorario c/r al aro $\Rightarrow$ debe girar en sí mismo en sentido horario

Mientras el balón rota $\omega_s dt$ en su eje, el punto de contacto con el aro se desplaza $\omega_s dt\, r$ (rueda sin resbalar)

Al mismo tiempo, el punto de contacto recorre una distancia de $\underbrace{\Omega dt R}$, igualando, tenemos que:

debido a que rota con Ω.

$$\omega_s = \frac{R}{r}\Omega$$

$\Rightarrow \vec{\omega}_s = -\frac{R}{r}\Omega\hat{n}$ (en el SR que rota)

Volviendo al SR original, $\vec{\omega} = \underbrace{\Omega\hat{z}}_{\text{giro c/r al aro}} - \underbrace{\frac{R}{r}\Omega\hat{n}}_{\text{giro intrínseco del balón}}$

(c) $I = \frac{2}{3}mr^2 \rightarrow$ inercia de una esfera

* Usaremos que la derivada del momentum angular es igual al torque

Momento angular c/r al CM: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

$\rightarrow$ 0 en $\hat{r}$

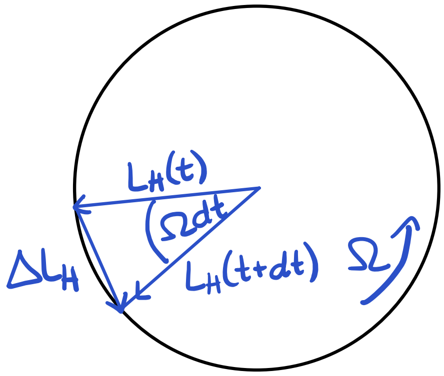
Solo la parte "horizontal" del momento angular debe cambiar mientras el balón gira en el aro. Si no es así, no giraría con Ω (const)

$$\Rightarrow L_H = I\Omega\frac{R}{r}\sin\theta = \frac{2}{3}m\Omega R r\sin\theta$$

$\vec{L}_H$ debe rotar al rededor del eje z con frec. Ω

$\Delta L_H = L_H \Omega \Delta t$ $\leftarrow$ esto lo hacemos para que no aparezca un $\dot{\theta}$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{d\vec{L}_H}{dt}\right| = L_H\Omega = \frac{2}{3}m\Omega^2 R r\sin\theta$$



Pero $\left|\frac{d\vec{L}_H}{dt}\right| = \tau$

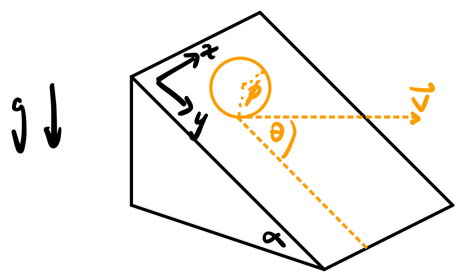
$$\Rightarrow \frac{2}{3}\cancel{m}\Omega^2 R\cancel{r}\sin\theta = \cancel{m}g\cancel{r}\cos\theta - \cancel{m}\Omega^2\cancel{r}(R - r\cos\theta)\sin\theta \quad /\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{2}{3}\Omega^2 R\tan\theta = g - \Omega^2 R\tan\theta + r\Omega^2\sin\theta$$

$$\Rightarrow \Omega^2\left(\frac{5}{3}R\tan\theta - r\sin\theta\right) = g$$

$$\Rightarrow \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{\frac{5}{3}\tan\theta - r\sin\theta}} \quad //$$

P_3



ϕ: rotaciones alrededor del eje de la medalla

θ: rotaciones alrededor de un eje perpendicular a la rampa y que pasa por el punto de contacto

$\theta(0)$ coincide con $\hat{y}$

a) $I_{xx} = \int dm(y^2 + z^2)$

$I_{yy} = \int dm(x^2 + z^2)$

$\rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mR^2$

$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$

$I_{zz} = \int dm(x^2 + y^2) \longrightarrow \sigma\int_0^R\int_0^{2\pi} d\phi\, dr\, r^3 = \frac{1}{2}mR^2$

$\sigma = \frac{M}{\cancel{\pi}R^2}\cdot 2\cancel{\pi}\cdot\frac{R^4}{4}$

$I_{xy} = -\int dm(xy) = I_{yx}$

$I_{yz} = -\int dm(yz) = I_{zy}$

$I_{zx} = -\int dm(zx) = I_{xz}$

$= 0 \quad (z = 0)$

b) Escribamos L

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \underline{\frac{1}{2}I_{zz}}\dot{\phi}^2 + \underline{\frac{1}{2}I_{xx}}\dot{\theta}^2 + mg\overbrace{y\sin\alpha}^{z=-y\sin\alpha}$$

Tenemos la restricción de rodar sin resbalar: $|v| = \boxed{R\dot{\phi}}$

constraint no holonómico (ya que contiene $\boxed{\dot{q}}$)

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = R\sin\theta\dot{\phi} \quad \wedge \quad \dot{y} = R\cos\theta\dot{\phi}$$

$\hookrightarrow f_1 = \dot{x} - R\sin\theta\dot{\phi}, \qquad f_2 = \dot{y} - R\cos\theta\dot{\phi}$

$\hat{x}\rfloor \; m\ddot{x} = \lambda_1 \qquad \hat{y}\rfloor \; m\ddot{y} - mg\sin\alpha = \lambda_2$

$\hat{\phi}\rfloor \; I_{zz}\ddot{\phi} = -\lambda_1 R\sin\theta - \lambda_2 R\cos\theta, \qquad \hat{\theta}\rfloor \; I_{xx}\ddot{\theta} = 0$

$\hat{x} \Rightarrow \; mR(\sin\theta\ddot{\phi} + \cos\theta\dot{\phi}\dot{\theta}) = \lambda_1, \qquad \hat{y} \Rightarrow \; mR(\cos\theta\ddot{\phi} - \sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi}) - mg\sin\alpha = \lambda_2$

$$\hat{\phi} \Rightarrow \; I_{zz}\ddot{\phi} = -mR^2(\sin^2\theta\ddot{\phi} + \cancel{\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}\dot{\theta}}) - mR^2(\cos^2\theta\ddot{\phi} - \cancel{\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}\dot{\theta}}) + mgR\cos\theta\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \underbrace{(I_{zz} + mR^2)}_{\frac{1}{2}mR^2 + mR^2}\ddot{\phi} = mgR\cos\theta\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Omega^2}\ddot{\phi} = \cos\theta, \qquad \Omega^2 = \frac{2g}{3R}\sin\alpha$$

$\Rightarrow$ Tiene sentido como ec.! Si $\alpha = 0 \Rightarrow \phi$ no acelera

24. Junio

Transf. canónicas

· Transf. del estilo $Q_i(q_i, p_i, t)$, $P_i(q_i, p_i, t)$ que dejan inv. la forma de las ecs. de Hamilton.

$H \to K(Q, P, t)$

$\lambda(p\dot{q} - H) = P\dot{Q} - K + \frac{dF}{dt}$

$\lambda = 1$: transf. canónicas

Fn. generadora	Deriv. de F
$F_1(q, Q, t)$	$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$, $P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$
$F_2(q, P, t) - QP$	$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$, $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
$F_3(p, Q, t) + qp$	$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}$, $P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$
$F_4(p, P, t) + qp - QP$	$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}$, $Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}$.

Bracket de Poisson

· f, g dependientes del espacio de fase y el tiempo.

$$[f, g]_{q,p} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} \quad , \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$$

· Anticonm

· Bilinealidad

· Regla de Leibniz

· Id. de Jacobi

Hamilton - Jacobi

$(q, p) \longrightarrow (q_0, p_0)$

↳ set de coord. cte.

$$K = 0 \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial p_i} = \dot{Q}^i = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{p}^i = 0$$

$$\Rightarrow H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

$$\rightarrow H\Big(q_1, \dots, q_n, \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}, t\Big) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

$F_2 \longrightarrow S$

Conexión con QM

La ec. de Hamilton-Jacobi dep. del tiempo puede entenderse como el término dominante en una teoría efectiva de mecánica cuántica para $\hbar \rightarrow 0$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\right)\psi$$

$$\cdot\ \psi = e^{\frac{i}{\hbar}S} \qquad S \in \mathbb{C}$$

$\hbar \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial q^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V(q).$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V(q)}_{H\left(q,\, \frac{\partial S}{\partial q}\right)}$$

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$$

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 11

Fecha: 10 de junio del 2024.

P1. Considere una acción Hamiltoniana,

$$I[p_i, \dot{q}^i] = \int dt \Big(p_i q^i - H(p,q)\Big), \tag{1}$$

y su bracket de Poisson

$$[F,G] = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i}. \tag{2}$$

Las ecuaciones de movimiento,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q^i, H], \tag{3}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = [p_i, H]. \tag{4}$$

Demuestre que si Q es una carga conservada, entonces la siguiente transformación

$$\delta_s q^i = [q^i, \varepsilon Q] = \varepsilon \frac{\partial Q}{\partial p_i}, \qquad \delta_s p_i = [p_i, \varepsilon Q] = -\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial q^i}, \tag{5}$$

es una simetría de la acción.

P2. *a*) Muestre que el Hamiltoniano en coordenadas esféricas para una partícula de masa m en un potencial $V(\vec{r})$ es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + V(\vec{r}), \tag{6}$$

y muestre que si $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$, entonces p_ϕ es constante.

b) Suponiendo que el potencial V depende solo de r, muestre que $[H,K] = 0$ donde

$$K \equiv p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}. \tag{7}$$

P3. El corchete de Poisson se define por

$$[a,b] = \sum_k \left(\frac{\partial a}{\partial q_k}\frac{\partial b}{\partial p_k} - \frac{\partial a}{\partial p_k}\frac{\partial b}{\partial q_k}\right). \tag{8}$$

a) Muestre que para una cantidad dinámica $a(q, p, t)$

$$\frac{da}{dt} = [a, H] + \frac{\partial a}{\partial t} \tag{9}$$

Un oscilador armónico en dos dimensiones tiene energías

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \tag{10}$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m(x^2 + y^2) + Cxy, \tag{11}$$

donde C y K son constantes.

b) Muestre que haciendo una transformación de coordenadas este oscilador armónico bidimensional es equivalente a dos osciladores armónicos que vibran a diferente frecuencia.

c) Encuentre dos constantes de movimiento independientes y verifique que efectivamente lo son.

d) Si $C = 0$ encuentre una tercera constante de movimiento (independiente de las dos anteriores). Verifique que lo es.

e) Muestre que para el caso C=0, la matriz simétrica

$$A_{ij} = \frac{p_i p_j}{2m} + \frac{1}{2} K x_i x_j, \tag{12}$$

es una constante de movimiento, por medio de expresar cada elemento en términos de las constantes de movimiento que encontró anteriormente. En la expresión para A_{ij}: $x_1 = x, x_2 = y, p_1 = p_x$ y $p_2 = p_y$.

P1 AUX 11

$$\dot q^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q^i, H]$$

$$\dot p^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = [p_i, H]$$

teo. de Noether inverso

Q : carga cons.

$$\delta_s q^i = [q^i, \varepsilon Q] = \varepsilon \frac{\partial Q}{\partial p_i}$$

$$\delta_s p_i = [p_i, \varepsilon Q] = -\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial q^i}$$

· $G(\underbrace{q, p}_{\text{espacio de fases.}}, t)$, $\frac{dG}{dt}(q,p,t) = \frac{\partial G}{\partial q}\dot q + \frac{\partial G}{\partial p}\dot p + \frac{\partial G}{\partial t}$

$$= \frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

$$= [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t}$$

si G es conservado:

$$0 = [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t}$$

$$\delta_s I = \int dt \left(\boxed{\delta_s p_i} \dot q^i + p_i \frac{d}{dt}(\delta_s q) - \frac{\partial H}{\partial p_i}\boxed{\delta_s p_i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\boxed{\delta_s q^i} \right)$$

$$= \int dt \left(-\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial q^i}\dot q^i + p_i \frac{d}{dt}\left(\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial H}{\partial p_i}\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial p_i} \right)$$

$$= \int dt \left(-\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial q^i}\dot q^i + \varepsilon p_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q}{\partial p_i}\right) + \varepsilon [Q, H] \right) + \varepsilon\frac{\partial Q}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$= \int dt\, \varepsilon \left(-\frac{\partial Q}{\partial q^i}\dot q^i + p_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial Q}{\partial t} + \cancel{[Q, H] + \frac{\partial Q}{\partial t}} \right)$$

$* \; \frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$

$$= \int dt \; \varepsilon \left(-\frac{\partial Q}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{d}{dt}\left(p_i \frac{\partial Q}{\partial q^i}\right) - \frac{\partial Q}{\partial p_i}\dot{p}_i - \frac{\partial Q}{\partial t} \right)$$

$\rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0$ (cant. conservada)

$$= \int dt \; \varepsilon \frac{d}{dt}\left(p_i \frac{\partial Q}{\partial q^i} \right)$$

$$I' = I + \delta_s I$$

$\cdot \; \delta_s I = \int dt \; \varepsilon \frac{d}{dt}\left(p_i \frac{\partial Q}{\partial q^i}\right)$, $I' = I + T.B.$

A la acción no le importa. No varia en los bordes.

$$= \int dt \frac{d}{dt}\left(p_i \, \delta_s q^i\right)$$

$\cdot \; \frac{d}{dt}\underbrace{[Q_1, Q_2]}_{\text{nueva cant. conservada } Q_3} = [[Q_1, Q_2], H] + \frac{\partial}{\partial t}[Q_1, Q_2] = 0$

Q_a cant. conservadas , $a = 1, \ldots$

con ese conmutador se pueden generar. $\leftarrow$ $[Q_a, Q_b] = \underbrace{f_{ab}^{\ c}}_{\text{estructura}} Q_c \longrightarrow$ Álgebra de Lie.

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 12

Fecha: 24 de junio del 2024.

P1. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión, parametrizada por la coordenada q en un potencial $V(q)$ y es afectada por una fuerza del tipo $-2m\gamma\dot{q}$, es decir, proporcional a su velocidad.

a) Muestre que la ecuación de movimiento puede ser obtenida del siguiente Lagrangiano,

$$L = e^{2\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right), \tag{1}$$

roce viscoso.

y obtenga el Hamiltoniano.

b) Para la función generadora

$$F_2(q,P,t) = e^{\gamma t}qP, \tag{2}$$

encuentre el Kamiltoniano $K(Q,P,t)$. Para un potencial del tipo

$$V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \tag{3}$$

c) Obtenga la solución $q(t)$ para el oscilador amortiguado a partir de la parte anterior en el caso $\gamma < \omega$.

P2. Muestre que la función

$$S = \frac{m\omega}{2}(q^2+\alpha^2)\cot(\omega t) - m\omega q\alpha\csc(\omega t), \tag{4}$$

es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para el oscilador armónico con

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right). \tag{5}$$

Muestre que esta función genera la solución correcta del movimiento armónico.

P1 Aux 12

a) $L = e^{2\gamma t}\left(\frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V(q)\right)$

$$m\ddot{q} = -2m\gamma\dot{q} - V'(q)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\gamma t} m\dot{q}\right) + V'(q)e^{2\gamma t} = 0$$

$$m\ddot{q} + 2\gamma m\dot{q} + V'(q) = 0$$

· $L(q,\dot{q},t)$, $H(q,p,t)$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{2\gamma t} m\dot{q} \Rightarrow \boxed{\dot{q} = \frac{p}{m} e^{-2\gamma t}}$$

$$\rightarrow L(q,p,t) = e^{2\gamma t}\left(\frac{1}{2} m\left(\frac{p}{m} e^{-2\gamma t}\right)^2 - V(q)\right)$$

$$= \cancel{e^{2\gamma t}}\left(\frac{p^2}{2m} e^{-\cancel{4}^{\,2}\gamma t} - V(q)\right)$$

$$= \frac{p^2}{2m} e^{-2\gamma t} - V(q)e^{-2\gamma t}$$

$$\Rightarrow H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} e^{-2\gamma t} - \frac{p^2}{2m} e^{-2\gamma t} + V(q)e^{-2\gamma t}$$

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} e^{-2\gamma t} + V(q)\, e^{-2\gamma t}.}$$

b) $F_2 : e^{\gamma t} q P. \longrightarrow K$

· $V(q) = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$

$$p\dot{q} - H = \cancel{P\dot{Q}} - K + \underbrace{\frac{dF}{dt}}_{\frac{dF_2}{dt} - \dot{P}Q - \cancel{P\dot{Q}}}$$

$$F = F_2 - PQ.$$

$$\rightarrow p\frac{dq}{dt} - H = -K + \frac{dF_2}{dt} - \frac{dP}{dt} Q\, dt$$

$$p\, dq - H dt = -K dt + dF_2 - dPQ$$

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar 13

Fecha: 1 de julio del 2024.

P1. *a*) Encuentre una transformación canónica para el oscilador armónico en una dimensión, de tal manera que el nuevo Hamiltoniano sea cíclico.

b) Para un problema en una dimension con un Hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2}. \tag{1}$$

Pruebe que hay una constante de movimiento dada por

$$\frac{pq}{2} - Ht. \tag{2}$$

P2. Resuelva el oscilador armónico usando Hamilton-Jacobi.

P3. Demuestre usando las ecuaciones de Hamilton, que la trayectoria de una partícula de masa m restringida a moverse en una superficie esférica son los “gran círculos”.

P4. Resuelva el problema del trompo simétrico con un punto fijo usando Hamilton-Jacobi.

variables cíclicas.

Si q_n es cíclica, entonces

H-J. $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$

$$\dot{p}_n = \frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = \alpha_n$$

$$\Rightarrow F_2^{(n)} = q_n P_n = q_n \alpha_n$$ → Funø principal de Jacobi.

$$\Rightarrow S = \bar{S}(q_1, \dots, q_{n-1}) + \alpha_n q_n.$$

con $\alpha_n = \frac{\partial S}{\partial q_n}.$

De manera general:

si $q_{k+n}, \dots, q_n$ son cíclicas.

$$S = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i q_i + \bar{S}(q_1, \dots, q_k)$$

P1 $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$

* cambio elipsoidal

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q \\ p &= f(P) \cos Q \end{aligned}\right\} \quad \frac{p}{q} = m\omega \operatorname{cotg} Q$$

puede ser con P igual

$$\rightarrow p = m\omega q \operatorname{cotg} Q$$

$$H(Q,P) = \frac{f^2(P)}{2m} \cos^2 Q + \frac{1}{2} \cancel{m\omega^2} \frac{f^2(Q)}{m^{\cancel{2}} \cancel{\omega^2}} \sin^2 Q = \omega P.$$

$$= \frac{f^2(P)}{2m}$$ → no depende de Q.

$F_1(q, Q)$, $p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$, $P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$

· $p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$ / $\int$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{1}{2} m\omega q^2 \operatorname{cotg} Q$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2} m\omega q^2 \operatorname{cosec}^2 Q} \quad \left(-\frac{\partial F_1}{\partial Q}\right)$$

$$\boxed{q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q}$$

$\cdot\ f(P) = \sqrt{2Pm\omega}$

$\cdot\ \dot{Q} = \dfrac{\partial H}{\partial P} = \omega$

$\dot{P} = -\dfrac{\partial H}{\partial Q} = 0 \longrightarrow P = cte.$

$\to E = \omega P \Rightarrow P = \dfrac{E}{\omega}$ $\qquad \cdot\ q = \sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + C_0)$

$Q = \omega t + C_0 \qquad p = \sqrt{2E} \cos(\omega t + C_0)$ //

$\cdot\ H = \dfrac{p^2}{2} - \dfrac{1}{2q^2}$

$D = \dfrac{pq}{2} - Ht$

si es 0, es conservado!

$\cdot\ \dfrac{dD}{dt} = [D, H] + \dfrac{\partial D}{\partial t} = \left[\dfrac{pq}{2}, H\right] - [\cancel{Ht, H}]^{0} + (-H)$

$= \dfrac{1}{2}\left[p\dfrac{\partial H}{\partial p} - q\dfrac{\partial H}{\partial q}\right] - H$

$= \dfrac{1}{2}\left[p^2 - \dfrac{1}{q^2}\right] - H = 0.$

P4| $\quad L = \dfrac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) + \dfrac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 - Mgh\cos\theta.$ $\to$ ángulos de Euler.

dist. al CM.

$H = \sum p_i \dot{q}_i - L(q_i, p_i, t)$

$\text{const} = E = H = \dfrac{p_\psi^2}{2I_3} + \dfrac{p_\theta^2}{2I_1} + \dfrac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + Mgh\cos\theta.$

$H\left(q, \dfrac{\partial S}{\partial q}, t\right) - \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$

$\boxed{\psi, \phi \text{ cíclicas.}}$

Ansatz:

$\cdot\ S(\theta, E, \psi, \underline{\alpha_\psi}, \phi, \underline{\alpha_\phi}, t) = W(\theta, E) + \psi\alpha_\psi + \phi\alpha_\phi + Et.$

$\cdot\ \dfrac{\alpha_\psi^2}{2I_3} + \dfrac{1}{2I_1}\left(\dfrac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2 + \dfrac{(\alpha_\phi - \alpha_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + Mgh\cos\theta = E.$

$\hookrightarrow W = \displaystyle\int d\theta \sqrt{2I_1E - \dfrac{\alpha_\psi^2 I_1}{I_3} - \dfrac{(\alpha_\phi - \alpha_\psi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} - 2I_1Mgh\cos\theta}.$

$$Q = \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$$

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial E} - t = \int d\theta \; I_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 I_1 E - \frac{\alpha_\psi^2 I_1}{I_3} - \frac{(\alpha_\phi - \alpha_\psi \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} - 2 I_1 M g h \cos\theta}}$$

$$\rightarrow \beta + t = \frac{\partial W}{\partial E}$$

$$\alpha = \frac{2E - \frac{\alpha_\psi^2}{I_3}}{I_1} = \frac{2E}{I_1} - \frac{\alpha_\psi^2}{I_1 I_3}$$

$$\beta = \frac{2Mgh}{I_1}$$

$$\alpha_\phi = I_1 a \quad , \quad \alpha_\psi = I_1 b$$

def. Goldstein.

$$= \int d\theta \frac{I_1}{\left[I_1^2 \alpha - I_1^2 \frac{(a - b\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} - I_1^2 \beta \right]^{1/2}}$$

$$= \int d\theta \frac{1}{\left[\alpha - \frac{(a - b\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} - \beta \right]^{1/2}} \rightarrow \text{C.V. : } u = \cos\theta$$

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du\,(1-u^2)}{\left[(1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 \right]^{1/2}}$$

(5.63)
↳ Goldstein!

β en la condiØ inicial $u(0)$.

FI3111-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Gonzalo Palma.
Auxiliar: Gabriel Marín.
Ayudante: Ignacio Chacón.

Auxiliar Extra

Fecha: 16 de julio del 2024.

P1. Considere una masa m unida por varillas sin masa de longitud l a un punto fijo en el origen, y a una masa m fija al eje z. Todo el sistema se hace girar con una velocidad angular constante Ω alrededor del eje vertical. La masa fija al eje z puede moverse hacia arriba o hacia abajo. El ángulo que la varilla superior forma con el eje vertical es θ, el cual elegimos como la única coordenada generalizada necesaria para el sistema.

a) Encuentre el Lagrangiano del sistema. Obtenga las ecuaciones de movimiento.

b) ¿Cuántas configuraciones de equilibrio hay? Describa las posiciones de equilibrio en los límites para rotación lenta y rápida (pequeña y grande Ω).

c) Encuentra el Hamiltoniano para el sistema. ¿Se conserva? ¿Es igual a la energía?

P2. Considere el movimiento de un cuerpo rígido con momentos de inercia principales $I_1 < I_2 < I_3$, en ausencia de fuerzas y torques externos (es decir, un cuerpo rígido libre). Suponga que el cuerpo es una figura rectangular de ancho W, altura H y longitud L (es decir, un libro), con $H < W < L$.

El vector de velocidad angular del cuerpo rígido, en el sistema del cuerpo, es $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. El vector de momento angular conservado es $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3) = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$.

a) Pruebe que para una energía dada E, el valor del momento angular tiene valores mínimos y máximos $2EI_1 < L^2 < 2EI_3$. (Hint: escriba expresiones para $2EI_1$, $2EI_3$ y L^2 en términos de ω_1, ω_2, ω_3).

b) Suponga que el momento angular es solo ligeramente mayor que su valor mínimo, y $\omega_2, \omega_3 \ll \omega_1$. Usa las ecuaciones de Euler para probar que, en primer orden, ω_1 es constante. Obtén soluciones para $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ en esta aproximación.

P3. Considere la siguiente transformación:

$$Q = \log\Big(1 + q^{1/2}\cos p\Big), \tag{1}$$

$$P = 2(1 + q^{1/2}\cos p)q^{1/2}\sin p. \tag{2}$$

a) Muestre que Q y P son variables canónicas.

b) Muestre que la función que genera esta transformación es:

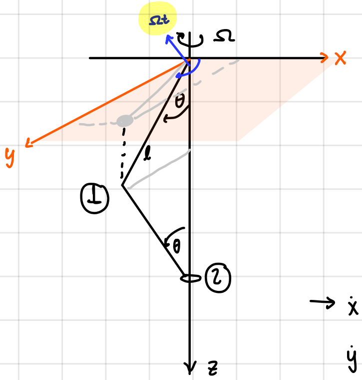
$$F_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p. \tag{3}$$

P4. Una partícula cargada está restringida a moverse en un plano bajo la influencia de un potencial central (no electromagnético) $V = \frac{1}{2}kr^2$, y un campo magnético constante $\mathbf{B}$ perpendicular al plano, tal que

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} \tag{4}$$

Escriba la ecuación de Hamilton-Jacobi para una función característica de Hamilton en coordenadas polares. Separe la ecuación y reduzca a su cuadratura. Discuta el movimiento si el momento canónico p_θ es cero para $t = 0$.

P1



$x = l\,\text{sen}\,\theta \cos \Omega t$

$y = l\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\Omega t$

$z = l \cos \theta$

$* \; U = -m\vec{g}\cdot\vec{r}$

$\rightarrow \dot{x} = l\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\Omega t - l\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\Omega t \cdot \Omega.$

$\dot{y} = l\cos\theta\,\dot{\theta}\,\text{sen}\,\Omega t + l\,\text{sen}\,\theta\cos\Omega t\cdot\Omega.$

$\dot{z} = -l\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}$

Para ①:

$$\rightarrow L_1 = \frac{m}{2}\Big(l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\cos^2\Omega t + l^2\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\Omega t\;\Omega^2 - 2l^2\cos\theta\dot{\theta}\cancel{\cos\Omega t}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\Omega t\cdot\Omega$$
$$l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\,\text{sen}^2\Omega t + l^2\text{sen}^2\theta\cos^2\Omega t\;\Omega^2 + 2l^2\cos\theta\dot{\theta}\cancel{\cos\Omega t}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\Omega t\cdot\Omega$$
$$+ l^2\,\text{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2\Big) - mg\underbrace{l\cos\theta}_{z}$$

$$= \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\text{sen}^2\theta\,\Omega^2 + l^2\text{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2\right) - mgl\cos\theta.$$

$$= \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\text{sen}^2\theta\,\Omega^2\right) + mgl\cos\theta.$$

Para ②: $x = 0$, $y = 0$ $\quad z = 2l\cos\theta \;\rightarrow\; \dot{z} = -2l\,\text{sen}\,\theta\cdot\dot{\theta}$

$*$ Masas iguales $= m$.

$$\rightarrow L_2 = \frac{1}{2}m\left(4l^2\text{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2\right) + 2mgl\cos\theta$$

$$\therefore\; L = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\text{sen}^2\theta\,\Omega^2\right) + \frac{m}{2}\left(4l^2\text{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta. + 2mgl\cos\theta.$$

$$L = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2\left(1 + 4\,\text{sen}^2\theta\right) + l^2\text{sen}^2\theta\,\Omega^2\right) + 3mgl\cos\theta$$

E-L

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$\cdot\;\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}\left(1 + 4\,\text{sen}^2\theta\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}\left(1 + 4\,\text{sen}^2\theta\right) + 8\,\text{sen}\,\theta\cdot\cos\theta\cdot ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{m}{\cancel{2}}l^2\dot{\theta}^2\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \frac{m}{\cancel{2}}l^2\Omega^2\cancel{2}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 3mgl\,\text{sen}\,\theta.$$

$$= ml^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\left(4\dot{\theta}^2 + \Omega^2\right) - 3mgl\,\text{sen}\,\theta$$

$$\rightarrow \cancel{ml^2}\ddot{\theta}\left(1 + 4\,\text{sen}^2\theta\right) + \underbrace{8\,\text{sen}\,\theta\cdot\cos\theta\cdot\cancel{ml^2}\dot{\theta}^2 - \cancel{ml^2}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\left(4\dot{\theta}^2 + \Omega^2\right)}_{\left(4\dot{\theta}^2 - \Omega^2\right)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} + \frac{3\cancel{m}g\cancel{l}\,\text{sen}\,\theta}{l}$$

b) Configuraciones de equilibrio:

$\dot\theta = \ddot\theta = 0$

$\rightarrow (4\cancel{\dot\theta^2}^{0} - \Omega^2)\cancel{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta + \frac{3g}{l}\cancel{\operatorname{sen}\theta} = 0$

$\rightarrow (4\cancel{\dot\theta^2}^{0} - \Omega^2)\cos\theta + \frac{3g}{l} = 0$

$\rightarrow \cos\theta = \frac{3g}{l\Omega^2} \rightarrow \theta = 0, \pi, \arccos\left(\frac{3g}{\Omega^2 l}\right)$

inestable.

estable

estable, válido si $\Omega^2 > \frac{3g}{l}$

$\hookrightarrow$ si $\Omega \to \infty \rightarrow \pi/2$

$\hookrightarrow \theta = \arccos\frac{3g}{l\Omega^2}$

c) se tiene el momento canónico:

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ml^2(1+4\sin^2\theta)\dot\theta$

$\rightarrow H = p_\theta\dot\theta - L = \frac{1}{2}ml^2(1+4\sin^2\theta)\dot\theta^2 - \frac{1}{2}ml^2\Omega^2\sin^2\theta - 3mgl\cos\theta$

conservado

$= \frac{p_\theta^2}{2ml^2(1+4\sin^2\theta)} - \frac{1}{2}ml^2\Omega^2\sin^2\theta - 3mgl\cos\theta \neq E$

$\boxed{P3}$

$$Q = \log\left(1+q^{1/2}\cos p\right),$$
$$P = 2(1+q^{1/2}\cos p)q^{1/2}\sin p.$$

Muestre que son variables canónicas:

$\rightarrow$ Bracket de Poisson:

$\{Q_i, Q_j\} = 0$, $\{P_i, P_j\} = 0$, $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$

$\rightarrow$ condición simpléctica,

$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \longrightarrow M^T J M = J$

con $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Fn. generadora.

$\rightarrow$ Preserva ecs. de Hamilton.

$\rightarrow$ Teo. de Liouville (preserva el vol. del espacio de fases)

$\left|\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}\right| = 1$

$\cdot \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$

$\cdot \frac{\cancel{\frac{1}{2}}q^{-1/2}\cos p}{1+q^{1/2}\cos p}\left(\cancel{2}\cdot -\cancel{q^{1/2}}\operatorname{sen}p\, \cancel{q^{1/2}}\sin p + \cancel{2}(1+q^{1/2}\cos p)\, q^{1/2}\cos p\right)$

$- \frac{-\cancel{q^{1/2}}\operatorname{sen}p}{1+q^{1/2}\cos p}\left(\cancel{2}\left(\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{q^{-1/2}}\cos p\right)q^{1/2}\sin p + \cancel{2}(1+\cancel{q^{1/2}}\cos p)\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{q^{-1/2}}\sin p\right)$

b) F_3 , $q = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p}$, $P = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q}$

· $F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p.$

$$\Rightarrow \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = 2e^Q(e^Q - 1)\tan p$$

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = (e^Q - 1)^2 \sec^2 p$$

$$\hookrightarrow \quad q^{1/2}\cos p = e^Q - 1 \quad \Rightarrow \quad Q = \ln\left(1 + q^{1/2}\cos p\right)$$

$$P = 2(1 + q^{1/2}\cos p)(\cancel{1} + q^{1/2}\cos p - \cancel{1})\tan p$$

$$= 2(1 + q^{1/2}\cos p)\, q^{1/2}\sin p \,//.$$

P4

$\cdot\ V = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$

$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$, $\vec{B} = B\hat{z}$

$\to L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \boxed{\frac{q}{c}(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A})} - \frac{k}{2}(x^2+y^2)$

$\to \vec{A} = \frac{1}{2}B(-y\hat{x} + x\hat{y})$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{qB}{2c}(x\dot{y}-y\dot{x}) \underbrace{-\frac{k}{2}(x^2+y^2)}_{\hookrightarrow\, -V(r).}$$

$\to x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$\Longrightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{qB}{2c}r^2\dot{\theta} - \frac{k}{2}r^2 \longrightarrow$ no depende de θ.
↳ θ es cíclico.

$\to p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + \frac{qB}{2c}r^2 \to \left(p_\theta - \frac{qB}{2c}r^2\right)\frac{1}{mr^2} = \dot{\theta}$

$$\Longrightarrow H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L$$

$$= m\dot{r}^2 + \left(mr^2\dot{\theta}^2 + \cancel{\frac{qB}{2c}r^2\dot{\theta}}\right) - \left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \cancel{\frac{qB}{2c}}r^2\dot{\theta} - \frac{k}{2}r^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{2}r^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p_r^2}{m}\right) + \frac{\cancel{mr^2}}{2}\left(p_\theta - \frac{qB}{2c}r^2\right)^2\frac{1}{m^{\cancel{2}}r^{\cancel{4}\,2}} + \frac{k}{2}r^2$$

$$= \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta - \frac{qB}{2c}r^2\right)^2 + \frac{k}{2}r^2$$

Aplicando H-J:

$$H - \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$\to \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right) - \frac{qB}{2c}r^2\right)^2 + \frac{k}{2}r^2 - \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$\cdot$ Pero $\frac{\partial S}{\partial r} = p_r$

$\frac{\partial S}{\partial \theta} = p_\theta$

Como θ es cíclico, proponemos el Ansatz:

$$S = f(r, \boxed{E,\alpha}) + \underbrace{p_\theta}_{\hookrightarrow\,\alpha}\theta - Et$$

$\to \frac{\partial S}{\partial \theta} = \alpha$ $\qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -E$.

$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r}$

continuación

$$L = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + \frac{qB}{2c} r^2\dot\theta - \frac{1}{2}kr^2$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \rightarrow \dot r = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta + \frac{qB}{2c} r^2 \rightarrow \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2} - \frac{qB}{2mc}$$

$$H = p_r \dot r + p_\theta\dot\theta - L$$

$$= \frac{1}{2}(m\dot r^2 + mr^2\dot\theta^2) + \cancel{\frac{qB}{2c}} r^2\dot\theta - \frac{1}{2}m\cancel{(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2)} - \cancel{\frac{qB}{2c}} r^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}kr^2$$

$$= \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + \frac{1}{2}kr^2$$

$$H(r,\theta,p_r,p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta - \frac{qB}{2mc}r^2\right)^2 + \frac{1}{2}kr^2$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta} - \frac{qB}{2mc}r^2\right)^2 + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$p_\theta = \alpha \longrightarrow \alpha = 0$ (lo que nos piden)

$$S(r,\theta,\alpha,E,t) = f(r,\alpha,E) + \alpha\theta - Et$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\alpha - \frac{qB}{2mc}r^2\right)^2 + mkr^2 = 2mE$$

Reducir el problema a cuadraturas: reducirlo a una integral.

$$f(r) = \int^r dr' \sqrt{2mE - \frac{1}{r'^2}\left(\alpha - \frac{qB}{2mc}r'^2\right)^2 - mkr'^2}$$

$$= \int^r dr' \sqrt{2mE - \underbrace{mkr'^2 - \left(\frac{qB}{2mc}\right)^2 r'^2}_{m^2(\omega_0^2 + \omega_c^2)\, r'^2}}$$

frecuencia

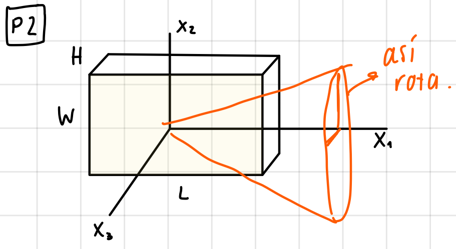
frec. de un ciclotrón

$$m^2(\underbrace{\omega_0^2 + \omega_c^2}_{\text{frec. del sistema.}})\, r'^2 \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad \omega_c^2 = \frac{q^2B^2}{4c^2m^4}$$

oscilador armónico simple $\left(L = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - \frac{1}{2}kr^2 \right.$.

$$\alpha = 0 \iff p_\theta(t=0) = 0$$

$\boxed{P2}$



vector $\vec{v}$ angular: $\vec{\omega} = (\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3)$

$\rightarrow$ $\vec{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$ $\rightarrow$ momento angular conservado.

* $H < W < L$
* $I_1 < I_2 < I_3$

$$L^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2$$
$$E = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

$$\cdot\ 2EI_1 - L^2 = \cancel{I_1^2\omega_1^2} + I_1I_2\omega_2^2 + I_1I_3\omega_3^2 - \cancel{I_1^2\omega_1^2} - I_2^2\omega_2^2 - I_3^2\omega_3^2$$
$$= I_2\underbrace{(I_1 - I_2)}_{>0}\omega_2^2 + I_3\underbrace{(I_1 - I_3)}_{>0}\omega_3^2 > 0$$

$2EI_1 - L^2 < 0$
$2EI_3 - L^2 > 0$

$$\cdot\ 2EI_3 - L^2 = I_2\underbrace{(I_3 - I_2)}_{<0}\omega_2^2 + I_1\underbrace{(I_3 - I_1)}_{<0}\omega_1^2 < 0$$

$$\cdot\ I_1(I_3 - I_1)\underbrace{\omega_1^2}_{>0} = I_2(I_3 - I_2)\underbrace{\omega_2^2}_{>0}$$

valor mínimo

$$2EI_1 < L^2 < 2EI_3 \quad //$$

máximo

b)

· $L = L_{min} = \sqrt{2EI_1} \Rightarrow \omega_2 = \omega_3 = 0$ $\rightarrow$ objeto rota en torno a I_1

· $L = L_{max} = \sqrt{2EI_3} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 = 0$ $\rightarrow$ " a I_3

~ Ecs. de Euler.

· $I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \approx I_1\dot{\omega}_1 = 0 \rightarrow \dot{\omega}_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = cte.$

· $L = L_{min} + \varepsilon.$
$= \sqrt{2EI_1} + \varepsilon$

· $I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0. \rightarrow \dot{\omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\omega_1\omega_3.$

· $I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = 0. \rightarrow \dot{\omega}_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3}\omega_1\omega_2.$

se deriva 2 veces para sacar ω_2.

$$\rightarrow \ddot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\dot{\omega}_3\omega_1 = \underbrace{\frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\frac{(I_1 - I_2)}{I_3}}_{\Omega^2}\omega_1^2\omega_2.$$

$$\vec{\omega} \approx (\omega_1, \underbrace{C_1\cos(\Omega t + \phi_2), -C_2\sin(\Omega t + \phi_0)}_{})$$

Rota en torno a I_1 con $\vec{v}$ angular Ω en forma de elipse.

$$\rightarrow \omega_2(t) = A\cos(\Omega t + \phi_3)$$

$$\rightarrow \dot{\omega}_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3}\omega_1 A\cos(\Omega t + \phi_0).$$

$$\hookrightarrow \omega_3(t) = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3}\omega_1\frac{A\sin(\Omega t + \phi_0)}{\Omega.} = -A\sqrt{\frac{I_2(I_1 - I_2)}{I_3(I_3 - I_1)}}\sin(\Omega t + \phi_0)$$