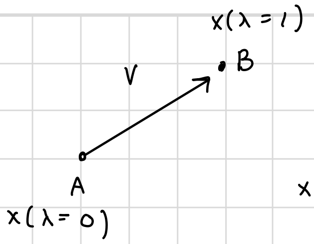
Aux 1

22 marzo



parametrizar el vector según una func. ←

$V_{AB} = B - A$ → no para un espacio curvo.

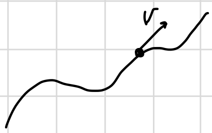
$x(\lambda) = A + \lambda(B - A)$
↓
parámetro afín.

$\lambda = 0 \quad , x = A$

$\lambda = 1 \quad , x = B$

$$\left.\frac{d\,x(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = B - A = V_{AB} = x(1) - x(0).$$

↳ vector sólo depende de la deriv. direccional c/r al parámetro (no depende del pto. sgte.)



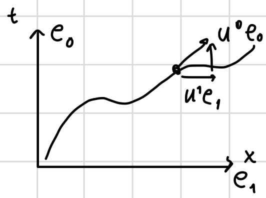
$$u = \frac{dx(\tau)}{d\tau}$$

τ: tiempo propio

$x(\tau) = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x \; \ldots \; x^3 e_3.$

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = u = u^\mu e_\mu$$

para hablar de la velocidad en coord. espaciales. ← u^i



Métrica

$g(u, v) = g(v, u)$ → simétrica

$g(au + bv, w) = a\,g(u, w) + b\,g(v, w)$ → lineal

$g(e_\alpha, e_\beta) = e_\alpha e_\beta = g_{\alpha\beta}$ → cualquier métrica.

intervalo espacio-temporal (otra forma de escribir la métrica) ←

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 + \ldots (\Delta x^3)^2$$

$$= g(\Delta x^\alpha e_\alpha , \Delta x^\beta e_\beta)$$

$$= \Delta x^\alpha \Delta x^\beta g(e_\alpha, e_\beta) = \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \eta_{\alpha\beta}.$$

así se llama en relatividad (para un espacio plano)

→ sólo sobreviven las comp. $\alpha = \beta$.

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Prod. escalar:

$$u \cdot v = g(u, v) = g(u^\mu e_\mu, v^\nu e_\nu) = u^\mu v^\nu g(e_\mu, e_\nu)$$

$$= u^\mu v^\nu \eta_{\mu\nu}$$

$$= -u^0 v^0 + u^1 v^1 + \ldots + u^3 v^3.$$

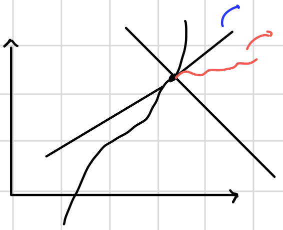
minkowski ← $ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2$

$\vec{v} = c = 1 = \frac{d\vec{x}}{dt} \Rightarrow d\vec{x} = dt \Rightarrow ds^2 = 0$ → trayectoria $\underline{\underline{\text{null}}}$

(de la luz)

cono de luz

no puede haber una part. que haga esto.



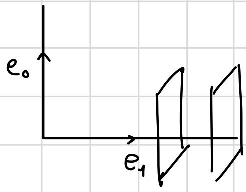
→ cuando es índice abajo, es una 1-forma

1-forma mapea el vector al espacio de los reales.

representa planos c/ x^α cte ← $\tilde{\omega} = dx^\alpha$, $\langle \tilde{\omega}^\nu , e_\mu \rangle = \delta^\nu{}_\mu$

$\tilde{\omega}^\nu$ ↓ covector covariante

$\sigma = \sigma_\mu \tilde{\omega}^\mu$



cuantas veces traspasa estos planos.

si el índice va arriba

para extraer la componente. ← $\langle \sigma, e_\alpha \rangle = \langle \sigma_\mu \tilde{\omega}^\mu , e_\alpha \rangle = \sigma_\mu \langle \tilde{\omega}^\mu , e_\alpha \rangle = \sigma_\mu \delta^\mu{}_\alpha = \sigma_\alpha$

↳ producto interior de un vector con su dual

covector

$\langle \tilde{\omega}^\alpha , v \rangle = v^\alpha$

$\langle \sigma, v \rangle = \sigma_\alpha v^\alpha$

Transf. de Lorentz

$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\mu x^\mu$

* $\Lambda^{\mu'}{}_\mu$ = Jacobiano (transformación) $= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}$.

$v^\mu \rightarrow v^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\mu v^\mu$

$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \cos \dots \end{pmatrix}$

$v = v^\mu e_\mu = v^{\nu'} e_{\nu'} = \Lambda^{\nu'}{}_\mu v^\mu e_{\nu'} \Rightarrow e_{\nu'} = \Lambda^\mu{}_{\nu'} e_\mu$.

v ↓ se mantiene invariante

donde $\Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^\mu{}_{\mu'} = 1$.

Universidad de Chile
Departamento de Física
FI7012 - Relatividad General

Auxiliar 1

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. (a) Muestre que la componente u_α de la uno-forma $\tilde{\mathbf{u}}$ puede ser escrito como la componente de un vector $\mathbf{u}$ donde la matriz de la transformación es $\eta_{\alpha\beta}$.

(b) Sea $T^{\mu\nu}$ un tensor de rango 2. Usando la parte a), calcule $T_{\alpha\beta}$.

(c) Sea $A_{\mu\nu}$ un tensor antisimétrico y $S_{\mu\nu}$ un tensor simétrico. Muestre que $A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0$.

(d) Sea $A_{\mu\nu}$ un tensor antisimétrico y $S_{\mu\nu}$ un tensor simétrico. Muestre que para un tensor arbitrario $V_{\mu\nu}$ se cumple:

i) $V^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(V^{\mu\nu} - V^{\nu\mu}\right)A_{\mu\nu}$
ii) $V^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(V^{\mu\nu} + V^{\nu\mu}\right)S_{\mu\nu}$

(e) Las bases de vectores y sus duales (uno-formas) transforman de un sistema de referencia x^μ a $x^{\bar{\mu}}$ según las siguientes relaciones:

$$\vec{e}_{\bar{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\bar{\mu}}\vec{e}_\mu, \quad \tilde{\omega}^{\bar{\mu}} = \Lambda^{\bar{\mu}}_{\mu}\tilde{\omega}^\mu \tag{1}$$

Muestre las siguientes relaciones:

i) $\Lambda^{\bar{\mu}}_{\mu}\Lambda^{\mu}_{\bar{\nu}} = \delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}}$
ii) $\Lambda^{\beta}_{\bar{\mu}}\Lambda^{\bar{\mu}}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}$
iii) Si T es tensor, $T^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\alpha}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\beta}}\Lambda^{\bar{\gamma}}{}_{\gamma}T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}$

P2. Varíe la siguiente acción:

$$S = \int d^4x \left\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\} \tag{2}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, con A_μ el potencial vectorial electromagnético, y obtenga las ecuaciones de Maxwell.

P3. (Propuesto) S es tensor si transforma como tal, es decir:

$$S^{\mu\nu} \longrightarrow S^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu}\Lambda^{\nu'}_{\nu}S^{\mu\nu} \tag{3}$$

$U_{\nu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} U_\nu$

(a) Si $S^{\mu\nu}$ y U_ν son tensores, muestre que $S^{\mu\nu}U_\nu$ es tensor.

(b) Si $T^{\mu\nu}$ es tensor. ¿Es $\partial_\alpha T^{\mu\nu}$ tensor? ¿Por qué?

$\sim \quad S^{\mu'\nu'} \cdot U_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \underbrace{\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}}_{1.} S^{\mu\nu} U_\nu$

$S^{\mu'\nu'} U_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} S^{\mu\nu} U_\nu$

P1 $u_\alpha = \langle \tilde{u}, e_\alpha \rangle = \langle u^\beta e_\beta , e_\alpha \rangle = u^\beta \langle e_\beta , e_\alpha \rangle = u^\beta \eta_{\beta\alpha}$

expandir en la base

b) $T^{\mu\nu}$

métrica es simétrica.

$$T_{\alpha\beta} = T(e_\alpha, e_\beta) = T(\eta_{\mu\alpha} e^\mu , \eta_{\nu\beta} e^\nu)$$
$$= \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} T(e^\mu, e^\nu)$$
$$= \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} T^{\mu\nu}$$

c) $A_{\mu\nu}$ antisimétrico $(A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu})$

$S_{\mu\nu}$ simétrico

PDQ $A_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = 0$

↳ hay que dem. que $S^{\mu\nu}$ también es simétrico.
(como la métrica es simétrica es obvio)

$$A_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} S^{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} S^{\nu\mu}$$
; como son mudos los índices
$$= -A_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow 2A_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = 0 \;//$$

d) i) $V^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} - V^{\nu\mu}) A_{\mu\nu}$ → dem.

$$V^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} A_{\mu\nu} + V^{\mu\nu} A_{\mu\nu})$$
$$= \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} A_{\mu\nu} - V^{\mu\nu} A_{\nu\mu})$$

como se contraen son mudos.

$$= \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} A_{\mu\nu} - V^{\nu\mu} A_{\mu\nu}) \;//$$

e) $e_{\bar\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\bar\mu}\, e_\mu$; $\omega^{\bar\mu} = \Lambda^{\bar\mu}{}_{\mu}\, \omega^\mu$.

i) $\Lambda^{\mu}{}_{\bar\mu} \Lambda^{\bar\nu}{}_{\mu} = \delta^{\bar\nu}{}_{\bar\mu}$,

$$\langle e_{\bar\mu}, \omega^{\bar\nu} \rangle = \delta^{\bar\nu}{}_{\bar\mu} = \langle \Lambda^{\mu}{}_{\bar\mu} e_\mu , \Lambda^{\bar\nu}{}_{\mu} \omega^\mu \rangle = \Lambda^{\mu}{}_{\bar\mu} \Lambda^{\bar\nu}{}_{\mu} \underbrace{\langle e_\mu , \omega^\mu \rangle}_{1}$$
$$= \Lambda^{\mu}{}_{\bar\mu} \Lambda^{\bar\nu}{}_{\mu} \;//$$

$$T^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta}{}^{\bar\gamma} = \Lambda^{\bar\alpha}{}_{\alpha} \Lambda^{\beta}{}_{\bar\beta} \Lambda^{\bar\gamma}{}_{\gamma} T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\alpha}$$

$$= T(e^{\bar\alpha}, e_{\bar\beta}, e^{\bar\gamma}) = T(\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\alpha} e^{\alpha}, \Lambda^{\beta}{}_{\bar\beta} e_{\beta}, \Lambda^{\bar\gamma}{}_{\gamma} e^{\gamma})$$

debe ser ω.

$$= \Lambda^{\bar\alpha}{}_{\alpha} \Lambda^{\beta}{}_{\bar\beta} \Lambda^{\bar\gamma}{}_{\gamma} T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\alpha}$$

lo siguiente. ←

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \, F_{\mu\gamma} F^{\mu\gamma}$$

· $F_{\mu\gamma} = \partial_\mu A_\gamma - \partial_\gamma A_\mu$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$\boxed{P3}$ $S^{\mu\nu} \longrightarrow S^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} S^{\mu\nu}$

$S : S^{\mu\gamma} U_\gamma$

b) $\underbrace{\partial_\alpha}_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} T^{\mu\nu} \rightarrow \partial_{\alpha'} T^{\mu'\nu'} \cancel{=} \Lambda^{\alpha}{}_{\alpha'} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\gamma} \partial_\alpha T^{\mu\nu}$

no es un tensor

deriv. covariante. ← $\nabla_\alpha = \partial_\alpha + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}.$

Auxiliar 2

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. Los vectores en base coordenada para el espacio tangente T_p están dados por $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$.

(a) Para cualquier sistema coordenado, ¿cuales son las componentes de cada uno de estos vectores?

(b) Calcule las componentes de la base coordenada Euclideana en coordenadas esféricas

(c) Calcule las componentes de la base coordenada esférica en coordenadas cartesianas

(d) En base coordenada, un vector A toma la forma $A = A^\mu \partial_\mu$. De una interpretación a las componentes A^μ

P2. (Propuesto Auxiliar 1) S es tensor si transforma como tal, es decir:

$$S^{\mu\nu} \longrightarrow S^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} S^{\mu\nu} \tag{1}$$

(a) Si $S^{\mu\nu}$ y U_ν son tensores, muestre que $S^{\mu\nu}U_\nu$ es tensor.

(b) Si $T^{\mu\nu}$ es tensor. ¿Es $\partial_\alpha T^{\mu\nu}$ tensor? ¿Por qué?

P3. Usando el principio variacional, encuentre la ecuación geodésica: $\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0$

P4. La métrica para un espacio dos-dimensional está dado por

$$ds^2 = -V^2 dU^2 + dV^2 \tag{2}$$

Muestre que en coordenadas de Rindler:

$$x = V \cosh U, \; t = V \sinh U \tag{3}$$

el intervalo ds^2 es Minkowski con una dimensión espacial y otra temporal.

P5. (Propuesto) Considere el símbolo de Christoffel (o conexión):

$$\Gamma^\alpha_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}(\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\nu\rho}) \tag{4}$$

a) Mustre que $\Gamma^\alpha_{\nu\rho}$ transforma de la siguiente forma:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\nu'\rho'} = \partial_\alpha x^{\alpha'} \partial_{\nu'} x^\nu \partial_{\rho'} x^\rho \Gamma^\alpha_{\nu\rho} + \partial_\alpha x^{\alpha'} \partial_{\nu'} \partial_{\alpha'} x^\alpha \tag{5}$$

b) Usando la parte a), muestre que $\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$ transforma como vector, es decir:

$$\ddot{x}^{\alpha'} + \Gamma^{\alpha'}_{\nu'\rho'} \dot{x}^{\nu'} \dot{x}^{\rho'} = \partial_\alpha x^{\alpha'} (\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho) \tag{6}$$

c) Usando la parte a), muestre que $\nabla_\nu \omega_\rho = \partial_\nu \omega_\rho - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\omega_\alpha$ transforma como un tensor de rango 2.

AUX 2

P1 $\hat{e}_\mu = \partial_\mu$

a) $V = v^\mu e_\mu = v^\mu \partial_\mu$, $\partial_\mu = \frac{d}{dx^\mu}$

b) $\partial_{\mu'} = \Lambda^\alpha{}_{\mu'} \partial_\alpha$ → Transforma como vector

$= \frac{dx^\alpha}{dx^{\mu'}} \partial_\alpha$

$\vec{r} = \underbrace{r\cos\theta\,\text{sen}\phi}_{x}\,\hat{\imath} + \underbrace{r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi}_{y}\,\hat{\jmath} + \underbrace{r\cos\phi}_{k}\,\hat{k}$ $\mu' \in (r,\theta,\phi)$

$\mu \in (x,y,z)$

$\underline{\mu' = r}|$

$\partial_r = \frac{dx^\alpha}{dr}\partial_\alpha = \frac{dx}{\partial r}\partial_x + \frac{dy}{dr}\partial_y + \frac{dz}{dr}\partial_z$

$\partial r = \cos\theta\,\text{sen}\phi\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\hat{\jmath} + \cos\phi\,\hat{k}$

$\underline{\mu' = \theta}|$

$\partial_\theta = \frac{dx^\alpha}{d\theta}\partial_\alpha \quad \ldots$

$\underline{\mu' = \phi}|$

...

c)

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\qquad \partial_\mu = \Lambda^{\alpha'}{}_\mu \partial_\alpha$

$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$

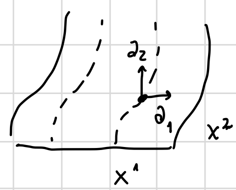
$\phi = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$

d) $A = A^\mu \partial_\mu$ si $\lambda = \tau$ → A es la velocidad.

$\rightarrow \frac{dA}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu A \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} = \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\lambda}}_{A_\mu} \cdot \partial_\mu$

parámetro afín (en gral. el τ)

· Tasa de cambio en 1 dirección manteniendo la otra de.



$\boxed{P2}$ $S^{\mu\nu} \longrightarrow S^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} S^{\mu\nu}$

a) $S^{\mu\nu} U_{\nu} \longrightarrow S^{\mu'\nu'} U_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \underline{\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}} S^{\mu\nu} \underline{\Lambda^{\alpha}{}_{\nu'}} U_{\alpha}$

✓ Transforma como tensor de rango 1.

$$= \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \delta^{\alpha}{}_{\nu} S^{\mu\nu} U_{\alpha}$$

$$= \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} S^{\mu\nu} U_{\nu}$$

b) $\partial_{\alpha} T^{\mu\nu} \longrightarrow \partial_{\alpha'} T^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\alpha'} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \partial_{\alpha} T^{\mu\nu}$

$\cdot\, \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} = \dfrac{dx^{\mu'}}{dx^{\mu}}$

$$\partial_{\alpha'} T^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\alpha'} \partial_{\alpha} \left(\Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} T^{\mu\nu} \right)$$

$$= \Lambda^{\alpha} \left[\underline{\underline{(\partial_{\alpha} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu}) \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} T^{\mu\nu}}} + \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \underline{\underline{(\partial_{\alpha} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu})}} T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \partial_{\alpha} T^{\mu\nu} \right]$$

→ No transforma como tensor ya que tiene términos extras

⇒ No es tensor //

$\boxed{P3}$ Geodésica: Trayectoria que toma la partícula en espacio curvo.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\mu}$$
$$= -d\tau^2$$

campo métrico: depende de las coordenadas

se quiere extremar la acción. →

$$S = \int d\tau = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \cdot \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}}\, d\lambda = \int \left(-g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}\right)^{1/2} d\lambda$$

$* \quad \delta = \dfrac{\delta}{\delta x^{\mu}} \delta x^{\mu}$

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \frac{\delta\left(-g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}\right)}{\left(-g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}\right)^{1/2}} d\lambda \qquad \leftarrow d\tau/d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left(\delta g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} + \underbrace{g_{\mu\nu} \delta x'^{\mu} x'^{\nu} + g_{\mu\nu} x'^{\mu} \delta x'^{\nu}}_{2 g_{\mu\nu} \delta x'^{\mu} x'^{\nu}} \right) \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau$$

$$* \quad \delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \delta x^{\rho}$$

ahora $x' = \dot{x}$ por $d\tau$. ←

$$= -\frac{1}{2} \int \left(\partial_{\rho} g_{\mu\nu} \delta x^{\rho} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} + 2 g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} \delta \dot{x}^{\mu} \right) d\tau.$$

$$\frac{d}{dt} g_{\mu\nu} = \frac{d g_{\mu\nu}}{d x^{\mu}} \frac{d x^{\mu}}{dt}$$

Integrar x partes:

$$* \quad \frac{d}{dt}\left(g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} \delta x^{\mu} \right) = \overbrace{\dot{g}_{\mu\nu}}^{\partial_{\rho} g^{\mu\nu} \dot{x}^{\rho}} \dot{x}^{\nu} \delta x^{\mu} + g_{\mu\nu} \ddot{x}^{\nu} \delta x^{\mu} + g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} \delta \dot{x}^{\mu}.$$

||
0 x teo. Stokes y ppio variacional.

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\partial_\rho g_{\mu\gamma}\,\delta x^\rho\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - 2\left(\partial_\rho g_{\mu\gamma}\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\gamma \delta x^\mu + g_{\mu\gamma}\ddot{x}^\gamma \delta x^\mu\right)\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(-\partial_\mu g_{\mu\rho}\, \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho + 2\left(\partial_\rho g_{\mu\gamma}\, \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu + g_{\mu\gamma}\, \ddot{x}^\gamma\right)\right) \delta x^\mu d\tau$$

$$* \quad 2\,\partial_\rho g_{\mu\nu}\, \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu = \partial_\rho g_{\mu\nu}\, \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu + \partial_\rho g_{\mu\nu}\, \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(-\partial_\mu g_{\mu\rho}\, \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho + \partial_\rho g_{\mu\nu}\, \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu + \partial_\gamma g_{\mu\rho}\, \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho + 2 g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu \right) \delta x^\mu d\tau = 0.$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \frac{1}{2}\left(\partial_\rho g_{\mu\gamma} + \partial_\gamma g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\mu\rho}\right)\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \qquad / g^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}^\alpha + \underbrace{\frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\partial_\rho g_{\mu\gamma} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\nu\rho}\right)}_{\Gamma^\alpha_{\nu\rho}} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0$$

Ecuación geodésica $\leftarrow$

$$\Rightarrow \ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\rho}\, \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0. \;//$$

$\boxed{P4}$ $\quad ds^2 = -V^2 dU^2 + dV^2 \quad \longrightarrow$ Mostrar que es espacio plano (equivalente a Minkowski)

· $x = V\cosh U$

$t = V\sinh U$

$x^{\alpha'} = (U, V) \quad ; \quad g_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} -V^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x^\alpha = (t, x) \quad ; \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\cdot\, g_{\alpha'\beta'} = \Lambda^\alpha{}_{\alpha'} \Lambda^\beta{}_{\beta'}\, g_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{dx^\alpha}{dx^{\alpha'}} \frac{dx^\beta}{dx^{\beta'}}\, g_{\alpha\beta}.$$

los que sobreviven.

$$g_{0'0'} = \frac{dx^\alpha}{dx^{0'}} \frac{dx^\beta}{dx^{0'}}\, g_{\alpha\beta} = \frac{dx^\alpha}{dU} \cdot \frac{dx^\beta}{dU}\, g_{\alpha\beta} = \left(\frac{dt}{dU}\right)^2 \cdot -1 + \left(\frac{dx}{dU}\right)^2 \cdot 1$$

$$= -(V\cosh U)^2 + (V\operatorname{senh} U)^2 = -V^2$$

$$g_{\tilde{t}\tilde{t}} = \frac{dx^\alpha}{dV}\frac{dx^\beta}{dV} g_{\alpha\beta} = -\left(\frac{dt}{dV}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dV}\right)^2 = \cosh^2 U - \operatorname{senh}^2 U$$

$$= 1 \;//.$$

Iguales bajo transf. de coordenadas.

Aux 3.

12· abril

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\, x^{\mu} \quad , \quad \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & & 0 \\ -\gamma v & \gamma & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

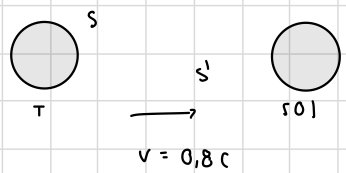
$$\Delta t = \gamma(\Delta t - v\Delta x)$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

$\Delta t = 0 \longrightarrow$ Contracción espacial

$\Delta x = 0 \longrightarrow$ " temporal

Ejemplo

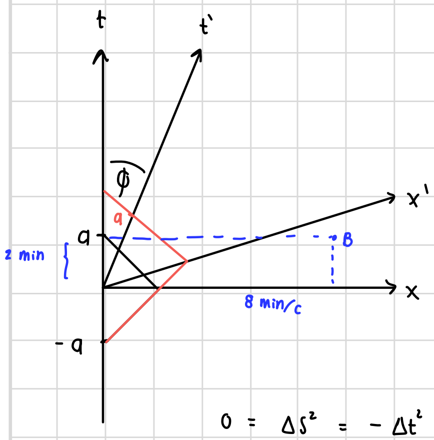


En S. { Evento A , $t=0$, tierra
Evento B , $t = 2$ min , sol

$$\Delta t' = \gamma(\underbrace{\Delta t}_{2\,\text{min}} - \overbrace{v}^{0{,}8c} \underbrace{\Delta x}_{8\,\text{min}/c}) \approx -7{,}7 \text{ min.}$$

para el caso en que da (−) es xq B ocurre antes que A. (para S')

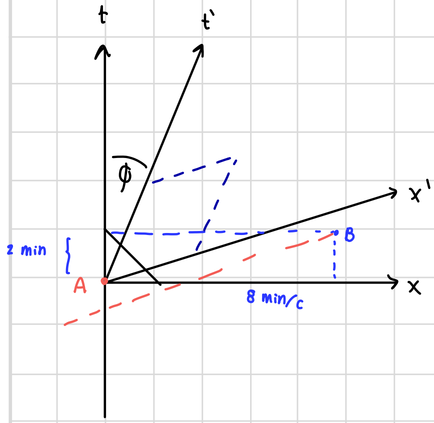
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



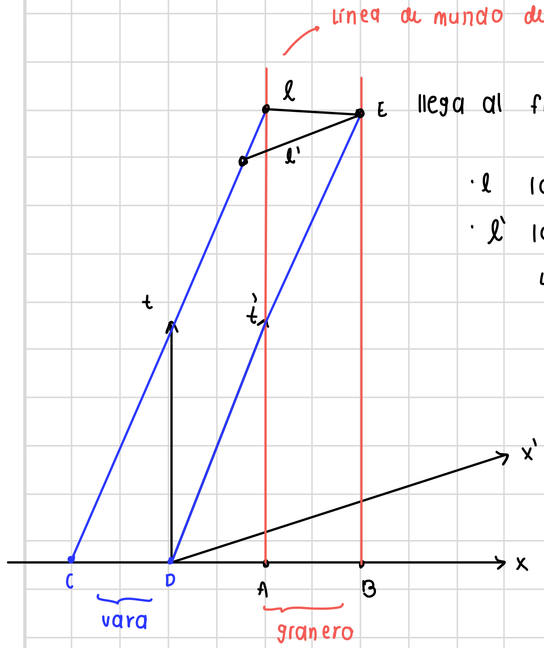
· velocidad es 1/pendiente.

$\tan\phi = v$

$$0 = \Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2$$



Granero pértiga



llega al final del granero

- ℓ largo en el sistema s.
- ℓ` largo en el sistema s'.

↳ ℓ < ℓ`   (vara se sale del granero

Lagrangiano de una partícula libre en notación tensorial ⟵ $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{x}^{\mu})}\right) - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}}}^{\,0} = 0$$

$\boxed{P1}$ $$\ddot{\xi}^{\mu} = \frac{\partial^2 \xi^{\mu}}{\partial \tau^2} = 0$$

a) $$d\xi^{\mu} = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \Rightarrow \ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \cdot \dot{x}^{\rho} \dot{x}^{\sigma} = 0$$

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\tau}} \frac{\partial^2 \xi^{\tau}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}$$

· $\xi = \xi(x^{\mu}) \Rightarrow d\xi = \frac{d\xi}{dx} dx$

$$\partial_{\tau}(\partial_{\nu} \xi^{\mu}) = \partial_{\alpha} \partial_{\nu} \xi^{\mu} \dot{x}^{\alpha} \quad / \quad \frac{d}{d\tau}\Big(\overbrace{\frac{d\xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}}^{\partial_\nu \xi^\mu}\Big) = \frac{d}{dx^{\alpha}} \cdot \overbrace{\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}}^{\dot{x}^{\alpha}} \cdot \left(\frac{d\xi^{\mu}}{dx^{\nu}}\right)$$

índices libres.

$$\therefore \quad \dot{\xi}^{\mu} = \partial_{\nu} \xi^{\mu} \dot{x}^{\nu} \Rightarrow \ddot{\xi}^{\mu} = \partial_{\tau}(\partial_{\nu}\xi^{\mu}) \dot{x}^{\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\mu} \ddot{x}^{\mu}$$

$$= \partial_{\nu}\xi^{\mu} \ddot{x}^{\nu} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}\xi^{\mu} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\nu} = 0 \quad / \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\mu}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \ddot{x}^{\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\mu}} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}\xi^{\mu} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\mu}} = 0.$$

$$\Rightarrow \delta^{\lambda}{}_{\nu} \ddot{x}^{\nu} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}\xi^{\mu} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\mu}} = 0$$

$$\ddot{x}^{\lambda} + \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\nu} \underbrace{\left(\partial_{\alpha}\partial_{\nu}\xi^{\mu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\mu}}\right)}_{\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}} = 0$$

⟶ símil con la ec. geodésica.

· $$g_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \frac{d\xi^{\rho}}{dx^{\mu}} \cdot \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}$$

Partimos de acá ⟵ $g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\rho\sigma} d\xi^{\rho} d\xi^{\sigma}$.

⟶ la métrica en el sistema ξ es plana (elijo la transf. de coordenadas ξ para que la métrica se ve plana)

$$\ddot{\xi}^{\mu} = 0 \Rightarrow \ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = 0.$$

↓

partícula libre con una métrica <u>no</u> plana

* sólo asumo sobre distancias en espacio-tiempo

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\sigma g_{\nu\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\rho\sigma} \right)$$

emerge de las ecs. de movimiento.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\, \partial_\mu \xi^\alpha \partial_\nu \xi^\beta$$

sale xq es el de Minkowski

$$\Rightarrow \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Big(\eta_{\alpha\beta}\, \partial_\sigma (\partial_\nu \xi^\alpha \partial_\rho \xi^\beta) + \eta_{\alpha\beta}\, \partial_\rho (\partial_\sigma \xi^\alpha \partial_\nu \xi^\beta) - \eta_{\alpha\beta}\, \partial_\nu (\partial_\rho \xi^\alpha \partial_\sigma \xi^\beta) \Big)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \Big[\cancel{\partial_\sigma \partial_\nu \xi^\alpha \partial_\rho \xi^\beta} + \cancel{\partial_\nu \xi^\alpha \partial_\sigma \partial_\rho \xi^\beta} + \partial_\rho \partial_\sigma \xi^{\cancel{\alpha}\,\beta} \partial_\nu \xi^{\cancel{\beta}\,\alpha} + \partial_\sigma \xi^\alpha \partial_\rho \partial_\nu \xi^\beta - \cancel{\partial_\nu \partial_\rho \xi^{\cancel{\alpha}\,\beta} \partial_\sigma \xi^{\cancel{\beta}\,\alpha}} - \cancel{\partial_\rho \xi^{\cancel{\alpha}\,\beta} \partial_\nu \partial_\sigma \xi^{\cancel{\beta}\,\alpha}} \Big].$$

se pueden cambiar xq los términos por si solos son mudos

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \underline{\underline{g^{\mu\nu}}}\, \eta_{\alpha\beta}\, \partial_\nu \xi^\beta \partial_\sigma \partial_\rho \xi^\alpha$$

no tengo la inversa así que despejo $\eta_{\alpha\beta}$

$$= g^{\mu\nu} \left(\underline{\underline{g_{\lambda\tau}}} \underbrace{\frac{dx^\lambda}{d\xi^\alpha} \frac{dx^\tau}{d\xi^\beta} \right) \frac{d\xi^\alpha}{dx^\nu}}_{\delta^\lambda{}_\nu} \partial_\nu \partial_\rho \xi^\beta$$

$$= \overbrace{\delta^\mu{}_\tau}\, \frac{dx^\tau}{d\xi^\beta} \cdot \partial_\sigma \partial_\rho \xi^\beta$$

$$= \frac{dx^\mu}{d\xi^\beta} \partial_\sigma \partial_\rho \xi^\beta = \boxed{\Gamma^\mu_{\sigma\rho}.}$$

→ mismos índices debe tener!

Auxiliar 4

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. **(P2 Auxiliar 3)** El simbolo de Christoffel está dado por:

$$\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}(\partial_{\rho} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\mu} g_{\nu\rho}) \tag{1}$$

Muestre las siguientes identidades:

(a) $\partial_{\rho} g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\nu\mu\rho}$

(b) $\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{\partial_{\lambda}\sqrt{g}}{\sqrt{g}}$ (*Hint:* $\partial_{\lambda} g = g g^{\mu\nu} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}$, donde g es el determinante de $g_{\mu\nu}$)

P2. Considere el lagrangiano de una partícula libre:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \tag{2}$$

a) **(Propuesto)** Aplique las ecuaciones de Euler-Lagrange y obtenga la ecuación geodésica:

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\rho} = 0 \tag{3}$$

b) Muestre que $\mathcal{L}$ es una constante de movimiento.

P3. La métrica de una 2-esfera de radio R está dada por:

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{4}$$

(a) Calcule todos los simbolos de Christoffel

(b) Muestre que le ecuación geodésica coincide con las ecuaciones de Euler-Lagrange

(c) Muestre que las trayectorias que satisfacen la ecuación geodésica son circulos máximos

P4. La derivada covariante ∇_{μ} es la generalización tensorial de la derivada parcial ∂_{μ}. Sabemos que la derivada parcial de un vector no transforma como tensor. Esto puede ser corregido definiendo la derivada covariante de la siguiente forma:

$$\nabla_{\mu} A^{\nu} = \partial_{\mu} A^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A^{\lambda} \tag{5}$$

$$\nabla_{\beta} F^{\mu\nu} = \partial_{\beta} F^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} F^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} \tag{6}$$

(a) Aplicando la regla de Leibniz y usando que $\nabla_{\mu} f = \partial_{\mu} f$, con f un escalar, muestre que para 1-formas se obtiene:

$$\nabla_{\mu} A_{\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda} \tag{7}$$

(b) Usando $\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\lambda \sqrt{g}}{\sqrt{g}}$, muestre que

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{\partial_\mu(\sqrt{g} J^\mu)}{\sqrt{g}}, \quad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu(\sqrt{g} F^{\mu\nu})}{\sqrt{g}} \tag{8}$$

donde $F^{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico.

$\boxed{P2}$

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \qquad g_{\mu\nu}(x^\mu(\tau))$$

$$\cdot\ \underbrace{G_{\mu\nu}} = 8\pi G \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{energía momento.}}$$

a) $$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} g_{\mu\nu} = \frac{d g_{\mu\nu}}{d x^\rho} \cdot \frac{d x^\rho}{d\tau}$$

b) $$\frac{dL}{d\tau} = 0 \implies \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right) = \frac{1}{2}\Big(\partial_\tau g_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu}\ddot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \ddot{x}^\nu\Big)$$

$\mu \leftrightarrow \nu$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\partial_\rho g_{\mu\nu}\, \dot{x}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2 g_{\mu\nu}\ddot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)$$

$$* \ \partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\nu\mu\rho}.$$

· Ec. geodésica: caída libre de una partícula en espacio curvo

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma^\mu_{\lambda\rho}\, \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho$$
ec. geodésica.

$$= \frac{1}{2}\Big[\left(\Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\nu\mu\rho}\right)\dot{x}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2 g_{\mu\nu}\left(-\Gamma^\mu_{\lambda\rho}\, \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho\right)\dot{x}^\nu\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underset{\substack{\nu\to\lambda \\ \mu\to\nu}}{\Gamma_{\mu\nu\rho}\, \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu} + \underset{\mu\to\lambda}{\Gamma_{\nu\mu\rho}\, \dot{x}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} - 2\underbrace{g_{\mu\nu}\Gamma^\mu_{\lambda\rho}}_{\Gamma_{\nu\lambda\rho}}\dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\cancel{\Gamma_{\nu\lambda\rho}\, \dot{x}^\rho} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu + \cancel{\Gamma_{\nu\lambda\rho}\, \dot{x}^\rho} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu - 2\,\cancel{\Gamma_{\nu\lambda\rho}\, \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho}\, \dot{x}^\nu\Big]$$

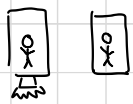
$$= 0. //$$

Ppio. de equivalencia:

$$F = m_i a$$ son iguales.

$$F = -m_g \nabla\phi$$

masa gravitacional



Localmente es igual el efecto de acelerar que en la tierra.

$\boxed{P3}$

$$ds^2 = \left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\phi^2\right) = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \implies g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\cdot\ \Gamma^\alpha_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\nu\rho}\right)$$

* Todas las derivadas de $g_{\theta\theta}$ son 0. $\partial_\phi g_{\phi\phi} = 0$

$$\partial_\theta g_{\phi\phi} = 2\,\text{sen}\theta \cos\theta$$

fija $\mu = \theta$

$\underline{\alpha = \theta \,|}$ $$\Gamma^\theta_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\theta\mu}\left(\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\nu\rho}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\theta\theta}\left(\partial_\rho \cancelto{0}{g_{\theta\nu}} + \partial_\nu \cancelto{0}{g_{\theta\rho}} - \partial_\theta g_{\nu\rho}\right)$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{\phi\phi}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2 \,\text{sen}\theta \cos\theta = -\text{sen}\theta \cos\theta$$

$\alpha = \phi$

$$\Gamma^{\phi}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(\partial_\rho g_{\phi\nu} + \partial_\nu g_{\phi\rho} - \cancelto{0}{\partial_\phi g_{\nu\rho}} \right)$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(\partial_\phi \cancelto{0}{g_{\phi\theta}} + \partial_\theta g_{\phi\phi} - \partial_\phi \cancelto{0}{g_{\phi\phi}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \cdot 2\,\text{sen}\theta \cos\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$$

b) $\ddot{x}^\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$

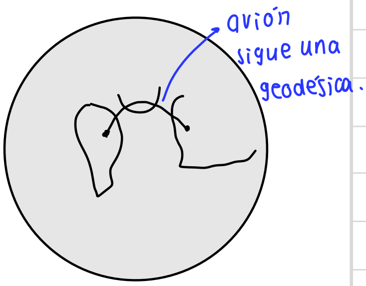
$\alpha = \theta$

$$\ddot{\theta} + \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} \dot{\phi} \dot{\phi} = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \, \dot{\phi}^2 = 0} \rightarrow \text{Ec. de mov. para } \theta.$$

$\alpha = \phi$

$$\ddot{\phi} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} \dot{\phi}\dot{\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} \dot{\theta}\dot{\phi} = \ddot{\phi} + 2\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} \dot{\theta}\dot{\phi}$$



$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} + \frac{2\cos\theta}{\text{sen}\theta} \dot{\phi}\dot{\theta} = 0}$$

$(\theta(\tau), \phi(\tau)) = (\tau, \phi_0)$ → circulo máximo meridiano

· $\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A^\lambda$

$$\nabla_\beta F^{\mu\nu} = \partial_\beta F^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} F^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha}$$

Mostrar $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_\lambda$

$$\nabla_\mu f = \partial_\mu f$$

sea un escalar $A_\nu V^\nu$

$$\partial_\mu (A_\nu V^\nu) = \partial_\mu(A_\nu) V^\nu + A_\nu \partial_\mu V^\nu$$

$$\parallel$$

$$\nabla_\mu (A_\nu V^\nu) = (\nabla_\mu A_\nu) V^\nu + A_\nu \nabla_\mu (V^\nu)$$

$$\Rightarrow V^\nu \nabla_\mu A_\nu = -A_\nu \underbrace{\nabla_\mu V^\nu}_{\text{conocido}} + \partial_\mu A_\nu V^\nu + A_\nu \partial_\mu V^\nu$$

$$= -A_\nu \left(\cancel{\partial_\mu V^\nu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} V^\rho \right) + \partial_\mu A_\nu V^\nu + \cancel{A_\nu \partial_\mu} V^\nu$$

$$V^\nu \nabla_\mu A_\nu = -A_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} V^\rho + \partial_\mu A_\nu V^\nu$$

$\rho \to \nu$

$\nu \to \lambda$

$$\cancel{V^\nu} \nabla_\mu A_\nu = -A_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \cancel{V^\nu} + \partial_\mu A_\nu \cancel{V^\nu}$$

$$\boxed{\nabla_\mu A_\nu = -A_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu}$$

Auxiliar 5

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. Sabemos que la derivada covariante transforma como tensor debido a la incorporación de una conexión $\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}$ (que no es un tensor) tal que $\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} V^\rho$. Un aspecto importante es que es posible agregar un tensor arbitrario a la derivada covariante y seguiría transformando como tal. En este problema derivaremos la expresión para el símbolo de Christoffel imponiendo ciertas propiedades a la conexión y la métrica. Para esto:

a) Considere un segundo tipo de derivada covariante $\hat{\nabla}$ con su conexión asociada $\hat{\Gamma}$ tal que $\hat{\nabla}_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \hat{\Gamma}^{\nu}_{\mu\rho} V^\rho$. Muestre que la diferencia entre las conexiones

$$S^{\nu}_{\mu\rho} = \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} - \hat{\Gamma}^{\nu}_{\mu\rho}, \tag{1}$$

es un tensor.

b) Muestre que la permutación de los indices inferiores, i.e $\hat{\Gamma}^{\nu}_{\mu\rho} = \Gamma^{\nu}_{\rho\mu}$, es consistente con el resultado anterior.

c) Sea el tensor de torsión definido como

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = 2\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}. \tag{2}$$

Muestre que una conexión sin torsión implica que: $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ y $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)}$ donde $2\Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)} \equiv \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$.

d) Usando la propiedad de compatibilidad de la métrica: $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ y simetría de la conexión, muestre que

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \tag{3}$$

P2. Considere dos geodésicas $x^\mu(\tau)$ y $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$ tales que cumplen

$$\frac{D\dot{x}^\mu}{d\tau} \equiv \ddot{x}^\mu + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0 \tag{4}$$

donde δx^μ es un vector desviación y $D/d\tau = u^\mu \nabla_\mu$ es la derivada covariante direccional.

a) Muestre que el vector δx^μ evoluciona según la siguiente ecuación:

$$\delta \ddot{x}^\mu + 2\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \delta \dot{x}^\lambda + \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda \delta x^\rho = 0. \tag{5}$$

b) Muestre que la ecuación obtenida en la parte a) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} u^\nu u^\lambda \delta x^\rho, \tag{6}$$

donde

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}. \tag{7}$$

Pauta Auxiliar 5

P1

a) Por construcción $\nabla_\mu V^\nu$ y $\tilde{\nabla}_\mu V^\nu$ son tensores. La diferencia entre ellos también es un tensor:

$$\nabla_\mu V^\nu - \tilde{\nabla}_\mu V^\nu = \cancel{\partial_\mu V^\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} V^\rho - \cancel{\partial_\mu V^\nu} - \tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\rho} V^\rho$$

$$= \left(\Gamma^\nu_{\mu\rho} - \tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\rho} \right) V^\rho \equiv S^\nu_{\mu\rho} V^\rho$$

Como V es arbitrario $\Rightarrow$ $S^\nu_{\mu\rho} = \Gamma^\nu_{\mu\rho} - \tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\rho}$ es tensor

$\Rightarrow$ La conexión admite una "corrección" de forma tensorial $\Gamma^\nu_{\mu\rho} = \tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\rho} + S^\nu_{\mu\rho}$

b) Sabemos que la conexión transforma como (Ver Aux 2)

$$\tilde{\Gamma}^{\nu'}_{\mu'\rho'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\rho} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\rho}$$

Es directo ver que $\tilde{\Gamma}^{\nu'}_{\mu'\rho'} = \Gamma^{\nu'}_{\rho'\mu'}$ transforma igual ya que la derivada parcial en el último término conmutan.

c) Definiendo $T^\lambda_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$

Si no hay torsión $\Rightarrow$ $T^\lambda_{\mu\nu} = 0 = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ $\Rightarrow$ $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$

Notar que $\Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} + \Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

Si no hay torsión, $\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} = 0$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} + \cancelto{0}{\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)}$$

d) Usando compatibilidad de la métrica 3 veces:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla_\nu g_{\rho\mu} = \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0 \qquad (3)$$

Calculamos (1) - (2) - (3):

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \cancel{\Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu}} - \cancel{\Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda}} - \partial_\mu g_{\nu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + \cancel{\Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}}$$

$$-\partial_\nu g_{\rho\mu} + \cancel{\Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu}} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} = 0 \quad / g^{\sigma\rho}$$

$$\Rightarrow g^{\sigma\rho}\left(\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu}\right) + 2\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right)}$$

* La inclusión de una conexión no es la única forma de construir un tensor. Ejemplos son la derivada exterior:

$$(d\omega)_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}\omega_{\nu]} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$$

y conmutadores de campos vectoriales:

$$[X,Y]^\mu = X^\lambda \partial_\lambda Y^\mu - Y^\lambda \partial_\lambda X^\mu$$

Si la conexión no tiene torsión, podemos extender $\partial_\mu \to \nabla_\mu$

$$(d\omega)_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu}\omega_{\nu]} \quad ; \quad [X,Y]^\mu = X^\lambda \nabla_\lambda Y^\mu - Y^\lambda \nabla_\lambda X^\mu$$

P2

a) Se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\dot{x}^\nu\dot{x}^\lambda = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{x}^\mu + \delta\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x+\delta x)(\dot{x}^\nu + \delta\dot{x}^\nu)(\dot{x}^\lambda + \delta\dot{x}^\lambda) = 0 \quad (2)$$

$$* \ \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x+\delta x) \underset{\text{Taylor}}{\simeq} \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\delta x^\rho$$

De (2):

$$\ddot{x}^\mu + \delta\ddot{x}^\mu + (\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\delta x^\rho)(\dot{x}^\nu + \delta\dot{x}^\nu)(\dot{x}^\lambda + \delta\dot{x}^\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x}^\mu} + \delta\ddot{x}^\mu + \underline{\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\dot{x}^\nu\dot{x}^\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\dot{x}^\nu\delta\dot{x}^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\underbrace{\delta\dot{x}^\nu\dot{x}^\lambda}_{\nu\leftrightarrow\lambda}$$

$$+ \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\cancel{\delta\dot{x}^\nu\delta\dot{x}^\lambda}_{\to 0\ \mathcal{O}(2)} + \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\delta x^\rho\dot{x}^\nu\dot{x}^\lambda + \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\cancel{\delta x^\rho\delta\dot{x}^\nu}^{\to 0\ \mathcal{O}(2)}\dot{x}^\lambda$$

$$+ \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\cancel{\delta x^\rho\dot{x}^\nu\delta\dot{x}^\lambda}^{\to 0\ \mathcal{O}(2)} = 0$$

Los términos $\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\dot{x}^\nu\dot{x}^\lambda = 0$ (satisfacen (1))

$$\Rightarrow \boxed{\delta\ddot{x}^\mu + 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\dot{x}^\nu\delta\dot{x}^\lambda + \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\lambda\delta x^\rho = 0}$$

b) Comprobaremos la igualdad al revés:

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\delta x^\mu - R^\mu_{\iota\lambda\rho} u^\iota u^\lambda \delta x^\rho = 0 = \delta\ddot{x}^\mu + 2\Gamma^\mu_{\iota\lambda}\dot{x}^\iota\delta\dot{x}^\lambda + \partial_\rho\Gamma^\mu_{\iota\rho}\dot{x}^\iota\dot{x}^\lambda\delta x^\rho$$

Por definición: $\frac{D\delta x^\mu}{d\tau} = \delta\dot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\iota\lambda}\dot{x}^\iota\delta x^\lambda$

$$\Rightarrow \frac{D^2\delta x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left[\delta\dot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\iota\rho}\dot{x}^\iota\delta x^\rho\right] + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\left[\delta\dot{x}^\beta + \Gamma^\beta_{\iota\rho}\dot{x}^\iota\delta x^\rho\right]$$

$$= \delta\ddot{x}^\mu + \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\iota\rho}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\iota\delta x^\rho + \Gamma^\mu_{\iota\rho}\ddot{x}^\iota\delta x^\rho + \Gamma^\mu_{\iota\rho}\dot{x}^\iota\delta\dot{x}^\rho$$

$$+ \underbrace{\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\delta\dot{x}^\beta}_{\substack{\alpha\to\iota \\ \beta\to\rho}} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\iota\rho}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\iota\delta x^\rho \qquad * \; \ddot{x}^\iota = -\Gamma^\iota_{\lambda\sigma}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma$$

$$= \delta\ddot{x}^\mu + \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\iota\rho}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\iota\delta x^\rho + \Gamma^\mu_{\iota\rho}\delta x^\rho\left(-\Gamma^\iota_{\lambda\sigma}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma\right)$$

$$+ 2\Gamma^\mu_{\iota\rho}\dot{x}^\iota\delta\dot{x}^\rho + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\iota\rho}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\iota\delta x^\rho$$

Luego, calculamos

$$\frac{D^2}{d\tau^2}\delta x^\mu - R^\mu_{\iota\lambda\rho}\dot{x}^\iota\dot{x}^\lambda\delta x^\rho$$

$$= \delta\ddot{x}^\mu + \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\iota\rho}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\iota\delta x^\rho - \Gamma^\mu_{\iota\rho}\Gamma^\iota_{\lambda\sigma}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma\delta x^\rho$$

$$+ 2\Gamma^\mu_{\iota\rho}\dot{x}^\iota\delta\dot{x}^\rho + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\iota\rho}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\iota\delta x^\rho$$

$$-\left[\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\iota\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu_{\iota\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\iota\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\iota\lambda}\right]\dot{x}^\lambda\dot{x}^\iota\delta x^\rho$$

$$= \delta \ddot{x}^\mu + \cancel{\partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu \delta x^\rho} - \cancel{\Gamma^\mu_{\nu\rho} \Gamma^\nu_{\lambda\sigma} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\sigma \delta x^\rho}$$

$$+ 2 \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \delta \dot{x}^\rho + \underbrace{\cancel{\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{\nu\rho} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu \delta x^\rho}}_{\substack{\beta \to \sigma \\ \alpha \to \lambda}}$$

$$- \cancel{\partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu \delta x^\rho} + \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu \delta x^\rho - \cancel{\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu \delta x^\rho}$$

$$- \underbrace{\cancel{\Gamma^\mu_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu \delta x^\rho}}_{\sigma \to \nu}$$

$$= \delta \ddot{x}^\mu + 2 \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \delta \dot{x}^\rho + \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu \delta x^\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D^2}{d\tau^2} \delta x^\mu - R^\mu_{\nu\lambda\rho} u^\nu u^\lambda \delta x^\rho = 0 = \delta \ddot{x}^\mu + 2 \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \delta \dot{x}^\rho + \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda \delta x^\rho}$$

Auxiliar 6

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. Considere un campo vectorial $\vec{\xi}(x^\mu)$ definido en cada punto x^α del espacio-tiempo. El vector de Killing $\vec{\xi}(x^\mu)$ identifica una simetría si una traslación infinitesimal a lo largo de $\vec{\xi}(x^\mu)$, transformando un punto $P(x^\mu)$ a $P'(x^\mu + \delta x^\mu)$, deja invariante la geometría. Es decir,

$$\delta g_{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$

(a) Si $\delta x^\mu = -\xi^\mu$, calcule cómo cambia la métrica de P a P' y muestre que

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu}\xi^\lambda + g_{\mu\lambda}\partial_\nu \xi^\lambda + g_{\rho\nu}\partial_\mu \xi^\rho = 0 \tag{2}$$

(b) Muestre que la ecuación encontrada en a) es equivalente a la ecuación de Killing

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \tag{3}$$

P2. Muestre que los vectores de Killing de una superficie esférica

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \tag{4}$$

→ Carrol.
↓
sale la tarea!

están dados por

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi \\ \xi_2 &= -\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi \\ \xi_3 &= \partial_\phi \end{aligned} \tag{5}$$

P3. El tensor de energía-momento se define de la siguiente forma

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{6}$$

donde S es la acción para un campo con masa. Considere un campo escalar tal que $\delta S/\delta\phi = 0$.

(a) Usando lo calculado en la P1, muestre que, bajo una transformación infinitesimal de coordenadas, la acción cambia a

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\mu\nu}(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) + \frac{\delta S}{\delta \phi}\xi^\mu \partial_\mu \phi \right) \tag{7}$$

(b) Minimizando la acción, muestre que la energía y el momento se conservan

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{8}$$

(c) Si ξ es un campo vectorial de Killing, muestre que $J^\nu \equiv \xi_\mu T^{\mu\nu}$ es una corriente conservada.

AUX. 6.

P1 $\quad P(x^\mu)$ y $P'(x^\mu + \underbrace{\delta x^\mu}_{-\xi^\mu})$

$\delta g_{\mu\nu} = 0$

↳ La variación del vector P al P'

↳ Métrica en P − Métrica en P' → si deja invariante la métrica, δx^μ es vector de Killing.

a) $\delta x^\mu = -\xi^\mu$

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu$$
$$= x^\mu - \xi^\mu$$

Bajo una transf. de coordenadas: ; ξ es infinitesimal $O(\xi)^2 \to 0$.

$$g_{\mu\nu}(x^\mu) \longrightarrow g_{\mu'\nu'}(x^{\mu'}) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}} g_{\rho\lambda}(x^\mu)$$

· $$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}(x^\mu - \xi^\mu)$$
$$= \delta^\mu{}_\rho - \partial_\rho \xi^\mu$$

· $$\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} = \frac{1}{\delta^\mu{}_\rho - \partial_\rho \xi^\mu} \approx \delta^\rho{}_\mu + \partial_\mu \xi^\rho$$

taylor

(para comprobar) $\rightarrow \boxed{\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} = 1}$

↳ a 1° orden. $\longrightarrow \delta^\rho{}_\mu \delta^\mu{}_\rho = 1.$

Métrica en P'

$$g_{\mu'\nu'}(x^{\mu'}) = (\delta^\rho{}_\mu + \partial_\mu \xi^\rho)(\delta^\lambda{}_\nu + \partial_\nu \xi^\lambda)\, g_{\rho\lambda}(x^\mu).$$

evaluado en $x^{\mu'}$

$$\approx (\delta^\rho{}_\mu \delta^\lambda{}_\nu + \partial_\mu \xi^\rho \delta^\lambda{}_\nu + \delta^\rho{}_\mu \partial_\nu \xi^\lambda + \cancelto{0}{\partial_\mu \xi^\rho \partial_\nu \xi^\lambda})\, g_{\rho\lambda}$$

$$= g_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda g_{\rho\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda g_{\mu\lambda}$$

Métrica en P

$$g_{\mu\nu}(x^{\mu}) = g_{\mu\nu}(x^{\mu'} + \xi^{\mu}) \approx \underbrace{g_{\mu\nu}(x^{\mu'})}_{f(x_0)} + \underbrace{\partial_{\lambda}\, g_{\mu\nu}(x^{\mu'})\,\xi^{\lambda}}_{\partial f(x_0)\cdot\varepsilon}$$

en x^{μ}

Taylor. inventado

$$g_{\mu\nu}(x^{\mu}) = g_{\mu\nu}(x^{\mu'}) + \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}(x^{\mu}) + \cancel{O(\xi^2)}^{\,0}$$

taylor.

* $\boxed{\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'}(x^{\mu'}) - g_{\mu\nu}(x^{\mu'})}$. → evaluados en $x^{\mu'}$!

$$= \cancel{g_{\mu\nu}} + \partial_{\nu}\xi^{\lambda} g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}\xi^{\rho} g_{\rho\nu} - \cancel{g_{\mu\nu}} + \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}\,\xi^{\lambda} = 0$$ → Ec. de Killing ☺

→ g invariante bajo transf. de coordenadas $\Rightarrow$ ξ nos da cant. conservadas.

b) $$= \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu}(\xi^{\lambda} g_{\mu\lambda}) - \xi^{\lambda}\partial_{\nu} g_{\mu\lambda} + \underbrace{\partial_{\mu}(\xi^{\rho} g_{\rho c})}_{\partial_{\mu}\xi_{\nu} = \nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\xi_{\sigma}} - \xi^{\rho}\partial_{\mu} g_{\rho\nu}$$

$\rho \to \lambda$

$$= \nabla_{\nu}\xi_{\mu} + \cancel{\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\xi_{\sigma}} + \nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \cancel{\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}\xi_{\sigma} - \underbrace{\xi^{\lambda}}_{\xi_{\sigma} g^{\sigma\lambda}}(\partial_{\nu} g_{\mu\lambda} + \cancel{\partial_{\mu} g_{\lambda\nu}} - \partial_{\lambda} g_{\mu c}).$$

* Si hablamos que sigue la métrica invariante

↳ Es vector de Killing.

* Si la métrica no depende de ϕ → $\vec{v}$ de killing será $\boxed{\partial\phi}$

→ conservaø de momento angular

→ Métrica de Schwarchild es simétrica# esférica.

P3

$$T^{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$$

· Representa las presiones y densidad
· Depende de la teoría.

$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$

$\rightarrow G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$

$T_{\mu\nu}$ ↓ contenido de masa o energía.

· $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$

↓

acción puede depender de otras cosas.

⇓

ec. de mov. para ϕ se satisface.

· $$\delta S = \underbrace{\int d^4x}_{\text{integral de volumen.}} \left\{ \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}} \boxed{(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu)} + \frac{\delta S}{\delta \phi} \boxed{\xi^\mu \partial_\mu \phi} \right\}$$ → Queremos llegar.

$$S = -\int d^4x \overbrace{\underbrace{\sqrt{-g}}_{\text{densidad lagrangiana}} \mathcal{L}[g_{\mu\nu}, \phi]}^{S'}$$

el det. de la métrica de Minkowski es 1.

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\delta S'}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S'}{\delta \phi} \delta\phi \right\}$$

es lo que está dentro de la integral = densidad lagrangiana

* $$\boxed{\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}}{2}}$$

* $$\boxed{\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu}$$ → si $\neq 0$

↓

ξ no es vector de Killing pero esto siempre se cumple.

* $$\boxed{\delta\phi} = \phi(x^\mu - \xi^\mu) - \phi(x^\mu)$$

$$\simeq \phi(x^\mu) - \partial_\mu \phi \cdot \xi^\mu - \phi(x^\mu) \boxed{= -\xi^\mu \partial_\mu \phi}$$

b) $\nabla_\mu T^{\mu\nu} =$

* aquí no sabemos si ξ es vector de Killing! (es cualquier transformac infinitesimal).

$$\delta S = 0 = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} \left(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \right) \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \sqrt{-g}\, \underbrace{T^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu}_{} \right\}$$

$$\left[\nabla_\mu \left(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} \xi_\nu \right) - \sqrt{-g} \left(\nabla_\mu T^{\mu\nu} \right) \xi_\nu \right]$$

0

(término de superficie)

↳ Tco. de Stokes.

* Carroll: Teoría clásica de campos

⇓

derivadas totales no contribuyen a la acción.

* derivada covariante de la métrica es 0!

↳ Compatibilidad de la métrica: $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$

$\Rightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow$ conservac de energía momento //.

$g = \det(g_{\mu\nu})$.

c) $J^\mu \equiv \xi_\nu T^{\nu\mu} \rightarrow$ imponemos ec. de Killing.

$$\Rightarrow \nabla_\mu J^\mu = \nabla_\mu \left(\xi_\nu T^{\mu\nu} \right)$$

$$= \left(\nabla_\mu \xi_\nu \right) \cdot T^{\mu\nu} + \left(\cancel{\nabla_\mu T^{\mu\nu}} \right) \xi_\nu$$

* ξ cumple:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \qquad * \left(\nabla_\mu \xi_\nu \right) = -\nabla_\nu \xi_\mu.$$

$$= -\left(\nabla_\nu \xi_\mu \right) T^{\nu\mu} \qquad * \text{ T simétrico.}$$

$\mu \rightarrow \nu$

$\nu \rightarrow \mu$

$$= -\left(\nabla_\mu \xi_\nu \right) T^{\mu\nu} \Rightarrow = 0.$$

* Antisimétrico · simétrico $= 0$.

De otra forma:

$$= \frac{1}{2} \left(\nabla_\mu \xi_\nu T^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} \left(\nabla_\mu \xi_\nu T^{\mu\nu} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\nabla_\nu \xi_\mu T^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} \left(\nabla_\mu \xi_\nu T^{\mu\nu} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\nabla_\mu \xi_\nu T^{\nu\mu} \right) + \frac{1}{2} \left(\nabla_\mu \xi_\nu T^{\mu\nu} \right) = 0 \;//$$

$\Rightarrow \nabla J = 0$

⇓

corriente conservada //

Universidad de Chile
Departamento de Física
FI7012 - Relatividad General

Auxiliar 7

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. Gravedad linealizada es la aplicación de teoría de perturbaciones a la métrica, donde esta puede se escrita como la métrica de Minkowski más una pequeña perturbación

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \ \ |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{1}$$

Este método es efectivo para estudiar regímenes donde el campo gravitacional es débil.

a) Muestre que en gravedad linealizada, el tensor de Riemann está dado por

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\partial_\beta\partial_\gamma h_{\alpha\delta} + \partial_\alpha\partial_\delta h_{\beta\gamma} - \partial_\alpha\partial_\gamma h_{\beta\delta} - \partial_\beta\partial_\delta h_{\alpha\gamma}) \tag{2}$$

b) Muestre que el tensor de Riemann es invariante bajo transformaciones de gauge

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\xi_\nu - \nabla_\nu\xi_\mu \tag{3}$$

c) A partir de lo demostrado en a), calcule el tensor de Ricci, escalar de Ricci y tensor de Einstein

$$R_{\beta\delta} = R^\mu{}_{\beta\mu\delta}, \quad R = R^\beta{}_\beta, \quad G_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - \frac{1}{2}Rg_{\beta\delta} \tag{4}$$

d) Considere una perturbación de la métrica tal que $h_{00} = -2\Phi$, $h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij}$ y el tensor de energía-momento de un fluido perfecto en un sistema inercial: $T_{00} = \rho$, $T_{ij} = p\delta_{ij}$. Muestre que la componente temporal de la ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{5}$$

equivale a la ecuación de campo gravitacional de Newton

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{6}$$

P2. Considere la ecuación de desviación geodésica

$$\frac{D^2\delta x^\mu}{d\tau^2} = R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}u^\nu u^\lambda \delta x^\rho \tag{7}$$

donde $\delta x^j = \lambda^j$, con λ una parametrización de la trayectoria tal que $\lambda^j = \partial x^j/\partial\lambda$.

a) Examine la ecuación de desviación geodésica en el límite Newtoniano. Compare su resultado con el cálculo Newtoniano de la aceleración de una partícula de prueba en un campo gravitacional. Muestre que

$$R^j{}_{0k0} = \partial^j\partial_k\Phi \tag{8}$$

donde Φ es el potencial gravitacional Newtoniano.

b) Compruebe este resultado calculando el tensor de Riemann por definición, utilizando la métrica $h_{00} = -2\Phi$, $h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij}$.

$\boxed{P2}$ $$\frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} u^\nu u^\lambda \delta x^\rho \qquad \lambda^j = \frac{\partial x^j}{\partial \lambda}$$

$$\nabla_\mu \to \partial_\mu$$

$$* \quad \underbrace{dU^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\beta} U^\nu dx^\beta}_{DU^\mu}$$

$$* \quad \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \left(\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij} \right)$$

$$\to \frac{d^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} u^\nu u^\lambda \delta x^\rho$$

$$\to \frac{d^2}{d\tau^2} \Big(\underbrace{\lambda^\mu}_{\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda}} \Big) = R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} u^\nu u^\lambda \underbrace{\lambda^\rho}_{\frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda}}$$

$$\to \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} \right) = R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} u^\nu u^\lambda \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda}$$

$$\to \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} \right) = R^0{}_{\nu\lambda\rho} u^\nu u^\lambda \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda} + R^j{}_{\nu\lambda\rho} u^\nu u^\lambda \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda} \; ; \quad \text{como } R \sim h \;\to\; \underline{R \cdot u^i \to 0}.$$

$$= R^0{}_{0\lambda\rho} u^0 u^\lambda \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda} + \underline{R^0{}_{i\lambda\rho} \cancel{u^i}} u^\lambda \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda} + R^i{}_{00\rho} u^0 u^0 \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda}$$

$$= R^0{}_{00\rho} u^0 u^0 \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda} + R^j{}_{00\rho} u^0 u^0 \frac{\partial x^\rho}{\partial \lambda}$$

$$R^j{}_{000} = \frac{1}{2} \left(\partial_0^2 h_{j0} + \partial^j{}_0 h_{00} - \partial^j h_{00} - \partial_0^2 h_{0j} \right) = 0 \qquad * \partial_0 h_{\alpha\beta} = 0$$

tomando la componente espacial:

$$-\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = R^i{}_{00i} \underbrace{u^0 u^0}_{1} \frac{\partial x^i}{\partial \lambda} \qquad * \; u^0 u_0 = -1, \quad u^0 u^0 = 1$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x} = + R^i{}_{0j0} \cancel{\frac{\partial x^j}{\partial \lambda}} \cdot \cancel{\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = R^i{}_{0j0}}$$

//

Aux 7

17 · mayo.

Manifold: Espacio-tiempo (localmente luce plano)

buscar en internet pdf. (4 pág.).

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $h \ll 1$ $\rightarrow$ local flatness theorem. P2, Tarea 6

↳ Hipótesis : $\boxed{\partial_\gamma g_{\mu\delta}(P) = 0}$ (minkowski a 1° orden). $\rightarrow \Gamma = 0$

$\partial_\gamma \partial_\alpha g_{\mu\delta}(P) \neq 0.$

$\boxed{\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu.}$

$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, dx^2$

$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, $g = \Lambda \Lambda g$ $\rightarrow$ expandiendo en taylor.

a) $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}$

si es 0, siguen la misma geodésica.

$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\lambda} R^\lambda{}_{\beta\gamma\delta} = (\eta_{\alpha\lambda} + h_{\alpha\lambda}) R^\lambda{}_{\beta\gamma\delta}.$

$\simeq \eta_{\alpha\lambda} R^\lambda{}_{\beta\gamma\delta}$; xq R es de orden h (al menos).

cte entra en las derivadas.

$\simeq \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\alpha\sigma\delta} \cancel{\Gamma^\sigma_{\beta\delta}}^{0} + \cancel{\Gamma_{\alpha\sigma\delta}}^{0} \Gamma^\sigma_{\beta\gamma}$

$= \frac{1}{2}\partial_\gamma(\partial_\beta g_{\alpha\delta} + \cancel{\partial_\delta g_{\alpha\beta}} - \partial_\alpha g_{\beta\delta}) - \frac{\partial_\delta}{2}(\partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \cancel{\partial_\gamma g_{\alpha\beta}} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma})$ //

b) $x'^\mu \rightarrow x^\mu - \xi^\mu$

$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \xi - \nabla_\nu \xi_\mu$; aux. pasado. (imponíamos $\delta g = 0$) (como transforman todos los tensores).

$= g_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$; cov. pasan a ser parciales.

$R'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\Big[\partial_\gamma\partial_\beta(\underline{\underline{h_{\mu\nu}}} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu) - \partial_\gamma\partial_\alpha(\underline{\underline{h_{\beta\delta}}} - \partial_\beta\xi_\delta - \partial_\delta\xi_\beta)$

$- \partial_\delta\partial_\beta(\underline{\underline{h_{\alpha\gamma}}} - \partial_\alpha\xi_\gamma - \partial_\gamma\xi_\alpha) - \partial_\delta\partial_\alpha(\underline{\underline{h_{\beta\gamma}}} - \partial_\beta\xi_\gamma - \partial_\gamma\xi_\beta)\Big]$; xq η es cte. $\partial g = \partial h$.

$= \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\gamma\partial_\beta h_{\alpha\delta} - \partial_\gamma\partial_\alpha h_{\beta\delta} - \partial_\delta\partial_\beta h_{\alpha\gamma} + \partial_\delta\partial_\alpha h_{\beta\gamma})}_{R_{\alpha\beta\gamma\delta}.}$

$+ \frac{1}{2}\Big[\cancel{-\partial_\gamma\partial_\beta\partial_\alpha\xi_\delta} - \cancel{\partial_\gamma\partial_\beta\partial_\delta\xi_\alpha} + \cancel{\partial_\gamma\partial_\alpha\partial_\beta\xi_\delta} + \cancel{\partial_\gamma\partial_\alpha\partial_\delta\xi_\beta}$

$+ \cancel{\partial_\delta\partial_\beta\partial_\alpha\xi_\gamma} + \cancel{\partial_\delta\partial_\beta\partial_\gamma\xi_\alpha} - \cancel{\partial_\delta\partial_\alpha\partial_\beta\xi_\gamma} - \cancel{\partial_\delta\partial_\alpha\partial_\gamma\xi_\beta}\Big]$

* campos escalares transforman :

$$\phi' = \phi + \xi_\mu \partial^\mu \phi$$

$$\xi_\mu \partial^\mu \phi = -\phi.$$

c) $R_{\beta\delta} \equiv R^\mu{}_{\beta\mu\delta} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$; R es de orden h.

$$= \eta^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

$$= \eta^{\gamma\alpha} \frac{1}{2} (\partial_\gamma \partial_\beta h_{\alpha\delta} - \partial_\gamma \partial_\alpha h_{\beta\delta} - \partial_\delta \partial_\beta h_{\alpha\gamma} + \partial_\delta \partial_\alpha h_{\beta\gamma}.$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\gamma \partial_\beta h^\gamma{}_\delta - \underbrace{\partial_\gamma \partial^\gamma}_{\boxed{\partial_0\partial^0 + \partial_i\partial^i = \Box}} h_{\beta\delta} - \partial_\delta \partial_\beta \underbrace{\boxed{h^\gamma{}_\gamma}}_{\text{traza } (h)} + \partial_\delta \partial^\gamma h_{\beta\gamma}).$$

↳ D'Alambertiano.

($\Box$ Algo = 0
↳ ec. de onda.)

$$R = R^\beta{}_\beta = g^{\beta\delta} R_{\delta\beta}.$$

$$= g^{\beta\delta} R_{\beta\delta}. \quad (R_{\mu\nu} \text{ simétrico}).$$

$$= \eta^{\beta\delta} R_{\beta\delta}.$$

$$R = \eta^{\beta\delta} \frac{1}{2} (\partial^\gamma \partial_\beta h_{\gamma\delta} - \Box h_{\beta\delta} - \partial_\delta \partial_\beta h + \partial_\delta \partial^\gamma h_{\beta\gamma})$$

$$= \frac{1}{2} (\partial^\gamma \partial^\delta h_{\gamma\delta} - \Box \underbrace{h^\delta{}_\delta}_{h} - \underbrace{\partial_\delta \partial^\delta}_{\Box} h + \partial^\beta \partial^\gamma h_{\beta\gamma})$$

$$R = \partial^\gamma \partial^\beta h_{\gamma\beta} - \Box h.$$

$$G_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - \frac{1}{2} R g_{\beta\delta}. \quad \text{(reemplazando)}$$

$$= R_{\beta\delta} - \frac{1}{2} R \eta_{\beta\delta}.$$

d) $h_{00} = -2\phi$, $h_{ij} = -2\phi\, \delta_{ij}$

↳ h diagonal con -2ϕ en la diagonal.

$T_{00} = \rho$, $T_{ij} = p\, \delta_{ij}$.

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)\, u_\mu u_\nu + p\, g_{\mu\nu}$$

↗ en un sistema que vaya con el fluido.

$u = 0$

$u^0 \neq 0$

$u^0 u_0 = -1$

$u^\mu u_\mu = -1$

$u^0 u^0 = 1$

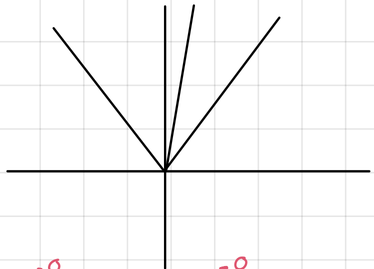
$u^0 = 1$

$$G_{00} = 8\pi G T_{00} \Leftrightarrow \nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad \text{(límite de Newton)}$$

$$G_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\left(\partial^\gamma\partial_\beta h_{\gamma\delta} - \Box h_{\beta\delta} - \partial_\gamma\partial_\beta h + \partial_\delta\partial^\gamma h_{\beta\gamma}\right) - \frac{1}{2}\left(\partial^\gamma\partial^\beta h_{\gamma\beta} - \Box h\right)\eta_{\beta\delta}.$$

· Límite Newtoniano: $u^i << u^0$

$$\frac{dx^i}{d\tau} << \frac{dx^0}{d\tau}.$$



· $h << 1$

$\partial_0 h_{\alpha\beta} = 0$

$$G_{00} = \frac{1}{2}\left(\partial^\gamma \cancel{\partial_0 h_{\gamma 0}}^{\,0} - \Box h_{00} - \cancel{\partial_0\partial_0 h}^{\,0} + \cancel{\partial_0 \partial^\gamma h_{0\gamma}}^{\,0} + \partial^\gamma\partial^\beta h_{\gamma\beta} - \Box h\right)$$

* deriv. del campo es 0. (ϕ no depende de t).

$$= \frac{1}{2}\left(- \underbrace{\partial_i\partial_i h_{00}}_{\nabla^2 h_{00}} + \partial^\gamma\partial^\beta h_{\gamma\beta} - \Box h\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\nabla^2(-2\phi) + \partial^i\partial^j h_{ij} - \nabla^2(\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta})\right).$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cancel{\nabla^2 2\phi} + \partial^i\partial^j(-2\phi\,\delta_{ij}) - \left[-\cancel{\nabla^2(-2\phi)} + \nabla^2(\eta^{ij} h_{ij})\right]\right)$$

$$\nabla^2(\eta^{ij} \cdot -2\phi\,\delta_{ij})$$

$$\eta^{ij}\delta_{ij} = \delta^{ij}\delta_{ij}(-2\phi).$$

$$\delta^{ij}\delta_{ij} = \delta^i{}_i = 3. \quad \text{(traza de la } \delta\text{)}.$$

$$= 2\nabla^2\phi$$

Auxiliar 8

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. Considere la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_m \right] \tag{1}$$

donde R es el escalar de Ricci, $\mathcal{L}_m$ un lagrangiano que describe cualquier campo de materia y κ una constante arbitraria. Varíe la acción y encuentre las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2}$$

P2. Usando compaatibilidad de la métrica $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$ y la identidad de Bianchi

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0 \tag{3}$$

muestre que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Muestre que este resultado es consistente con la conservación del momento y la energía.

P3. Considere la siguiente versión modificada de las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - aRg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{4}$$

donde a es una constante arbitraria.

a) Asuma que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} \neq 0$ y encuentre la ecuación de movimiento para $T^{\mu\nu}$.

b) Considere un fluido perfecto sin presión. Calcule la componente temporal de la ecuación encontrada en a) y muestre que si $a = 1/2$, el resultado corresponde al resultado correcto en el límite Newtoniano.

Pauta Auxiliar 8

P1

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa}R + \mathcal{L}_m\right]$$

Variamos la acción con respecto a $g^{\mu\nu}$:

$$\delta S = \int d^4x \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}R + \sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m\right)\delta g^{\mu\nu}$$

$$= \int d^4x \left\{\frac{1}{2\kappa}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}R\right) + \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m\right)\right\}\delta g^{\mu\nu}$$

$$= \int d^4x \left\{\frac{1}{2\kappa}\left[\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}R + \sqrt{-g}\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}\right] + \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m\right)\right\}\delta g^{\mu\nu}$$

$$* \boxed{\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2\sqrt{-g}}\delta g}$$

Para calcular la variacion de el determinante de la metrica g, usamos la fórmula de Jacobi: $\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$.

Luego usamos $\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2\sqrt{-g}}\delta g = \frac{-1}{2\sqrt{-g}}\cdot\left(-g\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

Calculemos $\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}$:

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$$

Calculamos $\delta R_{\mu\nu} = \delta(R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu})$. Para esto podemos adoptar un sistema localmente plano (gracias al Local-Flatness theorem) tal que $\Gamma = 0$ y $\nabla_\mu \leftrightarrow \partial_\mu$. En este sistema de referencia, el tensor de Ricci queda

$$R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}$$

$$\Rightarrow \delta R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \partial_\alpha \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$$

↳ Ec. covariante, válida en cualquier sistema de referencia

Por lo tanto:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left(\nabla_\alpha \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right)$$

Por compatibilidad de la métrica $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$, $g^{\mu\nu}$ entra en las derivadas covariantes

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \underbrace{\nabla_\alpha\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)}_{\alpha\to\mu,\ \mu\to\nu,\ \nu\to\alpha} - \underbrace{\nabla_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right)}_{\nu\leftrightarrow\mu}$$

$$= \nabla_\mu\left(g^{\nu\alpha}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}\right)$$

Reemplazando todo en la acción:

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2\kappa}\left[\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} R + \sqrt{-g}\,\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}\right] + \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m\right)\right\}\delta g^{\mu\nu}$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2\kappa}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu} R + \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\,\underline{\frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}}}\right)\right] + \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m\right)\right\}\delta g^{\mu\nu}$$

Estudiemos el término

$$\int d^4x\,\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\delta R_{\mu\nu}}{\cancel{\delta g^{\mu\nu}}}\cancel{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x\,\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\left[\nabla_\mu\underbrace{\left(g^{\nu\alpha}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}\right)}_{V^\mu}\right]$$

Notar que $\nabla_\mu V^\mu = \dfrac{\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,V^\mu\right)}{\sqrt{-g}}$ (P4 Aux 4)

$$= \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\,\cancel{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,V^\mu\right)}{\cancel{\sqrt{-g}}} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\,\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,V^\mu\right)$$

→ derivada total que se anula en los bordes por Teo de Gauss

$$= \frac{1}{2\kappa}\oint_{\partial\Omega} d\tilde{S}\,\vec{n}\,\sqrt{-g}\,V^{\mu} \quad \text{por teo de Gauss.}$$

Notar que $V^{\mu} = g^{\nu\alpha}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha} \sim \delta g^{\mu\nu}$ $\quad (\delta\Gamma \sim \delta g)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\kappa}\oint_{\partial\Omega} d\tilde{S}\,\vec{n}\,\sqrt{-g}\,V^{\mu} = \frac{1}{2\kappa}\oint_{\partial\Omega} d\tilde{S}\,\vec{n}\,\sqrt{-g}\,(\propto \delta g^{\mu\nu}) = 0$$

$$\delta g^{\mu\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

Minimizando la acción $\delta S = 0$:

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2\kappa}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}R + \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\cancelto{0}{\frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}}} \right)\right] + \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m\right)\right\}\delta g^{\mu\nu}$$

$$= \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\underbrace{\left\{ \frac{1}{2\kappa}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}\right] + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m\right)\right\}}_{0}\delta g^{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\kappa}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}\right] + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m\right) = 0$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \kappa\left[\frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m\right)\right]$$

Definiendo $T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_m\right)$ y $\kappa = 8\pi G$

$$\Rightarrow \boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}}$$

$\boxed{P2}$ De la identidad de Bianchi:

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0 \quad / \; g^{\delta\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$$

Por compatibilidad de la métrica $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$, $g^{\mu\nu}$ puede entrar en la derivada covariante:

$$\Rightarrow \nabla_\sigma \left(g^{\delta\sigma} \underbrace{g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}}_{R} \right) + \nabla_\nu \left(g^{\delta\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \underbrace{R_{\alpha\beta\sigma\mu}}_{-R_{\mu\sigma\alpha\beta}} \right) + \nabla_\mu \left(g^{\delta\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \underbrace{R_{\alpha\beta\nu\sigma}}_{-R_{\nu\sigma\beta\alpha}} \right)$$

$$= \nabla_\sigma \left(g^{\delta\sigma} R \right) - \nabla_\nu \left(g^{\delta\sigma} g^{\beta\nu} \underbrace{g^{\alpha\mu} R_{\mu\sigma\alpha\beta}}_{R_{\sigma\beta}} \right) - \nabla_\mu \left(g^{\delta\sigma} g^{\alpha\mu} \underbrace{g^{\beta\nu} R_{\nu\sigma\beta\alpha}}_{R_{\sigma\alpha}} \right)$$

$$= \nabla_\sigma \left(g^{\delta\sigma} R \right) - \nabla_\nu \left(\underbrace{g^{\delta\sigma} g^{\beta\nu} R_{\sigma\beta}}_{R^{\delta\nu}} \right) - \nabla_\mu \left(\underbrace{g^{\delta\sigma} g^{\alpha\mu} R_{\sigma\alpha}}_{R^{\delta\mu}} \right)$$

$$= \underbrace{\nabla_\sigma \left(g^{\delta\sigma} R \right)}_{\sigma \to \mu} - \underbrace{\nabla_\nu R^{\delta\nu}}_{\nu \to \mu} - \nabla_\mu R^{\delta\mu} \underset{\delta = \nu}{=} \nabla_\mu \left(g^{\mu\nu} R \right) - \nabla_\mu R^{\mu\nu} - \nabla_\mu R^{\mu\nu}$$

$$= \nabla_\mu \left(g^{\mu\nu} R - 2 R^{\mu\nu} \right) = 0 \quad / \; \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = \nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

La conservación de momento y energía nos dice que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$
El resultado obtenido es consistente ya que

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \quad / \nabla_\mu \quad \Rightarrow \quad \cancel{\nabla_\mu G^{\mu\nu}}^{\,0} = 8\pi G \cancel{\nabla_\mu T^{\mu\nu}}^{\,0}$$

$\boxed{P3}$

$$R^{\mu\nu} - aRg^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

a) Debemos encontrar una ecuación que relacione $T^{\mu\nu}$ con sus derivadas. Usamos $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

$$\underbrace{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}}_{G^{\mu\nu}} + \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} - aRg^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow G^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2} - a\right)Rg^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \;/\nabla_\mu$$

$$\Rightarrow \cancel{\nabla_\mu G^{\mu\nu}}^{\,0} + \left(\frac{1}{2} - a\right)\nabla_\mu\left(Rg^{\mu\nu}\right) = 8\pi G \underbrace{\nabla_\mu T^{\mu\nu}}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - a\right)g^{\mu\nu}\nabla_\mu R = \left(\frac{1}{2} - a\right)g^{\mu\nu}\partial_\mu R = \left(\frac{1}{2} - a\right)\partial^\nu R$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - a\right)\partial^\nu R = 8\pi G \nabla_\mu T^{\mu\nu}$$

Debemos expresar $\partial^\nu R$ en términos de T. Consideremos la traza de la ec. de Einstein:

$$\underbrace{R^\nu_\nu}_{R} - aR\underbrace{g^\nu_\nu}_{4} = 8\pi G \underbrace{T^\nu_\nu}_{T} \Rightarrow R - 4aR = 8\pi G T$$

$$\Rightarrow R = \frac{8\pi G T}{1-4a} \Rightarrow \partial^\nu R = \frac{8\pi G}{1-4a}\partial^\nu T$$

Reemplazando:

$$\left(\frac{1}{2} - a\right)\partial^\nu R = 8\pi G \nabla_\mu T^{\mu\nu} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{2} - a}{1-4a}\right)}_{K}\cancel{8\pi G}\,\partial^\nu T = \cancel{8\pi G}\,\nabla_\mu T^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla_\mu T^{\mu\nu} = K\,\partial^\nu T}$$

b) El tensor de energía-momento de un fluido perfecto está dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

Fluido sin presión $p=0$ $\Rightarrow T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$

Usamos la ecuación encontrada en a):

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = k\, \partial^\nu T$$

En el límite Newtoniano:
- $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $h \ll 1$
- $\partial_\rho g_{\mu\nu} = 0$
- $u^i \ll u^0$

$$\Rightarrow \Gamma = 0 \Rightarrow \nabla_\mu \to \partial_\mu$$

$$\Rightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} = k\, \partial^\nu T$$

Calculemos T: $T = T^\mu_{\ \mu} = \rho \underbrace{u^\mu u_\mu}_{-1} = -\rho$

Calculamos la componente 0 (a orden cero):

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = k\, \partial^0 T \Rightarrow \partial_0 T^{00} + \partial_i T^{0i} = -k\, \partial_0 T$$

$$* \; u^\mu u_\mu = -1 = u^0 u_0 + \cancel{u^i u_i}^{\to 0 \; \mathcal{O}(u^{i2})} \Rightarrow u^0 = 1$$

$$\Rightarrow \partial_0 (\rho \overbrace{u^0 u^0}^{1}) + \partial_i (\rho u^i \overset{1}{u^0}) = -k\, \partial_0 T$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho u^i) = -k \frac{\partial (-\rho)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = k \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Si $a = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 0$ $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0}$

Ec. de Euler no relativista

Auxiliar 9

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. Muchos objetos astrofísicos se pueden aproximar como sistemas esféricamente simétricos.

a) La métrica de cualquier espacio-tiempo está dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

Utilizando simetrías, muestre que la forma general de la métrica para un sistema esféricamente simétrico esta dada por

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0r}drdt + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2 \tag{2}$$

b) Considere un espacio-tiempo estático. ¿Qué condiciones debe cumplir la métrica? Muestre que puede ser escrita de la siguiente forma:

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2d\Omega^2 \tag{3}$$

c) ¿Qué condiciones deben cumplir Φ y Λ?

P2. (Propuesto) Muestre que las componentes del tensor de Einstein están dados por

$$G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\Phi}\frac{d}{dr}[r(1-e^{-2\Lambda})] \tag{4}$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda}(1-e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r}\Phi' \tag{5}$$

$$G_{\theta\theta} = r^2e^{-2\Lambda}[\Phi'' + (\Phi')^2 + \Phi'/r - \Phi'\Lambda' - \Lambda'/r] \tag{6}$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta} \tag{7}$$

P3. El interior de una estrella puede ser modelado como un fluido perfecto estático.

a) Muestre que las componentes del tensor de energía-momento para la estrella son

$$T_{00} = \rho e^{2\Phi}, \quad T_{rr} = pe^{2\Lambda}, \quad T_{\theta\theta} = r^2p, \quad T_{\phi\phi} = \sin^2\theta T_{\theta\theta} \tag{8}$$

b) Calcule las ecuaciones de conservación de energía y momento: $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$

P4. Calcule la ecuaciones de Einstein en el interior de la estrella y fuera de ella. Estudie el límite Newtoniano de las ecuaciones hidrodinámicas y el límite asintótico en el vacío. ¿Qué ocurre con la métrica en $r = 2M$ y $r = 0$?

P1

Pauta Auxiliar 9

a) De forma general, la métrica está dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Un requerimiento para preservar simetría esférica es mantener el término $d\Omega^2$ de esféricas:

$$ds^2 = g_{tt}\, dt^2 + g_{tr}\, dt\, dr + \ldots + g_{rr} dr^2 + \ldots + g_{\phi\theta}\, d\phi\, d\theta + \ldots + r^2 d\Omega^2$$

La condición de esféricamente simétrico $\Rightarrow$ la métrica es invariante bajo las transformaciones del tipo

i) $(t, r, \theta, \phi) \to (t, r, -\theta, \phi)$
ii) $(t, r, \theta, \phi) \to (t, r, \theta, -\phi)$

La métrica bajo una transformación de coordenadas transforma así:

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \Lambda^\alpha_{\ \bar{\mu}} \Lambda^\beta_{\ \bar{\nu}}\, g_{\alpha\beta}$$

i)

$$\Rightarrow g_{\bar{\theta}\bar{\phi}} = \frac{\partial x^\theta}{\partial x^{\bar{\theta}}} \frac{\partial x^\phi}{\partial x^{\bar{\phi}}} g_{\theta\phi} = \frac{\partial \theta}{\partial(-\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial(\phi)} g_{\theta\phi} = -g_{\theta\phi}$$

Como la geometría no debe cambiar $\Rightarrow g_{\bar{\theta}\bar{\phi}} = g_{\theta\phi}$ pero según la transformación $g_{\bar{\theta}\bar{\phi}} = -g_{\theta\phi} \Rightarrow g_{\theta\phi} = -g_{\theta\phi} \Rightarrow g_{\theta\phi} = 0.$

Lo mismo ocurre para ii). De forma análoga, todas las componentes cruzadas con ϕ, θ serán 0 por simetría:

i) $$g_{\bar{r}\bar{\theta}} = \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial(-\theta)} g_{r\theta} = -g_{r\theta} \Rightarrow g_{r\theta} = 0$$

ii) $$g_{\bar{r}\bar{\phi}} = \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial(-\phi)} g_{r\phi} = -g_{r\phi} \Rightarrow g_{r\phi} = 0$$

i) $g_{\bar{t}\bar{\theta}} = \frac{\partial t}{\partial t}\frac{\partial \theta}{\partial(-\theta)} g_{t\theta} = -g_{t\theta} \Rightarrow g_{t\theta} = 0$

ii) $g_{\bar{t}\bar{\phi}} = \frac{\partial t}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial(-\phi)} g_{t\phi} = -g_{t\phi} \Rightarrow g_{t\phi} = 0$

Por lo tanto:

$$\boxed{ds^2 = g_{tt}\, dt^2 + 2g_{tr}\, dt\, dr + g_{rr}\, dr^2 + r^2 d\Omega^2}$$

b) Condición de espacio-tiempo estático:

- Componentes de la métrica no dependen de t
- Geometría no cambia bajo transformaciones $t \to -t$

Análogo a la parte a):

$$g_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{\partial t}{\partial(-t)}\frac{\partial t}{\partial(-t)} g_{00} = g_{tt}$$

$$g_{\bar{r}\bar{r}} = \frac{\partial r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r} g_{rr} = g_{rr}$$

$$g_{\bar{t}\bar{r}} = \frac{\partial t}{\partial(-t)}\frac{\partial r}{\partial r} g_{tr} = -g_{tr} \Rightarrow g_{tr} = 0$$

Por lo tanto, la métrica queda

$$ds^2 = g_{00}\, dt^2 + g_{rr}\, dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Definimos $g_{00} = -e^{-2\phi}$ y $g_{rr} = e^{2\Lambda}$

Este cambio es posible ya que preserva la signatura de la métrica $g_{00} < 0$ y $g_{rr} > 0$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{ds^2 = -e^{2\phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2 d\Omega^2}$$

c) La condición de espacio-tiempo estático $\Rightarrow$ componentes de la métrica no dependen de t. Además, no pueden depender de θ, ϕ por simetría esférica

$\Rightarrow$ las componentes de la métrica solo dependen de r.

$$\Rightarrow \quad \phi = \phi(r) \quad , \quad \Lambda = \Lambda(r)$$

$\boxed{P3}$ El tensor de energía-momento de un fluido perfecto está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$$

donde ρ, p, u son la densidad, presión y velocidad del fluido. La condición de fluido estático es $u^i = 0$.

a) De la condición $u^\mu u_\mu = -1 = u^0 u_0 + \cancelto{0}{u^i u_i} \Rightarrow u^0 u_0 = -1$

$$\Rightarrow g_{00}(u^0)^2 = -e^{2\phi}(u^0)^2 = -1 \Rightarrow u^0 = e^{-\phi} \quad \text{y} \quad u_0 = -e^{\phi}$$

Por simetría de la métrica, solo sobreviven las siguientes componentes

$$T_{00} = (\rho + p) u_0 u_0 + p g_{00} = (\rho + \cancel{p})e^{2\phi} + p(\cancel{-e^{2\phi}}) = \rho e^{2\phi}$$

$$T_{rr} = (\rho + p)\cancelto{0}{u_r u_r} + p g_{rr} = p e^{2\Lambda}$$

$$T_{\theta\theta} = (\rho + p)\cancelto{0}{u_\theta u_\theta} + p g_{\theta\theta} = p r^2$$

$$T_{\phi\phi} = (\rho + p)\cancelto{0}{u_\phi u_\phi} + p g_{\phi\phi} = p r^2 \sin^2\theta$$

b) Calculamos $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_\beta T^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} T^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\mu\beta} T^{\alpha\mu} = 0$$

$\boxed{\alpha = 0}$ $\nabla_\beta T^{0\beta} = \partial_\beta T^{0\beta} + \Gamma^0_{\mu\beta} T^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\mu\beta} T^{0\mu}$

$$= \partial_0 T^{00} + \Gamma^0_{ii} T^{ii} + \Gamma^\beta_{0\beta} T^{00} = 0$$

- $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})$
- $\Gamma^0_{ii} = \frac{1}{2} g^{00}(\cancelto{0}{\partial_i g_{0i}} + \cancelto{0}{\partial_i g_{0i}} - \cancelto{0}{\partial_0 g_{ii}}) = 0$
- $\Gamma^\beta_{0\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\beta}(\cancelto{0}{\partial_0 g_{\beta\beta}} + \cancel{\partial_\beta g_{\beta 0}} - \cancel{\partial_\beta g_{0\beta}}) = 0$

$$\Rightarrow \nabla_\beta T^{0\beta} = \partial_0 T^{00} = \partial_0\left(\rho e^{-2\phi}\right) = \dot{\rho} e^{-2\phi} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\rho} = 0}$$

$\boxed{\alpha = r}$
$$\nabla_\beta T^{r\beta} = \partial_\beta T^{r\beta} + \Gamma^r_{\mu\beta} T^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\mu\beta} T^{r\mu}$$

$$= \partial_r T^{rr} + \Gamma^r_{00} T^{00} + \Gamma^r_{ii} T^{ii} + \Gamma^\beta_{r\beta} T^{rr} = 0$$

- $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right)$
- $\Gamma^r_{00} = \frac{1}{2} g^{rr}\left(\cancel{\partial_0 g_{r0}}^{\,0} + \cancel{\partial_0 g_{r0}}^{\,0} - \partial_r g_{00}\right) = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{00} = e^{2(\phi-\Lambda)}\phi'$
- $\Gamma^\beta_{r\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\beta}\left(\partial_r g_{\beta\beta} + \cancel{\partial_\beta g_{\beta r}} - \cancel{\partial_\beta g_{r\beta}}\right) = \frac{1}{2} g^{\beta\beta}\partial_r g_{\beta\beta}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} g^{00}\partial_r g_{00}}_{\phi'} + \underbrace{\frac{1}{2} g^{rr}\partial_r g_{rr}}_{\Lambda'} + \underbrace{\frac{1}{2} g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta}}_{\frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{2} g^{\phi\phi}\partial_r g_{\phi\phi}}_{\frac{1}{r}}$$

- $\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2} g^{rr}\partial_r g_{rr} = \Lambda'$
- $\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{rr}\left(\cancel{\partial_\theta g_{r\theta}}^{\,0} + \cancel{\partial_\theta g_{r\theta}}^{\,0} - \partial_r g_{\theta\theta}\right) = \frac{1}{2} e^{-2\Lambda}(2r) = r e^{-2\Lambda}$
- $\Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{rr}\left(-\partial_r g_{\phi\phi}\right) = -\frac{1}{2} e^{-2\Lambda}\partial_r\left(r^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) = e^{-2\Lambda} r \operatorname{sen}^2\theta$

Reemplazando :

$$\nabla_\beta T^{r\beta} = \partial_r T^{rr} + \Gamma^r_{00} T^{00} + \Gamma^r_{ii} T^{ii} + \Gamma^\beta_{r\beta} T^{rr} = 0$$

$$= \partial_r\left(\rho e^{-2\Lambda}\right) + e^{2(\phi-\Lambda)}\phi' \rho e^{-2\phi} + \Lambda' \rho e^{-2\Lambda} - e^{-2\Lambda} r \cdot \frac{\rho}{r^2}$$

$$- e^{-2\Lambda} r \operatorname{sen}^2\theta \frac{\rho}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} + \left(\phi' + \Lambda' + \frac{2}{r}\right)\rho e^{-2\Lambda} = 0$$

$$= \rho' e^{-2\Lambda} + \cancel{\rho e^{-2\Lambda}(-2\Lambda')} + \rho e^{-2\Lambda}\phi' + \Lambda' \rho e^{-2\Lambda} - \cancel{e^{-2\Lambda}\frac{\rho}{r}} - \cancel{e^{-2\Lambda}\frac{\rho}{r}}$$

$$+ \left(\phi' + \cancel{\Lambda'} + \cancel{\frac{2}{r}}\right)\rho e^{-2\Lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p' \cancel{e^{-2\Lambda}} + (\rho + p) \cancel{e^{-2\Lambda}} \phi' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(\rho + p) \frac{d\phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}}$$

Ecuación de equilibrio hidrostático

- Las ecuaciones de las componentes θ y ϕ no son independientes y pueden ser derivadas a partir de otras.

$\boxed{P4}$ En el interior de la estrella se cumple $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$

$\boxed{\mu=\nu=0}$ $G_{00} = 8\pi G T_{00}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\cancel{e^{2\phi}}\frac{d}{dr}\left[r\left(1-e^{-2\Lambda}\right)\right] = 8\pi G \rho \cancel{e^{2\phi}}$$

Definimos $m(r) \equiv \frac{1}{2} r\left(1-e^{-2\Lambda}\right) \Rightarrow e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2} r\left(1-e^{-2\Lambda}\right)\right] = 4\pi G r^2 \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi G r^2 \rho}$$

$\boxed{\mu=\nu=r}$ $G_{rr} = 8\pi G T_{rr}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda}\left(1-e^{-2\Lambda}\right) + \frac{2}{r}\phi' = 8\pi G p e^{2\Lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = r e^{2\Lambda}\left(\frac{m(r)}{r^3} + 4\pi p\right) = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r-2m(r))}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r-2m(r))}}$$

De esta forma obtenimos

i) $(\rho + p)\dfrac{d\phi}{dr} = -\dfrac{dp}{dr}$; ii) $\dfrac{dm(r)}{dr} = 4\pi G r^2 \rho$

iii) $\dfrac{d\phi}{dr} = \dfrac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r-2m(r))}$ Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

No existen mas ecuaciones independientes. 3 ecuaciones para 4 incognitas (ϕ, m, p, ρ). El sistema se puede resolver agregando una ecuacion de estado $p = p(\rho)$.

Limite Newtoniano: $p \ll \rho$, $m \ll r$, $r^3 p \ll m$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho G, \quad \frac{d\phi}{dr} = \frac{m}{r^2}, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{m}{r^2}\rho$$

En el exterior de la estrella hay vacio: $\rho = p = 0 \Rightarrow T_{\mu\nu} = 0$

- $$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi G r^2 \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad m(r) = cte \equiv M$$

- $$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 \cancelto{0}{p}}{r(r-2m(r))} = \frac{M}{r(r-2M)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r-2M} - \frac{1}{r}\right)$$

$\hookrightarrow$ Ec. diferencial para ϕ que se puede integrar

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r-2M}{r}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

$$\Rightarrow e^{2\phi} = 1 - \frac{2M}{r} \quad ; \quad e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$ de antes.

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2}$$

Metrica de Schwarzchild

Limite asintotico $r \to \infty$

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \rightarrow$$ Metrica Minkowski: espacio plano

- $r=0 \rightarrow$ Singularidad

- $r>2M \Rightarrow g_{tt}<0$ (timelike) y $g_{rr}>0$ (spacelike)

- $r<2M \Rightarrow g_{tt}>0$ (spacelike) y $g_{rr}<0$ (timelike)

- $r=2M \Rightarrow g_{tt}=0$ y $g_{rr}\rightarrow\infty \rightarrow$ Horizonte de eventos (radio de Schwarzschild)

Notar que es el límite Newtoniano (weak field limit) $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$, con $|h_{\mu\nu}|\ll 1$

Si: $\phi\ll 1 \Rightarrow e^{2\phi}\simeq 1+2\phi$

$$\Rightarrow g_{00}=-(1+2\phi)=-\left(1-\frac{2M}{r}\right) \Rightarrow \phi=\frac{-M}{r}$$

Auxiliar 10

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. La métrica de Schwarzschild está dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

a) Para cada vector de Killing asociado a la métrica, existe una cantidad conservada: $\xi_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Encuentre las cantidades conservadas asociadas a los vectores ξ^t y ξ^ϕ.

b) Muestre que todas las geodésicas son órbitas planas. Para esto, rote su sistema de coordenadas a $\theta = \pi/2$ con $\dot{\theta} = 0$.

c) A lo largo de una geodésica, se conserva el momento angular:

$$L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} \tag{2}$$

Muestre que las órbitas son estables. Para esto, examine que ocurre al considerar una pequeña perturbación en torno a $\theta = \pi/2$.

P2. Una nave espacial quiere estudiar un agujero negro tipo Schwarzschild flotando a una distancia $R > 2GM$.

a) Considere que la nave está estacionaria con respecto a las coordenadas de Schwarzschild. Calcule la aceleración que siente la nave.

b) Si los tripulantes de la nave desean volver a casa, ¿Qué trayectoria es la mejor para escapar del agujero negro? ¿Qué velocidad necesitan?

c) De pronto, la nave se queda sin combustible y comienza a caer de forma inexorable al agujero negro, cruzando el horizonte. Muestre que la nave llega a la singularidad en un tiempo propio $\tau < \pi GM$. Muestre que el tiempo propio máximo lo alcanza una partícula en caída libre con $E = 0$. *Hint:* $\int_a^0 dr(a/r - 1)^{-1/2} = -\pi a/2$.

P3. Suponga que en otra teoría de gravedad, la métrica fuera de una estrella esférica está dada por

$$ds^2 = -\frac{(1 - M/r)}{(1 + M/r)} dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3}$$

a) Calcule 2 cantidades conservadas independientes para geodésicas tipo tiempo.

b) Un observador estacionario situado en $R > M$ emite un fotón con energía E_R. Calcule la energía del fotón recibida por un observador en infinito.

c) Estudie el límite $R \gg M$ y compare con la predicción de la teoría de relatividad general.

Pauta Auxiliar 10

P1

La métrica de Schwarzchild está dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

donde $f(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$

Esta métrica tiene 4 vectores de Killing :

- 1 asociada a traslación temporal → Conservación de energía
- 3 asociadas a rotaciones por la simetría esférica (invarianza ante rotaciones) → Conservación de momento angular

Las cantidades conservadas debido a la existencia de los vectores de Killing están dados por:

$$\xi_\mu p^\mu = cte.$$

Los 3 vectores de Killing asociados a rotaciones provienen de la parte angular de la métrica (2-esfera). Estos están dados por: (Ver Aux 6)

$$\xi_1^\mu = \cos\phi\, \partial_\theta - \cot\theta \operatorname{sen}\phi\, \partial_\phi$$
$$\xi_2^\mu = -\operatorname{sen}\phi\, \partial_\theta - \cot\theta \cos\phi\, \partial_\phi$$
$$\xi_3^\mu = \partial_\phi$$

El vector de Killing asociado a invarianza temporal es

$$\xi_4^\mu = \partial_t$$

Las cantidades conservadas son :

$$\xi_\mu p^\mu = \xi_t p^t = g_{tt}\xi^t p^t = -f(r)\, dt/d\tau \equiv -E$$

$$\xi_\mu p^\mu = \xi_\phi p^\phi = g_{\phi\phi}\xi^\phi p^\phi = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \frac{d\phi}{d\tau} \equiv L$$

$$\Rightarrow \boxed{E = f(r)\frac{dt}{d\tau} = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}} \quad y \quad \boxed{L = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \frac{d\phi}{d\tau}}$$

b) Debido a la simetría esférica de la métrica, podemos elegir $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$. Además se conserva el momentum $\Rightarrow$ las órbitas son planas.

c) El momento angular total está dado por

$$L^2 = P_\theta^2 + \frac{P_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}. \quad Si \ \dot{\theta} = 0 \ y \ \theta = \pi/2 \Rightarrow L = P_\phi = g_{\phi\phi}P^\phi = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$$

Consideremos una pequeña perturbación en torno a $\pi/2$

$$\theta = \pi/2 + \delta\theta, \quad P_\theta \neq 0, \quad L \to L + \delta L, \quad P_\phi \to P_\phi + \delta P_\phi$$

Para obtener una ecuación para $\delta\theta$, despejamos $P_\theta = \frac{d\theta}{d\tau} = \dot{\theta}$

$$(p^\theta)^2 = \dot{\theta}^2 = (g^{\theta\theta}P_\theta)^2 = \frac{1}{r^4}P_\theta^2 = \frac{1}{r^4}\left(L^2 - \frac{P_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

Reemplazando las cantidades perturbadas:

$$\delta\dot{\theta}^2 = \frac{1}{r^4}\left((L+\delta L)^2 - \frac{(P_\phi + \delta P_\phi)^2}{\operatorname{sen}^2(\pi/2+\delta\theta)}\right)$$

$$* \ (L+\delta L)^2 = L^2 + 2L\delta L + \delta L^2 = (P_\phi + \delta P_\phi)^2 = P_\phi^2 + 2P_\phi\delta P_\phi + \delta P_\phi^2$$

$$* \ \operatorname{sen}(\pi/2+\delta\theta) = \cos(\delta\theta) \underset{\text{Taylor}}{\simeq} 1 - \delta\theta^2 \ ; \quad * \ \frac{1}{1-\delta\theta^2} \overset{\text{Taylor}}{\simeq} 1 + \delta\theta^2$$

$$\Rightarrow \delta\dot{\theta}^2 = \frac{1}{r^4}\left((L+\delta L)^2 - (L+\delta L)^2(1+\delta\theta^2)\right)$$

$$= -\frac{1}{r^4}\left(L^2\delta\theta^2 + 2L\cancel{\delta L}\delta\theta^2 + \cancel{\delta L^2}\delta\theta^2 \right)$$

$\cancel{\delta L}\to 0 \;\; \mathcal{O}(3)$ $\qquad \cancel{\delta L^2}\to 0 \;\; \mathcal{O}(4)$

Tomando derivada con respecto a τ:

$$2\cancel{\delta\dot{\theta}}\delta\ddot{\theta} + 2\frac{L^2}{r^4}\delta\theta\cancel{\delta\dot{\theta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\ddot{\theta} + \frac{L^2}{r^4}\delta\theta = 0 \rightarrow \text{Ec. tipo oscilador armónico}$$

$\Rightarrow$ $\delta\theta$ no crece, solo oscila en torno a $\theta = \pi/2$
y por lo tanto las órbitas son estables

P2

a) La aceleración que siente la nave está dada por la 4-aceleración medida con respecto al tiempo propio:

$$a^\mu = \frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = \frac{du^\mu}{dx^\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho$$

$$= u^\sigma \partial_\sigma u^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho$$

Estado estacionario : $\partial_\sigma u^\mu = 0$ y $u^i = 0$

$$\Rightarrow a^\mu = \Gamma^\mu_{00} (u^0)^2$$

* $u^\mu u_\mu = -1 \Rightarrow u^0 u_0 + \cancel{u^i u_i}^{\to 0} = g_{00}(u^0)^2 = -1 \Rightarrow (u^0)^2 = \frac{-1}{g_{00}}$

* El único símbolo de Christoffel $\Gamma^\mu_{00} \neq 0$ es

$$\Gamma^r_{00} = \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

$$\Rightarrow a^\mu = a^r = \Gamma^r_{00}\left(\frac{-1}{g_{00}}\right) = \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} = \frac{GM}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a^r = \frac{GM}{r^2}}$$

La aceleración física de la nave (medible) está dada por la aceleración propia y representa la aceleración relativa a un observador inercial (en caída libre) en reposo respecto a la nave. Es invariante de Lorentz y se define así:

$$\boxed{a = \sqrt{g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu} = \sqrt{g_{rr}}\, a^r = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1/2} \frac{GM}{r}}$$

b) $ds^2 = -d\tau^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \Rightarrow -1 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$

En el caso de fotones $ds^2 = 0$ y $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$

Definimos $\epsilon = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$; $\epsilon = 1$ partículas masivas
$\epsilon = 0$ partículas sin masa

$$\Rightarrow -f(r)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + f^{-1}(r)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -\epsilon \;\Big/\; f(r) \qquad * \frac{d\theta}{d\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{-f^2(r)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2}_{E^2} + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + f(r)\left[r^2\underbrace{\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2}_{\frac{L^2}{r^4}} + \underbrace{\epsilon}_{1}\right] = 0$$

$$\Rightarrow -E^2 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + f(r)\left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right) = 0$$

La mejor forma de escapar del agujero negro es radialmente $L = 0$

$$\Rightarrow -E^2 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + f(r) = 0$$

La condición de escapar del agujero negro es equivalente a imponer que la nave llega al reposo en $r \to \infty$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty}\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = 0$$

En este límite se cumple $\lim_{r\to\infty} f(r) = \lim_{r\to\infty}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = 1$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} -E^2 + \cancel{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}^{\to 0} + \underbrace{f(r)}_{1} = 0 \Rightarrow -E^2 + 1 = 0 \Rightarrow E = 1$$

Reemplazando :

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + f(r) = -\cancel{1} + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \cancel{1} - \frac{2GM}{r} \Rightarrow \frac{dr}{d\tau} = u^r = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

La componente temporal esta dada por

$$f^2(r)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = E^2 = 1 \Rightarrow u^0 = f^{-1}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u^\mu = \left[\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \sqrt{\frac{2GM}{r}}, 0, 0\right]}$$

c)

$$f(r)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - f^{-1}(r)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \epsilon = 1$$

Notar que dentro del horizonte $r < 2GM \Rightarrow f(r) < 0$

El único término positivo al lado izquierdo es

$$-f^{-1}(r)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 > 0 .$$ Como todo debe sumar 1, la cota inferior para este término es 1

$$\Rightarrow -f^{-1}(r)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 > 1 \Rightarrow \left|\frac{dr}{d\tau}\right| > -f^{1/2}(r)$$

Como la nave cae a la singularidad $\frac{dr}{d\tau} < 0 \Rightarrow \left|\frac{dr}{d\tau}\right| = -\frac{dr}{d\tau}$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\tau} > f^{1/2}(r) \Rightarrow f^{-1/2}(r)\, dr > d\tau \;/\int$$

$$\Rightarrow \int_{2GM}^{0}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1/2} dr > \int_0^\tau d\tau \Rightarrow \boxed{\tau < \pi GM}$$

En caída libre $L=0$

$$* \ E^2 = f^2(r)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

$$ds^2 = -d\tau^2 = -f(r)\,dt^2 + f^{-1}(r)\,dr^2 = -f^{-1}(r)\,E^2 d\tau^2 + f^{-1}(r)\,dr^2$$

$$\Rightarrow \quad d\tau^2\left(f^{-1}(r)E^2 - 1\right) = f^{-1}(r)\,dr^2$$

$$\Rightarrow \quad d\tau^2 = \frac{-f^{-1}(r)\,dr^2}{1 - E^2 f^{-1}(r)}$$

Luego, τ se maximiza cuando el denominador es mínimo.
Como $f(r) < 0 \Rightarrow 1 - E^2 f^{-1}(r) > 0$, por lo que se minimiza cuando $E = 0$.

P3

$$ds^2 = -\frac{1-M/r}{1+M/r}dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

a) Análogo a Schwarzschild. Como la métrica no depende de t y ϕ

$$\Rightarrow \xi^t = (1,0,0,0) \quad y \quad \xi^\phi = (0,0,0,1)$$

$$\Rightarrow \xi_t = \left(-\frac{1-M/r}{1+M/r}, 0, 0, 0\right) \quad ; \quad \xi_\phi = (0,0,0, r^2 \text{sen}^2\theta)$$

$$\Rightarrow K_\mu p^\mu = cte = -\frac{1-M/r}{1+M/r}\frac{dt}{d\tau} \equiv -E = g_{00}P^0 = P_0$$

$$T_\mu p^\mu = cte = r^2 \text{sen}^2\theta \frac{d\phi}{d\tau} \overset{\theta=\pi/2}{\overset{?}{=}} r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$$

b) La energía de una partícula con momentum p_μ, medida por un observador cuya 4-velocidad es u^μ está dado por

$$E = -p_\mu u^\mu$$

Considerando un observador estacionario $u^i = 0 \Rightarrow u^\mu(u^0, 0,0,0)$

$$\Rightarrow u^\mu u_\mu = -1 = u^0 u_0 + \cancel{u^i u_i}^{\,0} = g_{00}(u^0)^2 = -\frac{1-M/r}{1+M/r}(u^0)^2$$

↳ la que se mantiene!

$$\Rightarrow u^0 = \left(\frac{1+M/r}{1-M/r}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow E(\text{emitido}) \equiv E_e = -p_\mu u^\mu = -p_0 u^0 = E\left(\frac{1+M/r}{1-M/r}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow E_e(r=R) = E_R = \left(\frac{1+M/R}{1-M/R}\right)^{1/2} E$$

Ahora consideramos un observador en infinito. En este caso la metrica es asintoticamente plana y $u^\mu = (1,0,0,0)$

$$\Rightarrow \quad E(\text{recibido}) \equiv E_r = -p_\mu u^\mu = -p_0 u^0 = E$$

Resultado que coincide con

$$\lim_{r\to\infty} E_e = \lim_{r\to\infty} E\left(\frac{1+M/r}{1-M/r}\right)^{1/2} = E_r$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_r = \left(\frac{1-M/R}{1+M/R}\right)^{1/2} E_R}$$

c) En RG, la metrica fuera de una estrella esta dada por la metrica de Schwarzchild. Basta intercambiar g_{00}:

$$\left(\frac{1-M/R}{1+M/R}\right)^{1/2} \longrightarrow \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_r = \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} E_R}$$

En el limite $\frac{M}{R} \ll 1$

RG: $E_r = \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} E_R \overset{\text{Taylor}}{\simeq} \left(1-\frac{M}{R}\right) E_R$

La otra teoria: $E_r = \left(\frac{1-M/R}{1+M/R}\right)^{1/2} E_R \underset{\text{Taylor}}{\simeq} \left(1-\frac{M}{R}\right) E_R$

$\Rightarrow$ Las 2 teorias concuerdan en el limite $R \gg M$

Universidad de Chile
Departamento de Física
FI7012 - Relatividad General

Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 11

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. Considere las coordenadas de Eddington-Finkelstein: tiempo de schwarchild.

métrica.
no está bien definida

$$\begin{aligned} v &\equiv t + r^* \\ u &\equiv t - r^* \end{aligned} \tag{1}$$

viene de $\int \frac{dr}{1-\frac{2M}{r}}$

donde $r^* = r + r_s \ln(r/r_s - 1)$, con $\boxed{r_s = 2GM}$ el radio de Schwarzschild y r, t la coordenadas radial y temporal de la métrica de Schwarzschild.

a) Escriba la métrica de Schwarzschild en términos de r^*. Luego, mediante el cambio de coordenadas, muestre que la métrica toma la siguiente forma:

$$ds^2 = -f(r)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad f(r) = 1 - \frac{r_s}{r} \tag{2}$$

b) Muestre que geodésicas radiales nulas entrantes están caracterizadas por $v = const.$, mientras que geodésicas radiales nulas salientes están caracterizadas por $u = const.$

c) Determine la forma de los conos de luz para las siguientes coordenadas: (t, r), (v, r), (u, r). Discuta cualitativamente la interpretación de los conos de luz en torno a $r = r_s$.

P2. a) Muestre que la siguiente métrica

$$ds^2 = -f(r)dT^2 + 2C(r)dTdr + f(r)^{-1}(1 - C(r)^2)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3}$$

es equivalente a la métrica de Schwarzschild para cualquier función $C(r)$. *Hint: Realice una transformación de coordenadas $T(r,t) = t + \psi(r)$ a la métrica de Schwarzschild.*

b) Eliga $C(r)$ tal que $g_{rr} = 1$ (coordenadas Painlevé-Gullstrand). Escriba la métrica resultante y muestre que es no singular para todo $r > 0$ (en particular en $r = r_s$), es decir, que los coeficientes de la métrica no diverjan y que el determinante sea distinto de cero.

c) Muestre que con la elección $C(r) = 1$ se recobra la métrica de Eddington-Finkelstein con $T \equiv v = t + r^*$.

Auxiliar 11

14 · junio.

P1

$v = t + r^*$

$u = t - r^*$; $r^* = r + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)$, $r_s = 2GM$

Métrica de Schwarchild:

$$ds^2 = -\underbrace{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}_{f(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

· $r^* = r + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) \Longrightarrow dr^* = dr + r_s \frac{1/r_s}{\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)} . dr$

$$= dr\left(1 + \frac{1}{\frac{r - r_s}{r_s}}\right)$$

$$= dr\left(\frac{r - r_s + r_s}{r - r_s}\right) = dr\left(\frac{r}{r - r_s}\right)$$

$$= dr\left(\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}\right) = f^{-1}(r)$$

$$\Rightarrow dr^{*2} = f^{-2}(r) dr^2 \longrightarrow dr^2 = dr^{*2} f(r)^2$$

$$\rightarrow ds^2 = -f(r) dt^2 + f(r) dr^{*2} + r^2 d\Omega^2$$

$$= f(r)\left(-dt^2 + dr^{*2}\right) + r^2 d\Omega^2$$

$v = t + r^* \Longrightarrow t = v - r^* \Longrightarrow dt = dv - dr^*$

$u = t - r^* \Longrightarrow dt^2 = dv^2 - 2 dv dr^* + dr^{*2}$

· $ds^2 = f(r)\left(-dt^2 + dr^{*2}\right) + r^2 d\Omega^2$

$$= f(r)\left(-dv^2 + 2 dv dr^* - \cancel{dr^{*2}} + \cancel{dr^{*2}}\right) + r^2 d\Omega^2$$

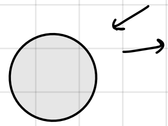
$$= f(r)\left(-dv^2 + 2 dv f^{-1}(v) dr\right) + r^2 d\Omega^2$$

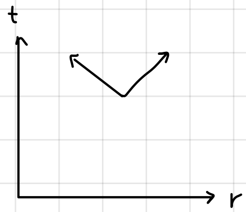
$$= -f(r) dv^2 + 2 dv dr + r^2 d\Omega^2.$$

b) $ds^2 = 0 \rightarrow$ geodésicas nulas (para partículas sin masa)
↳ fotones.

$d\Omega^2 = 0 \rightarrow$ geodésicas radiales.

* geodésicas entrantes o salientes →
  · r disminuye o aumenta
  (me define el cono de luz)





$$\cdot\ ds^2 = -f(r)\,dt^2 + f^{-1}(r)\,dr^2 = 0 \qquad / f^{-1}(r)$$

$$\rightarrow dt^2 = \frac{dr^2}{f^2(r)} \implies dt = \pm \frac{dr}{f(r)} \quad //\int$$

~ de aquí sale r^* al integrar.

$$\Rightarrow \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} = \int \frac{r\,dr}{r - r_s}$$

$\cdot\ u = r - r_s$

$du = dr$

$$= \int \frac{(u + r_s)\,du}{u} = \int du + \int \frac{r_s}{u}\,du = u + r_s \ln(u).$$

$$= r - r_s + r_s \ln(r - r_s)$$

~ sale r^*

$$\Rightarrow t = \pm r + r_s \left[\ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) + \ln(r_s) \right] - r_s.$$

$$\Rightarrow t = \pm r^* + C$$

$+$: geodésicas salientes.

$-$: geodésicas entrantes

En coordenadas Eddington - Finkelstein:

Geodésicas entrantes: $t = -r^* + c$.

$$\cdot\ v \equiv t + r^* = -r^* + C - r^* = \boxed{C \;= v}$$

↳ v es cte.

$$u \equiv t - r^* = -r^* + c - r^* = -2r^* + c.$$

→ *para analizar conos de luz.*

Geodésicas salientes $t = r^* + c$

$$v \equiv t + r^* = r^* + c + r^* = 2r^* + c$$

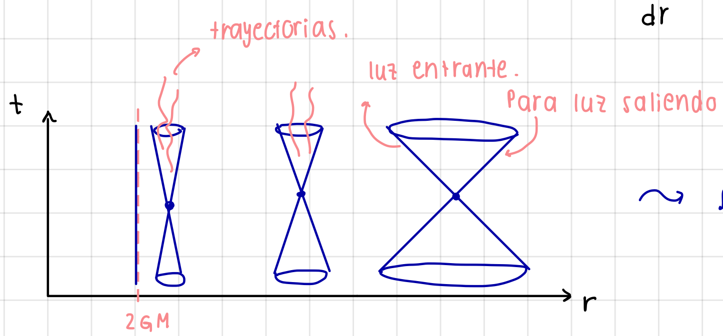
$$u \equiv t - r^* = r^* + c - r^* = \boxed{c. \;= u}$$

↳ u es cte.

c) En coordenadas (t, r) :

$$\cdot \; dt = \pm \frac{dr}{f(r)}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}$$



$\sim$ singular en $2GM$.

En el límite $r \to \infty$ (recobro Minkowski).

un observador de afuera ve que que nunca pasa de $2GM$

Grafiquemos t, r^* $\longrightarrow$ $r^* = r + r_s \ln\left(\underbrace{\frac{r}{r_s} - 1}_{0 \,\to\, -\infty}\right)$

$$\cdot \; t = \pm r^* + C.$$

En el límite $r \to \infty$, $r^* \to \infty$

" " " $r \to 2GM$, $r^* \to -\infty$ $\longrightarrow$ Corremos $2GM$ al $-\infty$

En el nuevo sist. de coordenadas v:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{dt + dr^*}{dr} = \frac{dt}{dr} + \frac{dr^*}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}$$

$$* \; \frac{dr^*}{dr} = \frac{d}{dr}\left(r + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)\right) = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}$$

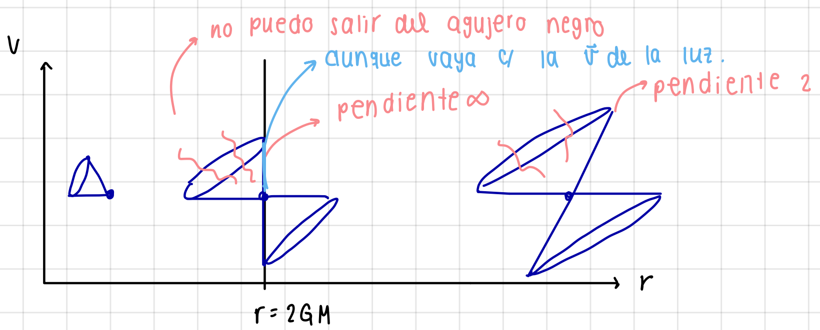
$$\rightarrow \frac{dv}{dr} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} + \dfrac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} = 0 & \longrightarrow \text{entrantes (constantes).} \\[2ex] +\dfrac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} + \dfrac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} = \dfrac{2}{1 - \frac{r_s}{r}} & \longrightarrow \text{salientes.} \end{cases}$$

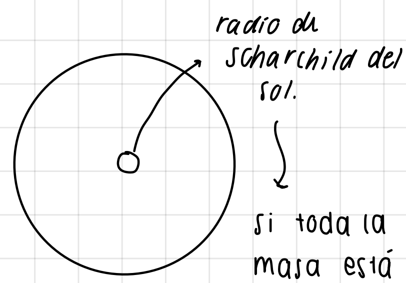
$\rightarrow$ $\lim r \to \infty \rightarrow \frac{dv}{dr} = 2$

$\lim r \to 2GM \rightarrow \frac{dv}{dr} \to \pm \infty$

$\cdot$ Si $r > r_s$: $\frac{dv}{dr}$ (saliente) > 0

$r < r_s$: $\frac{dv}{dr}$ (saliente) < 0.





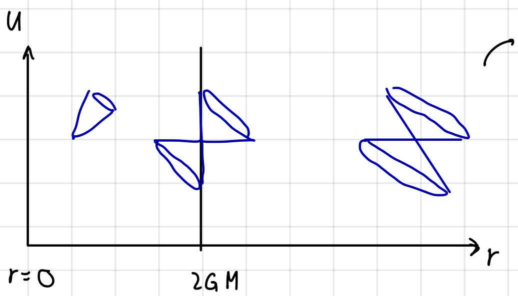
si toda la masa está dentro de éste, sería un agujero negro.

· Teoría es covariante → invariante de Lorentz.

En el sistema de coordenadas u:

$$\frac{du}{dr} = \frac{dt - dr^*}{dr} = \frac{dt}{dr} - \frac{dr^*}{dr} = \pm \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}} - \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}$$

$$\frac{du}{dr} = \begin{cases} \dfrac{-2}{1-r_s/r} & \text{entrantes} \\ 0 & \text{salientes.} \end{cases}$$



agujero blanco
(nada puede estar dentro, no llega a la singuraridad).

Teo. Birkhoff

* la única sol. esféricamente simétrica y estática es Schwarchild (las demás son cambios de coordenadas).

Coord. de Kruzcal - Szekeres.

Auxiliar 12

Profesor: Nelson Zamorano
Auxiliar: Gerald Barnert

P1. Teoría cuántica de campos admite la producción de pares de partículas a partír del vacío gracias al principio de incertidumbre de Heisenberg $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$. Considere la producción de dos fotones con energías E y $-E$, medidas por un observador en infinito, cerca del horizonte de un agujero negro de Schwarzschild tal que el fotón con energía $-E$ cruza el horizonte.

a) ¿En cuánto tiempo es admisible que el fotón cruce el horizonte?

b) Muestre que si esto ocurre, el fotón puede viajar libremente dentro del horizonte. Para esto considere a un obsersevador cayendo libremente hacia la singularidad de forma radial con cuadri-velocidad $u^0 = 0$. Calcule la componente u^r.

c) Calcule la energía medida por un observador local $E^o = -p_\mu u^\mu$. ¿Impone esto una restricción sobre E? ¿Que condición debe cumplir p^r para que $E < 0$?

d) Considere un marco de referencia en reposo en $r = 2M + \epsilon$, con $\epsilon \ll 1$. Este observador seguirá la misma geodésica que la partícula cayendo radialmente. Calcule el tiempo propio que le demora al observador llegar al horizonte.

e) Calcule la energía del fotón que sale hacia el infinito fuera del horizonte medida por el observador de la parte d).

f) Calcule la misma energía pero medida por un observador en infinito.

g) Compare su resultado con la energía promedio emitida por la radiación de un cuerpo negro

$$E = 2.701 k_B T, \tag{1}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y T la temperatura.[1] Compare lo obtenido con el resultado original de la radiación de Hawking:

$$T = \frac{\hbar}{8\pi k_B M}. \tag{2}$$

[1]Este resultado se obtiene a partir de la ley de Planck: integrando la densidad de energía sobre todo el espectro de frecuencias y diviendo por el numero de fotones por unidad de volumen.

P2. El espacio-tiempo de Rindler es descrito por la siguiente métrica:

$$ds^2 = -g^2 z^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{3}$$

donde g es una constante.

a) Muestre que el espacio-tiempo de Rindler es plano, es decir, la métrica puede escribirse cómo

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2. \tag{4}$$

b) En un diagrama espacio-tiempo (Z, T), ilustre la relación entre los dos sistemas de coordenadas.

c) Una partícula de prueba se suelta en $(t, z) = (0, z_0)$. Muestre su trayectoria en el diagrama. ¿Cómo se mueve la partícula en coordenadas de Rindler? ¿En cuanto tiempo la partícula llega a $z = 0$?

d) Muestre que cerca del horizonte de eventos de un agujero negro, la métrica de Schwarzschild puede ser aproximada a la métrica de Rindler. Encuentre la constante g correspondiente y describa el movimiento de una partícula mientras se aproxima al horizonte.

P3. Considere la métrica anti-de Sitter (AdS) en coordenadas de Poincare:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu), \tag{5}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en $D = 2 + 1$ dimensiones. Muestre que ésta métrica satisface las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmologica Λ negativa. Para esto:

a) Considere la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda). \tag{6}$$

Calcule la ecuaciones de movimiento.

b) Calcule el tensor de Einstein.

c) Encuentre la relación entre L y Λ tal que la ecuación de Einstein se satisface.

d) **(Propuesto)** Compruebe los resultados obtenidos usando la expresión para el tensor de Riemann para métricas máximamente simétricas:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{L^2}(g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}). \tag{7}$$

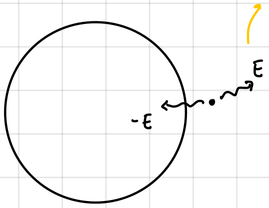
Generalice los resultados obtenidos para un espacio-tiempo de n dimensiones.

28·junio

Auxiliar 12

· Radiación de Hawking

Energía del fotón con obs. en el infinito. → La que se conserva del fotón.



$\Delta E \, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ → incertidumbre.

(puedo tener E negativas por un instante pequeño de t.)

a) $\Delta t \sim \dfrac{\hbar}{2E}$ ⇝ Es admisible que entre al agujero negro

En una escala distinta, se aniquilan antes.

b) $u^0 = 0$
$u^r = ?$

· $u^\mu u_\mu = -1$ $= \cancel{u^0 u_0}^{\,0} + u^r u_r = -1$

invarianza del intervalo espacio temporal.

cambia el signo dentro del horizonte.

$$\Rightarrow g_{rr} (u^r)^2 = -1$$

$$\Rightarrow u^r = -\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{1/2} \quad , \; r < 2M.$$

* En el agujero negro sólo puedo aumentar en el espacio en vez del tiempo.

c) $E^0 = -p_\mu u^\mu$

$\vec{v}$ del observador

energía del fotón medida por el observador

mom. fotón

$$E^0 = -p_r u^r = -g_{rr} p^r u^r = +\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1}\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{1/2} p^r$$

$$E^0 = \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1/2} p^r \qquad E^0 < 0$$
$$p^r < 0.$$

d) $r = 2M + \varepsilon \quad , \; \varepsilon << 1$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \longrightarrow \text{órbita}$$

Energía por unidad de masa.

Cond. inicial: $\dfrac{dr}{d\tau} = 0 \quad , \quad r = 2M + \varepsilon.$

$$\Rightarrow \tilde{E} = \left(1 - \frac{2M}{2M+\varepsilon}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{1/2}$$

Taylor

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{r} - \frac{2M}{2M+\varepsilon} \Rightarrow d\tau = \pm \int_{2M+\varepsilon}^{2M} \left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{2M+\varepsilon}\right)^{-1/2} dr$$

Trayectorias hacia el horizonte.

despreciando ε:

$$\simeq \int_{2M+\varepsilon}^{2M} \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1/2} dr = r\sqrt{\frac{2M}{r}-1} + 2M\arctan\left(\sqrt{\frac{2M}{r}-1}\right)\Bigg|_{2M+\varepsilon}^{2M}$$

$$\Delta\tau = (2M+\varepsilon)\sqrt{1-\frac{2M}{2M+\varepsilon}} + 2M\arctan\left(\sqrt{1-\frac{2M}{2M+\varepsilon}}\right) \simeq (2M+\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{1/2} + 2M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{1/2} = 2(2M\varepsilon)^{1/2}.$$

e)

$$\Delta t = \frac{\hbar}{2\bar{E}}$$

fotón.

energía del observador que cae radial siguiendo la geodésica del fotón.

$$\Delta t = \Delta\tau \Rightarrow \frac{\hbar}{2\bar{E}} = 2(2M\varepsilon)^{1/2}$$ → siguen la misma geodésica.

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{4}\hbar(2M\varepsilon)^{-1/2}.$$ → Visto desde un observador cayendo c/ el fotón.

* Extra: cerca del horizonte cambia la métrica.

f) $\bar{E} = -p_\mu u^\mu$, $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ $\rightsquigarrow p^0 = E$, $p_0 = -E$.

energía del fotón de un obs. externo.

tiene $\vec{v}$ 0 en el ∞

$$u^0 = \frac{p^0}{m} = \tilde{E}$$ → energía en el ∞ del obs.

momentum del observador

$$\Rightarrow \tilde{E} = -p_0 u^0 = -g^{00} p_0 u_0$$

Energía de un obs. que cae con el fotón.

momentum del fotón.

p_0 → E ↳ energía que se conserva del fotón en ∞

$$\Rightarrow E = \frac{\bar{E}}{u_0 g^{00}}$$

reemplazando:

$$E = \frac{1}{4}\hbar(2M\varepsilon)^{-1/2} \cdot \left(\frac{-\varepsilon}{2M}\right)^{-1/2}\left(\frac{2M}{r} - 1\right)$$

Evaluando en $2M+\varepsilon$

$$E = -\frac{1}{4}\frac{\hbar}{\varepsilon}\left(\frac{2M}{2M+\varepsilon} - 1\right) \simeq -\frac{1}{4}\frac{\hbar}{\varepsilon}\left(\frac{-\varepsilon}{2M}\right) = \boxed{\frac{\hbar}{8M}}$$

9) $E = 2.701\ k_B T$ → Promedio de la densidad de energía.

cte Boltzman (k_B), T^o del cuerpo negro (T).

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi k_B M} \Rightarrow E = 2.701\ \cancel{k_B}\left(\frac{\hbar}{8\pi \cancel{k_B} M}\right)$$

$$= \frac{2{,}701}{\pi}\frac{\hbar}{8M}$$

$$= 0{,}8\hat{6}\ \frac{\hbar}{8M}$$

- Ec. geodésica → resolverlas (christofel).
- desviación "
- Transporte paralelo
- Analizar conos de luz
-

- Redshift gravitacional P2 de este aux!
- Agujeros negros! ~> singularidad en 2GM si elegimos buenas coordenadas se puede estudiar.
- Discrepacia en teoría (conceptual)
- Órbitas.

$$ds^2 = -g^2 z^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

con $g = cte$ ↳ Observador acelerado en Minkowski describe trayectorias hiperbólicas.

a) Mostrar que se puede escribir: $ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2$.

$Z = \pm z \cosh gt$, $T = \pm z \,\mathrm{senh}\, gt$. $X = x$, $Y = y$.

$\Rightarrow dZ = \pm dz \cosh gt \pm z\,\mathrm{senh}\, gt \cdot g dt$

$dT = \pm dz\,\mathrm{senh}\, gt \pm z \cosh gt \, g dt$

$\Rightarrow dZ^2 = dz^2 \cosh^2 gt + g^2 z^2 \mathrm{senh}^2 gt \, dt^2 + 2gz \cosh gt \,\mathrm{senh}\, gt \, dz dt.$

$dT^2 = dz^2 \mathrm{sen}^2 gt + g^2 z^2 \cosh^2 gt \, dt^2 +$ //

$\Rightarrow -dT^2 + dZ^2 = dz^2 \underbrace{(\cosh^2 gt - \mathrm{senh}^2 gt)}_{1} + g^2 z^2 \underbrace{(\mathrm{senh}^2 gt - \cosh^2 gt)}_{-1} dt^2$

$= dz^2 - g^2 z^2 dt^2$

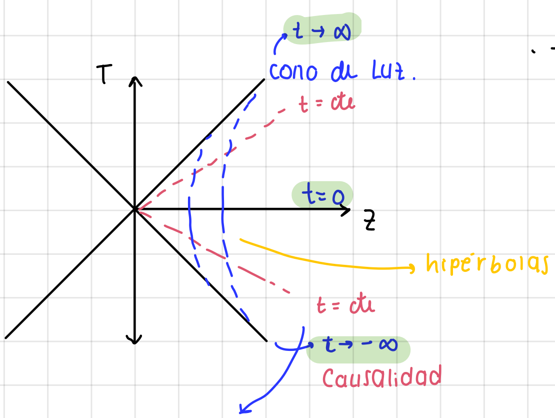
b)

$Z = \pm z \cosh gt$, $T = \pm z\,\mathrm{senh}\, gt$

* Digrama espacio-temp. ⇒ conos de luz.

$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 = 0$ ⟶ geodésicas nulas (fotones)

$\Rightarrow dT = \pm dZ$ ⟶ linear con pendiente 1.



xqué están def. al lado derecho del cono?

· Trayectorias con $t = cte$ ⇒ $Z = \pm a \cdot z$, a y b ctes.
$T = \pm b \cdot z$

$\cosh gt = cte$

$\rightsquigarrow \frac{T}{Z} = \frac{\pm b}{\pm a} = \pm cte.$

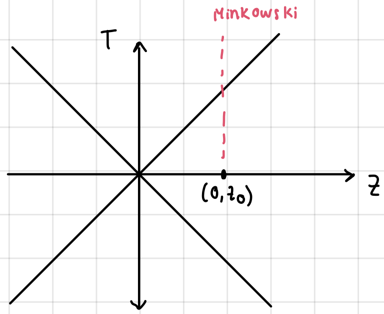
Lineas con $z = cte$

$\frac{T}{Z} = \pm \tanh gt$

$\lim_{t \to \infty} \frac{T}{Z} = 1.$

· $z^2 - T^2 = z^2 \rightarrow$ Si $z = \text{cte} \Rightarrow$ ec. de una hipérbola.

c) $(t, z) = (0, z_0)$



· Trayectorias $\Rightarrow$ geodésicas

$$\Rightarrow \quad z = \pm z_0 \cosh 0 = \pm z_0$$
$$T = \pm z_0 \operatorname{senh} 0 = 0.$$

En Rindler:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0 \quad , \quad ds^2 = -g^2 z^2 dt^2 + dz^2$$

La única componente que sobrevive:

$$\partial_z g_{00} = -2 z g^2$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^z_{00} = g^2 z, \quad \Gamma^0_{0z} = \frac{1}{z} \quad \Big\} \text{ únicas que sobreviven.}$$

· $\alpha = 0$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}^0 + \Gamma^0_{0z} \dot{x}^0 \dot{x}^z = \left[\ddot{t} + \frac{2}{z} \dot{t} \dot{z} = 0 \right]$$

$$\ddot{x}^z + \Gamma^z_{00} \dot{x}^0 \dot{x}^0 = \left[\underbrace{\ddot{z}}_{d^2z/d\tau^2} + g^2 z \dot{t}^2 = 0. \right]$$

El mov. de una partícula está dado por $\frac{d^2z}{dt^2}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \dot{z} \cdot \frac{1}{\dot{t}} = \boxed{\frac{\dot{z}}{\dot{t}}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{z}}{\dot{t}}\right) \underbrace{\frac{d\tau}{dt}}_{1/\dot{t}} = \frac{\ddot{z}\dot{t}^2 - \ddot{t}\dot{z}}{\dot{t}^3} = \frac{-g^2 z \dot{t}^3 + \frac{2}{z}\dot{z}^2 \dot{t}}{\dot{t}^3}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g^2 z + \frac{2}{z} \boxed{\left(\frac{\dot{z}}{\dot{t}}\right)^2} = -g^2 z + \frac{2}{z} \boxed{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad z(t) \sim \operatorname{sech}(gt)$$

$z \gg 1 \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + g^2 z = 0 \quad \rightarrow \quad z = A\cos(gt) + B\cos(gt)$

oscilador armónico.

· $z \ll 1 \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{2}{z}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad z(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow z(t) = 0$ en $t \rightarrow \infty$.

d) Schwarzchild

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + f^{-1}(r)\,dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

cambio de coordenadas.

Hint!

$$* \quad r - 2M = \frac{x^2}{8M}$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{r-2M}{r} = \frac{x^2}{8Mr} = \frac{x^2}{8M\left(\frac{x^2}{8M} + 2M\right)}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 16M^2}$$

Cerca del horizonte: $r \sim 2M \Rightarrow x \ll 1$

$$f(r) = \frac{x^2}{x^2 + 16M^2} \simeq \frac{x^2}{16M^2} \rightsquigarrow$$ Taylor!

$$\cdot\ r - 2M = \frac{x^2}{8M} \Rightarrow dr = \frac{x\,dx}{4M}$$

$$\Rightarrow dr^2 = \frac{x^2 dx^2}{16M^2} = f(r)dx^2$$

$$\cdot\ r^2 = \left(2M + \frac{x^2}{8M}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + 16M^2}{8M}\right)^2 \approx \left(\frac{16M^2}{8M}\right)^2 \approx 4M^2$$

cercano al horizonte

$$\Rightarrow ds^2 \approx \frac{-x^2}{16M^2}dt^2 + \cancel{f^{-1}(r)}\,\cancel{f(r)}\,dx^2 + 4M^2 d\Omega^2$$

$$\approx \underbrace{\frac{x^2}{16M^2}dt^2 + dx^2}_{\text{Rindler}} + 4M^2 d\Omega^2$$

Rindler con $g = \frac{1}{4M} \rightsquigarrow k.$

$x = z$ (trabajado antes)

. superficie de gravedad: gravedad que se siente en el BH.