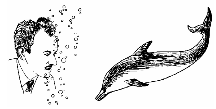
composition book

Auxiliar mecánica cuántica



Auxiliar 1: Albores de la cuántica, un nuevo mundo (clickéame!)

Las ideas de Heisenberg y Born nos tienen a todos en suspenso, y han hecho una gran impresión en cuantos se dedican a pensar y se interesan en la teoría
- Carta escrita por Albert Einstein respecto a los trabajos en álgebra matricial

P0 ¡Nuevas notaciones, nuevos mundos! Esta pregunta tiene como objetivo endender la notación braket. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

a) Identifique qué significa cada elemento de la matriz. Con esto construya una base, escríbala con notación braket con etiquetas 1, 2 y 3.
b) Encuentre los valores propios de A y B.
c) ¿Conmutan los operadores A y B? Comente
d) En caso de que conmuten, encuentre una base propia en común.
e) La especificación de un autovalor, ¿Determina unicamente a un autovector?

P1 Calentando motores: Aprendiendo a manejar la notación braket Considere A y B operadores y α un número complejo. Mediante la definición de operador adjunto demuestre que:

a) $(\alpha A + B)^\dagger = \overline{\alpha} A^\dagger + B^\dagger$.
b) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.
c) Si A es invertible, entonces: $(A^{-1})^\dagger = \left(A^\dagger\right)^{-1}$.
d) $\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$

P2 Who am I? Considere que $\{|i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de un espacio vectorial V, demuestre entonces que la identidad se puede representar como:

$$\mathbb{I} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |n\rangle\langle n|$$

P3 Desatando el poder de la notación de Dirac: Demuestre las siguientes propiedades de la traza de una matriz, considere para esto A, B y C matrices, y U una matriz unitaria:

a) La traza es independiente de la base.
b) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
c) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB)$. (La traza es invariante a permutaciones cíclicas).
d) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(U^\dagger A U)$

P4 Un resultado importantísimo adelantado: Sean A,B y C operadores hermíticos que satisfacen:

$$AB - BA = iC.$$

Demuestre que $\langle \Delta A^2\rangle\langle \Delta B^2\rangle \geq \frac{1}{4}\langle C\rangle^2$. *Nota:* ¿Se le ocurre un par de operadores para probar esto ;)?

Indicación: Se define la operación $\langle A\rangle$ como $\langle\psi| A |\psi\rangle$, esto es el *valor esperado* de A con respecto al vector $|\psi\rangle$.

- Un vector de un espacio vectorial se representa con Dirac como un $|\psi\rangle$, estos se pueden sumar y ponderar entre sí.
- El equivalente a un vector traspuesto a un $|\psi\rangle$ es su bra, que se escribe $\langle\psi|$, y en el equivalente de álgebra lineal de plan común correspondería al traspuesto conjugado, a dicha operación se le llama tomar el adjunto (o el dagado) y se denota por $(\cdot)^\dagger$. La trasnformación sigue las siguientes reglas si $|a\rangle$ y $|b\rangle$ son *kets*, c es un escalar complejo y c^* es el conjugado de c:
    - $(|a\rangle)^\dagger = \langle a|$
    - $(|a\rangle + |b\rangle)^\dagger = \langle a| + \langle b|$.
    - $(c\,|a\rangle)^\dagger = c^* \langle a|$.
- Si se junta un bra $\langle a|$ con un ket $|b\rangle$ (en ese orden) se obtiene un número (son como legos, se crearon para juntarse en un determinado orden). Esto se escribe $\langle a|b\rangle$. Esto posee las siguientes propiedades:
    - Lineal en los kets (saca constantes y separa sumas).

    $$\langle a|b + \lambda c\rangle = \langle a|b\rangle + \lambda \langle a|c\rangle$$

    - Antilineal en los bras (saca las constantes conjugadas y separa las sumas).

    $$\langle a + \lambda b|c\rangle = \langle a|c\rangle + \lambda^* \langle b|c\rangle$$

    - Es definido positivo, es decir $\langle a|a\rangle \geq 0$ y si $\langle a|a\rangle = 0$, entonces $|a\rangle$ es el ket nulo.

  Esto hace que la operación de tomar un braketeo entre dos kets describa un producto interno.
- La norma de un ket $|a\rangle$ es la raíz cuadrada de su producto consigo mismo, esto es $\sqrt{\langle a|a\rangle}$.
- Se dice que un $|a\rangle$ está normalizado si $\langle a|a\rangle = 1$
- Si se escribe un ket y luego un bra, como $|a\rangle\langle b|$, entonces esto significa que es un operador, que al recibir un ket $|c\rangle$, entonces devuelve el $|a\rangle$ pero escalado por $\langle b|c\rangle$, la imagen mental se puede ver como:

  $$(|a\rangle\langle b|)\,|c\rangle = |a\rangle\langle b|c\rangle = \langle b|c\rangle\,|a\rangle$$

  (Idea, seguir con la imagen de los legos)
- Un conjunto de kets se dice base si existe una única manera de escribir cualquier vector del espacio en el que estamos trabajando, como combinación lineal de estos.
- Una base $\{|i\rangle\}_i$ se dice ortogonal si para cualquier par de kets $|i\rangle$ y $|j\rangle$ en la base, $|i\rangle \neq |j\rangle$ implica que $\langle i|j\rangle = 0$.
- Una base $\{|i\rangle\}_i$ Se dice ortogonal si para cualquier ket $|i\rangle$, se tiene que $\langle i|i\rangle = 1$ (es decir, cada vector de la base está normalizado).
- Se dice que una base es ortonormal si es ortogonal y ortonormal, esto se puede escribir con un δ de kroneker como:

  $$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

  Para $|i\rangle$ y $|j\rangle$ en la base ortonormal.
- **Varianza:** La desviación estándar de una variable aleatoria X se define como

  $$\left\langle \Delta X^2 \right\rangle = \left\langle (X - \langle X\rangle)^2 \right\rangle$$

- **Propiedad de clausura:** Si $\{|a\rangle\}$ la eigenbase de ¡un operador hermitiano $\hat{A}$, entonces

  $$\hat{1} = \sum_a |a\rangle\langle a|\,.$$

PO

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \\ 0 & -a & \\ & & -a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

Matrices codifican la info. de transformaciones lineales

$\rightarrow$ $B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ib \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Columnas de una matriz codifican la imagen de la base canónica.

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |3\rangle$.

~

$A|1\rangle = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a|1\rangle$

$A|2\rangle = -a|3\rangle$

$A|3\rangle = -a|3\rangle$

$B|1\rangle = b|1\rangle$

$B|2\rangle = ib|3\rangle$

$B|3\rangle = -ib|2\rangle$

$\rightarrow$ sabemos como funciona un operador lineal a partir de cómo opera con los vectores.

b) $\lambda \in \mathbb{C}$

$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ $\rightarrow$ lambda val. propio

$A|1\rangle = a|1\rangle$

$A|2\rangle = -a|2\rangle$

$A|3\rangle = -a|3\rangle$.

} Fácil : matriz diagonal.

$B|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

$\downarrow$ se puede representar como comb. lineal.

operador — escalar.

$$B(\psi_1|1\rangle + \psi_2|2\rangle + \psi_3|3\rangle) = \lambda(\psi_1|1\rangle + \psi_2|2\rangle + \psi_3|3\rangle)$$

$$\psi_1 B|1\rangle + \psi_2 B|2\rangle + \psi_3 B|3\rangle = \lambda\psi_1|1\rangle + \lambda\psi_2|2\rangle + \lambda\psi_3|3\rangle$$

$$\psi_1 b|1\rangle + \psi_2 ib|3\rangle + \psi_3(-ib)|2\rangle = \text{''}$$

$$(\psi_1 b - \lambda\psi_1)|1\rangle + (\psi_3(-ib) - \lambda\psi_2)|2\rangle + (\psi_2 ib - \lambda\psi_3)|3\rangle = 0$$

la única opción es que cada uno sea 0.

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 b - \lambda\psi_1 &= 0 \\ \psi_3(-ib) - \lambda\psi_2 &= 0 \\ \psi_2(ib) - \lambda\psi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} (b-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -ib \\ 0 & ib & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = 0$$

coef. de los vectores de la base

$\hookrightarrow$ coef. son los coef. de $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|3\rangle$.

$$\underbrace{\left[\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]}_{\text{det esto } = 0} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

det esto $=0$ $\rightsquigarrow$ no invertible

$$\begin{vmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -ib \\ 0 & ib & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\to (b-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -ib \\ ib & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (b-\lambda)\left(\lambda^2 - ib(-ib)\right) = 0$$

$$(b-\lambda)(\lambda^2 - b^2) = 0$$

$$(b-\lambda)(\lambda - b)(\lambda + b) = 0$$

$b \quad b \quad -b$

$\to$ son 2 así que hay 2 grados de libertad

Autovalores (eigenvalues) $\to$

B	A
b	a
$-b$	$-a$

autovalores son indep. de la base.

* Matrices diagonales por bloques si conmutan

A $\to$ $A|1\rangle$ $\to \{|1\rangle\}$ autovector de a. $\to W_a \to$ espacio propio

$A|2\rangle$, $A|3\rangle$ $\to \{|2\rangle$ y $|3\rangle\}$ autovector de $-a$. $\to W_{-a}$

B $(\lambda = b)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & -ib \\ 0 & ib & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0 = 0$ $\longrightarrow \psi_1$ libre

$-b\psi_2 - ib\psi_3 = 0$

$ib\psi_2 - b\psi_3 = 0$

$-b\psi_2 - ib\psi_3 = 0$

$\psi_2 + i\psi_3$

$\boxed{\psi_2 = -i\psi_3}$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \psi_1|1\rangle + \psi_2|2\rangle + \psi_3|3\rangle \longleftarrow$$

$$= \psi_1|1\rangle + -i\psi_2|2\rangle + \psi_3|3\rangle$$

$$= \psi_1|1\rangle + \psi_3\left(-i|2\rangle + |3\rangle\right)$$

$\boxed{\lambda = -b}$

$$\begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 \\ 0 & b & -ib \\ 0 & ib & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2b\psi_1 = 0 \longrightarrow \psi_1 = 0$

$b\psi_2 - ib\psi_3 = 0 \longrightarrow \psi_2 - i\psi_3 = 0$

$ib\psi_2 + b\psi_3 = 0$ $\quad \psi_2 = i\psi_3$.

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \psi_1|1\rangle + \psi_2|2\rangle + \psi_3|3\rangle$$

$$= i\psi_3|2\rangle + \psi_3|3\rangle$$

$$= \psi_3(\underbrace{i|2\rangle + |3\rangle}_{})$$

son base del subespacio propio asociado a los valores propios.

producto interno:

. Daga transforma ket en bra

$(-i|2\rangle + |3\rangle)^\dagger(i|2\rangle + |3\rangle)$

$(i\langle 2| + \langle 3|)(i|2\rangle + |3\rangle)$

ortogonal

$i^2\underbrace{\langle 2|2\rangle}_{1} + i\underbrace{\langle \cancel{3|2}\rangle}_{0} + i\langle \cancel{2|3}\rangle^{0} + \underbrace{\langle 3|3\rangle}_{1} = 0. \longrightarrow$ prod. interno entre vectores propios de ≠ valores propios de una matriz hermítica dan 0.

ⓑ $\to$ $\boxed{\begin{matrix} |1\rangle \\ -i|2\rangle + |3\rangle \end{matrix}}$

-b $\to$ $\boxed{i|2\rangle + |3\rangle}$

↓ un único subespacio propio

d)

$. A(\underbrace{-i|2\rangle + |3\rangle}_{}) = -i(-a)|2\rangle + (-a)|3\rangle$

esta base diagonaliza a A y a B en común.

$= -a(\underbrace{-i|2\rangle + |3\rangle}_{})$

base propia en común.

$\boxed{P2}$ $\{|i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ ortonormal. $\rightarrow$ $\langle i|i\rangle = 1$, $\langle i|j\rangle = 0$ $\rightarrow$ $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$.

Identidad será:

$$\mathbb{I} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |n\rangle\langle n|$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1} c_i |i\rangle \quad , \; c_i \in \mathbb{C}$$

Truco! $\leftarrow$ Tomo un elemento de la base cualquiera $|j\rangle$:

$$\langle j|\psi\rangle = \langle j| \sum_{i=1} c_i |j\rangle$$

$$= \sum_{i=1} c_i \langle j|i\rangle = \sum_{i=1} c_i \delta_{ij} = c_j$$

$* \; c_i = \langle i|\psi\rangle$

$$\rightarrow |\psi\rangle = \sum_i \underbrace{\langle i|\psi\rangle}_{\text{escalar}} |i\rangle$$

$$= \sum_i |i\rangle\langle i|\psi\rangle$$

permite cambiar de base! $\leftarrow$ $\Rightarrow \mathbb{I} = \sum_i |i\rangle\langle i|$

$\boxed{P3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{NN} \end{pmatrix}$$

$$T_r(A) = a_{11} + a_{22} + \dots a_{NN}$$

$$= \sum_i a_{ii}$$

$$A_{ij} = \langle i|A|j\rangle$$

Dada una base $\{|n\rangle\}$ la traza es

$$Tr(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle.$$

P.d.

Dadas $\{|n\rangle\}$ y $\{|m\rangle\}$ dos bases distintas,

$$Tr(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle$$

$$= \sum_m \langle m|A|m\rangle$$

$$Tr(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle$$

$$= \sum_n \langle n|\mathbb{I}\, A\, \mathbb{I}|n\rangle \quad , \quad \mathbb{I} = \sum_m |m\rangle\langle m| = \sum_{m'} |m'\rangle\langle m'|$$

son de la misma base ortonormal.

$$= \sum_n \langle n| \sum_m |m\rangle\langle m| A \sum_{m'} |m'\rangle\langle m'|n\rangle.$$

$$= \sum_n \sum_m \sum_{m'} \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\text{escalares}} \langle m|A|m'\rangle \underbrace{\langle m'|n\rangle}$$

$$= \sum_m \sum_{m'} \langle m'| \underbrace{\sum_n |n\rangle\langle n|}_{\mathbb{I}} m\rangle \langle m|A|m'\rangle$$

$$= \sum_m \sum_{m'} \underbrace{\langle m'|m\rangle}_{\delta_{mm'}} \langle m|A|m'\rangle$$

$$= \sum_m \langle m|A|m\rangle \quad \longrightarrow \text{indep. de la base.}$$

P.d $Tr(AB) = Tr(BA)$

$$\cdot\ Tr(AB) = \sum_n \langle n|AB|n\rangle$$

$$= \sum_n \langle n|A\,\mathbb{I}\,B|n\rangle$$

$$= \sum_n \langle n|A \sum_{n'} |n'\rangle\langle n'| B|n\rangle$$

$$= \sum_n \sum_{n'} \underbrace{\langle n|A|n'\rangle}_{\text{escalares}} \underbrace{\langle n'|B|n\rangle}$$

$$= \sum_n \sum_{n'} \langle n'|B|n\rangle \langle n|A|n'\rangle$$

$$= \sum_{n'} \langle n'|B \sum_n |n\rangle\langle n|A|n'\rangle = \sum_{n'} \langle n'|BA|n'\rangle.$$

c) P.d. $Tr(\underbrace{AB}_{D}C) = Tr(BCA) = Tr(CAB)$.

$\downarrow$

$Tr(DC) = Tr(CD) = Tr(CAB)$ //.

d) P.d.

$Tr(A) = Tr(U^{\dagger} A U)$ con U unitario

$\downarrow$

$U^{\dagger} U = \mathbb{I}$

$\cdot\ Tr(U^{\dagger} A U) = Tr(A U U^{\dagger}) = Tr(A \mathbb{I}) = Tr(A)$.

Mecánica Cuántica
Luis Foà

Joaquín Márquez
Diego Bautista

Auxiliar 2: Just watched all of The Matrix movies and didn't see a single eigenvalue (clickéame!)

P1 Recordando Gram-Schmidt: Explique cualitativamente el procedimiento de Gram Schmidt, para esto muestre cómo es el procedimiento en el caso de dos vectores.

P2 Matrices conmutando: Demuestre que si dos matrices son diagonalizables, entonces si conmutan tienen una base de autovectores en común. (Suponga por simplicidad que cada autovalor es simple, es decir, tiene un subespacio propio de dimensión 1)

P3 El efelante en la habitación: Considere las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que A y B conmutan.

b) Encuentre los valores propios de A y B.

c) Encuentre una base ortonormal de vectores propios de A.

d) Exprese la matriz B en términos de la base ortonormal antes encontrada.
Hint: Podría ser de ayuda expresar la matriz B en términos de $\langle \text{bra}|\text{ket}\rangle$.

e) Encuentre una base de autovectores comun a A y B que sea ortonormal.

P4 ¿Te gustan las dimensiones? ¡Pues toma infinitas! Para esta pregunta considere funciones $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ que son derivables y que cumplen con $f(a) = f(b) = 0$. Recuerde que consideramos el producto interno:

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx$$

a) Encuentre el operador adjunto de $\hat{D} = \frac{d}{dx}$.

b) Encuentre el operador adjunto de $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$.

c) ¿Es el operador definido como $R[f](x) = f(x)^2$ lineal?

Resumen $\overrightarrow{Espacios}$

- **Definición de espacio vectorial:** para cualquier vector u, v, w y escalares a,b:
  - $u + v$ es un vector.
  - au también es vector.
  - $u + (v + w) = (u + v) + w$.
  - $u + v = v + u$
  - Existe el vector 0.
  - $-u$ existe.
  - a(bu) = (ab)u
  - $1u = u$
  - a$(u + v)$ = au + av
  - (a+b) u = au + bu
- **El número de autovectores linealmente independientes de una matriz hermítica es igual a la dimensión de la matriz.** Como tal, uno incluso puede obtener infinitos autovectores linealmente independientes para una matriz de dimensión infinita. Por ejemplo, el Hamiltoniano de un sistema real suele ser una matriz de dimensión infinita. Sin embargo, también se pueden tener sistemas simples donde sea solo una matriz de 2x2 (sistema de 2 niveles, utilizado con frecuencia en la óptica cuántica y, por lo tanto, importante , ((y cool))).
- El número de autovectores es igual a la dimensión de una matriz hermítica si no hay degeneración. Aquí, "sin degeneración"significa que no hay autovalores repetidos.
- Para matrices hermíticas degeneradas, siempre existen infinitos autovectores normalizados. Esto se debe a que los dos (o más) vectores base con el valor propio degenerado abarcan todo un subespacio de autovectores. Este hecho puede ser importante, por ejemplo, en la formulación del teorema de compatibilidad .
- **Recordemos:**
- Un conjunto de kets se dice base si existe una única manera de escribir cualquier vector del espacio en el que estamos trabajando, como combinación lineal de estos.
- Una base $\{|i\rangle\}_i$ se dice ortogonal si para cualquier par de kets $|i\rangle$ y $|j\rangle$ en la base, $|i\rangle \neq |j\rangle$ implica que $\langle i|j\rangle = 0$.
- Una base $\{|i\rangle\}_i$ Se dice ortogonal si para cualquier ket $|i\rangle$, se tiene que $\langle i|i\rangle = 1$ (es decir, cada vector de la base está normalizado).
- Se dice que una base es ortonormal si es ortogonal y ortonormal, esto se puede escribir con un δ de kroneker como:

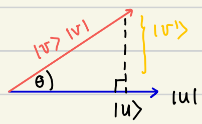
$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Para $|i\rangle$ y $|j\rangle$ en la base ortonormal.

Aux. 2

P1

Gram-schmidt : sirve para proyectar vectores en otra base.



· Tenemos 2 vectores que son l.i.
Queremos ver el espacio que generan estos pero con vectores ortonormales.

· Sirve para transformar un cjto. de vectores l.i. en vectores ortonormales.

· $\cos(\theta) = \dfrac{\langle v|u\rangle}{|u|\cdot|v|}$ ⟵ ángulo entre ambos vectores.

→ construimos $|v'\rangle$ como una ponderación de $|u\rangle$:

ponderación de otro vector.

$|v'\rangle ; \langle v'|u\rangle = 0$ t.q $|v'\rangle = |v\rangle - \underbrace{c}_{}|u\rangle$

combinación lineal de los otros vectores.

$\langle u|v'\rangle = \langle u|v\rangle - c\langle u|u\rangle = 0$

$\Rightarrow \boxed{c = \dfrac{\langle u|v\rangle}{\langle u|u\rangle}}$

$\boxed{|v'\rangle = |v\rangle - \dfrac{\langle u|v\rangle}{\langle u|u\rangle} \cdot |u\rangle.}$

→ corroboramos :

$\langle u|v'\rangle = \langle u|v\rangle - \dfrac{\langle u|v\rangle\cancel{\langle u|u\rangle}}{\cancel{\langle u|u\rangle}} = 0$

→ Ahora vamos a normalizar (para que $|u\rangle$ y $|v'\rangle$ sean ortonormales) :

primero normalizamos $|u\rangle$: $|u\rangle \longrightarrow \dfrac{|u\rangle}{\langle u|u\rangle}$

luego normalizamos $|v'\rangle$: $|v'\rangle \longrightarrow \dfrac{|v'\rangle}{\langle v'|v'\rangle}$

★ desarrollo producto interno:

$$\langle v'|v'\rangle = (|v\rangle - \langle u|v\rangle |u\rangle)^{\dagger} \cdot (|v\rangle - \langle u|v\rangle |u\rangle) = \left(\langle v| - \langle v|u\rangle\langle u|\right)\cdot\left(|v\rangle - \langle u|v\rangle |u\rangle\right)$$

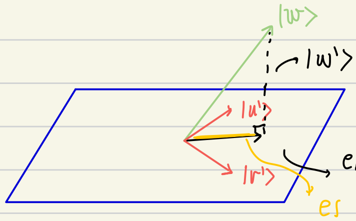
normalizado.

$$= \dots = \langle v|v\rangle - |\langle u|v\rangle|^2 .$$

$$\Rightarrow \boxed{|v'\rangle = \frac{|v'\rangle}{\langle v|v\rangle - |\langle u|v\rangle|^2}}$$

· Para más vectores: se hace el procedimiento inductivamente.

$$\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\} \ l_i \Rightarrow \{|u'\rangle, |v'\rangle\} \to \begin{cases} \langle u'|v'\rangle = 0 \\ \langle u'|u'\rangle = 1 \\ \langle v'|v'\rangle = 1 \end{cases}$$



en el plano tangente.

es una c.l. de los vectores en el plano.

→ proyectamos $|w\rangle$ en el plano
y se vuelve $\perp$ a cualquier vector en el plano.

Queremos un $|w'\rangle$:

$$|w'\rangle = |w\rangle - c_1|u'\rangle - c_2|v'\rangle$$

Como son ortogonales:

- $\langle u'|w'\rangle = \langle u'|w\rangle - c_1\cancel{\langle u'|u'\rangle}^{1} - c_2\cancel{\langle u'|v'\rangle}^{0} \Rightarrow \boxed{c_1 = \langle u'|w\rangle}$
- $\langle v'|w'\rangle = \langle v'|w\rangle - c_1\cancel{\langle v'|u'\rangle}_{0} - c_2\cancel{\langle v'|v'\rangle}_{1} \Rightarrow \boxed{c_2 = \langle v'|w\rangle}$

$$\boxed{|w'\rangle = |w'\rangle - \langle u'|w\rangle|u'\rangle - \langle v'|w\rangle|v'\rangle.}$$

$\boxed{P2}$ $AB = BA$

Base $\{|a_i\rangle\}$, $A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$

$\lambda A|a_i\rangle = \lambda a_i|a_i\rangle$

· simple :

$A(\lambda|a_i\rangle) = a_i(\lambda|a_i\rangle)$

$A|c\rangle = a_i|c\rangle$

$\xrightarrow{\text{simple}} \boxed{|c\rangle = \lambda|a_i\rangle}$ → Este autovector $|c\rangle$ es una ponderación del inicial.

$BA|a_i\rangle = a_i B|a\rangle$

$A(B|a_i\rangle) = a_i(B|a_i\rangle)$

simple → $B|a_i\rangle$ es autovector asociado a a_i de A

→ Pero era simple!

$\Rightarrow B|a_i\rangle = \lambda|a_i\rangle$

$\Rightarrow |a_i\rangle$ es $\vec{v}$.p de B

y λ es e v.p. asociado //

$\boxed{P3}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}$

Encontrar los v.p.

b) Det.:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)^2-1) + [(\cancel{1}+\lambda) - \cancel{1}] + [\cancel{1} + (\cancel{1}+\lambda)]$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) + 2\lambda$$

$$= \lambda[-(1-\lambda)(2-\lambda)+2]$$

$$= \lambda[-2+3\lambda+\lambda+2]$$

$$= \lambda[3\lambda-\lambda^2] = \lambda^2(3-\lambda)$$

$\longrightarrow$ $\lambda = 0$ es v.p de A con mult. algebráica 2.

$\searrow$ $\lambda = 3$ " " " " " " 1.

$\rightarrow \det[A-\lambda I] = \lambda^2(3-\lambda) = 0$

$$(\lambda-0)^{2}(3-\lambda) = 0$$

mult. algebráica 2

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 10-\lambda & 4 \\ 4 & 4 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Factorizar! ←
(no desarrollar!)

$$= (10-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & 4 \\ 4 & 10-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 10-\lambda \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (10-\lambda)[(10-\lambda)^2-4^2] - 4[(10-\lambda)\cdot 4 - 4^2] + 4[4^2-4(10-\lambda)]$$

$$= (10-\lambda)(10-\lambda-4)(10-\lambda+4) - 4^2[(10-\lambda)-4] + 4^2[4-(10-\lambda)]$$

$$= (10-\lambda)(6-\lambda)(14-\lambda) - 4^2[6-\lambda] + 4^2[\lambda-6]$$

$$= (6-\lambda)[(10-\lambda)(14-\lambda) - 2\cdot 4^2]$$

$$= (6-\lambda)[140-24\lambda+\lambda^2-32]$$

$$= (6-\lambda)(\lambda-18)(\lambda-6)$$

$$= -(\lambda-6)^2(\lambda-18).$$

6 es v.p de B con mult. alg. 2.

18 es vp. de B con mult. alg. 1.

da igual.

A] $\lambda = 0$, ②
$\lambda = 3$, ①

B] $\lambda = 6$, ②
$\lambda = 18$, ①

c) Mult. geométrica: cuantos vectores propios hay asociados a ese valor propio.

$\det[M - \lambda I] = 0$

$M - \lambda I$ no inv.

$\longrightarrow (M - \lambda I)|v\rangle = 0$ → este dato solo nos garantiza que existe uno.

$M|v\rangle = \lambda|v\rangle$

Mult. geo. de λ es cuantos vectores $|v\rangle$ l.i. cumplen con $M|v\rangle = \lambda|v\rangle$

* La algebráica es la dim. del espacio.

$1 \leq G(\lambda) \leq A(\lambda)$

= → si la geom. es igual a la algebráica siempre es diagonalizable.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b+c \\ a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underbrace{(a+b+c)}_{0}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow a+b+c = 0$

$a = -b-c$

no son ortogonales.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{|s_1\rangle} + c\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{|s_2\rangle}$$

→ Tenemos 2 v.p. de A.

autovectores son una comb. lineal

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ $\longrightarrow$ Mult. alg. es 1. $\Rightarrow G(\lambda) = 1$.

$$\left.\begin{aligned} -2a + b + c &= 0 \\ a - 2b + c &= 0 \\ a + b - 2c &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} -2a + b &= a - 2b \\ -\cancel{3}a &= -\cancel{3}b \\ &\boxed{a = b} \end{aligned}$$

$\rightarrow \; -2a + a + c = 0$

$\rightarrow \; \cancel{-}a = \cancel{-}c \;\Rightarrow\; \boxed{a = c}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow |a_3\rangle.$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para normalizar, la norma de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Gram-Schmidt: comb. l.i. para obtener conjuntos ortogonales.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{|a_1\rangle} \quad , \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\overbrace{\langle s_1 | s_2 \rangle}^{1}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

norma^2

el fijo.

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base de vectores propios or rmal $\longleftarrow$

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |a_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Buscar Gram-Schmidt.

$$|a_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B|1\rangle = 10|1\rangle + 4|2\rangle + 4|3\rangle \quad / \langle 2|$$

$$\langle 2|B|1\rangle = 4\langle 2|2\rangle = 4$$

$$B|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ & 10 & 4 \\ \ddots & & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

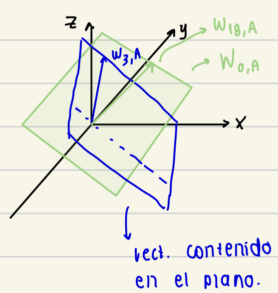
$$= \underbrace{\frac{6}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{6 \cdot |a_1\rangle}$$

$$B|a_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ \vdots & 10 & 4 \\ & & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= 6\,|a_2\rangle$$

$$B|a_3\rangle = 18|a_3\rangle$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

→ Para encontrar la base en común la base de uno debe ser base del otro.

P41

$$\langle f, Dg \rangle = \int_a^b \bar{f}(x)\, Dg(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \bar{f}(x) \frac{d}{dx} g(x)\, dx$$

$$= -\int_a^b \overline{\frac{d}{dx} f(x)}\; g(x)$$

$$= -\int_a^b \overline{Df(x)}\, g(x) = -\langle Df, g \rangle.$$

Mecánica Cuántica
Luis Foà

Joaquín Márquez
Diego Bautista

Auxiliar 3: Alice in Quantumland (clickéame!)

[P0] Discusión 1 Diga si está de acuerdo o no con la siguiente afirmación. Un estado cuántico $\Psi(x)$ está **totalmente determinado** por su densidad de probabilidad $|\Psi(x)|^2$.

[P1] ¿A qué me recuerda esta desigualdad? Sean A,B y C operadores hermíticos que satisfacen:

$$AB - BA = iC.$$

Demuestre que $\langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle C \rangle^2$.

[P2] El conmutador y sus propiedades Definimos el conmutador entre A y B como

$$[A, B] = [B, A].$$

Pruebe que:

- $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$
- $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

[P3] Discusión 2: Dado un operador A, ¿cómo interpretar $f(A)$. ¿Qué representan cosas como $f(\hat{x})$ o $e^{\hat{p}}$?

[P4] Principio de incertidumbre de Heisenberg

- Pruebe que $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.
- Interprete este resultado en términos de la P1.

- **Bonus:** Calcule $[A(\hat{x}), \hat{p}]$.

Recordando cosas de la notación de Dirac y operadores

- El equivalente a un vector traspuesto a un $|\psi\rangle$ es su bra, que se escribe $\langle\psi|$, y en el equivalente de álgebra lineal de plan común correspondería al traspuesto conjugado, a dicha operación se le llama tomar el adjunto (o el dagado) y se denota por $(\cdot)^\dagger$. La trasnformación sigue las siguientes reglas si $|a\rangle$ y $|b\rangle$ son *kets*, c es un escalar complejo y c^* es el conjugado de c:
  - $(|a\rangle)^\dagger = \langle a|$
  - $(|a\rangle + |b\rangle)^\dagger = \langle a| + \langle b|$.
  - $(c\,|a\rangle)^\dagger = c^*\,\langle a|$.
- Si se junta un bra $\langle a|$ con un ket $|b\rangle$ (en ese orden) se obtiene un número (son como legos, se crearon para juntarse en un determinado orden). Esto se escribe $\langle a|b\rangle$. Esto posee las siguientes propiedades:
  - Lineal en los kets (saca constantes y separa sumas).
  $$\langle a|b + \lambda c\rangle = \langle a|b\rangle + \lambda\,\langle a|c\rangle$$
  - Antilineal en los bras (saca las constantes conjugadas y separa las sumas).
  $$\langle a + \lambda b|c\rangle = \langle a|c\rangle + \lambda^*\,\langle b|c\rangle$$
  - Es definido positivo, es decir $\langle a|a\rangle \geq 0$ y si $\langle a|a\rangle = 0$, entonces $|a\rangle$ es el ket nulo.
  - Desigualdad de Cauchy - Schwarz
  $$|\langle\phi|\psi\rangle| \leq ||\phi||\,||\psi||$$
- Conmutador de dos operadores A y B:
$$[A, B] = AB - BA.$$
- Operadores de momento y posición:
$$\hat{x}f(x) = xf(x); \quad \hat{p}f(x) = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x).$$

Auxiliar 3.

P0 ¿ $|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x)$ determina mi estado?

No, requiero $\psi(x)$. $\longrightarrow$ Experimentos que involucran interferencia.

Supongamos que tengo $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$.

$$\cdot\ \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{e^{i\phi_1 t}\psi_1(x)} + \underbrace{e^{i\phi_2 t}\psi_2(x)}\right)$$

* ψ_1 y ψ_2 son reales.

$$\psi^*(x)\psi(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\phi_1 t}\psi_1(x) + e^{-i\phi_2 t}\psi_2(x)\right)\left(e^{i\phi_1 t}\psi_1(x) + e^{i\phi_2 t}\psi_2(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + e^{-i(\phi_1-\phi_2)t}\psi_1\psi_2 + e^{-i(\phi_2-\phi_1)t}\psi_1\psi_2\right)$$

$i(\phi_1-\phi_2)$

$$= \frac{1}{2}\left(|\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + 2\cos(\phi_1-\phi_2)t\,\psi_1\psi_2\right)$$

esta información nos perderíamos si sólo tenemos el módulo^2

P1 Sean A, B y C hermíticos tales que

$$[A,B] = AB - BA = iC.$$

ppio. de incertidumbre de Heisenberg. $\longleftarrow$

Dem. que $\langle \Delta A^2\rangle\langle\Delta B^2\rangle \geq \frac{1}{4}\langle C\rangle^2$.

Por def.:

$$\langle \Delta A^2\rangle = \langle (A-\langle A\rangle)^2\rangle = \langle\psi|(A-\langle A\rangle)^2|\psi\rangle$$

Definimos $|\alpha\rangle = (A-\langle A\rangle)|\psi\rangle$

Nota: $a|\psi\rangle = a\hat{1}|\psi\rangle$ — es el operador identidad por a.

$$\langle\alpha| = \langle\psi|(A-\langle A\rangle)^\dagger = \langle\psi|(A^\dagger - \langle A\rangle^\dagger)$$
$$= \langle\psi|(A-\langle A\rangle)$$

Hermíticos $\longleftarrow$

$$\cdot\ \langle\Delta A^2\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\psi|(A-\langle A\rangle)(A-\langle A\rangle)|\psi\rangle.$$

Defino un estado β

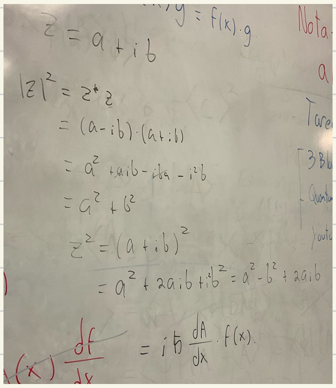
· Análogamente, $|\beta\rangle = (B - \langle B\rangle)|\psi\rangle$

$$\langle \Delta B^2\rangle = \langle \beta|\beta\rangle.$$

Recuerdo: Desigualdad Cauchy Schwartz:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle| \leq |\alpha||\beta|$$

$\langle\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2$



$$\rightarrow |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \leq \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle$$

sólo se puede hacer con el módulo al cuadrado

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \left(Re(\langle\alpha|\beta\rangle)^2 + Im(\langle\alpha|\beta\rangle)^2\right) \geq Im(\langle\alpha|\beta\rangle)^2.$$

$$Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

$$Im(\langle\alpha|\beta\rangle) = \frac{1}{2i}\left[\langle\alpha|\beta\rangle - \langle\alpha|\beta\rangle^*\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\langle\alpha|\beta\rangle - \langle\beta|\alpha\rangle\right]$$

· $\boxed{\langle\alpha|\beta\rangle} = \langle\psi|(A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle)|\psi\rangle.$

asumiendo que los estados están normalizados

$$= \langle\psi|AB - A\langle B\rangle - \langle A\rangle B + \langle A\rangle\langle B\rangle)|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|AB|\psi\rangle - \underset{n^{o}\ real}{\langle B\rangle}\underbrace{\langle\psi|A|\psi\rangle}_{\langle A\rangle} - \langle A\rangle\underbrace{\langle\psi|B|\psi\rangle}_{\langle B\rangle} + \langle A\rangle\langle B\rangle\cancelto{1}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

$$= \langle\psi|AB|\psi\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle.$$

· $\boxed{\langle\beta|\alpha\rangle} = \langle\psi|BA|\psi\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle.$

$$\langle\alpha|\beta\rangle - \langle\beta|\alpha\rangle = \langle\psi|AB - BA|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|[A,B]|\psi\rangle$$

$$Im(\langle\alpha|\beta\rangle) = \frac{1}{2i}\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\cancel{i}}\langle\psi|\cancel{i}C|\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle\psi|C|\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle C\rangle.$$

$\rightarrow \langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle \geq |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \geq (Im(\langle \alpha | \beta \rangle))^2 = \frac{1}{4} \langle C \rangle^2.$

$\underline{P3|}$

$e^{-i\hat{H}/\hbar t} \quad ; \quad e^{i\hat{L}/\hbar \theta}$

con $\hat{A}$ operador $\leftarrow$

¿Qué significa $f(\hat{A})$

Si A, B operadores :

$A + B, \quad cA, \quad A^N = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A.$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n A^n$$

. $\hat{x} g = xg$, g es función cualquiera, puede ser dep. de x.

$f(\hat{x})g$

Asumiendo que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$$f(\hat{x})g = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \hat{x}^n g.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x g$$

$$= f(x) g.$$

---

operador de momento. $\leftarrow$

Ej : $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$

$$f(\hat{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)^n$$

Dado $\hat{A}$, sea $|\psi\rangle$ es eigenket de $\hat{A}$ con eigenvalor a.

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$$

$$\hat{A}^N|\psi\rangle = A^{N-1} a\,|\psi\rangle$$
$$= A^{N-2} a^2\,|\psi\rangle$$
$$\vdots$$
$$= a^N\,|\psi\rangle.$$

$$\cdot\; f(\hat{A})\,|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{A}^n\,|\psi\rangle$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n\,|\psi\rangle = f(a)\,|\psi\rangle. \quad \rightarrow \text{ vale siempre}$$

Si $\psi(x)$ es eigenfunción de $\hat{p}$ con eigenvalor p.

$$f(\hat{p})\,\psi(x) = f(p)\,\psi(x)$$

Si $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$; $\hat{x} f = x f$

$\underline{P_4|}$

$$\underbrace{[\hat{x},\hat{p}]}_{\text{es un operador}}\, f \Rightarrow [\hat{x},\hat{p}]\, f = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) f$$
$$= \hat{x}\,(\hat{p} f) - \hat{p}\,(\hat{x} f)$$
$$= \hat{x}\cdot\left(-i\hbar \frac{df}{dx}\right) + i\hbar \frac{d}{dx}(x f).$$
$$= \cancel{-i\hbar x \frac{df}{dx}} + i\hbar f + \cancel{i\hbar x \frac{df}{dx}}$$
$$= i\hbar f$$

$$\Rightarrow [\hat{x},\hat{p}] = i\hbar\hat{\mathbb{1}}$$

$\rightarrow \langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B \rangle^2 \geq \frac{\langle C \rangle^2}{4}$ con $[A, B] = iC$

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Desv. estándar (sacando la raíz). $\rightarrow$ $\boxed{\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$ $\rightsquigarrow$ No se puede reconocer la trayectoria

" " " distinguir entre 2 part. iguales.

$$[A(\hat{x}), \hat{p}] f(x) = [A(x)\hat{p} - \hat{p} A(x)] f(x)$$

$$= A \hat{p}(f(x)) - \hat{p}(A(x) f(x))$$ $\rightarrow$ poner paréntesis xq operador actúa a distancia.

$$= i\hbar \cancel{A \frac{df}{dx}} + i\hbar f(x) \frac{dA}{dx} + i\hbar \cancel{A(x) \frac{df}{dx}}$$

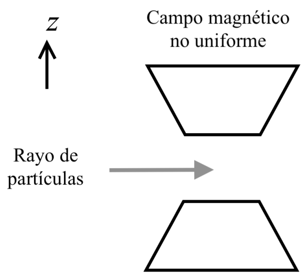
$$= i\hbar \frac{dA}{dx} \cdot f(x)$$

$$\therefore [A(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar \frac{dA(x)}{dx} \cdot f(x)$$

Mecánica Cuántica
Luis Foà

Joaquín Márquez
Diego Bautista

Auxiliar 4: Measure me, if you can (clickéame!)



[P0] **Discusión 1: El experimento de Stern - Gerlach**. La madrugada entre el 7 y 8 de febrero de 1922, y tras casi un año de intentos, Stern (Premio Nobel 1939) y Gerlach llevaron a cabo su famoso experimento. Este tenía como objetivo estudiar la deflexión de un rayo de partículas de plata por un campo magnético no homogéneo.
De acuerdo con la teoría electromagnética, la fuerza que ejerce el campo magnético sobre una partícula con momento magnético μ es

$$F = \mu_z \nabla(B_z).$$

Se muestra una imagen del experimento justo antes de que el haz sea desviado por el imán. **¿Qué esperan observar?**

[P1] **Aprendiendo a usar la regla de Born**

En la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se definen los siguientes operadores:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Diagonalice el operador σ_x. Exprese los eigenvectores en la base donde σ_z es diagonal.

b) Se define un estado cuántico como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + |-\rangle\right].$$

Se mide la observable asociada a σ_z, ¿qué resultados son posibles y con qué probabilidad? Diga cual es el estado del sistema exactamente después de la medición en cada caso.

c) Ahora se construye el estado

$$|\psi\rangle = |+\rangle.$$

Se mide la observable asociada a σ_x, ¿qué resultados son posibles y con qué probabilidad? Diga cual es el estado del sistema exactamente después de la medición en cada caso.

[P2] **Recalentado:** Para esta pregunta considere funciones $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ que son derivables y que cumplen con $f(a) = f(b) = 0$. Recuerde que consideramos el producto interno:

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$$

a) Encuentre el operador adjunto de $\hat{D} = \frac{d}{dx}$.

b) Encuentre el operador adjunto de $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$.

c) ¿Es el operador definido como $R[f](x) = f(x)^2$ lineal?

[P3] **¿What is an uncertainty?**

a) Compare el principio de indeterminación encontrado en clases anteriores y el principio de indeterminación tiempo-energía. ¿Qué diferencia encuentra? ¿Se pueden demostrar de alguna manera?

b) Recordando el principio de indeterminación general demostrado en auxiliares anteriores, y además recordando el teorema de Ehrenfest, deduzca una expresión similar a la indeterminación tiempo-energía. Interprete.

c) Considere el sistema cuántico de dos niveles dado por el siguiente Hamiltoniano:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad |\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Considere un sistema cuántico que tiene como condición inicial $|\Psi_0\rangle$. Ahora considere un observable dado por la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Haga uso de la relación encontrada en la parte anterior de la relación tiempo-energía para este ejemplo.

d) ¿Nota algo incómodo con respecto al tiempo en la teoría cuántica? Especifique. *Recuerde que usted **no sólo** conoce la mecánica cuántica y la mecánica clásica, existe otra más.*

Postulados

- **Regla de Born** (Dato curioso: Born es el abuelo de Olivia Newton-John :o) Dado un observable asociado a un operador A que se mide en un vector de estado $|\psi\rangle$ **normalizado**,
  - el resultado medido será alguno de los valores propios de A,
  - la probabilidad de medir un valor propio λ_i será $|\langle\lambda_i|\psi\rangle|^2$, donde $|\lambda_i\rangle$ es el vector propio asociado a λ_i :

  $$A\,|\lambda_i\rangle = \lambda_i\,|\lambda_i\rangle\,.$$

- **Ehrenfest:** Si Ω es un operador, entonces:

  $$\frac{d}{dt}\langle\Omega\rangle = \frac{-i}{\hbar}\langle[\Omega, H]\rangle + \left\langle \frac{\partial\partial\Omega}{\partial\partial t} \right\rangle$$

  Donde $\langle\bullet\rangle$ es el valor esperado.

- **Principio de Indeterminación Generalizado:** Si A, B son operadores hermíticos, entonces se cumple la siguiente relación:

  $$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left|\frac{1}{2}\langle\{A,B\}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle\right|^2 + \left|\frac{1}{2i}\langle[A,B]\rangle\right|^2$$

  Se puede acotar por debajo descartando el primer término, esto da como resultado el principio de indeterminación más común.

- **Los postulados de la Cuántica**

  1. El estado de una partícula está determinado por un vector $|\psi(t)\rangle$, en un espacio de Hilbert H.
  2. Las variables físicas están codificadas mediante operadores, que son funciones lineales de H en H. Los valores que se pueden medir están codificados en los autovalores del operador. En particular, los operadores análogos a los clásicos x y p tienen como contraparte cuántica los operadores:

     $$\begin{aligned} \langle x'|\,X\,|x\rangle &= \quad x\delta x - x' \\ \langle x'|\,P\,|x\rangle &= \ -i\hbar\delta'(x - x') \end{aligned}$$

     Donde $\delta'(x)$ corresponde a la "derivada" de la distribución de Dirac, esto actúa sobre las funciones integrando, haciendo una integral por partes (Las condiciones de borde se anulan si la δ no está centrada en el borde):

     $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx \\ &= -f'(x) \end{aligned}$$

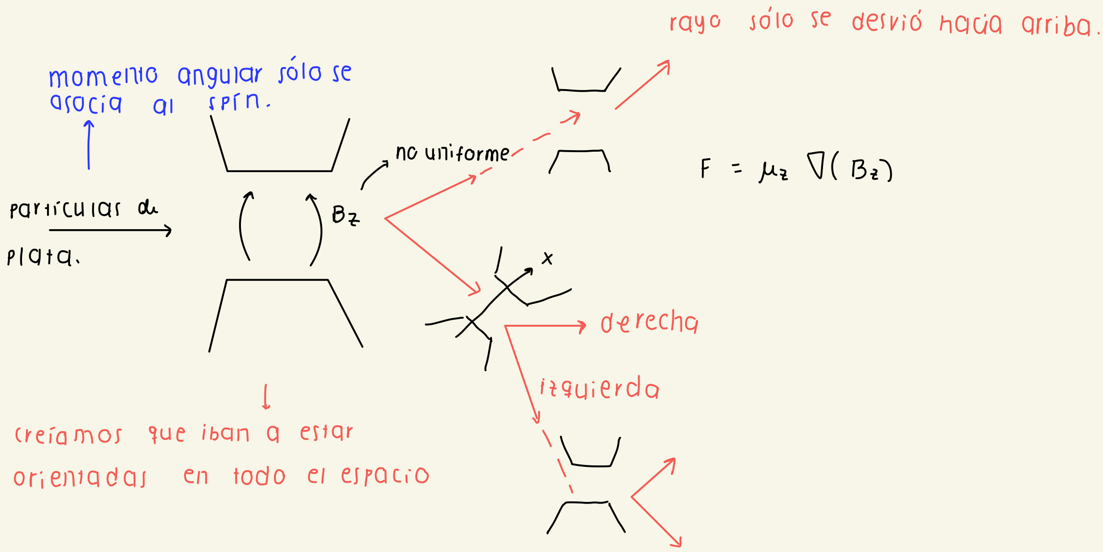
  3. Cuando se mide un observable, esta medición es **no determinista**, y el resultado a obtener tiene una probabilidad proporcional de ocurrir proporcional a la norma de la **la proyección del vector en el espacio propio asociado al valor medido**.
  4. La evolución temporal de un sistema cuántico se determina, en base a los postulados, por la ecuación de Schrödinger, que corresponde a:

     $$i\hbar\partial_t\,|\psi\rangle = H\,|\psi\rangle$$

Auxiliar 4

5 sept

PO



$$F = \mu_z \nabla(B_z)$$

· spin: var. cuántica que toma 2 valores posibles.

P1

a) En la base con spin $\uparrow_z$ y $\downarrow_z$ bien definido. $\{ |\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle \}$
los operadores de las observables de este experimento son:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ → eigenvectores: operadores asociados al mom. magnético en x.

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1) = \pm 1$$

Si $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad x = y$$

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle \right)$$

Si $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = -y$$

$$|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle \right)$$

Para s_z:

Eigenvectores: $\{ |\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle \}$

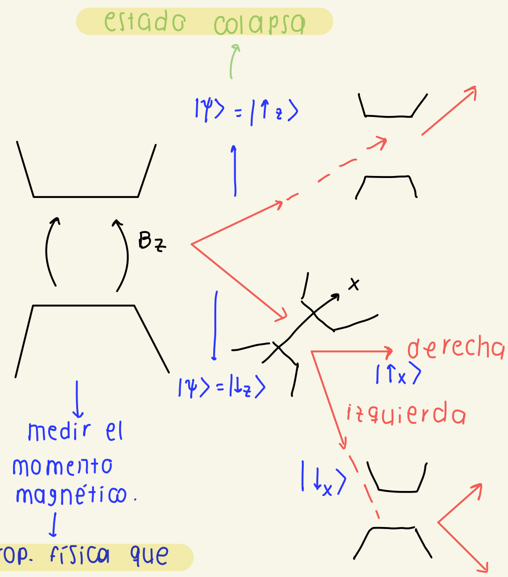
$$\sigma_z |\uparrow_z\rangle = +1 |\uparrow_z\rangle, \quad \sigma_z |\downarrow_z\rangle = -1 \cdot |\downarrow_z\rangle$$

Para σ_x:

Eigenvectores: $\left\{ |\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle), \ |\downarrow_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle) \right\}$

$$\sigma_x |\uparrow_x\rangle = 1 \cdot |\uparrow_x\rangle, \quad \sigma_x |\downarrow_x\rangle = -|\downarrow_x\rangle$$

partículas de plata.



Estados: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle\right)$

xq salieron al azar.

medir el momento magnético.

prop. física que det. su comporta@ posterior.

Regla de Born

$$p_a = |\langle a|\psi\rangle|^2$$

prop. de que salga a según uno u otro resultado.

$$P(\sigma_z = 1) = |\langle \uparrow_z|\psi\rangle|^2$$

$$= \left|\langle \uparrow_z | \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle)\rangle\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{\langle \uparrow_z|\uparrow_z\rangle}_{=1} + \underbrace{\langle \uparrow_z|\downarrow_z\rangle}_{0})\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(\sigma_z = -1) = \frac{1}{2}$$

Medimos σ_z al $|\psi\rangle$ que fue arriba:

$$P(\sigma_z = 1) = |\langle \uparrow_z|\psi\rangle|^2$$

$$= |\langle \uparrow_z|\uparrow_z\rangle|^2 = |1|^2 = 1$$

$$P(\sigma_z = -1) = |\langle \uparrow_z|\psi\rangle|^2 = |\langle \downarrow_z|\uparrow_z\rangle|^2 = 0$$

Medimos σ_x al $|\psi\rangle = |\downarrow_z\rangle$ (el que fue abajo)

Para medir, usamos la regla de Born:

$$P(\sigma_x = 1) = |\langle \uparrow_x | \psi\rangle|^2$$

$$= \left| \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} (\langle \uparrow_z | + \langle \downarrow_z | \right) | \downarrow_z \rangle \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cancel{\langle \uparrow_z | \downarrow_z \rangle}^{0} + \overset{=1}{\langle \downarrow_z | \downarrow_z \rangle} \right) \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}.$$

$$* \quad \mathbb{P}(a) = \langle P_a \rangle = \langle \psi | P_a | \psi \rangle = \langle \psi | a \rangle \langle a | \psi \rangle = \overline{\langle a | \psi \rangle} \langle a | \psi \rangle$$
$$= |\langle a | \psi \rangle|^2$$

$\boxed{P2}$ $\quad \langle f | g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$

$\downarrow$ prod. punto usual

a) $\quad * \quad \langle a | A b \rangle = \langle A^\dagger a | b \rangle.$

$* \quad \vec{v} \cdot (A w) = v^T A w = (A^T v) w$

$$\langle f | D g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)}\, D g(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \overline{f(x)}\, \frac{d}{dx} g(x)\, dx$$

$$= \left[\cancel{\overline{f(x)}\, g(x)}^{\,0} \right|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \overline{f(x)}\, g(x)$$

enunciado.

$$= - \int_a^b \overline{\frac{d}{dx} f(x)}\, g(x)\, dx$$

$$= - \int_a^b \overline{Df(x)}\, g(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \overline{-Df(x)}\, g(x)\, dx$$

$$= \langle -Df, g \rangle$$

$\langle f | Dg \rangle = \langle -Df | g \rangle$

$\Rightarrow \boxed{D^T = -D}$

antihermítico.

b) $\quad \langle f, \Delta g \rangle = \langle f, D D g \rangle = \langle -Df, Dg \rangle$

$$= \langle D^2 f, g \rangle$$

$$= \langle \Delta f, g \rangle$$

$\Rightarrow \boxed{\Delta^\dagger = \Delta}$

hermítico.

$*$ para dim. mayores: $\Delta = \nabla \cdot (\nabla \;)$

c) $R\,[f+g] = (f+g)^2$

$= f^2 + g^2 + 2fg$ Debe ser $\neq 0$ para todo f y g.

$= R[f] + R[g] + 2fg.$

$\downarrow$

No es lineal.

P3 Experimentalmente:

$\Delta E\, \Delta t \sim \hbar$

$\Delta E\, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ $\longrightarrow$ "tiempo de vida medios".

Ppio. de indeterminación generalizado.

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left| \frac{1}{2i} \langle [A,B] \rangle \right|^2 \xrightarrow{A=H} \sigma_H^2 \sigma_B^2 \geq \left| \frac{1}{2i} \langle [H,B] \rangle \right|^2$$

Ehrenfest.

$$\frac{d}{dt}\langle \Omega \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H,\Omega] \rangle.$$

$$= \left| \frac{1}{2\cancel{i}} (-\cancel{i})\, \hbar \frac{d}{dt} \langle B \rangle \right|^2$$

$$-i\hbar \frac{d}{dt}\langle B \rangle = \langle [H,B] \rangle$$

$$\sigma_H^2 \sigma_B^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \frac{d}{dt} \langle B \rangle \right|^2$$

$$\sigma_H^2 \underbrace{\frac{\sigma_B^2}{\left| \frac{d}{dt} \langle B \rangle \right|^2}} \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\sigma_H \frac{\sigma_B}{\underbrace{\boxed{\left| \frac{d}{dt} \langle B \rangle \right|}}} \geq \frac{\hbar}{2}$$

cuanto se demora en desviarse del promedio por una desviación estándar.

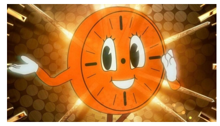
$$\frac{[\cancel{B}]}{\frac{[\cancel{B}]}{[t]}} = [t] \rightarrow \text{unidades de } t.$$

B es un reloj para medir la desviación de la energía.

$$\boxed{\sigma_H\, \tau_B \geq \frac{\hbar}{2}}$$

$*$ $\langle [H,B] \rangle \neq 0$!

c)



Joaquín Márquez
Diego Bautista

El Delicado Orden del Tiem-THE WORLD (clickéame!)

[P0] ¿Es verdad decir que todavía queda tiempo?

X En la ecuación de Schrödinger en su forma usual se suele ver un término que, a veces, se le denomina "energía cinética", y corresponde al operador:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

¿Por qué cree que se pone la segunda derivada allí? ¿Qué sentido físico tiene esto?

Hint: Recuerde qué significa la segunda derivada en una Serie de Taylor y la simetría que tiene una parábola. Recuerde también el principio de Indeterminación de Heisenberg.

T Considere el operador de evolución temporal $U(t, t_0)$ Usándolo muestre porqué los estados estacionarios tienen ese nombre. Si los estados estacionarios forman una base del espacio de Hilbert en el que trabajamos ¿Esto conduce a una paradoja de Zenon moderna?[1]

[P1] Matraca, ¡A practicar!

Considere un sistema que en el tiempo t_0 es $|\Psi_0\rangle$, con dos observables llamados A y B, dados por:

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & i\\0 & -i & 1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -i\\0 & i & 0\end{pmatrix}$$

a) Primero se mide A e inmediatamente después B. Calcule la probabilidad de obtener 0 para A y luego 1 para B.

b) Primero se mide B e inmediatamente después A. Calcule la probabilidad de obtener 1 para B y luego 0 para A.

c) Analice e interprete los resultados.

[P3] Evolución, pero sólo es temporal:

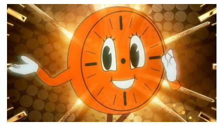
- Considere el siguiente Hamiltoniano con el siguiente observable:

$$H = \delta\,|a\rangle\langle b| + \delta\,|b\rangle\langle a| \qquad A = a\,|a\rangle\langle a| + b\,|b\rangle\langle b|$$

  1. Encuentre el operador de evolución temporal entre los tiempos 0 y t.
  2. Encuentre la evolución temporal de los autoestados de A.

- ¿Como cree que es el operador de evolución temporal aplicado de forma continua? Intente escribirlo como serie para el caso 1D en el caso de partícula libre.

[1] *Indicación: La paradoja de Zenón era una paradoja de la antigua Grecia, que correspondía a que si un guerrero disparaba una flecha, que partía del punto A y llegaba al punto B, primero debía recorrer la mitad del trayecto, pero antes un cuarto, pero antes un octavo, etc. Entonces, en conclusión, la flecha no podía moverse.* ¿Puedes encontrar el error de este razonamiento?



And now, it's **time** for the moment you've been waiting for

- **Regla de Born** (Dato curioso: Born es el abuelo de Olivia Newton-John :o) Dado un observable asociado a un operador A que se mide en un vector de estado $|\psi\rangle$ **normalizado**,
  - El resultado medido será alguno de los valores propios de A,
  - La probabilidad de medir un autovalor λ es proporcional a la proyección al subespacio propio W_λ. Con la constante de proporcionalidad siendo la norma del vector original, es decir:
  $$\mathbb{P}(\text{Medir } \lambda) = \frac{\langle\psi|P_{A,\lambda}\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$
  Donde $P_{A,\lambda}$ es el operador **proyección ortogonal** al subespacio propio asociado a λ del operador A.
  - Después de la medición, si se obtiene λ, entonces el vector de estado evoluciona *discontinuamente* a $P_{A,\lambda}|\psi\rangle$. (Esto es el conocido "colapso" del vector de estado).
- **Operador de Evolución temporal:** El operador de evolución temporal es un operador $U(t,t_0)$ que toma un vector de estado (si tomamos la representación de Schrödinger) en tiempo t_0 y devuelve cómo es al tiempo t. Este posee varias propiedades:
  - El cambio en el tiempo representa la evolución dada por la ecuación de Schrödinger:
  $$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$
  - La evolución temporal se comporta bien separando el tiempo en partes sucesivas, si $t_0 < t_1 < t_2$:
  $$U(t_2,t_1)U(t_1,t_0) = U(t_2,t_0)$$
  Donde por completitud se considera:
  $$U(t_0,t_0) = \mathbb{I}$$
  Donde $\mathbb{I}$ es la identidad.
  - Si H es independiente del tiempo, entonces U tiene una representación explícita:
  $$U(t,t_0)|\psi\rangle = \exp\left(\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right)|\psi\rangle$$
  Donde la exponencial de un operador A se define como:
  $$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!}$$
  - Se puede escribir de forma explícita el operador de evolución temporal U si se conoce la base de autovectores (y autovalores) de H, si esta es $|E_j\rangle$ con valores propios respectivos a_j, entonces:
  $$U(t,t_0) = \sum_j \exp\left(-\frac{iE_j(t-t_0)}{\hbar}\right)|E_j\rangle\langle E_j|$$
- **Los postulados de la Cuántica**
  1. El estado de una partícula está determinado por un vector $|\psi(t)\rangle$, en un espacio de Hilbert H.
  2. Las variables físicas están codificadas mediante operadores, que son funciones lineales de H en H. Los valores que se pueden medir están codificados en los autovalores del operador. En particular, los operadores análogos a los clásicos x y p tienen como contraparte cuántica los operadores:
  $$\begin{aligned}\langle x'|X|x\rangle &= x\delta(x-x')\\ \langle x'|P|x\rangle &= -i\hbar\delta'(x-x')\end{aligned}$$
  Donde $\delta'(x)$ corresponde a la "derivada" de la distribución de Dirac, esto actúa sobre las funciones integrando, haciendo una integral por partes (Las condiciones de borde se anulan si la δ no está centrada en el borde):
  $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx\\ &= -f'(x)\end{aligned}$$
  3. Cuando se mide un observable, esta medición es **no determinista**, y el resultado a obtener tiene una probabilidad proporcional de ocurrir proporcional a la norma de la **la proyección del vector en el espacio propio asociado al valor medido**.
  4. La evolución temporal de un sistema cuántico se determina, en base a los postulados, por la ecuación de Schrödinger, que corresponde a:
  $$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle$$

Auxiliar 5

12 · sept.

Resumen

- ★ $i\hbar\, \partial_t |\psi\rangle = H|\psi\rangle$
- ★ $U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H\right)$

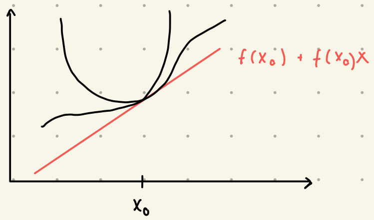
H típico

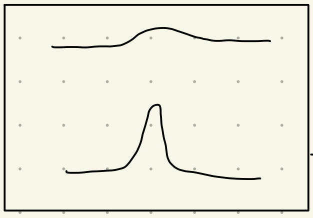
$$H = \frac{p^2}{2m} + V = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V. \quad = \frac{p^2}{2m}$$

P0] x] $\hat{T} = -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

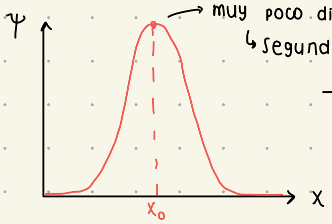
$$f(x_0+x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)x^2 + R$$

"Orientación Parábola"





→ + curvatura.



→ muy poco disperso.
↳ segunda derivada muy grande.
→ si uno concentra mucho el punto, la energía va súper lejos.

$$\partial_t \psi = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\partial^2_{xx}\psi}_{\text{grande en módulo}} + \overbrace{V\psi}^{\text{controlado.}}$$

T] 0.- Estados estacionarios

- No cambian
- Estacionalidad
- sol. "espacial" de la eq. diff (EDP).

→ val esperado:

$$H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, E

$$U(t)|\psi\rangle = \sum \frac{1}{n!}\left(-\frac{it}{\hbar}\right)^n H^n|\psi\rangle$$

$$\left(H^n|\psi\rangle = E^n|\psi\rangle\right)$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!}\left(-\frac{it}{\hbar}\right)^n E^n|\psi\rangle$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!}\left(-\frac{itE}{\hbar}\right)^n|\psi\rangle = e^{-itE/\hbar}|\psi\rangle$$ → constante con módulo 1.

$$U(t)|\psi\rangle = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}|\psi\rangle$$

A observable cualquiera:

$$\langle A\rangle_t = \langle \psi(t)|A|\psi(t)\rangle = e^{\frac{iEt}{\hbar}}\langle\psi|A e^{-\frac{iEt}{\hbar}}|\psi\rangle$$

$$= e^{\frac{iEt}{\hbar}} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\langle\psi|A|\psi\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}|\psi\rangle \qquad = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

$$= \langle A\rangle_0$$ → No cambia el valor esperado por linealidad.

$$\langle\psi(t)| = e^{\frac{iEt}{\hbar}}\langle\psi|$$

$$H|\psi_1\rangle = E_1|\psi_1\rangle$$
$$H|\psi_2\rangle = E_2|\psi_2\rangle \quad , \quad E_1 \neq E_2$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_2\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}U(t)|\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}U(t)|\psi_2\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}|\psi_1\rangle + \frac{e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}}{\sqrt{2}}|\psi_2\rangle$$

$$\langle A\rangle_t = \left\langle \frac{e^{-\frac{itE_1}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{e^{-\frac{itE_2}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\psi_2 \middle| A \middle| \frac{e^{-\frac{itE_1}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{e^{-\frac{itE_2}{t}}}{\sqrt{2}}\psi_2\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left\langle \cancel{e^{-\frac{itE_1}{\hbar}}}\psi_1 \middle| A \middle| \cancel{e^{-\frac{itE_1}{\hbar}}}\psi_1\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \frac{\cancel{e^{-\frac{itE_2}{\hbar}}}}{\sqrt{2}}\psi_2 \middle| A \middle| \frac{\cancel{e^{-\frac{itE_2}{\hbar}}}}{\sqrt{2}}\psi_2\right\rangle$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left\langle \frac{e^{-\frac{itE_1}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\psi_1 \middle| A \middle| \frac{e^{-\frac{itE_2}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\psi_2\right\rangle}_{\star} + \frac{1}{2}\overline{\star}$$

$$= \frac{1}{2}\langle A\rangle_{\psi_1} + \frac{1}{2}\langle A\rangle_{\psi_2} + \frac{1}{2}e^{\frac{it}{\hbar}(E_1-E_2)}\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle + \frac{1}{2}e^{\frac{it(E_2-E_1)}{\hbar}}\langle\psi_2|A|\psi_1\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle A\rangle_{\psi_1} + \frac{1}{2}\langle A\rangle_{\psi_2} + \mathrm{Re}\left(e^{\frac{it}{\hbar}(E_1-E_2)}\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle\right)$$

* $$\left.\begin{array}{l} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{array}\right\} \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = a = \mathrm{Re}(z)$$

supongamos $\langle \psi_2 | A | \psi_1 \rangle$ real

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi)$$

$$\langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right) \cdot C$$

No es estacionario xq esto puede cambiar en el tiempo.

* estados estacionarios: Densidad de prob. es cte en el tiempo.

$$\hookrightarrow |\psi(r,t)|^2 = \psi^*(r) e^{iEt/\hbar} \psi(r) e^{-iEt/\hbar} = |\psi(r)|^2$$

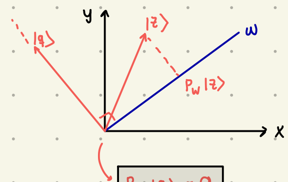
P) Miden a del A

cuando hacemos un colapso. hacemos una proyecc.

$$|\psi\rangle \longrightarrow P_{A,a} |\psi\rangle$$

$$\mathbb{P} = \frac{\langle \psi | P_{A,a} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

· Proyección ortogonal:



$\boxed{P_w |q\rangle = 0.}$

No pasa! $\longrightarrow$ xq la probabilidad de que ocurra esto es 0.

$$\mathbb{P}(a) \propto \langle \psi | \underbrace{P_{A,\alpha} | \psi \rangle}_{\in W_a} = 0$$

prob. de obtener a

si $|\psi\rangle \perp W_a$

$H \to 1, 2, 3$

Estudiar el siguiente Problema:

Dado un estado:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y operadores

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Probar diagonalizar bloque a bloque.

Op. proyección:

$$\hat{P} : |a\rangle\langle a| \quad \text{si no hay degeneración.}$$

$$\hat{P} : |a,1\rangle\langle a,1| + |a,2\rangle\langle a,2| + \dots |a,g\rangle\langle a,g|$$

con a el autovector asociado al autovalor a del observable A.

1) En problemas de medición, siempre calcular los eigenvectores primero (y sus autovectores asociados) (y normalizar / ortogonalizar).

Para A:

$$a = \sqrt{2}, \quad |a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \sqrt{2}, \quad |a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 0, \quad |a_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$b=-1 \qquad |b_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$b=1 \qquad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}$

$b=1 \qquad |b_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-i\end{pmatrix}$

2) Calculemos la probabilidad de medir 0 para A e inmediatamente después medir 1 para B.

① $P(a=0) = \dfrac{\langle \hat{P}_{a=0}\rangle}{\langle \psi_0|\psi_0\rangle}$

② colapsa a $|\psi_1\rangle = \hat{P}_{a=0}|\psi_0\rangle = \langle a_3|\psi_0\rangle |a_3\rangle$

③ $P(b=1) = \dfrac{\langle P_{b=1}\rangle}{\langle \psi_1|\psi_1\rangle}$ sobre $|\psi_1\rangle$ $\longrightarrow \dfrac{\langle\psi_1|\langle b_1|\psi_1\rangle|b_1\rangle}{\langle\psi_1|\psi_1\rangle}$ vect. prop.

① $\rightarrow \langle \bar{P}_{a=0}\rangle = \dfrac{\langle\psi_0|a_3\rangle\langle a_3|\psi_0\rangle}{\langle\psi_0|\psi_0\rangle} = \dfrac{|\langle a_3|\psi_0\rangle|^2}{\langle\psi_0|\psi_0\rangle}$

$\langle a_3|\psi_0\rangle = \dfrac{\left|\frac{1}{2}(0 \;\; 1 \;\; i)\,\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}\right|^2}{\frac{1}{6}(1\;0\;4)\,\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}} = \dfrac{8}{17}$

conjugar!

aplicarle el proyector al estado original!

② $\rightarrow$

$|\psi_1\rangle = \hat{P}_a|\psi_0\rangle$

$= \langle a_3|\psi_0\rangle|a_3\rangle$

$= \begin{pmatrix}0\\-i/3\\1/3\end{pmatrix} \longrightarrow$ vive en y,z

③ Para medir $b=1 \longrightarrow$ autovectores en y,z!

$P_{b=1} = |b_2\rangle\langle b_2| + |b_3\rangle\langle b_3| \quad \rightarrow$ degenerado.

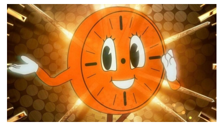
$P(b=1) = \dfrac{\langle P_{b=1}\rangle}{\langle\psi_1|\psi_1\rangle} = \dfrac{\langle\psi_1|\left(|b_3\rangle\langle b_3| + |b_2\rangle\langle b_2|\right)|\psi_1\rangle}{\langle\psi_1|\psi_1\rangle}$

$= \dfrac{\langle\psi_1|b_3\rangle\langle b_3|\psi_1\rangle + \langle\psi_1|b_2\rangle\langle b_2|\psi_1\rangle}{\langle\psi_1|\psi_1\rangle} \rightarrow$ sumando las probabilidades!

$= 1.$

· colapsa a $|\psi_3\rangle = \hat{P}_{b=1} \, |\psi_1\rangle = \boxed{\langle b_2 | \psi_1 \rangle} |b_2\rangle + \boxed{\langle b_3 | \psi_1 \rangle} |b_3\rangle.$

* Hacer inciso!



Aux 6: Victory lies before you!

[Pδ] Como un respiro ¿Es verdad decir que todavía queda tiempo? Considere el pozo de potencial δ-Dirac, esto es, que en base posición, la ecuación de Schrödinger sea:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - a\delta(x)\psi(x)$$

Donde a es una constante. Encuentro los eigenestados de este sistema: ¿Qué efecto tiene la δ Dirac?

[PY] Desde las tierras del sol naciente Considere el doble potencial de Yukawa

$$V(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{0{,}9}{x}$$

El cual tiene un gráfico como se muestra en el lado derecho:

1. Bosqueje los gráficos de distintos estados estacionarios según sus posibles energías (vea cómo es en cada caso).
2. ¿Está cuantizada **siempre** la energía para este potencial?

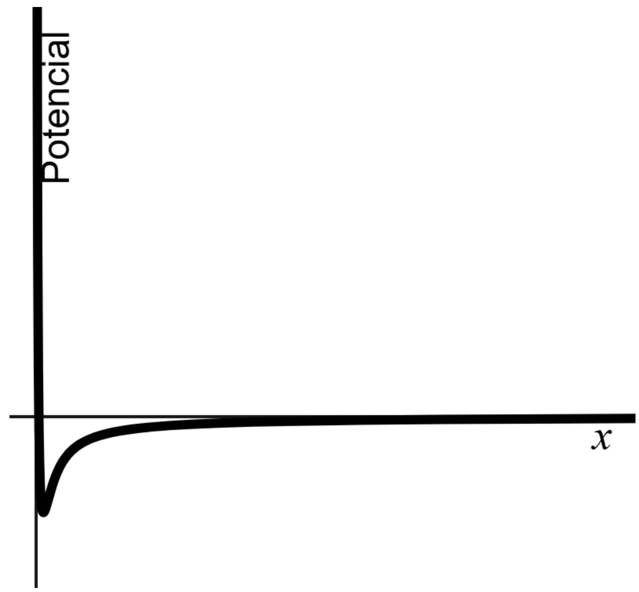


Figura 1: Mucha suerte en el control :)

And now, it's **time** for the moment you've been waiting for

- **Regla de Born** (APRENDAN ESTO BIEN) Dado un observable asociado a un operador A que se mide en un vector de estado $|\psi\rangle$ **normalizado**,
  - El resultado medido será alguno de los valores propios de A,
  - La probabilidad de medir un autovalor λ es proporcional a la proyección al subespacio propio W_λ. Con la constante de proporcionalidad siendo la norma del vector original, es decir:
  $$\mathbb{P}(\text{Medir } \lambda) = \frac{\langle\psi|P_{A,\lambda}\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$
  Donde $P_{A,\lambda}$ es el operador **proyección ortogonal** al subespacio propio asociado a λ del operador A.
  - Después de la medición, si se obtiene λ, entonces el vector de estado evoluciona *discontinuamente* a $P_{A,\lambda}|\psi\rangle$. (Esto es el conocido "colapso" del vector de estado).
- **Operador de Evolución temporal:** El operador de evolución temporal es un operador $U(t,t_0)$ que toma un vector de estado (si tomamos la representación de Schrödinger) en tiempo t_0 y devuelve cómo es al tiempo t. Este posee varias propiedades:
  - El cambio en el tiempo representa la evolución dada por la ecuación de Schrödinger:
  $$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$
  - La evolución temporal se comporta bien separando el tiempo en partes sucesivas, si $t_0 < t_1 < t_2$:
  $$U(t_2,t_1)U(t_1,t_0) = U(t_2,t_0)$$
  Donde por completitud se considera:
  $$U(t_0,t_0) = \mathbb{I}$$
  Donde $\mathbb{I}$ es la identidad.
  - Si H es independiente del tiempo, entonces U tiene una representación explícita:
  $$U(t,t_0)|\psi\rangle = \exp\left(\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right)|\psi\rangle$$
  Donde la exponencial de un operador A se define como:
  $$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!}$$
  - Se puede escribir de forma explícita el operador de evolución temporal U si se conoce la base de autovectores (y autovalores) de H, si esta es $|E_j\rangle$ con valores propios respectivos a_j, entonces:
  $$U(t,t_0) = \sum_j \exp\left(-\frac{iE_j(t-t_0)}{\hbar}\right)|E_j\rangle\langle E_j|$$
- **Los postulados de la Cuántica**
  1. El estado de una partícula está determinado por un vector $|\psi(t)\rangle$, en un espacio de Hilbert H.
  2. Las variables físicas están codificadas mediante operadores, que son funciones lineales de H en H. Los valores que se pueden medir están codificados en los autovalores del operador. En particular, los operadores análogos a los clásicos x y p tienen como contraparte cuántica los operadores:
  $$\begin{aligned}\langle x'|X|x\rangle &= x\delta(x-x') \\ \langle x'|P|x\rangle &= -i\hbar\delta'(x-x')\end{aligned}$$
  Donde $\delta'(x)$ corresponde a la "derivada" de la distribución de Dirac, esto actúa sobre las funciones integrando, haciendo una integral por partes (Las condiciones de borde se anulan si la δ no está centrada en el borde):
  $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx \\ &= -f'(x)\end{aligned}$$
  3. Cuando se mide un observable, esta medición es **no determinista**, y el resultado a obtener tiene una probabilidad proporcional de ocurrir proporcional a la norma de la **la proyección del vector en el espacio propio asociado al valor medido**.
  4. La evolución temporal de un sistema cuántico se determina, en base a los postulados, por la ecuación de Schrödinger, que corresponde a:
  $$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle$$

si no conmutan:

$[A,B] \neq 0$

(i) $\ker [A,B] = \{0\}$

$AB|\psi\rangle = BA|\psi\rangle \longrightarrow (AB-BA)|\psi\rangle = 0.$

$\downarrow$

$|\psi\rangle = 0$

(ii) $\ker[A,B] \neq \{0\}.$

$(\exists\ |\psi\rangle \neq 0)\quad AB|\psi\rangle = BA|\psi\rangle$

$\ker(M) = \{\, |\psi\rangle \mid M|\psi\rangle = 0 \,\}$

Aux 6

$\boxed{P2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi = E\psi \qquad \text{T.I.S.E.}$$

$\hookrightarrow$ conocido

$\rightarrow$ ¿cómo bosquejar?

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

$$|\psi_E\rangle;\quad \boxed{H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle} \rightarrow \text{Preocuparse sólo de esto.}$$

* xq H no depende del tiempo.

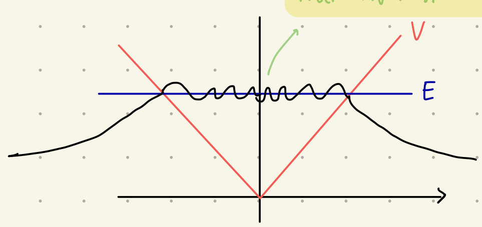
$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = E|\psi_E\rangle$$

$$\partial_t|\psi\rangle = -\frac{iE}{\hbar}|\psi_E\rangle$$

$$|\psi_E(t)\rangle = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}|\psi_E\rangle.$$

$\boxed{Ej}$

Frec. mayor si la diferencia entre V y E es mayor



$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi.$$

$V = cte \longrightarrow$ (i) $V > E \longrightarrow \psi'' = c^2\psi$, $c>0$

$\downarrow$

$e^{\pm cx}$

(ii) $V < E$

$\hookrightarrow \psi'' = -c^2\psi$

$= e^{\pm icx}.$

$= A\cos(cx) + B\sin(cx)$

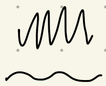
(i) $\rightarrow k = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}} \longrightarrow Ae^{kx} + Be^{-kx}$

$E \ll V \longrightarrow k$ grande

$E \sim V \longrightarrow k$ chico

(ii) $\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}} \longrightarrow A\cos(\omega x) + B\operatorname{sen}(\omega x)$

- $E \gg V \rightsquigarrow \omega$ grande
- $E \sim V \rightsquigarrow \omega$ chico

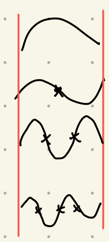


$E_1 \longrightarrow$

$E_2 \longrightarrow$ 1 cero

$E_3 \longrightarrow$

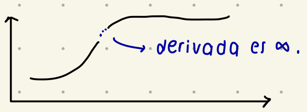
$E_4 \longrightarrow$



$\boxed{P8}$ condiciones de frontera

1) condición de $\psi(x)$

Debe ser continua



· Deriv. de la func. de onda $\to$ p (momento) $\longrightarrow$ si es ∞ no es físico.

2) $\psi'(x)$:

$$\psi''(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\psi'(x)\right) = \text{''}$$

sabemos que

1) $\psi(x)$ es finita.

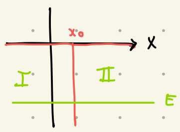
2) E es finita.

3) si $V(x)$ es finito:

· $\psi'(x)$ debe ser continua.

4) si $V(x)$ es infinito:

· Hay que tener cuidado con $\psi'(x)$.



· $V(x) = -V_0\,\delta(x - x_0)$

sabemos que

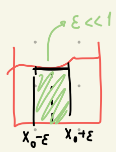
$$\int_a^b f(x)\,\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \notin [a,b) \\ f(x_0) & \text{si } x_0 \in [a,b] \end{cases}$$

Escribiendo la ec. de Schrödinger indep. del tiempo:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - V_0\,\delta(x - x_0)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'(x)\Big|_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} - V_0\psi(x_0) = E\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\psi(x)\,dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'(x)\Big|_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} - V_0\psi(x_0) = E\cdot 2\varepsilon\,\psi(\xi)$$



con $\xi \in [x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon]$.

si $\varepsilon \to 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(x_0^+) - \psi'(x_0^-)\right) - V_0\psi(x_0) = 0.$$

$$\psi'(x_0^+) - \psi'(x_0^-) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(x_0)$$

ψ continua en x_0. (no la derivada).

Resolvemos para $E<0$. (Estado ligado).

I) $\frac{-\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x) = -|E|\psi(x)$.

$$\psi''(x) = \frac{2m|E|}{\hbar^2}\psi(x)$$

Defino:

$$k = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

· $\psi''(x) - k^2\psi(x) = 0$

sol. $\psi_I(x) = Ae^{kx} + \cancel{Be^{-kx}} \to 0$

$\psi_{II}(x) = \cancel{Ce^{kx}} \to 0 + De^{-kx}$

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{kx} & \text{si } x < x_0 \\ De^{-kx} & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$

Por continuidad:

$$Ae^{kx_0} = De^{-kx_0}$$

$$\to D = Ae^{2kx_0}.$$

· $\psi'(x_0^+) - \psi'(x_0^-) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(x_0)$

$$+kDe^{-kx_0} + kAe^{kx_0} = +\frac{2mV_0}{\hbar^2}Ae^{kx_0}$$

$$k\cancel{A}\cancel{e^{2kx_0}}\cancel{e^{-kx_0}} + k\cancel{A}\cancel{e^{kx_0}} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\cancel{A}\cancel{e^{kx_0}}$$

$$2k = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

$$\boxed{k = \frac{mV_0}{\hbar^2}} \to \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} = \frac{mV_0}{\hbar^2}$$

$$\sqrt{2m|E|} = \frac{mV_0}{\hbar} \quad \to \text{solo existe } 1 \text{ estado ligado.}$$

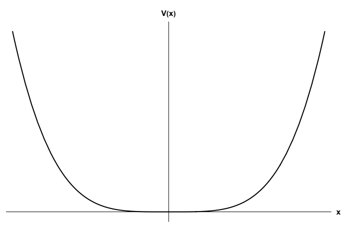
$$\boxed{|E| = \frac{mV_0^2}{\hbar^2 2}}$$

$$\boxed{E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}}$$

Joaquín Márquez
~~*Diego Bautista*~~

Método variacional y oscilador armónico (otra vez)

[P0] Conversación sobre el control.



[P1] Método variacional al siguiente nivel

a) Encuentre una cota para la energía del estado base para el potencial

$$V(x) = \alpha x^4.$$

b) ¿Puede encontrar una cota para la energía del primer estado excitado?

[P2] ¡Solo espero un poco de coherencia!

Considere los operadores a y $a^\dagger$, los operadores de aniquilación y creación (también llamados respectivamente de bajada y subida).

1. Demuestre que el operador de subida no tiene autovalores. Comente sobre si esto sería posible en dimensión finita.
2. Demuestre que el operador de bajada sí tiene autovalores. Encuentre uno. (*Hint cualitativo*: Recuerde cómo es la serie de una exponencial. También recuerde que hace una derivada en una serie de potencias. Relacione esto con la parte anterior).
3. Encuentre el valor esperado de la posición y el momento en el tiempo.

GIRA GIRA GIRA GIRA

- **Método Variacional**: Sea $\hat{H}$ un Hamiltoniano y $|\psi\rangle$ un estado *cualquiera, no necesariamente normalizado*. Sea E_0 la energía del estado base de $\hat{H}$. Entonces,

$$E_0 \leq \frac{\langle\psi|\,\hat{H}\,|\psi\rangle}{\langle\psi|\,|\psi\rangle}$$

- **Oscilador Armónico** En lo que sigue consideramos el Hamiltoniano H como:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

- **Operadores de creación y destrucción**

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{P} \quad \text{(raising op.)}$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{P} \quad \text{(loweing op.)}$$

satisfacen la siguiente relación:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

Los operadores no son hermitianos! Entonces,

$$H = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

donde

$$[\hat{a}, \frac{H}{\hbar\omega}] = \hat{a}$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$N = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

$$H = \hbar\omega(N + 1/2)$$

- **Elementos de matriz:**

$$\langle n'|\,\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,\langle n'|n-1\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1}$$

$$\langle n'|\,\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle n'|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}$$

- **Teorema:** No hay degeneración en sistemas ligados (*bounded*) de una dimensión.

Aux 7

método variacional y oscilador armónico.

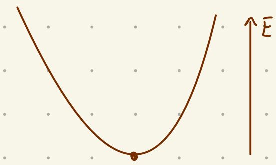
Método variacional.

· Para cualquie estado $|\psi\rangle$ y Hamiltoniano H: la energía del estado base de H, E_0, cumple que:

$$E_0 \leq \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

si tomamos $|\psi(\lambda)\rangle$, podemos calcular

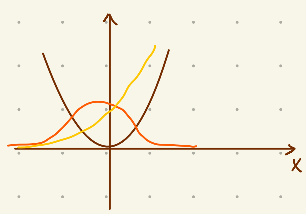
que se parezca al estado.



$$E_{var}(\lambda) = \frac{\langle\psi(\lambda)|H|\psi(\lambda)\rangle}{\langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle}$$

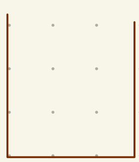
a) Encontremos una cota para la energía del estado base del potencial:

$V(x) = \alpha x^4$



$\psi(x) = e^{\lambda x}$ no sirve

$\psi(x) = e^{-\lambda x^2}$ → sirve



→ En un potencial tipo pozo, no sirve xq en el ∞ no hay prob. de que pase.

Obs: Al decir $|\psi\rangle$ cualquier estado nos referimos a cualquier estado dentro del espacio de Hilbert.

$$\langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

$$\rightarrow \langle\psi(\lambda)|H|\psi(\lambda)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^4\right) e^{-\lambda x^2} dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\lambda x^2}\right) = -\lambda 2x\, e^{-\lambda x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{-\lambda x^2} = e^{-\lambda x^2}\frac{d}{dx}(-2\lambda x) + -2\lambda x \frac{d}{dx}\left(e^{-\lambda x^2}\right)$$

$$= -2\lambda e^{-\lambda x^2} + 4\lambda^2 x^2 e^{-\lambda x^2}.$$

$$\rightarrow \langle\psi|H|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-2\lambda e^{-2\lambda x^2} - 4\lambda^2 x^2 e^{-2\lambda x^2}\right) + \alpha x^4 e^{-2\lambda x^2}\right]$$

En general, tenemos algo de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} \right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, a^{-3/2}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Tras unos saltos cuánticos...

$$E_{var}(\lambda) = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\lambda \hbar^2}{2m} + \frac{3\alpha}{16\lambda^2}$$

$$0 \overset{!}{=} E'(\lambda) = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{2\,3\alpha}{16\lambda^3} \longrightarrow$$ Mínimo de la E_{var}

$$\frac{3\alpha}{8\lambda^3} = \frac{\hbar^2}{2m} \rightarrow \lambda_{min} = \left(\frac{6 m \alpha}{8 \hbar^2} \right)^{1/3}$$

La cota es $E = E_{var}(\lambda_{min})$.

Valor real:

$E = 1.06036$

variacional: 1.08169. → si es mayor ✓

→ Muy cercana a la real.

Cualquier estado:

$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$ con $|\psi_n\rangle$ autoestado del Hamiltoniano de H.

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \langle \psi_{n'} | H | \psi_n \rangle$$

$$= \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \langle \psi_n | E_n | \psi_n \rangle \geq \sum_{n'} \sum_n c_{n'}^* c_n \overbrace{\langle \psi_{n'} | \psi \rangle}^{\delta_{nn'}} E_0$$

$$= \sum_n |c_n|^2 E_0 = \langle \psi | \psi \rangle E_0$$

¿Qué pasaría si $|\psi\rangle \perp |\psi_0\rangle$?

$$|\psi\rangle = \sum_{n > n_0} c_n |\psi_n\rangle.$$

$$\Rightarrow E_1 \leq \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

Si hay simetría $[H, \Omega] = 0$

Yo sé que hay una eigenbase en común
y que elementos con $\neq$ eigenvalor Ω son perpendiculares.

Ej: Si $\Omega = \hat{P}$, hay:
1) Una cota tomando $|\psi\rangle$ par para el estado base.
2) Una cota tomando $|\psi\rangle$ impar para el 1º estado excitado.

$$\psi(x) = x\, e^{-\lambda^2 x^2}$$

Real: 3,79 vs 3,84

Oscilador armónico cuántico.

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x - i \sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, P$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x + i \sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, P.$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle$$

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle$$

$\boxed{P2}$

1) $$a^\dagger |\alpha\rangle = a^\dagger \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$$

Queremos $\alpha|\alpha\rangle$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n a^\dagger |n\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle \quad ; \text{cambio de índices}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} \sqrt{n}\, |n\rangle. \longrightarrow \alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}\sqrt{n}\,|n\rangle$$

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} C_n |n\rangle$$

$|n=0\rangle \rightarrow C_0 = 0$ Recursiva#.

$\alpha C_n = \sqrt{n}\, C_{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\boxed{\alpha \neq 0}$

$C_n = 0 \Rightarrow |\alpha\rangle = 0 \Rightarrow$ Entonces no puede existir el autovector.

· Si $\boxed{\alpha = 0}$ $\quad 0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} \sqrt{n}\, |n\rangle.$

$$\sum a_n x^n \to \sum n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

es como el op. de bajada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^0 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

$$a|\alpha\rangle = \overset{\text{cte}}{\alpha}|\alpha\rangle$$

$$a \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, a|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\, c_n |n\rangle.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n}\, |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\, c_n |n\rangle$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n}\, |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\, c_n |n\rangle$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1}\, |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\, c_n |n\rangle \longrightarrow c_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha\, c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n$$

$$\to c_{n+1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{(n+1)n}} c_{n-1}$$

$$\boxed{c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0}$$

$$\Rightarrow \quad |\alpha\rangle = c_0 \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle^2 = 1$$

$$\downarrow$$

$$\left(c_0 \sum_n \frac{\bar{\alpha}^n}{\sqrt{n!}} \langle n|\right)\left(c_0 \sum_m \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle\right) = 1$$

$\bar{\alpha}$ conj

$$|c_0|^2 \sum_n \sum_m \frac{\bar{\alpha}^n \alpha^m}{\sqrt{n!\, m!}} \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{nm}} = 1$$

$$\to |c_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1$$

$$\to |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} = 1$$

$$\to |c_0|^2 = e^{-|\alpha|^2} \longrightarrow |c_0| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

$$\therefore \quad |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$|1\rangle = a^+ |0\rangle$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^+ |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} (a^+)^2 |0\rangle$$

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2 \cdot 1}} (a^+)^3 |0\rangle$$

$$\vdots$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle$$

$$\rightarrow |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^+)^n}{n!} \right) |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+} |0\rangle$$

c) $\langle x(t) \rangle$, $\langle p(t) \rangle$

$$|\alpha(0)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |n\rangle.$$

$$* \; a + a^+ = 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x$$

$$\langle \alpha(t) | x | \alpha(t) \rangle$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \; \langle \alpha(t) | a + a^+ | \alpha(t) \rangle$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \left(\sum_m \sum_n \frac{\bar{\alpha}^m}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle m | a + a^+ | n \rangle \right.$$

$$\rightarrow \quad \langle m | a | n \rangle + \langle m | a^+ | n \rangle.$$

$$\sqrt{n} \langle m | n-1 \rangle + \sqrt{n+1} \langle m | n+1 \rangle$$

$$\sqrt{n}\, \delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1}\, \delta_{m,m+1}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \sum_{mn} \frac{\bar{\alpha}^m}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\, \delta_{m,n-1} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \sum_{mn} \frac{\bar{\alpha}^m}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n+1}\, \delta_{m,m+1}.$$

$$\rightarrow \sum_m \frac{\bar{\alpha}^n}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^{m+1}}{\sqrt{m!}} \sqrt{m+1} = \ldots$$

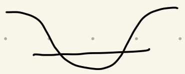
⊛ Revisar desarrollo.

control:

P2|

a)

Si el estado es ligado, el valor de



espectación del momento es 0.

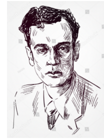
b) $c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$

c) $[P,Q]=i\hbar$ X y P son op. de dimensión ∞.

↳ esto no se cumple en el caso finito:

$$Tr([P,Q]) = Tr(PQ-QP) = Tr(PQ) - Tr(QP) = 0$$

$$= Tr(i\hbar \mathbb{1}) = i\hbar\, Tr(\mathbb{1}) = i\hbar M\,!$$



Joaquín Márquez
Diego Bautista

¿Lectura para dormir? Lean el Landau

P1 Simetrías

1. Describa la idea de simetría en mecánica clásica. ¿Cómo se describe matemáticamente?
2. ¿Como se puede traducir una idea análoga en mecánica cuántica?
3. Una simetría que es inesperadamente importante en la cuántica es la simetría de paridad. ¿Cómo podría describirla? ¿Qué consecuencia tiene sobre los autoestados del Hamiltoniano?
4. Demuestre o niegue la siguiente afirmación: Todo autoestado del Hamiltoniano tiene su paridad bien definida si existe simetría de paridad.

[P2] Niveles de Landau

a) Compruebe que el lagrangiano

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - q\phi \tag{1}$$

describe a una partícula en un campo electromagnético definido mediante los potenciales $\mathbf{A}$ y ϕ.

b) Demuestre que el hamiltoniano

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{p}_i - \mathcal{L} \tag{2}$$

para este sistema está dado por

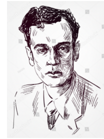
$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - q\mathbf{A}\right)^2 + q\phi. \tag{3}$$

Recuerde que

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}. \tag{4}$$

c) Estudiemos el caso de una partícula restringida a moverse en el plano XY en presencia de un campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$. En este caso un par de potenciales adecuados son $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ y $\phi = 0$. Defina el hamiltoniano del sistema para este caso y encuentre un operador que conmute con este.

d) Proponga el ansatz $\Psi(x, y) = Y(y)e^{ikx}$ (¿Cómo justificaría esta elección?) y úselo para determinar las eigenergías del sistema. ¿Qué degeneración tienen las eigenergías?



Everything is on the Symmetry

- **Ecuaciones de Euler-Lagrange**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \tag{5}$$

- El operador de traslación espacial, en base posición, se define como:

$$T(h)\left|x\right\rangle = \left|x+h\right\rangle$$

$$T(h)\left|p\right\rangle = \left|p\right\rangle$$

  En otras palabras: Traslada la base $\{x\}$, pero no le hace nada a $\left|p\right\rangle$. Este operador puede variar continuamente (h puede tomarse como un número real finito siempre).

- El operador de inversión espacial, también llamado de paridad, se define como:

$$\pi\left|x\right\rangle = \left|-x\right\rangle$$

$$\pi\left|p\right\rangle = \left|-p\right\rangle$$

  Este operador cumple con las siguientes propiedades:

  - $\pi^{-1} = \pi$.
  - Los autovalores de π son 1 y -1.
  - π es Hermítico y Unitario: $\pi^{-1} = \pi^{\dagger} = \pi$.

- El operador de traslación temporal es, simplemente, el operador de evolución temporal $U(t,0)$, nótese que este operador también es continuo.

- El operador de inversión temporal, se define como el operador Θ tal que

$$\Theta\left|p\right\rangle = \left|-p\right\rangle$$

  Algunas propiedades de este operador son:

  - Es antiunitario:

$$\left\langle \Theta x\right|\left|\Theta y\right\rangle = \overline{\left\langle x|y\right\rangle}$$

  - Es antilineal (saca las constantes conjugadas):

$$\Theta(\alpha\left|\psi\right\rangle) = \overline{\alpha}\Theta\left|\psi\right\rangle$$

  - Se puede escribir Θ como la composición de un operador unitario U y el operador de conjugación compleja K: $\Theta = UK$.

P1| 17. oct

Simetrías

a) $\mathcal{L}(\dot{q}, \ddot{q}, t)$ → Lo que deja invariante el Lagrangiano asociado a una simetría.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p)$

Qué tanto evoluciona el sist.

$$\dot{I}(q,p) = \{H, I\} + \cancel{\frac{\partial I}{\partial t}}^{\,0}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial I}{\partial q}$$

b) Incerteza

$H(q, p)$ → Depende de $\boxed{2n}$ variables.
$\quad\; n \;\; n$

· En cuántica hay ∞ cosas que nos definen un sistema.

· Operadores

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H,A]\rangle + \langle \partial_t A\rangle$$

$$i\hbar\,\partial_t |\psi\rangle = H|\psi\rangle.$$

$|\psi\rangle \to H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle$

H no depende de t

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |\psi_n\rangle$$

· O: $OH - HO = 0$ Base común → H encapsula el comporta@ del sistema

simetría ← $\boxed{[O, H] = 0}$ → "Como cant. conservada"

↓ Hay una base común.

Intuiø

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle = 0 \;\to\; \langle O\rangle = cte.$$

c) Simetría de paridad:

$\Pi|x\rangle = |-x\rangle$ → Base momento.

$\Pi|p\rangle = |-p\rangle$

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$$

$$\Pi H = \Pi\left(\frac{1}{2m}p^2 + V(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\Pi\hat{p}^2 + \Pi V(x)$$

$$= \frac{1}{2m}p^2 + V(-x)$$

→ Si V es par ⟹ $V(-x) = V(x)$

$[H, \Pi] = 0$ → Base común.

$\psi_n(x) \to \psi_n(-x)$ (autovector de E_n)

autofunø de H.

Autofunø de H $|\varphi_n\rangle$

$$H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$$

$$\pi H = H\pi$$

$$\pi H|\varphi_n\rangle = H\pi|\varphi_n\rangle$$

$$H(\pi|\varphi_n\rangle) = E_n \pi|\varphi_n\rangle$$

base posiø

$\varphi_n(x) \rightarrow$ funø de onda autofunø de H con E_n.

$\downarrow$

$\varphi_n(-x) \rightarrow$ funø de onda autofunø de H con E_n.

de la misma energía.

Autofunc. par $\rightarrow$ $\varphi_{n+}(x) = \dfrac{\varphi_n(x) + \varphi(-x)}{2}$ $\rightarrow \pi$ par

" impar $\rightarrow$ $\varphi_{n-}(x) = \dfrac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{2}$ $\rightarrow \pi$ impar.

$\downarrow$

se pueden encontrar 2 que lo sean (1 par y una impar).

P2) $H = \dfrac{p^2}{2m} + V(x)$ ✗

sólo es válido si V no depende de una velocidad y si no entra energía al sistema.

$\boxed{\text{Ej}}$

si V depende del campo electromagnético.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A}.$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \rightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

Propuesta: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - q\phi$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$ $\rightarrow$ después generalizamos para el resto de coordenadas.

$$= \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + qA_{(x)}\right) - \left(q\dot{r} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - q\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$$= m\ddot{x} + q\left(\cancel{\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) - q\left(\cancel{\dot{x}\frac{\partial A}{\partial x}} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + q\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\rightarrow F_x = q\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + q\dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) - q\underbrace{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)}_{-E_x}$$

$$= q\left[\dot{y}(\nabla\times A)_z - \dot{z}(\nabla\times A)_y\right] + qE_x$$

$$= q\left(\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})\right)_x + qE_x$$

$$= q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_x + qE_x$$

$$H(p, r) = \sum_i \dot{r}_i p_i - \mathcal{L} \qquad , \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i}$$

$$p_i = m\dot{r}_i + qA_i \quad \rightarrow \quad \dot{r}_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$$

$$= \frac{1}{m}(p_i - qA_i)p_i - \left(\frac{2m}{2m^2}(p - qA_i)(p_i - qA_i)\right) + q\frac{1}{m}(p_i - qA_i)A_i - q\phi$$

$$= \frac{p_i p_i}{m} - \frac{qA_i p_i}{m} - \frac{1}{2m}(p_i p_i - 2p_i q A_i + q^2 A_i^2)$$

$$- \frac{q}{m}p_i A_i + \frac{q^2}{m}A_i A_i + q\phi$$

$$= \frac{1}{2m}(p_i p_i - 2p_i q A_i + q^2 A_i A_i) + q\phi$$

$$\boxed{= \frac{1}{2m}(\vec{P} - q\vec{A})^2 + q\phi}$$

H de un campo electromagnético.

Caso xy con $\vec{B} = B\hat{z}$

$\vec{P} = (p_x, p_y)$ y $\vec{A} = (-By, 0)$

$\vec{p} - q\vec{A} = (p_x + qBy, p_y)$

$$(p - q\vec{A})^2 = (p_x + qBy)^2 + p_y^2$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(p_x + qBy)^2 + \frac{p_y^2}{2m} \quad //$$

$[H, p_x] = 0$

La eigenbase de p_x es $\psi(x) = e^{ikx}$

$\psi(x,y) = e^{ikx} y(y)$.

$$p_x|\psi\rangle = p|\psi\rangle$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{|\psi\rangle}_{e^{ikx}} = p|\psi\rangle$$

$$\underbrace{-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}e^{ikx}}_{} =$$

$$\underbrace{-i\hbar\, ik}_{}\, e^{ikx}$$

$$\boxed{+\hbar k = p}$$

$$\hat{H}\psi(x,y) = E\psi(x,y)$$

$$\frac{1}{2m}(p_x + qBy)^2 e^{ikx} y(y) + \frac{p_y^2}{2m}e^{ikx} y(y) = e^{ikx} y(y) E.$$

eigenvalor

$$\frac{1}{2m}(\hbar kx + qBy)^2 \cancel{e^{ikx}}\, y(y) + \ldots$$

$$\frac{1}{2m}(\hbar kx + qBy)^2 y(y) + \frac{p_y^2}{2m}y(y) = E\,y(y)$$

$$\left[\frac{P_y^2}{2m} + \frac{(qB)^2}{2m}\left(\frac{m}{m}\right)^2 \left(y + \frac{\hbar k_x}{qB}\right)^2 \right] \psi(y) = E(y)$$

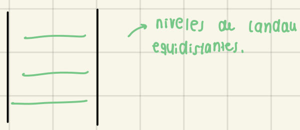
$$\frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \underbrace{\left(\frac{qB}{m}\right)^2}_{\omega^2} \left(y - \left(-\frac{\hbar k_x}{qB}\right)\right)^2 \psi(y) = E\,\psi(y)$$

Si defino $\omega = \left(\frac{qB}{m}\right)$ y $y_0 = \frac{\hbar k_x}{qB}$

El problema es:

$$\left[\frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \right] \psi(y) = E\,\psi(y)$$

$E = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n\right)$ $\longrightarrow$ ∞ # degenerado $\forall$ los valores de x del potencial.



* que desplace un potencial no cambian las energías

Mecánica Cuántica
Luis Foà

Joaquín Márquez
Diego Bautista

Simetrías, simetrías y más simetrías

Lección 1 Reducción a problema más sencillo

[P0] **Un viejo enemigo** Diga si es posible que dos matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, ambas de dimensión $M \times M$, siendo M finito, puedan satisfacer la llamada relación de conmutación canónica, $[\mathbf{P}, \mathbf{Q}] = i\hbar\mathbb{I}$ (I es la matriz identidad $M \times M$). Justifique y comente su resultado en relación a los operadores posición y momento.

[P1] **Atacando preguntas difíciles** Sea $\phi(p)$ una función de onda **en el espacio de momentos** para el estado $|\phi\rangle$. Diga que se obtiene al aplicar el operador de reversión temporal a ese estado y proyectarlo sobre la base de momento. ¿Obtiene $\phi(p)$, $\phi(-p)$, $\phi^*(p)$ o $\phi^*(-p)$.

Lección 2 Leyendo con cuidado el enunciado

[P2] **¡Conceptos!** Explique *con sus palabras* la noción de simetría en mecánica cuántica. ¿De donde se deduce? ¿Cómo se relaciona esto con la idea de "generadores"?

[P3] **¿Simetría o no?** Una partícula se encuentra en un potencial de la forma $V(x) = V_0 \sin(2\pi x/a)$. Este potencial es invariante ante traslaciones $x \to x + ma$, donde m es entero. Diga si se conserva o no el momento.

Matraquita para cerrar

[P4] **Paridad** Considere el operador de paridad π: En el caso de que un sistema exhiba simetría de paridad, entonces ¿Cualquier autoestado del Hamiltoniano tiene su paridad bien definida? Justifique.

[P5] **Construyendo el operador de evolución temporal** Dado un estado inicial $|\psi_0\rangle$ el operador $\hat{U}(t)$ mapea este estado al estado en un tiempo t, $|\psi_t\rangle$.

a) De una razón física de por qué $\hat{U}(t)$ debe ser unitaria, es decir:

$$\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = \mathbb{I}.$$

b) De una razón física por qué el operador de evolución temporal $\hat{U}(t)$ debe satisfacer la ley de composición

$$\hat{U}(t_1)\hat{U}(t_2) = \hat{U}(t_1 + t_2).$$

c) Empleando la ecuación de Schrödinger para mostrar que el operador de evolución temporal satisface la ecuación

$$i\hbar\partial_t\hat{U}(t) = \hat{H}\hat{U}(t).$$

d) Encuentra la solución más general a esta ecuación diferencial que satisfaga las propiedades anteriores.

Everything is on the Symmetry

- **Tips para atacar preguntas conceptuales**

  1. Si no encuentran el camino, piensen si puede reducirse el problema a un caso particular más sencillo. Esto les puede dar mucha luz, sobre todo en problemas de verdadero o falso.
  2. Antes de usar cualquier resultado piensen: i) ¿es válido aquí? ii) ¿El resultado hace referencia a lo que estoy usando?, ¿es más general o menos general?. Siguiendo en esta línea, **no usen cosas que no pueden obtenerse del problema**. Por ejemplo, si se les da un estado sin mencionar el Hamiltoniano, no se puede decir nada de las relaciones de conmutación con los operadores.
  4. En cuanto se les de la pregunta, subrayen las palabras clave para tener en claro que información se les da y cuál no.
  3. Cuando tengan un resultado final, pónganlo a prueba. ¿Cómo se comporta en los límites que conocen? ¿Refleja algo que tiene sentido desde la imagen clásica (**Ojo, de esto no siempre se fíen. Si el resultado refleja algo clásico suele ser buena señal, pero si no lo hace no necesariamente la respuesta es errónea**.)?

- El operador de traslación espacial, en base posición, se define como:

$$T(h)\left|x\right\rangle = \left|x+h\right\rangle$$

$$T(h)\left|p\right\rangle = \left|p\right\rangle$$

En otras palabras: Traslada la base $\{x\}$, pero no le hace nada a $\left|p\right\rangle$. Este operador puede variar continuamente (h puede tomarse como un número real finito siempre).

- El operador de inversión espacial, también llamado de paridad, se define como:

$$\pi\left|x\right\rangle = \left|-x\right\rangle$$

$$\pi\left|p\right\rangle = \left|-p\right\rangle$$

Este operador cumple con las siguientes propiedades:

  - $\pi^{-1} = \pi$.
  - Los autovalores de π son 1 y -1.
  - π es Hermítico y Unitario: $\pi^{-1} = \pi^{\dagger} = \pi$.

- El operador de traslación temporal es, simplemente, el operador de evolución temporal $U(t,0)$, nótese que este operador también es continuo.

- El operador de inversión temporal, se define como el operador Θ tal que

$$\Theta\left|p\right\rangle = \left|-p\right\rangle$$

Algunas propiedades de este operador son:

  - Es antiunitario:

$$\left\langle\Theta x\right|\left|\Theta y\right\rangle = \overline{\left\langle x|y\right\rangle}$$

  - Es antilineal (saca las constantes conjugadas):

$$\Theta(\alpha\left|\psi\right\rangle) = \overline{\alpha}\Theta\left|\psi\right\rangle$$

  - Se puede escribir Θ como la composición de un operador unitario U y el operador de conjugación compleja K: $\Theta = UK$.

23 · oct.

· Reducir un problema a uno más sencillo

P0

$$\begin{array}{c} \text{columnas} \\ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}_A \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}_B \end{array} - \begin{array}{c} \text{filas} \\ \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}_A \end{array}$$

Escogimos la base para B (diagonal)

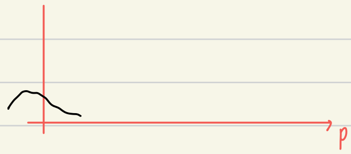
No puede ser la identidad.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 k_1 & a_2 k_2 \\ a_3 k_1 & a_4 k_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 a_1 & k_1 a_2 \\ k_2 a_3 & k_2 a_4 \end{pmatrix} = (k_1 - k_2) \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

P1

$\phi(p) \longrightarrow |\phi\rangle$

¿ $\cancel{\phi(p)}$, $\phi(-p)$, $\cancel{\phi^*(p)}$ ó $\phi^*(-p)$?



$|\phi(p)|^2\, dp$ es la prob. de que p esté entre p y p + dp.

① $|p\rangle \rightarrow |-p\rangle$.

② T es antiunitario

* op. evoluc temp:

$$e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \longrightarrow e^{\frac{iHt}{\hbar}}$$

momento bien definido. ←

→ $f(-x)$

Func∅ con posi∅ bien definida x_0:

$$\phi_{x_0}(p) = e^{ix_0 p/\hbar}$$

$$\Big\downarrow T$$

para recuperar el resultado que busco.

$$\phi^*_{x_0}(-p) = e^{+ix_0 p/\hbar} \overset{!}{=} e^{ix_0 p/\hbar}$$ → Tienen la misma indet. de momento (igual de ∞ indeterminado).

$$\downarrow$$

$$\phi^*(-p).$$

Formalmente, $\phi(p)$ es lo que aparece cuando escribo $|\phi\rangle$ en la base de momentos:

$$|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p)\,|p\rangle\,dp$$

$$T|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (?)\ |p\rangle\,dp.$$

$T|\phi\rangle$ (T: reversión temp.)

$$T\hat{1}|\phi\rangle = \hat{T}\int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle\langle p|\phi\rangle\,dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}\,(|p\rangle\,\phi(p))\,dp = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}\left[\phi(p)\,|p\rangle\right] dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p)\,\underbrace{\hat{T}\,|p\rangle}_{|-p\rangle}\,dp$$

prop. T es antilineal (Los coef. salen con el conjugado)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p)\,|-p\rangle\,dp.$$

Tomando el cambio $p \to -p$:

$$T|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\phi^*(-p)}\,|p\rangle\,dp.$$

P2

Cant. físicas

$$\frac{dI}{dt} = \{H, I\} + \partial_t I$$

valor esperado no cambia.

★ George Polyà.

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = i\hbar\langle [H,A]\rangle + \cancel{\langle \partial_t A\rangle}^{0}.$$

$\downarrow$

0 (cant. conservada)

$$\langle \psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle \psi_0|A|\psi_0\rangle$$

$$\langle \psi_0|U^\dagger(t)\; A\; U(t)\;|\psi_0\rangle = \langle \psi_0|A|\psi_0\rangle.$$

$$\rightarrow\; U^\dagger(t)\,A\,U(t) = A$$

$$A\,U(t) = U(t)A.$$

Si H es indep. de t.

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\hbar t)^n}{n!}H^n$$

$$A\sum\frac{(-i\hbar t)^n}{n!}H^n = \left(\sum\frac{(-i\hbar t)^n}{n!}H^n\right)A$$

$$\sum\frac{(-i\hbar t)^n}{n!}AH^n = \sum\frac{(-i\hbar t)^n}{n!}H^nA$$

$$\sum\frac{(-i\hbar t)^n}{n!}(AH^n - H^nA) = 0 \quad\longrightarrow\quad [A,H^n]=0$$

$$\downarrow$$

$$[A,H]=0.$$

$\boxed{P3}$

$V(x) = V_0\sin(2\pi x/a)$ $\longrightarrow$ En y si se conserva.

$$x \longrightarrow x + ma$$

traslaø espacial.

Para traslaøes pequenas. ⟵

sin importar qué traslaø, H queda igual.

· Conservaø del momento: $[H,\hat{\Theta}]=0$

· Como $\hat{\Theta}$ no es continuo, no puedo afirmar que $\hat{p}$ se conserva.

$\boxed{P4}$ $\pi|x\rangle = |-x\rangle$; $\pi|p\rangle = |-p\rangle$.

$\pi H = H\pi \longrightarrow \exists$ base en común.

$$\pi|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle$$

$$= \pi\underbrace{\int |x\rangle\langle x|dx}_{I}\,|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi\, |x\rangle\langle x|\psi\rangle \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |-x\rangle\, \psi(x)\, dx \quad ; \qquad x \to -x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\, \psi(-x)\, dx .$$

$$\langle y|\pi|\psi\rangle = \alpha\langle y|\psi\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle y|x\rangle\, \psi(-x)\, dx = \alpha\psi(y).$$

$$\downarrow$$

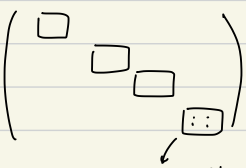
delta de Dirac ← $\psi(-y) = \alpha\,\psi(y).$

ver material extra! ⟵ Spoiler: $|\alpha| = 1$

$\alpha = \pm 1$ $\longrightarrow$ $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$|\psi\rangle = \alpha\,|\psi_+\rangle + \beta\,|\psi_-\rangle$ ⟶ par e impar.

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$



cada val. propio con degeneració 2 (par e impar)

$\langle\pi\rangle_\psi \to$ de

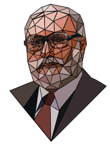
Prob. de que sea par:

$$\mathbb{P}(\pi_{\text{par}}) = |\alpha|^2$$

$$\mathbb{P}(\pi_{\text{impar}}) = |\beta|^2$$

viena summer intership.

VDSP " "



Joaquín Márquez
Diego Bautista

Empezando a usar momento angular

Parte 1 Preguntas conceptuales

[P0] **Generadores y Simetrías Continuas** Explique en sus propias palabras lo que es un generador. ¿Se parece en algo a unas ecuaciones conocidas de antemano?

[P1] **Simetría y eigenfunciones** Considera un potencial con simetría radial $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Esto implica que el hamiltoniano es invariante ante rotaciones. ¿Puede decirse lo mismo de las eigenfunciones?

[P2] **Elección de coordendas** A la hora de introducir el momento angular se eligión un sistema de coordenadas en el que se definieron cosas como L_x, L_y y L_z. ¿Cómo conciliar esta elección de direcciones preferenciales con la simetría ante rotaciones? Se define el operador $L_n = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ donde $\mathbf{n}$ es un vector en dirección arbitraria. Por medio de un argumento físico, determine los eigenvalores de L_n.

Parte 2 Matraquita

[P3] **Caso 1: potencial central** Un electrón está confinado en el interior de una cavidad esférica e impenetrable de radio R. Usando un cambio de variables adecuado, encuentre las autofunciones y autoenergías.

[P4] **Eliminada por cuestiones técnicas :(**

[P5] **Repollo** Dado un estado inicial $|\psi_0\rangle$ el operador $\hat{U}(t)$ mapea este estado al estado en un tiempo t, $|\psi_t\rangle$.

a) De una razón física de por qué $\hat{U}(t)$ debe ser unitaria, es decir:

$$\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = \mathbb{I}.$$

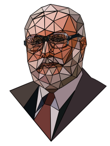
b) De una razón física por qué el operador de evolución temporal $\hat{U}(t)$ debe satisfacer la ley de composición

$$\hat{U}(t_1)\hat{U}(t_2) = \hat{U}(t_1 + t_2).$$

c) Empleando la ecuación de Schrödinger para mostrar que el operador de evolución temporal satisface la ecuación

$$i\hbar\partial_t\hat{U}(t) = \hat{H}\hat{U}(t).$$

d) Encuentra la solución más general a esta ecuación diferencial que satisfaga las propiedades anteriores.



Joaquín Márquez
Diego Bautista

Resumen • Resumen

- **Tips para atacar preguntas conceptuales**

  1. Si no encuentran el camino, piensen si puede reducirse el problema a un caso particular más sencillo. Esto les puede dar mucha luz, sobre todo en problemas de verdadero o falso.
  2. Antes de usar cualquier resultado piensen: i) ¿es válido aquí? ii) ¿El resultado hace referencia a lo que estoy usando?, ¿es más general o menos general?. Siguiendo en esta línea, **no usen cosas que no pueden obtenerse del problema**. Por ejemplo, si se les da un estado sin mencionar el Hamiltoniano, no se puede decir nada de las relaciones de conmutación con los operadores.
  4. En cuanto se les de la pregunta, subrayen las palabras clave para tener en claro que información se les da y cuál no.
  3. Cuando tengan un resultado final, pónganlo a prueba. ¿Cómo se comporta en los límites que conocen? ¿Refleja algo que tiene sentido desde la imagen clásica (**Ojo, de esto no siempre se fíen. Si el resultado refleja algo clásico suele ser buena señal, pero si no lo hace no necesariamente la respuesta es errónea**.)?

- Las relaciones de conmutación entre los distintos operadores de momentum angular se pueden recordar (mnemotécnicamente) como:

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar \vec{L}$$

- Los operadores de subida y bajada para el momento angular corresponden a operadores que actúan como:

$$L_{\pm} |\ell, m\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)}\, |\ell, m \pm 1\rangle$$

  Salvo para $\ell = m$ o $\ell = -m$, en el primer caso $L_+ |\ell, \ell\rangle = 0$ y en el segundo $L_- |\ell, -\ell\rangle = 0$

- Los armónicos esféricos se pueden escribir como:

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$

  Para $|m| \leq \ell$, donde P_ℓ^m son los polinomios asociados de Legendre.

- La parametrización en función de ángulos de los polinomios asociados de Legendre P_ℓ^m corresponde a

$$P_\ell^m[\cos(\theta)] = (-1)^m [\sin(\theta)]^m \frac{d^m}{d(\cos(\theta))^m} P_\ell[\cos(\theta)]$$

- Los polinomios de Legendre P_ℓ se pueden calcular mediante la fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell$$

Joaquín Márquez
Diego Bautista

Repasaux

Parte 1 Preguntas Conceptuales:

- **Generadores:**
  1. Si tenemos dos generadores de distintas traslaciones de distintas magnitudes físicas que conmutan, ¿Es cierto que que los las traslaciones finitas en dichas magnitudes conmutan? Escrito matemáticamente, est es preguntar si se cumple la siguiente equivalencia:

     $$[G_1, G_2] = 0 \implies [T_1(x), T_2(y)] = 0?$$

     Donde $T_1(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}G_1 x}$ y $T_2(y) = e^{-\frac{i}{\hbar}G_2 y}$
  2. Considere ahora un generador que varía según la variable en la que se está. Un ejemplo de esto es el caso de Hamiltonianos dependientes del tiempo. ¿Como cree que se generalizaría la fórmula vista en clases de $U(t_0, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$?
     Hint: Piense en cómo llega a una exponencial en primer lugar. Suponga primero que para cada $t_1 > t_2$, $[H(t_1), H(t_2)] = 0$. Luego discuta que pasa si no se tiene la condición de conmutación.

Parte 2 Preguntas Matraquísticas:

[P1] ¿Problemas en 2D? Pues toma un oscilador Considere una partícula de masa m atrapada en 2D sujeta al potencial

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right).$$

i) Resuelva la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y escriba el espectro de energía asociado.

ii) ¿Cuál es la degeneración de los niveles de energía? ¿Cómo explicaría la degeneración?

iii) Proponga un set de observables que conmutan para este sistema.

[P2] Valores esperados Calcule el valor esperado de L_x para un eigenestado de L^2 y L_z, $|m, l\rangle_z$.

[P3] Unificando la gravedad y la mecánica cuántica. Considere una partícula de masa m atrapada en un pozo infinito ubicado en $x \in [0, h]$ sujeta al potencial gravitacional $V(x) = mgx$. Sugiera una función de prueba para encontrar la energía del estado base usando el método variacional. ¿Y se unificaron? **A1**

Joaquín Márquez
Diego Bautista

Resumen • Resumen

- **Tips para atacar preguntas conceptuales**

  1. Si no encuentran el camino, piensen si puede reducirse el problema a un caso particular más sencillo. Esto les puede dar mucha luz, sobre todo en problemas de verdadero o falso.
  2. Antes de usar cualquier resultado piensen: i) ¿es válido aquí? ii) ¿El resultado hace referencia a lo que estoy usando?, ¿es más general o menos general?. Siguiendo en esta línea, **no usen cosas que no pueden obtenerse del problema**. Por ejemplo, si se les da un estado sin mencionar el Hamiltoniano, no se puede decir nada de las relaciones de conmutación con los operadores.
  4. En cuanto se les de la pregunta, subrayen las palabras clave para tener en claro que información se les da y cuál no.
  3. Cuando tengan un resultado final, pónganlo a prueba. ¿Cómo se comporta en los límites que conocen? ¿Refleja algo que tiene sentido desde la imagen clásica (**Ojo, de esto no siempre se fíen. Si el resultado refleja algo clásico suele ser buena señal, pero si no lo hace no necesariamente la respuesta es errónea**.)?

- Las relaciones de conmutación entre los distintos operadores de momentum angular se pueden recordar (mnemotécnicamente) como:

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar \vec{L}$$

- Los operadores de subida y bajada para el momento angular corresponden a operadores que actúan como:

$$L_{\pm} |\ell, m\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)}\, |\ell, m \pm 1\rangle$$

  Salvo para $\ell = m$ o $\ell = -m$, en el primer caso $L_+ |\ell, \ell\rangle = 0$ y en el segundo $L_- |\ell, -\ell\rangle = 0$

- Los armónicos esféricos se pueden escribir como:

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$

  Para $|m| \leq \ell$, donde P_ℓ^m son los polinomios asociados de Legendre.

- La parametrización en función de ángulos de los polinomios asociados de Legendre P_ℓ^m corresponde a

$$P_\ell^m[\cos(\theta)] = (-1)^m [\sin(\theta)]^m \frac{d^m}{d(\cos(\theta))^m} P_\ell[\cos(\theta)]$$

- Los polinomios de Legendre P_ℓ se pueden calcular mediante la fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell$$