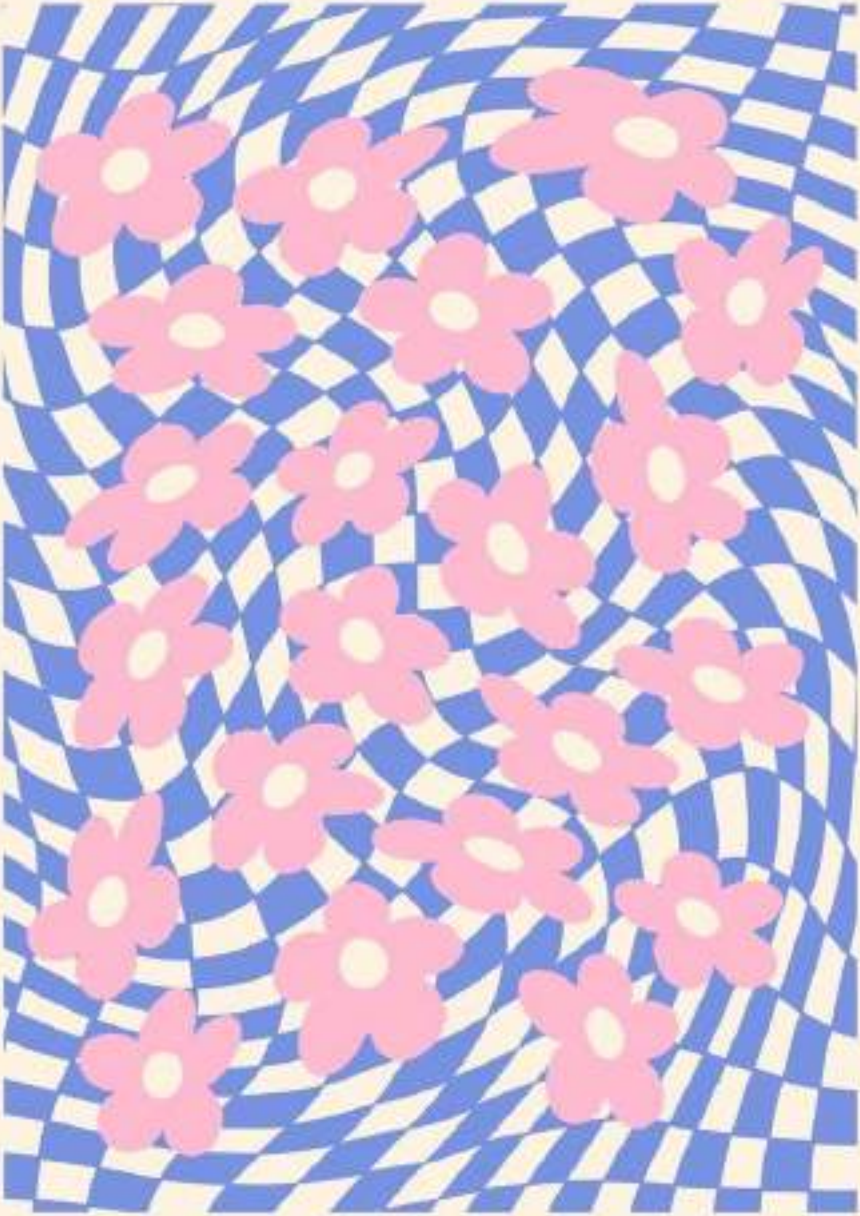
Flower Market



LES FLEURS

13 · 03 · 23

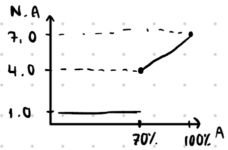
Reglamentos

↗ lunes 18:00.

- C1 → semana 6 → Tarea 1
- C2 → sem. 10 → T2
- C3 → sem. 14 → T3

- Nota x asistencia. (opcional).

↳



5 problemas aprox.

- obligatorias
- 20% de la nota final
- Nota por presentación
  - → manuscritas
  - → carátula → Nombre
    - → Nombre del curso...
  - → Problemas en hojas separadas
  - → Mismo tipo de hojas
  - → Mismo lápiz.

- Nota x cant. de trabajo
- P1 } sólo 2 problemas se corrigen.
- P2

Tarea 2 semanas antes del control y se entrega el día del control.

$$NC_i^f = \max\{NC_i \ , \ 0{,}85\, NC_i + 0{,}15\, NA\}$$

Programa

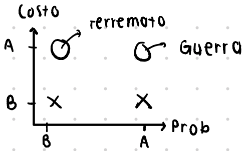
I Probabilidades. (10 sem.)

1) Probabilidades básicas (3 sem.)
2) Modelos probabilísticos → campana de Gauss (5,5 sem.)
3) Teoremas fundamentales (1,5 sem).

II Estadística

Bibliografía

① Meyer, P. ★ → orden del curso.
② De Groot, M → más grande
③ Ash, R. → más teórico.
④ Ross, Sheldon → Muy buenos.
⑤ Parzer, E. } clásicos
⑥ Feller, W.
⑦ Apuntes dpto.
⑧ Schaum (colección de libros de problemas)


Costo
rerremoto
Guerra
A
B
Prob
B
A

Probabilidades

16 · marzo

	Def: Es una medida de la certeza con que ocurren hechos no seguros.
	Experimento → si observo el resultado es experimento.
	≠ modelo → lo uso para representar el experimento.
Exp. Aleatorio	**Def:** Exp. Aleatorio o no determinístico. Es un experimento cuyo resultado se conoce sólo después de realizado.
Ej. exp aleatorios.	**Ej** E_1: lanzar una moneda
	E_2: " 2 "
	E_3: " n "
	E_4: Lanzar una moneda hasta obtener 1 sello y contar el n° de lanzamientos.
	E_5: Medir durać ampolleta
	E_6: sacar carta mazo naipes.
	E_7: Jugar kino
	E_8: Obsrervar T° máx. y min. de un día cualquiera.

* Hay que saber teoría de conjuntos!

espacio muestral: todos los posibles resultados.

biyección con los naturales.

Def: Espacio muestral.

Sea E exp. aleatorio, se define el (un) espacio muestral asociado a E como el conjunto de todos los posibles resultados.

$\Omega_1 : \{c, s\}$ $\left(\Omega_1 = \{c, s, \cancel{canto}\} \right)$

$\Omega_2 : \{cc, ss, cs, sc\} = \{ \{cc\} \{cs\} \{ss\} \}$

↳ pares ordenados, tuplas de tamaño 2.

$\Omega_3 : \{ (x_1 \dots x_n) \mid x_i \in \{c, s\} \}$

$\Omega_4 : \{1, 2, \dots, \infty\} = \mathbb{N}$

$\Omega_5 : \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

$\Omega_6 : \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in \{1, 2, \dots, 13\} \\ y \in \{P_1, P_2, P3, P4\} \end{array} \right\}$

$\Omega_7 = \{G, P\}$

$\Omega_8 = \{(x, y) \mid -50° \leq x \leq y \leq 50°\}$

Obs 1) Ω no necesariam. es conj. numérico.

2) Dependiendo de la cardinalidad de Ω se distinguen 3 casos.

a) Ω finito (Ω_1)

b) Ω infinito numerable (Ω_4)

c) Ω " no " (Ω_5)

Experimento E

Espacio muestral Ω : conjunto de todos los posibles resultados.

Ej : $\{cc, ss, cs, sc\} = \{ \{cc\} \{cs\} \{ss\} \}$

↳ pares ordenados, tuplas de tamaño 2.

repetiØ del espacio muestral

(posibles resultados)

evento: conj. de resultados posibles.

no todo subconj. puede ser considerado un evento.

evento elemental: 1 resultado posible

3) si Ω es el espacio muestral asociado a E

$\Rightarrow$ la repetición de E n veces. tendrá un espacio asociado Ω^n.

Def Evento o suceso.

sea E experimento aleatorio, Ω el espacio muestral asociado. se define un evento A como un conjunto de resultados posibles, es decir si A es un evento $\Rightarrow A \subseteq \Omega$.

Obs la inversa no es necesariamente cierta (casos patológicos)

Def se define un evento elemental simplemente como un evento formado por un solo resultado posible.

Def se dice que un evento A ocurre sii ocurre alguno de los eventos elementales que lo forman.

Ej Lanzar dado

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ → 2^6 eventos posibles.

$A_i = \{i\} \quad i = 1,..,6.$ → evento elemental.

" A " $= \{$obtener n° par$\} = \{2,4,6\} \subset \Omega$ → evento.

· repetición del exp. E n veces $\Rightarrow$ Espacio: Ω^n

· Evento A: conj. resultados posibles. $A \subseteq \Omega$

· " elemental: 1 resultado posible

Sea $\mathcal{a}$ el conjunto de todos los eventos.

Por teoría de conjuntos podemos postular.

1) $\Omega \in \mathcal{a}$ ⇝ ya que $\Omega \subseteq \Omega$.

Ω es el evento que "siempre" ocurre.

2) $\emptyset \in \mathcal{a}$ $(\emptyset \subseteq \Omega)$

$\emptyset$ es el evento que "nunca" ocurre.

3) Si $A \in \mathcal{a} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{a}$.

↳ complemento.

Si $A, B \in \mathcal{a}$

$A \cup B \in \mathcal{a}$, evento que ocurre ssi ocurre al menos uno.

$A \cap B \in \mathcal{a}$, " " " " ocurren ambos.

4) Si $A_1, \ldots, A_i \ldots \in \mathcal{a} \Rightarrow$

a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{a}$

b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{a}$

<u>Obs</u> Sea Ω, $\mathcal{a}$ t.q.

i) $\Omega \in \mathcal{a}$

ii) Si $A \in \mathcal{a} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{a}$.

iii) Si $A, B \in \mathcal{a} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{a}$.

↳ $\mathcal{a}$ tiene estructura σ-álgebra.

- $\mathcal{a}$ conj de todos los eventos

→ $\Omega \in \mathcal{a}$: Ev. que siempre ocurre.

→ $\emptyset \in \mathcal{a}$: Ev. " nunca "

→ $A \in \mathcal{a} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{a}$: complemento

- si $A, B \in \mathcal{a} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{a}$

→ $\mathcal{a}$ tiene estructura σ-álgebra

eventos excluyentes.	**Def** se dice que dos eventos A, B son excluyentes ssi $A \cap B = \emptyset$.
	↳ ie, nunca ocurran juntos.
	Ej - $A, \bar{A}$
	- Los eventos elementales son excluyentes por definiø.

- $A \cap B = \emptyset \iff A, B$ excluyentes
  - ↳ $A \cap \bar{A}$ excluyentes x definiø.

Probabilidad (axiomática)

17·03·23

<u>Def</u> sea ε exp. aleatorio, Ω espacio muestral asociado y a el conjunto de eventos ; se define una función (medida) de probabilidad P como:

$$P : a \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longrightarrow P(A) \quad \left(\text{probabilidad de } A\right)$$

s.q.

a) $P(A) \geq 0$

b) $P(\Omega) = 1$ → probabilidad del evento seguro es 1.

generalizado

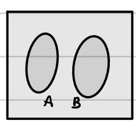
c) si $A \cap B = \emptyset$. $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

c') si $A_1 \ldots, A_i \ldots$

$A_i \cap A_J = \emptyset \quad (i \neq J)$.

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

<u>Obs</u> : a)



1^{Ω}

b) ε: lanzar una moneda "perfecta"

$\Omega = \{c, s\} \qquad P(\{c\}) = ?$

· P : función (medida de probabilidad.

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

→ No permiten det. las probabilidades se deben imponer cond. del problema.

↳ Ej : moneda perfecta

· para det. la prob. necesito imponer condiones.

$1 = P(\{c,s\}) = P(\{c\}) + P(\{s\})$. $\rightarrow P(c) + P(s) = 1$.

ya que son disjuntos.

$P(c) = P(s)$. → ya que es perfecta.

$\Rightarrow P(c) = P(s) = 1/2$

Los axiomas de probabilidad no permiten determinar en forma única las probabilidades, para hacerlo se debe imponer condiciones propias del problema.

Propiedades.

1) $P(\Omega) = 1 = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, $\forall A$.

ya que $\emptyset$ es $\bar{\Omega}$.

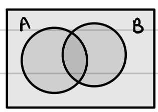
(1,0) si ponemos una prob. mayor a 1.

2) $P(\emptyset) = 0$

3) $P(A) \leq 1$

4) si $A, B \in \mathcal{a} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

dem



$A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$.

$\rightarrow B = (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A)$

$P(B) = P(B \cap \bar{A}) + P(B \cap A)$. $\rightsquigarrow P(B) - P(B \cap A) = P(B \cap \bar{A})$

$\boxtimes$

5) La prop. 4) se puede generalizar de la sig. forma.

Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{a} \Rightarrow$

Prop:

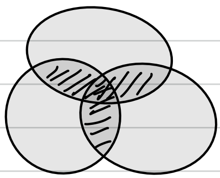
1) $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$

2) $P(\emptyset) = 0$

3) $P(A) \leq 1$

4) si $A, B \in \mathcal{a} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ → regla de la suma

* $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ → complemento.



$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k=3}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$- \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_m).$$

dem: por inducción.

Ej: A_1, A_2, A_3 $n=3$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$- P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3)$$
$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Propuesto: ⓐ $A_1 \dots A_n$, $P(A_i) = 1$ $\forall i$ $P(A) = 1 \not\Rightarrow A = \Omega$

Muestren que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$

$\to$ para $n=2$ y luego

$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1.$ induc∅.

$\to$ y prop. 4)

ⓑ $A_1 \dots A_n$ $P(A_i) = 0$ $\forall i$

$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 0$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 0$

Probabilidad (frecuentista - estadística)

única forma de calcular probab. en ausencia de info. →	Def: sea E exp. aleatorio, Ω el espacio muestral y a el conjunto de eventos. Sea $A \in a$; para calcular la probabilidad de A se realiza el siguiente procedim.:
	i) se repite E n veces y se calcula n_A: nº de veces que A ocurre.
prob. frecuentista ya que usa la frecuencia con que sucede A.	ii) sea $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ → frecuencia relativa.
	iii) se puede demostrar $\lim_{n \to \infty} f_n(A)$ existe. $\lim_{n \to \infty} f_n(A) = P(A)$ (Axiomáticos).
	$n(\infty) \to$ "n° grande" → ya que no puedo lanzarla ∞ veces.
Frecuentista: única forma de darle una aprox. real ↘	E: lanzar moneda $P(\{s\})$
	→ si $p(c) = 0{,}3 = \frac{30}{100}$ → podemos decir que de cada 100 lanzam., 30 aprox. son cara.

espacio muestral finito

Eventos elementales det. otros.	sea Ω un espacio muestral finito que denotamos $\Omega = \{w_1, w_2 \dots, w_n\}$ (cardinalidad $(\Omega) = n$).
	sea $p_i = P(\{w_i\})$ $i: 1 \dots n$ ⇒ P_n axiomas de probabilidad

Prob. frecuentista: para calcular prob. en ausencia de info.

Espacio muestral finito: $\Omega = \{w_1, \dots w_n\}$, card $(\Omega) = n$.

→ Si $p_i = P(\{w_i\})$

$\sum p_i = 1$

→ Si $A \subseteq \Omega$, $A = \{w_{i_1}, \dots w_{i_k}\}$, card $(A) = k$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}$$

nos dice que A está formado por k elementos (cualquiera dentro de Ω).

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. sea $A \subseteq \Omega$ que denotamos $A = \{w_{i_1}, \dots w_{i_k}\}$ $(\text{card}(A) = k)$.

$\Rightarrow P(A) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}$

SUPONGAMOS que Ω es un espacio equiprobable.

ie $p_i = p_j \quad \forall i, j$ → todos los eventos elementales tienen = prob. de ocurrir.

$\Rightarrow p_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ = $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$.

Ej: 1) E: lanzar moneda "perfecta".

$\Omega = \{c, s\}$. $\quad p(\underset{A}{c}) = \frac{1}{2}$

2)

20	B
80	R

E: sacar ficha (color).

construir eventos equiprobables!

$\Omega = \{B, R\}$

$P(B) = \frac{1}{2}$ X ⟶ no es equiprobable.

$\Omega = \{B_1 \dots B_{20}\ R_1 \dots R_{80}\}$

$P(B) = \frac{20}{100} = 0{,}2$ //

· Si Ω es equiprobable $(p_i = p_j)$

↳ $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$ → ¡construir eventos equiprobables!

Combinatoria (Métodos de conteo)

20·03·23

Notación: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se denomina un espacio de probabilidades.

→ libro "de cuántas maneras".

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

① Principio de Multiplicación.

Sea E un experimento que puede expresarse (dividirse) en k subexperimentos secuenciales. $E_1, E_2 \dots, E_k$, es decir.

$E = (E_1\ E_2 \dots E_k)$.

Si el subexperimento E_i tiene n_i resultados posibles

⇒ E tiene $\left(\prod_{i=1}^{k} n_i\right)$ resultados posibles.

Multiplicación de cant. de resultados posibles.

Ej ① : patente de auto.

no se usan vocales

22	22	22	22	10	10
L	L	L	L	N°	N°

↳ letras.

$E_1\ E_2\ E_3\ E_4\ E_5\ E_6 \longrightarrow 22^4 \cdot 10^2$.

→ secuencia de letras y n°

② $\{a, b, c\}$.

$\boxed{3|3}$ → con repetición
→ $3 \cdot 3 = 9$

$\boxed{3|2}$ → s/ rep.
→ $3 \cdot 2 = 6$.

COMBINATORIA

① ppio. de multiplicación: Multiplicación de cant. de resultados posibles.

$E = (E_1\ E_2 \dots E_k)$ → k subexperimentos

→ E_i tiene n_i resultados posibles.

→ E tiene $\left(\prod_{i=1}^{k} n_i\right)$ resultados posibles.

→ Ej: secuencia de letras y n°.

③ MARIA

· palabras t.q. no queden 2 A juntas.

$\bar{A}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ → N° de formas en que puedo poner las que no son A. → $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

A • _ • _ • _ • → 6

N° total de palabras $6 \cdot 6 = 36$.

→ Las fórmula sig. derivan del ppio. de multiplicación.

② Muestras ordenadas c/ repetición.

supongamos los objetos $\{a_1 \dots a_n\}$ (distinguibles).
se desea formar secuencias. $(a_{i_1} \dots a_{i_n})$ donde se permite la repetiø de elementos. El n° de secuencias queda dado por n^k.

$\overset{1}{\boxed{n}}\overset{2}{\boxed{n}} \; \dots \; \overset{k}{\boxed{n}} \to n^k$

tuplas equiprobables.

Ej E: lanzar moneda n veces. (perfecta)

$\Omega = \{(x_1, x_2 \dots x_n) / x_i \in \{c,s\}\}$

$card(\Omega) = 2^n$

MARIA A $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1}$ → 6
$\bar{A}$ • _ • _ • _ • → 6 } 36 palabras sin las A juntas.

② Muestras ordenadas c/ repetición.

· Obj. distinguibles : $\{a_1 \dots a_n\}$
· secuencias (tuplas) : $(a_{i_1} \dots a_{i_k})$
· c/ repetición

Ej: lanzar moneda k veces → $\Omega = \{(x_1, x_2 \dots x_k) / x_i \in \{c,s\}\}$
$card(\Omega) = 2^k$

casos favorables (sólo caras)

$P(\text{al menos un sello}) = 1 - P(0 \text{ sellos}) = 1 - \frac{1}{2^n}$

casos totales.

③ Muestras ordenadas s/ repetición

Supongamos los objetos $\{a_1 \dots a_n\}$, se desea formar secuencias $(a_{i_1} \dots a_{i_k})$ donde no se permite la repetición de elementos. El n° de secuencias queda dado por

$P^n_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ permutaciones de tamaño k con n objetos.

1	2		k
n	$n-1$	$\dots$	$n-(k-1)$

$= n(n-1)\dots(n-(k-1)) \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$

$= \frac{n!}{(n-k)!}$

Ej n personas

$P(\overbrace{\text{todos cumplan años en días distintos}}^{A})$

tuplas → $\Omega = \{(x_1 \dots x_n) / x_i \in \{1 \dots 365\}\}$.

→ cada elem. de la tupla es el día de cumple de cada persona

x_i : día cumple i-ésima persona

$Card(\Omega) = 365^n$

$Card(A) = P^{365}_n = \frac{365!}{(365-n)!}$. $n \leq 365$.

③ Muestras ordenadas s/ repetición

· Obj. distinguibles : $\{a_1 \dots a_n\}$

· secuencias (tuplas) : $(a_{i_1} \dots a_{i_k})$

· s/ repetición.

$\boxed{P^n_k = \frac{n!}{(n-k)!}}$ permutaciones de tamaño k con n objetos.

$P_n^{365} = 0 \quad , n > 365$

$\{a, b, c\}$

$3 \cdot 3$	ab, ac, bc, aa, bb, cc	ba, ca, cb	
$3 \cdot 2$	ab, ac, bc	ba, ca, cb	{a b}, {a b}, {b c}

$C_2^3 = \binom{3}{2} = 3$

$\downarrow$

P_2^3 → *permutaciones de tamaño 2 de entre 3 obj.*

$= \frac{3!}{(3-2)!}$

Combinaciones:
- No importa orden
- No se permite repetición

grupos o conj. ⟶

④ Muestras desordenadas sin reemplazo.

Sean los objetos distinguibles $\{a_1, \ldots a_n\}$, se desea formar "conjuntos" $\{a_{i_1}, \ldots a_{i_k}\}$ (sin repetir obj.).

El nº de conj. queda dado por:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Combinaciones de tamaño k con n objetos.

Ej kino: 41 nº

7

$P(\underbrace{\text{Ganar } k}_{A})$

$\Omega = \{ \{x_1, \ldots x_7\} / \begin{matrix} x_i \in \{1, \ldots 41\} \\ x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j \end{matrix} \}$

④ Muestras desordenadas sin reemplazo

- conjuntos (no importa el orden)
- sin repetición
- Distinguibles

$$\boxed{C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

Combinaciones de tamaño k con n objetos.

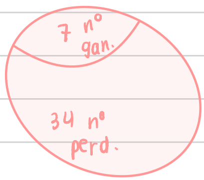
$card(\Omega) = C_7^{41} = \binom{41}{7}$

$card(A) = 1 \longrightarrow P(\text{Ganar } K) = \frac{1}{\binom{41}{7}} = \frac{1}{22.481.940}$

→ juegan ya que el costo es muy bajo.

$P(\text{sacar } 4 \text{ ptos.}) = \frac{C_4^7 \cdot C_3^{34}}{C_7^{41}}$ → No cambia espacio muestral

pplo de multiplicación.



$P(\text{sacar al menos } 4 \text{ ptos.}) = \cancel{\frac{C_4^7 \cdot C_3^{37}}{C_7^{41}}}$

los que ya usamos.

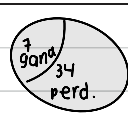
$P(\text{sacar al menos } 4 \text{ ptos.}) = \sum_{j=4}^{7} P(\text{sacar } j \text{ ptos}).$

$= \sum_{j=4}^{7} \frac{C_j^7 \cdot C_{7-j}^{34}}{C_7^{41}}$

⑤ permutaciones c/ objetos no todos distinguibles

Supongamos n objetos t.q. se pueden agrupar en k clases, de tal forma que los n_i ($\sum n_i = n$) objetos de i-ésima clase son indistinguibles.

Ej: Kino → $P(\text{sacar } 4 \text{ ptos.}) = \frac{C_4^{7} \cdot C_3^{34}}{C_7^{41}}$ → favorables / → totales



* reducir el espacio.

⑤ permutaciones c/ objetos no todos distinguibles → n objetos, k clases

→ n_i objetos de la i-ésima clase indistinguibles.

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}}$$

El nº de permutaciones de tamaño "n" queda dado por

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}}$$

Ej $\underbrace{BB}_{n_1=2}$ $\underbrace{RRR}_{n_2=3}$ n=5.

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}$$

Buen ejemplo!

AAA BB EE RO (9 letras) / BB EE RO (6)

$$\frac{6!}{2!\,2!\,1!\,1!}$$

$\bar{A}$ • _ • _ • _ • _ • _ • _ •

(A) C_3^7 → Nº de puntos.

→ Nº total de palabras sin que queden dos A's juntas:

$$\frac{6!}{2!\,2!\,1\cdot 1}\cdot C_3^7$$

Ej: AAA BB EE RO (9 letras) / BB EE RO

$$\frac{6!}{2!\,2!\,1!\,1!}$$

→ palabras sin 2 A's juntas:

$$\frac{6!}{2!\,2!}\cdot C_3^7.$$

$\bar{A}$ • _ • _ • _ • _ • _ • _ •

$\bar{A} = C_3^7$ (3 A's, 7 ptos)

dem: $a_1, a_2 \dots a_k$

$(n_1)\ (n_2)\ \ (n_k)$.

n → *tuplas tamaño n.*

$C^{n}_{n_1}\ \ C^{n-n_1}_{n-1}\ \dots\ C^{n_k}_{n_k}$

↳ Elijo n_1 casilleros e instalo elem. a_1

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots$$

$$\frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}}\ \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}}\ \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{(n_3)!\,\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}}\ \cancel{\dots}$$

tuplas ←

ab ac bc aa bb cc	ba ca cb	{ab} {aa} {ac} {bb} {bc} {cc}
ab ac bc	ba ca cb	{a b} {a b} {b c}

} *No son equiprobables*

→ C^{3}_{2} ✓ → *sí son equip.*

P^{3}_{2}

24 marzo

tuplas

ab ac bc aa bb cc	ba ca cb	{ab} {ac} {bc} {aa} {bb} {cc}

No son equiprobables

ab	ba	{a b}
ac	ca	{a b} → C^3_2 ✓ → si son equip.
bc	cb	{b c}

P^3_2

⑥ Muestras desordenadas con repetición.

Combinaciones con repetición.

Supongamos objetos $\{a_1, \dots, a_n\}$, se desea formar conjuntos $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ donde se permite la repetición de elementos. El nº de conjuntos que se pueden formar queda dado por $C^{n-1+k}_k = \binom{n-1+k}{k}$

Ej: $n=3$, $k=2$

$$C^{3-1+2}_2 = C^4_2 = \binom{4}{2} = 6.$$

Ej

Una ficha de dominó es un conj. de 2 números.

$\{0 \dots 6\}$, existe el  (se permite la repetición).

$$C^{7-1+2}_2 = C^8_2 = 28.$$

⑥ Muestras desordenadas con repetición.

$$\boxed{C^{n-1+k}_k = \binom{n-1+k}{k}}$$

- Obj : n
- conjuntos : k
- c/ repetición.

dem: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \; \ldots \; a_n.$

$\cdot\cdot \;|\;\; |\; \cdot \;|\; \ldots \;|$

→ hay que poner $(n-1)$ divisiones

→ k puntos (pasteles).

· El número de config. distintas va a estar dado por la forma en que puedo permutar los puntos y barras.

→ pero las barras son indistinguibles entre ellas.

→ " " puntos " " " "

$$\cdot \; \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!\,k!} = \binom{n-1+k}{k} = C^{n-1+k}_{k}$$

Ej E: lanzar una moneda perfecta 2 veces.

$$\Omega = \{(cc)(cs)(sc)(ss)\}$$

$$P\begin{pmatrix}\text{al menos}\\ \text{1 sello}\end{pmatrix} = \frac{3}{4}$$

$$\cancel{\Omega = \{\{cc\}\{cs\}\{ss\}\}}$$

$$\cancel{P\begin{pmatrix}\text{al menos}\\ \text{un sello}\end{pmatrix} = \frac{2}{3}}$$

→ Está mal ya que los espacios <u>no</u> son equiprobables.

No sirven para calcular probabilidades.

dem $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \; \ldots \; a_n.$

$\cdot\cdot \;|\;\; |\; \cdot \;|\; \ldots \;|$

barras son indistinguibles

· puntos " "

$$\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!\,k!} = \binom{n-1+k}{k}$$

Propuesto: $x_1 \dots x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$

Ej

1) $\underbrace{P(\text{obtener al menos 1 sello})}_{A} = 1 - \frac{1}{2^n}$

prob. de obtener ningún sello.

$P(A) = 0{,}99 = 1 - \frac{1}{2^n}$ → ¿Cuántos lanza@ requiero para obtener esa prob?.

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}01$

$n = \frac{\log 0{,}01}{\log(1/2)} = 6{,}64 \dots$ → se debe lanzar $\boxed{n=7}$ veces la moneda.

$P(A) = 0{,}99 = \frac{99}{100}$ → de cada 100 veces, que lanzo la moneda 7 veces, 99 saldrá al menos 1 sello.

Ej 2 | 20 B, 80 R | E: sacar 5 fichas

$\Omega = \{(x_1 \dots x_5) / x_i \in \{B, R\}\}$ → no equiprob.

$\Omega' = \left\{(x_1\, x_2 \dots x_5) / x_i \in \left\{\begin{matrix} B_1 \dots B_{20} \\ R_1 \dots R_{80}\end{matrix}\right\}\right\}$

$P(2B \text{ y } 3R)$, $P((BBRRR)) = \begin{cases} \text{cr} & \frac{20 \cdot 20 \cdot 80 \dots}{100 \cdot 100 \dots} = \frac{20^2\, 80^3}{100^5} \\ \text{s.r} & \frac{P_2^{20} \cdot P_3^{80}}{P_5^{100}} = \end{cases}$

Ej: $P(2B \text{ y } 3R)$, $P((BBRRR)) = \begin{cases} \text{cr} & \frac{20 \cdot 20\; 80 \dots}{100 \cdot 100 \cdot 100 \dots} = \frac{20^2 \cdot 80^3}{100^5} \\ \text{s.r} & \frac{P_2^{20} \cdot P_3^{80}}{P_5^{100}} \end{cases}$

| 20 B, 80 R |

$P(2B \wedge 3R) = P((BBRRR)) + P((BRBRR)) + \cdots$

son iguales las prob.

$= P((BBRRR)) \cdot \frac{5!}{2!\,3!}$ → las permutaciones de los BBRRR.

$\Omega = \{\{x_1 \dots x_5\} / x_i \in \{B_1 \dots B_{20}, R_1 \dots R_{80}\}\}$.

$P(2B, 3R) = \frac{C_2^{20} \; C_3^{80}}{C_5^{100}}$ → es lo mismo que hacerlo sin repetición ya que los c/r no sirven.

Ej 3: K partículas.

n niveles de energía.

(a) partículas distinguibles

Maxwell - Boltzman.

$n \cdot n \cdots = n^k$; P_k^n

si pueden haber 2 en el mismo nivel

(b) part. indistinguibles.

Bose - Einstein

C_k^{n-1+k} ; C_k^n

niveles aceptan más de una partícula.

me basta elegir k niveles de energía.

Fermi - Dirac.

Probabilidad Condicional

Def

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidades, A, B $\in \mathcal{A}$ t.q. $P(B) > 0$. Se define la prob. condicional de A dado B (denotado $P(A/B)$) como la probabilidad de A cuando el espacio muestral se restringe a B; lo cual significa calcular la probabilidad de A sabiendo que B ocurre.

Def $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ej E: lanzar moneda perfecta dos veces.

$\Omega = \{(c,c)(c,s)(s,c)(s,s)\}$.

A: {obtener 2 sellos}.

B = {" al menos 1 sello}.

$$P(A/B) = \frac{1}{3}$$

$\Omega' = B = \{(cs)(sc)(ss)\}$.

restringió Ω al evento que condiciona

PROBABILIDAD CONDICIONAL

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ej: A: {obtener 2 sellos}.

B = {" al menos 1 sello}.

$P(A/B) = \frac{1}{3}$ $\longrightarrow$ $\Omega' = B = \{(cs)(sc)(ss)\}$.

restringió Ω al evento que condiciona

· $P(A/B) = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}.$ → obtener 2 sellos $P(A \cap B)$.

Ej $M_{perf.}$ $\cancel{M_c}$ M_s → lanzo y sale S.

$\Omega = \{ M_p, M_c, M_s \}$

$\quad\;\; 1/3 \quad 1/3 \quad 1/3.$

$\Omega = \{ (M_p, C)(M_p, S)(M_c, C)(M_s, S) \}.$

$\quad\;\; 1/6 \quad 1/6 \quad 1/3 \quad 1/3$

$$P(M_s/S) = \frac{P(M_s, S)}{P(M_p, S) + P(M_s, S)} = \frac{1/3}{1/6 + 1/3} = \frac{2}{3}$$

$$\cdot\ P(M_s|S) = \frac{\overset{1}{P(S|M_s)}\ \overset{1/3}{P(M_s)}}{\underset{3/6}{P(S)}} \rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{2\cancel{3}}{\cancel{3}} = \frac{2}{3}\ ✓$$

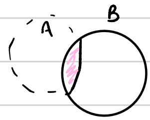
27·mar

Restringir Ω. ←

Prob. condicional:

Obs

→ si B ocurre, hay que eliminar lo que no sea B y B pasa a ser los casos totales.

① 

→ $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

② La def. de probabilidad condicional es correcta en el sentido que con B fijo, cumple todos los axiomas y propiedades de una probabilidad.

Por ej:

$$P(A_1 \cup A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B) - P(A_1 \cap A_2/B)$$

③ $P(A/B) = P(A) \rightarrow P(A_s) = \dfrac{4}{52} = P(A_s/R)$

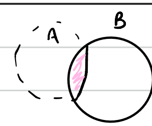
$P(A/B) > P(A) \rightarrow A \subset B,\ P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} > P(A)$ <1

$P(A/B) < P(A) \rightarrow A\cap B = \phi,\ P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0 < P(A)$

$\underset{B=\Omega}{P(A/B)} = P(A/B) = P(A) \rightarrow$ prob. incondicional

Obs

→ si B ocurre, hay que eliminar lo que no sea B y B pasa a ser los casos totales.



→ $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A/B) = P(A) \rightarrow P(A_s) = 4/52 \cdot P(A_s/R)$

$P(A/B) > P(A) \rightarrow A \subset B,$ $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \rightarrow \dfrac{P(A)}{P(B)} > P(A)$ <1

$P(A/B) < P(A) \rightarrow A\cap B = \phi,$ $\rightarrow 0 < P(A)$

$P(A/B) = P(A) \rightarrow$ prob. incondicional

Teoremas

① Teorema de Multiplicación

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Si $A_1, A_2 \dots A_n$ eventos t.q. $P(A_1$

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

dem. Obvia: $\cancel{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_2 \cap A)}{\cancel{P(A_1)}} \dots$ ⇝ por definición.

Ej ① P(todas Ases)

$= P((AAA)) = P(A^1) \cdot P(A^2/A^1) \cdot P(A^3/A^1 \cap A^2)$

salga As en la 1° extracc.

$\approx \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50}$

hay que restringir Ω

· $P((AAA)) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{52 \cdot 51 \cdot 50}$ → casos fav. → casos tot.

· $P(\text{tres Ases}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}}$

uso combinaciones:
→ No importa el orden.
→ saco y no repongo.

Ej Ruleta rusa:

→ No es equiprobable xq sino cada uno debería valer 0.

$\Omega : \{ M ; VM ; VVM ; \dots \infty \}$ → Numerable como no finito.

M: muera

$\{1, 2, 3 \dots \infty\}$

TEOREMAS

① Teorema de Multiplicación

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$P(A) = \frac{1}{6}$; $P(VM) = P(V) \cdot P(M/V) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

$P(\text{el que parte muera}) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{2j} > \frac{1}{2}$

↳ suma geométrica!

→ Prop. Hacer sin girar nuez.

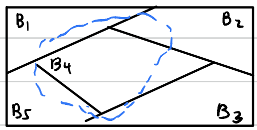
② Teorema de probabilidades totales

sea $\{B_1, B_2 \dots B_n\}$ una partición de Ω, es decir:

$B_i \neq \emptyset$

$B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.

$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$



Ω

sea $A \subseteq \Omega$ (evento) $\Rightarrow$

$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \dots \cup (A \cap B_n)$.

$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$ → unión de n cosas excluyentes.

$\cdot (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j$.

$\cdot\ P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\boxed{\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \\ P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i) \end{aligned}}$$

→ Mejor en cosas más chicas ya que a veces es más fácil de calcular.

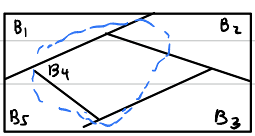
② Teorema de probabilidades totales

sea $\{B_1, B_2 \dots B_n\}$ una partición de Ω, es decir:

$B_i \neq \emptyset$

$B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.

$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$



Ω

$$\boxed{\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \\ P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i) \end{aligned}}$$

* más fácil de calcular para cosas más pequeñas y que dependan de la anterior.

Prob. de lo que a mí me toca es igual a la de la persona de después.
No importa quién saque la 1° carta.

Ej E: sacar 2 cartas (s/r)

$P(1° \text{ As}) = \frac{4}{52}$

$P(2° \text{ As}) =$

↳ 2° As depende de lo que salió antes pero no sabemos qué salió.

↳ buen caso para usar prob. totales.

$P(1° \bar{\text{As}}) = \frac{48}{52}$

$\rightarrow A = \{2° \text{ As}\}$

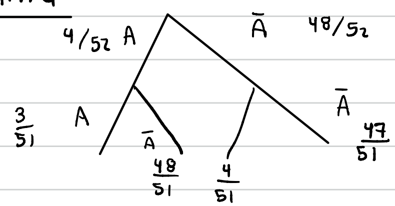
$B_1 = \{1° \text{ As}\}$ $\quad B_2 = \{1° \bar{\text{As}}\}$.

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2)$.

$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$.

$= \frac{4\,(3+\cancel{48})}{52 \cdot \cancel{51}} = \frac{4}{52}$.

Diagrama:



$P(2° \text{ Az.}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$.

Ejemplo:

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2)$

↳ $P(2° \text{ Az.}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$.