

Auxiliar 2

Antonia Cisternas

Ley de Coulomb

Fuerza entre dos cargas q_1 y q_2 separadas a una distancia r :

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad \epsilon_0: \text{permittividad del vacío.}$$

* Es para una carga puntual es siempre radial.

Vectorialmente, la fuerza sobre q_0 es

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^3}$$

Campo eléctrico (para cargas puntuales)

En \vec{r}_1 provocado por una carga q_0 en posición \vec{r}_0 :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_1} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^3}$$

en \vec{r} , provocado por N cargas puntuales:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Distribución continua de cargas

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}')$$

; \vec{r} : posición donde se desea conocer \vec{E}

\vec{r}' : posición de la distribución de la carga.

$$dq(\vec{r}') = \begin{cases} \lambda(\vec{r}') dl & \rightarrow \text{carga distrib. en una línea.} \\ \sigma(\vec{r}') ds & \rightarrow \text{“ “ “ superficie.} \\ \rho(\vec{r}') dv & \rightarrow \text{“ “ “ un volumen.} \end{cases}$$

Potencial y trabajo eléctrico

Trabajo de una F eléctrica para mover q_0 desde A a B:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} \rightarrow W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \underbrace{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\text{prop. del punto del espacio,}}$$

no depende de q_0 (la carga que se quiere mover)

sólo de la carga que genera el campo.

Potencial eléctrico (ya que el campo es conservativo):

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} ; \quad W_{AB} = - q_0 (V(B) - V(A)) = - q_0 \Delta V$$

Pot. de una carga puntual q :

$$V(B) - V(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Fijando $V(\infty) = 0$ (fuerza decrece con r):

$$V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para una carga puntual q :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

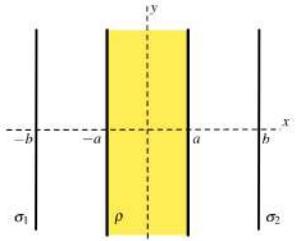
Para una distribución continua de cargas:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Problema 2.16

Un bloque infinito posee una densidad de carga uniforme ρ que ha sido localizado entre $x = -a$ y $x = a$. Este bloque es infinito en la dirección y y z (saliente de página). Dos planos infinitos son localizados en $x = -b$ y $x = b$, los cuales poseen una densidad de carga σ_1 y σ_2 , respectivamente. Al medir el campo eléctrico se observa que:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & x < -b \\ +E_0\hat{x} & -b < x < -a \\ -E_0\hat{x} & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$



- a) Calcule la densidad de carga ρ del bloque infinito.
- b) Calcule las densidades de carga superficiales σ_1 y σ_2 de los planos a la izquierda y derecha del bloque respectivamente.

9) El campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{q}(\vec{r}')$$

La suma de los campos, por ppo. de superposición, nos debe dar:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & x < -b \\ \epsilon_0 \hat{x} & -b < x < -a \\ -\epsilon_0 \hat{x} & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

El campo del bloque será

$$\vec{E}_b(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho dV ; \quad \vec{r} = z\hat{z} \rightarrow \text{posición en la que obtenemos } \vec{E}(z)$$

$\vec{r}' = r\hat{r} + z\hat{z} \rightarrow \text{posición en la que se distribuye la carga.}$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho r dr d\theta dz'$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{(z - z')\hat{z} - r'\hat{r}}{((z - z')^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr d\theta dz' ; \quad \rho \text{ dt}$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{(z - z')\hat{z} - r'\hat{r}}{((z - z')^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr d\theta dz' \right) \hat{z}$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \left(\left[\int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{(z - z') r' dr d\theta dz'}{((z - z')^2 + r'^2)^{3/2}} \right] \hat{z} + \left[- \int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r'^2 dr d\theta dz' \hat{r}}{((z - z')^2 + r'^2)^{3/2}} \right] \right)$$

Debido a que $\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$

$$= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \left(\cancel{\int_{-a}^a (z - z') dz'} \int_0^\infty \frac{r' dr}{((z - z')^2 + r'^2)^{3/2}} \hat{z} \right)$$

con lo cuál se tiene la solución conocida:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-q}^q (z - z') dz' \left[-\frac{1}{\sqrt{(z-z')^2 + r'^2}} \right]_0^\infty \hat{z} \\
 &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-q}^q \frac{(z - z') dz'}{\sqrt{(z-z')^2}} \hat{z} \\
 &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-q}^q \frac{(z - z')}{|z - z'|} dz' \hat{z}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E}_b(z) = \begin{cases} z > q: & = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-q}^q \frac{1}{|z-z'|} dz' = \frac{\rho}{2\epsilon_0} 2a = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \hat{z} \\ z < -q: & = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot 2a = -\frac{\rho a}{\epsilon_0} \hat{z} \end{cases}}$$

El campo del plano derecho será:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{pd}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|r - r'|^3} \sigma_z dS \quad ; \quad \vec{r} = z \hat{z} \\
 &= \frac{\sigma_z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{((z-b)\hat{z} - r'\hat{r})}{((z-b)^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr' d\theta' \\
 &= \frac{\sigma_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{(z-b) r' dr' d\theta' \hat{z}}{((z-b)^2 + r'^2)^{3/2}} - \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \cancel{\frac{r'^2 dr' d\theta' \hat{r}}{((z-b)^2 + r'^2)^{3/2}}} \right) \\
 &= \frac{\sigma_z \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{(z-b) r' dr'}{((z-b)^2 + r'^2)^{3/2}} \hat{z} \\
 &= \frac{\sigma_z}{2\epsilon_0} (z-b) \underbrace{\int_0^\infty \frac{r' dr'}{((z-b)^2 + r'^2)^{3/2}}}_{-\frac{1}{((z-b)^2 + r'^2)^{1/2}}} \hat{z} \\
 &= \frac{\sigma_z}{2\epsilon_0} (z-b) \left[\frac{1}{\sqrt{(z-b)^2}} \right]_0^\infty \hat{z}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E}_{pd}(z) = \frac{\sigma_z}{2\epsilon_0} \frac{(z-b)}{|z-b|} \hat{z}}$$

para el plano izquierdo $b \rightarrow -b$ y $\sigma_z \rightarrow \sigma_1$

$$\boxed{\vec{E}_{pi}(\vec{r}) = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \frac{(z+b)}{|z+b|} \hat{z}}$$

Luego, por principio de superposición:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_{pd} + \vec{E}_{pi} + \vec{E}_b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z > b: \frac{\rho A}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \\ q < z < b: \frac{\rho A}{\epsilon_0} + -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \\ -b < z < -q: -\frac{\rho A}{\epsilon_0} + -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \\ -b > z: -\frac{\rho A}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \end{array} \right.$$

pero

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & x < -b \\ E_0 \hat{x} & -b < x < b \\ -E_0 \hat{x} & q < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Luego, juntando ambas y resolviendo el sistema:

$$\cdot \frac{2\rho A + \sigma_2 + \sigma_1}{2\epsilon_0} = 0 \Rightarrow [2\rho A = -\sigma_2 - \sigma_1]$$

$$\cdot \frac{2\rho A + \sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} = -E_0 \Rightarrow -\frac{\sigma_2 - \cancel{\sigma_1} + \cancel{\sigma_1} - \sigma_2}{2\epsilon_0} = -E_0 \Rightarrow \frac{2\sigma_2}{2\epsilon_0} = E_0 \Rightarrow \left[\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = E_0 \right]$$

$$\cdot \frac{-2\rho A - \sigma_2 + \sigma_1}{2\epsilon_0} = E_0 \Rightarrow \frac{\cancel{\sigma_2} + \sigma_1 - \cancel{\sigma_2} + \sigma_1}{2\epsilon_0} = E_0 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = E_0 \Rightarrow \left[\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = E_0 \right]$$

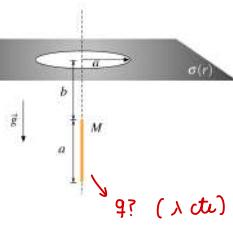
$$\therefore \rho = -\frac{2\epsilon_0 E_0}{2A} = \boxed{\frac{\epsilon_0 E_0}{A} = \rho}$$

b) como fueron calculados anteriormente,

$$\boxed{\sigma_1 = \sigma_2 = \epsilon_0 E_0}$$

Problema 2.9

Considera un plano infinito el cual tiene un forado circular de radio a . Sobre el plano existe una densidad superficial de carga dada por $\sigma(r) = \sigma_0 \frac{a}{r}$ donde r es la distancia desde el centro del agujero. A distancia b sobre el eje del forado existe una barra de largo a , masa M y carga desconocida, la cual reposa inmóvil en esa posición a pesar de la gravedad. Suponiendo que la densidad de carga es uniforme, determine la carga que posee la barra.



Notamos que en el plano infinito, la carga se distribuye en $q \leq r < \infty$

Luego, la fuerza eléctrica que produce la placa debe ser suficiente para mantener la barra inmóvil.

$$\text{Así, } \underbrace{\vec{F}_{\text{grav.}}}_{Mg\hat{z}} + \vec{F}_{\text{elec}} = 0$$

Calculando el campo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{q}(\vec{r}')$$

con la posición donde se quiere calcular $\vec{r} = z\hat{z}$ y la posición de la carga $\vec{r}' = r'\hat{r}$

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \frac{(-r\hat{r} + z\hat{z}) \sigma(r') r' d\theta dr'}{((r')^2 + z^2)^{3/2}} ; \text{ Donde } \sigma(r') = \frac{\sigma_0 a}{r'}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma_0 a \left[\int_a^\infty \int_0^{2\pi} \frac{((-r')\hat{r} + z\hat{z}) \frac{r'}{r'} d\theta dr'}{((r')^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{\sigma_0 a}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_a^\infty \int_0^{2\pi} \frac{(-r')\cancel{r'} d\theta dr'}{((r')^2 + z^2)^{3/2}} + \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z} d\theta dr'}{((r')^2 + z^2)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma_0 a}{4\pi\epsilon_0} \cdot \cancel{2\pi} \cdot z \left[\int_a^\infty \frac{dr'}{((r')^2 + z^2)^{3/2}} \right] \hat{z}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$r' = z\tan\varphi \Rightarrow dr' = z\sec^2\varphi d\varphi$$

Lím. de integración:

$$\rightarrow r' = a \rightarrow a = z\tan\varphi$$

$$\rightarrow \arctan\left(\frac{a}{z}\right) = \varphi$$

$$\rightarrow r' = \infty \rightarrow \infty = z\tan\varphi$$

$$\rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} z \left[\int_{\arctan(a/z)}^{\pi/2} \frac{z\sec^2\varphi d\varphi}{(z^2 + \tan^2\varphi + z^2)^{3/2}} \hat{z} \right]$$

$$= \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} z \int_{\arctan(a/z)}^{\pi/2} \frac{\cancel{z} \sec^2\varphi d\varphi}{z^3 (\tan^2\varphi + 1)^{3/2}} \hat{z}$$

$$= \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} \frac{\cancel{z}}{z^2} \int_{\arctan(a/z)}^{\pi/2} \frac{\sec^2\varphi d\varphi}{\sec^3\varphi} \hat{z} ; \sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0 z} \int_{\arctan(a/z)}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \hat{z}$$

$$= \frac{\sigma_0 q}{2\epsilon_0 z} \left[\sin \varphi \right]_{\arctan(\frac{q}{z})}^{\pi/2} \hat{z}$$

$$= \frac{\sigma_0 q}{2\epsilon_0 z} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(\arctan \left(\frac{q}{z} \right) \right) \right] \hat{z}$$

usando la identidad $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{\sigma_0 q}{2\epsilon_0 z} \left[1 - \frac{\left(\frac{q}{z} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{q}{z} \right)^2}} \right] \hat{z}$$

Luego, la fuerza que la placa aplicará sobre la barra estará dada por:

$$dF = \vec{E}(z) dq ; \text{ con } dq \text{ el diferencial de carga de la barra}$$

que es la que se le aplica el campo.

$$\rightarrow \vec{F} = \int_b^{b+q} \vec{E}(z) dq \hat{z}$$

$$= \int_b^{b+q} \vec{E}(z) \lambda dz$$

$$= \int_b^{b+q} \frac{\sigma_0 q}{2\epsilon_0 z} \left[1 - \frac{\left(\frac{q}{z} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{q}{z} \right)^2}} \right] \lambda dz \hat{z}$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\int_b^{b+q} \frac{1}{z} dz - q \int_b^{b+q} \frac{1}{z^2 \sqrt{1 + \frac{q^2}{z^2}}} dz \right] \hat{z}$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln z \Big|_b^{b+q} - q \int_b^{b+q} \frac{1}{z \sqrt{z^2 + q^2}} dz \right] \hat{z}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$\rightarrow z = q \tan \varphi , \quad dz = q \sec^2 \varphi d\varphi$$

Límites de la integral

$$b+q = q \tan \varphi \rightarrow \arctan \left(\frac{b+q}{q} \right) = \varphi$$

$$b = q \tan \varphi \rightarrow \arctan \left(\frac{b}{q} \right) = \varphi$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln \left(\frac{b+q}{b} \right) - q \int_{\arctan(\frac{b}{q})}^{\arctan(\frac{b+q}{q})} \frac{q \sec^2 \varphi d\varphi}{q \tan \varphi \sqrt{q^2 \tan^2 \varphi + q^2}} \right] \hat{z}$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln \left(\frac{b+q}{b} \right) - q \int \frac{\sec^2 \varphi d\varphi}{\tan \varphi \sqrt{\sec^2 \varphi}} \right] \hat{z}$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln \left(\frac{b+q}{b} \right) - \int \frac{\sec \varphi d\varphi}{\tan \varphi} \right] \hat{z}$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln \left(\frac{b+q}{b} \right) - \int \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi \right] \hat{z}$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln \left(\frac{b+q}{b} \right) - \int \csc \varphi d\varphi \right] \hat{z}$$

Derivación:

$$\sin(\arctan x) = \underbrace{\tan(\arctan x)}_{x} \cdot \cos(\arctan x)$$

$$= x \cdot \cos(\arctan x)$$

$$\Rightarrow \sin^2(\arctan x) = x^2 \cos^2(\arctan x) \leftarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2(\arctan x) = x^2 \cos^2(\arctan x)$$

$$\Rightarrow 1 = (1+x^2) \cos^2(\arctan x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \underline{\cos(\arctan x)} \leftarrow$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{b+q}{b}\right) - \int_{\arctan(b/q)}^{\arctan(b/q)} \csc(\psi) \cdot d\psi \right] \hat{z}$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{b+q}{b}\right) - \left[\ln \left| \frac{\tan \psi}{z} \right| \right]_{\arctan(b/q)}^{\arctan(b/q)} \right] \hat{z}$$

* $\tan \frac{\psi}{z} = \frac{\tan \psi}{1 + \sec \psi}$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{b+q}{b}\right) - \left[\ln \left(\frac{\tan \psi}{1 + \sec \psi} \right) \right]_{\arctan(b/q)}^{\arctan(b/q)} \right] \hat{z} ; \text{ como derivamos:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos(\arctan x) \rightarrow \sqrt{1+x^2} = \sec(\arctan x)$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{b+q}{b}\right) - \left[\ln \frac{(b+q)/q}{1 + \sqrt{1 + (b/q)^2}} - \ln \frac{b/q}{1 + \sqrt{1 + (b/q)^2}} \right] \right] \hat{z}$$

$$= \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{b+q}{b}\right) - \ln \left(\frac{b+q}{q + \sqrt{q^2 + (b+q)^2}}, \frac{q + \sqrt{q^2 + b^2}}{b} \right) \right] \hat{z}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda \sigma_0 q}{2\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{q + \sqrt{q^2 + (b+q)^2}}{q + \sqrt{q^2 + b^2}} \right) \hat{z}$$

como queremos calcular la carga,

$$q = \int_b^{b+q} \lambda dz = \lambda [b+q - b] = \lambda q \quad y \text{ podemos despejar } q.$$

Igualando, $\vec{F}_{\text{peso}} = -\vec{F}_{\text{elec.}}$

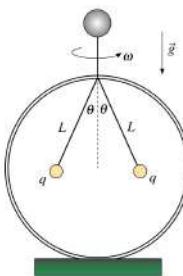
$$Mg \hat{z} = \frac{\sigma_0 q}{2\epsilon_0} \ln \left(\frac{q + \sqrt{q^2 + b^2}}{q + \sqrt{q^2 + (q+b)^2}} \right) \hat{z}$$

$$\Rightarrow q = \frac{Mg 2\epsilon_0}{\sigma_0} \ln \left(\frac{q + \sqrt{q^2 + b^2}}{q + \sqrt{q^2 + (q+b)^2}} \right) //$$

Problema 1.4

Un electroscopio es un instrumento para determinar si un objeto se encuentra cargado. Un modelo simplificado para explicar su funcionamiento son dos esferas metálicas de igual masa m las cuales cuelgan por dos hilos conductores de largo L . Estas esferas adquieren igual carga q al momento en que se toca el objeto cargado con la esfera metálica superior.

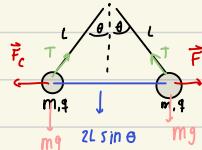
- Determine el valor de la carga q de las esferas si experimentalmente se ha medido que $\theta = 30^\circ$.
- El sistema se hace girar con una velocidad angular ω observándose que el ángulo de equilibrio cambia a $\theta = 60^\circ$. Determine el valor de ω .



a) La fuerza sobre la carga dada que $\theta = 30^\circ$ estará dada por

$$\text{La fuerza de coulomb: } \vec{F}_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2L\sin\theta)^2} \hat{r} \quad ; \quad \theta = 30^\circ \rightarrow \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{F}_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2L \cdot \frac{1}{2})^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} \hat{r}$$



$$\text{La fuerza peso: } \vec{F}_p = -mg\hat{z}$$

$$\text{La tensión: } \vec{T} = T\cos\theta\hat{x} - T\sin\theta\hat{r} \quad ; \quad \theta = 30^\circ = \pi/6 \rightarrow \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$$

$$= \frac{T\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{T}{2}\hat{r} \quad \rightarrow \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$$

$$\text{Si está en equilibrio: } \sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{z} \mid T\cos\theta - mg = 0$$

$$\hat{r} \mid \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2\sin\theta L)^2} - T\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \hat{z} \mid \frac{T\sqrt{3}}{2} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\hat{r} \mid \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} - \frac{T}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} - \frac{mg\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\cancel{\sqrt{3}}} = 0$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{mg}{\sqrt{3}} \cdot 4\pi\epsilon_0 L^2$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{mg4\pi\epsilon_0}{\sqrt{3}} L}$$

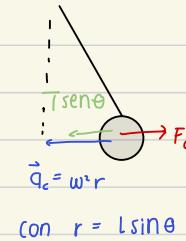
b) Si ahora hay una velocidad angular, la suma de las fuerzas ya no será 0.

Habrá una aceleración centrípeta:

$$\hat{z} \mid \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2\sin\theta L)^2} - T\sin\theta = -m\vec{a}_c$$

$$= -m(L\sin\theta)\omega^2$$

$$\hat{z} \mid T\cos\theta - mg = 0$$



$$\text{con } r = L\sin\theta$$

$$\text{Si } \theta = 60^\circ = \pi/3 \rightarrow \sin \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$$

$$\hat{z} \quad \frac{T}{2} - mg = 0 \rightarrow T = 2mg$$

$$\hat{r} \quad \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(\cancel{L} \cdot \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot L)^2} - \cancel{2}mg \cdot \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -m(L \frac{\sqrt{3}}{2})\omega^2$$

$$\rightarrow \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3L^2} - mg\sqrt{3} = -m \frac{L\sqrt{3}}{2} \omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{mg4\pi\epsilon_0 L^2}{4\pi\epsilon_0 3L\sqrt{3}} - mg\sqrt{3} = -m \frac{L\sqrt{3}}{2} \omega^2 \quad / \quad q^2 = \frac{mg4\pi\epsilon_0}{\sqrt{3}} L^2$$

$$\Rightarrow \frac{g}{3\sqrt{3}} - g\sqrt{3} = -\frac{L\sqrt{3}}{2} \omega^2$$

$$\Rightarrow -\frac{g}{q} + g2 = L\omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{g(18-2)}{9L} = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{g \cdot 16}{9L} = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{4g}{3L} = \omega^2} //$$

Auxiliar 4

Antonio Cisternas
21.084.284-5

Potencial y trabajo eléctrico

Trabajo de una F eléctrica para mover q_0 desde A a B:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} \rightarrow W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

prop. del punto del espacio,

no depende de q_0 (la carga que se quiere mover)

sólo de la carga que genera el campo.

Potencial eléctrico

como el campo es conservativo, no depende del camino de integración y podemos definir la diferencia de potencial:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

y reemplazando en el trabajo:

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q_0 (V(B) - V(A)) = -q_0 \Delta V$$

$= -\Delta U$ → con ΔU la diferencia de energía potencial.

Potencial: Trabajo a realizar por unidad de carga para mover dicha carga desde un punto de referencia a un punto considerado.

* En general, para calcular el Potencial en un punto, tomamos como referencia el potencial en el infinito ya que $V(\infty) = 0$

$$\Rightarrow V(r) - \underbrace{V(\infty)}_0 = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Pot. de una carga puntual q :

$$V(B) - V(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Fijando $V(\infty) = 0$ (fuerza decrece con r):

superficie equipotencial: $V(r) = cte$

$$V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

· ortogonal al campo y a las líneas de fuerza.

· Para una carga puntual:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = cte \Rightarrow r = cte$$

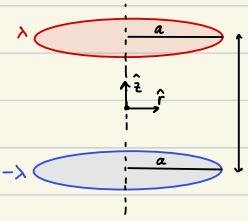
→ Superficies son esferas con centro en la carga.

Para una distribución continua de cargas:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Si q es positiva, las líneas de fuerza salen y $V(r)$ decrece con la distancia.

P1



Queremos el potencial electrostático en el eje común a ambos anillos. Usando el pppio. de superposición, calculamos el potencial generado por el disco de arriba:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

En el cuál, $\vec{r} = z\hat{z}$ → posición donde se quiere obtener $V(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= z'\hat{z} + \vec{r}' \\ &= L\hat{z} + q\hat{r} \end{aligned}$$

El diferencial de carga será $dq = (\lambda)dl = \lambda r'd\theta = \lambda a d\theta$

$$\rightarrow V_+(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\theta}{|(z-L)\hat{z} - q\hat{r}|} = \frac{\lambda a \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(z-L)^2 + a^2}}$$

Luego, para el potencial generado por el disco de abajo: $\lambda \rightarrow -\lambda$

$$z' = -L$$

$$\rightarrow V_-(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(-\lambda)a d\theta}{|((z+L)\hat{z} - q\hat{r})|} = -\frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{(z+L)^2 + a^2}}$$

Por pppio. de superposición:

$$\begin{aligned} V_{\text{Tot}}(z) &= V_+(z) + V_-(z) \\ V_{\text{Tot}}(z) &= \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(z-L)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+L)^2 + a^2}} \right) \end{aligned}$$

b) Luego, el trabajo que se debe aplicar para mover una partícula con carga q_0 de un anillo a otro lo podemos calcular como el trabajo desde $z = -L$ a $z = L$:

$$W_{-L \rightarrow L} = -q_0 (V(L) - V(-L))$$

$$= -q_0 \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(L)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-L)^2 + a^2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{(-L-L)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-L+L)^2 + a^2}} \right) \right]$$

$$= -\frac{q_0 \lambda a}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|q|} - \frac{1}{\sqrt{4L^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{4L^2 + a^2}} + \frac{1}{|q|} \right]$$

\hookrightarrow a es el radio
⇒ siempre positivo.

$$W = -\frac{q_0 \lambda a}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|q|} - \frac{1}{\sqrt{4L^2 + a^2}} \right]$$

P2

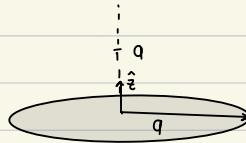
a) Trabajo para traer una carga q desde el inf. hasta un punto z sobre el eje del aro.

La carga total del aro será $Q = \int dq = \int_0^{2\pi} \lambda q d\theta = 2\pi a \lambda$

Luego, el potencial sobre el eje será:

$$\vec{r} = z \hat{z}$$

$$\vec{r}' = q \hat{r}$$



$$\rightarrow V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda q d\theta}{|z \hat{z} - q \hat{r}|} = \frac{\lambda a \cdot 2\pi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\lambda Q}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}}$$

Y por lo tanto, el trabajo realizado por el campo será:

$$W_{\infty \rightarrow z} = -q \left(V(z) - V(\infty) \right) = -q \cdot \frac{\lambda Q}{2\epsilon_0 \sqrt{2a^2}} = -q \frac{\lambda Q}{2\epsilon_0 \sqrt{2} a} = -\frac{q \lambda}{2\sqrt{2} \epsilon_0}$$

b) La velocidad mínima que debe darse a una partícula de carga q para que, viajando desde $+\infty$ a lo largo del eje, logre traspasar el aro.

Por conservación de la energía, si la partícula viene desde $+\infty$ con \vec{v} inicial v_0 , $V(\infty) = 0$

La energía inicial es:

$$\Rightarrow E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 + q V(\infty) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

\downarrow
vel. inicial

Notamos que la dif. de potencial es máxima en el centro del anillo ($z=0$)

\Rightarrow Debe cruzar esa barrera con $v_{z=0} = 0$ para poder cruzar el anillo.

$$\text{Así, } E_{z=0} = \frac{1}{2} m v_{z=0}^2 + q V(z=0) = \frac{1}{2} m v_{z=0}^2 + \frac{q \lambda Q}{2\epsilon_0 \sqrt{q^2}} = \frac{1}{2} m v_{z=0}^2 + \frac{q \lambda}{2\epsilon_0}$$

Por lo tanto, $E_i = E_{z=0}$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_{z=0}^2 + \frac{q \lambda}{2\epsilon_0}$$

Así, la vel. mínima inicial será para $v_{z=0} = 0$

$$\frac{1}{2} m v_{0,\min}^2 = \frac{q \lambda}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow v_{0,\min} = \sqrt{\frac{q \lambda}{m \epsilon_0}}$$

c) La fuerza sobre una carga q es $\vec{F} = q \vec{E}$.

Dado que el campo se calcula como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}')$$

$$\text{con } \vec{r} = z \hat{z}$$

$$\vec{r}' = q \hat{r}$$

$$dq = \lambda A d\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(z \hat{z} - q \hat{r}) \lambda A d\theta}{\sqrt{z^2 + q^2}^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z \lambda A}{\sqrt{z^2 + q^2}^3} \hat{z} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{q \lambda}{\sqrt{z^2 + q^2}} \int_0^{2\pi} \hat{r} d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{z \lambda A}{\sqrt{z^2 + q^2}^3} \hat{z} \end{aligned}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{z \lambda A}{2\epsilon_0(z^2 + q^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\text{luego, } \vec{F} = q \frac{z \lambda A}{2\epsilon_0(z^2 + q^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Así, para encontrar los máximos y mínimos, derivamos e igualamos a 0.

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = \cancel{\frac{q \lambda A}{2\epsilon_0(z^2 + q^2)^{3/2}}} + \cancel{\frac{q \lambda A z}{2\epsilon_0}} (-\frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{(z^2 + q^2)^{5/2}} \cancel{\cdot z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z^2 + q^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(z^2 + q^2)^{5/2}} = 0 \quad / \cdot (z^2 + q^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3z^2}{(z^2 + q^2)} = 0$$

$$\Rightarrow (z^2 + q^2) = 3z^2$$

$$\Rightarrow 2z^2 - q^2 = 0 \rightarrow z = \pm \frac{q}{\sqrt{2}}$$

Notamos que el signo de la fuerza nos indica la dirección de ésta.

Así, la F será máxima en $z = \pm \frac{q}{\sqrt{2}}$ y mínima cuando $|F| = q \frac{z \lambda A}{2\epsilon_0(z^2 + q^2)^{3/2}} = 0 \quad \begin{cases} z=0 \\ z \rightarrow \infty \end{cases}$

Tiene sentido físico ya que en el inf. el aro se ve como una carga puntual y la fuerza disminuye como $1/r^2$. En $z=0$, las fuerzas en \hat{z} y $-\hat{z}$ se anulan.

Luego, la F tendrá un máximo en el medio, en un punto calculado $z = \pm \frac{q}{\sqrt{2}}$.

Auxiliar 6

Antonio Cisternas
21.084.284-5

Momento dipolar:

Para una distribución discreta de cargas:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i ; \text{ con } \vec{r}_i \text{ la posición de cada carga.}$$

Para una distribución continua de la carga:

$$\vec{p} = \int d\vec{q}(\vec{r}) \cdot \vec{r} ; \text{ } \vec{r} \text{ parametriza la carga.}$$

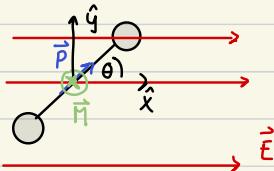


Momento de fuerzas (Torque)

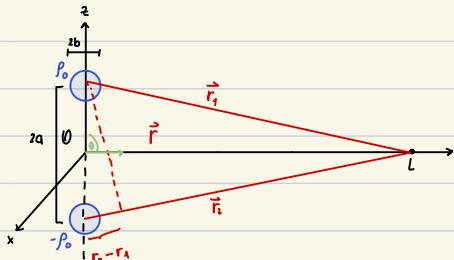
En presencia de un campo eléctrico, este torque fuerza al dipolo a volver a su posición de equilibrio.

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = \vec{\tau}$$

$$\vec{M} = -pE \sin\theta \hat{z} = -\frac{\partial U_e}{\partial \theta} \hat{z}$$



P1



q) Queremos el potencial en el punto $(0, L, 0)$ suponiendo $L \gg a, b$.

El potencial generado por un dipolo en el punto L es:

$$V(x, y, z) = \int_L^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_i \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

La carga de arriba será:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^b (\rho_0 r^2 \sin\theta) dr d\theta d\phi = \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^b \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot 2\pi = \frac{\rho_0 b^3 \cdot 4\pi}{3} = Q$$

La de abajo tendrá carga:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_b^0 (-\rho_0 r^2 \sin\theta) dr d\theta d\phi = \left[-\frac{\rho_0 b^3 \cdot 4\pi}{3} = -Q \right]$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

Si $L \gg a, b$, podemos aproximar:

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 &= 2a \cdot \cos\theta \\ r_1 \cdot r_2 &= r^2 \end{aligned}$$

Reescribiendo,

$$\Rightarrow V(r) = \frac{Q \cdot 2a \cos\theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

El momento dipolar en una distrib. discreta de cargas será:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i : \text{ con } \vec{r}_i \text{ la posición de cada carga}$$

En este caso, $\vec{p} = Qq\hat{z} + -Q \cdot (-q\hat{z})$

$$\Rightarrow \vec{p} = Q2q\hat{z}$$

$$\vec{p} = \frac{8\pi}{3} b^2 \rho_0 q \hat{z}$$

Notamos que $\vec{p} = p\hat{z} \Rightarrow \vec{p} \cdot \hat{r} = p\hat{z} \cdot \hat{r} = p\hat{z} \cdot (\sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z})$

$$= p \cos\theta$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{p \cos\theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

En este caso $\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow [V(0, L, 0) = 0]$

b) La fuerza sobre una carga q en la posición $(0, L, 0)$ será $\vec{F} = q\vec{E}$

Escribiendo el campo eléctrico en coordenadas esféricas:

$$\vec{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p \cos\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} (-2) = \frac{2p \cos\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{p(-\sin\theta)}{4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{p \sin\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_\phi = -\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Juntando lo anterior,

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta} + E_\phi \hat{\phi}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \hat{r} + \frac{p \sin\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \hat{\theta}}$$

Si en coordenadas esféricas el momento dipolar es:

$$\vec{p} = p\hat{z} = p(\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})$$

$$\Rightarrow p \sin\theta \hat{\theta} = p \cos\theta \hat{r} - \vec{p}$$

Juntando lo anterior,

$$\vec{E} = \frac{2\rho \cos\theta \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{(4\rho \cos\theta \hat{r} - \vec{p})}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\rho \cos\theta \hat{r} - \vec{p}) ; \text{ pero } \rho \cos\theta = \vec{p} \cdot \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p})$$

Luego, si queremos calcular la \vec{F} en $(0, L, 0)$, $\vec{p} \cdot \hat{r} = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}(L) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L^3} (0 - \vec{p}) = -\frac{2qQ \hat{z}}{4\pi\epsilon_0 L^3} ; \text{ Reemplazando } Q.$$

$$= -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 L^3} \frac{\rho_0 b^3 \cancel{4\pi}}{3} \hat{z}$$

$$= -\frac{2q \rho_0 b^3}{3\epsilon_0 L^3} \hat{z}$$

Así, $\left[\vec{F} = -\frac{q 2q \rho_0 b^3}{3\epsilon_0 L^3} \hat{z} \right] //$

Esto tiene sentido ya que en este punto las líneas de campo apuntan hacia abajo (desde la carga positiva a la negativa) y por lo tanto, la fuerza apunta hacia abajo.

c) Calcule el trabajo necesario para llevar la carga q desde $(0, L, 0)$ a $(L, 0, 0)$.

Importante

• Trabajo que realiza la \vec{F} eléctrica:

$$W_{AB} = -q(V(B) - V(A))$$

Trabajo que debe realizar un agente externo para mover la carga:

$$W_{AB} = q(V(B) - V(A))$$

→ Distinto signo ya que se hace el trabajo contrario al requerido por el sistema.

Así, en este caso,

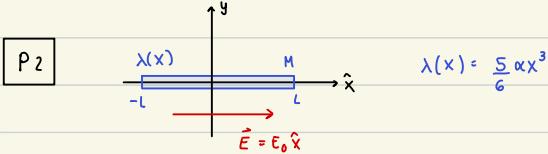
$$W_{AB} = q(V(B) - V(A))$$

$$W_{\hat{y} \rightarrow \hat{x}} = q(V(L, 0, 0) - V(0, L, 0)) ; \text{ calculado anteriormente: } \vec{p} \hat{z} \cdot \hat{ly} = 0$$

$$= q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 L^3} (\vec{p} \cdot \hat{r}) \right)$$

$$= q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 L^3} \left(\frac{8\pi b^3 \rho_0 Q}{3} \hat{z} \cdot \hat{lx} \right) ; \quad \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$$

$$W_{\hat{y} \rightarrow \hat{x}} = 0 //$$



a) Para una distribución continua será:

$$\vec{p} = \int d\vec{q}(\vec{r}') \cdot \vec{r}' \quad \text{si } \vec{r}' \text{ la posición de la carga.}$$

Si la posición de la carga es

$$\vec{r}' = x \hat{x}$$

como es una distribución lineal,

$$d\vec{q} = \lambda(x) dl = \frac{5}{6} \alpha x^3 dx$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \int_{-L}^L \left(\frac{5}{6} \alpha x^3 dx \right) \cdot (x \hat{x})$$

$$\vec{p} = \int_{-L}^L \frac{5}{6} \alpha x^4 dx \hat{x}$$

$$= \frac{5}{6} \alpha \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-L}^L \hat{x} = \frac{5}{6} \alpha \left[\frac{L^5}{5} - \frac{(-L)^5}{5} \right] \hat{x}$$

$$= \cancel{\frac{5}{6}} \alpha \cdot \cancel{2} \frac{L^5}{5} \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\alpha L^5}{3} \hat{x}}$$

b)



Queremos encontrar la freq. a partir de la ecuación del M.A.S.

Para obtener la ecuación de movimiento, teniendo la masq., podemos utilizar la ecuación:

$$\vec{\tau} = I \vec{\omega} \quad ; \quad \vec{\tau} : \text{torque}$$

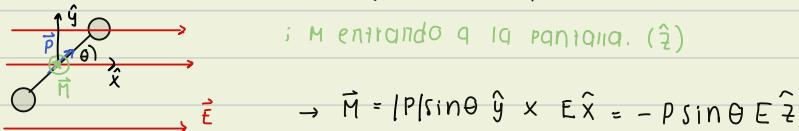
I : momento de inercia

$\vec{\omega}$: aceleración angular.

El momento de fuerzas (torque) está dado por:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = \vec{\tau}$$

Geométricamente, en presencia de un campo \vec{E} :



Extra:

Además, la energía del dipolo será

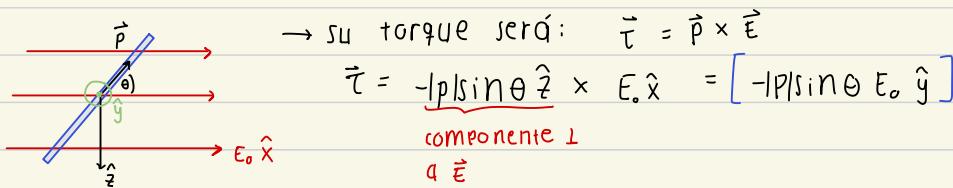
$$U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -|p|\cos\theta \hat{x} \cdot E \hat{x} = -|p|\cos\theta E$$

Así,

$$\vec{M} = -|p|\sin\theta E \hat{z} = -\frac{\partial U_e}{\partial \theta} \hat{z}$$

Análogamente, podemos mirar la barra desde arriba con el eje \hat{y} saliendo de la pantalla.

Si giramos la barra en un ángulo θ :



→ Además, por regla de la mano derecha, $[\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{y}]$

→ El momento de inercia de una barra alrededor de su centro será:

$$\left[I = \frac{M(2L)^2}{12} = \frac{ML^2}{3} \right]$$

Juntando lo anterior,

$$\vec{\tau} = I \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow -|p|\sin\theta E_0 \hat{y} = \frac{ML^2}{3} \cdot \ddot{\theta} \hat{y}$$

En este caso, \vec{p} ya no estará en \hat{x} sino que:

$$\vec{p} = \frac{\alpha L^5}{3} \cos\theta \hat{x} - \frac{\alpha L^5}{3} \sin\theta \hat{z}$$

pero su módulo será el mismo: $|p| = \frac{\alpha L^5}{3}$

$$\Rightarrow -\frac{\alpha L^5}{3} \sin\theta E_0 \hat{y} = \frac{ML^2}{3} \ddot{\theta}$$

para pequeñas oscilaciones $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \frac{ML^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{\alpha L^5}{3} E_0 \theta = 0 \quad / \frac{3}{ML^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha L^5 E_0}{ML^2} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{L^3 \alpha}{M} E_0}_{\omega_0^2} \theta = 0 \quad \Rightarrow \left[\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha L^3 E_0}{M}} \right] \text{ Obteniendo la freq. pedida. //}$$

$\omega_0^2 \rightarrow$ identificando la frecuencia del M.A.S.

Auxiliar 8

Antonio Cisternas
21.084.284-5

Ley de Gauss

- Flujo de campo \vec{E} a través de una superficie cerrada:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} ; \quad d\vec{s} = ds \hat{n} ; \quad \hat{n}: \text{vector normal a la superficie.}$$

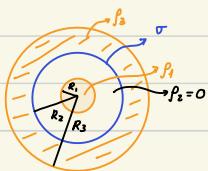
En su forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} \text{ tiene divergencia no nula}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{Ecación de Poisson}$$

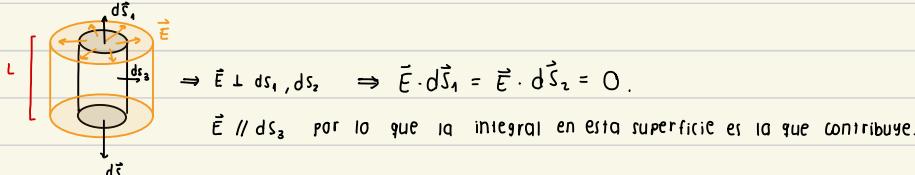
En el espacio vacío: $\nabla^2 V = 0 \rightarrow \text{Ecación de Laplace.}$

P1



- a) Encuentre el campo eléctrico en todo el espacio.

- Usando la ley de Gauss, podemos definir distintos cilindros que encierran distintas densidades de carga.
Debido a la simetría, se tiene que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$.
- Llamaré q_1 a la carga total en un cilindro de alto L y radio R_1 , q_2 a la carga total en una superficie de radio R_2 y altura L y q_3 a la carga total en el último cilindro desde R_2 hasta R_3 de alto L .
- Notamos que, al ser un cilindro:



para el primer volumen:

$$\begin{aligned} & r \leq R_1 \quad d\vec{s}_3 \equiv dS \hat{r} = r d\theta dz \hat{r} \rightarrow d \\ & \Rightarrow \int E(\vec{r}) \hat{r} \cdot dS \hat{r} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Como la Q_{enc} se distribuye en un volumen:

$$Q_{enc} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho_1 r dr d\theta dz$$

$$= \rho_1 \left[\frac{r^2}{2} \right] 2\pi L = \rho_1 \pi r^2 L$$



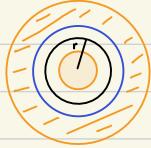
$$\Rightarrow \int_0^L \int_0^{2\pi} E(r) r dr dz = \frac{\rho_1 \pi r^2 L}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) \cancel{r \cdot 2\pi \cdot L} = \frac{\rho_1 r^2 \cancel{r^4} L}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho_1 r}{2\epsilon_0} \quad \Rightarrow \vec{E}(r \leq R_1) = \frac{\rho_1 r \hat{r}}{2\epsilon_0}$$

para el segundo volumen:

$$R_1 \leq r < R_2$$



$$Q_{enc} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^r \rho_1 r dr d\theta dz$$

$$= \rho_1 \left[\frac{R_1^2}{2} \right] \cdot 2\pi \cdot L = \boxed{\rho_1 R_1^2 \pi L \equiv q_1}$$

la carga encerrada llega a R_1 fijo!

Por ley de Gauss:

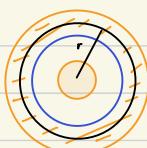
$$\int_0^L \int_0^{2\pi} E(r) r d\theta dz = \frac{\rho_1 R_1^2 \pi L}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) r \cancel{2\pi \cdot L} = \frac{\rho_1 R_1^2 \cancel{r^4} L}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho_1 R_1^2}{2r\epsilon_0} \quad \Rightarrow \vec{E}(R_1 \leq r < R_2) = \frac{\rho_1 R_1^2}{2r\epsilon_0} \hat{r}$$

para el tercer volumen:

$$R_2 < r < R_3$$



$$Q_{enc} = q_1 + \underbrace{\int_0^L \int_0^{2\pi} \sigma R_1 d\theta dz}_{\equiv q_2} + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^r \rho_3 r dr d\theta dz$$

la carga va desde R_3 a r !

$$= q_1 + \boxed{\sigma R_1 2\pi L} + \rho_3 \left[\frac{r^2 - R_2^2}{2} \right] \cancel{2\pi L} \equiv q_3$$

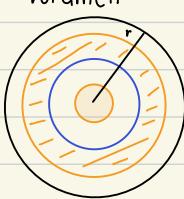
$$Q_{enc} = \rho_1 R_1^2 \pi L + \sigma R_1 2\pi L + \rho_3 (r^2 - R_2^2) \pi L$$

$$\Rightarrow E(r) r \cancel{\pi L} = \frac{\rho_1 R_1^2 \cancel{r^4} \cancel{\pi L} + \sigma R_1 \cancel{2\pi L} + \rho_3 (r^2 - R_2^2) \cancel{2\pi L}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(R_2 < r < R_3) = \frac{\rho_1 R_1^2}{2z} + \sigma R_1 + \frac{\rho_3 (r^2 - R_2^2)}{2z} \hat{r}$$

para el 4^{to} volumen:

$$R_3 \leq r$$



$$Q_{enc} = q_1 + q_2 + \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_3} \rho_3 r dr d\theta dz$$

$$= q_1 + q_2 + \underbrace{\rho_3 \left[\frac{R_3^2 - R_2^2}{2} \right]}_{\equiv q_3} \cancel{2\pi L}$$

$$Q_{enc} = \rho_1 R_1^2 \pi L + \sigma R_1 2\pi L + \rho_3 (R_3^2 - R_2^2) \pi L$$

$$\Rightarrow E(r) 2\pi r \cancel{L} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_1 R_1^2 \cancel{\pi L} + \sigma R_1 \cancel{2\pi L} + \rho_3 (R_3^2 - R_2^2) \cancel{\pi L} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r_3 \leq r) = \frac{1}{2r\epsilon_0} (\rho_1 R_1^2 + \sigma R_2 2 + \rho_3 (R_3^2 - R_2^2)) \hat{r}$$

* Notamos que \vec{E} no depende de l ya que es una altura arbitraria.

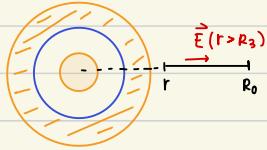
b) Encuentre el potencial eléctrico en todo el espacio.

- Si $V(R_0) = 0$ con $R_0 > R_3$ tomamos esto como referencia.

Se tiene que la dif. de potencial está dada por:

$$V(r) - V(R_0) = - \int_{R_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

para $r > R_3$



$$\Rightarrow V(r) - V(R_0) = - \int_{R_0}^r E(r > R_3) \cdot \hat{r} \cdot dl$$

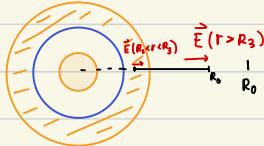
La única componente de $\vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ es cuando $dl = dr \Rightarrow d\vec{l} = dr\hat{r}$

$$\Rightarrow V(r) = - \int_{R_0}^r \frac{1}{2r\epsilon_0} (\rho_1 R_1^2 + \sigma R_2 2 + \rho_3 (R_3^2 - R_2^2)) dr$$

$$= - \frac{1}{2\epsilon_0} \underbrace{\left(\rho_1 R_1^2 + \sigma R_2 2 + \rho_3 (R_3^2 - R_2^2) \right)}_{C_1} \cdot \underbrace{\left[\ln(r) \right]_{R_0}^r}_{dr}$$

$$V(r > R_3) = - \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\rho_1 R_1^2 + \sigma R_2 2 + \rho_3 (R_3^2 - R_2^2) \right) \ln\left(\frac{r}{R_0}\right)$$

para $R_2 < r < R_3$



$$\Rightarrow V(r) = - \int_{R_3}^r E(R_2 < r < R_3) dr - \int_{R_0}^{R_3} E(r > R_3) dr$$

$\equiv C_1$

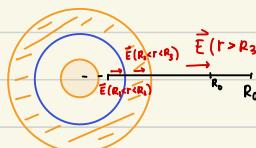
$$V(r) = - \int_{R_3}^r \left(\frac{\rho_1 R_1^2}{2r\epsilon_0} + \sigma R_2 + \frac{\rho_3 (r^2 - R_2^2)}{2r\epsilon_0} \right) dr - \underbrace{\frac{1}{2\epsilon_0} \left(\rho_1 R_1^2 + \sigma R_2 2 + \rho_3 (R_3^2 - R_2^2) \right) \ln\left(\frac{R_3}{R_0}\right)}_{C_1}$$

$$= - \int_{R_3}^r \frac{1}{r\epsilon_0} \left(\frac{\rho_1 R_1^2}{2} + \sigma R_2 - \frac{\rho_3 R_2^2}{2} \right) dr - \underbrace{\int_{R_3}^r \frac{r}{\epsilon_0} \frac{\rho_3}{2} dr + C_1}_{C_1}$$

$$= - \ln\left(\frac{r}{R_3}\right) \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\rho_1 R_1^2}{2} + \sigma R_2 - \frac{\rho_3 R_2^2}{2} \right) - \underbrace{\frac{\rho_3}{2\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_3}^r}_{C_1} + C_1$$

$$V(R_2 < r < R_3) = - \ln\left(\frac{r}{R_3}\right) \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\rho_1 R_1^2}{2} + \sigma R_2 - \frac{\rho_3 R_2^2}{2} \right) - \frac{\rho_3}{4\epsilon_0} (r^2 - R_3^2) + C_1$$

para $R_1 < r < R_2$



$$\Rightarrow V(r) = - \int_{R_0}^r E(r) dr = - \int_{R_2}^r E(R_1 < r < R_3) dr - \int_{R_3}^{R_2} E(r > R_3) dr - \int_{R_0}^{R_3} E(r > R_3) dr$$

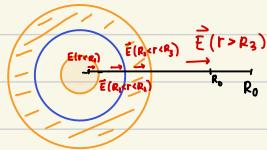
$\equiv C_2$

C_1

$$\Rightarrow V(r) = - \int_{R_2}^r \frac{\rho_1 R_1^2}{2\epsilon_0 r} dr - \underbrace{\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\rho_1 R_1^2}{2} + \sigma R_2 - \frac{\rho_3 R_2^2}{2} \right) - \frac{\rho_3}{4\epsilon_0} (R_2^2 - R_3^2)}_{\equiv C_2} + C_1$$

$$V(R_1 < r < R_3) = - \frac{\rho_1}{2\epsilon_0} R_1^2 \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + C_2 + C_1$$

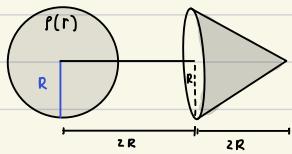
para $r < R_1$



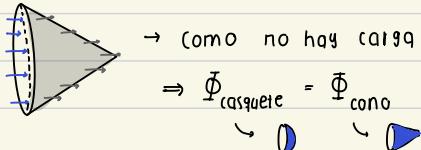
$$\begin{aligned} V(r) &= - \int_{R_1}^r E(r < R_1) dr - \int_{R_2}^{R_1} E(R_2 < r < R_3) dr - \int_{R_3}^{R_2} E(R_2 < r < R_3) dr - \int_{R_3}^{\infty} E(r > R_3) dr \\ &= - \underbrace{\int_{R_1}^r \frac{\rho_1 r}{2\epsilon_0} dr}_{\equiv C_3} - \frac{\rho_1 R_1^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \underbrace{C_2}_{\equiv C_3} + C_1 \end{aligned}$$

$$V(r < R_1) = - \frac{\rho_1}{2\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right) + C_3 + C_2 + C_1 //$$

P3



- calcular el flujo sobre la base del cono es igual a calcular el flujo sobre el casquete de la base del cono.
- Notamos que aunque el cono tenga + área, las componentes perpendiculares a \vec{E} se cancelan.



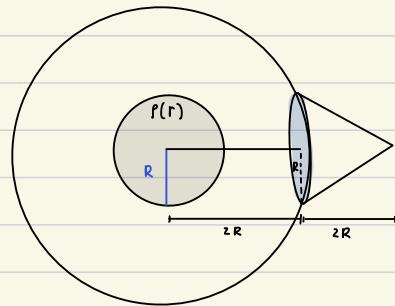
→ Como no hay carga dentro del cono, el flujo neto es 0.

$$\Rightarrow \Phi_{\text{casquete}} = \Phi_{\text{cono}}$$

↔ 0 ↔ 0

Así, podemos calcular el flujo del casquete Φ_{cas} y obtener Φ_{cono}

Luego, calculando el flujo total por una esfera de radio $2R$:



$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \Phi_{\text{tot}} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho(r) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho_0 \frac{r}{R} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0 R} 2\pi \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0 R} \cdot 4\pi \frac{R^3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi_{\text{tot}} = \frac{\rho_0 R^3 \pi}{\epsilon_0}}$$

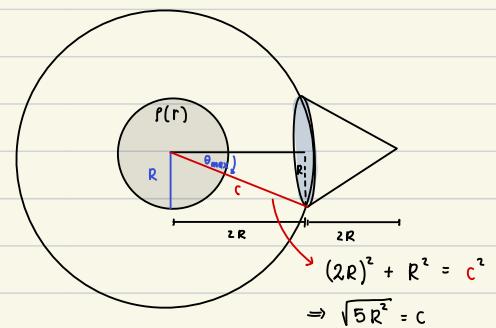
El flujo del casquete será una fracción del total.

$$\Phi_{\text{cas}} = \frac{\Phi_{\text{tot}}}{A_{\text{tot}}} \cdot \underbrace{A_{\text{cas}}}_{\text{proporción de las áreas.}}$$

Para sacar el área del casquete, integramos en diferencial de superficie: $ds = \sqrt{(5r^2)^2} \sin\theta d\theta d\phi$

$$\begin{aligned} \rightarrow A_{\text{cas}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}} (5r^2) \sin\theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi \cdot 5R^2 \int_0^{\theta_{\max}} \sin\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

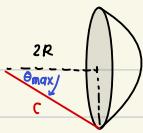
$$= 10\pi R^2 \left[-\cos\theta \right]_0^{\theta_{\max}} = 10\pi R^2 \left[-\cos\theta_{\max} + 1 \right]$$



Luego, utilizando razones trigonométricas:

$$c \cdot \cos \theta_{\max} = 2R$$

$$\Rightarrow \cos \theta_{\max} = \frac{2R}{c \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



$$\rightarrow A_{cas} = 10 \pi R^2 \left[-\frac{2}{\sqrt{5}} + 1 \right]$$

calculando el área de la esfera virtual:

$$\rightarrow A_{tot} = \underbrace{4\pi (R\sqrt{5})^2}_{\text{área de la esfera: } 4\pi r^2} = 4\pi R^2 \cdot 5$$

$$\Rightarrow \Phi_{cas} = \Phi_{tot} \cdot \frac{A_{cas}}{A_{tot}} = \frac{\rho_0 R^3 \pi}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\therefore \Phi_{cono} = \frac{\rho_0 R^3 \pi}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad //$$

Auxiliar 12

Antonio Cisternas
21.084.284-5

conductores \rightarrow gás de e^- libres

dieleéctricos (aislantes) $\rightarrow e^-$ ligados a los átomos

Dieleéctricos

- susceptibilidad eléctrica χ_e nos dice qué tan susceptible es un medio material a polarizarse.

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$$

permitividad: capacidad de un material para almacenar energía eléctrica.

- vector polarización \vec{P} \rightarrow momento dipolar por unidad de volumen.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) (\epsilon(\vec{r}) - \epsilon_0)$$

densidad superficial de carga de polarización $\rightarrow \sigma_p = \frac{\hat{n} \cdot \vec{P}}{|\vec{r}|}$

normal que sale del dielectro

densidad volumétrica de carga de polarización $\rightarrow \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$

- vector desplazamiento eléctrico \vec{D}

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}$$

carga libre $\rightarrow Q_l = \oint \vec{D} \cdot d\vec{s}$

densidad volumétrica libre $\rightarrow \rho_l = \nabla \cdot \vec{D}$

densidad vol. total

$$\frac{\rho_T}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E}$$

condiciones de Borde

- componentes tangenciales: $E_{1t} = E_{2t}$

$$\epsilon_2 D_{1t} = \epsilon_1 D_{2t}$$

- componentes normales: $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_l$

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma_l$$

* Tip:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \underbrace{\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}}_{\rho_T} + \underbrace{\nabla \cdot \vec{P}}_{\rho_p}$$

$$\rho_l = \rho_{tot} - \rho_p$$

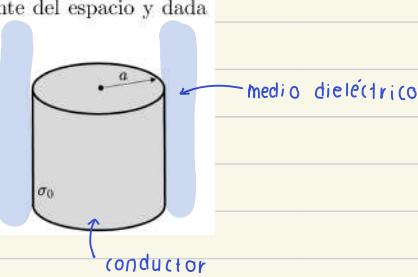
Energía electrostática: $U_e = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV$.

[P1]

Se tiene un cilindro infinito y sólido de radio a , hecho de un material conductor perfecto. El cilindro está cargado de modo que su densidad de carga superficial es σ_0 . El gas que rodea al cilindro constituye un medio dieléctrico con constante dieléctrica dependiente del espacio y dada por $\epsilon(\rho) = \epsilon_0(1 + a/\rho)$, donde ρ es la distancia al eje del cilindro.

Encuentre:

- La densidad de carga superficial de polarización en el medio dieléctrico en $\rho = a$. [2 ptos.]
- La densidad de carga volumétrica de polarización en el medio dieléctrico para $\rho > a$. [2 ptos.]
- El campo eléctrico $\vec{E}(\rho)$ para todo ρ . [2 ptos.]



a) Para calcular σ_p debemos encontrar \vec{p} .

$$\sigma_p = \hat{n} \cdot \vec{p}$$

se tiene que la normal a la superficie del dielectro es $-\hat{r} = \hat{n}$

como se tiene la densidad de carga libre σ_0 , calculamos \vec{D} .

$$\begin{aligned} \text{Si } \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{p} \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \left[\vec{D} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) = \vec{p} \right] \end{array} \right.$$

Luego, $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{enc}$.

si nuestra superficie es un cilindro de radio $r > a$ y altura L .

* Para $r < a \Rightarrow Q_{enc} = 0$ ya que la carga en el condensador se encuentra en la superficie.

Por simetría, $\vec{D} = D(r) \hat{r}$

$$\Rightarrow \int_0^L \int_0^{2\pi} D(r) r d\theta dz = \int_0^L \int_0^{2\pi} \sigma_0 q d\theta dz$$

$$\Rightarrow D(r) r \cancel{2\pi} = \sigma_0 q \cancel{2\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{\sigma_0 q}{r} \hat{r}$$

Luego,

$$\vec{p} = \frac{\sigma_0 q}{r} \left(\frac{\epsilon(r) - \epsilon_0}{\epsilon(r)} \right) \hat{r} = \frac{\sigma_0 q}{r} \left(\frac{\epsilon_0(1 + q/r) - \epsilon_0}{\epsilon_0(1 + q/r)} \right) \hat{r}$$

$$\vec{p} = \frac{\sigma_0 q}{r} \left(\frac{q/r}{1 + q/r} \right) \hat{r}$$

Así,

$$\sigma_p = \hat{n} \cdot \vec{p} \Big|_{r=a} = - \frac{\sigma_0 q}{r} \left(\frac{q/r}{1 + q/r} \right) \Big|_{r=a}$$

Así, en $r = a$:

$$\sigma_p = - \sigma_0 \left(\frac{1}{1+1} \right) = - \frac{\sigma_0}{2}$$

b) La densidad de carga volumétrica de polarización está dada por:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\text{Así, } -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sigma_0 q^2}{r^2} \left(\frac{1}{1+q/r} \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{r} \sigma_0 q^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r+q} \right)$$

$$= -\frac{\sigma_0 q^2}{r} \left[-\frac{1}{(r+q)^2} \right]$$

$$= \frac{\sigma_0 q^2}{r(r+q)^2} = \rho_p //$$

c) como el cilindro del centro es conductor, para $r < a$, $\vec{E}(r) = 0$.

• Para $r > a$:

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\epsilon(r)} = \frac{\sigma_0 q}{r} \frac{1}{\epsilon_0(1+q/r)} \hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma_0 q}{\epsilon_0(r+q)} \hat{r} //$$

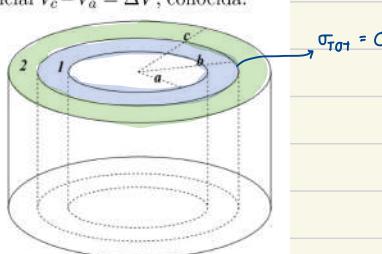
Dos superficies cilíndricas de largo infinito y de radios a y c ($a < c$) contienen una densidad superficial de carga libre tal que entre ellas hay una diferencia de potencial $V_c - V_a = \Delta V$, conocida.

El espacio entre estas dos superficies está lleno con dos materiales dieléctricos separados por una interfaz cilíndrica de radio b . Estos materiales tienen constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 , respectivamente, y se sabe que la densidad de carga total en esa interfaz es nula.

a) Muestre que la densidad volumétrica de carga de polarización es cero en ambos dieléctricos.

→ b) Encuentre la densidad superficial de carga total sobre el cilindro de radio a .

→ c) Encuentre la densidad superficial de carga libre que debe haber en la interfaz entre los dos dieléctricos.



d) En b se tiene que:

$$\text{como } \sigma_{tot,b} = \sigma_{lb} + \sigma_{pb} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{pb} = -\sigma_{lb} \text{ del medio 1.}$$

$$\text{luego, } \sigma_{pb} = \sigma_{p1b} + \sigma_{p2b} \text{ de ambos dieléctricos.}$$

$$\text{Queremos obtener } \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

$$\text{Si se sabe que } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \rightarrow \vec{P} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \vec{D}$$

se tiene que en a y c hay densidades superficiales de carga libre σ_{la} y σ_{lc} respectivamente.

Utilizando la ley de Gauss para \vec{D} , creamos una superficie de Gauss cilíndrica de altura L .

* para un cilindro de radio $r < a$, la carga libre encerrada

es 0 ya que solo hay carga en la superficie.

• Para $a < r < b$:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L D(r) r d\theta dz = \int_0^{2\pi} \int_0^L \sigma_{la} q d\theta dz$$

$$\rightarrow D(r) r 2\pi L = \frac{Q_{eq}}{\sigma_{eq} a 2\pi L}$$

$$\rightarrow \vec{D}_1 (a < r < b) = \frac{\sigma_{eq} a}{r} \hat{r} \quad \rightarrow \text{en el vol. 1}$$

Para $b < r < c$

$$D(r) \cdot r 2\pi L = \frac{Q_{eq} a 2\pi L}{\sigma_{eq} a} + \int_0^L \int_0^{2\pi} \sigma_{eb} b d\theta dz$$

$$\rightarrow D(r) \cdot r 2\pi L = \frac{Q_{eq}}{\sigma_{eq} a 2\pi L} + \frac{Q_{eb}}{\sigma_{eb} b 2\pi L}$$

$$\rightarrow \vec{D}_2 (b < r < c) = \frac{\sigma_{eq} a + \sigma_{eb} b}{r} \hat{r} \quad \rightarrow \text{en el vol. 2}$$

$$\text{Luego, } \vec{P}_1 = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right) \frac{\sigma_{eq} a}{r} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{P}_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r P_r \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \underbrace{\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right) \frac{\sigma_{eq} a}{r}}_{cte} \right)$$

$$\Rightarrow -\nabla \cdot \vec{P}_1 = \rho_{p1} = 0$$

$$\text{Análogamente, } \vec{P}_2 = \frac{\sigma_{eq} a + \sigma_{eb} b}{r} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right) \hat{r}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{P}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\sigma_{eq} a + \sigma_{eb} b}{r} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right) \right)$$

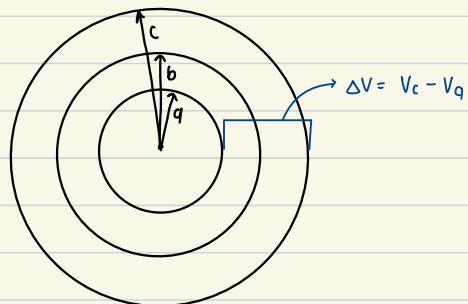
$$\Rightarrow -\nabla \cdot \vec{P}_2 = \rho_{p2} = 0 //$$

b) Podemos escribir ΔV en función de \vec{E} el cuál se escribe

se tiene que en a y c hay densidades superficiales de carga libre σ_{eq} y σ_{ec} respectivamente, tal que hay una d.d.p:

$$\Delta V = V_c - V_q = - \int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \left[\int_a^b E_1(r) dr + \int_b^c E_2(r) dr \right]$$

como $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, de a) se tiene que,



$$\rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_{eq} a}{r \epsilon_1} \hat{r}$$

$$\rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} = \frac{\sigma_{eq} a + \sigma_{eb} b}{r \epsilon_2} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \Delta V = - \left[\int_a^b \frac{\sigma_{eq} a}{r \epsilon_1} dr + \int_b^c \frac{\sigma_{eq} a + \sigma_{eb} b}{r \epsilon_2} dr \right]$$

$$\Delta V = - \left[\frac{\sigma_{eq} a}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\sigma_{eq} a + \sigma_{eb} b}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right]$$

Despejando σ_{lb} :

$$\Rightarrow \Delta V + \frac{\sigma_{eq} Q}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\sigma_{eq} Q}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) = -\frac{\sigma_{lb} b}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \quad / \cdot -\frac{\epsilon_2}{b} \frac{1}{\ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

$$\Rightarrow -\left(\Delta V + \frac{\sigma_{eq} Q}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) \frac{\epsilon_2}{b \ln\left(\frac{c}{b}\right)} - \frac{\sigma_{eq} Q}{b} = \sigma_{lb} b$$

* Depende de σ_{eq} el cuál será calculado en la parte c.

c)

En el cilindro de radio a , hay una densidad superficial total:

$$\sigma_{tot,q} = \underbrace{\sigma_{eq}}_{\substack{\text{libre} \\ \text{en } a}} + \underbrace{\sigma_{pq}}_{\substack{\text{de polarización} \\ \text{en } a}}$$

Además, se tiene que $\sigma_{pq} = -\sigma_{pb}$, → Tendrá signo contrario a la densidad de polarización en b del mismo medio 1.

Aplicando la ley de Gauss para \vec{E} al igual que como se hizo con \vec{D} :

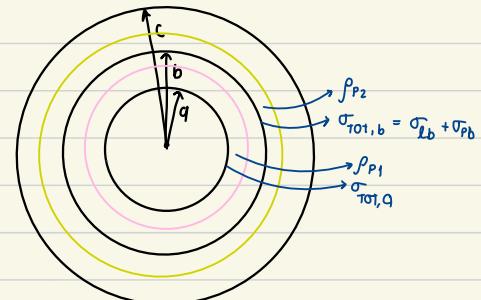
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

para $a < r < b$

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} E_1(r) r d\theta dz = \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^b \sigma_{tot,q} a d\theta dz + \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_{p1} dV \quad (\text{parte a})$$

$$\rightarrow E_1(r) r 2\pi L = \frac{\sigma_{tot,q} a 2\pi L}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \vec{E}_1(r) = \frac{\sigma_{tot,q} a}{\epsilon_0 r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{eq} Q}{\epsilon_1 r} = \frac{\sigma_{tot,q} a}{\epsilon_0 r} \quad (1)$$



para $b < r < c$

$$\cdot E_2(r) r \cdot 2\pi L = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\sigma_{tot,q} a 2\pi L + \int \rho_{p1} dV + \int \sigma_{tot,b} \cdot b \cdot d\theta dz + \int \rho_{p2} dV \right] \quad (\text{enunciado})$$

$$\rightarrow \vec{E}_2(r) = \frac{\sigma_{tot,q} a \cdot Q}{\epsilon_0 r} \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{eq} Q}{\epsilon_2 r} + \frac{\sigma_{lb} b}{\epsilon_2} = \frac{\sigma_{tot,q} a}{\epsilon_0 r} \quad (2)$$

Juntando (1) y (2):

$$\frac{\sigma_{eq} Q + \sigma_{lb} b}{\epsilon_2} = \frac{\sigma_{eq} Q}{\epsilon_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{lb} b}{\epsilon_2} = \sigma_{eq} Q \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{lb} = \frac{\sigma_{eq} Q}{b} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 \right)$$

Juntando las expresiones para σ_{lb}

$$-\left(\Delta V + \frac{\sigma_{eq} q}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) \frac{\epsilon_2}{b \ln(\gamma_b)} - \frac{\sigma_{eq} q}{b} = \frac{\sigma_{eq} q}{b} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow -\left(\Delta V + \frac{\sigma_{eq} q}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) \frac{\epsilon_2}{\ln(\gamma_b)} = \sigma_{eq} q \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

$$\Rightarrow -\frac{\Delta V}{\ln(\gamma_b)} = \sigma_{eq} q \frac{1}{\epsilon_1} \underbrace{\left(1 + \frac{\ln(b/a)}{\ln(\gamma_b)}\right)}_{\frac{\ln(\gamma_b) + \ln(b/a)}{\ln(\gamma_b)}} = \frac{\ln(\gamma_a)}{\ln(\gamma_b)}$$

$$\Rightarrow -\frac{\Delta V}{\ln(\gamma_b)} \frac{\epsilon_1}{q} \frac{\ln(\gamma_b)}{\ln(\gamma_a)} = \sigma_{eq}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\Delta V}{q \ln(\gamma_a)} \frac{\epsilon_1}{\ln(\gamma_q)}} = \sigma_{eq}$$

Así, de (1):

$$\sigma_{tot,q} = \frac{\sigma_{eq}}{\epsilon_1} = \frac{-\Delta V}{q \ln(\gamma_q)}$$

b) * Volviendo a la parte b), la expresión final para σ_{lb} es:

$$\sigma_{lb} = \frac{-\Delta V}{q \ln(\gamma_q)} \cdot \frac{q}{b} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 \right)$$

$$\sigma_{lb} = \frac{-\Delta V}{\ln(\gamma_q) b} (\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

Auxiliar 13

Antonio Cisternas
21.084.284-5

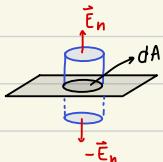
Herramientas que usaremos en el aux. y algunas cosas extras:

Conductor

- $\vec{E} = 0$ dentro del conductor.
- Carga se acumula en la superficie (densidad de carga vol. $\rho = 0$)
- Para una superficie conductora:

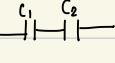
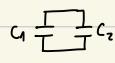
Por ley de Gauss:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} dA - \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow E_n + E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

Condensador

- Capacidad: $C = \frac{Q}{|\Delta V|} \rightarrow$ sólo depende de la geometría del condensador (si ΔV aumenta, Q también aumentará).
- Capacidad equivalente condensadores en serie: $C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} \rightarrow$ 
- Capacidad equivalente condensadores en paralelo $C_{eq} = C_1 + C_2 \rightarrow$ 

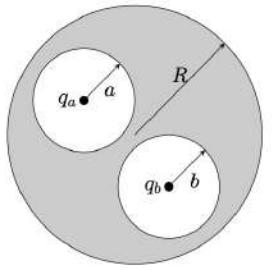
Dielectricos

- Energía electrostática: $U_e = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV$.

P1

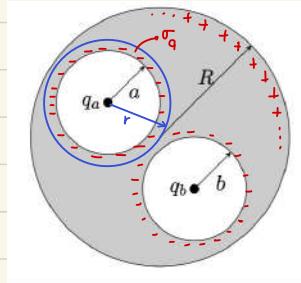
Dos cavidades esféricas, de radios a y b se encuentran dentro de una esfera conductora (neutra) de radio R . En el centro de cada cavidad se coloca una carga puntual, q_a y q_b para las cavidades de radio a y b , respectivamente. Encuentre:

- Las densidades de carga superficiales en los radios a , b y R .
- El campo para $r > R$.
- La fuerza que ejerce q_a sobre q_b .



q) se sabe que dentro de un conductor, $\vec{E} = 0$.

Esto quiere decir que si tomamos una superficie de Gauss esférica de radio $r > a$:



por ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{enc} = 0$$

Así, notamos que la carga distribuida en la superficie $\iint \sigma_q dS + q_a = Q_{enc} = 0$

$$\Rightarrow q_a = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma_q a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$q_a = -\sigma_q a^2 4\pi$$

$$\Rightarrow -\frac{q_a}{4\pi a^2} = \sigma_q \rightarrow \text{la carga total en esa superficie es } -q_a$$

Análogamente, para el radio b ,

$$\sigma_b = -\frac{q_b}{4\pi b^2} \rightarrow \text{la carga total en esa superficie es } -q_b$$

Finalmente, notamos que si el conductor no está cargado, la carga total del conductor debe ser 0 ya que no está cargado. Así, se van a distribuir las cargas de las superficies de las cavidades:

$$\begin{aligned} -q_a - q_b + q_R &= 0 \\ \Rightarrow q_a + q_b &= \iint_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma_R R^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ \Rightarrow \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2} &= \sigma_R \end{aligned}$$

b) El campo para $r > R$, lo calculamos con la ley de Gauss. Por simetría, $\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{E}(r) \cdot \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{q_a + q_b}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) r^2 \cdot 4\pi = \frac{q_a + q_b}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q_a + q_b}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$

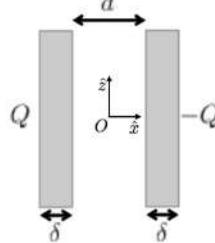
//

- c) $F_{q \rightarrow b} = 0$ ya que, dado que el conductor entre las cavidades tiene un campo $\vec{E} = 0$, no hay líneas de campo que conecten q_a con el interior de la cavidad de q_b .
 Se puede decir que la densidad superficial del conductor "apantalla" las líneas de campo de la carga q_a .

b)

En un instante inicial $t = 0$, dos placas conductoras perfectas de grosor δ , área A y masa M , se encuentran en reposo a una distancia d y contienen cargas Q y $-Q$, respectivamente (como indica la figura). El medio que rodea las placas es un gas con constante dielectrífica homogénea ϵ . Ignorando efectos de borde, encuentre:

- a) La diferencia de potencial V entre la placa cargada con carga positiva Q y la placa con carga $-Q$ en $t = 0$. [2 ptos.]
 b) Si para $t > 0$ las placas pueden moverse libremente ¿con qué rapidez v se moverán justo antes de chocar entre sí? [2 ptos.]
 c) Ahora sin ignorar los efectos de borde, encuentre en $t = 0$ el potencial electrostático producido por las placas en un punto muy alejado de ellas. Es decir, un punto cuyo vector posición \vec{r} con respecto al origen O de la figura cumple $||\vec{r}|| \gg d$. Exprese su respuesta en términos de Q , ϵ , \vec{r} , d y \hat{x} , y use la convención $V = 0$ en el infinito. [2 ptos.]

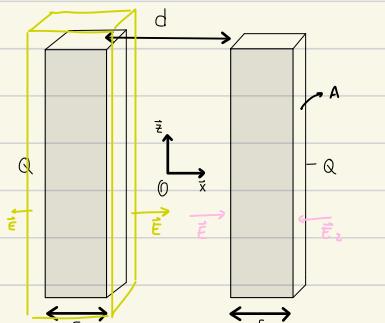


q) Si hay un medio dielectrífico entre ellas, el potencial se verá disminuido debido al dielectrífico.

Por simetría, $\vec{E} = E(x)\hat{x}$

$$\Delta V = V_Q - V_{-Q} = V_{d/2} - V_{-d/2} \\ = \int_{-d/2}^{d/2} E(x)\hat{x} \cdot \hat{x} dx = \int_{-d/2}^{d/2} E(x)dx.$$

El campo en el dielectrífico se puede determinar a partir del principio de superposición:



Para la carga de la derecha:

como $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{D} = D(x)\hat{x}$

$$\int \vec{D} \cdot dA = Q \rightarrow \text{carga libre encerrada.}$$

$$\Rightarrow \iint D(x)\hat{x} \cdot dz dy \hat{x} + \iint (-D(x)\hat{x}) \cdot dz dy (-\hat{x}) = Q$$

$$\Rightarrow 2D(x) \underbrace{\iint dz dy}_{A} = Q$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2A}\hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \frac{Q}{2\epsilon A}\hat{x}}$$

Para la carga de la derecha, es análogo:

$$\Rightarrow 2 \iint D(x)\hat{x} \cdot dz dy (-\hat{x}) = -Q$$

$$\Rightarrow -2D(x) \cdot A = -Q$$

$$\Rightarrow \vec{D}_2(x) = \frac{Q}{2A}\hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \frac{Q}{2\epsilon A}\hat{x}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q}{\epsilon A}\hat{x}$$

$$\text{Luego, } \Delta V = \int_{-d/2}^{d/2} E(x) dx = \frac{Q}{\epsilon A} \cdot d = V$$

* como no hay caídas de potencial en un conductor, el espesor δ no afecta.

b) La energía electrostática está dada por:

$$U_e = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

Así, la energía almacenada en el capacitor paralelo será:

$$U_e = \frac{1}{2} \int \int \int \frac{Q^2}{\epsilon A^2} dx dy dz$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon A^2} \cdot \underbrace{\int \int dx dy}_{A} \underbrace{\int dz}_{d}$$

$$(U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon A})$$

· cuando las placas chocan, $U_e \rightarrow 0$ (no hay separación entre ellas)

· como parten en reposo, la energía inicial $E_{ini} = U_e$

· justo antes de chocar, la energía será $E_{fin} = \left(\frac{M v_{fin}^2}{2} \right) \cdot \underbrace{\frac{2}{z}}_{2 \text{ placas}}$.

· Por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon A} = M v_{fin}^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{Q^2 d}{2 \epsilon A M}} = v_{fin}$$

c) A grandes distancias, incluyendo los efectos de borde, se tiene la aproximación dipolar.

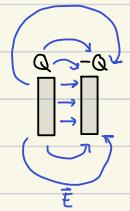
Habiendo calculado antes el potencial en esta aproximación:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi \epsilon r^2}$$

→ medio dieléctrico.

momento dipolar apunta desde la carga (-) a la (+).

En el cuál \vec{p} es el momento dipolar: $\vec{p} = \underbrace{-Q \cdot d \hat{x}}_{\text{distancia entre ambas cargas.}}$



$$\Rightarrow V(\vec{r}) = - \frac{Q d (\hat{x} \cdot \hat{r})}{4\pi \epsilon r^2}$$

Auxiliar 14

REPASO CONTROL 1

Un disco delgado con un agujero circular en el centro, tiene un radio interior R_1 y un radio exterior R_2 . El disco tiene una densidad superficial de carga uniforme y positiva σ en su superficie.

- Determine la carga eléctrica total del disco.
- El disco se encuentra en el plano yz , con su centro en el origen. Para un punto arbitrario en el eje x (el eje de simetría del disco), encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico.
- Una partícula con masa m y carga negativa $-q$ tiene libertad de movimiento a lo largo del eje x (pero no puede apartarse del eje). Originalmente, la partícula está en reposo en $x = 0,01R_1$ y luego se libera. Encuentre la frecuencia de oscilación de la partícula.

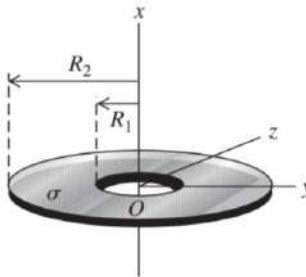


Figura 1: Disco cargado uniforme de radio interno R_1 y radio externo R_2 .

a) PARA calcular la carga eléctrica total del disco, integramos la densidad de carga superficial sobre toda la superficie.

$$\rightarrow Q = \int \sigma dS = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \sigma r dr d\theta = \sigma \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2} \cdot 2\pi = \boxed{\sigma (R_2^2 - R_1^2) \pi = Q}$$

b) Calculamos el campo por definición:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \cdot \underline{dS}$$

\hookrightarrow distribución de la carga.

En el cuál \vec{r} : posición donde queremos calcular el campo.

\vec{r}' : posición de la distrib. de carga.

* Llamamos al eje $x = z$ para tener el eje de coordenadas polares.

Así, si queremos calcular \vec{E} en un punto en el eje \hat{z} , $\vec{r} = z\hat{z}$

$$\vec{r}' = r\hat{r}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{z\hat{z} - r\hat{r}}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \sigma r dr d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{z\hat{z}}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \sigma r dr d\theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r\hat{r}}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \sigma r dr d\theta \\ &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} z \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dr \hat{z} \end{aligned}$$

$\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \rightarrow \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0$

C.V. $\frac{1}{z} = \tan x \rightarrow dz = \sec^2 x dx$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rightarrow \arctan\left(\frac{R_2}{z}\right) = x_2$$

$$\rightarrow \arctan\left(\frac{R_1}{z}\right) = x_1$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z \tan x}{z^2 (1 + \tan^2 x)^{3/2}} \sec^2 x dx \hat{z} \\ &= \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\tan x \sec^2 x}{\sec^3 x} dx \hat{z} \\ &= \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\tan x}{\sec x} dx = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\cos x} \right]_{x_1}^{x_2} \arctan\left(\frac{R_2}{z}\right) \hat{z} \end{aligned}$$

$$*\cos(\arctan(a)) = \frac{\sin(\arctan(a))}{\tan(\arctan(a))} = \frac{\sin(\arctan(a))}{a}$$

como $\cos^2 + \sin^2 = 1$

$$\Rightarrow \cos^2(\arctan(a)) a^2 + \cos^2(\arctan(a)) = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2(\arctan(a)) (1 + a^2) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\arctan(a)) = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}}$$

Así,

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-\sqrt{\frac{1}{1+(\frac{R_2}{z})^2}} + \sqrt{\frac{1}{1+(\frac{R_1}{z})^2}} \right] \hat{z}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R_2^2}} \right] \hat{z}$$

c) Queremos la ec. de mov. para la partícula $-q$.

$$\text{Si } \vec{F}_{\text{eléctrica}} = (-q) \vec{E}$$

Como sólo se mueve en el eje z :

$$\Rightarrow m\ddot{z} = -q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R_2^2}} \right]$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{q\sigma}{2\epsilon_0 m} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R_2^2}} \right] = 0$$

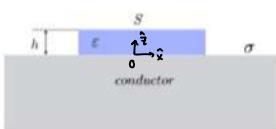
para pequeñas oscilaciones, si $x \ll R_1 < R_2$

$$\approx \ddot{z} + \underbrace{\frac{q\sigma}{2\epsilon_0 m} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]}_{\omega^2} z = 0$$

∴ la frecuencia de oscilación será:

$$\omega = \sqrt{\frac{q\sigma}{2\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

Un bloque dieléctrico, de constante ϵ , espesor h y superficie $S \gg h$, está en contacto con una superficie plana conductora que tiene una densidad superficial de carga σ , uniforme, como se indica en la figura. Efectos de borde son despreciables.



- a) Calcular el campo eléctrico en todo el espacio.
- b) Calcular las densidades superficiales de carga de polarización en las superficies del dieléctrico.
- c) ¿Cómo cambian las respuestas para los casos a) y b) si el bloque dieléctrico se mueve una distancia $d \ll h$ desde el plano conductor? ¿Cómo depende de d la energía electrostática del sistema? ¿Hay una fuerza entre el bloque y el conductor?

a) Por simetría, como $S \gg h$, el campo $\vec{E}(r) = E(z) \hat{z}$
 → se puede suponer que no habrá cargas superficiales significativas en las caras pequeñas de altura h y por lo tanto no habrá un campo con dirección en \hat{x} ni \hat{y} .

Así, se sabe que el campo dentro del conductor $\vec{E}(z) = 0$.

Fuera del conductor, por ley de Gauss

$$\begin{aligned} &\text{Diagrama: conductor con campo } \vec{E}_v(z) \text{ y campo dentro } \vec{E}_d(z) = 0. \\ &\rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma dA \\ &\rightarrow \iint E_v(z) \hat{z} \cdot \hat{z} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma dA \\ &E_v \cdot \underbrace{\iint dA}_{S} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \underbrace{\iint dA}_{\text{superficie.}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_v(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}, \text{ para } z > h \rightarrow E \text{ en el vacío}$$

Además, como en el dielectrónico no hay cargas libres, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e = 0$

Luego, si $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial E(z)}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow E(z) = \text{cte} \rightarrow \text{Dentro del dielectrónico.}$

Aplicando condiciones de borde en la interfaz entre el dielectrónico y el conductor:

$\rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma_e$

\downarrow componente normal en el conductor (\hat{z})
en el dielectrónico.

* PARA no confundirse con los signos:

$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_e$

normal que apunta hacia el medio 2.

Como el conductor solo tiene cargas libres: $\sigma_e = \frac{\sigma}{\epsilon}$ del enunciado.

$\rightarrow D_d - \cancel{D_e} = \sigma$
 σ ($E=0$ en el conductor)

$\rightarrow D_d \hat{z} = \sigma \hat{z}$

$\vec{D}_d = \sigma \hat{z}$

$\rightarrow \epsilon \vec{E}_d = \sigma \hat{z}$

$\rightarrow \vec{E}_d = \frac{\sigma}{\epsilon} \hat{z}$

A sí,

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon}, & 0 < z < h \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}, & z > h \end{cases}$$

* Podemos comprobar lo anterior utilizando condiciones de borde para la cara en $z=h$:

$D_{vacío} - D_d = 0$ $\cancel{D_d}$ no hay carga libre en esa superficie.

$\Rightarrow \epsilon_0 E_v - \epsilon E_d = \sigma$

$\Rightarrow \epsilon_0 \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \epsilon \frac{\sigma}{\epsilon} = \sigma \checkmark$

b) Podemos calcular el vector polarización:

$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\sigma}{\epsilon} \hat{z}$

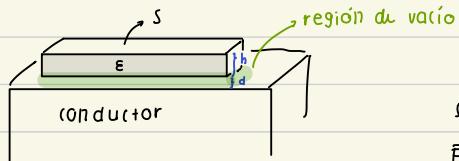
Luego, para la superficie en $z=h$:

$\vec{P} \cdot \hat{n} = \sigma_{p+} \Rightarrow (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\sigma}{\epsilon} = \sigma_{p+}$

Para la sup. en $z=0$

$\vec{P} \cdot (-\hat{z}) = \sigma_{p-} \Rightarrow -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{\sigma}{\epsilon} = \sigma_{p-}$

c) Si el bloque se mueve a una distancia $d \ll h$ desde el plano conductor.



Al igual que para la parte a), el campo en $0 < z < h$ será el campo en el vacío producido por un conductor.

$$E_v(0 < z < d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$$

Al igual que antes, esto ocurre para $h-d \ll S$ y como $d \ll h$ se puede suponer que $\vec{E}(r) = E(z) \hat{z}$.

Aplicando las condiciones de borde análogas a la parte a),

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}, & 0 < z < d \\ \frac{\sigma}{\epsilon}, & d < z < h \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}, & h < z \end{cases}$$

Así, las densidades de carga de polarización se mantienen iguales en el dielectrónico (E_d se mantiene).

En un sistema entre un conductor y un dielectrónico se genera una energía electrostática por la interacción entre las cargas libres del conductor y las cargas ligadas inducidas en el dielectrónico.

Ahora, esta energía electrostática está dada por:

$$U_{ev} = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

\downarrow volumen entre el conductor y el dielectrónico.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int \int \int \vec{E}_v \cdot \vec{D}_v dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int \int \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} \cdot \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} \right) \hat{z} dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \underbrace{\iint dx dy}_{S} \int_0^d dz \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{superficie de la placa.} \end{aligned}$$

$$U_{ev} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \cdot S \cdot d$$

La energía electrostática dentro del dielectrónico será:

$$\begin{aligned} U_{ed} &= \frac{1}{2} \int \int \int \vec{E}_d \cdot \vec{D}_d dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int \int \int \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \hat{z} \right) \cdot \left(\epsilon \frac{\sigma}{\epsilon} \hat{z} \right) dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} \iint_S dx dy \int_d^h dz \end{aligned}$$

$$U_{ed} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} S (h-d) \approx \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} S h \quad ; \text{ con } h \gg d.$$

Así, la energía potencial electrostática total del sistema será:

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} S d + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} S h$$

por último, la fuerza eléctrica será,

$$\vec{F}_e = -\nabla U_e$$

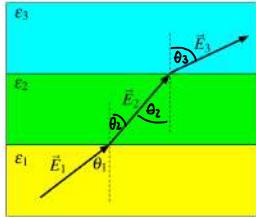
$$= -\frac{\partial U_e}{\partial d}$$

$$\vec{F}_e = \boxed{-} \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} S \hat{z}$$

el conductor hace que el dielectrónico se acerque a él.

Tres láminas dieléctricas de permitividades ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 están apiladas sobre otra como se indica en la Figura. El campo eléctrico \vec{E}_1 forma un ángulo θ_1 con la normal en la interfase entre los medios 1 y 2. Suponga que los campos eléctricos permanecen constantes en magnitud y dirección al interior de cada medio.

- Encuentre el ángulo θ_3 que forma el campo \vec{E}_3 con la normal cuando emerge en el medio 3. Suponga que no hay densidades de carga superficial libre en la interfase entre los medios dieléctricos.
- Encuentre la densidad de carga superficial libre que habría que poner en la interfase entre los medios 2 y 3 para que el campo \vec{E}_3 fuera paralelo a \vec{E}_1 .



g) Utilizando condiciones de borde para los dieléctricos:

Componente tangencial a la superficie:

$$E_{1t} = E_{2t} = E_{3t}$$

$$\Rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 = E_3 \sin \theta_3 \rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_3 \sin \theta_3 \quad (1)$$

* Notamos que lo único conocido es E_1 y θ_1
por lo que necesitamos las demás ecuaciones.

Componente normal a la superficie:

1 $D_{2n} - D_{1n} = \cancel{\sigma} \quad ; \text{ no hay densidades de carga superficial libre}$

$$\Rightarrow \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2 - \epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = 0$$

$$\left. \right\} \epsilon_3 E_3 \cos \theta_3 = \epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 \quad (2)$$

2 $D_{3n} - D_{2n} = 0$

$$\Rightarrow \epsilon_3 E_3 \cos \theta_3 - \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2 = 0$$

Dividiendo (1) y (2):

$$\frac{E_1 \sin \theta_1}{\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1} = \frac{E_3 \sin \theta_3}{\epsilon_2 E_2 \cos \theta_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \theta_3}{\epsilon_2}$$

$$\Rightarrow \arctan \left(\frac{\epsilon_2 \tan \theta_1}{\epsilon_1} \right) = \theta_3$$