Ej E: sacar 2 cartas (s/r)

$P(1° As) = \frac{4}{52}$

$P(1° \bar{As}) = \frac{48}{52}$

$P(2° As) =$

↳ 2° As depende de lo que salió antes pero no sabemos que salió.

↳ *buen caso para usar prob. totales.*

→ $A = \{2° As\}$

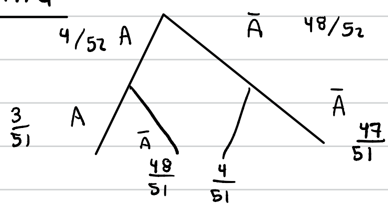
$B_1 = \{1° As\}$ $B_2 = \{1° \bar{As}\}$.

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2)$.

$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$.

$= \frac{4(3+\cancel{48})}{52 \cdot \cancel{51}} = \frac{4}{52}$.

Diagrama:



$P(2° Az.) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$.

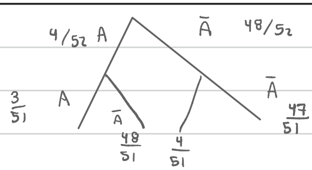
Prob. de lo que a mi me toca es igual a la de la persona de después.

No importa quién saque la 1° carta.

Ejemplo:

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2)$

↳ $P(2° Az.) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$.



- Usarlo cuando prob. condicional invertida es más fácil.

③ Teorema de Bayes.

Supongamos que se desea calcular.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$\rightarrow \boxed{P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}}$$

- Dado que ocurrió A, cuál es la prob. de que B_j haya causado que A ocurra.

Usando la notación del TPT se escribe.

$$\left[P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j)\, P(B_j)}{P(A)} \right]$$

Ej

	M_1	M_2
	70%	30%
defectuosos	10%	5%

Datos: $P(M_1) = 0{,}7$, $P(M_2) = 0{,}3$

$P(D/M_1) = 0{,}1$, $P(D/M_2) = 0{,}05$

$$P(M_1/D) = \frac{P(D/M_1) \cdot P(M_1)}{P(D)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}7}{}$$

$$\rightarrow P(D) \overset{TPT}{=} P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_2)$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}05$$

③ Teorema de Bayes.

Supongamos que se desea calcular. $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

$$\rightarrow \boxed{P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}}$$

Usando la notación del TPT: $\left[P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j)\, P(B_j)}{P(A)} \right]$

Independencia de Eventos

Def: se dice que A, B son eventos independientes ssi la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Formalmente, A, B son eventos independientes ssi:

$P(A/B) = P(A)$

$P(B/A) = P(B)$

ej: $A = \{A_s\}$ $B = \{R\}$.

Si los eventos son independientes.

* pueden pedir que dem. que algo es independi.

$$P(A/B) \overset{def.}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Obs

La definición anterior se puede generalizar para decir: Los eventos $\{A_1, \dots, A_n\}$ son independientes ssi:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

$k = 2, \dots n.$

Tienen que cumplirse las 4 ecuaciones obligatoria#!

Por ej: $n = 3$ (A_1, A_2, A_3).

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ $\rightarrow$ $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$

$P(A_3 \cap A_2) = P(A_3) \cdot P(A_2)$

Independencia de eventos

→ A, B son independientes $\Leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

· Si eventos independientes $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Obs Si $\{A_1 \dots A_n\}$ son independientes $\Rightarrow$ $\{B_{i1} \cdots B_{ik}\}$

son indep. si $B_{i_j} = \begin{cases} A_{ij} \\ \overline{A_{ij}} \end{cases}$

B_j : A, B indep.

Muestre que $\bar{A}, \bar{B}$

dem $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(B)$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= \underbrace{1 - (P(A)}\, + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A) \cdot P(B)})$

$= P(\bar{A}) - P(B)\underbrace{(1 - P(A))}_{P(\bar{A})}$

$= P(\bar{A})(1 - P(B)) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$ //

* $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(B)$

↳ $1 - P(A) = P(\bar{A})$

Ejercicios

31 · marzo

① prob. condicional

$$\underset{\text{emisor}}{E} \longrightarrow \underset{\text{receptor}}{R}$$

$\langle \alpha_1 \dots \alpha_n \rangle$

$P(A/B) = \dfrac{P(B/A)\,P(A)}{P(B)}$ → teo. de Bayes.

interferencia $\quad P(R_{\alpha_i} / E_{\alpha_i}) = p.$

reciba α_i / emite α_i

→ Emisor repite la señal

→ Receptor recibe $\alpha_1\alpha_1$ ¿cuál es la prob. de que el emisor haya emitido la señal?

$$P(\overset{A}{E_{\alpha_1}} / \overset{B}{R_{\alpha_1\alpha_1}}) \overset{T.B.}{=} \frac{\overbrace{P(R_{\alpha_1\alpha_1}/E_{\alpha_1})}^{p^2}\ \overbrace{P(\alpha_1)}^{1/n}}{P(R_{\alpha_1\alpha_1})}.$$

repitió la misma señal!

* p^2 porque son independientes

$$= \frac{p^2 \cdot 1/n}{\quad}$$

→ $P(R_{\alpha_1\alpha_1})$ → depende de lo que se emita

⇓

Teo. prob. totales

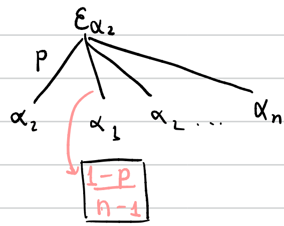
$$\rightarrow P(R_{\alpha_1\alpha_1}) \overset{T.P.T}{=} \sum_{i=1}^{n} P(R_{\alpha_1\alpha_1}/E_{\alpha_i})\ \underbrace{P(\alpha_i)}_{1/n}$$

$$= P(R_{\alpha_1\alpha_1}/E_{\alpha_1})P(\alpha_1) + \sum_{i=2}^{n} P(R_{\alpha_1\alpha_1}/E_{\alpha_i})\ \underbrace{P(\alpha_i)}_{1/n}$$

Diagramar!

$$= p^2 \cdot \frac{1}{n} + (n-1)\left(\frac{1-p}{n-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$\longrightarrow i = 2$



$$\rightarrow P(R_{\alpha_1 \alpha_1} / \varepsilon_{\alpha_i}) = \left(\frac{1-p}{n-1}\right)^2$$

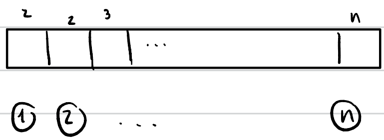
$$\boxed{P(\varepsilon_{\alpha_1} / R_{\alpha_{11}}) = \frac{p^2}{\left(p^2 + \frac{(1-p)^2}{n-1}\right)}}$$

ej: $n = 10$ $\longrightarrow$ Prob. 0,999.

$p = 0{,}9$

① Combinatoria

Coincidencias:



P(al menos 1 ficha coincida c/ su casillero)?

$$P(\underbrace{\text{al menos 1 ficha coincida c/ su casillero}}_{A})?$$

$$\Omega = \{(x_1 \dots x_n) / x_i \in \{1, 2 \dots n\}\}. \quad x_i \neq x_j$$

x_i : N° casillero "i".

card $(\Omega) = n!$ → permutaciones que puedo hacer con los n elementos.

$A_i : \left\{ \begin{array}{l} \text{N° "i" queda} \\ \text{en su posición} \end{array} \right\}$ $\quad A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ → no es la suma de las prob.

$i = 1 \dots n$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k=3}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots A_n)$$

$P(A_i) = \frac{1}{n}$ $\quad P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}$

1 posición favorable de n.

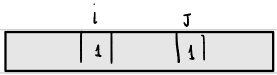
Ej: → Ficha 1 coincida o ficha 2...

$$P(\underbrace{\text{al menos 1 ficha coincida c/ su casillero}}_{A})?$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum P(A_i \cap A_j) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \to 1/n$

$$P(A_i \cap A_j) \to \frac{1}{n(n-1)} = \frac{(n-2)!}{n!} = \boxed{\;\;|i|\;\;|j|\;\;}$$



$$\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

$$\Rightarrow P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P(\cup A_i) = n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots$$

combinación de los grupos de 2 elem. → (suma)

$$P(\cup A_i) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

n	
2	1/2
3	0,66
4	0,625
5	0,63
6	0,632

$$\rightarrow P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j!}$$ → Desarrollo en serie de la exp!

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j!} - (-1).$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!}$$

$$= 1 - e^{-1}$$

$$\approx \boxed{0,632}$$ → n=5 es parecido al ∞.

$$P(\text{Al menos 1 en su posiø}) = 1 - P\left(\text{ninguno en su posiø}\right).$$

$$P(\cup A_i) = n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots \rightarrow P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j!}$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!}$$

$$= 1 - e^{-1}$$

Variable aleatoria (unidimensional)

capítulo 2.

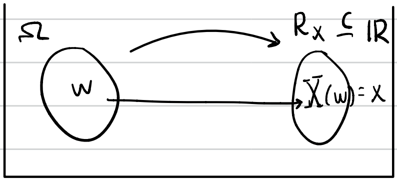
sentido: trabajar con conjuntos numéricos →

Def sea (Ω, Q, P) un espacio de probabilidades, se define una variable aleatoria (v.a.) X como una función real sobre Ω; ie, si X es una v.a.

Trabajar sobre los reales (cambiar de espacio) → ⇒

$$\boxed{\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega) \end{aligned}}$$

Grafica#



ej: E: lanzar una moneda perfecta 2 veces.

$\Omega = \{(c,c), (s,c), (c,s), (s,s)\}$

$\rightarrow R_X = \{0,1,2\}$

X: N° de sellos obtenidos.

$X((c,c)) = 0$

$X((c,s)) = X((s,c)) = 1$

$X((s,s)) = 2$

variable aleatoria X : función real sobre Ω.

Ej: X : N° de sellos obtenidos.

En Ω habían 3 casos, aquí hay 2 →

Obs

1) Si R_X es el recorrido de X, se distinguen 2 casos:

ⓐ Si R_X es numerable se dice que X es una v.a. discreta.

ⓑ si R_X es no numerable se dice que X es una v.a. continua.

2) Una v.a. X es una funø real sobre Ω, sin embargo, no toda funø real puede ser considerada una v.a. (casos patológicos).

3) Informalmente una v.a. es la medición "numérica" de una característica en un experimento.

Eventos equivalentes

Sean $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq R_X$ (eventos en Ω y R_X).

Se dice que A y B son eventos equivalentes ($A \equiv B$)

preimagen → ssi $\boxed{A = \{w \in \Omega / X(w) \in B\}}$

Si $A \equiv B \Rightarrow P(A) = P(B)$

$A \equiv B$ A ocurre ssi B ocurre.

Ej: $B = \{1\} = \{x = 1\} \equiv A = \{(S,C)(C,S)\}$.

$P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

R_X: recorrido de X ⇝ R_X numerable $\Rightarrow X$ v.a. discreta.

$R_X = \{x_1, \dots, x_i, \dots\}$

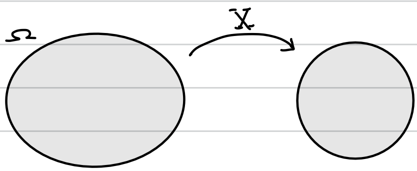
Eventos equivalentes

Si $A \equiv B \Rightarrow P(A) = P(B)$

Variables aleatorias

3. abril.

variable aleatoria: medir numéricamente algo.



$R_x \subseteq - \mathbb{R}$

Card(R_x) → disc. (R_x numerable)
→ continua (R_x no numerable)

variable aleatoria discreta

sea X v.a. discreta con recorrido R_x que podemos denotar $R_x = \{x_1, x_2 \dots x_i \dots\}$

sea $P(x_i) = P(X = x_i)$ ⇒ por axiomas.

- $P(x_i) \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$

si $A \subseteq R_x = P(A) = \sum_{\{x_i / x_i \in A\}} P(x_i)$

sea $P(x_i) = P(X = x_i)$ ⇒ por axiomas.

- $P(x_i) \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$

si $A \subseteq R_x = P(A) = \sum_{\{x_i / x_i \in A\}} P(x_i)$

El conjunto $\{(x_i, P(x_i)\}_{i=1}^{n}$ se denomina la distribución de probabilidades de la v.a. X.

En el ej. clase pasada $R_X = \{0,1,2\}$.
$P(X=1) = 1/2$, $P(X=0) = 1/4 = P(X=2)$

$\{(0, 1/4), (1, 1/2), (2, 1/4)\}$.

2 resultados posibles (éxito - fracaso)

Previo: Experimento de Bernoulli

E → E, V, 1, A (P)
E → F, F, 0, $\bar{A}$

Parámetro: prob. de éxito. → se dice que E es un experimento de Bernoulli de parámetro p.

→ prob. de lo que queremos que salga.

ej: sacar un As: Exp. de Bernoulli de par. $4/52$.

Ej prueba!

① Distribución Binomial

sea E experimento de Bernoulli de parámetro p. supongamos que E se repiten n veces (en forma independiente). sea X la va. definida por:

$\{(x_i, P(x_i)\}_{i=1}^{n}$: distribución de probabilidades de la v.a. X

Ej: $R_X = \{0,1,2\}$, $P(X=1) = 1/2$, $P(X=0) = P(X=2) = 1/4$

$\Rightarrow \{(0, 1/4), (1, 1/2), (2, 1/4)\}$.

Experimento de Bernoulli

- 2 resultados posibles (éxito - fracaso)
- parámetro : Prob. de éxito.

Ej: sacar As = exp. de Bernoulli de parámetro $4/52$.

X : Nº de "éxitos" en las n repeticiones.

$R_X = \{0, \dots, n\}$

- $P(X=n) = p^{n}$ → n veces. ↳ prob. de éxito

$\Omega = \{ (X_1, X_2 \dots X_n) / x_i \in \{E, F\} \}$

$P(X=n) = P((E, E, \dots E))$

$= P(E)^{n} = p^{n}$

$P(X=0) = (1-p)$

no importa el orden. → $P(X=K) = P\begin{pmatrix} K \text{ éxitos} \\ n-K \text{ fracasos} \end{pmatrix}$

$\forall K \in R_X$

$= P((\underbrace{E \dots E}_{K \text{ veces}} \underbrace{F \dots F}_{n-K})) \cdot \underbrace{\frac{n!}{K!\, n-K!}}_{\text{indistinguibles.}}$

↱ Permutación con obj indistinguibles.

$= \underbrace{p^{K}(1-p)^{n-K}}_{\text{de 1 de las tuplas que cumple.}} \cdot \binom{n}{K}$

Este es un modelo de probabilidades! → (se puede usar como tal).

$$\Rightarrow \boxed{P(X=K) = \binom{n}{K} p^{K} (1-p)^{n-K} \quad K=0, \dots n.}$$

→ Distribución Binomial: E se repiten n veces independientes.

Ej: X: nº de éxitos en n repeticiones → $P(X=n) = p^{n}$

$R_X = \{0, \dots, n\}$ $\qquad P(X=0) = 1-p$

$$\boxed{P(X=K) = \binom{n}{K} p^{K} (1-p)^{n-K} \quad K=0, \dots n.}$$

una variable como la anterior, se dice que tiene distribución Binomial de parámetros n, p y se denota $X \rightsquigarrow B(n,p)$.

nº de éxitos fijo y mido el nº de repeticiones.

② Distribución Binomial Negativa (pascal).

Sea E experimento de Bernoulli de parámetro p. Supongamos que E se repite (en forma independiente) hasta obtener el r-ésimo éxito. Sea X definida por X: nº de repeticiones (para obtener éxito).

$$R_X = \{r, \dots \infty\}$$

$$P(X = k) = P\begin{pmatrix}\text{se repitió } k \text{ veces.} \\ r \text{ éxitos} \\ (k-1) \text{ fracasos, la} \\ \text{última es } E.\end{pmatrix}$$

$$= P\left(\left(\begin{matrix}(r-1)\,E \\ (k-r)\,F\end{matrix} \quad \underset{k}{E}\right)\right)$$

$$= P\left(\left(\underbrace{EE\dots E}_{r-1}\underbrace{F\dots F}_{k-1}E\right)\right)\frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}$$

$$= p^r (1-p)^{k-r}\binom{k-1}{r-1}.$$

→ Distribución binomial negativa: E se repite hasta obtener el r-ésimo éxito.

Ej: X: nº de repeticiones hasta obtener el r-ésimo éxito.

$R_X = \{r, \dots \infty\}$

$$\rightarrow P(X = k) = P\begin{pmatrix}\text{se repitió } k \text{ veces.} \\ r \text{ éxitos} \\ (k-1) \text{ fracasos, la} \\ \text{última es } E.\end{pmatrix}$$

$$\boxed{P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}}$$

$X \sim BN(r,p)$

↳ parámetros.

$$\Rightarrow \quad P(X=K) = \binom{K-1}{r-1} p^r (1-p)^{K-1} \qquad K = r, \dots \infty$$

se dice que X tiene distribución Binomial Negativa (Pascal) de parámetros r, p y se denota.

$$X \sim BN(r,p).$$

caso particular $r=1$

X : N° de repeticiones para obtener el 1° éxito.

$$p(X=K) = p(1-p)^{K-1} \qquad K = 1, \dots \infty$$

se dice que X tiene distribución Geométrica de parámetro p, $X \sim G(p)$.

termina cont. de prueba

↳ Axiomática

↳ combinatoria

↳ prob. condicional.

→ caso particular: Distribución geométrica $X \sim G(p)$ $(r=1)$

$$p(X=K) = p(1-p)^{K-1}, \quad K = 1, \dots, \infty$$

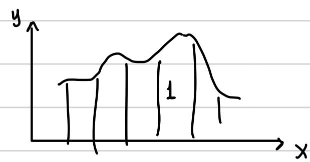
Variable aleatoria continua

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_i$

$P(x_1) \quad P(x_2) \quad P(x_3) \quad \quad P(x_i).$

sea X una v.a. continua, es decir cuyo recorrido R_X es un conjunto no numerable de puntos.
se dice que X es "absolutamente" continua ssi existe una funø real $f(x)$ (llamada funø de densidad de probabilidad) t.q.

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{\infty} f(x)\,dx = 1$



si $A \subseteq R_X$

$P(A) = \int_A f(x)\,dx$

por ejemplo, si $A = [a,b]$

$P(A) = P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

X absoluta% continua $\Leftrightarrow$ $\exists$ función densidad de prob.

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{\infty} f(x)\,dx = 1$

si $A = [a,b]$

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(X)\,dX$

Obs:

1) cuando medimos tendemos a discretizar

2) sea $X \to f(x)$ $\quad P(X=a) \underset{\text{def}}{=} \int_a^a f(x)dx = 0$

$a \; \forall a \in R_X$

Todo punto tiene prob. 0 de ocurrir no significa que no ocurra.

No interesan los ptos. → interesan intervalos.

Improbable $\not\Rightarrow$ imposible

$p=0$

$P(A)=0 \not\Rightarrow A=\emptyset$

3) Si $g(x)$ es t.q. $g(x) \geq 0$

$\int_{\infty}^{\infty} g(x)\,dx = k \Rightarrow$ basta definir

$$f(x) = \frac{g(x)}{k}$$

4) $X \to f(X)$

$P(x \leq X < x + \Delta x)$,

Obs

- Todo punto tiene prob. 0 (no significa que no ocurra).
- Si $g(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = k \Rightarrow$ def. $f(x) = \frac{g(x)}{k}$
- $X \to f(x)$

$P(x \leq X \leq x+\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = \Delta x f(y)$, $x \leq y \leq x + \Delta x$

def $\int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx = \Delta x\, f(y)$ $\quad x \leq y \leq x+\Delta x$

TVM integral: ∃ un rectángulo con un área equivalente.

· Si Δx $\approx \Delta x \cdot f(x)$

$$\underbrace{\boxed{f(x) = \frac{P(X \leq x \leq X+\Delta X)}{\Delta X}}}_{\text{densidad de probabilidad.}}$$

→ cant. de prob.

→ Ancho del intervalo

$$\underbrace{\boxed{f(x) = \frac{P(X \leq x \leq X+\Delta X)}{\Delta X}}}_{\text{densidad de probabilidad.}}$$

→ cant. de prob.

→ Ancho del intervalo

13 · abril

X abs. continua. R_X.

$f(X) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

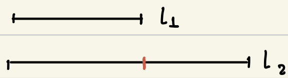
$P(X = a) = 0$ → todo punto es improbable $\neq$ imposible.

$A \subseteq R_X$, $\boxed{P(A) = \int_A f(x)\,dx}$

$$f(x) \approx \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

densidad de prob.

problema



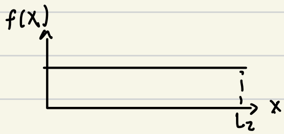
corto la barra al azar en algún punto.

$P(\text{f triángulo})$

X: pto. corte → variable continua

$R_X = (0, L_2)$. → recorrido no numerable.

$$f(x) = \begin{cases} k = \frac{1}{L_2} & x \in (0, L_2) \\ 0 & , x \notin (0, L_2) \end{cases} \rightsquigarrow \text{una de.}$$



→ todo pto. tiene igual probabilidad.

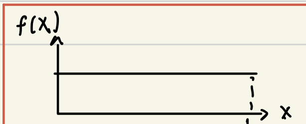
$\boxed{P(A) = \int_A f(x)\,dx}$

Ej corto la barra al azar en algún punto.

X: pto. corte

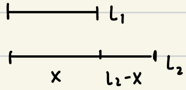
$R_X = (0, L_2)$.

$$f(x) = \begin{cases} k = \frac{1}{L_2} & x \in (0, L_2) \\ 0 & , x \notin (0, L_2) \end{cases} \rightsquigarrow \text{una de.}$$



→ todo pto. tiene igual probabilidad.

· para formar Δ: $x < (L_2 - x) + L_1$



$L_1 < x + (L_2 - x) \longrightarrow L_1 < L_2$

$x < L_1 + (L_2 - x) \rightarrow x < \frac{L_1 + L_2}{2}$

$L_2 - x < L_1 + x \longrightarrow \frac{L_2 - L_1}{2} < x$

$$\frac{L_2 - L_1}{2} < x < \frac{L_1 + L_2}{2}$$

es igual que hacer:

$\frac{L_2 - L_1}{2} \leq x \leq \frac{L_1 + L_2}{2}$

xq en un pto, $p( ) = 0$.

$$p(f_T) = p\left(\frac{L_2 - L_1}{2} < x < \frac{L_1 + L_2}{2}\right)$$

$$= \int_{\frac{L_2 - L_1}{2}}^{L_2 + L_1/2} \frac{1}{L_2}\, dx = \frac{L_1}{L_2}$$

$p(fT) =$

$p(fT) = \frac{L_1}{L_2}$

$L_1 = 1$

$L_2 = 1,5$

$P(fT) = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} = \frac{200}{300}$

· para formar Δ: $p(f_T) =$

$$p\left(\frac{L_2 - L_1}{2} < x < \frac{L_1 + L_2}{2}\right) = \int_{\frac{L_2 - L_1}{2}}^{L_2 + L_1/2} \frac{1}{L_2}\, dx = \frac{L_1}{L_2}$$

$P(\text{Equilat}) = 0$ y es imposible

$P(\text{Isósceles}) = 0$, $x = 1{,}0$, $x = 0{,}75$ → cada uno tiene prob. 0.

$P(\text{Escaleno}) = 2/3$

0 1 2 3 10

$P(\text{elija un } \mathbb{N}) = 0$ (xq son puntos).

R_1 , R_2 ... → los racionales son numerables.

(los irracionales son más densos que los racionales)

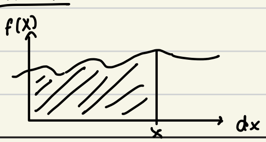
Función distribución (acumulada).

Def sea X v.a. ; se define la func distribución acumulada de X como:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} \sum_{\{x_i \leq x\}} p(x_i) & x \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx & x \text{ continua.} \end{cases}$$

Grafica:

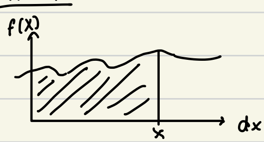


Función distribución acumulada de X :

- $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

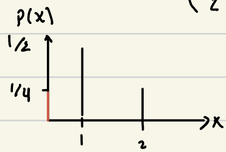
  $x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x)$

Grafica:

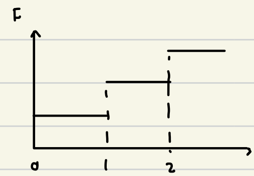


Ej ①

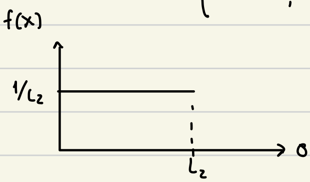
$$X = \begin{cases} x_i & P(X). \\ 0 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \\ 2 & 1/4 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0. \\ 1/4 & , 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , 2 \leq x \end{cases}$$

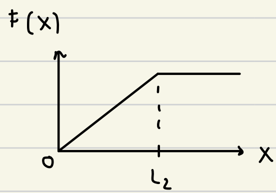


Ej. $X \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1/L_2 & , 0 < x < L_2 \\ 0 & , \sim \end{cases}$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{L_2} dx & , 0 \leq x < L \\ 1 & , x > L/2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x/L_2 & , 0 \leq x < L_2 \\ 1 & , x > L_2. \end{cases} \longrightarrow$$



Propiedades. (Dem: propuesto)

1) F es no decreciente.

2) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

3) Si X es disreta $\Rightarrow$ F es de tipo escalón con saltos en x_i de tamaño $p(x_i)$

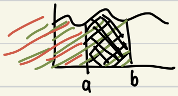
4) Si X es absolutamente continua $\Rightarrow$ F es una funø continua.

5) Si $x \to f(x)$. (x abs. cont.).

$$P(a \leq x \leq b) \overset{def.}{=} \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$= F(b) - F(a)$$



6) Si $x \to f(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

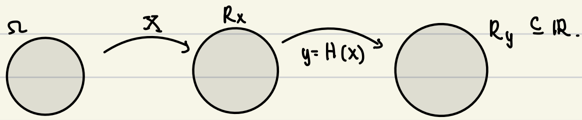
$$\Rightarrow f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$ $\to$ teo. fundamental del cálculo.

Prop

- F es no decreciente.
- Si X $\to$ *es discreta*: F es del tipo escalón con saltos en x_i de tamaño $P(x_i)$
  - $\to$ *absolutamente continua*: F es una funø continua.
    - $\hookrightarrow P(a \leq x \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx = F(b) - F(a).$
- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

funciones de variables aleatorias

sea X v.a. $H(x)$ función real $\Rightarrow$ $y = H(X)$ es una v.a.



→ y es v.a. que cambio el espacio x un subconj. de los reales.

Probab. a resolver: Dado que se conoce el comportamiento probabilístico de X determinar el comporta@ probabilístico de y.

La sol. del problema depende de
- Tipo de variable x.
- Tipo de función H (inyectividad).

Def Eventos equivalentes

sean x, y con recorridos R_x, R_y respectiva@, sean $A \subseteq R_x$ $B \subseteq R_y$. A y B se dicen eventos equivalentes $(A \equiv B)$ ssi

$A = \{ x \,/\, H(x) \in B \}$

A preimagen de B por la func. H.

funciones de variables aleatorias.

Eventos equivalentes: A y B son eventos equivalentes $(A \equiv B) \Leftrightarrow A = \{ x / H(x) \in B \}$

preimagen de B por la función H.

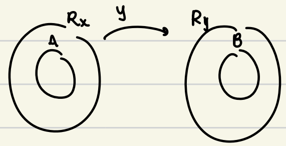
· Si $A \equiv B \Rightarrow P(A) = P(B)$

ej:

$y = \frac{1}{2} m x^2$

$B = \{ \underbrace{Y \leq y}_{R_y} \} \equiv \{ \frac{1}{2} m x^2 \leq y \}$

$= \{ \underbrace{-\sqrt{2y/m} \leq x \leq \sqrt{\frac{2y}{m}}}_{R_x} \}$



· Si $A \equiv B \Rightarrow P(A) = P(B)$.

Caso a).

sea X v.a. discreta con distribución de probabilidades $\{(x_i, P(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$

$\Rightarrow$ $y = H(x)$ es una v.a. discreta, supongamos que $R_y = \{y_1, y_2, \ldots y_j \ldots\}$

$$P(y = y_j) = \sum_{\{x_i / H(x_i) = y_i\}} P(x_i)$$

$$X = \begin{cases} 0 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \\ 2 & 1/4 \end{cases}$$

$y = H(X) = (X-1)^2$

$R_y = \{0, 1\}$.

$P(y=1) = P(X=0) + P(X=2)$

$= 1/4 + 1/4 = 1/2$.

$P(y=0) = P(X=0)$

Caso a: sea X v.a. discreta c/ distrib. de prob. $\{(x_i, P(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$

$\Rightarrow$ $y = H(x)$ v.a. discreta. , $R_y = \{y_1, \ldots, y_j \ldots\}$

$$P(y_j) = \sum_{\{x_i / H(x_i) = y_i\}} P(x_i)$$

$\boxed{\text{Ej}}$ $y = H(x) = (x-1)^2$, $R_y = \{0, 1\}$.

↳ $P(y=1) = P(X=0) + P(x=2)$.

de tipo escalón. (discretiza)

caso 6

sea X absolutamente continua con densidad $f(x)$.
supongamos que $Y = H(X)$ es una v.a. discreta con recorrido $R_y = \{y_1 \dots y_j, \dots\}$.

$$P(Y = y_j) = \int_{\{x / H(x) = y_j\}} f(x)\,dx$$

Ej: X: Edad (persona).
$R_x = \mathbb{R}^+ = (0, \dots \infty)$.

$f(x)$

y: Edad en años
$Y = H(X) = \lfloor X \rfloor$ → parte entera.

$R_y = \{0, 1, \dots j, \dots\}$

$$P(y = j) = \int_j^{j+1} f(x)\,dx$$

caso 6: sea X absolutamente continua c/ densidad $f(x)$
⇒ $Y = H(X)$ v.a. discreta c/ recorrido $R_y = \{y_1 \dots y_j \dots\}$

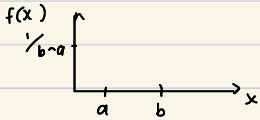
$$P(Y = y_j) = \int_{\{x / H(x) = y_j\}} f(x)\,dx$$

$\boxed{\text{Ej}}$ X: Edad, $R_x = \mathbb{R}^+$
y: Edad en años. , $y = \lfloor X \rfloor$, $R_y = \{0 \dots, j\}$.
↳ $P(y = j) = \int_j^{j+1} f(x)\,dx$

14-abr.

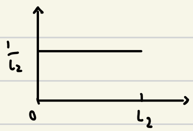
Nota def: sea X v.a. continua con densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1/b-a & , a < x < b \\ 0 & , \sim \end{cases}$$



Se dice que X tiene distribución uniforme en el intervalo (a,b) y se denota $X \sim U(a,b)$.

En el ej. clase pasada (barra) $X \sim U(0, l_2)$.



a) X disreta $\Rightarrow$ $Y = H(X)$ discreta.

b) X continua c $Y = H(X)$ discreta.

↳ Escalón.

$X \longrightarrow Y = H(X)$.

c) sea X v.a. continua con densidad $f_X(x)$; supongamos que $Y = H(X)$ es v.a. continua con densidad $f_Y(y)$. Si se conoce $f_X(x) \Rightarrow$ ¿ $f_Y(y)$?

derivo F_Y

Integro f_X

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$F_Y(y) \overset{def}{=} P(Y \leq y) = P(H(X) \leq y).$$

$$= \int_{\{x \mid H(x) < y\}} f_X(x)\,dx$$

· sea X v.a. continua c/ densidad: $f(x) = \begin{cases} 1/b-a & , a < x < b \\ 0 & , \sim \end{cases}$

→ X tiene una distribución uniforme en el intervalo (a,b)

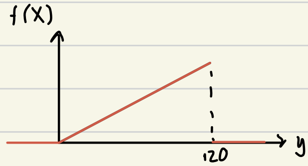
$X \sim U(a,b)$.

* sea X v.a. continua c/ densidad $f_X(x)$, $Y = H(X) \rightarrow f_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(H(X) \leq y) = \int_{\{x \mid H(X) < y\}} f_X(x)\,dx$$

Ej x: velocidad móvil

$$f_x(x) = \begin{cases} kx & 0 < x < 120 \\ 0 & \sim \end{cases}$$



→ son despreciables la cant. de vehículos que van a $\vec{v}$ altas.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \rightarrow \int_0^{120} kx\,dx = k \cdot \frac{120^2}{2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{2}{120^2}}$$

Ej $y = H(x) = \frac{1}{2} m x^2$

¿$f_y(y)$? $R_y = \left(0, \dots, \frac{120^2 m}{2}\right)$

se deriva c/r a y y se tiene f_y. ←

$$F_y(y) \overset{def}{=} P(Y \leq y) = P\left(-\sqrt{\frac{2y}{m}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2y}{m}}\right) (*)$$

$$= \int_{-\sqrt{\frac{2y}{m}}}^{\sqrt{\frac{2y}{m}}} f_x(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{\frac{2y}{m}}} kx\,dx$$

xq la función densidad vale 0 para valores negativos.

Ej x: $\vec{v}$ del movil

$$f_x(x) = \begin{cases} kx & , 0 < x < 120 \\ 0 & , \sim \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \int_0^{120} kx\,dx = k \cdot \frac{120^2}{2} = 1$$

Ej $y = H(x) = \frac{1}{2} m x^2$. $R_y = \left(0, \dots, \frac{120^2 m}{2}\right)$.

forma 1:

$$F_y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-\sqrt{\frac{2y}{m}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2y}{m}}\right).$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{2y}{m}}} f_x(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{\frac{2y}{m}}} kx\,dx = k\,\frac{\cancel{2}y}{m \cdot \cancel{2}} = \frac{ky}{m}$$

vale 0 para valores neg

$$\Rightarrow \frac{\partial F_y(y)}{\partial y} = \boxed{\frac{k}{m} = f_y(y)}$$

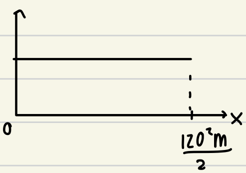
$$\circledast = P\left(X \le \sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right) - P\left(X \le -\sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right).$$

$$F_y(y) = F_X\left(\sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right).$$

$$\boxed{f_y(y) = \frac{d\,F_y(y)}{dy}} = f_X\left(\sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right)\cdot\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{2y}{m}}\right)}{\partial m} - \underbrace{\cancel{f_X\left(-\sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right)}}_{0}\cdot\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{2y}{m}}\right)}{\partial y}.$$

$$f_y(y) = k\cdot\sqrt{\tfrac{2y}{m}}\cdot\sqrt{\tfrac{2}{m}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad , y \in \left(0, \tfrac{120^2 m}{2}\right)$$

$$= \frac{k}{m}.$$



→ Es igual# probable tener energías cinéticas altas o bajas.

El procedimiento anterior permite postular el siguiente.

Teorema cambio de variable.

Sea X v.a. continua con densidad $f_X(x)$; sea $Y = H(X)$ función monótona y diferenciable. (donde corresponda).

tiene inversa

$$\Rightarrow f_y(y) = f_x(H^{-1}(y))\cdot\left|\frac{d\,H^{-1}(y)}{dy}\right|$$

xq si la inversa es decreciente, la deriv. sería negativa.

forma 2:

$$F_y(y) = P\left(X \le \sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right) - P\left(X \le -\sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right)$$

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial y}\right)\quad = F_X\left(\sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right) - \underbrace{\cancel{F_X\left(-\sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right)}}_{0}$$

$$\rightarrow f_y(y) = f_x\left(\sqrt{\tfrac{2y}{m}}\right)\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{2y}{m}}\right)}{\partial y} = K/m.$$

Teorema cambio de variable.

Sea X v.a. continua con densidad $f_X(x)$; sea $Y = H(X)$. función monótona y diferenciable. (donde corresponda).

tiene inversa

$$\Rightarrow f_y(y) = f_x(H^{-1}(y))\cdot\left|\frac{d\,H^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Ej : X , $f_X(x) = kx$, $0 < x < 120$.

$Y = H(X) = \frac{1}{2} m x^2 \Rightarrow H^{-1}(y) = x = \sqrt{\frac{2y}{m}}$

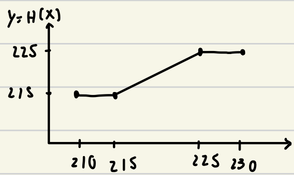
$f_Y(y) = k \cdot \sqrt{\frac{2y}{m}} \cdot \left| \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \right|$

$= \frac{k}{m}.$

dem : propuesta → aplicar procedi@ del ej. para un H cualquiera.

separar en : creciente decreciente

caso d) :



X = Voltaje Entrada , X ~ U(210, 230)

~ estabilitador de voltaje. ~ H

Y = Voltaje salida H(X) ↑ filtro.

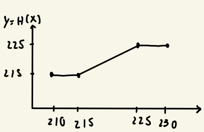
$R_Y = [215, \dots, 225]$, Y v.a. continua (recorrido no numerable).

$P(Y = 220) = P(X = 220) = \int_{220}^{220} f(x)dx = 0.$

$\boxed{\text{Ej}}$ $f_X(x) = kx$, $y = H(x) = \frac{1}{2} m x^2 \Rightarrow H^{-1}(y) = x = \sqrt{\frac{2y}{m}}.$

↳ $f_Y(y) = k \sqrt{\frac{2y}{m}} \cdot \left| \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{k}{m}$

caso d X ~ U(210, 230) , $R_Y = [215, \dots, 225]$, Y v.a. continua.



$P(y=a)=0$, $215 < a < 225.$

$P(y=215) = P(210 < x < 215) = \int_{210}^{215} f(x)\,dx \neq 0.$

variable continua q tiene un pto. con prob. $\neq 0$.

y se comporta como

abs. continua $215 < y < 225$

discreta $y=215$, $y=225$.

v.a. Mixta.

v.a.
- continua
  - abs. continua $f(x)$
  - Mixta.
- discreta.

· $P(y=a)=0$, $215 < a < 225.$

$P(y=215) = P(210 < x < 215) = \int_{210}^{215} f(x)\,dx \neq 0.$

variable continua q tiene un pto. con prob. $\neq 0$.

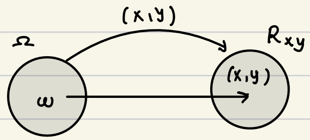
y se comporta como
- abs. continua $215 < y < 225$
- discreta $y=215$, $y=225$

Variable aleatotria bidimensional
Vector aleatorio

17 · abr.

Def Sea Ω espacio muestral, X e Y dos funciones reales (v.a) sobre Ω; se define el vector aleatorio (X,Y) como:

$$(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$$
$$\omega \to (X(\omega), Y(\omega)) = (x,y).$$



es decir, un vector (X,Y) es la medición conjunta de las variables X, Y, en el mismo experimento.

Ej: E: sacar 2 cartas (s/r).
X: N° Ases.
Y: N° Monos
(X,Y)

Si R_{xy}, R_x, R_y denota el recorrido de (X,Y), X e Y respectivamente $\Rightarrow$

$$R_{xy} \subseteq R_x \times R_y$$

$\rightsquigarrow$ $R_x = \{0,1,2\} = R_y$

x\y	0	1	2
0	✓	✓	✓
1	✓	✓	✗
2	✓	✗	✗

$\to R_{xy} \subset R_x \times R_y$.

variable aleatoria bidimensional.

vector aleatorio: $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$\omega \to (X(\omega), Y(\omega)) = (x,y)$. : medición conjunta de las variables X, Y, en el mismo experimento.

· R_{xy} : Recorrido de (x,y).

$\boxed{Ej}$ $\rightsquigarrow$ $R_x = \{0,1,2\} = R_y$

x\y	0	1	2
0	✓	✓	✓
1	✓	✓	✗
2	✓	✗	✗

$\to R_{xy} \subset R_x \times R_y$.

Dependiendo de la cardinalidad de R_x y R_y, se distinguen 3 casos.

ⓐ Si R_x, R_y son numerables (vector discreto).

X: N° Ases

Y = N° Monos

ⓑ Si R_x, R_y son no numerables (vector continuo)

X: peso

Y: Estatura.

ⓒ R_x no numerable y R_x no numerable.

X: Peso

Y: sexo $\begin{cases} 0 & \text{Hombre} \\ 1 & \text{Mujer.} \end{cases}$

La forma probabilística del vector (X,Y) dependerá del tipo de vector (a), b), c))

Vector aleatorio discreto

Sea (X,Y) vector discreto con recorrido que denotamos $R_{xy} = \{(x_i, y_j)\}_{i,j=1}$; sea $P((x_i, x_j)) = P(X = x_i, Y = y_j)$

Vector aleatorio discreto:

(X,Y) vector discreto, $R_{xy} = \{(x_i, y_j)\}_{i,j=1}$, $P((x_i, y_j)) = P(X = x_i, Y = y_j)$.

$\rightarrow P(x_i, y_j) \geq 0$ si $A \subseteq R_{xy}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(x_i, y_j) = 1 \qquad P(A) = \sum_{\{(x_i, y_j) \in A\}}\sum P(x_i, y_j)$$

Ej: $P((0,0)) = P(X=0, Y=0) = \dfrac{\binom{36}{2}}{\binom{52}{2}}$

$P((1,1)) = P(X=1, Y=1) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{12}{1}}{\binom{52}{2}}$

El conjunto $\{(x_i, y_j) \; ; \; P(x_i, y_j)\}^{\infty}$ se denomina la distribución de probabilidades del vector (x,y).

Vector aleatorio continuo

sea (x,y) vector continuo, se dice que (x,y) es absolutamente continuo ssi existe funø real $f(x,y)$ (llamada "función densidad de probabilidad conjunta"). t.q

$f(x,y) \geq 0$

volumen bajo el manto es 1 $\rightarrow$ $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dy\,dx = 1$

$\rightarrow P(x_i, y_j) \geq 0$, si $A \subseteq R_{xy}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(x_i, y_j) = 1 \qquad P(A) = \sum_{\{(x_i, y_j) \in A\}}\sum P(x_i, y_j)$$

El conjunto $\{(x_i, y_j) \; ; \; P(x_i, y_j)\}^{\infty}$ se denomina la distribución de probabilidades del vector (x,y).

Vector aleatorio continuo

(x,y) vector continuo, (x,y) es abs. continuo $\Leftrightarrow \exists\, f(x,y)$. funø densidad de probabilidad "conjunta".

- $f(x,y) \geq 0$
- $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dy\,dx = 1.$

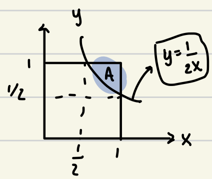
Si $A \subseteq R_{xy}$

$$P(A) = \iint_A f(x,y)\,dy\,dx$$

Ej: $f(x,y) = \begin{cases} kx & 0<x<1 \\ & 0<y<1 \\ 0 & \end{cases}$, k cte.

$$1 = \int_0^1\int_0^1 kx\;dy\,dx = k\int_0^1 x\,dx = k\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow k = 2$$

$$P(\underbrace{xy > 1/2}_{A}) = \iint_A f(x,y)\,dy\,dx = \iint kx\,dy\,dx$$



$xy > 1/2$

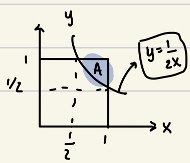
$y > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$

$$\hookrightarrow P(A) = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2x}}^{1} kx\,dy\,dx = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ Si $A \subseteq R_{xy}$

$$P(A) = \iint_A f(x,y)\,dy\,dx$$

$\boxed{\text{Ej}}$ $f(x,y) : \begin{cases} kx & 0<x<1 \\ 0 & 0<y<1 \end{cases} \rightarrow \int_0^1\int_0^1 kx\,dy\,dx = 1 \Rightarrow K=2.$

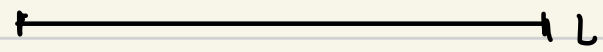


$xy > 1/2$

$y > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$

$$\cdot\; P(\underbrace{xy > 1/2}_{A}) = \int_{1/2}^{1}\int_{1/2x}^{1} kx\,dy\,dx = \frac{1}{4}$$

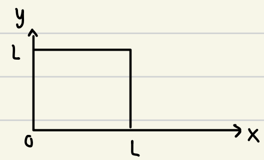
Ej:



X: 1° corte $\qquad R_x = (0, L)$

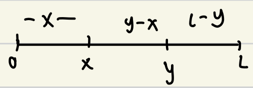
Y: 2° corte $\qquad R_y = (0, L)$.

$$R_{xy} = ((0,L) \times (0,L)) \quad , x \neq y.$$



volumen debe dar 1.

$$f(x,y) = \begin{cases} k = \frac{1}{L^2} & (x,y) \in R_{xy} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

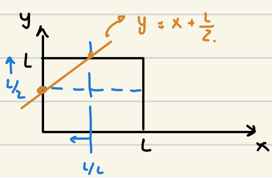


$x < y$.

$\hookrightarrow x < y - x + L - y \longrightarrow$ cada lado menor a la suma de los otros 2.

$\hookrightarrow y - x < x + L - y$

$\hookrightarrow L - y < x + y - x$.



- $x < L/2$
- $y < x + L/2$
- $\frac{L}{2} < y$

$\cdot \quad y = x + L/2$

$$P(fT) = 2\int_{0}^{L/2}\int_{L/2}^{x+L/2} \frac{1}{L^2}\,dy\,dx$$

entre las 2 rectas.

se puede multiplicar x 2 ya que el manto es una de.

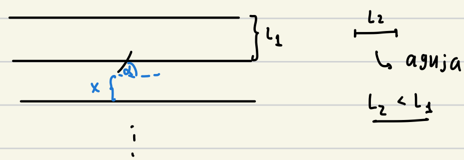
propuestos!

$\boxed{P1}$ · 2 personas se juntan entre las 1 y 2.

c/u decide esperar a lo más 10 min.

¿P(se encuentren)?

$\boxed{P2}$



¿P(aguja corte alguna línea)?

Si $L_2 = L_1/2$ ⟶ resultado interesante.

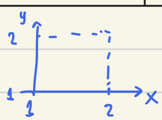
* poner condiciones entre x y α para que la aguja corte.

$\boxed{P1}$

$R_x = (1\ ,\ 2)$

$R_y = (1\ ,\ 2)$

$R_{xy} = ((1,2) \times (1\ 2))$



$$\int_1^2\int_1^2 K\,dy\,dx = 1 \Rightarrow \boxed{K = 1} \qquad f_{xy} = \begin{cases} 1 & (x,y) \in R_{xy} \\ 0 & \end{cases}$$

Obs:

1) Al igual que en una dimensión $f(x,y)$ no es una probabilidad, usando TVMI se puede escribir.

Indica que tan densa.

$$f(x,y) = \frac{P(x \leq X \leq x+\Delta x \ ; \ y \leq Y \leq y+\Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}. \quad (\Delta x, \Delta y \text{ pequeño})$$

2) Se define la funø distribución acumulada del vector (x,y) como $F(x,y) = P(X \leq x \ ; \ Y \leq y)$.

con probabilidades equivalentes al caso de una dimensión, por ejemplo:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Distribuø Marginal

Sea (x,y) vector aleatorio, se define la distribuø "marginal" de la v.a. X como su distribuø cuando se elimina el efecto de la v.a. Y.

Def Sea (x,y) vector discreto con distribuø $\{(x_i, y_j), P(x_i,y_j)\}_{j,i=1}^{\infty}$; se define la distribuø marginal de X como:

$$P(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(x_i, y_j).$$

$\forall \ x_i \in R_X$

Obs · $f(x,y) = \dfrac{P(x \leq X \leq x+\Delta x \ ; \ y \leq Y \leq y+\Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$.

· Distribución acumulada: $F(x,y) = P(X \leq x \ ; \ Y \leq y) \longrightarrow f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

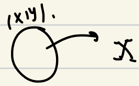
Distribución *marginal* de la v.a. X, cuando se elimina el efecto de la v.a. Y.

→ Sea (x,y) vector discreto: *distribución marginal*:

$$P(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i, y_i) \quad , \forall \ x_i \in R_x$$

Sea (x,y) vector continuo con densidad conjunta $f(x,y)$; se defina la funó densidad marginal de X como:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy.$$



$x \backslash y$	0	1	2	
0	$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,0) + P(0,1) + P(0,2)$
1	$P(1,0)$	$P(1,1)$	X	$P(1,0) + P(1,1)$
2	$P(2,0)$	X	X	$P(2,0)$.

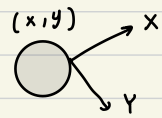
→ Sea (x,y) vector continuo: *densidad marginal:*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy.$$

Distribuciones marginales

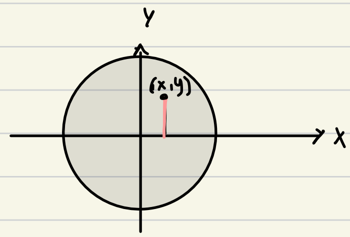
21 · abril.

$P(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P((x_i, y_j))$ discreto.



$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ continuo

Ej:



(x,y)

área disco

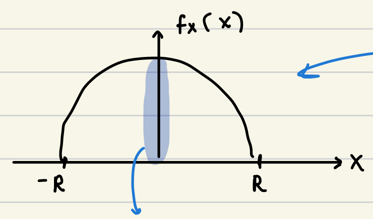
$$f(x,y) = \begin{cases} K = \frac{1}{\pi R^2} & (x,y) \in D \\ 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}\,dy$$

para un x fijo, los valores de y que puedo tomar.

$$= \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, \quad -R < x < R$$

*



probabilidades concentradas alrededor del 0.

$$f_Y(y) = \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, \quad -R < y < R.$$

Distribuciones condicionales

(X, Y) — X: peso, Y: estatura

$[X / Y = y = 1{,}65]$

Def:

Sea (X,Y) vector aleatorio, se define la distribución condicional de $X/Y = y$ como.

$$P(X = x_i / Y = y) = \frac{P(X = x_i, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{P(x_i, y)}{P(y)}, \quad (P(y) \neq 0)$$

y fijo

↳ caso discreto.

---

distribuciones condicionales: (X,Y) vector aleatorio, se define la distribuø condicional de $X/Y = y$.

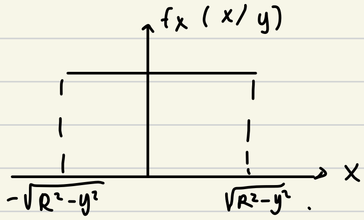
→ caso discreto: $P(X = x_i / Y = y) = \frac{P(X = x_i, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{P(x_i, y)}{P(y)}$

fijo.

$f_{X/Y=y}(x/y) = \dfrac{f(x,y)}{f_y(y)}$ → la marginal de la que está condicionando. $(f_Y(y) \neq 0)$

$$f_{X/Y=y}(x/y) = \dfrac{\frac{1}{\pi R^2}}{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}}$$

es una funcion de $\underline{\underline{x}}$ ← $f_{x/y}(x/y) = \dfrac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}$ → hay que decir para que x (con un y fijo) $-\sqrt{R^2-y^2} < x < \sqrt{R^2-y^2}$



$x/y \sim U(-\sqrt{R^2-y^2}, \sqrt{R^2-y^2})$.

$f_{x/y}(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{f_y(y)}$ (funcion de x).

$$1 = \int f_{x/y}(x,y)\,d\underline{\underline{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{f_y(y)}\,dx = \frac{1}{f_y(y)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

para un y fijo.

$$= \frac{f_y(y)}{f_y(y)} = 1 \checkmark$$

· (x,y)
- x, y disc. $P((x_i, y_j))$
- x, y cont. $f(x,y)$.
- x cont. (peso) / y discreta. (sexo)

$f_{x/y=0}(x)$, $f_{x/y=1}(x)$ → $P(a<x<b) = P(a<x<b \mid y=0) \cdot P(y=0) + P(a<x<b \mid y=1) \cdot P(y=1)$

↓ defino funcion densidad para hombres.

$$P(a<x<b) = \sum_{i=1}^{2} \int_a^b f_{x/y=i}(x)\,dx \cdot P(y=i).$$

→ caso continuo: $f_{x/Y=y}(x/y) = \dfrac{f(x,y)}{f_y(y)}$, $\displaystyle\int f_{x/y}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{f_y(y)}\,dx = \frac{f_y(y)}{f_y(y)} = 1 \checkmark$

y fijo

· Si conozco 2 por separado, no puedo saber cómo se comportan en grupo.

x\y	0	1	
0	p	1/2 - p	1/2
1	1/2 - p	p	1/2
	1/2	1/2	

$(x,y) \begin{cases} x \\ y \end{cases}$

· <u>variables aleatorias independientes</u>

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$ →

Def: se dice que X e Y son v.a. independientes ssi el valor que toma una de ellas no influye en el valor (probabilidad) de la otra.

Def: se dice que X, Y son v.a. independientes ss.

- $P((x_i, y_j)) = P(x_i)(y_j)$, $\forall (x_i, y_j) \in R_{xy}$
  discreto.

x\y	0	1	
	1/4	1/4	1/2
	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

, si $p = 1/4$ ⟶ v. independientes.

- $f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$, $\forall (x,y) \in R_{xy}$
  continua.

Ej: Disco. Obviamente (x,y) <u>no</u> son independientes.

variables aleatorias independientes. X e Y son indep ⟺ la prob. de una de ellas no influye en la otra.

→ $P((x_i, y_j)) = P(x_i)(y_j)$, $\forall (x_i, y_j) \in R_{xy}$
discreto.

→ $f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$, $\forall (x,y) \in R_{xy}$
continua.

Funciones de un vector aleatorio.

Sea (x,y) vector aleatorio, $z = H(x,y)$ funø real $\Rightarrow$ obviamente z es una v.a. (una dimensión).

Problema a resolver. Dado que se conoce el comportamiento probabilístico de (x,y) determinar el comporta@ probabilístico de $z = H(x,y)$.

X: Resistencia
Y: Corriente $\quad Z = XY = H(x,y)$

X: Peso
Y: Estatura $\quad Z = \dfrac{x}{y^2} = H(x,y)$

Típicas funciones a estudiar son:

$$H(x,y) = \begin{cases} x+y \\ x-y \\ x \cdot y \\ x/y \\ \mathrm{Max}(x,y) \\ \mathrm{Mín}(x,y). \end{cases}$$

1) Supongamos que (x,y) es vector discreto con distribuø $\{(x_i, y_j), P(x_i,y_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$. Si $z = H(x,y)$ es funø real $\Rightarrow z$ es v.a. discreta con recorrido que denotamos $R_z = \{z_1, z_2, \dots z_i, \dots\}$.

$$\Rightarrow P(z_k) = P(\overbrace{z = z_k}^{R_z}) = P(\underbrace{H(x,y) = z_k}_{R_{xy}})$$

$$= \sum\sum_{\{(x_i,y_j)/H(x_i,y_j) = z_k\}} P(x_i,y_j).$$

Ej: X: Resultado lanzar 1° dado perfecto
Y: " " 2° " "

$Z = X+Y$, $R_z = \{2, 3, \dots, 12\}$

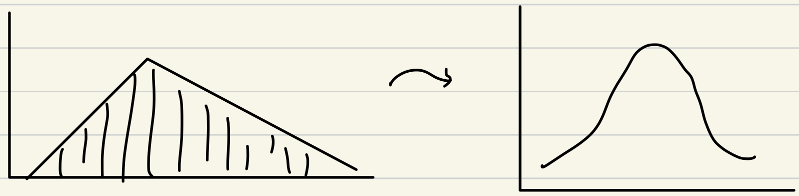
$P(X=j) = P(Y=j) = 1/6$, $j = 1, \dots 6$.

Funciones de un vector aleatorio: $z = H(x,y)$, funø real.

1. (x,y) vector discreto $\Rightarrow z$ v.a. discreta, $R_z = \{z_1, z_2, \dots, z_i \dots\}$.

$$\rightarrow P(z_k) = P(z = z_k) = P(\underbrace{H(x,y) = z_k}_{R_{xy}}) = \sum\sum_{\{(x_i,y_j)/H(x_i,y_j) = z_k\}} P(x_i,y_j)$$

Z		
2	1/36	(1,1)
3	2/36	(1, 2), (2,1)
4	3/36	
5	4/36	
6	5/36	
7	6/36	
8	5/36	
9	4/36	
10	3/36	
11	2/36	
12	1/36	



Ej 1) $X \sim G(p) = BN(1,p)$ $\quad$ X, Y independientes.

$Y \sim G(p) = BN(1,p)$

$Z = H(X,Y) = X+Y \rightarrow$ cuántos intentos totales se hicieron.

$P(X,Y) = P(Y=k) = p(1-p)^{k-1} \quad , \; k = 1, \ldots, \infty.$

$R_Z = \{2, \ldots \infty\}$

$$P(Z=K) = P(X+Y=K) = \sum_{i=1}^{K-1} P(X=i, Y=K-i) = \sum_{i=1}^{K-1} P(X=i)P(Y=K-i).$$

$$= \sum_{i=1}^{K-1} p(1-p)^{i-1} \, p(1-p)^{K-i-1}$$

$$= p^2 \sum_{i=1}^{K-1} (1-p)^{K-2}$$

$$= p^2(1-p)^{K-2} \underbrace{(K-1)}_{K-1 \text{ términos.}}$$

$P(Z=K) = (K-1)\,p^2(1-p)^{K-2}$

$\Rightarrow Z \sim BN(2, P)$

N° de lanza@ para obtener 2 sellos.

Ej $X \rightarrow BN(1,P) \rightarrow Z = H(X,Y) = X+Y$ (cuantos intentos totales se hicieron)

$Y \rightarrow BN(1,P)$ $\quad P(X,Y) = P(Y=K) = P(1-P)^{K-1}$

$\rightarrow P(Z=K) = P(X+Y=K) = \sum_{i=1}^{K-1} P(X=i) \cdot P(Y=K-i) = p^2(1-p)^{K-2} \underbrace{(K-1)}_{\text{n° de lanzamientos}}$

$\Rightarrow Z \rightarrow BN(2,P).$

24·abril

② caso continuo

Supongamos (x,y) vector continuo con densidad conjunta $f(x,y)$, $z = H(x,y)$ funø real, para determinar $f_z(z)$ usamos el siguiente procedimiento (equivalente al caso en 1 dimensión).

$$f_z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} \quad , \quad F_z(z) = P(\underbrace{z \leq z}_{R_z}) = P(\underbrace{H(x,y) \leq z}_{R_{xy}})$$

$$= \iint_{\{(x,y),\ H(x,y) \leq z\}} f(x,y)\,dy\,dx$$

ej

Ej) X: voltaje batería 1
Y: " batería 2 (x, y indep)

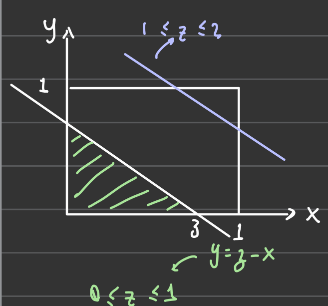
$z = H(x,y) = x + y$

$x, y \sim U(0,1)$ $f_x(x) = f_y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$

$$f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$F_z(z) = P(z \leq z) = P(x + y \leq z) = \iint_{\{(x,y)/x+y \leq z\}} f(x,y)\,dy\,dx$$

$R_z = (0,2)$



$\rightarrow x + y \leq z$

$\rightarrow \boxed{y = z - x}$

② caso continuo:

$$F_z(z) = P(\underbrace{z \leq z}_{R_z}) = P(\underbrace{H(x,y) \leq z}_{R_{xy}}) = \iint_{\{(x,y),\ H(x,y) \leq z\}} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\boxed{f_z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz}}$$

¡Las integrales pueden ser complicadas!

$$P(X+Y \leq z) = \begin{cases} \int_0^z \int_0^{z-x} 1 \, dy\, dx & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \int_{z-1}^{1} \int_{z-x}^{1} 1 \, dy\, dx & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

Teorema de cambio de variable

Sea (X,Y) vector continuo con densidad $f_{xy}(x,y)$, sean $z = H_1(x,y)$, $w = H_2(x,y)$ funciones reales t.q.

* H_1 y H_2 invertibles.

- $z = H_1(x,y) \iff x = G_1(z,w)$
  $w = H_2(x,y) \quad\;\; y = G_2(z,w)$.

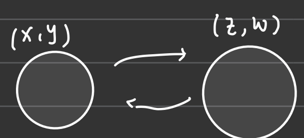
- $\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial w}$ existen y son continuas.

módulo del det. del Jacobiano.

$$\Rightarrow f_{zw}(z,w) = f_{xy}(G_1(z,w), G_2(z,w)) \cdot |J|.$$

* No puedo crear dimensi.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}$$



ej

$z = H_1(x,y) = x+y$

$w = H_2(x,y) = x$ una funø invertible cualquiera.

$z = x+y \quad \Rightarrow \quad x = w = G_1(z,w)$

$w = x \quad\quad\quad\;\; y = z - w = G_2(z,w)$

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow |-1| = 1.$$

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Teorema de cambio de variable.

Sea (X,Y) vector continuo con densidad $f_{xy}(x,y)$

$\rightarrow z = H_1(x,y) \iff x = G_1(z,w)$
$\quad w = H_2(x,y) \quad\;\; y = G_2(z,w)$.

$\rightarrow \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial w}$ existen y son continuas.

$$\Rightarrow f_{zw}(z,w) = f_{xy}(G_1(z,w), G_2(z,w)) \cdot |J|.$$

↳ módulo del det. del J.

$\cdot \quad f_{ZW}(z,w) = 1 \cdot |-1| = 1 \qquad \begin{array}{l} 0 \le w \le 1 \\ 0 \le z-w \le 1. \end{array}$

$$f_{ZW}(z,w) = \begin{cases} 1 & 0 \le w \le 1,\ 0 \le z-w \le 1. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \begin{array}{l} 0 \le w \le 1 \\ 0 \le z-w \le 1 \end{array} \to z-1 \le w \le z.$

* 1 integral en vez de hacer 2.

$$\to f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{ZW}(z,w)\, dw$$

→ Separar la integral según los casos de z.

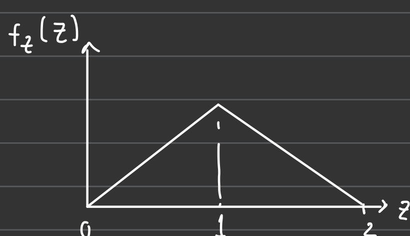
· Si $0 \le z \le 1$ → más chico de $w = 0$.

$$f_Z(z) = \int_0^z 1\, dw$$

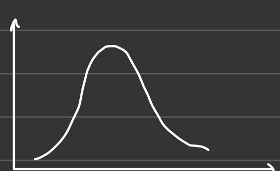
· Si $1 \le z \le 2$:

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} 1\, dw.$$

$$\cdot \quad f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 \le z \le 1 \\ 2-z & 1 \le z \le 2. \end{cases}$$



si sumo muchos v.a.i.



Generalización a n dimensiones.

· las dimensiones anteriores, dadas para 1 y 2 dimensiones se pueden generalizar "fácilmente" para definir un vector aleatorio en n-dimensiones.

$(X_1, \dots, X_n)$, por ej.: si $(X_1 \dots X_n)$ es continuo $\Rightarrow \exists\ f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots x_n)$

tq. $f_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) \geq 0$

$$\underbrace{\int \dots \int}_{n} f_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1$$

$X_1 \dots X_n$ son v.a. independientes ssi

$$\rightarrow f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

$$\rightarrow f_{X_1}(x_1) = \int\int \dots \int f_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

Formas donde surge $(X_1, \dots, X_n)$.

ⓐ X_1: Peso
X_2: Estatura
X_3: Edad
X_4: Sexo

$\rightarrow (X_1, \dots X_4)$

ⓑ Se tiene una variable genérica X.
X: peso
X_i = peso i-ésima persona. $(i = 1, \dots n)$

$(X_1, \dots X_n)$.

X : voltaje red.
X_t : voltaje red instante.

$t_1, t_2 \ldots t_n$.

$(X_{t_1}, \ldots X_{t_n})$. → Procesos estocásticos.

Promedio teórico. ← <u>Esperanza de una variable aleatoria.</u>

Def. Sea X v.a. se define la esperanza X (denotada $E(X)$) como

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, P(x_i) & \text{discreto} \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x)\,dx}_{\text{fórmula centro de masa.}} & \text{continuo.} \end{cases}$$

<u>Ej</u> 1) X : Resultado lanzar dado (perf.).
$P(X = J) = 1/6$, $J = 1 \ldots 6$.

$$E(X) = \sum_{J=1}^{6} J \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{J=1}^{6} J = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

2) X: velocidad.

$$f(x) = \begin{cases} Kx & 0 \leq x < 120 \\ 0 & \sim \end{cases} \quad , \quad K = \frac{2}{120^2}$$

$$E(X) = \int_0^{120} x \cdot Kx \, dx = K\left(\frac{120^3}{3}\right) = \frac{2 \cdot 120}{3} = 80 \ (\text{km}/\text{hr})$$

<u>Obs</u>:

1. $E(X)$ queda medida en las mismas unidades de X.

② El vector de E(X) puede ser:

- finito (Ej. anteriores)

- ∞ ($-\infty$) (Ej: $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x \geq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$

- no existir (Ej: $f(x) = \begin{cases} 1/2x^2 & |x| \geq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$

$\infty - \infty$.

③ E(X) debe interpretarse como el valor "promedio" que toma X cuando el experimento se repita muchas (∞) veces.

↓

ley de los grandes nº.

④ E(X) equivale al centro de masa de un cuerpo.

28 abr.

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, P(x_i) & \text{discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx & \text{continuo} \end{cases}$$

valor promedio que toma la variable si se repite muchas veces.

Ej: Durac (UT).

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

· x tiene distribuc exponencial de parámetro α. $X \sim e(\alpha)$.

$$E(X) \overset{def}{=} \int_0^{\infty} x \, \alpha e^{-\alpha x} \, dx$$ → integrac x partes.

sup. $\alpha = 0,1$.

$$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{0,1} = 10. \ (UT)$$ → En promedio, los equipos duran 10 UT.

(b) costo: C (UM)
↳ unidades monetarias

venta: V (UM).

H: tiempo de garantía → cuanto debe ser el tiempo máx. para que no pierda.

→ Importa que en promedio termine ganando plata.

U: utilidad (por equipo).

$E(U) > 0$.

$$U = \begin{cases} V - C & , x > H \\ -C & , x < H \end{cases}$$ → pierde los costos.

$$P(X > H) \overset{def}{=} \int_H^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= e^{-\alpha H}$$

U_i	$P(U_i)$
$V-C$	$e^{-\alpha H}$
$-C$	$1 - e^{-\alpha H}$

$$U = \begin{cases} V - C & , e^{-\alpha H} \\ -C & , 1 - e^{-\alpha H} \end{cases}$$

complemento

$$E(U) = (V-C)\cdot e^{-\alpha H} + -C\cdot(1 - e^{-\alpha H})$$

$$\boxed{E(U) = V e^{-\alpha H} - C} > 0$$ → condic de no perder plata en promedio

$$e^{-\alpha H} > \frac{C}{V}$$

$$\boxed{H < -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{C}{V}\right)}$$

↳ máx. tiempo en que puede garantizar los equipos.

$\alpha = 0,1$
$c = 1$
$v = 2$

$H < -10 \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 6,93$ (UT).

Esperanza de una función de v.a. "Teorema del inconsciente"

1) sea X v.a $Y = H(X)$ funø real $\Rightarrow$ por definición $E(Y) = \begin{cases} \sum y_i P(y_i) \\ \int y f_Y(y)\, dy. \end{cases}$

se puede demostrar que:

$E(Y) = E(H(X)) = \begin{cases} \sum H(x_i) P(x_i) \\ \int H(x) f_X(x)\, dx \end{cases}$

2) sea (X,Y) vector aleatorio $Z = H(X,Y)$ funø real $\Rightarrow$ por definiø $E(Z) = \begin{cases} \sum z_i P(z_i) \\ \int z f(z) dz. \end{cases}$

se puede dem. que:

$E(Z) = E(H(X,Y)) = \begin{cases} \sum\sum H(x_i, y_j) P((x_i, y_j)) \\ \iint H(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx \end{cases}$

Ej: X: velocidad

$f_X(x) = kx \qquad , 0 < x < 120.$

$Y = H(X) = \frac{1}{2} m x^2. \Rightarrow f_Y(y). = \frac{k}{m} \qquad , \qquad 0 < y < \frac{1}{2} m (120)^2$

$E(Y) = \int_0^{1/2 m (120)^2} y \cdot \frac{k}{m}\, dy$

$E(Y) = E(H(X)) = E\left(\frac{1}{2} m x^2\right) = \int_0^{120} \frac{1}{2} m x^2 \cdot kx\, dx.$ $\rightarrow$ Basta usar la funø original.

Prop

1) $X \rightarrow E(X)$ conocida

$Y = H(X) = a + bX$

¿$E(Y)$?

$E(Y) = E(a + bX) = \int_{-\infty}^{\infty} (a + bx) \cdot f_X(x)\, dx$

$= a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx}_{1} + b \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$

$\boxed{E(a + bX) = a + b E(X)}$

2) sean X, Y con $E(X)$, $E(Y)$ conocidas.

$Z = H(X,Y) = X + Y$

$$E(Z) = E(X+Y) = \iint (x+y) \cdot f_{xy}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int x \underbrace{\int f_{xy}(x,y)\, dy\, dx}_{\int x f_x(x)\, dx} + \int y \int f_{xy}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \boxed{E(X) + E(Y)}$$

En general, si $X_1, \dots, X_n$ v.a $\Rightarrow$ $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Ej: $X \sim B(n,p)$. $\longrightarrow P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, \dots, n$

$$E(X) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \, ? \; = np.$$

X: N° "exitos" en n rep. indep. de exp. Bernoulli (p).

$$\rightarrow X_i = \begin{cases} 1 & \text{i-esima rep. exito} \quad (p) \\ 0 & \sim \quad (1-p). \end{cases}$$

$i = 1 \dots n$

$$\underbrace{X = \sum_{i=1}^{n} X_i}_{\text{cant. exitos}} \Rightarrow E(X) = E\left(\sum X_i\right) = \sum E(X_i)$$

$\Rightarrow E(X_i) \overset{def}{=} 1 \cdot p + 0\,(1-p). = p \quad \forall i$

$\Rightarrow \boxed{E(X) = n \cdot p.}$

3) sean X, Y con $E(X)$, $E(Y)$ conocidas.

sea $Z = H(X,Y) = X \cdot Y$

$$E(Z) = E(X \cdot Y) \overset{teo}{=} \iint x \cdot y \cdot f_{xy}(x,y)\, dy\, dx. \overset{X,Y \text{ indep}}{=} \iint x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dy\, dx$$

$$= \int x f_X(x) \underbrace{\int y f_Y(y)\, dy}\, dx$$

$E(Y) \cdot E(Y)$

[Si X, Y son indep $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$]

En gral., si $X_1, \dots X_n$ v.a. indep. $\Longrightarrow E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(Y_i)$

Propuesto:

1) Si $X = \begin{cases} -1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{cases}$ $\quad y = H(X) = X^2$

Mostrar que x, y son indep. y. $E(X \cdot y) = E(x) \cdot E(y)$.

2) En tarea 1 P3) b)

calcular $E(X)$. $\longrightarrow$ ¿X_i?

$X_1 = \begin{cases} 0 & 1/2 \\ 100 & 1/2 \end{cases}$, $X_2 = \begin{cases} 25 & 1/2 \\ 75 & 1/2. \end{cases}$ $\longrightarrow$ difieren en la dispersión de los valores.

$\rightarrow E(X_1) = E(X_2) = 50.$

Varianza de una v.a

Def. sea X v.a. con $E(X)$ conocida, se define la varianza de X ($var(X)$) como:

$$var(X) = E(\underbrace{(X - E(X))^2}_{H(X)})$$

$$var(X) \overset{\text{teo.}}{=} \begin{cases} \sum (x_i - E(X))^2 \cdot P(x_i) \\ \int (x - E(X))^2 f_X(x) \end{cases}$$ $\longrightarrow$ momento de inercia.

Ej: X: Dado

$$var(x) = \sum_{j=1}^{6} (5 - 3,5)^2 \frac{1}{6}$$

x: velocidad

$$var(X) = \int_0^{120} (x - 80)^2 \, kx dx. = 800. \left(\frac{km}{hr}\right)^2$$

Obs

1) $var(x)$ queda medida en unidades de x al cuadrado.

2) se acostumbra (por 1)) definir.

$\sqrt{var} = DS(X)$: desviación estandar de x. $\qquad \sqrt{800} \, \frac{km}{hr.} = DS$

3) La varianza de x mide el promedio de las distancias c/r a la esperanza.

$var(x)$ mide dispersión o concentración de la distribución de probabilidad.

4) $var(x)$ equivale al momento de inercia c/r a un eje que para x el centro de masa ($E(x)$).

5) $E(|x - E(x)|)$ = Desviación absoluta de x.

↳ no tiene derivada

Propiedades

$$var(x) = E((x - E(x))^2].$$

$$= E(x^2 + E^2(x) - 2x\,E(x)).$$

$$= E(x^2) + E(E^2(x)) - E(2x\,E(x)).$$

$$var(x) = E(x^2) + E^2(x) - 2E^2(x)$$

esperanza
de una cte

$$\boxed{var(x) = E(x^2) - E^2(x)} \longrightarrow$$ Teo. de Steiner

8·mayo.

Propiedad:

① $var(X) = E(X^2) - E^2(X)$. → Teo. Steiner.

$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\alpha)$. $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ $x>0$.

$$var(X) \overset{def}{=} \int_0^\infty (x - \underbrace{E(X)}_{1/\alpha})^2 \cdot \alpha\, e^{-\alpha x}\, dx \overset{x>0}{=} \int_0^\infty x^2 \alpha\, e^{-\alpha x}\, dx - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}$$

Transformaø lineal de la variable X. →

② $X \longrightarrow var(X)$.

$Y = H(X) = a + bX$

. $var(Y) \overset{def.}{=} E((Y - E(Y))^2)$

$= E((\cancel{a} + bX - (\cancel{a} + bE(X)))^2)$

$= E(b^2 (X - E(X))^2)$

$\boxed{Var(a+bX) = b^2\, var(X)}$. → el término a traslada las cosas ⇒ no modifica la dispersión.

$\Rightarrow \boxed{DS(a+bX) = |b|\, DS(X)}$

③ X, Y v.a. con $var(X)$, $var(Y)$ conocidas.

$Z = X + Y$

¿ $var(Z) = var(X+Y)$?

$Var(Z) \overset{def}{=} E((Z - E(Z))^2)$

$= E((X + Y - E(X+Y))^2)$

$= E((X + Y - E(X) - E(Y))^2)$

$= E((X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2(X - E(X))(Y - E(Y)))$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\underbrace{E((X - E(X))(Y - E(Y)))}_{cov(X, Y)}$.

· $var(x+y) = var(x) + var(y) + 2\,cov(x,y)$.

· $cov(x,y) = E((x-E(x))(y-E(y)))$

$= E(xy - xE(y) - yE(x) + E(x)E(y))$ $\quad$ * $E(ctte) = ctte$ y $E(y) = ctte$.

$cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$.

Si x, y indep. $\Rightarrow cov(x,y) = 0$

$\Rightarrow var(x+y) = var(x) + var(y)$

Si $x_1 \dots x_n$ v.a. independientes $\Rightarrow var(\sum x_i) = \sum var(x_i)$.

$x \to B(n,p)$ $\quad$ $E(x) = n \cdot p$.

$x_i = \begin{cases} 1 & \text{i-ésima rep. éxito } (p) \\ 0 & \sim \ (1-p). \end{cases}$ $\quad$ $x_1 \dots x_n$ (indep.).

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad$ $var(x) = var(\sum x_i) = \sum var(x_i)$.

$var(x_i) \overset{def.}{=} (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2(1-p)$.

$= (1-p)p(1-p+p) = p(1-p)$ $\quad$ ⇝ ya que las var. son indep.

Def: sean x, y v.a.

$\rho_{xy} = \dfrac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)var(y)}} = \dfrac{cov(x,y)}{DS(x) \cdot DS(y)}$.

↓

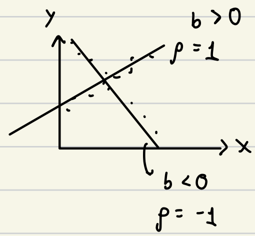
coef. de correlación entre x e y.

Prop

a) $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

b) Si x, y indep $\Rightarrow \rho_{xy} = 0$

c) $y = a + bx \iff \rho^2_{xy} = 1$.



* si $\rho \approx 0 \not\Rightarrow$ que son indep.

Def: Esperanza condicional

Sean X, Y, v.a. se define la esperanza condicional de X dado $Y=y$.
como
$$E(X|y) = \begin{cases} \sum x_i P(x_i|y) \\ \int x \, f_{X|Y}(x|y)\, dx \end{cases}$$

$$E(X) = \begin{cases} \sum x_i P(x_i). \\ \int x f(x)\, dx \end{cases}$$

Teorema:

No depende de x ←

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X|Y}(x|y)\, dx. = \underline{H(y)}$$

$$E(H(Y)) \overset{teo}{=} \int \underbrace{H(y)} \, f_Y(y)\, dy$$

$$= \iint x \, f_{X|Y}(x|y)\, dx \, f_Y(y)\, dy$$

$$= \iint \frac{x \, f_{XY}(x,y)}{\cancel{f_Y(y)}}\, dx \, \cancel{f_Y(y)}\, dy$$

$$= \iint x \, f_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int x \int f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int x \, f_X(x)\, dx = E(X)$$

Teorema:

$$E_Y(E_X(X|Y)) = E(X)$$

$$E_X(E_Y(Y|X)) = E(Y)$$

c/r a la var Y

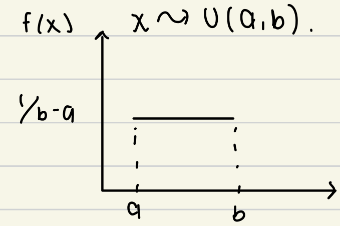
Ej: 0 ——— x ——— L

$X \sim U(0, L)$.

$Y|X \sim U(X, L)$.

$\cdot\ E(Y) = \int y\, f_Y(y)\, dy.$

$X \sim U(a,b).$



¿$f_Y(y)$?

$$E(Y) = E(\underbrace{E(Y|X)}_{\frac{X+L}{2}})$$

pto. medio

$E(X)$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(E(X) + E(L)\right)$$

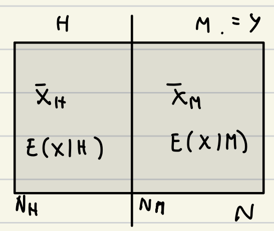
$$= \frac{1}{2}\left(E(X) + L\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} + L\right) = \frac{3L}{4}$$

· si Y es v.a. discreta, $E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} E(X|y_j)\cdot P(y_j).$

si Y es v.a. continua $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|y)\, f_Y(y)\, dy.$

X: Estatura

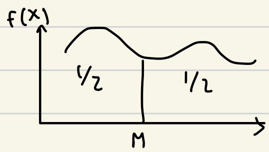


$$\bar{X} = E(X). = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

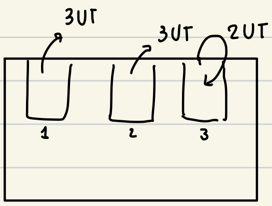
$$\hookrightarrow \boxed{\bar{X}_H \cdot \frac{N_H}{N} + \bar{X}_M \cdot \frac{N_M}{N} = \bar{X}}$$

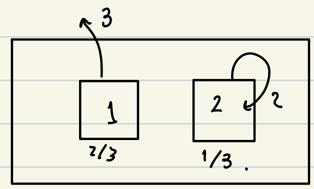
Def: Sea X v.a, se define la Mediana de X como (caso continuo) pto M t.q.

$P(X \geq M) = P(X \leq M)$



Ej





y. pta.

X: Tiempo en salir.

$E(X \mid Y=1) = 3$

$E(X \mid Y=2) = 2 + E(X)$

$\rightarrow \quad E(X) = 3 \cdot \underbrace{2/3}_{P(Y=1)} + \left(2 + E(X)\right) \cdot 1/3.$

$\rightarrow \quad E(X) = 2 + \frac{2}{3} + \frac{E(X)}{3}$

$\rightarrow \quad \frac{2E(X)}{3} = \frac{8}{3}$

$\rightarrow \quad \boxed{E(X) = 4}$

prop: por def.

X	$P(X)$
3	$2/3$
5	$1/3 \cdot 2/3.$
7	$1/3 \cdot 1/3 \cdot 2/3.$

x, y indep.

$\rightarrow \quad var(x-y) = var(x) + var(y)$

$\rightarrow \quad var(xy) \neq var(x)\,var(y)$

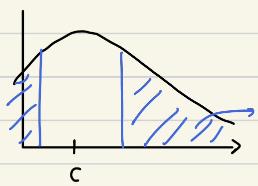
Teorema: Desigualdad de Chebyshev.

· Sea X v.a., $c \in \mathbb{R} \Rightarrow P(|x-c| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{E((x-c)^2)}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$

· Si $c = E(x)$

$P(|x-c| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{var(x)}{\varepsilon^2}, \ \forall \varepsilon > 0$

+ varianza, mayor la cota.



Dem. caso continuo

$$P(|x-c| \geq \varepsilon) \overset{def}{=} \int_{\{x \,/\, |x-c| \geq \varepsilon\}} f(x)dx \leq \int_{\{x \,|\, |x-c| \geq \varepsilon\}} \frac{(x-c)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-c)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx$$

agrego colas positivas.

$\rightarrow |x-c| \geq \varepsilon$

$\dfrac{(x-c)^2}{\varepsilon^2} \geq 1$

teo. del inconsiente. $= \dfrac{E((x-c)^2)}{\varepsilon^2}$

Propuesto Desigualdad de Markov.

sea x v.a. no negativa, $P(x \geq 0) = 1$

$P(x > t) \leq \dfrac{E(x)}{t}, \ \forall t > 0$

Distribuciones importantes

Modelos probabilísticos

Resumen:

① Distribuø Binomial:

Se dice que x tiene distribución Binomial de parámetros n, p $(x \sim B(n,p))$ ssi

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, \dots, n.$

X. N° de "éxitos" en n repeticiones indep. de un exp. Bernoulli (p)
se puede demostrar que:

ⓐ $E(X) = np$, $var(X) = np(1-p)$
ⓑ si $X_1 \dots X_n$ v.a. i. $X_i \sim B(n_i, p)$
$\Rightarrow \sum X_i \sim B(\sum n_i, p)$.

Usando ⓑ si $X \sim B(n,p) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $X_i \sim B(1,p)$ es decir $X_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$

② Distribución binomial negativa (pascal).

se dice que X tiene distrib. Binomial Negativa de parámetros ,
$P(X \sim BN(r,p))$ ssi

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \qquad k = r, \dots, \infty$$

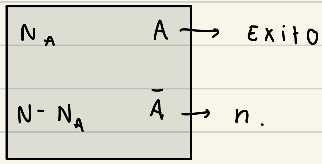
X : N° de rep. (indep.) para obtener r éxitos.

se puede dem. que:
ⓐ $E(X) = \frac{r}{p}$, $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$
ⓑ Si $X_1 \dots X_n$ v.a. i. $X_i \sim BN(r_i, p) \Rightarrow \sum X_i \sim BN(\sum r_i, p)$.

Caso particular: si $r = 1$, es decir:
$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1 \dots \infty$
se dice que X tiene distribución Geométrica de parámetro p $(X \sim G(p) = BN(1,p))$,
es decir.
X: N° de rep. para obtener el 1° éxito.

usando ⓑ si $X \sim BN(r,p)$,
$X = \sum_{i=1}^{r} X_i$ $X_i \sim BN(1,p) = G(p)$.

③ Distribuø Hipergeométrica:



X: N° de objetos "A" entre los n.

c/rep. → Extracciones independientes.

$$X \sim B\left(n ;\ p = \frac{N_A}{N}\right)$$

sin rep. → Repetiøes no son indep.

supongo $n < N_A$ $\qquad$ $R_X = \{0, \dots, n\}$.
$\qquad\quad\ $ $n < N - N_A$

$$P(X = k) = \frac{\binom{N_A}{k}\binom{N-N_A}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

se dice que X tiene distribuø Hipergeométrica de parámetros n, N_A, N ($X \sim H(n, N_A, N)$).

se puede demostrar que:

ⓐ $E(X) = np$; $\quad var(X) = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

$p = \frac{N_a}{N}$

ⓑ [cuando N es parecido a ∞, la reposiø es parecida a la no reposiø.]

$$H(n, N_A, N) \xrightarrow[N \to \infty]{} B\left(n, p = \frac{N_A}{N}\right)$$ en el sentido de

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\binom{N_a}{k}\binom{N-N_A}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

④ Distribución de Poisson.

se dice que X tiene distribuø de Poisson de parámetro λ ssi

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k=0,\dots\infty.$$

se puede dem que:

ⓐ $E(X) = \lambda$, $var(X) = \lambda$.

ⓑ si $X_1, \dots X_n$ v.a.i. $X_i \sim P(\lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(\sum \lambda_i)$.

ⓒ $B(n,p) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np\to\lambda}]{} P(\lambda)$

en el sentido.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np=\lambda}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

En general la distribuø Poisson se usa para modelar variables del tipo:

X : N° de "eventos" que ocurren en un intervalo de tiempo.

por ej:

X : N° accidentes diarios en un pto. de la carretera.

En gral. se acostumbra definir.

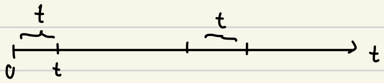
X_t : N° de eventos en un tiempo t.

$X_t \sim P(\lambda t)$. $E(X_t) = \lambda t$.

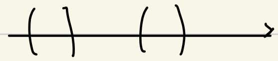
λ : N° promedio de eventos por unidad de tiempo.

lo anterior se puede demostrar bajo las siguientes condiøes:

→ No importa el sino el ancho del intervalo →



cosas indep. si los intervalos son disjuntos →



$\rightarrow P(X_{\Delta t} = 1) \approx \lambda \Delta t \qquad \Delta t \approx 0$

· No permito que ocurran 2 o + eventos simultáneos.

$P(X_{\Delta t} \geq 2) \approx 0$

$P(X_{\Delta t} = 0) \approx 1 - \lambda \Delta t$

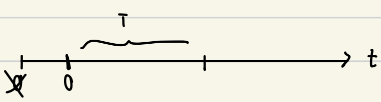
X_s : N° de "eventos" en una superficie de tamaño s.

$X_s \sim P(\lambda s)$.

· N° promedio de estrellas x unidad de volumen.

X_v : N° de objetos en un volumen v.

$X_v \sim P(\lambda v)$.



T : tiempo para el prox. evento

$X_t \sim P(\lambda t)$.

$P(T > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$

$1 - F_T(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$

$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (T \sim e(\lambda))$

Caso continuo

18 mayo

① Distribución uniforme

Se dice que X tiene distribuø uniforme en el intervalo (a,b) $(X \sim U(a,b))$

sii $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \sim \end{cases}$

Se puede demostrar que:

$E(X) = \frac{a+b}{2}$, $var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

② Distribución Gamma.

Previo: $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \qquad \forall p > 0$

(converge) → Funø gama (Funø Factorial).

$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$.

$p = n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$

$\vdots$

$\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1)$

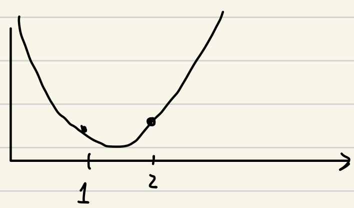
$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

$\Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$

$\Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$

$\Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$.

Factoriales para n° no naturales. ←



$\boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$,

$2,5! = \Gamma(3,5)$
$= 2,5 \cdot \Gamma(2,5)$
$= 2,5 \cdot 1,5\ \Gamma(1,5)$
$= 2,5 \cdot 1,5 \cdot 0,5 \cdot \underbrace{\Gamma(0,5)}_{\sqrt{\pi}}$

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \cdot \ln(x)\, dx$$

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x} \ln(x)\, dx = -\gamma \qquad \gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \ln(n)\right)$$

$\gamma = 0{,}57721$

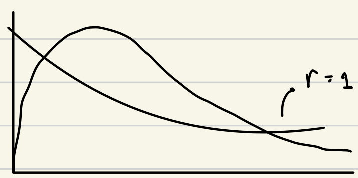
cte de Euler-Mascheroni

Distribuø gamma

Se dice que X tiene distribuø Gama de parámetros r,α ($X \sim G(r,\alpha)$) ssi:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^r x^{r-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(r)} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \quad (r, \alpha > 0).$$

$$\int_0^\infty x^{r-1} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{\Gamma(r)}{\alpha^2}$$



Se puede demostrar que:

(a) $E(X) = \dfrac{r}{\alpha}$, $Var(X) = \dfrac{r}{\alpha^2}$

(b) Si $X_1 \ldots X_n$ v.a. indep. $X_i \to G(r_i, \alpha)$.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(\sum r_i, \alpha)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^\infty x \cdot \frac{\alpha^r x^{r-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(r)}\, dx$$

$$= \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty x^r e^{-\alpha x}\, dx = \frac{\cancel{\alpha^r}}{\cancel{\Gamma(r)}} \cdot \frac{\overbrace{\Gamma(r+1)}^{r\cancel{\Gamma(r)}}}{\alpha^{\cancel{r}+1}} = \frac{r}{\alpha}$$

Caso particular

1) Si $r = 1$

$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ $x > 0$

Se dice que X tiene distribuø exponencial de parámetro α.

($X \sim e(\alpha)$) $e(\alpha) = G(1,\alpha)$

caso part. de distrib. Gamma

$X_1, \dots, X_r \quad X_i \sim e(\alpha) = G(1, \alpha)$

$$X = \sum_{i=1}^{r} X_i$$

Generalmente, una distribuø Gamma se usa para modelar variables del tipo.
T: Tiempo para que ocurran "r" eventos.

2) Si $r = n/2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, es decir,

$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} x^{-1/2} e^{-x/2}}{\Gamma(n/2)} \qquad x > 0$$

Se dice que X tiene distribuø chi cuadrado con n grados de libertad, se denota $X \sim \chi^2_n$

$$\chi^2_n = G\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$E(e(\alpha)) = \frac{1}{\alpha}$$

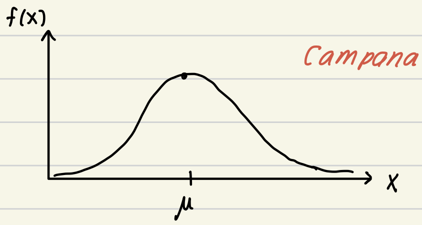
la frecuencia.

3) Distribución NORMAL

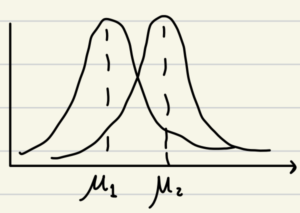
Se dice que X tiene distribuø normal de parámetros μ, σ^2 ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) ssi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

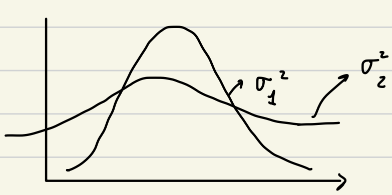
simétrica c/r a μ (funø par).



Campana de Gauss.



$E(X) = \mu$.



$\rightarrow Var(X) = \sigma^2$.

$\sigma = DS(X)$.

Obs si $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, ie: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $-\infty < x < \infty$

$X \sim N(0,1)$ se habla de una Normal estandarizada.

Propiedad sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

monótona y diferenciable

$Y = a + bX$ ¿$f_Y(y)$?

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

$$x = \underbrace{\frac{y-a}{b}}_{H^{-1}(y)} \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{b}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-\left(\frac{y-a}{b} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{|b|}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma |b|} e^{-\frac{(y-(a+b\mu))^2}{2b^2\sigma^2}} \qquad -\infty < y < \infty$$

$\sim$ $Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$.

caso particular: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\overset{Z}{Y} = \frac{X-\mu}{\sigma} = \underbrace{-\frac{\mu}{\sigma}}_{a} + \underbrace{\frac{1}{\sigma}}_{b} X$$

$Z \sim N(0, 1)$

Cálculo de probabilidades

sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. se desea calcular $P(X < a)$

$$P(X < a) \overset{def.}{=} \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

no se puede hacer.

$Z \sim N(0,1)$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

No se puede calcular? $\downarrow$ Tabla! $\leftarrow$

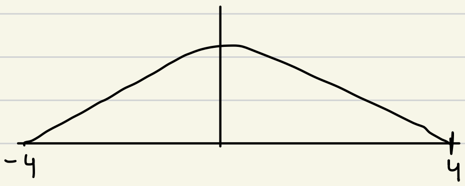
$$= \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz$$

Está tabulado. $\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz$ para $\neq$ valores de z.

Por ej: $P(Z < 1{,}96) = 0{,}975$

$P(Z < -1{,}0) = 0{,}1587$.

Se puede probar numéricamente que $P(Z < -4) = P(Z > 4) \approx 0$



$Z \sim N(0,1)$.

Ej: $X \sim$ peso.

$$X \sim N(\underset{\mu}{70}, \underset{\sigma = 5}{25})$$

$R_X = (50, 90)$

$\downarrow$ área concentrada acá.

$-4 < Z < 4$

$\downarrow$

$-4 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 4 \implies \mu - 4\sigma < X < \mu + 4\sigma$

$$\boxed{50 < x < 90}$$

$\to$ Puede aparecer una persona de 90 kg pero tiene prob. 0

Propiedad

Sean $X_1 \ldots X_n$ v.a. i. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

$$\to \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum \sigma_i^2\right)$$

Si $\mu_i = \mu$, $\sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i$

$$\implies \sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2).$$

X_i : peso i-ésima persona $i = 1, 2.$

$$P\left(\frac{X_1 + X_2}{2} > 75\right)$$

$X_i \sim N(70, 25)$. $i = 1, 2.$

$X_1 + X_2 \sim N(2 \cdot 70, 2 \cdot 25)$

$X_1 + X_2 \sim N(140, 50)$

$$P\left(\frac{X_1 + X_2}{2} > 75\right) = P(X_1 + X_2 > 150)$$

$$= P\left(\frac{(X_1 + X_2) - 140}{\sqrt{50}} > \frac{150 - 140}{\sqrt{50}}\right)$$

$$= P(Z > 1,41) = 0,079 \approx 0,08 = \boxed{\frac{8}{100}}$$

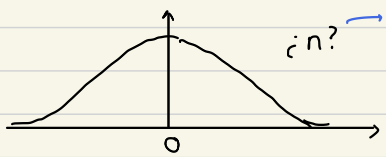
$$\frac{10}{\sqrt{50}} = \frac{10}{\sqrt{25 \cdot 2}} = \frac{10}{5\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$ //

Ej: $X_1, \dots X_n$

$X_i \sim N(0, \sigma^2) \quad \sigma^2 = 4$

$P(|\bar{X}| < 0,5) \geq 0,95$

X_i: i-ésimo error de medición



¿n? → cuantas mediciones debo hacer para que el promedio de los errores sea < 0,5.

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0 \cdot n, \sigma^2 \cdot n)$

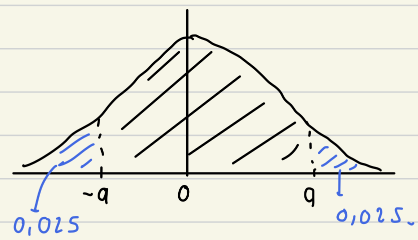
$\rightarrow \bar{x} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$

$\rightarrow \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$

$P(|\bar{x}| < 0,5) \geq 0,95$

$P(-0,5 < \bar{X} < 0,5) \geq 0,95$

$P\left(\frac{-0,5-0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{0,5-0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \geq 0,95.$



$\cdot\ P\left(\frac{-0,5}{\sigma/\sqrt{n}} < z < \frac{0,5}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \geq 0,95.$

$\cdot\ P(z < a) = 0,975.$

$a = 1,96$

$\rightarrow \frac{0,5}{\sigma/\sqrt{n}} = 1,96$

$n = \frac{1,96^2 \cdot \sigma^2}{0,5^2} = \frac{1,96^2 \cdot 4}{0,5^2}$

$= 61,43$

$\boxed{n = 62}$

↳ debo tomar 62 mediciones para que el error sea < a 0,95.

Función generadora de momentos.

Def: sea X v.a. se define la f.g.m. de X como
$$M_X(t) = E(e^{tX}) \quad \text{como} \quad e^{tX} = H(X)$$

$$\Rightarrow M_X(t) \overset{T.I}{=} \begin{cases} \sum e^{tx_i} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases}$$ ⟶ Transformada de Laplace.

Ej $X \sim B(n,p)$

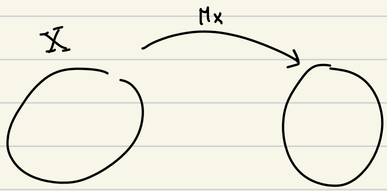
$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (e^t p + 1 - p)^n$$

Obs

1) $M_X(t)$ no necesariamente existe para "t", salvo $M_X(0) = 1$.
2) $M_X(t)$ equivale a la transformada de Laplace.



⟶ cambiarse de espacio

3) Por 1) a veces se acostumbra definir la "función característica" como:
$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), \quad i^2 = -1$$ ⟶ Transformada de Fourier.

Propiedades:

1) $$\left.\frac{d^n M_X(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = E(X^n)$$

$$\rightarrow M_X(t) = E(e^{tX}) \quad \rightarrow \quad \frac{dM_X(t)}{dt} = E(Xe^{tX}) \Big|_{t=0} = \underbrace{E(X^n)}_{\text{Momento de orden } n}$$

⋮

desarrollo en Taylor ←

2) $M_X(t) = M_x(0) + M_x'(0)t + M_x''(0)\frac{t^2}{2!} + \cdots$

$M_x(t) = 1 + E(X)t + E(X^2)\frac{t^2}{2!} + \cdots$

$M_x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} E(X^j)\frac{t^j}{j!}$

3) sea X con $M_x(t)$, $Y = aX+b$

$M_Y(t) = E(e^{tY})$

$= E(e^{t(a+bX)})$

$= E(e^{ta}e^{tbX})$

$= e^{ta}\underbrace{E(e^{tbX})}_{M_x(tb)}$

$M_{a+bX}(t) = e^{ta}M_x(tb)$.

4) sean X, Y. v.a. con f.g.m. $M_x(t), M_y(t)$

$Z = X+Y$

$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E(e^{t(X+Y)})$

$= E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY})$

$M_{X+Y}(t) = M_x(t)M_y(t)$.

5) sean X, Y. v.a. con f.g.m. $M_x(t)$, $M_y(t)$

si $M_x(t) = M_y(t)$ $\forall t \Rightarrow X \equiv Y$ → Inyectividad!

Ej $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow M_X(t) = e^{\left(tn + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)}$

$X_1 \ldots X_n$ v.a.i $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

$M_{\sum X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\left(t\mu_i + t^2\frac{\sigma_i^2}{2}\right)} = e^{t\sum\mu_i +}$

se puede hacer xq parte de la generadora ← de momentos y pasa a las variables.

↳ prop (5).

$\Rightarrow \sum X_i \sim N(\sum\mu_i, \sum\sigma_i^2)$

Teoremas límites

si $n \to \infty$ la prob. acá se va a 0.

Algo sobre convergencia

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $a_n \to a$

Ej

$$X_n = \begin{cases} 0 & , 1 - 1/n \\ e^n & , 1/n \end{cases}$$

prob:

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$X_n \to 0$?

$E(X_n) = 0 \cdot (1 - \frac{1}{n}) + e^n \cdot \frac{1}{n}$

$E(X_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$?

→ No hay un sólo tipo de convergencia.

Tipos

→ convergencia casi segura
→ convergencia en probabilidad (2)
→ convergencia en media cuadrática (3)
→ convergencia en distribución. (1)

(1) sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $F_{X_n}(x)$ f distribución de X_n.
sea X v.a. con $F_X(x)$ f. distribución

se dice que X_n converge a X en distribución ($X_n \xrightarrow{D} X$) ssi
$\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ es decir.

$\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq t) = P(X \leq t)$

Ej $X_n \sim B(n,p)$

$X_n \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np=\lambda}]{D} P(\lambda)$

(2) sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de v.a. , $b \in \mathbb{R}$.

se dice que X_n converge en probabilidad a b.
($X_n \xrightarrow{P} b$) ssi, $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - b| > \varepsilon) = 0$ $\forall \varepsilon > 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - b| < \varepsilon) = 1$ $\forall \varepsilon > 0$.

Ej : $\begin{cases} 0 & 1-1/n \\ e^n & 1/n \end{cases}$ $X_n \to 0$.

3 sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de v.a. $b \in \mathbb{R}$. se dice que X_n converge a b en media cuadrática ($X_n \xrightarrow{m.c} b$) ssi

$$\lim_{n\to\infty} E((X_n-b)^2) = 0.$$

$$X_n = \begin{cases} 0 & 1-1/n \\ e^n & 1/n \end{cases}$$

$$E((X_n-b)^2) = (0-b)^2 \cdot (1-\tfrac{1}{n}) + (e^n-b)^2 \cdot \tfrac{1}{n}$$

$$= b^2(1-\tfrac{1}{n}) + \left(\tfrac{e^n}{\sqrt{n}} - \tfrac{b}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$\lim = b^2 + \infty = 0$

$b \overset{?}{=} \infty$ $\longrightarrow$ diverge

se puede demostrar que:

1) si $\lim E(X_n) = b$, $\lim Var(X_n) = 0$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{m.c} b$.

2) si $X_n \xrightarrow{m.c} b \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} b$

prop. usando des. Chebyshev.

22· mayo

1) Ley de los grandes números (Débil).

· sea $X_1, \ldots, X_n$ v.a independientes e identicamente distribuidas (v.a. i, i.d).

sea $E(X_i) = E(X)$; $var(X_i) = var(X)$ $\forall i$

$$\boxed{\bar{X} \xrightarrow{P} E(X)}$$

Dem D.Ch. $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall X$

$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) =$

$E(\bar{X}) = \frac{\sum E(X_i)}{n} = E(X)$

$var(\bar{X}) = var\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)$

$= \frac{var(X)}{n}$

· $P(|\bar{X} - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{n\varepsilon^2}$ $\forall \varepsilon > 0$ $n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} P(|\bar{X} - E(X)| \geq \varepsilon) = 0$ $\forall \varepsilon > 0$

$\bar{X} \xrightarrow{P} E(X)$

caso particular (importante)

sea E experimento A evento t.q. $P(A) = p$. Supongamos que E se repite n veces y se define $f_n(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{n° de veces que A ocurre.}}{n}$

↓

frecuencia relativa.

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i\text{-ésima rep. A} \quad (p) \\ 0 & \quad\quad\sim \quad\quad\quad (1-p) \end{cases}$ $\qquad E(X_i) = p$

$f_n(A) = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$

$f_n(A) \xrightarrow{P} p$

2) Teorema central del límite. (TCL)

nota∅ (no necesaria# distrib. normal).

sea $X_1 \dots X_n$ v.a. "independientes" t.q. $E(X_i) = \mu_i = \mu_i < \infty$, $var(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ $(\forall i)$.

sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\quad \left(E(S_n) = \sum \mu_i \; ; \; var(S_n) = \sum \sigma_i^2 \right)$

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{var(S_n)}}$$

se puede demostrar que bajo condiciones muy generales

$$Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{D} Z \sim N(0,1)$$

$$\to \lim_{n \to \infty} P(Z_n \leq z) = P(Z \leq z).$$

$$Z_n \approx N(0,1)$$
n grande.

caso particular.

$X_1 \dots X_n$ v.a.i id

$E(X_i) = \mu \quad ; \quad var(X_i) = \sigma^2$

$E(S_n) = n\mu \quad ; \quad var(S_n) = n\sigma^2$

$$Z_n = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \begin{matrix} \cdot 1/n \\ \cdot 1/n \end{matrix}$$

$$\boxed{Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}}$$ → Forma de escribiro en términos de promedio.

para el TCL. no necesito la distrib. pero sí la E( ) y la Var( )

Ej 1) X : Duración "equipo" (UT)

$$X \sim \mathcal{E}\left(\alpha = \frac{1}{10}\right) \quad E(X_i) = \frac{1}{\alpha} = 10 \;; \quad Var(X_i) = \frac{1}{\alpha^2} = 100$$

n = 15 equipos

$$P(\text{sist. dure más de } 140 \text{ UT}) = P\left(\sum_{i=1}^{15} X_i > 140\right)$$

X_i : Duración del i-ésimo equipo

$$P\left(\sum_{i=1}^{15} X_i > 140\right) = P\left(\frac{\sum^{15} X_i - 15\cdot 10}{\sqrt{15}\cdot 10} > \frac{140 - 15\cdot 10}{\sqrt{15}\cdot 10}\right)$$

$$= P\left(Z_n > \frac{-10}{\sqrt{15}\cdot 10}\right)$$

$$= P(Z_n > -0{,}25) \approx \boxed{P(Z > -0{,}25)}$$

sol. aproximada.

si $X_i \sim \mathcal{E}(\alpha) = G(1,\alpha)$

$\sum X_i \sim G(n=15, 16)$.

$$P\left(\sum X_i > 140\right) = \boxed{\int_{140}^{\infty} \frac{\alpha^{15} x^{15-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(15)} dx}$$

sol. exacta

2) $X \sim B(10, \frac{1}{2})$ $\quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\quad k = 0, \ldots, n.$

$$P(X \geq 7) = \sum_{k=7}^{10} P(X=k) = P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10).$$

$$= \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$(p = 1-p)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10}(120 + 45 + 10 + 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10}(176)$$

$\cdot P(X \geq 7) = 0{,}1719$

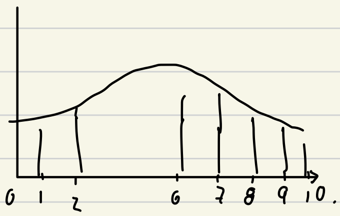
$\cdot\ X_i = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ 0 & 1-p = 1/2 \end{cases}$ $\cdot\ var(X_i) = p(1-p)$

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i$$

$$P(X \geq 7) = P\left(\sum^{10} X_i \geq 7\right)$$

$$= P\left(\frac{\sum X_i - 10 \cdot 1/2}{\sqrt{10 \cdot 1/2 \cdot 1/2}} \geq \frac{7 - 10 \cdot 1/2}{\sqrt{10 \cdot 1/2 \cdot 1/2}}\right) = P(Z_n \geq 1{,}27) = 1 - 0{,}897$$

$= 0{,}103 \longrightarrow$ mala aproximaØ.



$\longrightarrow$ corrección por continuidad.

$$\cdot\ P(X \geq 7) = P\left(\sum X_i \geq 7\right)$$

$$= P(X > 6{,}5)$$

$$= P(Z_n \geq 0{,}95) \approx P(Z \geq 0{,}95) = 1 - 0{,}828$$

$= 0{,}172 \longrightarrow$ *buena aproximaØ*

en este caso 10 es suficiente# grande $\longleftarrow$

· usando el mismo procedi@ que en el ej. anterior, se puede probar que:

$$Z_n = \frac{X - E(X)}{\sqrt{var(X)}} \longrightarrow Z \sim N(0,1)$$

si $X \sim B(n,p)$ n grande

$X \sim BN(r,p)$ r grande.

$X \sim P(\lambda)$ λ grande

$X \sim G(r,\alpha)$ r grande

este está mejor aproximado xq es simétrico. 26·mayo

Obs:

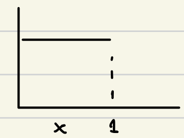
ⓐ n grande

- TCL . $\forall n$
- $B(n,p) \rightsquigarrow N$

$np \geq 5$

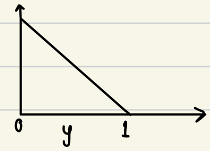
$n(1-p) \geq 5$

Ej: $p = 0{,}5$, $n = 10$



$X_1 \dots X_n$

$\sum^n X_i = S_n$



$Y_1 \dots Y_n$

$\sum^n Y_i = S_n$

Poisson → $X \sim P(\lambda = 20)$

$X_1 \dots X_{20}$ $\qquad$ $Y_1 \dots Y_{40}$

$X_i \sim P(1)$ un poco más simétrica. ← $Y_i \to P(1/2)$

$X = \sum_{i=1}^{20} X_i$ aproximaciones iguales $Y = \sum_{i=1}^{40} Y_i$

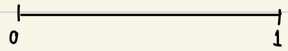
ⓑ 1) Si $X_1 \dots X_n$ v.a.i.id. basta exigir $E(X_i) < \infty$, $Var(X_i) < \infty$

id. ↓ idénticamente distribuidas

2) Si $X_1, \dots X_n$ v.a.i. y acotadas $|X_i| < K$ $\forall i$

Si $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} Var(X_i) = \infty \Rightarrow$ T.C.L.

3) Ej. $X \sim U(0,1)$



0, 1, 2, .. 9 $\to X_i = \begin{cases} 0 & 1/10 \\ 1 & 1/10 \\ 2 & \vdots \\ \vdots & \\ 9 & \end{cases}$

$X = 0, X_1 X_2 X_3$

$X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cdot 10^{-i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \sim N($

↳ para que se cumpla TCL, las variables deben pesar como lo mismo.

no es válido el TCL, no
↳ genera nº con distribución normal

ya que

$y_1 \approx 10\, y_2 \approx 100\, y_3 \dots$

funø generadora de momentos ← f.g.M

Var. id. : todas tienen la misma esperanza y var.

Dem TCL

Recuerdo: - $X_1 \dots X_n$ v.a.i $M_{\sum X_i}(t) = \prod M_{X_i}(t)$

- $M_{a+bX}(t) = e^{at} M_X(bt)$

- $M_X(t) = 1 + E(X)t + E(X^2)\frac{t^2}{2!} + \dots$

$$z_n = \frac{\sum X_i - \mu n}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

$$z_n = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)}{\sqrt{n}} = \frac{\sum Y_i}{\sqrt{n}}$$

, $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$, $E(Y_i) = 0$ $\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma} = E(Y_i)\right)$
$var(Y_i) = 1$

$Y_i = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \Rightarrow$ existe $M_{Y_i}(t) = M_Y(t)$

$$M_{\sum Y_i}(t) = \left(M_Y(t)\right)^n \Rightarrow M_{z_n}(t) = M_{\frac{\sum Y_i}{\sqrt{n}}}(t) = \left(M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$$M_Y(t) = 1 + E(Y)t + E(Y^2)\frac{t^2}{2} + R.$$

$$M_Y(t) = 1 + 0\cdot t + 1\cdot\frac{t^2}{2} + R$$

$$M_Y(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + R.$$

resto depende de esto.

$$M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n} + R\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$\Rightarrow M_{z_n}(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + R\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)^n \quad \to \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{z_n}(t) = e^{t^2/2} = M_z(t)$$

$$z \sim N(0,1).$$

$\Rightarrow \quad Z_n \xrightarrow[D]{} Z \sim N(0,1)$
T.C.L.

problema

1) sea $Z_1 \dots Z_n$ v.a.i. $Z_i \sim N(0,1)$.

* En el aux. de ayer: $Z_i^2 \sim G(1/2, 1/2) = \chi^2_1$

Prop. distrib. Gamma. $\longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad Y = \sum_{i=0}^{n} Z_i^2 \sim G(n/2, 1/2)$$

$$f_Y(y) = \frac{(1/2)^{n/2} y^{n/2-1} e^{-y/2}}{\Gamma(n/2)}$$

$T = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2}$

$T = \sqrt{Y} \quad \Rightarrow \quad Y = T^2 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2t$

$$f_T(t) = \frac{(1/2)^{n/2} (t^2)^{n/2-1} e^{-t^2/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot 2t = \frac{2^{-n/2+1}\, t^{n-1}\, e^{-t^2/2}}{\Gamma(n/2)}$$

· Si $n=2$ se denomina distribución de Rayligh.
$n=3$ " " " " Maxwell.

2) Gas ideal.

X_1, X_2, X_3 velocidad según ejes.

$X_i \sim N(0, \sigma^2)$

Se desea estudiar $S = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$

si $Z_i = \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$T = \sqrt{\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2}$$ distribuø Maxwell.

$$f_T(t) = \frac{2^{-0,5}\, t^2\, e^{-t^2/2}}{\Gamma(3/2)}. \longrightarrow T = \frac{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}}{\sigma} = \frac{S}{\sigma}$$

$$\Rightarrow f_S(s) = \frac{2^{-0,5} \left(\frac{S}{\sigma}\right)^2 e^{\frac{-\left(\frac{S}{\sigma}\right)^2}{2}}}{\Gamma(3/2)} \cdot \frac{1}{\sigma}$$

$0,5 \cdot \Gamma(3/2) = 0,5\sqrt{\pi}$

Mecánica clásica ↩

$\boxed{\sigma^2 = \frac{KT}{m}}$, T : Temperatura.
m : masa
k : cte de Boltzman.

→ Distribuø de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

Estadística

29. mayo

Def: Métodos
trabajar
datos (cuantitativos)
inferir.

* X (que se mide ; donde se mide)
↓
poblaø.

1) Muestreo
Diseño experimental.
2) $\bar{x}$
3) Infiero.

Supondremos que X tiene una distribución de probabilidades cuya densidad (continuo) o funø de probabilidad (discreto) denotamos $f(x)$.

a) Ej: X: peso personas en santiago.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x;\mu,\sigma^2) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

X: N° partículas que emite fuente.

b) $X \sim P(\lambda)$

$$f(x,\lambda) = f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda}{x!} = P(X = x) \quad x = 0, 1 \ldots$$

Duraø equipos.

$X \sim e(\alpha)$

$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} = f(x, \alpha)$

En general si θ es un (unos) parámetro que caracteriza la distribución de probabilidades, denotamos $f(x,\theta)$.

Def Sea X v.a. con distribuø dada por $f(x,\theta)$. Se define una "muestra aleatoria" de tamaño n de X (o de la poblaø en estudio) como un conjunto. $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. a X.

Informalmente, una m.a. es medir n veces, donde
X_i: valor de la i-ésima repetiø.

Def Sea X v.a. y $X_1 \ldots X_n$ m.a. de X; se define un estadístico (a) como una funø real de $(X_1 \ldots X_n)$. Es decir $H(X_1 \ldots X_n)$.

Def: se define la distribuø muestral del estadístico $H(\vec{x})$ simplemente como su distribuø de probabilidades.

$$H(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} \frac{\sum_i x_i}{x} = \frac{\sum x_i}{n} \\ \text{Max}(x_i) \text{ etc.} \end{cases}$$

Ej: a) $H(\vec{x}) = \sum x_i \rightsquigarrow N(n\mu; n\sigma^2)$ → suma de normales.

$= \bar{x} \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2/n)$

b) $H(\vec{x}) = \sum x_i \rightsquigarrow P(n\lambda)$. → suma de Poissons.

$= \bar{x} \underset{n \text{ grande}}{\rightsquigarrow} N(\lambda, \frac{\lambda}{n})$

Estimaø de parámetros

· sea X v.a. cuya distribuø de probabilidades está dada por $f(x, \theta)$ donde θ es un parámetro desconocido. El problema a resolver es, dado que se tiene una m.a. $x_1 \dots x_n$ encontrar algo que se aproxime a θ.

Def: se define un estimador de θ ($\hat{\theta}$) como un estadístico $H(x_1 \dots x_n)$ usado para aproximarse a θ.

X: peso (sigo.)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$x_1 \dots x_n$

$H(x_1 \dots x_n) = \hat{\mu} \approx \mu$

$\rightarrow \boxed{\hat{\mu} = \bar{x}}$

estimador esperable: promedio de la muestra. ←

Dos problemas a resolver

1) Determinar que significa que $\hat{\theta}$ sea un buen estimador o bien si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son dos estimadores como decidir cual es mejor.

2) plantear método para encontrar estimadores.

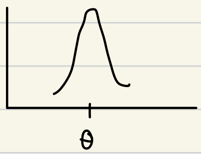
Entre 2 estimadores elijo el con menor ECM

Cristerios de estimaø

Sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ, $\hat{\theta}$ será un buen estimador si está cercano a θ, como $\hat{\theta}$ es una v.a. lo anterior debe entenderse como que su distribuø de probabilidades está concentrada alrededor de θ.

θ : Número (desconocido)

$\hat{\theta} = H(\vec{x})$ v.a.



$d(\hat{\theta}\,;\theta)$ pequeña

$\Downarrow$

$E\left((\hat{\theta}-\theta)^2\right)$

= Error cuadrático medio.

$= ECM(\hat{\theta})$

$x = \begin{cases} 1 & 1/6 \\ 2 & 1/6 \\ \vdots & \vdots \\ 6 & 1/6 \end{cases}$

$\cancel{(X-1)^2}$

x tiene muchos valores.

$\hat{\theta}_1$ será mejor $\hat{\theta}_2$ si $ECM(\hat{\theta}_1) < ECM(\hat{\theta}_2)$

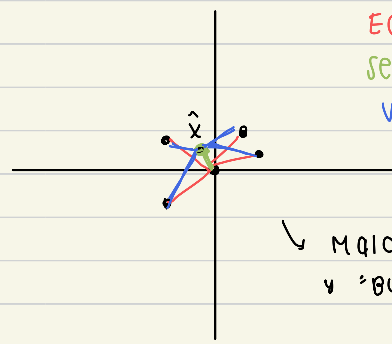
· se puede demostrar (tarea 2) . $ECM(\hat{\theta}) = \underbrace{var(\hat{\theta})}_{\text{errores aleatorios}} + \underbrace{(E(\hat{\theta})-\theta)^2}_{\text{errores sistemáticos.}}$

· $E(\hat{\theta}) - \theta$ = sesgo de $\hat{\theta}$.

$ECM(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + s^2(\hat{\theta})$

→ Buena presiø y mala exactitud

✓ Buena var. Mal sesgo.



↘ Mala presiø y "Buena" exactitud.

En general, se debe hacer un compromiso entre el sesgo y la varianza.
Se dice que un estimador es insesgado ssi $s(\hat{\theta}) = 0$; $E(\hat{\theta}) = 0$

Ej: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\theta = \mu$.

- x_1, x_2 , $\hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \bar{x}$

$E(\hat{\mu}) = \mu$, $var(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{2}$ $\longrightarrow$ $ECM(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{2} + 0 = \frac{\sigma^2}{2}$.

para la prueba →

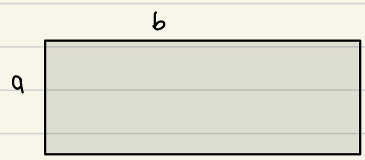
¿cuál es el mejor estimador según ECM?

- X_1, X_2, X_3

$$\hat{\hat{\mu}} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$E(\hat{\hat{\mu}}) = \mu \quad , \; Var(\hat{\hat{\mu}}) = \frac{\sigma^2}{3}$$

$$ECM(\hat{\hat{\mu}}) = \frac{\sigma^2}{3} \quad \Longrightarrow \hat{\hat{\mu}} \text{ es mejor}$$



$A = ab$

con un error σ^2

$X \sim N(a, \sigma^2)$ $\quad$ $Y \sim N(b, \sigma^2)$

$X_1 \dots X_n$ $\quad$ $Y_1 \dots Y_n$

$$\hat{A} = \frac{\sum X_i Y_i}{n} \qquad \hat{\hat{A}} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

def consistencia

Sea $X_1 \dots X_n$ m.a. de X, θ parámetro desconocido y $\hat{\theta}$ estimador. Se dice que $\hat{\theta}$ es estimador consistente (para estimar θ) ssi,

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta \quad \text{es decir}$$

ssi $\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$

$\forall \varepsilon > 0$.

Se puede probar que (planteado antes).

si $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$; $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0 \Longrightarrow \hat{\theta}$ es consistente.

Por ej. $\hat{\theta} = \bar{X}$ es consistente para estimar $\theta = E(X)$. (L.G.N.).

$$\bar{X} \xrightarrow[P]{} E(X)$$

Métodos de Estimaø

2-junio

i) Método de los Momentos.

$X_1 \dots X_n \quad (x)$

Momento de orden k ←

$M_k = E(X^k) \qquad k = 1, 2 \dots$

$\hat{M}_k = \dfrac{\sum X_i^k}{n}$ → estimamos por el promedio muestral.

la Esperanza

Promedios teóricos los ← estimo x promedios muestrales.

$\theta = g(M_1, M_2 \dots M_k).$

$\hat{\theta} = g(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots \hat{M}_k)$

Ej] $X \sim U(0, \theta)$

↳ desconocido.

como encuentro un estimador para θ. ←

$\hat{\theta}\,? \qquad X_1 \dots X_n$

$M_1 = E(X) = \dfrac{\theta}{2} \quad , \quad \theta = 2E(X) = 2M_1 = g(M_1).$

$\hat{\theta} = 2\hat{M}_1 = 2\bar{X}$

$\boxed{\hat{\theta} = 2\bar{X}}$

$* \ \bar{X} = 2 \dfrac{\sum X_i}{n}$ → la suma para n grande siempre tiene una dist. normal.

$\hat{\theta} = 2\bar{X} \underset{n \text{ grande}}{\approx} N\left(\theta, \dfrac{\theta^2}{3n}\right)$

Ej] $X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad , \hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$

el promedio teórico ← μ lo estimo por el promedio de la muestra.

$E(X) = \mu$

$\Rightarrow \hat{\mu} = \hat{E}(X) = \hat{M}_1 = \dfrac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$

$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$\sigma^2 = M_2 - M_1^2 = g(M_1, M_2)$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \hat{M}_2 - \hat{M}_1^2 = \dfrac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2$

$\therefore \hat{\mu} = \bar{X}$

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2$

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$ varianza muestral le creemos a lo que es más probable que ocurra.

ii) Método de Máxima verosimilitud.

8	B
2	R

(I)

2	B
8	R

(II)

se sacan con reposiø 10 fichas → 7 B, 3 R

$$P\left(\begin{matrix}7B\\3R\end{matrix}\middle| I\right) > P\left(\begin{matrix}7B\\3R\end{matrix}\middle| II\right)$$

caja lógica:

7 B
3 R

$X \to \underset{x_1 \dots x_n}{f(x, \theta)}$

funø de verosimilitud

$$\boxed{L(x_1 \dots x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)}$$

→ prod. xq son indep.

$\underset{x_1 \dots x_n}{f(x_1 \dots x_n, \theta)}$

$L(x_1 \dots x_n, \theta) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots X_n = x_n)$.

$L(x_1 \dots x_n, \theta)$ funø de verosimilitud.

EMV $\hat{\theta}(\theta)$

encontramos θ que haga + probable las cosas.

$L(x_1 \dots x_n, \hat{\theta}) = \underset{\theta}{\text{Max}}\ L(x_1 \dots x_n, \theta)$. ⇝ Prob. de encontrar máx.

Ej| $X \sim P(\lambda)$

f(x)

$P(X = x) = P(x, \lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$, $x = 0, 1, 2 \dots$

funø de verosimilitud en el caso de una Poisson.

$$\boxed{L(x_1 \dots x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}}$$

$$L(\vec{x}, \lambda) = \frac{e^{-\lambda n}\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$\underset{\lambda}{\text{Max}}\ L(\vec{x}, \lambda)$

mantiene máx y min.

$\ln(L(\vec{x},\lambda)) = \ell(\vec{x};\lambda) = -\lambda n + \sum x_i \ln\lambda + \underbrace{\ln K}_{\ln(\prod x_i!)}$

pto. en que se hace máx. la funø. ←

$\frac{d\ell}{d\lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\ell}{d\lambda} = 0$

$-n + \frac{\sum x_i}{\hat{\lambda}} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$

método de los momentos coincide c/ el de máx verosimilitud. (en este caso). ←

$\cdot\ \lambda = E(X) \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}$

$E(\hat{\lambda}) = \lambda$ ⟶ estimador insesgado

$var(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n}$

$\hat{\lambda} = \bar{x} \underset{n \text{ grande}}{\approx} N(\lambda, \frac{\lambda}{n})$

Ej| $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$f(x,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$x_1 \dots x_n$

$L(\vec{x},\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Maximizar c/r a μ y σ^2 ←

$L(\vec{x},\mu,\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

para la derivada

$\ell(\vec{x},\mu,\sigma^2) = K - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

$\hat{\mu}$ ya que son los ptos. que hacen que la deriv. sea $= 0$.

$\frac{\partial\ell}{\partial\mu} = \frac{2\sum_i(x_i-\hat{\mu})}{2\hat{\sigma}^2} = 0$

$\Rightarrow \sum(x_i-\hat{\mu}) = 0$

igual al método de los mom. ←

$\Rightarrow \sum x_i - n\hat{\mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \bar{x}$

$\frac{\partial\ell}{\partial\sigma^2} = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{\sum(x_i-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^4} = 0$

varianza muestral ← ☺

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$

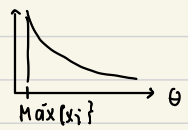
Método con el máximo verosímil es $\neq$ al de los momentos. $\leftarrow$

Ej| $X \sim U(0,\theta)$
$X_1 \dots X_n$

$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 \leq x \leq \theta$

$L(\vec{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n$ $\boxed{0 \leq x_i \leq \theta}$ → no sirve derivar e igualar a 0.

$\theta \geq \max(x_i)$



$\rightarrow \hat{\theta} = \text{Max}\{x_i\}$

con momentos
$(\hat{\theta} = 2\bar{x})$

Propiedades

- $\hat{\theta}$ EMV de θ → no son necesariamente insesgados, se pueden convertir en insesgados a través de operaciones simples.

$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$

$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$ → no es insesgado.

$\Rightarrow \hat{\hat{\sigma}}^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right)\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ → esto es insesgado

- Propiedad de Invarianza

Si $\hat{\theta}$ EMV de $\theta \Rightarrow g(\hat{\theta})$ es EMV de $g(\theta)$.

Ej| $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} \longrightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} = g(\sigma^2)$

$\hat{\sigma}? \rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}}$

- Los EMV son consistentes

$\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

Video 2:

P1

p probabilidad (prop.) $= \theta$

A evento , $p = P(A)$

$$\begin{array}{|l|}\hline N_a \ (A) \\ N - N_a \ (\bar{A}) \\ \hline \end{array} \quad N \quad \rightarrow \frac{N_A}{N} = p = P(A)$$

$$X = \begin{cases} 1 & A \quad (p) \\ 0 & \bar{A} \quad (1-p) \end{cases}$$

$P(X = x) = p(x, p) = p^x (1-p)^{1-x}$, $x = 1, 0$

$X_1, X_2 .. X_N$ v.a.i.i.d.

$L(\vec{x}, p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, p)$ $\quad L(\vec{x}, p) = \prod p^x (1-p)^{n-x_i}$

$L(\vec{x}, p) = p^{\sum x_i} (1-p)$

$L(\vec{x}, p) = \sum x_i \ln p + (n - \sum x_i) \ln(1-p)$.

$$\frac{dL}{dp} = \frac{\sum_i x_i}{\hat{p}} - \frac{(n - \sum x_i)}{1 - \hat{p}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{p} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}} = f_n(A)$$

$$x_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Si n grande $\hat{p} = \bar{x} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

→ Tipo de componentes t.q duración $x \sim e(\alpha)$

$E(x) = \frac{1}{\alpha} = \theta \quad (\hat{\theta})$

$x_1 \dots x_n \longrightarrow \hat{\theta} = \bar{x}$

↳ $n = 100$

dispongo este t para hacer el exp. ← $H = 10$ (UT)

después de H(UT) → 70 fallaron / 30 siguen.

estimación de la proporción.

$P = P(X > H=10)$, $\hat{p} = \frac{30}{100} = 0{,}3.$

$\theta = \frac{1}{\alpha}$

$P = P(X > H) = \int_H^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx$

$P = P(X > H) = \int_H^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha H} \rightarrow \boxed{p = e^{-\alpha H}}$

$\Rightarrow \ln P = -\alpha H$

$\Rightarrow \theta = \frac{1}{\alpha} = \frac{-H}{\ln P}$ $\longrightarrow$ Prop. de invarianza: $\hat{\theta}$ de $\theta \Rightarrow g(\hat{\theta}) = g(\theta)$

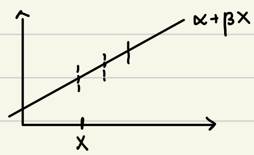
$\hat{\theta} = \widehat{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{-H}{\ln \hat{p}} = \frac{-10}{\ln 0{,}3}$

basado en una proporción.

P2 Relación entre la estatura y el peso

$Y = f(X, \varepsilon)$, ε = error

$y = \alpha + \beta x + \varepsilon$



supuestos razonables:

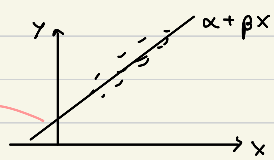
$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ → errores se pueden suponer una suma de ε pequeños, por TCL lo razonable es que tenga dist. normal.

$\Rightarrow Y \sim N(\alpha + \beta x, \sigma^2)$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$?

muestra dada x 2 variables. ← $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$

estimar esta recta.



$f(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(Y-\alpha-\beta x)^2}{2\sigma^2}}$

$L(\vec{x}, \vec{y}) = \prod \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(y-\alpha-\beta x_i)^2}{2\sigma^2}}$

maximizar α y β y no de la var.

$\langle \alpha, \beta \rangle$

$L = k \cdot \frac{1}{\sigma^n} \cdot e^{-\frac{\sum (y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}}$

$l = -\frac{\sum (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2}{2\sigma^2}$

$\frac{dl}{d\alpha} = -2 \frac{\sum (Y_i - \alpha - \beta X_i)}{2\sigma^2} = 0$, $\frac{dl}{d\beta} = -2 \frac{\sum (Y_i - \alpha - \beta X_i) X_i}{2\sigma^2} = 0$

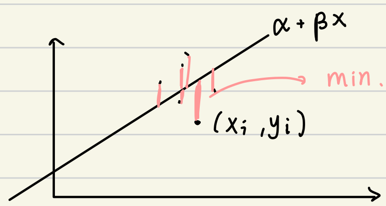
Resolviendo las ecs:

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = \frac{\sum y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\frac{dL}{d\sigma^2} \quad , \quad L = k\,\frac{1}{\sigma^n}\, e^{-\frac{\sum (y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\max_{\alpha,\beta} L \equiv \min_{\alpha\,\beta} \sum (y_i - \alpha - \beta x)^2$$



min. estas dist. $\longrightarrow$ Recta de mín. cuadrados

$$\boxed{y = \alpha + \beta x + \varepsilon}$$ $\longrightarrow$ prob. regresión lineal simple.

Intervalo de confianza

5 junio

Método momentos. $X \sim U(-\theta,\theta)$

Ej: $E(x^2) = \int_{-\theta}^{\theta} x^2 \cdot \frac{1}{2\theta}\, dx$

$$E(x^2) = \frac{1}{2\theta} \frac{x^3}{3}\Big|_{-\theta}^{\theta} = \frac{2\theta^3}{2\theta \cdot 3} = \frac{\theta^2}{3}$$

$$\Rightarrow \hat{E}(x^2) = \frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{\hat{\theta}^2}{3}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \sqrt{\frac{3\sum x_i^2}{n}}$$

creerle a lo + probable. ←

Método de máx. verosimilitud.

$$L(x_1 \dots x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) \quad , \quad \max_{\theta} L(\vec{x},\theta)$$

⋮

* ej ya visto

* propuesto: $X \sim U(-\theta,\theta)$, EMV de θ

Ej: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

X: peso, $X_1 \dots X_n$

$\hat{\mu} = \bar{X}$ $\bar{x} = 65$

estimador estimado (evaluado en muestra particular)

Def sea X v.a. cuya distribución depende de un parámetro θ; sea $X_1 \dots X_n$ m.a. de X y $L_i(X_1 \dots X_n)$, $L_s(X_1 \dots X_n)$ dos estadísticos (funciones reales). Se dice que $(L_i(\vec{X}), L_s(\vec{X}))$ es un intervalo de confianza para θ, con confianza γ, ssi.

$$P\left(L_i(X_1 \dots X_n) < \theta < L_s(X_1 \dots X_n)\right) = \gamma$$

Obs

1) Un I.C. es un intervalo aleatorio (no numérico) → xq L_i es una funø de v.a.
2) Para un parámetro θ, existen "infinitos" intervalos de confianza.
3) Es deseable (no siempre se puede hacer).
$\min(L_s(\vec{x}) - L_i(\vec{x}))$
4) Para efectos del curso, se construirán I.C. en los casos.

a) I.C. μ $x \sim N(\mu, \sigma^2)$
b) I.C. σ^2 $x \sim N(\mu, \sigma^2)$
c) I.C. $E(x)$ n grande.
d) I.C. p: proporø n grande
e) I.C. para funøes de lo anterior.

a) $P(L_i(\vec{x}) < \theta < L_s(\vec{x})) = \gamma$ θ^2
$P(L_i^2(\vec{x}) < \theta^2 < L_s^2(\vec{x})) = \gamma$

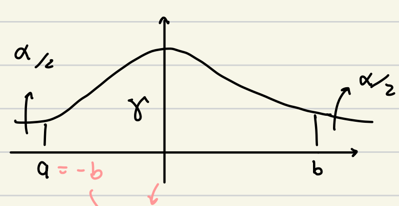
a) IC. $\mu \sim N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 conocido)
Supongamos $X_1 \dots X_n$ m.a. de X.

1) $\hat{\mu} = \bar{X}$ ✓
2) $\hat{\mu} = \bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$ conocido

3) $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ no depende de μ.
↓
Funø pivote

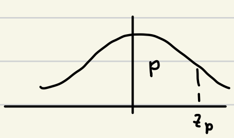
4) $P(a < Z < b) = \gamma \rightarrow P(-b < Z < b) = \gamma = 1 - \alpha$.

de las tablas de la normal, encontrar b que cumple la condiø ←



$P(Z < b) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{2}$
$= 1 - \frac{\alpha}{2}$

Notaø: $P(Z < z_p) = p$



$\boxed{b = z_{1-\alpha/2}}$

5) $P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha = \gamma$

$$\boxed{P\Big(\underbrace{\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{L_i(\vec{x})} < \mu < \underbrace{\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{L_s(\vec{x})}\Big) = 1-\alpha.}$$

Ej: $X \sim N(\mu, \overset{\sigma^2}{100})$ $\quad n = 64$

$\gamma = 1-\alpha = 0{,}95 \quad \bar{x} = 70$

$1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$, $\quad z_{0{,}975} = 1{,}96$

$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$70 \pm 1{,}96 \cdot \frac{10}{8} = 70 \pm 2{,}45 = (67{,}55 \,;\, 72{,}45)$

$P(67{,}55 < \mu < 72{,}45) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $\rightarrow$ al transformarlo a números, las Prob. se pierden!

Pero se tiene un 95% de confianza de que será 1.

Obs 1) - Si n aumenta, $L_s - L_i$ disminuye.

- Si γ aumenta, $L_s - L_i$ aumenta

2) De lo anterior se puede escribir:

$P\Big(|\bar{x}-\mu| < \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{error de estimaØ.}}\Big) = 1-\alpha$

$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\rightarrow n = 64 \;;\; 1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

$\Rightarrow \varepsilon = 2{,}45.$

$\rightarrow n, \varepsilon$ son datos $\Rightarrow 1-\alpha$?

$(68{,}00 \;;\; 72{,}00) \rightarrow n = 64$

$\varepsilon = 2$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}6 \Rightarrow 1-\alpha = 0{,}8904$

$$\rightarrow \boxed{n = \frac{z_{1-\alpha/2}^2 \, \sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

$\varepsilon = 1{,}5$

$1-\alpha = 0{,}95$

$$n = \frac{1{,}96^2 \cdot 100}{(1{,}5)^2} = 171.$$

12· junio

c) Intervalo confianza para $E(X)$, n grande $(X_1 \dots X_n)$. $X \sim e(\alpha)$

$\theta = E(X) = \frac{1}{\alpha}$, $var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$

- $\tilde{\theta} = \hat{E} = \bar{X}$
- $\hat{\theta} = \bar{X} \sim N\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{n\alpha^2}\right) = N\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right)$

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\theta^2/n}} \approx N(0,1)$$

F. Pivote.

$\rightarrow P\left(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\theta/\sqrt{n}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}}{1 + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}}_{L_i(\vec{X})} < \theta < \underbrace{\frac{\bar{X}}{1 - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}}}_{L_s(\vec{X})}\right) = 1-\alpha$$

$\rightarrow$ Si despejar θ no es tan fácil, truco!

despejo θ sólo de arriba. ←

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\theta/\sqrt{n}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

si no conozco, lo estimo ←

$$P\left(\hat{\theta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{n}} < \theta < \hat{\theta} + \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{n}}}_{\varepsilon}\right) = 1-\alpha$$

, LGN $\bar{X} \rightarrow E(X) = \theta$

Intervalo de confianza para P(proporø; probabilidad)

$$\begin{array}{|cc|} N_A & A \\ N-N_A & \bar{A} \end{array} \quad N$$

$p = \frac{N_A}{N}$ — proporø — probabilidad

$X_1 \dots X_n$ m.a.i.i.d.

$$X_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p. \end{cases}$$

variables bernoulli

$- \hat{p} = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$

. $E(X_i) = p$

$- \hat{p} = \bar{X} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$$Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0,1)$$

$\cdot P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

$$P\left(\underbrace{\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}_{L_i} < p < \underbrace{\bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}_{L_s}\right) = 1-\alpha$$

$n = 500 \begin{cases} 200 \text{ F} \\ 300 \text{ C} \end{cases}$

$1-\alpha = 0{,}95$

$z_{0,975} = 1{,}96$

$\hat{p} = \frac{200}{500} = 0{,}4 \rightarrow$ estimaø de la proporø.

$$\left(0{,}4 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{500}}\right)$$

$$(0{,}4 \pm \underbrace{0{,}043}_{\varepsilon}) \rightarrow (0{,}357 \,;\, 0{,}443).$$

- p desconocido.

volviendo a (*):

$$P\left(|\bar{x} - p| < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) = 1-\alpha.$$

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

$$n = \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \, p(1-p)}{\varepsilon^2} \quad / \max_{p} n \rightarrow p = 1/2$$

$$\boxed{n = \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{4\varepsilon^2}}$$

$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

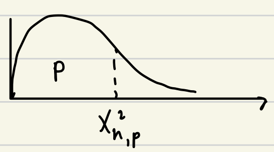
$\varepsilon = 0{,}02 \longrightarrow$ error típico

$$n = \frac{1{,}96^2}{4 \cdot 0{,}02^2} = 2.401$$

$\rightarrow$ debería preguntarle a 2.401 para tener un error del 2% con confianza de 95%.

Intervalo de confianza para σ^2 ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$).

previo: $Y \sim \chi^2_n = G(n/2, 1/2)$.



$\rightarrow$ Tabulada

Por ej. si $n = 10$ $\quad P(Y \le \overbrace{15{,}987}^{\chi^2_{10,\,0.9}}) = 0{,}9$

$P(Y \le \underbrace{4{,}865}_{\chi^2_{10,0,1}}) = 0{,}1$

χ^2 t.q

$$P(Y \le \chi^2_{n,p}) = p$$

Resultados previos

i) si $Z \sim N(0,1) \Rightarrow Y = Z^2 \sim \chi^2_1$

ii) si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad X_1 \dots X_n$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\underbrace{n-1}_{\text{para que sea insesgado}}}$$

$\rightarrow$ basado en

iii) se puede demostrar que

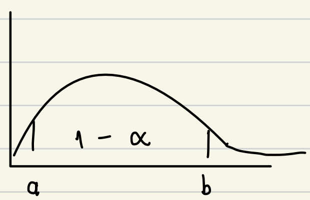
$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$(x_1-\bar{x}) + (x_2-\bar{x}) + \dots + (x_n-\bar{x}) = 0 \longrightarrow$ le quito un grado de libertad.

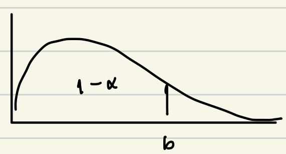
$\left(\sum \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n \right)$ (le sumo un grado de lib. xq no tengo $\bar{x}$).

$$P\left(a < \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < b\right) = 1-\alpha$$

Funcø pivote

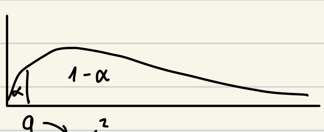


- $a = 0$



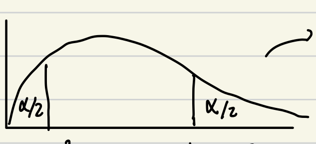
$\chi^2_{n-1,\,1-\alpha}$

- $b = \infty$



$\to \chi^2_{n-1,\,\alpha}$.

-



simetría en las prob. no en los números.

$a = \chi^2_{n-1,\,\alpha/2}$ $\quad b = \chi^2_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}$

- $b = \infty$

$$P\left(\chi^2_{n-1,\alpha} < \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < \infty \right) = 1-\alpha.$$

$$P\left(0 < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}} \right) = 1-\alpha.$$

Test (prueba) de Hipótesis

15 · Junio · 23

se afirma que la duración promedio de ciertos equipos es mayor a 100.
$\nearrow E(X)$
se afirma " " proporción de apoyo al gobierno es mayor a 0,3
$\hookrightarrow p$

$x \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = E(X) = \mu$.
$x \sim e(x)$ $\theta = E(x) = \frac{1}{\alpha}$
$\theta = P$

$$X = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$$

Si la 1° no es verdad

$H_1: \theta = E(X) > 100$
$H_0: \theta = E(X) \leq 100$

$H_1: p < 0,3$
$H_0: p \geq 0,3$.

$\boxed{H_1}$ Se denomina la hipótesis de prueba o hipótesis alternativa.

$\boxed{H_0}$ se " " " " base o " nula.

En general, si θ es el parámetro en estudio $\Rightarrow$ θ de $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$
$H_0: \theta \in \Theta_0$
$H_1: \theta \in \Theta_1$

$0 < E(X) \leq \infty$ $\quad \Theta = \mathbb{R}^+ = \underbrace{(0, 100]}_{\Theta_0} \cup \underbrace{[100, \infty)}_{\Theta_1}$

Ej: Supongamos $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 16)$
$H_0: \mu \leq 100$
$H_1: \mu > 100$

Problema a resolver: Si $X_1 \ldots X_n$ es una m.a., como debe ser $\bar{X}$ para rechazar H_0 y aceptar H_1 como verdadera?

Se rechaza H_0 en favor de H_1 $\iff \bar{x} > c$ ($\bar{x}$ es grande)

<u>Def</u> se define la región de rechazo como $R = \{(x_1 \dots x_n) \,/\, \text{se rechaza } H_0\}$

$\boxed{\text{Ej}}$ $R = \{(x_1 \dots x_n) \,/\, \bar{x} > c\}$

Decisión \ Naturaleza	H_0 V	H_1 V
H_0 V (no rech. H_0)	✓	error tipo II
H_1 V (rech. H_0 en fav. de H_1)	error tipo I	✓

ej. examen! ←

Error tipo I $\equiv$ Rechazar H_0 / H_0 V

" " II $\equiv$ No rechazar H_0 / H_1 V.

$\boxed{\text{Ej}}$ H_1: Flema es ladrón

H_0: Flema <u>no</u> es ladrón

más grave. no se puede castigar un inocente.

→ error I: decir que es ladrón cuando no lo soy.

→ error II: decir " <u>no</u> es " " lo soy.

* Habitualᵗᵉ H_0 y H_1 se ponen para que error I sea + grave que II.

Los errores (Tipo I y Tipo II) no se pueden evitar por lo cual se trata de minimizar la prob. de cometerlos. Desgraciadaᵗᵉ los errores van en sentido contrario.

<u>Def</u>: sea $\alpha(\theta) = P(\text{error tipo I})$

$\alpha(\theta) = P(\text{Rechazar } H_0 \,/\, \underset{H_0\ V}{\theta \in \Theta_0})$

$\alpha = \max \alpha(\theta)$ Nivel de significación del test.

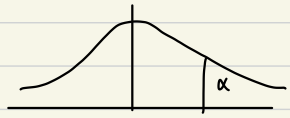
<u>En el ej</u>: $\alpha(\mu) = P(\bar{X} > c \mid \mu \leq 100)$

$\alpha = \max \alpha(\mu) = P(\bar{X} > c \mid \mu = 100)$ en el lím.

<u>Ej</u> Supongamos $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2 = 16)$. fijamos α.

$P(\bar{X} > c \mid \mu = 100) = \alpha$

$$P\left(\frac{\bar{X} - 100}{\sigma/\sqrt{n}} > \underbrace{\frac{c - 100}{\sigma/\sqrt{n}}}_{z_{1-\alpha}}\right) = \alpha$$



$$\frac{c-100}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha}$$

$$c = 100 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

se rechaza H_0 ssi :

$$\boxed{\bar{X} > 100 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Ej : $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_{0,95} = 1{,}645$ $\quad n = 25$

$$\bar{X} > 100 + 1{,}645 \cdot \frac{4}{5} = 101{,}316.$$

→ $\bar{X} = 101{,}5 > 101{,}316$

$\Rightarrow$ se rechaza H_0; existe evidencia estadística significativa para decir que $\mu > 100$.

→ $\bar{X} = 101{,}1 \not> 101{,}36$ no se puede rechazar la hipótesis H_0, con ($\alpha = 0{,}05$)

→ $101{,}1 = 100 + z_{1-\alpha}\frac{4}{5}.$

$z_{1-\alpha} = 1{,}375 \Rightarrow \alpha^* = 0{,}085.$

↳ rechazo con 8,5%

α^* se denomina p-value → minimizar el error.

$X \rightsquigarrow N(\mu ; 16)$ $\quad n = 25$

$\bar{X} \rightsquigarrow N(\mu ; 16/25)$ si H_0 V ($\mu = 100$).

Obs en el ej. se rechaza H_0 ssi $\bar{X} > 100 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$z_{obs/H_0V} = \frac{\bar{X} - 100}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}$$

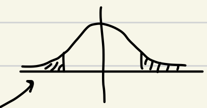
↳ estadístico de prueba.

Resumen:

Test de Hipótesis para $\theta = \mu$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ conocido.

$H_0 : \mu \leq \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$ se rechaza H_0 ssi $\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$



$H_0 : \mu \geq \mu_0$ se rechaza ssi $\bar{X} < \mu_0 + \underbrace{z_\alpha}_{-z_{1-\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$H_1 : \mu < \mu_0$

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ se rechaza H_0 ssi si $\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\bar{X} < \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

↳ error total se distribuye en ambos.

Ej Test de diferencia de medias.

$X \sim N(\mu_x, \sigma^2_x)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma^2_y)$

$\langle \sigma_x^2, \sigma_y^2$ conocidos $\rangle$

$H_0 : \mu_x \leq \mu_y \iff H_0 : \mu_x - \mu_y \leq 0$

$H_1 : \mu_x > \mu_y \quad\quad H_1 : \mu_x - \mu_y > 0$

$X_1 \dots X_n \quad\quad Y_1 \dots Y_m$

$\widehat{\mu_x - \mu_y} = \hat{\mu}_x - \hat{\mu}_y = \bar{X} - \bar{Y}$

$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right)$

- se rechaza H_0 (nivel de significancia α) ssi

$\bar{X} - \bar{Y} > 0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$

Test Hipótesis

$H_0 : \theta \in \Theta_0$
$H_1 : \theta \in \Theta_1$

Error tipo I: Rechazar H_0 (favor H_1) $/ H_0 V$
Error tipo II: No rechazo H_0 $/ H_1 V$.

Ej 1| $n = 1000$ → ¿Cómo extiendo los resultados a la poblaø?
280 F.G.

$H_0 : p \geq 0,3$.
$H_1 : p < 0,3$

P: proporø de apoyo al gobierno en la población

$0,28 = \hat{p}$ → estimación de p.

$\hat{p} = \frac{\sum x_i}{n}$, $x_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$

$\hat{p} = \bar{x} \sim N\left(p ; \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

estadístico de prueba

Se rechaza H_0 ssi $\hat{p} < c$.
P(error tipo I) $= \alpha$ (nivel significaø)

$p(\hat{p} < c / p = 0,3)$

$$P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \underbrace{\frac{c - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{n}}}}_{z_\alpha}\right) = \alpha \longrightarrow \frac{c - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}}} = z_\alpha$$

$c = 0,3 + z_\alpha \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}}$

$\alpha = 0,05 \Rightarrow z_\alpha = -1,645$.

$c = 0,276$.

$\hat{p} < 0,276$

$0,28 \not< 0,276$ → NO rechazo H_0

menor error con el que puedo afirmar la hipótesis H_1

$0{,}28 = 0{,}3 + z_\alpha \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{n}}$

$\Rightarrow z_\alpha = -1{,}38$

$\alpha^* = 0{,}0838.$

p-value.

Ej $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 4$

$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 = 4$

$X_1 \ldots X_n$

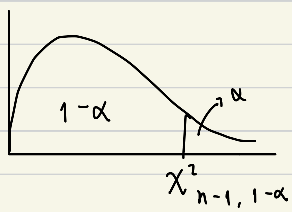
$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

se rechaza H_0 ssi $\hat{\sigma}^2 > C.$

$P(\text{error tipo I}) = \alpha$

$P(\hat{\sigma}^2 > c \mid \sigma^2 = 4) = \alpha$

$P\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 > \frac{(n-1)c}{\sigma^2} \mid \sigma^2 = 4\right) = \alpha$



$P\left(\chi^2_{n-1} > \frac{(n-1)c}{\sigma^2} \mid \sigma^2 = 4\right) = \alpha.$

$\chi^2_{n-1,1-\alpha} = \frac{(n-1)c}{4}$

$\left[C = \frac{4\chi^2_{n-1,1-\alpha}}{n-1} \right]$

se rechaza H_0 ssi

$\hat{\sigma}^2 > \frac{4 \cdot \chi^2_{n-1,1-\alpha}}{n-1}.$

$\alpha = 0{,}05$, $n = 25$. , $\chi^2_{24,0{,}95} = 36{,}415$ tabla

se rechaza H_0 ssi $\hat{\sigma}^2 > 6{,}069.$

Test de Hipótesis, Intervalo de confianza para μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocido.

i.c. (μ) σ^2 conocido.

Hago $\hat{\sigma}$ cuando n grande ya que $\sigma \sim \hat{\sigma}$ ←

$$\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sigma \to \hat{\sigma}$$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}} \sim \cancel{N}(0,1)$$

<u>previo</u>:

sea $z \sim N(0,1)$

$V \sim \chi^2_k$ (z, V independientes).

sea $T = \dfrac{z}{\sqrt{V/k}} = \dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_k}{k}}}$

Se puede demostrar que

$$f(z) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{(k+1)}{2}}, \quad -\infty < t < \infty$$

funø par que decae ←

se dice que T tiene distribución t-student con k grados de libertad.

$T \sim t_k$

Se puede dem. que

$$t_k \xrightarrow[k \to \infty]{\text{distribuø}} z \sim N(0,1)$$

la distribuø t-student está tabulada. Por ej. $P(t_{10} \leq 1{,}8125) = 0{,}95$

$P(t_{10} \leq 1{,}3722) = 0{,}90$.

$1{,}8125 = t_{10,\,0{,}95}$

$1{,}3722 = t_{10,\,0{,}90}$.

sea $X \to N(\mu, \sigma^2)$

$X_1 \dots X_n$

- $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

- $V = \dfrac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/n-1}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/\cancel{\sigma}\sqrt{n}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{(n-1)}\hat{\sigma}^2}{\cancel{\sigma^2}\cancel{(n-1)}}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Z &= \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \\ T &= \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \end{aligned}}$$

σ conocido $\leftarrow$ $\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

σ desconocido $\leftarrow$ $\left(\bar{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)$

} intervalos.

$n \to \infty \quad \hat{\sigma} \to \sigma$

$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \to z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

30·jun

Independencia en tablas de contingencia

X\Y	R	A	
A	75	25	100
M	130	70	200
B	145	55	200
	350	150	500

X : Nivel socioeconómico.

Y : Apoyo G.

$X \to Y$

Planteamiento gral:

→ sean X, Y 2 variables (características) cualitativas t.q. X tiene p categorías $(x_1 \dots x_p)$ e Y tiene q categorías $(y_1 \dots y_q)$

En la poblaØ, sea $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$

X\Y	y_1	y_j	y_q	
x_1				
x_j		p_{ij}		$p_{j\cdot}$
x_p				
		$p_{\cdot j}$		

Supongamos que se toma una muestra de tamaño n obteniendo:

X\Y	y_1	y_j	y_q	
x_1				
x_i		n_{ij}		$n_{i\cdot}$
x_p				
		$n_{\cdot j}$		n

$n_i = \sum_j n_{ij}$

$n_j = \sum_i n_{ij}$

se desea estudiar las hipótesis:

H_0 : X, Y indep.

H_1 : H_0 falso (X, Y dep.).

Si H_0 V $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \quad \forall i,j$

$H_0 : p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \quad \forall ij$

H_1 : H_0 falso.

→ Si H_0 V y se toma una muestra de tamaño $n \Rightarrow (x_i, y_j)$ se espera tener $n \cdot p_{ij} = n p_{i\cdot} p_{\cdot j} = E_{ij}$ (n° esperado de observaØes)

Se debe comparar lo observado (n_{ij}) con lo esperado $(n \cdot p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j})$

$$O_{ij} = n_{ij} \sim n p_{i\cdot} p_{\cdot j} = E_{ij}$$

$$\hat{E}_{ij} = n \hat{p}_{i\cdot} \hat{p}_{\cdot j} = n \cdot \frac{n_{i\cdot}}{n} \cdot \frac{n_{\cdot j}}{n}$$

$$\hat{E}_{ij} = \frac{n_{i\cdot}\, n_{\cdot j}}{n}$$

En el ejemplo: Tabla "Esperada bajo Ho"

x\y	R	A	
A	70	30	100
M	140	60	200
B	140	60	200
	350	150	500

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\frac{((O_{ij}-\hat{E}_{ij}))^2}{\hat{E}_{ij}}$$ (Estadístico de Pearson)

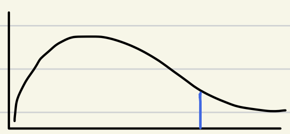
se rechaza Ho ssi $Q > c$.

→ Se puede demostrar que si n es grande y Ho es verdadero:

$$Q \approx \chi^2_{(p-1)(q-1)}$$ → grados de libertad. (cant. de sumandos independientes)

Se rechaza Ho ssi

$Q > \chi^2_{(p-1)(q-1);1-\alpha}$ (α nivel de significación).



· En el ejemplo $Q = \frac{(75-70)^2}{70} + \frac{(25-30)^2}{30} + \dots = 4{,}17$.

$\chi^2_{(3-1)(2-1)} = \chi^2_2$

· Si $\alpha = 0{,}1$ $\chi^2_{2,0{,}9} = 4{,}605$

uno aumenta el tamaño de la muestra para ver si se puede rechazar Ho. ←

* $4{,}17 \not> 4{,}605$. ⇒ no se puede rechazar Ho. (indep).

Observación

contratación

S\NC	C	$\bar{C}$	
H	175	100	275
M	150	175	325
	325	275	600

→ Tasa de contratación de H es mayor al de M.

Q, se rechaza H_0 (indep.)
$S \rightarrow NC$.

Tabla A

S\NC	C	$\bar{C}$	
H	25	50	75
M	75	150	225
	100	200	500

$Q = 0$

+

Tabla B

S\NC	C	$\bar{C}$	
H	150	50	200
M	75	25	100
	225	75	300

$Q = 0$

Paradoja Simpson.

↳ Correlaciones o dependencia Espurea.

$S \not\leftrightarrow NC$
$S \leftrightarrow TT \leftrightarrow NC$

∼ N° delitos $\not\leftrightarrow$ N° oficios relig.
N° delitos ↔ Población ↔ N° oficios relig.