
MATTHEW McCONAUGHEY
ANNE HATHAWAY
JESSICA CHASTAIN
MICHAEL CAINE
THE END OF EARTH WILL NOT BE THE END OF US
A CHRISTOPHER NOLAN FILM
INTERSTELLAR

Auxiliar #1 - Presentación y Dinamica Lagrangeana

Vibraciones y Ondas - Otoño 2023

Profesor: Rodrigo Vicencio - Aux: Paloma Vildoso[1] - Ayu: Diego Roman y Javier Cubillos.

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

Resumen The Euler-Lagrange equation

$$L = T - V$$

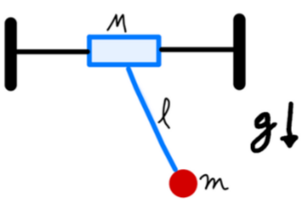
L es el *Lagrangiano*, donde T y V son la energía cinética y potencial del sistema, respectivamente. Luego, escribiendo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q},$$

obtendremos las ecuaciones de movimiento para cada coordenada del sistema. Esta expresión es conocia como *La ecuación de Euler-Lagrange (E-L)*.

P1. Péndulo Móvil

Un péndulo de masa m y largo ℓ está colgando desde un soporte de masa M que es libre de moverse horizontalmente sobre un riel sin fricción, tal como se muestra en la figura.



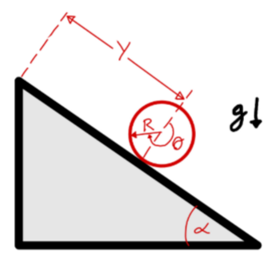
a) Defina las coordenadas generalizadas del problema y Escriba el Lagrangiano.

b) Encuentre las ecuaciones de movimiento del problema.

c) Sin calcular, comente acerca de las restricciones y fuerzas del problema. ¿De qué dependerían estas últimas?

P2. Plano inclinado

Considere un disco rodando sobre un plano inclinado, como muestra la figura. Determine la ecuación de restricción en términos de las coordenadas generalizadas y y θ. Obtenga las ecuaciones de movimiento.



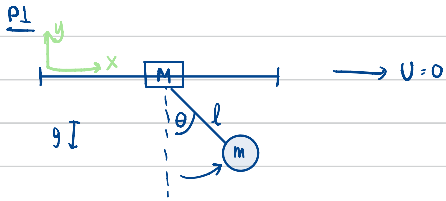
P3. (*Propuesto*, Guía 1, problema 12) **Fermat**

[1]paloma.vildoso@ug.uchile.cl

Aux 1: Dinámica Lagrangeana

→ paloma.vilaoso@ug.uchile.cl

P1



* vector posición: si una se mueve para la derecha, la otra va hacia la izquierda

$\vec{r}_M(t) = x\hat{x}$

$\vec{r}_m(t) = (l\,\text{sen}\theta - x)\hat{x} - l\cos\theta\,\hat{y}.$

→ $\vec{v}_M(t) = \dot{x}\hat{x}$, $\vec{v}_m = (l\cos\theta\cdot\dot{\theta} - \dot{x})\hat{x} + l\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta}\,\hat{y}$

Coord. generalizadas → $q_1 = x$; $q_2 = \theta$

$$T = T_{TM} + T_{Tm} = \frac{1}{2}\cdot M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$= \frac{M(\dot{x})^2}{2} + \frac{m}{2}\left((l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 - 2l\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{x} + \dot{x}^2) + l^2\text{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2\right)$$

$$= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 - 2l\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{x} + \dot{x}^2)$$

$$U = U_m + \cancel{U_M}^{\,0} = mgy = -mgl\cos\theta.$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\, l + \dot{x}^2) + mgl\cos\theta$$

E - L ecuaciones:

$\boxed{x}$ $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = cte$

momento generalizado

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} - ml\dot{\theta}\cos\theta + m\dot{x} = \boxed{\dot{x}(M+m) - ml\dot{\theta}\cos\theta := p_x}$$

$\boxed{\theta}$ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = m\dot{\theta}\dot{x}l\sin\theta - mgl\sin\theta$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} - \dot{x}\cos\theta\, lm$$

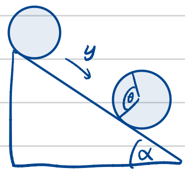
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} - ml(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$\rightarrow ml^2\ddot{\theta} - ml(\ddot{x}\cos\theta - \cancel{\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta}) - \cancel{lm\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

$$\rightarrow \cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot{\theta} - \cancel{m}\cancel{l}\ddot{x}\cos\theta + \cancel{m}g\cancel{l}\sin\theta = 0$$

$$\rightarrow l\ddot{\theta} - \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

P2



$\boxed{y = R\theta}$

para multiplicadores de lagrange.

$\boxed{f_1 = y - R\theta}$

$\boxed{f_2 = R - R_0}$

$\vec{r} = y\hat{y} \rightarrow \vec{v} = \dot{y}\hat{y}$

$T = T_T + T_{Rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad ; \quad I = \frac{1}{2}mR^2$

inercia de esta masa.

$$\left.\begin{array}{l} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 \\ \\ U = mgH = -mgy\,\text{sen}\,\alpha \end{array}\right\} L = T - U$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + mgy\,\text{sen}\,\alpha} \leftarrow f_1, f_2$$

Imponemos restricções.

$L = \frac{1}{2}m\dot{R}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\theta\,\text{sen}\,\alpha$

$= \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\theta\sin\alpha$

E-L:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgR\sin\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\theta} \quad / \frac{d}{dt}$$

$$= \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin\alpha = 0}$$

Prop:

$$x' = \frac{dx}{dz} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

en cualquier variable.

* hay que escribir todo en función de ds.

Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar #2 - Dinámica Lagrangiana

Vibraciones y Ondas - Primavera 2021

Profesor: Rodrigo Vicencio - Aux: Paloma Vildoso[1] - Ayudante: Javier Cubillos.
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

Resumen The Euler-Lagrange equation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j,$$

Esta expresión es conocida como *La ecuación de Euler-Lagrange (E-L)* donde q_j son las coordenadas generalizadas, $\dot{q}_j$ la velocidad generalizada y Q_j las fuerzas generalizadas externas.

P1. Fermat

El principio de Fermat establece que la luz viajará por el camino que le tome el menor tiempo:

$$\delta \int_A^B n(x,y,z)ds = 0 \,,$$

donde $n(x,y,z)$ es el índice de refracción en el espacio, $ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ es un elemento de camino/trayectoria, y la velocidad de la luz en el medio se define como $v = c/n$.

a) Defina el Lagrangeano del problema como: $L = n(x,y,z)\sqrt{1+\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, en donde se ha escogido la dirección z como eje de propagación. Demuestre que:

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x} \text{ y } \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial y}\text{. Obtenga,}$$

$$\text{tambien, } \frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial z}$$

escogiendo, por ejemplo, el eje x como dirección de propagación.

b) *Principio de Hero.* Si el medio es homogenéo, tal que $n(x,y,z) = n_0$, ¿cómo viaja la luz? Use la ecuación del rayo para resolver ésto.

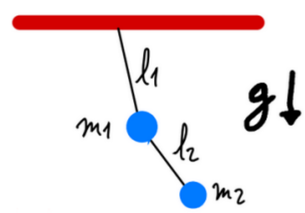
c) *Ley de Reflexión.* ¿Qué trayectoria seguirá la luz yendo desde un punto A, reflejándose en un espejo completamente plano, y yendo finalmente hacia un punto B? Tanto A como B están en el mismo medio homogéneo.

d) *Ley de Refracción.* ¿Qué trayectoria seguirá la luz yendo desde un punto A en un medio de índice de refracción n_1, refractándose en una interfase completamente plana, y yendo finalmente hacia un punto B en un medio de índice n_2?

P2. Gomu Gomu no Pendulo

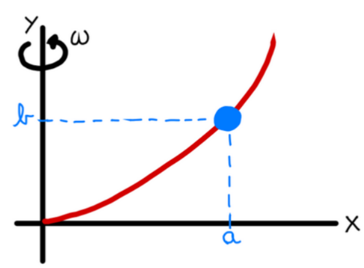
En una de sus aventuras, luego de vencer a su enemigo, el pirata Monkey D. Luffy tuvo un gran banquete, como es de costumbre, por lo que llegó a ser una esfera de masa m_1. Sin embargo, aún no logra liberarse de la gran esfera que cubre su mano, de masa m_2. Por casualidades de la vida, Luffy está columpiandose desde una rama, de la que está a una distancia ℓ_1, pero no es capaz de mantener su brazo con la esfera junto a él, por lo que la esfera queda a una distancia ℓ_2 de Luffy. Como somos físicos, queremos saber como se mueven Luffy y la esfera, por lo que...

Considere un péndulo doble hecho de 2 masas, m_1 y m_2, y 2 varillas de largo ℓ_1 y ℓ_2 como se muestra en la figura. Encuentre las ecuaciones de movimiento.



P3. Rampa giratoria

La curva $y = f(x) = b(x/a)^\lambda$ es rotada alrededor del eje y, con una frecuencia contante ω. Una argolla se mueve sin fricción a lo largo de la curva, tal como se muestra en la figura. Encuentre la ecuación de movimiento.



[1] paloma.vildoso@ug.uchile.cl

* $\underline{P25|}$ No es así, $n(y)$

$\boxed{P1}$

(a) $n = n(x, y, z)$

$$L = n(x, y, z)\sqrt{1 + y'^2 + x'^2} \qquad y' = \frac{dy}{dz}\,, \quad x' = \frac{dx}{dz}$$

$\rightarrow$ Notar que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

$$= dz\sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}$$

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{ds} \leftarrow$$

$$\twoheadrightarrow \boxed{\frac{d}{ds} = \gamma\frac{d}{dz}\,, \quad \gamma = (x'^2 + y'^2 + 1)^{-1/2}}$$

E-L: $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad ; \quad q_i = q_i(z)$

$\rightarrow \boxed{X}$ E-L: $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x'}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\,\frac{dn(x,y,z)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\frac{dn}{dx} \,//$$

$$\frac{dL}{dx'} = n\cdot\frac{d}{dx'}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = n\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = n\,x'\gamma$$

Truco! $\longrightarrow$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{dL}{dx'}\right) = x'\underbrace{\gamma\cdot\frac{d}{dz}}_{\frac{d}{ds}}n + n\underbrace{\frac{d}{dz}}_{\frac{1}{\gamma}\frac{d}{ds}}(x'\gamma)$$

$$= x'\frac{dn}{ds} + \frac{n}{\gamma}\frac{d}{ds}(x'\gamma)$$

E-L: $$x'\frac{dn}{ds} + \frac{n}{\gamma}\frac{d}{ds}(x'\gamma) = \frac{1}{\gamma}\frac{dn}{dx} \quad / \cdot \gamma$$

$$\rightarrow \gamma x'\frac{dn}{ds} + n\frac{d}{ds}(x'\gamma) = \frac{dn}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{d}{ds}(n\gamma \underbrace{x'}_{\frac{dx}{dz}}) = \frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dn}{dx}$$

(b) → Linea recta ya que si no hay cambios en n ⇒ no hay cambios en la $\vec{v}$ luz.

$$\rightarrow n = n_0 \text{ cte} \Rightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{c}{n_0} = \text{cte.}$$

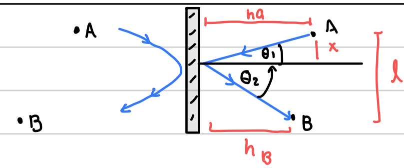
$$\rightarrow \frac{dn}{dx} = 0 \longrightarrow \frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

$$\rightarrow n_0\underbrace{\frac{dx}{ds}} = C_1 \rightarrow n_0\gamma\underbrace{\frac{dx}{dz}} = C_1 \quad / \int dz$$

$$\rightarrow n_0\gamma x(z) = C_1 z + C_2.$$

$$\boxed{x(z) = \bar{C}_1 z + \bar{C}_2} \; ; \; \bar{C}_1 = \frac{C_1}{n_0\gamma}, \; \bar{C}_2 = \frac{C_2}{n_0\gamma}$$

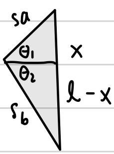
ⓒ



$$t = \frac{1}{v_1}\left[s_a + s_b \right]$$

$$= \frac{1}{v_1}\left[\sqrt{x^2 + h_a^2} + \sqrt{(l-x)^2 + h_b^2} \right]$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{v_1}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+h_a^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + h_B^2}} \right] = 0$$

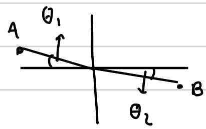


$\Rightarrow x = s_a \sin\theta_1$

$\Rightarrow l - x = s_b \sin\theta_2$

$$\Rightarrow \frac{s_a \sin\theta_1}{s_a} = \frac{s_b \sin\theta_2}{s_b} \Rightarrow \boxed{\sin\theta_1 = \sin\theta_2}$$

ⓓ



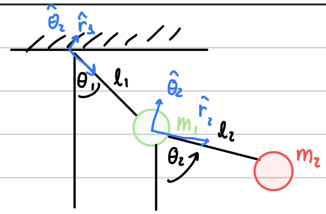
* cambia la $\vec{v}$.

$$t = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2+h_a^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(l-x)^2+h_b^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{v_1}\sin\theta_1 = \frac{1}{v_1}\sin\theta_2$$

$$\rightarrow \boxed{h_1 \sin\theta_1 = h_2 \sin\theta_2}$$

P2



$$\vec{r}_{m_1} = l_1 \hat{r}_1 \quad , \quad \vec{r}_{m_2} = l_1 \hat{r}_1 + l_2 \hat{r}_2$$

$$\rightarrow \quad \vec{v}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 \quad , \quad \vec{v}_{m_2} = l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2$$

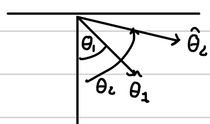
Rapidez^2 $\rightarrow$

$$\rightarrow \quad V_{m_1}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad , \quad V_{m_2}^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2)(l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2)$$

$$= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2$$

$$+ l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_1$$

$$= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2)$$



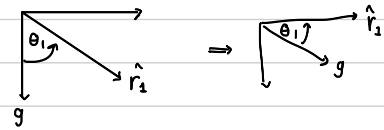
$$\Rightarrow \quad \alpha = \theta_2 - \theta_1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 = \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$\rightsquigarrow \quad v_{m_2}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

$$T = \frac{1}{2} m\, l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$\rightarrow U = m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g \left[l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \right]$$



$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\%] - m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g \left[l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \right]$$

$\boxed{E-L}$

$\boxed{\theta_1}$

$$\frac{dL}{d\theta_1} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$
$$+ m_1 g l_1 \sin\theta_1 + m_2 g l_1 \sin\theta_1$$

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\rightarrow m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \left[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) (\dot{\theta}_2 - \cancel{\dot{\theta}_1}) \right]$$

E-L

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_1 (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2) + m_2 l_1 l_2 \left[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \right] - m_1 g l_1 \sin\theta_1 - m_2 l_1 \sin\theta_1 g = 0}$$

→ Nos dice que están acopladas!

$\boxed{\theta_2}$

$$\frac{dL}{d\theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \sin(\theta_2-\theta_1) + m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

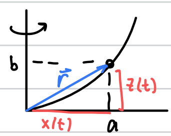
$$\frac{dL}{d\dot\theta_2} = m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_2-\theta_1). \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\rightarrow m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \left[\ddot\theta_1 \cos(\theta_2-\theta_1) - \theta_1 \sin(\theta_2-\theta_1) (\cancel{\dot\theta_2} - \dot\theta_1)\right]$$

E - L

$$\Rightarrow \boxed{m_2 l_2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \left[\ddot\theta_1 \cos(\theta_2-\theta_1) + \dot\theta_1^2 \sin(\theta_2-\theta_1)\right] - m_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0}$$

$\boxed{P3}$



$$\Rightarrow \vec r(t) = r(t)\hat r$$

$$\dot{\vec r}(t) = \dot r(t)\hat r + r(t)\dot\theta\hat\theta + \dot z\hat z$$

ω

$z = b\left(\frac{x}{a}\right)^\lambda \rightarrow z = x^\lambda$

$$\Rightarrow z = r^\lambda \qquad (a = b = 1)$$

$$\Rightarrow \vec r(t) = x\hat r + r^\lambda \hat z \ , \quad \vec v = \dot r\hat r + r\omega\hat\theta + \lambda r^{\lambda-1}\dot r\hat z$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\omega^2 + \lambda^2 r^{2(\lambda-1)}\dot r^2\right)$$

$$\rightarrow U = mgz = mgr^\lambda$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\omega^2 + \lambda^2 r^{2(\lambda-1)}\dot r^2\right) - mgr^\lambda$$

$$\frac{dL}{dr} = m\left(r\omega^2 + (\lambda-1)\lambda^2\cdot\lambda r^{2\lambda-3}\dot{r}^2\right)$$

$$- mg\lambda r^{\lambda-1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{r}}\right) = m\left(\ddot{r}\left(1+\lambda^2 r^{2(\lambda-1)}\right) + 2(\lambda-1)\lambda^2 r^{2\lambda-3}\dot{r}^2\right.$$

E-L

$$\Rightarrow \quad \ddot{r}\left(1+\lambda^2 r^{2(\lambda-1)}\right) + (\lambda-1)\lambda^2 r^{2\lambda-3} - r\omega^2 + g\lambda r^{\lambda-1} = 0.$$

Auxiliar #3 - Restricciones, Hamiltoniano y Potencial.

Vibraciones y Ondas - Otoño 2023

Profesor: Rodrigo Vicencio - Aux: Paloma Vildoso[1] - Ayu: Diego Roman y Javier Cubillos.

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

Resumen: Fuerzas de restricción

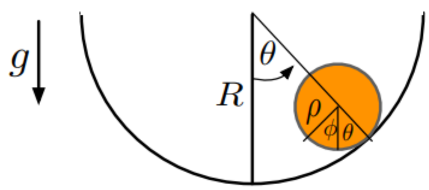
Podemos reducir el número de variables de nuestro problema imponiendo condiciones o restricciones f_i físicas al movimiento.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial q}\right) = Q_i,$$

Esta expresión es conocida como *La ecuación de Euler-Lagrange (E-L)* donde q_j son las coordenadas generalizadas, $\dot{q}_j$ la velocidad generalizada, λ_i son los multiplicadores de Lagrange y Q_j las fuerzas generalizadas externas.

P1. Esfera rodando

Una esfera de radio ρ está restringida a rodar sin deslizar en la parte interior de un cilindro de radio R, tal como se muestra en la figura.



(a) Escriba el Lagrangiano, considerando las variables R, θ y ϕ. → no para ρ!

(b) Escriba las 2 restricciones holonómicas del problema.

(c) Encuentre las ecuaciones de movimiento, incluyendo los 2 multiplicadores de Lagrange respectivos.

(d) Obtenga las 3 fuerzas generalizadas relativas a las variables del problema e interprételas.

(e) Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones directamente desde la ecuación de movimiento.

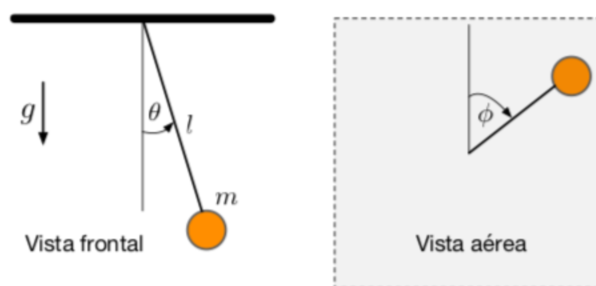
(f) Considere una fuerza de roce hallada en (d) proviene de un "potencial efectivo de roce: U_r", tal que:

$$F_r = \frac{-1}{(R-\rho)} \frac{\partial U_r}{\partial \theta}.$$

Agregue este término a la energía potencial gravitatoria, y aplique el formalismo de pequeñas oscilaciones para la variable θ.

P2. Péndulo menos simple

Un péndulo esférico consiste de un peso de masa m atado a una vara, sin masa e inextensible, de largo ℓ. La vara, en su otro extremo, puede pivotear libremente en todas direcciones, tal como se muestra en la figura abajo.



a) Escriba el Lagrangiano en coordenadas esféricas y obtenga las ecuaciones de movimiento para los ángulos θ y ϕ.

b) Determine los momentos p_θ y p.

c) Escriba el Hamiltoniano y sepárelo en una parte que dependa de p_θ y un potencial efectivo $U(\theta, p_\phi)$.

d) Dibuje/grafique este potencial como función de θ, para distintos valores de p_ϕ, incluyendo $p_\phi = 0$ (péndulo plano). Comente la fenomenología de este sistema, identificando diferencias entre $p_\phi = 0$ y $p_\phi \neq 0$.

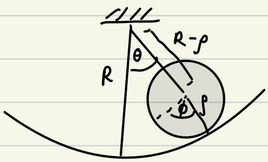
e) Discuta el caso límite de un péndulo cónico ($\theta = cte...$) vía un diagrama de U vs. θ.

[1] paloma.vildoso@ug.uchile.cl

P1

11. abr.

Es una esfera que tiene inercia.



$L = T - U = T_T + T_R - U_g$

$>> \vec{r}(t) = (R-\rho)\hat{r}$

$\vec{v}(t) = \dot{R}\hat{r} + (R-\rho)\dot{\theta}\hat{\theta}$

* $\rho = \rho_0$ cte

$\rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$

$\rightarrow v^2(t) = \dot{R}^2 + (R-\rho)^2\dot{\theta}^2$

* R no lo considero cte xq será una restricción.

* aprenderse teo. de Steiner

↳ Inercia en ≠ puntos es ≠ que en el centro de la esfera

$\rightarrow T_R = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \Rightarrow \boxed{I = \frac{2}{5} m \rho^2}$

$\boxed{y = (R-\rho)\cos\theta}$

$\rightarrow U_g = -mgy = -mg(R-\rho)\cos\theta.$

$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{R}^2 + (R-\rho)^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{5} m\rho^2 \cdot \dot{\phi} + mg(R-\rho)\cos\theta$

Restricciones:

$f_1 : \underbrace{(R-\rho)\theta}_{} - \rho\phi = 0$

↳ hay que tomar cuánto se mueve el centro!

subirá a u-cursos explicación. →

$f_2 : R - R_0 = 0.$

* $\frac{\partial f_1}{\partial R} = \theta$; $\frac{\partial f_2}{\partial R} = 1$ * $\frac{\partial f_1}{\partial \phi} = -\rho.$

* $\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = R-\rho$, $\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial f_2}{\partial \phi}$

* cant. conservada (ϕ)

* $\boxed{R}$ $\frac{dL}{dR} = m(R-\rho)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$

$$\frac{dL}{d\dot{R}} = m\dot{R} \; \Big/ \frac{d}{dt} \longrightarrow m\ddot{R}$$

$$\rightarrow \boxed{m\cancelto{0}{\ddot{R}} - m(R-\rho)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \sum_i \frac{df_i}{dR}\lambda_i = \lambda_1\theta + \lambda_2}$$

$\boxed{\theta}$ $\boxed{2m\cancelto{0}{\dot{R}}\dot{\theta} + m(R-\rho)\ddot{\theta} + mg\sin\theta = \lambda_2}$ (△) (* ojito aquí se simplificó)

$\boxed{\phi}$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = -\lambda_1\rho \longrightarrow \boxed{-\lambda_1\cancel{\rho} = \frac{2m\rho^{\cancel{2}}}{5}\ddot{\phi}}$ (*)

$$(R-\rho)\ddot{\theta} = \rho\ddot{\phi}$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = \frac{(R-\rho)\ddot{\theta}}{\rho}}$$

(*) $\lambda_1 = -\frac{2}{5}m\cancel{\rho}\frac{(R-\rho)}{\cancel{\rho}}\ddot{\theta}$

$$\rightarrow \left[\lambda_1 = \frac{2}{5}m(R-\rho)\ddot{\theta}\right]$$

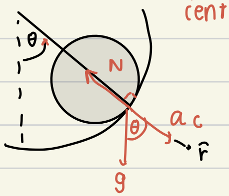
(△) $m(R-\rho)\ddot{\theta} + mg\sin\theta = -\frac{2}{5}m(R-\rho)\ddot{\theta}$

$$\boxed{\frac{7}{5}m(R-\rho)\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0}$$

$\vec{F}$ de restricción.

$$\lambda_2 = -\left[m(R-\rho)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \right] - \lambda_1 \theta$$

$$\boxed{\lambda_2 = -\left[\underbrace{m(R-\rho)\dot{\theta}^2}_{F \text{ centrípeta}} + \underbrace{mg\cos\theta}_{F \text{ gravitatoria}} \right] + \underbrace{\underbrace{\left(\frac{2}{5}m(R-\rho)\ddot{\theta}\right)}_{\lambda_1}\theta}_{\text{término inercial.}}}$$



$\cdot\ \lambda_2 = -F_{\hat{r}}$

$\rightarrow \boxed{N = -\lambda_2}$ $\longrightarrow$ ruede sin resbalar

$\longrightarrow$ No se despegue.

Observar λ_1 para saber que $\vec{F}$ es

$\rightarrow \frac{2m\rho^2}{5}\ddot{\phi} = I\ddot{\phi}$ = torque.

$\rightarrow \lambda_1$ asociado a la $\vec{F}$ de roce

e) Peq osc $\longrightarrow$ ecuación de θ (la única que tiene dinámica)

⚠ ver puntos de equilibrio antes!

$\rightarrow$ cuidado cuando $\theta_{eq} \neq 0$.

$= \quad \theta \simeq \mu + \theta_{eq} \longrightarrow \boxed{\theta_{eq} = 0}$

$\rightarrow \operatorname{sen}\theta \simeq \sin(\mu + \cancelto{0}{\theta_{eq}}).$

$= \sin(\mu) \simeq \mu.$

$\rightarrow \frac{7}{5}m(R-\rho)\ddot{\mu} + mg\mu = 0$

$\boxed{\ddot{\mu} + \omega_0^2\mu = 0}$ $\quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{5}{7}\frac{g}{(R-\rho)}}$

* en el lagrangiano hay que considerar términos cuadráticos

↳ $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$ → cuál era?

en la dinamica se pueden descartar

↳ $\cos\theta \approx 1$

asoc. al potencial

$$V_{eff} = U_g + U_r$$ al roce.

$$U_r = \frac{2}{7}(R-\rho) Mg\cos\theta$$

→ Enunciado:

$$F_r = -\frac{1}{(R-\rho)}\frac{\partial U_r}{\partial\theta}$$

$$\boxed{V_{eff} = -\frac{5}{7}(R-\rho)\, mg\cos\theta}$$

$$m_{\sigma\sigma}\ddot{\theta} + v_{\theta\theta}\,\theta = 0$$

$$m_{\sigma\sigma} = m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2\right]\Bigg|_{\theta_{eq}} = m(R-\rho)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= m(R-\rho)^2$$

$$x = (R-\rho)\sin\theta$$

$$y = (R-\rho)\cos\theta$$

$$v_{\theta\theta} = \left[-\frac{\partial U_{eff}^2}{\partial\theta^2}\right]\Bigg|_{eq}$$

$$= \frac{5}{7}(R-\rho)mg$$

$$\longrightarrow m(R-\rho)^2\ddot{\theta}g + \frac{5}{7}(R-\rho)\theta mg = 0$$

P2

$$\vec r(t) = r\hat r$$

$$\vec v(t) = \cancelto{0}{\dot r}\,\hat r + \cancelto{\ell}{r}\,\dot\theta\,\hat\theta + \cancelto{\ell}{r}\,\dot\phi\sin\theta\,\hat\phi$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot\theta^2 + \ell^2\dot\phi^2\sin^2\theta\right) + mg\ell\cos\theta$$

→ matraca

Momentums se conservan $\forall t$

↳ " c/r a las $\vec v$

$$p_\theta = \frac{dL}{d\dot\theta} = m\ell^2\dot\theta \longrightarrow \left[\ddot\theta - \dot\phi^2\cos\theta\sin\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0\right]$$

$$p_\phi = \frac{dL}{d\dot\phi} = m\ell^2\dot\phi\sin^2\theta. \rightarrow \boxed{\dot\phi = \frac{p_\phi}{m\ell^2\sin^2\theta}}$$

es una energía generalizada. →

$$\mathcal{H} = \sum_\sigma p_\sigma\cdot\dot q_\sigma - L$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\ell\dot\phi^2\sin\theta}_{=T} - \underbrace{mg\ell\cos\theta}_{U}$$

Pasa xq U es tiempo independiente. →

$$= T + U = E$$

cte

$$= \underbrace{\frac{p_\theta^2}{2m\ell^2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{p_\phi^2}{2m\ell^2\sin^2\theta}} - mg\ell\cos\theta}_{U_{eff}(\theta,\,p_\phi)}$$

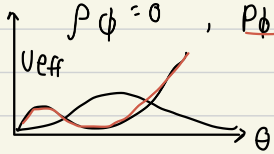
órbita. Momentum relacionado c/ giro.

mov. circular

mov. cerrado.

$U_{eff}(\theta, p_\phi)$ → te dice los puntos. de eq.

$p_\phi = 0$, $p_\phi \neq 0$



⊛ → terminar.

P3. Rampa aún giratoria

La curva $z = b(x/a)^\lambda$, en $t = 0$, es rotada alrededor del eje z con una frecuencia constante ω, tal como se muestra en la figura. Una argolla de masa m se mueve sin fricción a lo largo de esta curva. Considere $a = b = 1$, y λ un número real > 2. Considere gravedad vertical.

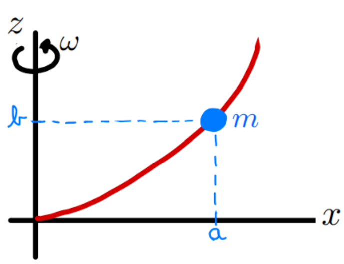
(a) Escriba el Lagrangiano considerando coordenadas cilíndricas.

(b) Obtenga la ecuación de movimiento para la única variable generalizada de este problema.

(c) Obtenga los puntos de equilibrio directamente desde la ecuación de movimiento. Defina un potencial efectivo y corrobore estos puntos de equilibrio.

(d) Dibuje un diagrama de bifurcaciones con respecto a la velocidad angular ω. Identifique la rama estable y la inestable.

(e) Encuentre la frecuenca de pequeñas oscilaciones directamente desde la ecuación de movimiento, y relaciónela con los regímenes para $\omega = 0$ y $\omega > 0$.

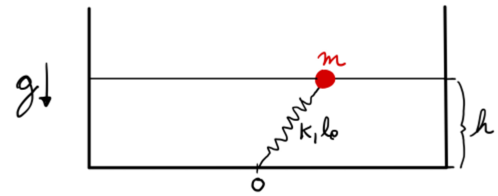


✓

Estudiar!

P4. Mostacilla horizontal.

Una mostacilla de masa m desliza (sin roce) a lo largo de un alambre horizontal, tal como se muestra en la figura. La mostacilla está atada a un resorte, de largo natural ℓ_0 y constante de restitución k, el cual se encuentra fijo en su otro extremo al punto O, ubicado a una distancia vertical h desde el alambre.



(a) Escriba el Lagrangiano del problema y obtenga la ecuación de movimiento respectiva.

(b) Encuentre los puntos críticos del problema y determine su condición de existencia. Evalúe la energía potencial en estos puntos críticos. Dibuje los estados de equilibrio respectivos.

(c) Implemente el formalismo de pequeñas oscilaciones para hallar las matrices $\hat{M}$ y $\hat{V}$. Escriba la ecuación para la perturbación y determine la estabilidad de los puntos críticos hallados en (b). Bosqueje la forma del potencial en dos situaciones fenomenológicas distintas (antes y después de la bifurcación). Dibuje un diagrama de bifurcaciones usando el parámetro de control h/ℓ_0.

(d) Considere la variable horizontal como pequeña y expanda la ecuación de movimiento. Demuestre que este sistema es estrictamente no lineal si $h = \ell_0$.

$\boxed{P4}$ El de la tarea 1: P2.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k}{2}\left(\sqrt{h^2+x^2} - l_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+h^2}}\right) = 0$$

Equilibrio mecánico:

$\boxed{\ddot{x} = 0} \Rightarrow \boxed{x_0 = 0}$

existen cuando.

$$\boxed{x_\pm = \pm l_0 \sqrt{1 - \underbrace{\left(\frac{h}{l_0}\right)^2}_{\text{parámetro control.}}}} \longrightarrow \boxed{1 > \frac{h}{l_0}}$$

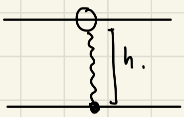
→ U_{eff} va a cambiar dado parámetro control.

Energía potencial:

$$U(x_0) = \frac{k}{2}(h - l_0)^2$$

$$U(x_\pm) = 0 \quad (h/l_0 < 1)$$

$\boxed{h/l_0 > 1}$

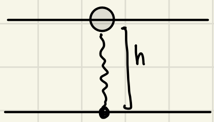


→ Estirado

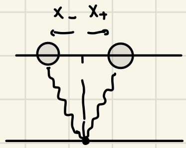
↓

1 pto. de equi.

$\boxed{h/l_0 < 1}$



comprimiéndose



* en este caso $U_{eff} = U_p$

Formalismo: $G = 1$, $q_1 = x$

$$m_{11} = m\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2\Bigg|_{x_{eq.}} = m$$

$$v_{11} = \left[\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial x^2}\right]\Bigg|_{x_{eq}} = k\left[1 - \frac{l_0 h^2}{(h^2+x^2)^{3/2}}\right]\Bigg|_{x_{eq.}}$$

$\rightarrow v_{11}(x_0) = k\left[1 - l_0/h\right]$ (1)

$\rightarrow v_{11}(x_\pm) = k\left[1 - \frac{h^2}{l_0^2}\right]$ (2)

(1) $\rightarrow m\ddot{\eta} + \underbrace{k\left[1 - \ell_0/h\right]}_{\omega_0^2}\eta = 0$

↳ no siempre va a ser real.

$(\ell_0/h < 1 \;;\; h/\ell_0 > 1)$

$\Rightarrow$ Estable

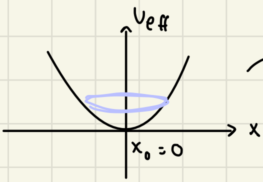
$(\ell_0/h > 1 \;;\; h/\ell_0 < 1)$

$\Rightarrow$ Inestable

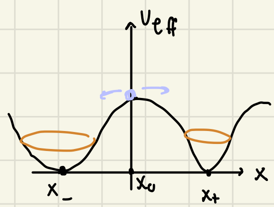
(2) $\rightarrow m\ddot{\eta} + k\left[1 - h^2/\ell_0^2\right]\eta = 0$

sólo cuando se cumple la condiø : $h/\ell_0 > 1$

↳ Ω_0^2 : tipo oscilador armónico (siempre positivo). $\Rightarrow$ Estable.



$\boxed{h/\ell_0 > 1}$

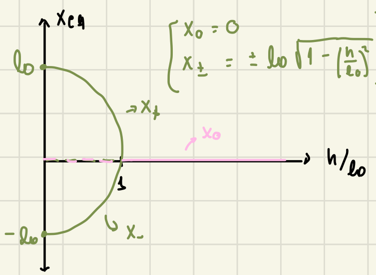


$\boxed{h/\ell_0 < 1}$

↳ deben ser estables

* Control!

↳ Diagrama de Bifurcaø



$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_\pm = \pm \ell_0 \sqrt{1 - \left(\frac{h}{\ell_0}\right)^2} \end{cases}$$

- - - - : inestable

——— : estable

quieta en ese punto.

↳ Hay energía de elongaø.

$x_0 = 0$

$x_\pm = \pm \ell_0 \sqrt{1 - \left(\frac{h}{\ell_0}\right)^2}$

P3

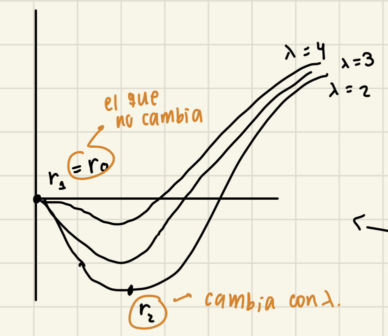
$$\ddot r\left(1+\lambda^2 r^{2(\lambda-1)}\right)+(\lambda-1)\lambda^2 r^{2\lambda-3}\dot r^2 - r\omega^2 + g\lambda r^{\lambda-1} = 0$$

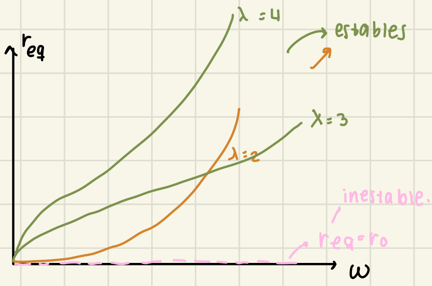
(*) $\boxed{\ddot r = 0 = \dot r}$

$$\rightarrow r(\omega^2 - g\lambda r^{\lambda-2}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} r_0 &= 0 \\ r_\pm &= \left(\frac{\omega^2}{g\lambda}\right)^{1/(\lambda-2)} \end{aligned}} \; , \; \lambda > 2.$$

↳ cambia la forma dependiendo del w.

$$U_{eff} = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + m g r^\lambda$$





tiene sentido.

Estabilidad

$$\left(\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right) = -m\omega^2 + \lambda m g(\lambda-1) r^{\lambda-2}\Big|_{r_{eq}} \gtrless$$

$\rightarrow r_{eq} = r_0 = 0 \longrightarrow \dfrac{d^2 U_{eff}}{dr^2} = -m\omega^2 < 0 \longrightarrow$ máximo

$\hookrightarrow$ pto inestable.

$\rightarrow r_{eq} = r_2 \rightarrow m\omega^2(\lambda-2) \geq 0 \rightarrow$ mínimo

$\rightarrow$ pto. estable.

peq. oscilaœes: $r = r_{eq} + \eta$ $\rightarrow$ ocupar ecs. de equilibrio

$\ddot{r} = \ddot{\eta}$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{\eta}\left(1 + \lambda^2 r_{eq}^{2(\lambda-1)}\right) + \eta\left(\omega^2 - g\lambda(\lambda-1)\, r_{eq}^{\lambda-2}\right) = 0}$$

$\rightarrow \eta << 1$

$\dot{\eta}^2 << \dot{\eta} << 1$

$\hookrightarrow$ *despreciable.*

Auxiliar #4 - Sistemas acoplados Parte 1

Vibraciones y Ondas - Otoño 2023

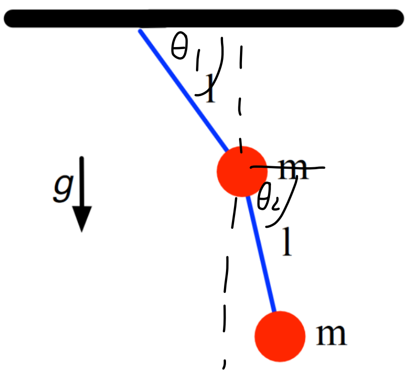
Profesor: Rodrigo Vicencio - Aux: Paloma Vildoso[1] - Ayu: Diego Roman y Javier Cubillos.

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

P1. Al menos es simétrico

Considere un péndulo doble simétrico como el mostrado en la figura. Ambos péndulos tienen igual masa m e igual largo ℓ, y sus ángulos están dados por ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente.

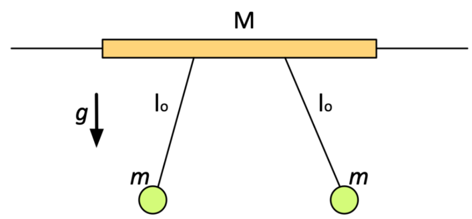


(a) Escriba las matrice $\hat{M}$ y $\hat{V}$, considerando pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio estable del problema. Obtenga las frecuencias de los modos normales.

(b) Encuentre los vectores normales del péndulo doble simétrico. Demuestre que estos son ortogonales en la métrica $\hat{M}$ y no sin ella. Describa su movimiento.

P2. Más péndulos, yay!

Los pivotes de dos péndulos planos se encuentran unidos por una barra de masa M que se mueve libremente sólo en la dirección horizontal, tal como se indica en la figura. Las partículas que componen cada péndulo tienen masa m, la longitud de las cuerdas es ℓ_0, y$M = 2m$.



Encuentre el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones. Encuentre las frecuencias propias de la oscilación y los modos normales. Describa el movimiento correspondiente a cada modo normal con un dibujo. Dé una expresión para la solución general del problema en la aproximación de pequeñas oscilaciones.

[1] paloma.vildoso@ug.uchile.cl

$x_1 = l\cos\theta_1 \quad , y_1 = l\,\text{sen}\,\theta_1$

$x_2 = l\cos\theta_2 + l\cos\theta_1 \quad , y_2 = l\,\text{sen}\,\theta_2 + l\,\text{sen}\,\theta_1$

$\underbrace{1-\cos\theta_1}_{2\,\text{sen}\,\theta_1}$

$\rightarrow \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l^2\dot{\theta}_1^2 \quad , \dot{x}_2 = -l\dot{\theta}_1\text{sen}\,\theta_1 + -l\,\text{sen}\,\theta_2\cdot\dot{\theta}_2 \quad , \dot{y}_2 = l\cos\theta_2\cdot\dot{\theta}_2 + l\cos\theta_1\dot{\theta}_1$

$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l^2\dot{\theta}_1^2\text{sen}^2\theta_1 + 2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\,\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + l^2\dot{\theta}_2^2\text{sen}^2 + l^2\dot{\theta}_2^2\cos^2 + l^2\dot{\theta}_1^2\cos^2 + 2l^2\cos\theta_1\cos\theta_2$

$= l^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\dot{\theta}_2^2 +$

le aplicamos p.o. directa al lagrangiano. ¡considerar 2° orden!

$\boxed{P1} \rightarrow L = \frac{1}{2} m l^2 (\underbrace{2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2}_{\vec{v}\text{ de las masas}} + \underbrace{2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2}_{\text{interacción entre ellas.}}) + mgl\left[3 - \theta_1^2 - \frac{\theta_2^2}{2}\right]$

siempre términos de esta forma!

Interacción entre $\vec{a}$ de las 2 masas.

$\boxed{E-L} \quad ml^2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + 2mgl\theta_1 = 0$

$\boxed{\theta_1} \rightarrow m(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + 2m\omega_0^2\theta_1 = 0 \quad (1)$

$\boxed{\omega_0^2 = g/l}$ → frecuencia natural de las p.o del sist.

$\rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ ✗ → no queremos que se nos vayan las masas.

$\boxed{\theta_2} \quad m(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m\omega_0^2\theta_2 = 0 \quad (2)$

$\rightarrow \hat{M}\ddot{\vec{\theta}} + \hat{V}\vec{\theta} = 0 \quad ; \quad \vec{\theta} = \begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix}$

· M debe tener unidades de masa!

$\hat{M} = \begin{pmatrix} 2m & m \\ m & m \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$\hat{M}\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix}$

$\hat{V} = \begin{pmatrix} 2m\omega_0^2 & 0 \\ 0 & m\omega_0^2 \end{pmatrix} = m\omega_0^2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Ansatz $\rightarrow \vec{\theta} = Ae^{i\omega t}$

ω son las frec. a utilizar. $\rightarrow$ · $\det(\hat{V} - \omega^2\hat{M}) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2m\omega_0^2 - 2m\omega^2 & -\omega^2 m \\ -\omega^2 m & m\omega_0^2 - \omega^2 m\end{vmatrix} = 0$

Obtener $\underline{\underline{\omega^2}}$

↳ sólo 2 soluciones.

$\Rightarrow 2\omega_0^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 = 0$ → polinomio característico.

$$\boxed{\omega_{1,2}^2 = (2 \pm \sqrt{2})\,\omega_0^2}$$

frecuencias modos normales.

* valores propios: frec. de los modos
* vect. propios: modos normales.

ⓑ $(\hat{V} - \omega^2 \hat{M})\vec{\theta} = 0$ ← camino modos normales.

$$\boxed{\omega_1^2 = (2+\sqrt{2})\,\omega_0^2}$$

reemplazando en la ec. de movi®. ←

$$-2(1+\sqrt{2})\,\omega_0^2\theta_1 - (2+\sqrt{2})\,\omega_0^2\theta_2 = 0.$$

$$\rightarrow \quad \theta_2 = \theta_1\left(\frac{-2(1+\sqrt{2})\cancel{\omega_0^2}}{(2+\sqrt{2})\cancel{\omega_0^2}}\right)$$

No tomo en cuenta θ_1! ←

$$\twoheadrightarrow \quad \boxed{\vec{\theta}_1 = \vec{V}_1 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-2(1+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})} \end{pmatrix}\theta_1}$$

→ modo normal asociado a ω_1^2

↳ $C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\omega_2^2 = (2-\sqrt{2})\,\omega_0^2$$

$$\rightarrow \quad \theta_2 = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(2-\sqrt{2})}\theta_1$$

$$\twoheadrightarrow \quad \boxed{\vec{\theta}_2 = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{2} \end{pmatrix}\theta_1}$$

→ modo normal asociado a ω_2^2.

↳ $C_2\begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

→ lineal ←

$\cancel{\vec{v}_1^T \mathbb{I} \vec{v}_2} = \delta_{12}$ — ortonormales cuando $\delta = 0$

se quiere probar que son ortonormales →

$\boxed{\begin{gathered}\rightarrow \text{Física} \leftarrow \\ \mu_1^T \hat{M} \mu_2 = \delta_{12}\end{gathered}}$ → para encontrar c_1 y c_2.

$\theta_1^T \hat{M} \theta_1 = 1$

$$c_1^2\, m\,(1-\sqrt{2})\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1.$$

$$c_1^2\, m\,(1-\sqrt{2})\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1$$

$$c_1^2 m\,(2-\sqrt{2}) - \sqrt{2}\,(1-\sqrt{2}) = 1.$$

$$c_1^2 m 2\,(2-\sqrt{2}) = 1 \rightarrow c_1 = \sqrt{\frac{1}{2m(2-\sqrt{2})}}$$

es como normalizar → para que $\vec{\theta}_1$ y $\vec{\theta}_2$ queden adimensionales

Análogamente:

$$\boxed{c_2 = \sqrt{\frac{1}{2m(2+\sqrt{2})}}}$$

Receta tía Phalo.

1) Ecuación mov. (pequeñas osc.).

2) Escribir $\hat{M}$ y $\hat{V}$ ($\ddot{\vec{\eta}}\hat{M} + \vec{\eta}\,\hat{V} = 0$).

3) Resolver sist. de ecuación vía diagonalizar.

($\det(\hat{V} - \omega^2 \hat{M}) = 0$)

4) Encontrar ω^2 y sus modos asociados.

5) Seguir matraqueando.

→ sist degenerado : Multiplicidad 2

* tarea:
  - tiene frec. degenerada
  - fijarse en geometría y qué ocurre c/ los bordes.
  - si lo estiran no hay degeneración.

$\boxed{P2}$

$$L = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\left(2\dot{x}^2 + l_0^2\dot{\theta}_1^2 + l_0^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_0\,\dot{x}(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2)\right)$$
$$+ mgl_0(\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

* como no hay $\vec{F}$ neta en la horizontal $\Rightarrow$ x es cant. conservada.

$\rightarrow$ Matraca!! (peq. oscilaciones).

$$\left(\frac{M+m}{M+2m}\right)\ddot{\theta}_1 l_0 - \frac{ml_0\ddot{\theta}_2}{M+2m} + g\theta_1 = 0 \quad / \frac{1}{l_0}$$

$$\left(\frac{M+m}{M+2m}\right)\ddot{\theta}_2 l_0 - \frac{ml_0\ddot{\theta}_1}{M+2m} + g\theta_2 = 0. \quad / \frac{1}{l_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = g/l_0}$$

$$-\left(\frac{M+m}{M+2m}\right)\omega_0^2\theta_1 - \frac{m}{M+2m}\omega_0^2\theta_2 + \frac{g}{l_0}\theta_1 = 0$$

($\frac{g}{l_0} = \omega_0^2$)

$$\Rightarrow -\left(\frac{M+m}{M+2m}\right)\omega_0^2\theta_1$$

$$\frac{M+2m-\cancel{M}}{M+2m}\omega_0^2\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2(\theta_2 - \theta_1) = 0$$
$$\Rightarrow \theta_2 = \theta_1$$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{1}{M+2m}\begin{pmatrix} M+m & -m \\ -m & M+m \end{pmatrix} \rightarrow \hat{V} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} = \omega_0^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 coord. generalizadas

· 2 ecs. $\Rightarrow$ 2 frec.

$$\det(\hat{V} - \omega^2\hat{M}) = 0$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2\left(\frac{M+m}{M+2m}\right) & \frac{\omega^2 m}{M+2m} \\ \frac{\omega^2 m}{M+2m} & \omega_0^2 - \omega^2\left(\frac{M+m}{2m+M}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\cdot \left(\omega_0^2 - \omega^2\left(\frac{M+m}{M+2m}\right)\right)^2 - \frac{\omega^4 m^2}{(M+2m)^2} = 0$$

$$\omega_0^2 - \omega^2\left(\frac{M+m}{M+2m}\right) = \frac{\omega^2 m}{M+2m}$$

$$\omega_0^2 = \omega^2\left(\frac{m}{M+2m} + \frac{M+m}{M+2m}\right)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2\left(\frac{2m+M}{2m+M}\right)$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \omega^2}$$

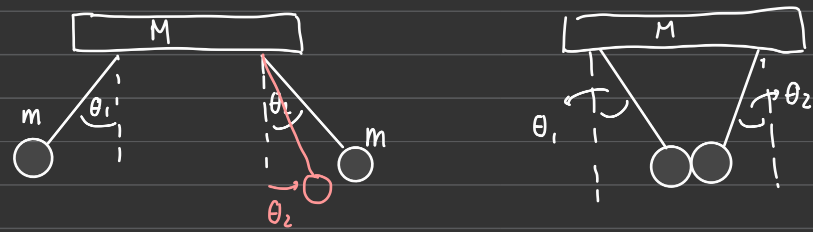
$$\Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = \omega_0^2}, \quad \boxed{\omega_2^2 = \left(\frac{M+2m}{M}\right)\omega_0^2}$$

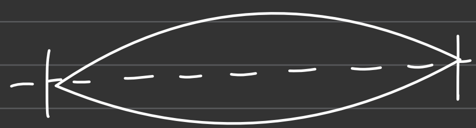
$$\boxed{\omega_1^2} \Rightarrow \boxed{\vec{\theta}_1 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \longrightarrow \text{modos en contrafase}$$

$$\boxed{\omega_2^2} \Rightarrow \boxed{\vec{\theta}_2 = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \longrightarrow \text{modos en fase.}$$

amplitud con los numeritos y signo hacia donde se mueve.

$\boxed{\omega_1^2}$





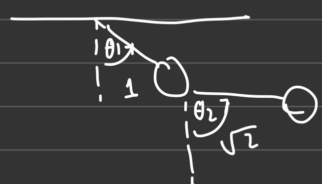
→ todos los modos son equiprob. en sist. mecánicos

$\boxed{\omega_2^2}$

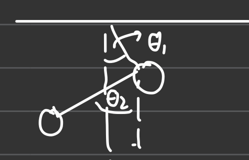
en el péndulo:

· $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ · $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\vec{v}_1$



$\vec{v}_2$



Auxiliar #5 - Sistemas acoplados Parte 2

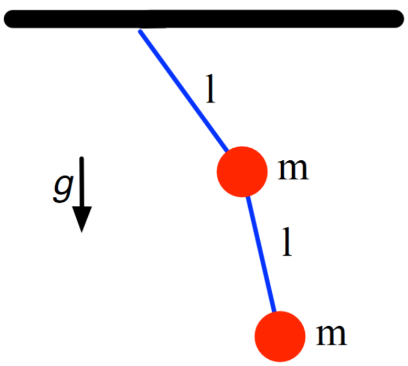
Vibraciones y Ondas - Otoño 2023

Profesor: Rodrigo Vicencio - Aux: Paloma Vildoso[1] - Ayu: Diego Roman y Javier Cubillos.

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

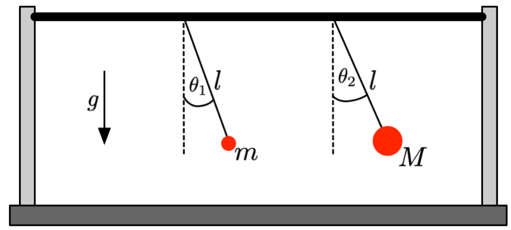
P1. Al menos es simétrico (cont. aux4 P1. parte (c))
Considere un péndulo doble simétrico como el mostrado en la figura. Ambos péndulos tienen igual masa m e igual largo ℓ, y sus ángulos están dados por ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente.



(c) Construya la matriz modal $\hat{A}$, y encuentre $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ en términos de las coordenadas normales del problema. Consodere la condición inicial $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_@(0) = 0$. ¿Cuánto vale la razón $\phi_2(0)/\phi_1(0)$ si la primera coordenada normal no es excitada y por qué? ¿Cuánto vale la razon $\phi_2(0)/\phi_1(0)$ si la segunda coordenada normal no es excitada y por qué?

P2. Péndulos acoplados.

Dos péndulos planos cualgan desde una barra horizontal que permite acoplar el movimiento de uno respecto al otro, debido a una fuerza potencial modelada como $-V\theta_1\theta_2$. Cada péndulo tiene una masa distinta (m y M), pero igual largo l, tal como se muestra en la figura.



(a) Escriba el Lagrangiano del problema y encuentre las ecuaciones acopladas de movimiento para los ángulos θ_1 y θ_2.

(b) Considere pequeñas oscilaciones y linearice las ecuaciones acopladas halladas en (a). Por inspección, defina las matrices $\hat{M}$ y $\hat{V}$. Determine las dos frecuencias normales de este problema. Identifique una condición/restricción para los parámetros del problema con tal de que siempre existan 2 frecuencias normales de oscilación.

(c) Encuentre los modos normales (sin normalizar) y bosquéjelos cuando $m = M$ u cuando $m < M$. Verifique que $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \neq 0$. Luego, normalícelos en la métrica de $\hat{M}$ y demuestre la condición de ortogonalidad en esta métrica.

(d) Defina la matriz modal $\hat{A}$ y determine, vía coordenadas normales, lo siguiente:

$$\vec{\theta}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \dot{\vec{\theta}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \forall t$$

A continuación, considere la siguiente condición inicial $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$. ¿Cuáles son las expresiones para $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, dadas estas condiciones iniciales? Evalúe luego para $m = M$ y verifique lo esperado.

[1] paloma.vildoso@ug.uchile.cl

$\boxed{P1}$

$$\vec{\theta}_1 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2m(2-\sqrt{2})}}}_{c_1}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\vec{\theta}_2 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2m(2+\sqrt{2})}}}_{c_2}\begin{pmatrix}1\\+\sqrt{2}\end{pmatrix} \longrightarrow \text{vectores propios (modos normales).}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = (\vec{\theta}_1 ; \vec{\theta}_2)$$

$$= \left(c_1\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix} \quad c_2\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\end{pmatrix}$$

$*\ \omega_1 = (2+\sqrt{2})\omega_0^2$

$*\ \omega_2 = (2-\sqrt{2})\omega_0^2$

$*\ \xi_1(t) = \xi_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$ $\rightarrow$ coordenadas naturales.

$\vec{\eta} = \hat{A}\vec{\xi}$, $\vec{\eta} = \begin{pmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ coord. generalizadas.

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$$

datos desconocidos.

$$\rightarrow \theta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\frac{\xi_1(t)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{\xi_2(t)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\frac{\xi_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{\xi_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right]$$

$$\rightarrow \theta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\frac{-\xi_1(t)\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{\xi_2(t)\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2m}}\left[\frac{-\xi_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{\xi_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right]$$

· Cond. inicial:

$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$

(reposo).

$\boxed{P1}$ $$\dot{\theta}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\frac{-\omega_1\xi_1\sin(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \frac{\omega_2\xi_2\sin(\omega_2 t + \phi_2)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right]$$

$$\rightarrow \dot{\theta}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left[\frac{-\omega_1\xi_1\sin(\phi_1)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \frac{\omega_2\xi_2\sin(\phi_2)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right]$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{-\xi_1\omega_1\,\text{sen}(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \frac{\omega_2\xi_2\sin(\omega_2 t + \phi_2)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right]$$

$$\dot{\theta}_2(0) = \frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{\omega_1 \xi_1 \sin(\phi_1)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \frac{\omega_2 \xi_2 \sin(\phi_2)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2+\sqrt{2}}\ \omega_1 \xi_1 \sin(\phi_1) = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ \xi_2 \sin(\phi_2)\, \omega_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2}}\ \omega_1 \xi_1 \sin(\phi_1) = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ \omega_2 \xi_2 \sin(\phi_2)$$

* $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$\rightarrow$ No hay fases!

$$\Rightarrow \theta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\xi_1 \cos(\omega_2 t)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{\xi_2 \cos(\omega_2 t)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$$

$$\theta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{-\xi_1 \cos(\omega_1 t)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{\xi_2 \cos(\omega_2 t)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$$

$\xi_i(t) = \xi_i \cos(\omega_i t + \underbrace{\phi_i}_{0}) = 0$

$\hookrightarrow \xi_2$ es siempre 0 ya que la C.I. hace que sea 0 siempre.

$\frac{\theta_1(0)}{\theta_2(0)} = ?$ $\longrightarrow$ 1.q. $\xi_1(0) \neq 0$ $\vee$ $\xi_2(0) = 0$. $\rightarrow$ segunda no es excitada

$$\rightarrow \theta_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \cancelto{0}{\frac{\xi_2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\right) \quad ; \quad \theta_2(0) = \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{-\xi_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + 0\right)$$

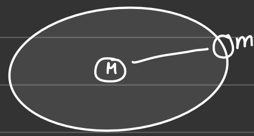
$$\rightarrow \frac{-\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\xi_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{2m}}\frac{\xi_1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}} = \frac{-\sqrt{2m}}{\sqrt{m}} = -\sqrt{2}$$

es como $\frac{1}{2}V\theta_1\theta_2 + \frac{1}{2}V\theta_1\theta_2$

para 1 péndulo. Es como una E potencial elástica.

P2 $L = \frac{1}{2}\ell^2(m\dot{\theta}_1^2 + M\dot{\theta}_2^2) + g\ell(m\cos\theta_1 + M\cos\theta_2) + V\theta_1\theta_2.$

$$\Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta}_1 + mg\ell\sin\theta_1 - V\theta_2 = 0$$
$$M\ell^2\ddot{\theta}_2 + Mg\ell\sin\theta_2 - V\theta_1 = 0.$$



$U = \frac{-Mm}{r}$

* mayoría de las veces, p.o. será c/ aprox. Taylor.

factorizo en todas las ec. por l.

Peq. osc.

$$\rightarrow m\ell^2\ddot{\theta}_1 + mg\ell\theta_1 - V\theta_1 = 0$$
$$M\ell^2\ddot{\theta}_2 + Mg\ell\theta_2 - V\theta_2 = 0$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m\ell^{\cancel{2}} & 0 \\ 0 & M\ell^{\cancel{2}} \end{pmatrix}$$

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} mg\cancel{\ell} & -\frac{V}{\ell} \\ -\frac{V}{\ell} & Mg\cancel{\ell} \end{pmatrix}$$

$$\hat{M}\ddot{\vec{\eta}} + V\vec{\eta} = 0 \quad \longleftarrow \quad \underline{\vec{\eta} = \eta e^{i\omega t}}$$

$$\det|V - \omega^2 M| = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{diagonalizar}$$

Maraca:

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2_{\pm} = \frac{g}{l} \pm \frac{V}{l^2\sqrt{Mm}}}$$ frecuencias normales!

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 \geq 0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{g}{l} \pm \frac{V}{l^2\sqrt{Mm}} \geq 0$$

$$\rightarrow \boxed{g \geq \mp \frac{V}{l\sqrt{Mm}}}$$, como $g > 0 \Rightarrow (-)$ no importa.

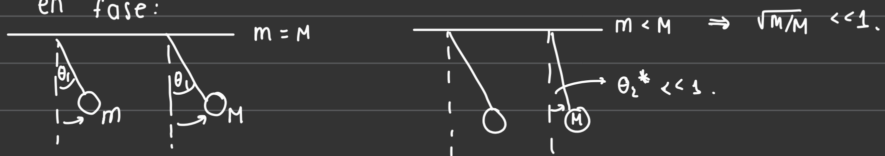
$\Rightarrow$ modos normales

$$\begin{pmatrix} mg - \omega^2 m l & -V/l \\ -V/l & Mg - \omega^2 M l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{\omega_-^2} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{m}{\sqrt{Mm}}\theta_1$$

$$\rightarrow \vec{v}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{m/M} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

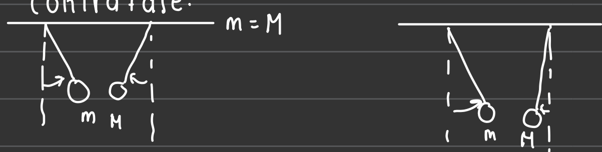
en fase:



$$\boxed{\omega_+^2} \quad \theta_2 = -\sqrt{m/M}\,\theta_1$$

$$\rightarrow \vec{v}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{m/M} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

contrafase:



$\rightarrow v_1^T \cdot v_2 \neq 0$

$$\rightarrow c_1 c_2 \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m/M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{m/M} \end{pmatrix} = 1 - \frac{m}{M} \neq 0$$

$v_1^T \cdot M \cdot v_2 = 0$?

$$\rightarrow c_1 c_2 \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m/M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ml & 0 \\ 0 & Ml \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{m/M} \end{pmatrix} = c_1 c_2 \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m/M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ml \\ -\sqrt{Mm}\,l \end{pmatrix} = ml - ml = 0$$

$\longrightarrow$ ortogonal en la métrica de la matriz m.

Ortonormalidad

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 1/\sqrt{2m} \longrightarrow c_2 = 1/\sqrt{2M}}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{m/M} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2M}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{m/M} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m} & -1/\sqrt{M} \\ 1/\sqrt{M} & -\sqrt{m}/M \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \dfrac{\xi_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{m}} + \dfrac{\xi_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)}{\sqrt{M}} \\ \dfrac{\xi_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)}{\sqrt{M}} - \dfrac{\sqrt{m}}{M} \xi_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ coord. iniciales $\quad \theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$

$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$

$\Rightarrow \phi_1 = \phi_2 = 0$ $\qquad$ $\boxed{m = M}$ $\rightarrow$ ver qué modo se excita c/ esa cond.

$$\rightarrow \xi_1 = \left(\frac{\sqrt{2m} + \sqrt{2M}}{2} \right) \theta_0 \quad ; \quad \xi_2 = \left(\frac{\sqrt{2m} - \sqrt{2M}}{2} \right)^{\nearrow 0} \theta_0 .$$

Auxiliar #6 - Sistemas extendidos

Vibraciones y Ondas - Otoño 2023

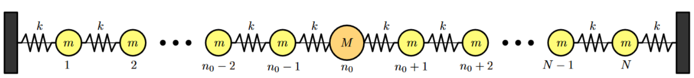
Profesor: Rodrigo Vicencio - Aux: Paloma Vildoso[1] - Ayu: Diego Roman y Javier Cubillos.

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

P1. Cadena con Impureza

En general, estructuras ordenadas en física implican transporte y conducción de ondas a lo largo del sistema. Sin embargo, cuando se insertan o aparecen ciertos defectos o impurezas, otros tipos de soluciones pueden también emerger en torno a estas anomalías. Considere una cadena de N masas acopladas por resortes con constante de restitución k, tal como se muestra en la figura. Todas las masas son iguales (m), excepto la ubicada en la posicion n_0 que poseé una masa M. En reposo, cada ,asa está separada por una distancia a. La gravedad es despreciable.



(a) Escriba la energía cinética T, la energía potencial U, y el Lagrangiano L de este sistema. Vía Euler-Lagrange, obtenga las ecuaciones dinámicas para $n \neq n_0$ y $n = n_0$. Simplifique la notación definiendo: $\omega_m^2 = \dfrac{k}{m}$ y $\omega_M^2 = \dfrac{k}{M}$.

(b) Considere la siguiente onda como solución general a este problema:

$$x_n(t) = A\sin(kna)e^{-i\omega t} \ ,$$

donde A corresponde a la amplitud, k al número de onda, y ω a la frecuencia. Reemplace esta solución en la ecuación para $n \neq n_0$ encontrada en la parte (a), y determine la banda de frecuencias de este problema.

(c) Considere el siguiente ansatz como solución para un modo exponencialmente localizado centrado en la impureza M:

$$x_n(t) = X_0 \xi^{|n-n_0|} e^{-i\omega t} \ ,$$

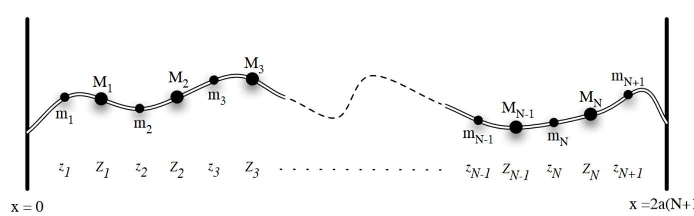
donde X_0 corresponde a la amplitud de este modo, ξ al factor de decaimiento exponencial. Si este modo está localizado en la impureza implicará que $|\xi| < 1$, tal que a medida que se aleja de la impureza $(n = n_0)$ este vaya decayendo rápidamente: $\xi^{|N-n_0|} \to 0$ para $N \gg n_0$ (si $|\xi| > 1$ vemos que $|\xi^{|N-n_0|}| \gg 1$, lo que implicaría divergencia y la necesidad de una fuente de energía infinita).

Encuentre el valor de ξ y ω insertando este ansatz en las ecuaciones en torno a la impureza: $n = n_0,\ n_0 \pm 1$ (para $n_0 \pm 2$ y más allá podrá ver que hay recurrencia). Simplifique sus expresiones definiendo el parámetro $\delta \equiv \omega_m^2/\omega_M^2$. Determine para qué rango de δ se obtienen modos localizados.

(d) Para $\delta = 0,\ 2/3$ y 1 obtenga el valor de ξ y ω respectivo. Bosqueje la banda de frecuencias halladas en (b) y explique (dibuje) "dónde" viven los modos de impureza hallados. Haga un bosquejo del modo de impureza, en dos instantes distintos, para $\delta = 2/3$ y para $n = n_0,\ n_0 \pm 1,\ n_0 \pm 2,\ n_0 \pm 3$.

P2. Oscilación de N pares de masas: "Cadena Binaria"

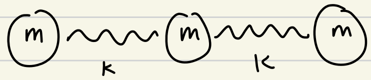
Considere una cuerda elástica con $N+1$ masas m y N masas M atadas, como la mostrada en la figura. La separación entre cada masa es constante: "a". $m_n = m$ y $M_n = M\ \forall n$. La tensión en la cuerda (en primera aproximación) es constante y vale "T"; la gravedad es despreciable.



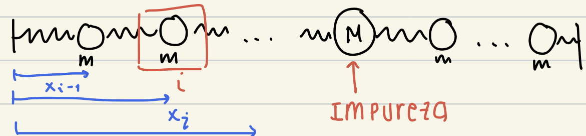
Las masas sólo pueden moverse en la dirección vertical. En consecuencia, este problema presenta $2N+1$ grados de libertad y, de esta manera, $2N+1$ frecuencias

[1] paloma.vildoso@ug.uchile.cl

12 mayo



P1



celda que no está en el borde ←

ⓐ $L_{cell} = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}k(x_i - x_{i-1})^2 - \frac{1}{2}k(x_{i+1} - x_i)^2$

$L_M = \frac{1}{2} M \dot{x}_{n_c}^2 - \frac{1}{2}k(x_{n_c} - x_{n_c-1})^2 - \underbrace{\frac{1}{2}k(x_{n_c+1} - x_{nc})^2}_{\text{no depende de la masa M.}}$

L general: suma de los lagrangianos. ←

$$\left[L = \sum_{i \neq n_c} \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_{nc}^2 - \frac{1}{2} k \sum_{i=0}^{N} (x_{i+1} - x_i)^2 \quad \leftarrow \boxed{x_{N+1} = x_0 = 0.} \right]$$

Ec. de mov. calcularlas desde las celdas! ←

Eq. mov?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\dot{x}_i} L\right) - \frac{dL}{dx_i} = 0$$

(1) → $m\ddot{x}_i + k(-x_{i+1} - x_{i-1} + 2x_i) = 0 \qquad i \neq n_c.$

$\Leftarrow \omega_m^2 = \frac{k}{m}$

(2) $M\ddot{x}_{n_c} + k(-x_{n_c+1} - x_{nc-1} + 2x_{n_c}) = 0.$

$\omega_M^2 = \frac{k}{M}.$

Ansatz

$\Rightarrow x_i(t) = \underbrace{A\sin(kia)}_{\text{frecuencias espaciales}} e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i(t).}$ → mismo de un sist. finito

reescribir todo en torno a x_i ←

$\overset{(1)}{\Rightarrow} -\omega^2 x_i + \omega_m^2(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}) = 0$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} -\omega^2 x_{n_c} + \omega_M^2(2x_{nc} - x_{nc+1} - x_{nc-1}) = 0.$

Formamos el det. pero no estamos calculando M ni V. ←

$\Rightarrow \hat{M}\ddot{x} + \hat{V}x = 0 \rightsquigarrow \det(V - \omega^2 M) = 0$ ⊛

polinomio

$\Rightarrow [2\omega_m^2 - \omega^2 - 2\omega_m \cos ka] \sin ka = 0$

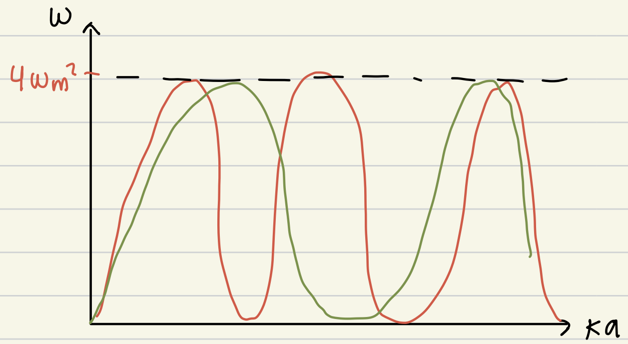
$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = 2\omega_m^2(1 - \cos(ka))} = 4\underbrace{\omega_m}_{\text{máx.}}^2 \sin^2 ka/2.$

⊛ ω: No deben depender de n!

* coord. naturales y cond. iniciales. → Tipo pero con hartos pasos.

→ ver si se juntan las bandas.

No nos interesa la forma sino, donde viven. ←



→ Muchos modos, muchas frec. que viven en la banda.

* Tarea : 2 coord. generalizadas → " 2 frec. generalizadas"
↳ $\boxed{\omega^2}$

(*) $-\omega^2 \sin(kia) + \omega_m^2 (2\sin(kia)) - \sin(k(i+1)a) - \sin(k(i-1)a) = 0$

$\rightarrow -\omega^2 \sin(kia) + \omega_m^2 (2\sin(kia)) - \sin(\cancel{kai})\cos(ka) - \sin(ka)\cos(kia)$
$- \sin(\cancel{-kai})\cos(ka) - \sin(ka)\cos(-kia)$

$\sin(a+B) = \sin(a)\cos(B) + \sin(B)\cos(a)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\omega^2 \sin(kia) + \omega_m^2 (2\sin kia - 2\sin ka \cos kia) = 0 \\ -\omega^2 \sin(kn_c a) + \omega_M^2 (2\sin(kn_c a) - 2\sin(ka)\cos(kn_c a)) = 0 \end{bmatrix}$$

· No nos afecta a la frec. para este caso!
· Si importa cuando no depende exclusiva# de la coordenada.
↳ sist. de ecuaciones

↓
Fijarse bien en la celda!

Ansatz:
se factorizan y eliminan

$\ddot{X}_{n_c} + \omega_M^2 (2X_{n_c} - X_{n_c-1} - X_{n_c+1}) = 0 \quad \leftarrow \quad x_i(t) = X_0 \, \xi^{|i-n_c|} e^{-\omega t i}$

$\ddot{x}_i(t) = -\omega^2 x_i(t)$

$i = n_c$ en torno a la impureza.

$\Rightarrow -\omega^2 \xi^{|n_c - n_c|} + \omega_M^2 (2\xi^{|n_c - n_c|} - \xi^{|n_c - 1 - n_c|} - \xi^{|n_c + 1 - n_c|}) = 0$

$\rightarrow \omega^2 + \omega_M^2 2(1-\xi) = 0$

$\rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_M^2 \, 2(1-\xi)}$

$i = n_c \pm 1$

$\Rightarrow -\underbrace{\omega^2}_{\text{asociados al modo de la impureza no de las celdas.}} \xi^{|n_c \pm 1 - n_c|} + \omega_m^2 (2\xi^{|n_c \pm 1 - n_c|} - \xi^{|n_c \pm 1 - n_c - 1|} - \xi^{|n_c \pm 1 - n_c + 1|}) = 0$

$\rightarrow -\omega^2 \xi + \omega_m^2 (2\xi - \xi^2 - 1) = 0$

$i = n \pm 2$

$$-\omega^2\xi^2 + \omega_m^2(2\xi^2-\xi^3-\xi) = 0 \Rightarrow -\omega^2\xi + \omega_m^2(2\xi-\xi^2-1)=0$$

$$\xi = \frac{[\omega_M^2 - \omega_m^2 \pm \omega_M^2]}{2\omega_M^2-\omega_m^2} \longleftarrow \delta = \frac{\omega_m^2}{\omega_M^2} \sim \frac{M}{m}$$

Para ciertos rangos de δ hay localizados

$$\boxed{\xi = \frac{1-\delta \pm 1}{2-\delta}}$$

└ No es un modo, es una soluø.

· localizado: $\Rightarrow |\xi| < 1$

· $\xi_+ = \frac{2-\delta}{2-\delta} = 1 \longrightarrow$ No es localizado

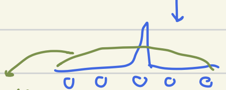
· $\xi_- = \frac{-\delta}{2-\delta} \longrightarrow$ sí pueden ser localizados. $\longrightarrow |\xi| = \frac{\delta}{|2-\delta|} < 1$

$\delta = |2-\delta| \longrightarrow \boxed{\delta < 1}$

condiø de soluøes localizadas.

* Depende de si la M es más grande o + chica.

impureza es $\boxed{\text{localizada}}$



· $\omega^2 = \omega_M^2 \cdot 2(1-\xi) \rightarrow \boxed{\omega = 0} \longleftarrow \xi_+$

$\rightarrow \boxed{\omega^2 = 2\omega_M^2\left(1+\frac{\delta}{2-\delta}\right)} \longrightarrow \xi_-$

└ Pueden ser de un modo localizado pero depende de δ.

└ ω con ξ_- hay que ver cuales son los localizados.

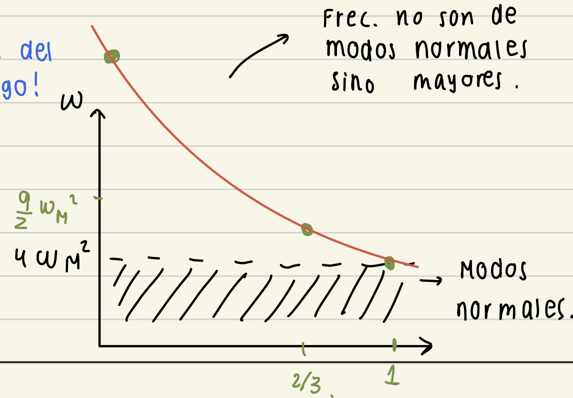
$\rightarrow \boxed{\delta = 1} \longrightarrow \boxed{\omega = 4\omega_M^2}$

$\boxed{\delta = 2/3} \longrightarrow \boxed{\omega = 9/2\ \omega_M^2}$

$\boxed{\delta = 0} \longrightarrow \boxed{\omega = 2\omega_M^2} \rightarrow \frac{2\omega_m}{\delta} \rightarrow \infty$

$\rightarrow$ salen del rango!

Frec. no son de modos normales sino mayores.



$\rightarrow \delta = 2/3 \longrightarrow \xi = -1/2. \longrightarrow x_i(t) = x_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^{|i-n_c|} e^{-i\omega t}.$

solución que excita modo localizado.

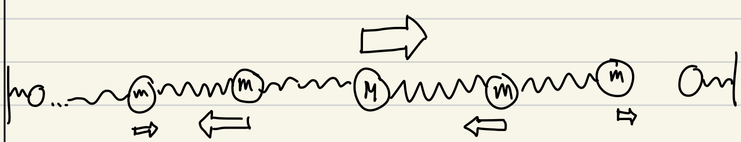
desplaza@s. ←

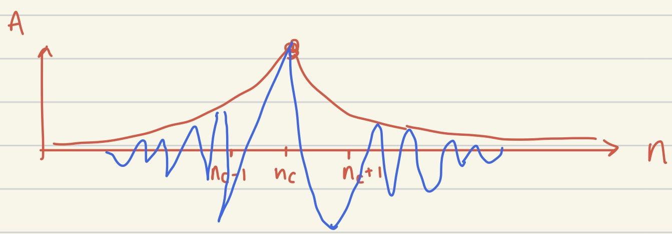
$\rightarrow \boxed{i = n_c} \rightarrow X_{nc} = X_0$

amplitud de la exitaø

, $\boxed{i = n_c \pm 1}$ $X_i(t) = -\frac{X_0}{2}$

$\boxed{i = n_c \pm 2}$ $X_i(t) = \frac{x_0}{4}$ ↷ empieza a decaer.





y $2N+1$ perfiles (modos). Por simplicidad de notación defina la posición de las masas m_n como z_n y las de las masas M_n como Z_n, tal como se sugiere en la figura.

(a) Escriba las ecuaciones de fuerzas para m_1, M_1, m_2, M_2, m_3, m_N, M_N y m_{N+1}. Haciendo esto podrá identificar una forma general para las ecuaciones z_n y Z_n y, también, para los extremos z_1 y z_{N+1}. $\tau \equiv \frac{T}{ma}$.

(b) Considere la siguiente onda como solución general a este problema:

$$\{z_n(t), Z_n(t)\} = \{A, B\} e^{ik \cdot n} e^{-i\omega t} \ .$$

Inserte esta solución en la ecuación general para z_n y Z_n [es decir, para el sitio n-ésimo] u demuestre que las frecuencias normales están determinadas por la siguiente función:

$$\omega^2 = \tau \left[\left(1 + \frac{m}{M}\right) \sqrt{1 + \frac{2m}{M} \cos k + \frac{m^2}{M^2}} \right] \ .$$

Auxiliar #7 - Cuerdas

Vibraciones y Ondas - Otoño 2023

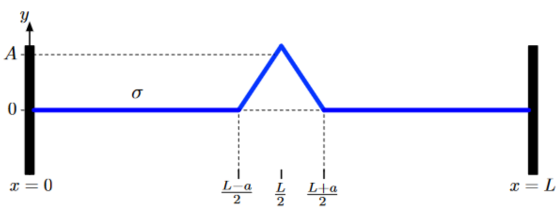
Profesor: Rodrigo Vicencio - Aux: Paloma Vildoso[1] - Ayu: Diego Roman y Javier Cubillos.

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

P1. Cuerda excitada al medio.

Considere una cuerda de densidad lineal de masa σ y tensión constante T que es sacada del equilibrio horizontal de la forma descrita en la siguiente figura, sin velocidad inicial.



(a) Escriba las funciones que describen la condición inicial de la cuerda.

(b) Considere los modos de una cuerda con extremos fijos en $x = 0$ y L. Demuestre que los coeficientes necesarios para construir la dinámica de la cuerda $\forall x, t$, en base a los modos normales de la cuerda, están dados por:

$$a_n = \frac{4h\sqrt{2\sigma L}}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{4} + \sin\left(\frac{2n\pi}{4}\right)\right),\ b_n = 0\ .$$

(c) Calcule los coeficientes a_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Observando la recurrencia, escriba una expresión compacta para a_n. Notará que el signo cambia cada dos coeficientes impares dada la periodicidad del problema en $\pi/4$, por lo que podrá escribir compactamente esto usando $\mathrm{sign}(\sin(n\pi/4))$. Finalmente, escriba la función $Y(x,t)$ dado lo hallado anteriormente.

(d) Escriba la funcion $y(x,t)$ cuando $a \ll L$ y cuando $a = L$. ¿Qué diferencia ve en ambos casos y por qué? Haga una descripción en cuanto a la cantidad de modos excitados.

(e) Considere $\sigma = 1$ kg m^{-1}, $T = 1$ N, $A = 1$ m, $a = 2$ m, y $L = 10$ m Escriba $y(x,t)$ considerando 11 términos en la serie. Grafique la evolución temporal de la cuerda entre $t \in 0, 11$ para valores enteros de t (0,1,2,. . . ,11). ¿Qué espera observar para tiempos mayores? ***Para graficar puede usar lo que tenga a disposición, incluyendo un dibujo a mano, lo importante es que describa y entienda cómo evoluciona el sistema.

P2. Cuerda excitada en cualquier parte.

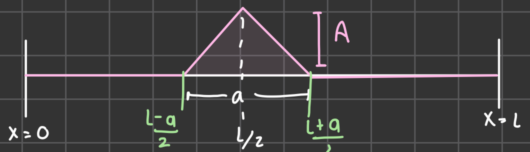
Considere una cuerda continua de largo L y bordes fijos. Muestre que si la cuerda es forzada en un punto arbitrario, ningún modo con nodos en ese punto será excitado.

P3. Cuerda forzada.

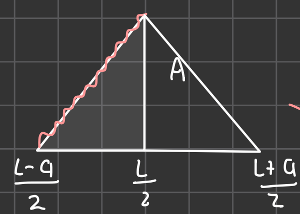
Cuando un forzamiento es aplicado sobre una cuerda, se observa que la vibración de la cuerda es sólo del $n-$ésimo armónico. Encuentre el forzamiento respectivo.

[1] paloma.vildoso@ug.uchile.cl

P1



Cond. inicial. $y(0)=0$



$\frac{2A}{a}\left(x-\frac{L-a}{2}\right)$

↳ evaluando en los bordes notamos que está bien la recta que lo aproxima.

$-\frac{2A}{a}\left(x-\frac{L+a}{2}\right)$

a) condición inicial (forma):

$$y(x,0)=f(x)=\begin{cases} 0 & x<\frac{L-a}{2} \\ -\frac{2A}{a}\left(x-\frac{L+a}{2}\right) & \frac{L}{2}\le x\le\frac{L+a}{2} \\ 0 & x>\frac{L+a}{2}\end{cases}$$

$$\dot{y}(x,0)=g(x)$$

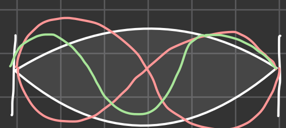
b) $$a_n=\int_0^L f(x)\,G(x)\,\rho(x)\,dx$$

$$\omega_n b_n=\int_0^L g(x)\,G(x)\,\rho(x)\,dx \longrightarrow Y(x,t)=c\sum^{\infty}\rho_n(x)\left(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t\right)$$

frec. del n-ésimo modo.

$$y(x,t)=\sum_n^{\infty}\underbrace{\rho_n(x)}_{\text{forma espacial n-ésimo modo.}}\overbrace{\xi_n(t)}^{\text{evolución temporal}}$$

$\Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow \boxed{b_n=0}$ (frec $\neq 0$).



$\Rightarrow \rho_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\sigma L}}\sin(k_n x)$ ↦ cuerda bordes fijos.

¡ aprender!

(al igual que la de bordes libres).

$$a_n=\sqrt{\frac{2}{\sigma L}}\int_0^L f(x)\,\sigma\sin(k_n x)\,dx \longrightarrow c=\sqrt{\frac{2\sigma}{L}}$$

$$=0+0+c\int_{\frac{L-a}{2}}^{L/2}\underbrace{\frac{2A}{a}\left(x-\frac{L-a}{2}\right)\sin(k_n x)\,dx}_{\text{integral muy conocida!}}+c\int_{L/2}^{\frac{L+a}{2}}\left(-\frac{2A}{a}\right)\left(x-\frac{L+a}{2}\right)\sin(k_n x)\,dx$$

$$=\frac{2A}{a}\sqrt{\frac{2\sigma}{L}}\left[\frac{\sin(k_n L/2)}{k_n^2}-\frac{a\cos(\cancel{k_n}/L)}{\cancel{2}k_n}-\frac{\sin(k_n(L-a)/2)}{k_n^2}+\frac{a\cos(\cancel{k_n}/L)}{\cancel{2}k_n}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(k_n(L+a)/2)}{k_n^2}+\frac{\sin k_n L/2}{k_n^2}\right]$$

$$a_n = \frac{4A}{a}\sqrt{\frac{2\sigma}{L}}\left(\frac{1}{k_n^2}\right)\sin\left(\frac{k_n L}{2}\right)\left(1-\cos\frac{ka}{2}\right)$$

c) $$y(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\sigma L}}\sum_n^{\infty}\sin(k_n x)\cdot\frac{4A}{a}\sqrt{\frac{2\sigma}{L}}\frac{1}{k_n^2}\sin\left(\frac{k_n L}{2}\right)\left(1-\cos\frac{k_n a}{2}\right)\cos w_n t$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\sigma L}}\,\frac{8A}{aL}\sum^{\infty}\left(\frac{1}{k_n^2}\right)\sin\left(\frac{k_n L}{2}\right)\cdot\sin(k_n x)$$

$$\Rightarrow \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L} \rightarrow \frac{1}{k_n^2} = \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2}$$

$$y(x,t) = \frac{8AL}{a\pi^2}\sum^{\infty}\underbrace{\frac{\sin(\pi n/2)}{n^2}\left(1-\cos\frac{n\pi a}{2L}\right)}_{\text{condiø inicial.}}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(w_n t)}_{f_n(x)\quad f(t)}$$

* Para los a_n hay que reemplazar los k_n por $n\pi/L$.

d)

→ $\boxed{a \ll L}$ $\quad \cos\varepsilon \sim 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, $\varepsilon \ll 1$

$$1-\cos\frac{n\pi a}{2L} \sim 1 - 1 + \left(\frac{n\pi a}{2L}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{n\pi a}{2L}\right)^2\frac{1}{2}$$

→ cond. inicial como delta de dirac

$$y(x,t) = \frac{\cancel{8}A\cancel{L}}{\cancel{a}\cancel{\pi^2}}\sum^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{\cancel{n^2}}\left(\frac{\cancel{n\pi}\cancel{a}}{\cancel{2L}}\right)^2\frac{1}{\cancel{2}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(w_n t)$$

$$= \frac{Aa}{L}\sum^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos(w_n t)$$

→ pares mueren

→ sólo se observan modos con n impar.

→ $\boxed{a = L}$ → $1-\cos\left(\frac{n\pi \cancel{a}}{2\cancel{a}}\right) = 1-\cos\frac{n\pi}{2} \Rightarrow \phi = 2\cancel{\pi} = \frac{n\cancel{\pi}}{2} \rightarrow n = 4$

$\phi = 4\cancel{\pi} = \frac{n\cancel{\pi}}{2} \rightarrow n = 8$ ⟶ estos se anulan.

→ sólo e observan modos $n \neq 4m$ $\quad m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

→ rambién hay otros modos que mueren.

e) $Y(L/2, 0) = \frac{8A}{\pi^2} \underbrace{\sum^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}}_{\pi^2/8} \cdot 1 = \frac{8A}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} \cdot 1 = A$

(comprobar evaluando en nuestra C.I.

$\boxed{t_1 > 0}$

→ Hacer la e) y debería dar algo así.

* para la prueba! → Forza@

$\boxed{P3}$

$$\ddot{\xi}_m + \frac{D}{\sigma} \dot{\xi}_m + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{\overset{\text{tensión (relacionado con.)}}{\tau}}{\sigma} \xi_m = \left(\frac{2}{\sigma L}\right)^{1/2} f_m(t)$$

↳ coef. del forza@ del m-ésimo modo.

edo general de una cuerda forzada:

$$\rightarrow \sigma \partial_t^2 y + \underset{\text{roce.}}{D} \partial_t Y - T \partial_x^2 y = \frac{F(x,t)}{L} \quad \text{forza@}$$

$$\boxed{f_m(t) = \int_0^L F(x,t) \rho_m(x) \sigma(x)\, dx.}$$

El forza@ tiene que tener la forma del armónico.

$F(x,t) = \underbrace{F_0 \sin(k_m x)}_{\text{la forma de lo que estamos observando.}} \cos(\omega t + \phi).$ → ω_n = frec. de los modos; ω = frec. del forza@.

$$f_m(t) = \left[c \int_0^L \underline{\frac{F_0 \sin(k_m x)}{L}} \sin(k_n x)\, \sigma\, dx \right] \cdot \cos(\omega t + \phi).$$

$$\Rightarrow f_m(t) = \sigma \underset{\text{cte}}{c} \frac{F_0}{L} \cos(\omega t + \phi) \int_0^L \left(\delta_{n,m} \frac{L}{2} \right) dx$$

$$= C \sigma \frac{F_0 \cos \omega t + \phi}{2} = \boxed{C \sigma F_0 \frac{\cos(\omega t + \phi)}{2} \delta_{m,m} = f_m(t)}$$

↳ según lo que forzamos, vemos que modos podemos observar.

$\boxed{P2}$

$x_0 \in (0, L)$

$$\rightarrow F(x,t) = \delta(x - x_0) F_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$f_m(t) = \int_0^L \underbrace{\frac{C F_0 \sigma}{L}}_{A} \delta(x - x_0) \cos(\omega t + \phi) \sin(k_n x)\, dx$$

$$= A \cos(\omega t + \phi) \int_0^L \underbrace{\delta(x - x_0)}_{\text{delta de dirac.}} \sin(k_n x)\, dx = A \cos(\omega t + \phi) \cdot \sin(k_n x_0)$$

$K_n x_j = j\pi$ → condición nodo

$K_n = \frac{n\pi}{L}$

→ $\boxed{x_j = \frac{Lj}{n}}$ → posiøes donde deberíamos observar un nodo.

$\boxed{x_0 = \frac{j \cdot L}{n}}$ → condiø x_0 es nodo.

$\boxed{n = 1}$ → $x_0 = jL$

$j = 1 \Rightarrow x_0 = L$

$j = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

→ si excitamos en L o 0, no se va a observar el 1° armónico.

$\boxed{n = 2}$ $x_j = \frac{jL}{2}$

$j = 0 \Rightarrow x_j = 0$

$j = 1 \Rightarrow x_j = L/2$

$j = 2 \Rightarrow L$

· no podemos observar los modos que no tengan nodos en esa posiø.

Auxiliar #8 - Cuerdas

Vibraciones y Ondas - Otoño 2023

Profesor: Rodrigo Vicencio - Aux: Paloma Vildoso[1] - Ayu: Diego Roman y Javier Cubillos.

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

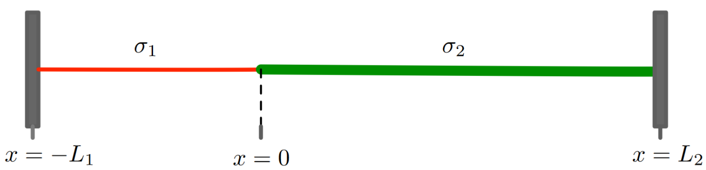
---

P1. Cuerda forzada

Considere un forzamiento sinusoidal actuando en en el punto medio de una cuerda de largo L con sus bordes fijos. Encuentre la solucion del movimiento de la cuerda despues del transiente $y(x,t)$.

P2. Modos estacionarios de una cuerda binaria.

Unsistema oscilatorio continuo está formado por dos cuerdas fusionadas, donde la cuerda de la izquierda tiene una densidad de masa σ_1 y largo L_1, mientras que la de la derecha tiene una densidad σ_2 y largo L_2, tal como se muestra en la figura. La tensión en ambas cuerdas se puede asumir como constante (T), dado que las oscilaciones en estas son de pequeña amplitud.



(a) Escriba una ecuación de ondas para cada segmento. Proponga una solución tipo modos normales para cada segmento, considerando soluciones estacionarias de frecuencia ω. ¿Cómo depende la longitud de onda de los modos normales con respecto a la densidad de masa en cada segmento?

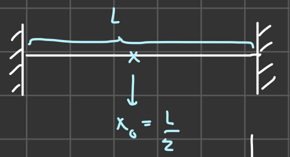
(b) Escriba una solución general para cada segmento. Considere bordes fijos en los extremos $x = -L_1$ y $x = L_2$, y de continuidad en $x = 0$. Obtenga una ecuación que relacione los números de onda y los largos de ambos segmentos. Utilizando esta relación, escriba una expresión compacta para los modos de cada segmento, quesólo dependan de la amplitud en el segmento izquierdo A_1, de los números de onda k_1 y k_2, y del largo L_1. Al final, chequeé que se satisfagan las condiciones de borde.

(c) LA relación hallada en (b) se conoce como ecuación trascendental y no es fácil resolverla analíticamente, por lo que típicamente se procede a graficar ambas ecuaciones y encontrar, por algún método gráfico o numérico, los puntos de cruce que nos darían soluciones para los modos normales del sistema binario. Escriba esta relación en términos de σ_1, σ_2, k_1, L_1 y L_2. Luego, considere el caso $L_1 = L_2$ y $\sigma_2 = 4\sigma_1$, y grafique para ver los puntos de intersección (puede adjuntar dibujo, bosquejo o ploteo). Notara que hay varios puntos triviales (analíticos). ¿Cuáles son estos? ¿Cuántos modos (soluciones) hay entre los puntos triviales?

(d) Escriba k_1 y k_2 para los modos triviales hallados (c) y, luego, las longitudes de onda para cada segmento. Para estos modos, escriba la solución de modos normales en ambos segmentos y dibuje los dos primeros modos triviales.

[1] paloma.vildoso@ug.uchile.cl

$\boxed{P1}$ Estudiemos los modos forzados de esta condición.



ω: frec. de forzamiento.

$A = \frac{F_0}{L}$ amplitud forzamiento.

↳ cuerda bordes fijos.

$$\frac{F(x,t)}{L} = \begin{cases} \frac{F_0}{L}\cos\omega t, & x = L/2 \\ 0, & x \neq L/2 \end{cases}$$

⟶ forzamos en un punto particular.

$$= \frac{F_0}{L}\cos(\omega t)\,\delta(x - x_0)$$

$$f_m(t) = C\int_0^L dx\, \frac{F(x,t)}{L}\, \rho_m(x) = C\int_0^L dx\, \frac{F_0}{L}\cos(\omega t)\,\delta(x-x_0)\sin(k_m x)$$

$f_m(t)$: forzamiento efectivo de cada modo.

C: cte

$\rho_m(x)$: por cada modo

$$= C\,\frac{F_0}{L}\cos(\omega t)\int_0^L \delta(x-x_0)\sin(k_m x)\,dx$$

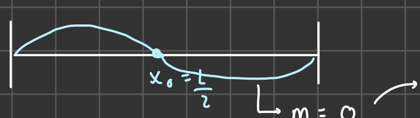
C: relacionada con la amplitud de los modos.

$$= C\,\frac{F_0}{L}\cos(\omega t)\cdot\sin\left(\frac{k_m L}{2}\right) \qquad \boxed{k_m = \frac{m\pi}{L}}$$

$k_m = \frac{m\pi}{L}$: sólo para densidad fija. bordes fijos.

$$= \frac{C F_0}{L}\cos(\omega t)\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

$f_m = 0$? ⟶ cuando $m =$ par ⟶ forzamiento para caso par es 0.



no se excitan los modos pares con ese forzamiento.

sol. física:

$$\Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{2\beta}_{\gamma}\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$$

$$\ddot{\xi}_m + \frac{D}{\sigma}\dot{\xi}_m + \underbrace{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}_{k_m^2}\frac{Z}{\sigma}\,\xi_m = \overbrace{\left(\frac{2}{\sigma L}\right)^{1/2}}^{C}\underbrace{F_0\cos\omega t\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}_{f_m/C}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{A\cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\omega^2\beta^2}}$$

sol. gral. de un MAS forzado con damping.

$$y(x,y) = \sum \xi_m(t)\,\rho_m(x).$$

$$\xi_m(t) = \frac{\left(2/\sigma L\right)^{1/2} F_0\cos(\omega t + \phi_m)\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\frac{Z}{\sigma} - \omega^2\right)^2 + 4\left(\frac{D}{\sigma}\right)^2\omega^2}}$$

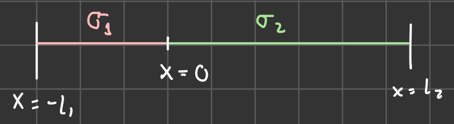
$$\tan(\phi_m) = \frac{D\,\omega}{\sigma(\omega_n^2 - \omega^2)}$$

$$\omega_n^2 = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\frac{Z}{\sigma}$$

$$\boxed{y(x,t) = \frac{2F_0}{\sigma L}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos(\omega t-\phi_m)}{\sqrt{(\omega_m^2-\omega^2)^2+D^2\omega^2/\sigma^2}}}$$ //

$\boxed{\text{P2}}$

a) Ecuaø de onda y sol. gral. para cada trozo. Dependencia λ c/r σ?



$$\rightarrow \quad \sigma(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underbrace{c_i^2}_{\sqrt{T/\sigma_i}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

forma gral.

$$\Rightarrow \quad y_i(x,t) = y_0^i\, \rho_i(x)\cos(\omega t+\phi)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2\rho_i}{\partial x^2} + k_i^2\rho_i(x) = 0\right] \leftarrow$$ ecuación Helmoholtz.

$$\Rightarrow \quad \rho_i(x) = A_i\,\text{sen}(k_i x) + B_i\cos(k_i x).$$ $\longrightarrow$ aplicando bordes se tiene Asen...

$$k_i^2 = \frac{\omega^2}{c_i^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda_i}\right)^2$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda_i = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{\sigma_i}}}$$ $\longrightarrow$ densidad mayor $\Rightarrow$ longitud de onda menor.

$i = 1,2$: Trozo cuerda i-ésima.

b) Sol. gral considerando bordes y discontinuidad:

$\rightarrow$ relaø k c/r largo del segmento

$\rho_1(x) = A_1\sin(k_1 x) + B_1\cos(k_1 x)$.

$\boxed{x=-l_1}$ $\quad \rho_1(-l_1) = 0 = A_1\sin(-k_1 l_1) + B_1\cos(-k_1 l_1)$

$$\rightarrow \quad A_1\sin(k_1 l_1) = B_1\cos(k_1 l_1)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{B_1}{A_1} = \text{Tg}(k_1 l_1)}$$

Análogo otro trozo como $\boxed{x=L_2}$

$$\boxed{\frac{B_2}{A_2} = -\text{tg}(k_2 l_2)}$$

$\rho_1(x) = A_1 [\sin(k_1 x) + Tg(k_1 L_1)\cos(k_1 x)]$

$\rho_2(x) = A_1 [\sin(k_2 x) - tg(k_2 L_2)\cos(k_2 x)]$

$\boxed{x=0}$ $\boxed{\rho_1(0) = \rho_2(0)}$

$\Rightarrow \boxed{A_1 \, tg(k_1 L_1) = -A_2 \, tg(k_2 L_2)}$

$\boxed{\rho_1'(0) = \rho_2'(0)}$

$\Rightarrow k_1 A_1 \underbrace{\cos(k_1 \cdot 0)}_{1} = A_2 \cos(0) k_2 \Rightarrow A_1 k_1 = A_2 k_2 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{k_2}{k_1}}$

$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \boxed{\frac{k_2}{k_1} = -\frac{tg(k_2 L_2)}{tg(k_1 L_1)}}$

c) Usando (b) encontrar relaø $\sigma_1, \sigma_2, L_1, L_2$

$\boxed{\text{caso } L_1 = L_2 \quad , \quad \sigma_2 = 4\sigma_1}$

$\boxed{\frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}} \rightsquigarrow \frac{k_1}{k_j} = \frac{\omega}{c_1} \cdot \frac{c_j}{\omega} = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_j}}$

$\boxed{k_2 = k_1 \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}$

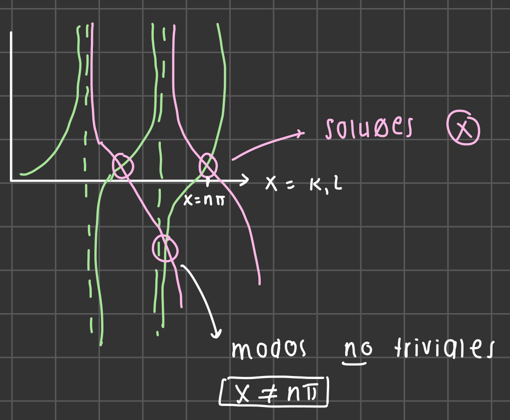
(b) $\rightarrow \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} = -\frac{tg\left(\omega \sqrt{\frac{\sigma_2}{T}} \cdot L_2\right)}{tg\left(\omega \sqrt{\frac{\sigma_1}{T}} \cdot L_1\right)}$

$$\boxed{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} = -\frac{tg\left(k_1 \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} L_2\right)}{tg(k_1 L_1)}}$$

$\delta^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \Rightarrow \delta \, tg(k_1 L_1) = -tg(k_1 \delta L_2).$

$\cdot L_1 = L_2 \quad , \quad \sigma_2 = 4\sigma_1 \longrightarrow \delta = \sqrt{4} = 2$

$\rightarrow -2 tg(k_1 L) = +Tg(2k_1 L).$ ⟶ aprender forma tg.



→ modo trivial $x = n\pi$

d) k_1, k_2 para modo trivial

→ λ_1, λ_2

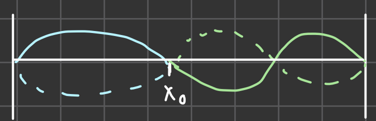
→ Escribir sol. cada trozo + dibujar

$$k_1^n L_1 = n\pi \rightarrow \frac{2\pi L_1}{\lambda_1^n} = n\pi \longrightarrow \boxed{\lambda_1^n = \frac{2\pi L_1}{n\pi}}$$

$$k_2 = \delta k_1 = \boxed{k_2^n = \delta \frac{n\pi}{L_1}} \longrightarrow \boxed{\lambda_2^n = \frac{L_1}{n}}$$

$$\boxed{\rho_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{n\pi}{L_1}x\right) \; ; \quad \rho_2(x) = A_2 \sin\left(\frac{2n\pi}{L_1}x\right)}$$

$\boxed{n=1}$ $\quad \rho_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L_1}\right) \; ; \quad \rho_2(x) = A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L_1}\right)$



Auxiliar #9 - Interferencia

Vibraciones y Ondas - Otoño 2023

Profesor: Rodrigo Vicencio - Aux: Paloma Vildoso[1] - Ayu: Diego Roman y Javier Cubillos.

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

---

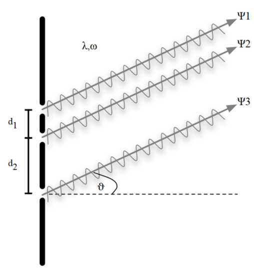
P1. Doble rendija de Young.

a) Para la interferencia de dos aperturas (tipo Young), la distancia máscara-pantalla es de $2\ m$ y la longitud de la onda monocromática enviada es de $600\ nm$. Si se desea obtener un espaciado entre las franjas de $1\ mm$, ¿cuál es la separación de las aperturas requerida?

b) Estudie el problema de Young considerando que en la apertura superior la luz tiene una longitud de onda λ_1 y en la inferior la longitud de onda es λ_2. ¿Se observa interferencia? Comente.

P2. Interferencia de fuentes puntuales de igual frecuencia.

Considere el montaje propuesto en la figura en el que la distancia entre la fuente 1 (arriba) y la fuente 2 (medio) es d_1 y la distancia entre la fuente 2 (medio) y la fuente 3 (abajo) es d_2. La distancia desde la fuente puntual 1 hasta el punto "P" en la pantalla lejana es r_0. Las fuentes puntuales 1, 2 y 3 tienen una amplitud E_0.



a) Si $d_1 = d$ y $d_2 = 2d$, encuentre una expresión para el patrón de interferencia en terminos del número de onda k, la distancia d y el ángulo θ.

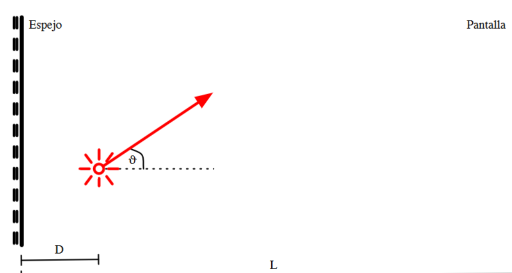
b) Defina: $x \equiv kd\sin\theta$ y re-escriba la expresión de la parte (a). Analice esta función encontrando sus máximos y mínimos y bosqueje el patrón de interferencia en el intervalo $x \in (0, 2\pi)$.

c) Determine las tres visibilidades de franja distantes del problema.

P3. Interferencia de dos ondas planas originadas por una misma fuente luminosa.

Considere el montaje presentado en la siguiente figura. Una fuente de luz roja se sitúa a una distancia D a la derecha de un espejo plano. El espejo está a una distancia L paralelo a la pantalla de observación. La fuente emite en todas direcciones. Una parte de la energía viaja directamente hacia la pantalla. Otra parte primero viaja en dirección al espejo, reflejandose y, luego, viajando hacia la pantalla. Es decir, en un punto P de la pantalla -determinado por el ángulo θ- interfieren la onda proveniente directamente de la fuente y que se reflejó en el espejo. Como la pantalla está muy lejos ($L \gg D$), ambos rayos viajan en un mismo ángulo θ con respecto a la horizontal.

a) Determine el patrón de intensidades debida a la interferencia de estas dos ondas en términos de la distancia D, el ángulo θ y la longitud de onda $lambda_0$. Note que cuando el ángulo $\theta = 0$, la diferencia de caminos entre ambas ondas debe ser $2D$.



b) Considere $\lambda_0 = 4D$. Encuentre la condición para que haya interferencia constructiva y destructiva. Bosqueje el patrón de interferencia que se vería en la pantalla lejana. Recuerde que $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ y que $\cos\theta \in [-1, 1]$.

c) Considere $\lambda_0 = D$. Encuentre la condición para que haya interferencia constructiva y destructiva. Bosqueje el patrón de interferencia que se vería en la pantalla lejana. Recuerde que $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ y que $\cos\theta \in [-1, 1]$.

---

[1]paloma.vildoso@ug.uchile.cl

Óptica: $\nabla^2 \Psi = c^2 \partial_{tt} \Psi \longrightarrow \Psi(x,y,z,t) = A e^{\pm i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$; $k^2 = \omega^2 / v^2$ $\rightarrow v = \frac{c}{n}$ ↳ n vacío = 1

15· junio ·23

Campu Romy.

Interferencia

$\rightarrow \Psi_I(\vec{r},t) = \Psi_1(\vec{r}) e^{\pm i\omega t} + \Psi_2 e^{\pm i\omega t} + \dots$

· Para ver la interferencia (luz) nuestros ojos no ven el cuerpo, sino un promedio temporal!

$$\langle I \rangle_t = \langle |\Psi_I|^2 \rangle = \frac{1}{T_{max}} \int_0^{T_{max}} |\Psi|^2 \, dt$$

↳ módulo al cuadrado $= \Psi \Psi^*$

Visibilidad de Franjas $\Rightarrow V = \frac{\langle I_{max} \rangle - \langle I_{min} \rangle}{\langle I_{max} \rangle + \langle I_{min} \rangle}$ → $V = 0 \rightarrow$ no hay Interferencia; $V = 1 \rightarrow$ contraste perfecto.

$\Delta = a \sin\theta \longrightarrow \neq$ camino óptico

constructiva $\rightarrow \Delta = m\lambda$

destruct. $\rightarrow \Delta = (m \pm 1/2)\lambda$

$\Delta y = \frac{\lambda L}{a}$

$y_m = \frac{m \lambda L}{a}$

$\boxed{P1}$ a) $L = 2\,[m]$, $\lambda = 60\,nm$ $\Delta y = 1\,[mm]$

$\rightarrow a = \frac{\lambda L}{\Delta y} = \frac{6 \cdot 10^{-7} \cdot 2}{1 \cdot 10^{-5}} = 12 \cdot 10^{-3}\,[m]$.

b) Hay interferencia con $\neq$ colores?

$\perp \lambda_1 \rightarrow \omega_1 \longrightarrow \Psi_1(\vec{r},t) = \Psi_1(\vec{r}) e^{-i\omega_1 t}$

I

$\top \lambda_2 \rightarrow \omega_2 \longrightarrow \Psi_2(\vec{r},t) = \Psi_2(\vec{r}) e^{-i\omega_2 t}$

$\Psi_I = \Psi_1 + \Psi_2 \longrightarrow I = \frac{1}{T_{max}} \int_0^{T_{max}} \langle |\Psi_I|^2 \rangle \, dt$

$$* \; |\Psi_I|^2 = \Psi_I \Psi_I^* = \underbrace{|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2}_{\text{partícula}} + \underbrace{\Psi_1 \Psi_2^* + \Psi_2 \Psi_1^*}_{\text{onda.}}$$

$$|\Psi_I|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2^* \, e^{i[(k_1 - k_2)\vec{r} - (\omega_1 - \omega_2)t]} + A_2 A_1^* \, e^{i[(k_2 - k_1)\vec{r} - (\omega_2 - \omega_1)t]}$$

$$|\Psi_I|^2 = A_1^2 + A_2^2 + \cos\left((k_1 - k_2)\vec{r} - (\omega_1 - \omega_2)t\right)(A_1 A_2^* + A_2 A_1^*) + i\,(A_1 A_2^* - A_2 A_1^*) \sin\left((k_1 - k_2)\vec{r} - (\omega_1 - \omega_2)t\right)$$

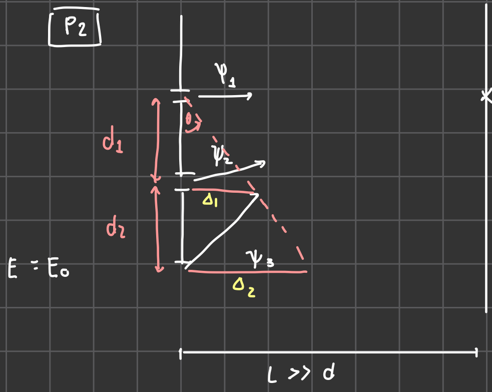
integral en el periodo de oscilaø.

$$\Rightarrow \int |\Psi_I|^2 \, dt = A_1^2 + A_2^2 + \cancel{\int \cos(\,)\,dt}^{\,0} + i \cancel{\int \operatorname{sen}(\,)\,dt}^{\,0} = A_1^2 + A_2^2$$

$\longrightarrow$ No hay interferencia. (parte ondulatoria es 0.)

(*) cuando se integra y cuando no?

$\boxed{P2}$

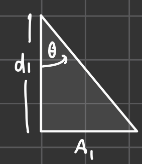


a) $d_1 = d$, $d_2 = 2d \longrightarrow d_1 = \frac{d_2}{2}$

$$\psi_1 = E_0 e^{i(k_0 r_0 - \omega t)}$$

$$\psi_2 = E_0 e^{i(k_0(r_0 + \Delta_1) - \omega t)}$$

$$\psi_3 = E_0 e^{i(k_0(r_0 + \Delta_2) - \omega t)}$$



$\Delta_1 = d_1 \sin\theta = d \sin\theta$

$\rightarrow \Delta_2 = (d_1 + d_2)\sin\theta$.

$= 3d\sin\theta$

$$|\psi_I|^2 = |\psi_1 + \psi_2 + \psi_3|^2$$
$$= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + \psi_1\psi_2^* + \psi_1\psi_3^* + \psi_2\psi_3^* + c.c.$$

comp. conj.

$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2$

$$\rightarrow 3E_0^2 + \underbrace{E_0^2 e^{-ikd\sin\theta}}_{\psi_1\psi_2^*} + \underbrace{E_0^2 e^{-ik3d\sin\theta}}_{\psi_1\psi_3^*} + \underbrace{E_0 e^{ikd\sin\theta}}_{\psi_1^*\psi_2} + E_0^2 e^{+ik3d\sin\theta} + E_0 e^{-ik2d\sin\theta} + E_0^2 e^{ik2d\sin\theta}.$$

$$|\psi_I|^2 = 2E_0^2\left(\frac{3}{2} + \cos(kd\sin\theta) + \cos(2kd\sin\theta) + \cos(3kd\sin\theta)\right) \quad / \int dt.$$

$\hookrightarrow \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, $\cos(3x)$ $-4\cos^3 x - 3\cos x$.

$\Rightarrow \langle I \rangle_{T\,max} = |\psi_I|^2$

b) Máx y Mín $\Rightarrow x = kd\sin\theta \Rightarrow |\psi_I|^2 = E_0^2(1 - 4\cos x\,(1 - \cos x - 2\cos^2 x)) \;/\; \frac{d}{dx}$

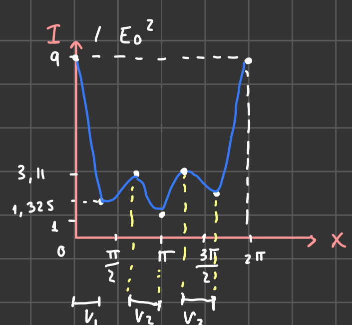
$\Rightarrow E_0^2(4\sin x\,(1 - \cos x - 2\cos^2 x) - 4\cos x\,(\sin x - 4\cos x(\sin x + 4\cos x \sin x)) = 0$

$\rightarrow \boxed{x = \pi}$ $\langle I \rangle_{T\,max} = E_0^2$

$\boxed{x = 0}$ $\langle I \rangle_{T\,max} = E_0^2\,9$

$\langle I \rangle_T (\cos x = 0{,}54 :) \simeq 1.325\,E_0^2$

$\langle I \rangle_T (\cos x = -0{,}60 :) \simeq 3{,}11\,E_0^2$



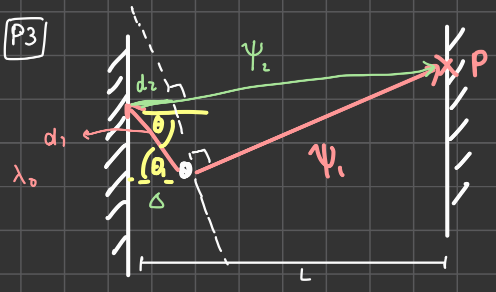
$V_1 = \frac{9 - 1.325}{9 + 1.325} \approx 0{,}74$

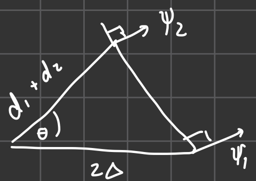
$V_2 = 0{,}51$

$V_2 = 0{,}4$

Visibilidad:
→ es como un contraste entre franjas

P3





$\rightarrow (d_1 + d_2) = 2\Delta\cos\theta$

$\theta = 0 \rightarrow \boxed{d_1 + d_2 = 2\Delta}$

$\rightarrow \langle I \rangle_{t\,max} = \boxed{2 I_0 (1 + \cos\phi)} \longrightarrow \phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (2\Delta\cos\theta)$

aprender!

$d_1 + d_2$

$\lambda_0 = 4\Delta$, $\langle I \rangle_t = 2 I_0 (1 + \cos(\pi\cos\theta))$.

con este sabemos si es máx o min

Constructiva:

$\cos(x)$ es máx.

$\rightarrow \pi\cos\theta = 2n\pi$

$\rightarrow \cos\theta = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$

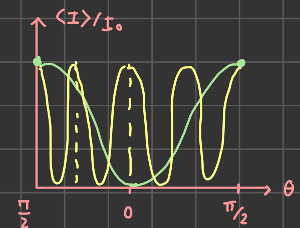
$\boxed{n = 0}$ $\boxed{\theta = \pm\frac{\pi}{2}}$

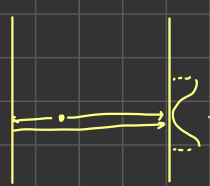
destruct:

$\pi\cos\theta = \pi(2m+1)$ $m \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \cos\theta = 2m + 1 \leftarrow n = 0$

$\rightarrow \boxed{\theta = 0, 2\pi}$





→ con los ángulos va haber + luz.

→ en 0 será destructiva

pasa por la longitud de onda

c) $\lambda_0 = \Delta$

Constructiva

$\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{3}, 0$

n=0, n=1, n=2

Destructiva

$\theta = \frac{1}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$

n=0, n=1, n=2

Auxiliar 10

Difracción y Máscaras

Profesor: Rodrigo A. Vicencio
Auxiliar: Paloma Vildoso
Ayudantes: Javier Cubillos y Diego Román

P1. Difracción de fuentes puntuales

Se utiliza una máscara de difracción como la que se observa en la figura, por la que sólo pasa luz a través de cuatro agujeros minúsculos (fuentes puntuales).

1. Calcule la contribución de una fuente puntual ubicada en la posición (z_0, y_0) al campo eléctrico total en el punto P de una pantalla muy lejana, $E_T(P)$.

2. Considere la máscara de la figura. Exprese la función transparencia de esta máscara encontrando la constante de normalización respectiva y obtenga una fórmula compacta para el patrón de difracción de ésta, si por todos los orificios pasa la misma cantidad de luz.

3. Haga un bosquejo de lo que debería observar en la pantalla, identificando máximos y mínimos del patrón de difracción cuando $z_0 = y_0 = 1$. Por simplicidad, restrínjase al intervalo $[0, 2\pi]$ en ambas direcciones de la pantalla (μ, ν)

4. Exprese la función transparencia (incluyendo la constante de normalización respectiva) y encuentre una expresión compacta para el patrón de difracción si es que por los orificios sobre el eje vertical pasan 4 veces más luz que por los orificios ubicados sobre el eje horizontal.

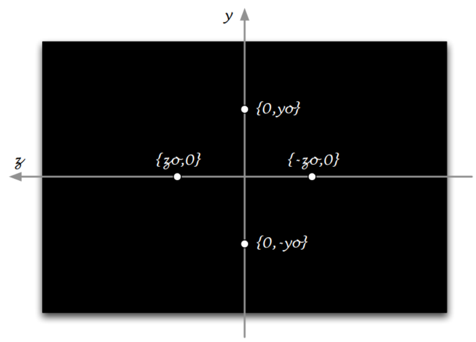


Figura 1: Difracción de fuentes puntuales.

P2. Red de difracción.

Una red de difracción consiste de un patrón periódico de orificios como, por ejemplo, la mostrada en la Figura 3. Este arreglo consiste de un conjunto de $(2N + 1)$ ventanas cuadradas equiespaciadamente ubicadas en la máscara. El área de cada ventana es a^2 y la distancia horizontal entre el centro de cualquier par de ventanas seguidas es b. El centro de la ventana central está en la coordenada $\{0,\ 0\}$. Obtenga el patrón de difracción $\langle I \rangle$ para esta red.

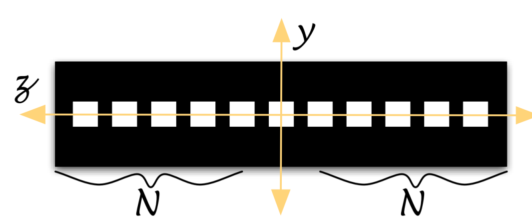


Figura 2: Red de difracción.

P3. Difracción de puntos infinitesimales

Considere un arreglo de N puntos idénticos sobre un círculo de radio a. La distancia angualr entre cada par de puntos está dada por $\theta = 2\pi/N$. El primer punto está ubicado en la posición $(a, 0)$.

1. Construya la función transparencia (constante incluida)

2. Determine una expresión general para $E_T(P)$.

3. Considere $N = 8$ y encuentre una expresión para el patrón de intensidades. Demuestre que $\langle I \rangle (\mu, 0) = \langle I \rangle (\mu \cos(n\theta), \mu \sin(n\theta))$ para $n = 1, ..., 7$ (i.e., el patrón de difracicón preserva la simetría de la máscara).

4. Encuentre el patrón de difracción para $N = 4$. Defina $\overline{\mu} \equiv a\mu, \overline{\nu} \equiv a\nu$ para bosquejar el patrón de difracción en en la región $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. Para bosquejar, determine las posiciones de los máximos principales y las regiones en que el patrón se anula.

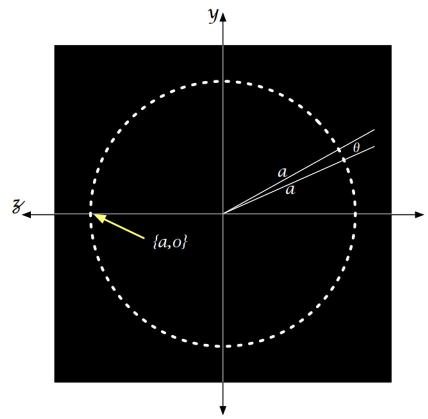


Figura 3: Difracción de puntos infinitesimales.

29. jun.

Difracción / Interferencia : Desviaciones rectilíneas de las ondas.

→ superposición de todas las ondas que viajan a la pantalla de obs.

→ Patrón de difracción $I \propto |E_T(P)|^2$

→ $E_T(P) = \int dE = e^{i(kR-\omega t)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(z,y)\, e^{-i\mu z}\, e^{-i\nu y}\, dy\, dz$

campo eléctrico total

μ, ν espacio en el que llega

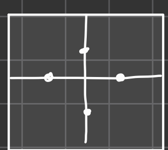
$$\propto \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(z,y)\, e^{-i\mu z}\, e^{-i\nu y}\, dy\, dz = \hat{t}(\mu,\nu)$$

$t(z,y)$ fn. de transparencia: Define una zona geométrica por donde pasa la luz.

$t(z,y) = \underset{\substack{\downarrow \\ I}}{cte}\ \mathbb{1}_{(z,y)\in A\times B}$. → $[\ ,\ ][\ ,\ ]$

cant. de luz que pasa por. $A \times B$.

* Tarea :  $t = t_I + t_{II} + t_{III} + t_{IV}$

P1 

1) contribución de la fuente puntual (z_0, y_0):

$$t(z,y) = cte\ \delta(z-z_0)\,\delta(y-y_0) = cte \iint \delta(z-z_0)\,\delta(y-y_0)\,dy\,dz$$

Normalizando: $\int \delta(x) = 1 \Rightarrow cte \cdot 1 \overset{1}{=} 1 \Rightarrow \boxed{cte = 1}$

$$E_T(P) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z-z_0)\,\delta(y-y_0)\, e^{-i\mu z}\, e^{-i\nu y}\, dy\, dz$$

Usando : $\int f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$

$$\Rightarrow \boxed{E_T(P) \propto e^{-i\mu z_0}\, e^{-i\nu y_0}}$$

2) $t(z,y) = cte\left(\overbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{puno } (0,y_0)}}{\delta(z)\,\delta(y-y_0)}}^{t_I} + \overbrace{\delta(z)\cdot\delta(y+y_0)}^{t_{II}} + \overbrace{\delta(z-z_0)\cdot\delta(y)}^{t_{III}} + \overbrace{\delta(z+z_0)\cdot\delta(y)}^{t_{IV}} \right)$

Normalizando :

$$cte \int (t_I + t_{II} + t_{III} + t_{IV})\, dy\, dz = cte \cdot 4 = 1 \Rightarrow \boxed{cte = \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow E_T(p) = \frac{1}{4}\left(\iint \delta(z)\delta(y-y_0)e^{-i\mu z}e^{-i\nu y} + \iint \delta(z)\delta(y+y_0)e^{-i\mu z}e^{-i\nu y} + \iint \delta(y)\delta(z-z_0)e^{-i\mu z}e^{-i\nu y} + \iint \delta(y)\delta(z+z_0)e^{-i\mu z}e^{-i\nu y} \right)$$

$$E_T(p) = \frac{1}{4}\left(e^{-i\nu y_0} + e^{i\nu y_0} + e^{-i\mu z_0} + e^{i\mu z_0} \right)$$

* usando: $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

$$= \frac{\cos(\nu y_0) + \cos(\mu z_0)}{2}$$

$$\rightarrow E_T(p) = \frac{1}{2}\left(\cos(\nu y_0) + \cos(\mu z_0)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I \propto \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\cos(\nu y_0)}_{\leq 1} + \underbrace{\cos(\mu z_0)}_{\leq 1}\Big)^2}$$

evaluando:

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(\nu) + \cos(\mu)\right)^2$$

3)

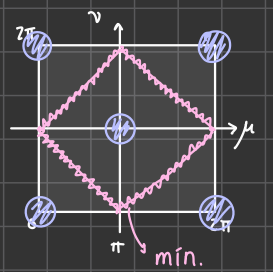
① Máx $I = 1 \longrightarrow$ ① $(\mu^*, \nu^*) = \{(0,0), (\pi,\pi), (2\pi, 2\pi), (2\pi, 0), (0, 2\pi)\}$

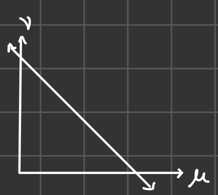
② Mín $I = 0$

$I = 0 \Rightarrow \cos\nu = -\cos\mu.$

$\Rightarrow \nu = \pm\mu \pm n\pi$ } en $[0, 2\pi]$

$\boxed{\nu = \pm\mu \pm \pi}$





$I = 0 \Rightarrow \cos\nu + \cos\mu = 0$

$\Rightarrow \cos\nu = -\cos\mu \Rightarrow \nu = \pm\mu \pm \pi$

4) $t(z,y) = cte\left(4\delta(z)\delta(y-y_0) + 4\delta(z)\delta(y+y_0) + \delta(y)\delta(z-z_0) + \delta(y)\delta(z+z_0)\right)$

Normalizando

$$\rightarrow \iint t_I + t_{II} + t_{III} + t_{IV} = cte(4+4+1+1) = cte \cdot 10 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{10} = cte}$$

$$E_T(p) = \iint t(z,y)\, e^{-i\mu z} \cdot e^{-i\nu y}\, dy\, dz$$

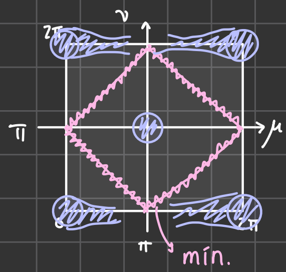
$$= \frac{1}{10}\left(4e^{i\nu y_0} + 4e^{-i\nu y_0} + e^{-i\mu z_0} + e^{i\mu z_0} \right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(4 \cdot \cancel{2}\cos(\nu y_0) + \cancel{2}\cos(\mu z_0)\right)$$

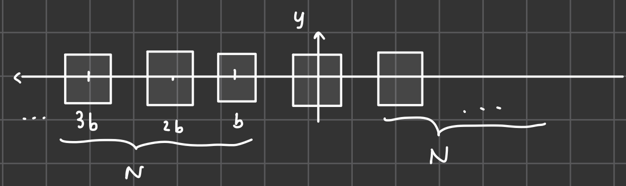
$$= \frac{4}{5}\cos(\nu y_0) + \frac{1}{5}\cos(\mu z_0)$$

se ve que aporta
con 4 veces + luz
que el otro orificio

$\longrightarrow$ Nuevo patrón



$\boxed{\text{P2}}$



$$t(z,y) = cte \begin{cases} 1 & -\frac{a}{2} < y < \frac{a}{2} \\ 0 & \sim \end{cases} \left[\begin{cases} 1 & -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ 0 & \sim \end{cases} + \begin{cases} 1 & b-\frac{a}{2} < z < b+\frac{a}{2} \\ 0 & \sim \end{cases} + \begin{cases} 1 & -b-\frac{a}{2} < z < -b+\frac{a}{2} \\ 0 & \sim \end{cases} \dots \right]$$

$$t(z,y) = cte\ f(z)\, g(y)$$

Normalizamos: $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} t(z,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} cte\ f(z)\, g(y)\, dz\, dy$

$$\iint t(z,y)\, dz\, dy = cte \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz\right)}_{I_1} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, dy\right)}_{I_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad cte = \frac{1}{(2N+1)a^2}$$

$I_2 = a$

$I_1 = a + a + \dots = (2N+1)\, a$

$$\bar{t}(\mu,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(z,y)\, e^{-i\mu z}\, e^{-i\nu y}\, dz\, dy. = \frac{1}{(2N+1)\, a^2} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-i\mu z}\, dz\right)}_{J_1} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-i\nu y}\, dy\right)}_{J_2}$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-i\nu y}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} 1 & -a/2 < y < a/2 \\ 0 & \sim \end{cases} e^{-i\nu y}\, dy.$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\nu y}\, dy = \left.\frac{e^{-i\nu y}}{-\nu y}\right|_{-a/2}^{a/2} = \frac{e^{i\nu \frac{a}{2}} - e^{-i\nu\frac{a}{2}}}{i\nu} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2\,\text{sen}\left(\frac{\nu a}{2}\right)}{\nu} \cdot \frac{a}{a}$$

$$= \frac{\text{sen}\left(\frac{\nu a}{2}\right)}{\frac{a\nu}{2}} \cdot a = \text{sinc}\left(\frac{\nu a}{2}\right) \cdot a$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-i\mu z}\, dz$$

$$= \underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} e^{-i\mu z} dz}_{a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\mu a}{2}\right)} + \overbrace{\int_{b-\frac{a}{2}}^{b+\frac{a}{2}} e^{-i\mu z} dz + \dots + \int_{Nb-\frac{a}{2}}^{Nb+\frac{a}{2}} e^{-i\mu z} dz}^{N \text{ integrales de la izquierda.}}$$

$$+ \int_{-b+\frac{a}{2}}^{-b+\frac{a}{2}} e^{-i\mu z} dz + \dots + \int_{-Nb-\frac{a}{2}}^{+Nb+\frac{a}{2}} e^{-i\mu z} dz.$$

$$= a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\mu a}{2}\right) + \sum_{k=1}^{N} \int_{kb-a/2}^{kb+a/2} e^{-i\mu z} dz + \sum_{k=1}^{1} \int_{-kb-\frac{a}{2}}^{-kb+\frac{a}{2}} e^{-i\mu z} dz$$

$$= a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\mu a}{2}\right) + \sum_{k=1}^{N} \left. \frac{e^{-i\mu z}}{-i\mu} \right|_{kb-\frac{a}{2}}^{kb+\frac{a}{2}} + \left. \frac{e^{-i\mu z}}{-i\mu} \right|_{-kb-\frac{a}{2}}^{-kb+\frac{a}{2}}.$$

$$= \quad '' \quad + \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{-i\mu(kb+\frac{a}{2})} - e^{-i\mu(kb-a/2)}}{-i\mu} + \frac{e^{-i\mu(-kb+\frac{a}{2})} - e^{-i\mu(-kb-a/2)}}{-i\mu}.$$

de la geométrica!

$$J_2 = a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\mu a}{2}\right) \left[1 + e^{-i\mu b\frac{(N+1)}{2}} \frac{e^{-i\mu b N/2} - e^{i\mu b N/2}}{e^{-i\mu b/2} - e^{i\mu b/2}} + e^{i\mu b\frac{(N+1)}{2}} \,\%. \right]$$

$$= a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\mu a}{2}\right) \left[1 + \cos\left(\frac{\mu b(N+1)}{2}\right) \frac{\mathrm{sen}(\mu b N/2)}{\mathrm{sen}(\mu b/2)} \right]$$

$$E_T = \frac{1}{2N+1} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\nu a}{2}\right) \sin\left(\frac{\mu a}{2}\right)$$

$$I = |E|^2 = |\,\%\,|$$

Auxiliar 11

Cuerdas y Óptica

Profesor: Rodrigo A. Vicencio
Auxiliar: Paloma Vildoso
Ayudantes: Javier Cubillos y Diego Román

P1. Difracción de ventana.

Considere la ventana cuadrada rotada en 45° de la figura:

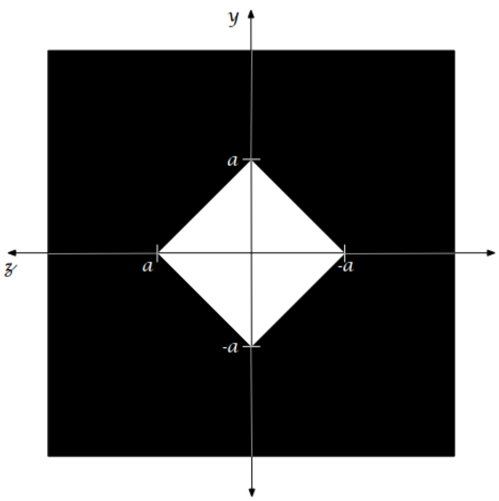


Figura 1: Ventana cuadrada rotada.

a) Construya la función transparencia (constante incluida)

b) Determine el patrón de intensidad ($\sim |E_T(P)|^2$) que vería en una pantalla lejana.

c) Demuestre que al rotar en 45 grados cualquier punto $\{\mu, \nu\}$ del patrón obtenido en (b), se obtiene un patrón "Sinc por Sinc", como es esperado al girar la cabeza.

d) "Bosqueje" (sin calcular) el patrón de difracción en el plano $\{\mu, \nu\}$.

P2. Modos guiados en una membrana

Considere una membrana elástica de tensión constante T , infinita en todas direcciones, tal como se muestra en la figura.

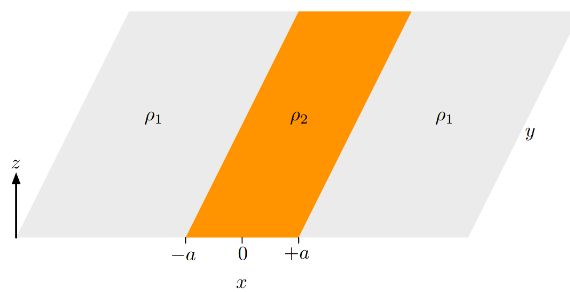


Figura 2: Guías de onda en membranas.

La densidad de la membrana es constante en la dirección $\hat{y}$, mientras que tiene una dependencia tipo escalón en la dirección $\hat{x}$, con $\rho_2 > \rho_1$. Esta membrana puede oscilar en la dirección $\hat{z}$, por lo que la ecuación de ondas que rige su dinámica se escribe como:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho(x)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

a) Considere una solución propagativa en $\hat{y}$ y oscilatoria en el tiempo del tipo: $z(x, y, t) = z(x)e^{i(k_y y - \omega t)}$. Inserte esta solución de prueba en la ecuación de ondas y obtenga una ecuación diferencial (tiempo independiente) para $z(x)$, para cada una de las regiones de la membrana.

b) Como $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ (con $k = \omega/v$) y la velocidad v está relacionada con la densidad de la membrana, entonces: $k_1^2 < k_y^2 < k_2^2$. Con esto estudie el signo de las ecuaciones diferenciales halladas en (a) y proponga soluciones generales para cada región. Para simplificar el análisis defina $\alpha^2 \equiv k_y^2 - k_1^2$ y $\beta^2 \equiv k_2^2 - k_y^2$.

c) Busque sólo **modos pares** (respecto a $x = 0$) para la región central. Use condiciones de continuidad en $x = +a$ o $x = -a$, considerando sólo soluciones que decaigan en las regiones con $\rho(x) = \rho_1$. Demuestre que las soluciones satisfacen: "$\beta a \tan(\beta a) = \alpha a$". Bosqueje, sin calcular, dos modos pares de esta guía de ondas.

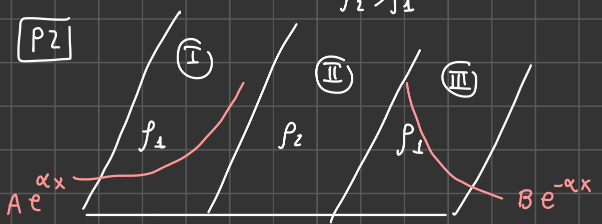
d) Busque sólo **modos impares** (respecto a $x = 0$) para la región central. Use condiciones de continuidad en $x = +a$ o $x = -a$, considerando sólo soluciones que decaigan en las regiones con $\rho(x) = \rho_1$. Demuestre que las soluciones satisfacen: "$\beta a \cot(\beta a) = -\alpha a$". Bosqueje, sin calcular, dos modos impares de esta guía de ondas.

e) Defina $(Va)^2 \equiv (\alpha a)^2 + (\beta a)^2 = (k_2^2 - k_1^2)a^2$. Realice un diagrama de soluciones (pares e impares) cuyo eje horizontal sea "βa" y el eje vertical sea "αa". Grafique, con distinto color, las relaciones encontradas en (c) y (d), para el intervalo $\alpha a, \beta a \in [0, 2\pi]$. Luego, grafique círculos de radio Va, donde cada intersección definirá qué y cuántos modos son posibles de excitar en esta membrana. ¿Cuál es la condición para que haya al menos 2 modos? Encuentre una relación que dependa de la frecuencia ω, densidades ρ_1 y ρ_2, tensión T y ancho de la guía $L = 2a$.

Control: · P2 tarea 5!
· Este Aux.

$\rho_2 > \rho_1$

P2



(a)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 z = \frac{T}{\rho(x)}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]$$

$$\rightarrow z(x,y,t) = z(x)\, e^{i(k_y y - \omega t)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -i\omega z(x)\, e^{i(k_y y - \omega t)} = -i\omega z(x,y,t)$$

$$\rightarrow V_1^2 \equiv \frac{T}{\rho_1} \quad , \quad V_2^2 = \frac{T}{\rho_2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k_y^2 z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z'' \quad \Bigg| \quad -\omega^2 z = \frac{T}{\rho(x)}\left[z'' - k^2 z\right] \implies z'' + \left(\frac{\rho(x)}{T}\omega^2 - k_y^2\right) z = 0$$

En I y III $\quad z'' + \left(\underbrace{\frac{\omega^2}{V_1^2}}_{k_1^2} - k_y^2\right) z = 0$

En II $\quad z'' + (k_2^2 - k_y^2)\, z = 0$

(b) $\quad k_1^2 < k_y^2 < k_2^2 \qquad * \; k^2 = k_x^2 + k_y^2$

$\alpha^2 \equiv k_y^2 - k_1^2$

$\beta^2 = k_2^2 - k_y^2$

$\rightarrow \quad z'' - \alpha^2 z = 0 \qquad\qquad z'' + \beta^2 z = 0$

$z = A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x} \qquad\qquad z = A\cos(\beta x) + B\,\mathrm{sen}(\beta y)$

Modos pares $\rightarrow$ control!

~ separar en pares e impares. $\rightarrow$ la suma tb es soluØ.

c) Interfaz II y III $x=a$

$$A_2 \cos(\beta a) = B_1 e^{-\alpha a} \quad \text{i)}$$

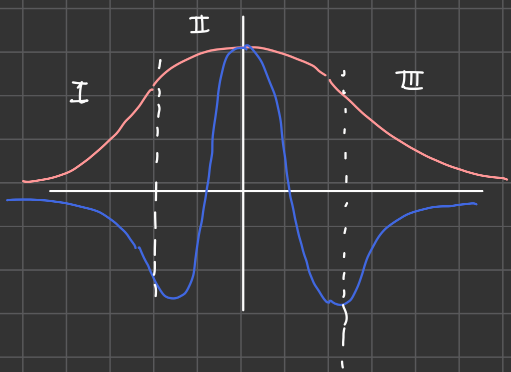
$$z_1' = A_1 \alpha e^{\alpha x} - B_1 \alpha e^{-\alpha x}$$
$$z_2' = -\beta A_2 \operatorname{sen}(\beta x) + B_2 \beta \cos(\beta x).$$

* Solu⌀ física: $A_1 = B_2 = 0$

$$-\beta A_2 \operatorname{sen}(\beta a) = -B_1 \alpha e^{-\alpha a} \quad \text{ii)}$$

$\frac{ii}{i}$: $\beta \operatorname{tg}(\beta a) = \alpha \quad / \cdot a$

$$\boxed{\beta a \operatorname{tg}(\beta a) = \alpha a}$$



* se llega a lo mismo en $x=a$ o $x=-a$.

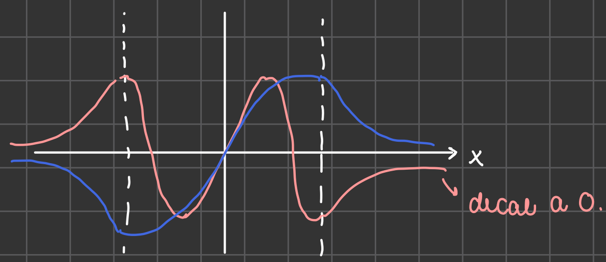
d) Impares

$B_2 = 0 \rightarrow B_1 e^{-\alpha a} = A_2 \operatorname{sen}(\beta a)$ iii)

$-\alpha B_1 e^{-\alpha a} = A_2 \beta \cos(\beta a).$ iv)

$\frac{iv)}{iii)}$: $-\alpha = \beta \cot(\beta a).$

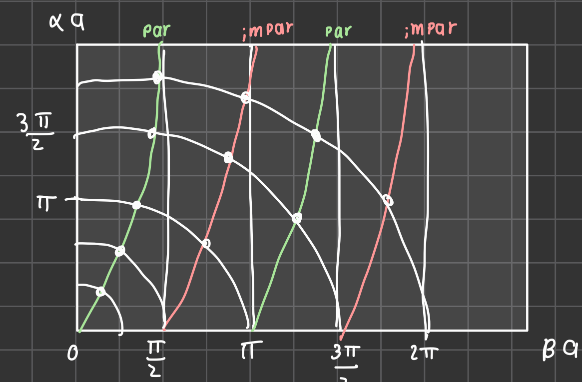
$$\rightarrow \boxed{\beta a \cot(\beta a) = -\alpha a}$$



e) $\alpha^2 \equiv k_y^2 - k_1^2$

$\beta^2 \equiv k_2^2 - k_1^2$

$\alpha^2 + \beta^2 = k_2^2 - k_1^2 \equiv V^2$



Radio: $\quad Va \geq \frac{\pi}{2} \qquad /(\,)^2$

$V^2a^2 \geq \pi^2/4$

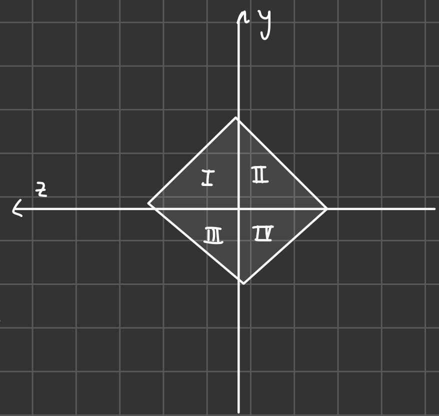
$K_2^2 - K_1^2 \geq \pi^2/4$

$a^2(k_2^2 - k_1)^2 \geq \pi^2/4$

$$\frac{4a^2\omega^2}{T}(\rho_2-\rho_1) \geq \pi^2 \longrightarrow \boxed{\frac{L^2\omega^2}{T}(\rho_2-\rho_1) \geq \pi^2}$$

$\boxed{\text{P1}}$ a) $\quad t(z,y) = cte \; \mathbb{1}_{(z,y)\in C}$.

$$\rightarrow t_I = cte \cdot \begin{cases} 1 & 0<z<a \\ 0 & \sim \end{cases} \begin{cases} 1, & 0<y<a-z \\ 0, & \sim \end{cases}$$



$$\rightarrow t_{II} = cte \begin{cases} 1, & -a<z<0 \\ 0, & \sim \end{cases} \begin{cases} 1, & 0<y<a+z \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\rightarrow t_{III} = cte \begin{cases} 1, & 0<z<a \\ 0, & \sim \end{cases} \begin{cases} 1, & 0<y<-a+z \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\rightarrow t_{IV} = cte \begin{cases} 1, & -a<z<0 \\ 0, & \sim \end{cases} \begin{cases} 1, & 0<y<-a-z \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Normalizamos:

I : $$\iint t_I(z,y)\,dy\,dz = \int_0^a\int_0^{a-z} dy\,dz$$

$$= \int_0^a (a-z)\,dz = az\Big|_0^a - \frac{z^2}{2}\Big|_0^a = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

II $$\int_{-a}^0\int_0^{a+z} dy\,dz = \int_{-a}^0 (a+z)\,dz = az\Big|_{-a}^0 + \frac{z^2}{2}\Big|_{-a}^0 = \frac{a^2}{2}.$$

III $= \frac{a^2}{2}$

IV $= \frac{a^2}{2}$ $\qquad \Longrightarrow \iint t(z,y) = 2a^2\,cte = 1$

$\Longrightarrow cte = \frac{1}{2a^2} \longrightarrow$ *area del cuadrado* b)

$$|E_T(p)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a^2}(t_1+t_2+t_3+t_4)\, e^{-i\mu z}\, e^{-i\nu y}\, dy\, dz.$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \boxed{|E_T(p)|^2 = \frac{4}{a^4(\mu^2-\nu^2)^2}(\cos \nu a - \cos \mu a)^2}$$

c) $(\mu,\nu) = \vec{u}$

$$\longrightarrow R\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Transformaø para rotar en un ángulo θ.

$$\Rightarrow \mu \cos\theta - \nu \sin\theta = \bar{\mu}$$
$$\Rightarrow \mu \operatorname{sen}\theta + \nu \cos\theta = \bar{\nu}$$

$$\Rightarrow |E_T(p)|^2(\bar{u},\bar{v})$$

Sistemas acoplados, oscilaøes armónicas. 6 julio

→ Aproximar

↳ $\hat{M}\ddot{x} + \hat{V}\vec{x} = 0 \leftarrow \vec{x} = Ae^{-i\omega t}$

↳ $\det(\hat{V} - \omega^2\hat{M}) = 0$ ⟶ Soluøes generales: $\boxed{\vec{x} = A_1\psi_1 e^{-i\omega_1 t} + A_2\psi_2 e^{-i\omega_2 t} + \ldots}$

↳ ω y modos. ⟶ $\vec{\psi}$ → $\psi_1 \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ → desface

es como cambiar las coordenadas

⟹ Matriz modal $\boxed{\vec{A} = (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_N)}$

⟹ $\left[\vec{\xi} = \hat{A}x\right]$ ⟶ $\xi_i = A\cos(\omega_i t + \phi) + B\,\mathrm{sen}(\omega_i t + \phi)$.

* ω degeneradas ⟶ usar métodos de edo para encontrar estas frecuencias (anillo con masas).

¡Dibujar los modos! y practicar det.
(det. de 3x3 o 2x2 o 4x4 con muchos ceros).

→ Es probable que pidan la normalizaø

Normalizar

$\boxed{\psi_j \hat{M} \psi_i^T = \delta_{ji}}$ ⟶ probar que es vector propio del sistema. ∼ Grand-Schmidt (para encontrar vect. degenerados)

Pequeñas oscilaøes

→ Formalismo o aproximándolo.
↳ hay que tener bn el potencial eff.

→ $\boxed{\vec{r} = r_{eq} + \vec{\eta}}$

$\boxed{\ddot{r} = \ddot{\eta}}$ ⟹ Ecuaø de movi@.
(Dejar terminos del orden del sistema).
→ $\dot{\eta}^2 = 0$, $\ddot{\eta}^2 = 0$
$\dot{\eta}\dot{\theta} = 0$.

(1° término de la serie de Taylor)

¡Aprenderse aprox. sen, cos, tan. y polinomios!
↓
C1

→ Primero aproximar y después juntar cosas.

Acuérdense de las aproximaøes: ⟹ $m\ddot{x} \pm vx = 0$.
* Trigonométricas
* Polinomios $(1+\varepsilon)^n \sim (1+n\varepsilon)$.

(−) órbitas abiertas.
(+) órbitas cerradas
↓
signo depende de la órbita

Hint: pensar en el equilibrio.
→ ver la estabilidad : segunda deriv. del potencial

→ saber el resultado al que debería llegar.

* Si hay un momentum, cambiar directamente en el potencial.

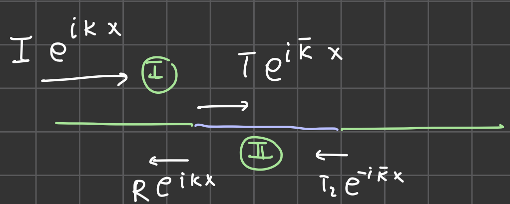
$$\boxed{H = \sum p_\sigma \dot{q}_\sigma - L} \Rightarrow L = T - V.$$

→ se conserva cuando $= E_{mec}$
o
las coord y potencial tiempo indep.

$$\boxed{p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}}$$

recomendado: Hacer de acá directo #.

¡Estudiar ondas que se propagan!
↳ considerar onda que incide, se refleja y se transmite.



* van a haber reflexiones
↳ Fresnel

$r = \left|\frac{R}{I}\right|^2$

$t = \left|\frac{T}{I}\right|^2$

→ $\boxed{r + t = 1}$
no se puede perder la energía

② → Escribir ondas de cada zona

I $\psi_I(x) = Ie^{ikx} + Re^{-ikx}$
↳ conocido.

II $\psi_{II}(x) = T_1 e^{i\bar{k}x} + T_2 e^{-i\bar{k}x}$

↳ este es el caso de ondas viajeras ≠ estacionarias.

* Las frec. no pueden cambiar de 1 medio a otro. (la huella digital) pero la velocidad si cambia

③ C.B:

~ $\psi_I(a) = \psi_{II}(a)$, $\psi_I'(a) = \psi_{II}'(a)$

Si hay un borde no son exp! ¡son trigonométricas

¡Ver la de la serie de fourier cuando hay bordes!

$F(x,t) = A\cos(\omega t + \phi)$ → general, afecta todo el sistema.

$f_n(t) = \int \rho_m(x)\, F(x,t)\, dx$

como modo forzado (de 1 modo)

→ soluø bordes fijos conocida → $\rho = \sqrt{\sigma}\ \sin \ldots$

↳ si no es exponencial, lo dirán.

fuerza generalizada.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma \;, \quad \sigma = 1, \dots, n.$$

$$Q_r = -m l_0 \dot\theta^2 - mg\cos\theta$$

fuerza de tensión que reacciona.

Fuerza centrífuga. $\frac{mv^2}{R} = \frac{m(r\dot\theta)^2}{R} = m l_0 \dot\theta^2$

componente de la gravedad en $\hat r$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma}$$

restric ∅.

mult. de Lagrange

momentum generalizado $\boxed{p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}}$; $\dot p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}$

· Si $\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0 \Rightarrow p_\sigma = cte \longrightarrow q_\sigma$ cte de movimiento

→ $\boxed{H = \sum_\sigma p_\sigma \cdot \dot q_\sigma - L.}$ · Si $\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \longrightarrow \boxed{H = T + U = E_{Tot} = cte.}$

↳ se conserva cuando $= E_{mec}$

las coord y potencial tiempo indep.

→ $\ddot\theta = f(\theta)$

Potencial efectivo. Pot. que efectivam. rige la dinámica. → $f(\theta) = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial\theta}$

Ptos. críticos → $U_{eff}'(\theta) = 0$

→ La fuerza generalizada Q_σ se anula en condiciones de equilibrio estático:

$$Q_\sigma \Big|_{q_\sigma^0} = -\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}\Big|_{q_\sigma^0} = 0$$

[P.O]

$\vec r = r_{eq} + \eta$
$\dot r = \dot\eta$ ⟶ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\eta_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_\sigma} = 0$ $\left(\dot\eta^2 = 0 \,,\; \ddot\eta^2 = 0 \,,\; \dot\eta\dot\theta = 0.\right)$

$$\boxed{\hat M \cdot \ddot{\vec\eta} + \hat V \vec\eta = 0}$$

* Aprox. $\sin\theta_n \approx \tan\theta_n = \frac{T}{a}(z_{n+1,m} - z_{n,m})$

$$\left[\mu_1^T \hat{M} \mu_2 = \delta_{12} \right] \longrightarrow \theta_1^T \hat{M} \theta_1 = 1 \longrightarrow \text{para encontrar } c_1$$

$$c_1^2 \, m \, (1 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1.$$

* $\xi_j(t) = \xi_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$ → <u>coordenadas naturales</u>

$$\vec{\eta} = \hat{A} \vec{\xi} \, , \quad \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{coord. generalizadas.}$$

a_n , b_n , sol. para $f(x)$ y

$$\longrightarrow y(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\sigma L}} \sin k_\nu x \cdot \left(a_\nu \cos \omega_\nu t + b_\nu \, \mathrm{sen} \, \omega_\nu t \right)$$