Leyes de conservación

5·oct.

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{E}^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}$$

densidad de energía

$$W_B = \frac{1}{2\mu_0}\int \vec{B}^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot\vec{B}$$

densidad de energía $\longleftarrow$ $\cdot\ U = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon \vec{E} + \mu \vec{H}^2\right)$$ $\rightarrow$ resulta útil.

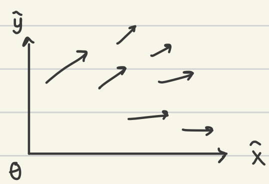
flujo de energía $\longleftarrow$ $\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B} \longrightarrow \vec{E}\times\vec{H}$

densidad de momento de los campos. $\longleftarrow$ $\cdot\ \vec{g} = \mu_0\varepsilon_0\vec{S} \longrightarrow \mu_0\varepsilon\,\vec{E}\times\vec{H}$

tensor de stress $\longleftarrow$ $T_{ij} = \varepsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2\right)$

$\vec{v}(\vec{x}) \longrightarrow$ 3 grados de libertad en cada lugar
- $\hookrightarrow$ en cada direcø
- $\hookrightarrow$ largo del vector.

campo vectorial $\longleftarrow$



$$v_i(\vec{r}) = \partial_i \underbrace{v^s}_{\text{escalar}}(\vec{r}) + v_i^v(\vec{r}).$$

$\hookrightarrow$ parte vectorial

escalar: un gradiante de un potencial

$$\boxed{\vec{v} = \nabla v^s + \vec{v}^v}$$

$\rightarrow \underbrace{\partial^i v_i}_{\text{escalar}} = \underbrace{\partial^i \partial_i v^s}_{v^s \,\rightarrow\, \text{escalar}} + \underbrace{\partial^i v_i^v}_{0} \longrightarrow$ para que no sea la parte escalar

Imponemos $\partial^i v_i^v = 0$.

$$\boxed{\nabla^2 v^s = \partial^i v_i}$$

$\Rightarrow$ conocemos v_s $\rightarrow$ basta resolver Poisson.

$\Rightarrow$ conocemos v_i^v

$v_i^v = v_i - \partial_i v^s$ $\Rightarrow$ descomposiø es única.

<u>Espacio de Fourier</u>

verificar

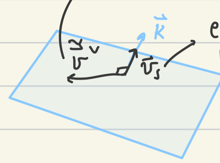
$$\vec{v}(\vec{r}) \longrightarrow \tilde{\vec{v}}(\vec{k}) = \int d^3r \, e^{-i\vec{r}\cdot\vec{k}} \, \vec{v}(\vec{r})$$

$\vec{k}\cdot\tilde{\vec{v}}^v = 0$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \nabla v^s + \vec{v}^v \rightarrow \tilde{\vec{v}} = -i\vec{k}\tilde{v}^s + \tilde{\vec{v}}^v$$

$\rightarrow \nabla\cdot\vec{v}^v = 0$

modo transversal a $\hat{k}$.



es como el largo . a lo largo de $\hat{k}$.

$$\vec{v}(r) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, \tilde{\vec{v}}(\vec{r}).$$

* v^s tiene 1 grado de libertad
* v_i^v " 2 " " " $\longrightarrow$ ortogonales a la otra en $\hat{k}$.

versión espacio - temporal.

$x^\mu = (t, \vec{x})$

$$\vec{v}^v(\vec{r}, t) \rightsquigarrow v_\mu(x) = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_i \end{pmatrix}$$

Parte temporal

v_0 → 1 grado lib. , escalar → 1

v_i ← 3 grad. lib. , vectoriale → 1 + 2

2 + 2 : escalares, vectoriales.

$$\boxed{\underbrace{\partial^\mu \partial_\mu}_{-\partial_t^2 + \nabla^2} v_\nu + \alpha \underbrace{\partial_\nu}_{\text{grad.}} \underbrace{(\partial^\mu v_\mu)}_{\text{div. en 4 dim.}} + \beta v_\nu = H_\nu}$$ → fuentes

de invariante de Lorentz

$\partial^i \partial_i \rightarrow$ laplaciano

$\partial^\mu \partial_\mu \rightarrow$ D'Alembertiano.

* $c = 1$

ecuaø lineal invariante ante trasf. de Lorentz.

$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial/\partial t \\ \partial/\partial x^i \end{pmatrix}$

nabla espacio-temporal

$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$

$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial t} \\ \partial/\partial x^i \end{pmatrix}$

$\nu = 0$

$$(-\partial_t^2 + \nabla^2) v_0 + \alpha \partial_t (-\partial_t v_0 + \partial^i v_i^s) + \beta v_0 = 0$$

$\alpha = -1 \rightarrow v_0$ satisface ecuaciones de Poisson, no ecs. dinámicas.

$$\nabla^2 v_0 - \underbrace{\partial^i \dot{v}_i^s}_{\nabla^2 v^s} + \beta v_0 = 0 \longrightarrow \partial^i \partial_i v = \nabla^2 v^s + \cancel{\partial^i v_i^v}^{\,0}$$

$\Longrightarrow \boxed{\nabla^2(v_0 - v^s) + \beta v_0 = 0}$ (**)

$\nu = i$

$$(-\partial_t^2 + \nabla^2) v_i + \alpha \partial_i (-\partial_t v_0 + \partial^i v_i) + \beta v_i = 0$$

(*) $\boxed{(-\partial_t^2 + \nabla^2) v_i^v + (-\partial_t^2 + \nabla^2)\partial_i v^s - \partial_i(-\dot{v}_0 + \nabla^2 v^s) + \beta v_i^v + \beta \partial_i v^s = 0}$

muere xq $\partial^i v_i^v$

$$\partial^i(*) = (-\partial_t^2 + \cancel{\nabla^2})\nabla^2 v^s - \nabla^2(-\dot{v}_0 + \cancel{\nabla^2 v^s}) + \beta \nabla^2 v^s = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2(\underbrace{-\partial_t^2 v^s + \dot{v}_0 + \beta v^s}_{0}) = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{-\partial_t^2 v^s + \dot{v}_0 + \beta v^s = 0} \quad (***)$$

(**) + (***) :

$$\nabla^2(\dot{v}_0 - \ddot{v}^s) + \beta \nabla^2 \dot{v}^s = 0 \Rightarrow -\cancel{\beta}\dot{v}_0 + \cancel{\beta}\nabla^2 v^s = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 v^s = \dot{v}_0$$

$$\rightarrow -\ddot{v}_s + \nabla^2 v_s + \beta v_s = 0$$

no funciona ya que no queremos que v^s tenga dinámica $\longleftarrow$ $\boxed{\partial^\mu \partial_\mu v_s + \beta v_s = 0}$

$\beta = m^2 \longrightarrow$ masa de la partícula que representa la excitación del campo.

$\rightarrow$ Energía de las partículas: $E = \sqrt{p^2 + \beta}$ (β: m^2) $\rightarrow$ relación de dispersión en mecánica relativista.

$E = \dfrac{p^2}{2m^2} \longrightarrow$ en newtoniana.

con β = | Imponiendo $\boxed{\beta = 0}$ → ya que no podemos dividir en β.

→ $\partial_\mu \partial^\mu v_i^\nu = 0$

↳ $E = p$ → energía de una partícula sin masa
↳ Espectro de fotones
↳ $v = c$.

$$\partial^\mu \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu (\partial^\mu v_\mu) = 0$$

$$\partial^\mu [\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu] = 0$$

→ $v_\mu = A_\mu$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_\nu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

→ v → son las polarizacoes ortogonales a la direcc de propagación.

10 · oct.

2 grados de libertad vectoriales

$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$

Ec. dinámica para $\vec{A}^\nu \rightsquigarrow \underbrace{\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0}_{\text{ec. de Maxwell}}$ donde $\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$

$J_\mu \neq 0 \Rightarrow \boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu}$

$\underbrace{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}_{\nabla \cdot \vec{B} = 0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

grad. de lib ← 1 + 2

$\vec{v} = \nabla v^s + \vec{v}^v \qquad \nabla \cdot \vec{v}^v = 0$

grad   div.

Tensor de rango 1 ← v_i

" " " 2 ← $t_{ij}(\vec{r}) = \partial_i \partial_j t^s + (\partial_i t^v_j + \partial_j t_i^v) + \delta_{ij} S + \ldots$

1 + 2 + 1 + 2 = 6.

$(t_{ij} = t_{ji})$ simétrico

traza t_{ij} (escalar)

* vector puro: $\partial^i t_i^v = 0$

vector puro.

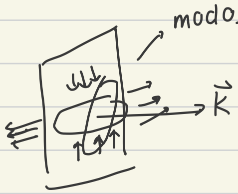
$$= \underbrace{\left(\partial_i \partial_j - \frac{\delta_{ij} \nabla^2}{3}\right) t^s}_{1} + \underbrace{(\partial_i t^v_j + \partial_j t_i^v)}_{2} + \underbrace{\frac{1}{3} \delta_{ij} S}_{1} + \underbrace{t^T_{ij}}_{2}$$

$t^T_{ij} \delta^{ij} = 0$
(sin trazas)

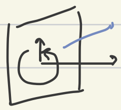
$\partial^i t^T_{ij} = 0$

2 grad. de libertad (2 compresiones) ortogonales al plano

Ligo:



→ ondas gravitacionales (basta rotarlo en π para obtener lo mismo).



polarizaø (rotar en 2π se tiene lo mismo)

↳ $P(2\pi)\hat{x} = \hat{x}$

- $\hat{s}_1 = \hat{x} + i\hat{y}$ $\quad R(\theta)\hat{s}_1 = e^{is\theta}\hat{s}_1$; $s = 1$ para el caso vectorial.
- $\hat{s}_2 = \hat{x} - i\hat{y}$ $\quad R(\theta)\hat{s}_2 = e^{-is\theta}\hat{s}_2$

Para tensores: $R(\theta)\hat{s}_1 = e^{is\theta}\hat{s}_1$ → $s = 2$ → define el spín → es clásico (no cuántico). (cómo rotan las bases).

partículas campos.

$\gamma : A_\mu \to s = 1$ → Bosones (spin entero)

gravitón → 2 grados de libertad : $g = g_{\mu\nu}$. → $s = 2$.

$e, \nu, q : \Psi \to s = 1/2$ → Spín 1/2.

ν ↓ neutrinos; Ψ ↘ campo de dirac.

$H : \phi \to s = 0$

↳ campo escalar (higgs).

$(?) : \Psi_\mu \to s = 3/2$

↘ Rarita - Schwinger

↓ supergravedad requiere que esté acompañado con spín 3/2.

1 $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

2 $\nabla\cdot\vec{B} = 0$

3 $\nabla\times\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$

4 $\nabla\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J} \longrightarrow \nabla\times\left(\nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\nabla\times\vec{J}$

2 rotores $\leftarrow$ $\nabla(\underbrace{\cancel{\nabla\cdot\vec{B}}}_{0}) - \nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{E} = \mu_0\nabla\times\vec{J}$

xq son deriv. parciales

$\downarrow$

$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

D'Alembertiano $\leftarrow$ $\boxed{\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)}_{\square}\vec{B} = \mu_0\nabla\times\vec{J}}$

→ Repetir:

$\square\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\vec{J}$

$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \implies \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

3 $\rightsquigarrow \nabla\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \implies \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi$

$\implies \boxed{\begin{cases}\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{cases}}$ → potenciales 5 6

2 grad. de lib.

2 esc. + 2 vectoriales (4 grad. de libertad).

$\left.\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right\}$ 6 $\boxed{-\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

$\left.④ + ⑤, ⑥\right\} \implies \boxed{\square\vec{A} - \nabla\left[\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\Phi\right] = -\mu_0\vec{J}}$

Simetría de Gauge

$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \longrightarrow \vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\Lambda) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$

$\longrightarrow \vec{B}' = \vec{B}$!!!

$\Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda \longrightarrow \vec{E}' = -\nabla\Phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\Phi - \cancel{\frac{\partial\Lambda}{\partial t}}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \cancel{\nabla\Lambda}\right)$

$= -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E}$

$\longrightarrow \vec{E}' = \vec{E}$!!!

Gauge + Lorentz $\Rightarrow$ $4 - 2 = 2$ grad. de libertad

imponemos una simetría.

$\hookrightarrow m = 0$ $\quad \alpha = 1$

$v = c$

simetría de Gauge: $A_\mu = \begin{pmatrix} -\Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$, $A_\mu \longrightarrow \boxed{A'_\mu = \begin{pmatrix} -\Phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \\ \vec{A} + \nabla\Lambda \end{pmatrix} = A_\mu + \partial_\mu \Lambda}$

$F_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$

$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \cancel{\partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda} = F_{\mu\nu}$!!

Del modelo estándar: $SU(3) + SU(2) + \underbrace{U(1)}_{\text{gaug}}$ grad. de libertad.

$\cdot\ \vec{A}' = \nabla A^S + \vec{A}^V + \nabla\Lambda$

$\rightarrow \Lambda = -A^S$

Gauge de coulomb $\quad \nabla \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \sim\!\!\rightarrow \Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r \frac{\rho}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \\ \Box \vec{A} - \frac{1}{c^2}\nabla\Phi = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Gauge de Lorentz

(son con prima pero la borramos)

versión covariante.

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} = 0 \longrightarrow \boxed{\partial^{\mu} A_{\mu} = 0}$$

son invariantes bajo Lorentz

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \Box \Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \Box \vec{A} = -\mu_0 J \end{cases}}$$

, $\Box \vec{E} = \dots \rho, \vec{J}$

$\Box \vec{B} = \dots \vec{J}$

Tipo de ecuaciones: $\Box \Psi = -4\pi f \longrightarrow \Box G = -4\pi\delta$.

Ψ: campo de interés.

f: fuente

12·Oct

Recordar:

$$\underbrace{\square \Psi(t,\vec{r})}_{\left\{\begin{array}{l}\vec{E}\\ \vec{B}\\ \vec{A}\\ \Phi\end{array}\right.} = -4\pi f(t,\vec{r}) \quad \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\vec{J}\\ \mu_0 \nabla\times\vec{J}\\ -\mu_0\vec{J}\\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{array}\right.$$

Gauge de Lorenz.

$$\square \Psi = -4\pi f$$

$$\Psi = \Psi_h + \Psi_p$$

va a estar ahí la parte homogénea

$$\square \Psi_h = 0 \qquad \square \Psi_p = -4\pi f$$

ambiguo (no dice nada más)

(+ condición si $f=0 \Rightarrow \Psi_p = 0$)

si no hay fuente, solo hay sol. homogénea.

En espacio de Fourier.

$$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \Psi(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t}$$

no hacerlo simétrico (+ útil).

distingue al tiempo.

$$\Psi(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \Psi(\vec{r},t)\, e^{i\omega t}$$

$$\square = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

$\partial^\mu \partial_\mu$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\Psi(\vec{r},\omega) = -4\pi f(\vec{r},\omega)}$$

→ el t ya no tiene un rol. (como de electrostática).

modos de fourier (en espacio de frec).

Green:

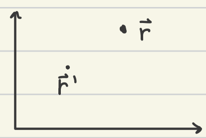
$$(*) \quad \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G_\omega(\vec{r},\vec{r}\,') = -4\pi\, \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

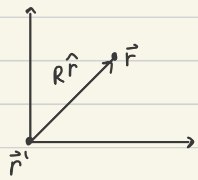
este método busca la sol. particular (le podemos sumar la homogénea).

$$\Psi_p(\vec{r},\omega) = \int d^3r'\ G_\omega(\vec{r},\vec{r}\,') f(\vec{r}\,',\omega)$$

$G_\omega(\vec{r},\vec{r}\,') = G_\omega(\underbrace{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}_{R})$ ↳ Tiene que haber simetría. (veremos si tenía sentido).

la + general posible





$\nabla^2 = \frac{1}{R}(R\quad)'' + \dots$

↳ en esféricas.
(pero G_ω no depende de θ y ϕ.)

$$\circledast \quad \boxed{\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}\left(R\,G_\omega(R)\right) + \frac{\omega^2}{c^2}G_\omega(R) = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{R})}$$

$R\hat{r}$

caso $R \neq 0$:

ecuac de un mas. ←

$$\Rightarrow (RG_\omega)'' + \frac{\omega^2}{c^2}(RG_\omega) = 0$$

$$\cancel{R}G_\omega = \frac{A}{R}e^{i\frac{\omega}{c}R} + \frac{B}{R}e^{-i\frac{\omega}{c}R}$$

$$\circledast \Rightarrow 2RG_\omega' + R^2G_\omega'' + k^2R^2G_\omega = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{R})$$

para tener una cant. adimensional. ← donde $k = \frac{\omega}{c}$

Límite
$kR \to 0 \quad (kR \ll 1)$

· Queremos que las soluc es de G_ω coincidan en el límite.

$$\Rightarrow \underbrace{G_\omega''R^2 + 2RG_\omega'}_{} = -4\pi R^2\delta$$

$$\boxed{\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG_\omega) = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{R})}$$

$$\nabla^2 G_\omega(R) = -4\pi\,\delta(\vec{R})$$

(2) $\Rightarrow G_\omega(R) = \frac{1}{R} \quad (kR \ll 1)$

(1) $\Rightarrow G_\omega(R) = \frac{A}{R} e^{ikR} + \frac{B}{R} e^{-ikR} \xrightarrow[kR\to 0]{} \underbrace{\frac{A}{R}(1 + i\cancel{kR}) + \frac{B}{R}(1 - i\cancel{kR})}$ muy pequeños.

$\frac{A+B}{R} \Rightarrow A + B = 1$

condiø

podemos elegir si usar A o B = 1 y el otro = 0.

$G_\omega(R) = A\, G_\omega^{(+)}(R) + B\, G_\omega^{(-)}(R)$

$$G^{(\pm)}(R) = \frac{e^{\pm i \frac{\omega}{c} R}}{R}$$

$$\Psi_p(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int d^3r' \left(\frac{A\, e^{+i\frac{\omega R}{c}}}{R} + \frac{B}{R} e^{-i\omega R/c} \right) f(\vec{r}', \omega)$$

$\int dt'\, e^{i\omega t'} f(\vec{r}', t')$

$e^{-i\omega(t - \frac{R}{c})}$ $\quad$ $e^{-i\omega(t + \frac{R}{c})}$

$F(t - \frac{R}{c})$ $\quad$ $F(t + \frac{R}{c})$.

avanza $\quad$ retrocede $\quad$ la onda.

alguna funø. (variedades de una funø de onda).

$$\Box \Psi_p = -4\pi f$$

$$\Psi_p(\vec{r}, t) = \int dt' \int d^3r'\, G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')\, f(\vec{r}', t')$$

Donde.

$$\underset{\partial^\mu \partial_\mu}{\Box}\, G(\underbrace{\vec{r}, t}_{x}; \underbrace{\vec{r}', t'}_{x'}) = -4\pi \underbrace{\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')\, \delta(t - t')}_{\delta^{(4)}(x - x')}$$

$\delta^{(4)}(x - x')$.

sin vector es la coleccø de las 4 variables.

$$G(\vec{r},t\,;\vec{r}',t') = A\,G^{(+)}(\vec{r},t\,;\vec{r}',t') + B\,G^{(-)}(\vec{r},t\,;\vec{r}',t').$$

$$G^{(\pm)}(\vec{r},t\,;\vec{r}',t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega(t-t')}\, G_\omega^{(\pm)}(\|\vec{r}-\vec{r}'\|).$$

$t - t' = \tau$

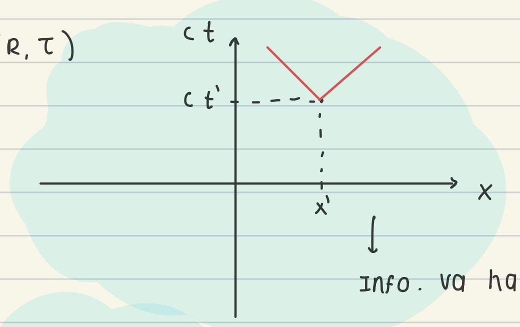
$$G^{(\pm)}(R,\tau) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{R}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega(\tau \mp R/c)}}_{2\pi\,\delta(\tau \mp R/c)}$$

$R \rightarrow \|\vec{r}-\vec{r}'\|$

$$G^{(\pm)}(R,\tau) = \frac{1}{R}\,\delta(\tau \mp R/c) = \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\,\delta\left(t' - \left[t \mp \frac{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}{c}\right]\right)$$

¡Info. viaja en el tiempo por el cono de luz!

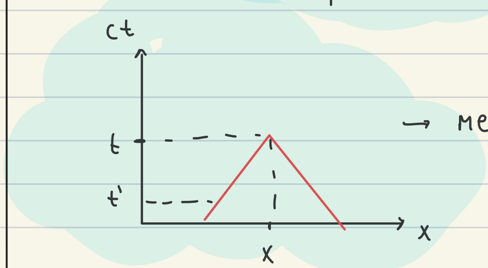
$G^{(+)}(R,\tau)$



$\underbrace{-\tau + \frac{R}{c}}_{0}$ para que $\delta \neq 0$

$\Rightarrow \tau = \frac{R}{c}$

Info. va hacia el futuro

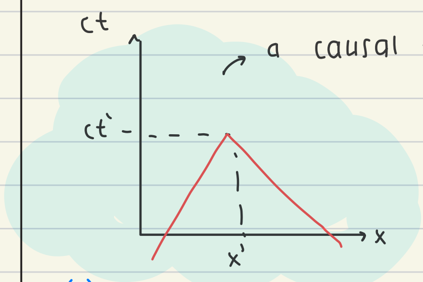


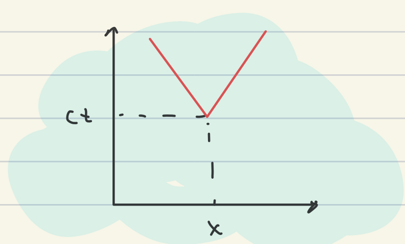
→ Medimos cosas del pasado.

ecuaciones son invariantes ante inversiones temporales (cambiar t por -t)

$G^{(+)}$ Funo de Green retardada (causal, responde a nuestra noción).

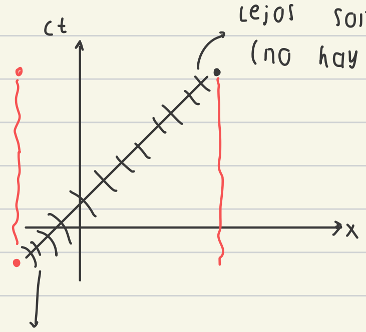
a causal





$G^{(-)}$
(a causal).

¿xq la entropía aumenta hacia el futuro?
↳ Es la definición.



Lejos son ondas planas.
(no hay J ni ρ).

Vibraciones del campo E-M.

Ondas Planas

sin fuentes pero con evolución. ←

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\qquad$ $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$\nabla \cdot \vec{D} = 0$ $\qquad$ $\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

En espacio de fourier: $(\vec{r}, \omega)$.

→ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (1)
→ $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ (2)
→ $\nabla \times \vec{E} - i\omega \vec{B} = 0$ (3)
→ $\nabla \times \vec{H} + i\omega \vec{D} = 0$ (4).

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \vec{E}(\vec{r}, \omega) \, e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \vec{B}(\vec{r}, \omega) \, e^{-i\omega t}$$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
$\vec{B} = \mu \vec{H}$

$\vec{E}(\vec{r}, t)$ es real
$\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ puede ser compleja.

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}^*(\vec{r}, \omega) = \vec{E}(\vec{r}, -\omega)}$

Condición de realidad. → se debe satisfacer.

Filtrar (quedarse con la parte que satisface la condiø de realidad).

$$\vec{E}(\vec{r},t) = R_e\left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \vec{E}(\vec{r},\omega)e^{-i\omega t} \right\}$$

(1)+(2)+(3)+(4)

$$\Rightarrow \begin{cases} (\nabla^2 + \underbrace{\mu\varepsilon}_{1/v^2}\omega^2)\vec{E} = 0 \\ (\nabla^2 + \mu\varepsilon\,\omega^2)\vec{B} = 0 \end{cases}$$

* $\mu\varepsilon = \frac{1}{v^2} \longrightarrow$ en un medio material

$v \leq c$

$$\rightarrow \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right) f = 0 \longrightarrow \text{Queremos resolver.}$$

modos de frecuencia

→ Conocemos las ondas planas en el espacio de Fourier

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \vec{E}(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t} \longrightarrow \vec{E}(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \vec{E}(\vec{r},t)\, e^{i\omega t}$$

reales

condición de realidad

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \vec{B}(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t}$$

En espacio de Fourier:

$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r},\omega) = 0$ (3) $\qquad \nabla\times\vec{E} - i\omega\vec{B} = 0$ (1)

$\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r},\omega) = 0$ (4) $\qquad \nabla\times\vec{H} + i\omega\vec{D} = 0$ (2)

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$\vec{B} = \mu\vec{H}$

verificar! ← Cond. de realidad: $\begin{cases} \vec{E}^*(\vec{r},\omega) = \vec{E}(\vec{r},-\omega) \\ \vec{B}^*(\vec{r},\omega) = \vec{B}(\vec{r},-\omega) \end{cases}$

Excluimos la parte que no satisface realidad. ← Alternativa:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \vec{E}(\vec{r},\omega)\, e^{-i\omega t} \right.$$

(2) $\Rightarrow \vec{D} = \frac{i}{\omega}\cdot\nabla\times\vec{H}$

$$\vec{E} = \frac{i}{\omega\varepsilon}\nabla\times\vec{H}$$

(1) $\rightarrow \frac{i}{\omega\varepsilon\mu}\nabla\times(\nabla\times\underbrace{\cancel{\vec{H}}}_{\vec{B}}) - i\omega\vec{B} = 0 \xrightarrow{+(3)} (\nabla^2 + \mu\varepsilon\omega^2)\vec{B}_\omega = 0$

$\boxed{\frac{1}{\varepsilon\mu} \equiv v^2}$

Repetimos:

$$(\nabla^2 + \mu\varepsilon\omega^2)\vec{E}_\omega = 0$$

Notación:

$\begin{bmatrix} \vec{k} = k\hat{n} \\ \hat{n} = \hat{k} \end{bmatrix}$

· k negativo es lo mismo que tomar $\hat{n}$ en dirección contraria

↓

para no sobrecontar.

⇓

$\underline{\underline{k > 0}}$

$\cdot\ (\nabla^2 + \mu\varepsilon\omega^2) f_\omega = 0$

normalizando $\hat{n}\cdot\hat{n} = 1$

Ondas planas: $f_\omega \propto e^{ik\hat{n}\cdot\vec{r}}$

$\hat{n}$

$$\underbrace{(-k^2\underbrace{(\hat{n}\cdot\hat{n})}_{1} + \mu\varepsilon\omega^2)}_{k^2 = \mu\varepsilon\omega^2} f_\omega = 0$$

$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \longrightarrow \boxed{k = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega}$

solu∅ para un $\hat{n}$ dado (particular) ← $f_\omega(\vec{r}) = \sum_{\hat{n}} f_\omega(\hat{n})\, \underbrace{e^{ik\hat{n}\cdot\vec{r}}}_{\text{como un } e^{ikx}}$

↓ Hay que sumar.

$e^{i(kx-\omega t)} \longrightarrow$ - - - - - - x $\quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

$$= \int \frac{d\Omega}{4\pi} f_\omega(\hat{n})\, e^{ik\hat{n}\cdot\vec{r}}$$

integrar en todas direcøes de un vector unitario. ← ángulo sólido

$d\Omega = d\theta\, d\phi \sin\theta$

---

*vamos a concentrar-nos en 1 $\hat{n}$ para 1 dirección.

Notar: $\nabla\cdot\vec{E}_\omega(\vec{r}) = 0$

Para una onda plana: $\vec{E}_\omega(\vec{r},\hat{n}) = \vec{E}_\omega(\hat{n})\, e^{+ik\hat{n}\cdot\vec{r}}$.

amplitud

$$\nabla\cdot\vec{E}_\omega(\vec{r},\hat{n}) = i\underbrace{k\hat{n}\cdot\vec{E}(\hat{n})}_{0}\, e^{ik\hat{n}\cdot\vec{r}}. = 0$$

↳ $\vec{E}$ perpendicular a la dirección en que se mueve la señal. → transversal.

$\hat{n}\cdot\vec{E}_\omega = 0 \longrightarrow \vec{B}_\omega = \frac{1}{i\omega}\nabla\times\vec{E}_\omega$

$\hat{n}\cdot\vec{B}_\omega = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B}_\omega(\hat{n}) = \sqrt{\mu\varepsilon}\cdot\hat{n}\times\vec{E}_\omega(\hat{n})}$$

↳ campo eléctrico es perpendicular al campo magnético.

Juntando todo:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{?}{k} \int \frac{d\Omega}{4\pi^2}\cdot\pi\, \frac{\vec{E}_\omega(\hat{n})}{k^2}\, e^{-(i\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\right.$$

↓ por toda la esfera.

desde 0 a ∞

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \Rightarrow d\omega = \frac{dk}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Puedo excluir los valores neg. de ω. ←

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk \int \frac{d\Omega}{4\pi^2}\, k^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

→ $\int d^3r = \int dr\, \underbrace{d\theta\, d\phi \sin\theta}_{d\Omega}\, r^2$

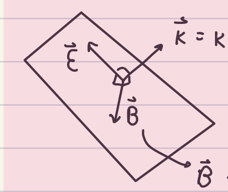
solució general.

$$\Longrightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = Re\left\{ \quad \right\} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \vec{E}(\vec{k})\, e^{-i(\omega(k)t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

absorbido el k^2.

<u>ondas planas:</u>

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left\{ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t} \right\} = Re\left\{ \vec{\mathcal{E}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \right\}, \quad \vec{k} = k\hat{n}$$



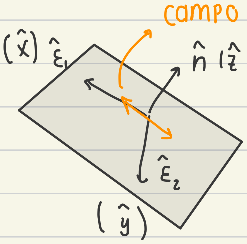
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \dots\ \vec{\mathcal{B}}(\vec{r})$$

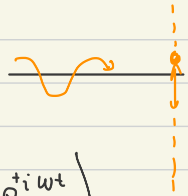
polarizació! (sólo para $\hat{\varepsilon}_1$)

$\vec{\mathcal{E}} = \hat{\varepsilon}_1 E_0$ → unitarios, reales (están en el plano)

$\vec{\mathcal{B}} = \hat{\varepsilon}_2 \sqrt{\mu\varepsilon}\, E_0$ → complejos.

<u>Poynting:</u>





$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}(\vec{E} \times \vec{B})$$

$$= \frac{1}{\mu}\underbrace{Re\left\{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right\}}\ \times\ Re\left\{\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} + \vec{\mathcal{E}}^*\, e^{+i\omega t}\right) \times \frac{1}{2}\left(\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} + \vec{\mathcal{B}}^*(\vec{r})\, e^{+i\omega t}\right)$$

esto + el complejo conjugado.

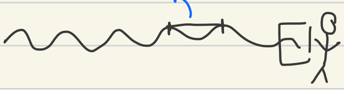
$$= \frac{1}{2\mu} Re\left\{ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \times \vec{\mathcal{B}}^*(\vec{r})\right\} + \frac{1}{2\mu} Re\left\{ \cancel{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{r})\, e^{-2i\omega t}} \right\}$$

de los términos sin fase

promedio en el t.

la parte que tiene ω no interesa (frec. alta).

$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \to \frac{1}{\nu} \to \nu = \frac{\omega}{2\pi}$



para notar que es onda plana. ← si $T \gg \Delta t$

$$\vec{S}_{prom} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \vec{S} = \text{primer término.}$$

despreciamos la parte que se promedia. ←

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2\mu} R_e \left\{ \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r}) \right\}}$$

Vector de Poynting

19·oct.

$$\vec{S}_{prom} = \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \vec{S} = \frac{1}{2\mu} \, Re\left\{ \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r}) . \right\}$$

llamando con el vector de poynting complejo ←

$$\sim \boxed{\vec{S} = \frac{1}{2\mu} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r})} \qquad \left(\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \right)$$

vector de poynting complejo.

Repetimos: (cantidades promedio)

Estas ecs. son generales, no están limitadas para ondas planas

cant. de energía ← es real y se va la parte oscilante por el promedio

$$u_e = \frac{\varepsilon}{4} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}^*(\vec{r})$$

$$u_m = \frac{1}{4\mu} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{B}^*(\vec{r})$$

Reemplazamos expresiones por ondas planas.

en promedio ←

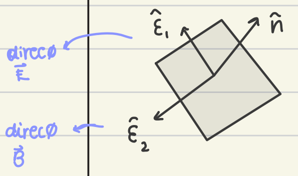
$$\vec{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \, |\vec{E}_0|^2 \, \hat{n}$$

apunta en la direcø de propagaø de la onda.

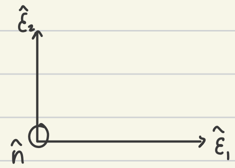
la suma de u_e y u_m ←

$$u = \frac{\varepsilon}{2} |\vec{E}_0|^2$$

Polarización lineal y circular:



Desde arriba:



usamos 1 sola base para ambos campos. $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ los tomamos como ortogonales. (superposiø de campos). ←

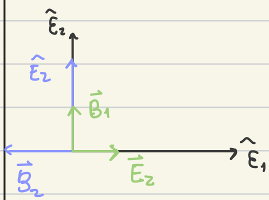
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)$$

$$= \hat{\varepsilon}_1 E_1 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} + \hat{\varepsilon}_2 E_2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} .$$

→ con $= \lambda$ e igual ω.

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_1(\vec{r},t) + \vec{B}_2(\vec{r},t)$$

$$= \hat{\varepsilon}_2 B_1 \ldots + -\hat{\varepsilon}_1 B_2 \ldots$$



· una polarizaø está multiplicado por una amplitud que puede ser positivo o negativo.
Importa la direcø, no el sentido.

representaø polar de un complejo.

$$E_1 = |E_1| e^{i\phi_1}$$
$$E_2 = |E_2| e^{i\phi_2}$$

traslaø temporal

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{\left(|E_1| \hat{\varepsilon}_1 e^{i\phi_1} + |E_2| \hat{\varepsilon}_2 e^{i\phi_2} \right)}_{\perp \hat{n}.} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

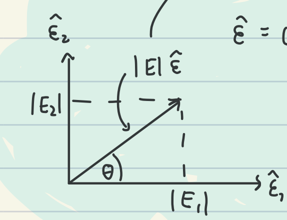
sería el campo $\vec{E}$ apuntando simpre en la misma direcø (relaø lineal) ←

polarizaø lineal: $\phi_1 = \phi_2 = \phi$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left(\hat{\varepsilon}_1 |E_1| + \hat{\varepsilon}_2 |E_2| \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t + i\phi}$$

$$|E| = \sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2}$$

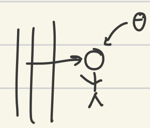
$$\hat{\varepsilon} = \cos\theta\, \hat{\varepsilon}_1 + \sin\theta\, \hat{\varepsilon}_2$$



$$\theta = \arctan\left(\frac{|E_2|}{|E_1|} \right)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\cdots\}$$

$$= \underbrace{\left(\hat{\varepsilon}_1 |E_1| + \hat{\varepsilon}_2 |E_2| \right)}_{|E|\hat{\varepsilon}} \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi \right)$$



Posición $\vec{r} = 0$

$$\vec{E}(\vec{0},t) = \hat{\varepsilon}\, |E| \cos(\omega t - \phi)$$

→ en $t_* = \frac{\phi}{\omega}$ el campo tiene amplitud máxima en alguna direcø $\hat{\varepsilon}$

→ en $t_* = \frac{\pi + \phi}{\omega}$ → en direcø $-\hat{\varepsilon}$ (contraria).

polarizaø circular.

$\phi_2 = \phi_1 \pm \frac{\pi}{2}$.

$E_1 = |E_1|\, e^{i\phi}$

$E_2 = |E_2|\, e^{i\phi}\, \underbrace{e^{\pm i\frac{\pi}{2}}}_{\pm 1}$

módulo de amplitud real.

amplitud compleja

$= \pm i |E_2| e^{i\phi}$

real positivo.

Asumamos: $|E_1| = |E_2| = E_0$.

$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 (\hat{\varepsilon}_1 \pm i\hat{\varepsilon}_2)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t + i\phi}$

base compleja de vectores unitarios

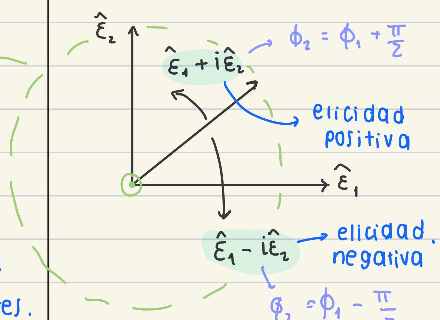
cuando $i\hat{\varepsilon}_2 \cdot i\,\text{sen}()$ es real.

está rotando

$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\{\ldots\} = E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi)\, \hat{\varepsilon}_1 \mp E_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi)\, \hat{\varepsilon}_2$

igual al cos. pero desfasado en $\pi/2$

polarizaø circular (elicidad)

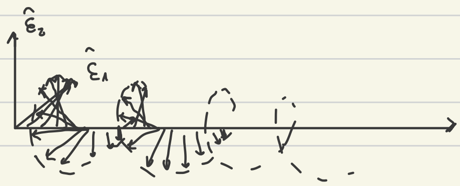


$\cdot\, \vec{r} = 0$

$\frac{\vec{E}(0,t)}{E_0} = \hat{\varepsilon}_1 \cos(\omega t - \phi) \pm \hat{\varepsilon}_2 \sin(\omega t - \phi)$

* la onda lineal es la c.l. de dos circulares.

→ Neutrinos: violaø de de paridad. No existen neutrinos que se mueven en direcø contraria.



$\hat{\varepsilon}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\varepsilon}_1 \pm i\hat{\varepsilon}_2)$

$\hat{\varepsilon}^*_\pm \cdot \hat{\varepsilon}_\mp = 0$

$\hat{\varepsilon}^*_\pm \cdot \hat{\varepsilon}^*_\pm = \hat{\varepsilon}_\pm \cdot \hat{\varepsilon}_\pm = 1$

$\hat{\varepsilon}_\pm \cdot \hat{n} = 0$

→ $\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \sqrt{2}\, \hat{\varepsilon}_\pm\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t + i\phi}$ → Resultado final en la base circular.

Volvamos a:

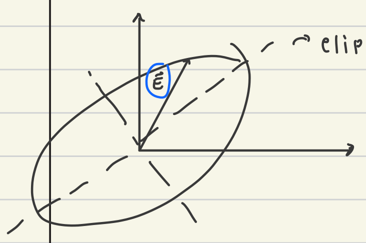
$\vec{E}(\vec{r},t) = (E_1\hat{\varepsilon}_1 + E_2\hat{\varepsilon}_2)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$ → lineal

$= (E_+\hat{\varepsilon}_+ + E_-\hat{\varepsilon}_-)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$. → circular.

combinaø lineal de 2 polarizaøes circulares da una lineal. ←

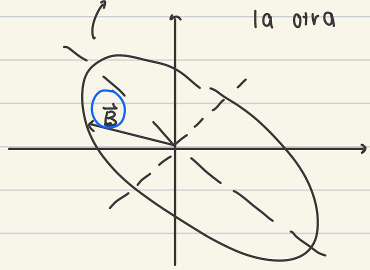
$E_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_1 \mp i E_2)$

$\phi_2 = \phi_1 + \ldots$ → no necesaria# $\pi/2$.



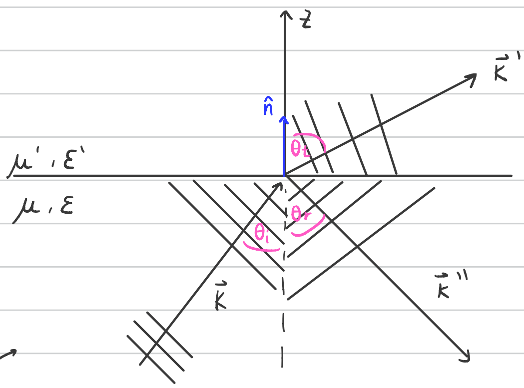
↪ elipse c/ cierta geometría
↳ Jackson 7.2.

rotada en 90° en comparaø con la otra



Reflexión y refracción

24 octubre



onda inciaente: $\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$

$$\vec{B} = \sqrt{\mu\varepsilon}\ \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$$

refractada: (transmitida) $\vec{E}' = \vec{E}_0' \, e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r} - i\omega' t}$

$\vec{B}' = \dots$

frente de ondas planas

Reflejada: $\vec{E}'' = \vec{E}_0'' \, e^{i\vec{k}''\cdot\vec{r} - i\omega'' t}$

$\vec{B}'' = \dots$

ya que la func debe ser única (1 sólo $\vec{E}$ en el espacio)

deben ser iguales

$$\vec{E}(z=0) = \vec{E}' e^{i(k_x' x + k_y' y) - i\omega' t} = \% \, e^{i(k_x' x + k_y' y)}$$

por debajo

$$\vec{E}(z=0) = \vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y) - i\omega t} + \underbrace{\vec{E}_0'' e^{i(k_x'' x + k_y'' y) - i\omega'' t}} = \% \, e^{i(k_x'' x + k_y'' y)}$$

$$\Rightarrow e^{i(k_x x + k_y y)} = e^{i(k_x' x + k_y' y)} = e^{i(k_x'' x + k_y'' y)}$$

conclusión cinemática

$$\vec{k}\cdot\vec{r}\,\Big|_{z=0} = \vec{k}'\cdot\vec{r}\,\Big|_{z=0} = \vec{k}''\cdot\vec{r}\,\Big|_{z=0}$$

Mismo argumento $\forall t$: $\omega = \omega' = \omega''$

como es el mismo medio $k'' = k$

$$k \cdot \operatorname{sen}\theta_i = k' \sin\theta_t = k'' \sin\theta_r$$

se ve en un espejo

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{\mu'\varepsilon'}{\mu\varepsilon}} = \frac{n'}{n}$$

donde $n = \sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}$

$n' = \sqrt{\dfrac{\mu'\varepsilon'}{\mu_0\varepsilon_0}}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n'}{n}}$$

→ ley de snell

· consideración dinámica ←

· Tiene que ver con las amplitudes.

C.B

· $\vec{D}^{\perp}$ y $\vec{B}^{\perp}$ continuas (1) → $\vec{D}$ continua xq asumimos que no hay cargas libres

$\vec{D}^{\perp}$ ↓ inhomogenea; $\vec{B}^{\perp}$ ↓ homo..

· $\vec{E}^{\parallel}$ y $\vec{H}^{\parallel}$ cont. (2) → xq no hay corrientes superficiales.

lo de hoy muy importante
↳ cálculo que dice que hay que hacer para el control y/o examen!
↓
calcular la amplitud de $\vec{E}$.

$$(1) \rightarrow \begin{cases} \left[\varepsilon\left(\vec{E}_0 + \vec{E}_0''\right) - \varepsilon' \vec{E}_0'\right]\cdot\hat{n} = 0 \\ \left[\vec{k}\times\vec{E}_0 + \vec{k}''\times\vec{E}_0'' - \vec{k}'\times\vec{E}_0'\right]\cdot\hat{n} = 0 \end{cases}$$

→ continuidad de $\vec{D}$.

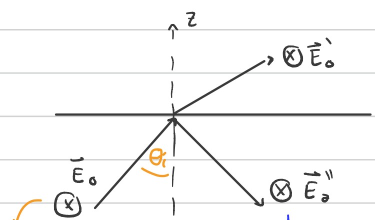
normal al plano ($\hat{z}$).

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} \left(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'' - \vec{E}_0'\right)\times\hat{n} = 0 \\ \left[\frac{1}{\mu}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0 + \vec{k}''\times\vec{E}_0''\right) - \frac{1}{\mu'}\left(\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right)\right]\times\hat{n} = 0 \end{cases}$$

verificar ←

(I) $\vec{E} \perp$ al plano de incidencia → de la pizarra

* $\vec{E}$ apunta hacia adentro.



en $-\hat{x}$

↳ convenio (si nos da negativo sale de la pizarra)

↳ $-\hat{x}\times\hat{z} =$. → $\hat{k} = (\cos\theta_i\,\hat{z} + \sin\theta_i\,\hat{y})\cdot E_0\hat{x}$

$(\cos\theta_i\,\hat{y} - \cancel{\sin\theta_i\,\hat{z}})\times\hat{z}$

verificar ←

$$\rightarrow \begin{cases} E_0 + E_0'' - E_0' = 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(E_0 - E_0''\right)\cos\theta_i - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\,E_0'\cos\theta_t = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} E_0' &= \left(\frac{2n\cos\theta_i}{n\cos\theta_i + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{(n')^2 - n^2\sin^2\theta_i}}\right)E_0 \\ E_0'' &= \left(\frac{n\cos\theta_i - \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{(n')^2 - n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta_i + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{(n')^2 - n^2\sin^2\theta_i}}\right)E_0 \end{aligned} \right\} \text{Fresnel}$$

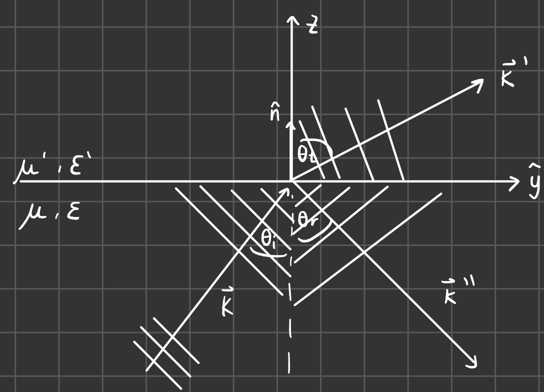
puede estar con la fase contraria x el cambio de signo.

2 regiones:

$$\vec{E}_I = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} + \vec{E}_0' e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

$$= \vec{E}_0 e^{ik_y y + ik_z z} e^{-i\omega t} + \vec{E}_0' e^{ik_y y - ik_z z} e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}_{II} = \vec{E}_0'' e^{ik_y' y + ik_z' z} e^{-i\omega t}$$



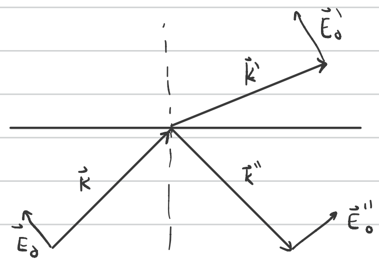
Por continuidad de $\vec{D} \rightarrow D(z=0)^{\perp} = D'(z=0)^{\perp}$

$$\Rightarrow \varepsilon(\vec{E}_0 \cancel{e^{ik_y y}} \cancel{e^{-i\omega t}} + \vec{E}_0' \cancel{e^{ik_y y}} \cancel{e^{-i\omega t}}) \cdot \hat{n}$$

$$= \varepsilon_0 \vec{E}_0'' \cancel{e^{-i\omega t}} \cancel{e^{ik_y' y}}$$

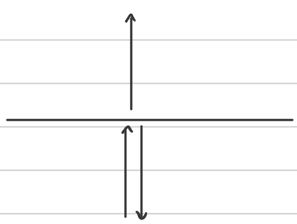
* pero $e^{ik_y y} = e^{ik_y' y}$ ⤻ cada función debe ser única
1 solo $\vec{E}$ en el espacio.

(II) $\vec{E} \parallel$ al plano de incidencia



$$\rightarrow \begin{cases} E_0' = \left(\dfrac{2 n n' \cos\theta_i}{\frac{\mu}{\mu'} (n')^2 \cos\theta_i + n\sqrt{(n')^2 - n^2 \sin^2\theta_i}} \right) E_0 \\ E_0'' = \left(\dfrac{\frac{\mu}{\mu'} (n')^2 \cos\theta_i - n\sqrt{(n')^2 - n^2 \sin^2\theta_i}}{\frac{\mu}{\mu'} (n')^2 \cos\theta_i + n\sqrt{(n')^2 - n^2 \sin^2\theta_i}} \right) E_0 \end{cases}$$

Si la onda llega en la dirección de la normal, no importa si $\vec{E}$ es $\parallel$ o $\perp$ al plano de incidencia.



$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{E'}{E_0} = \dfrac{2n}{n'+n} \\ \dfrac{E''}{E_0} = \dfrac{n'-n}{n'+n} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ tiene sentido ya que si no hay $\neq$ entre los medios, no hay onda reflejada.

caso II : $E_0'' = 0$ $\downarrow$ no hay onda reflejada , para $\theta_B = ?$ $\longrightarrow$ Aire $n=1$

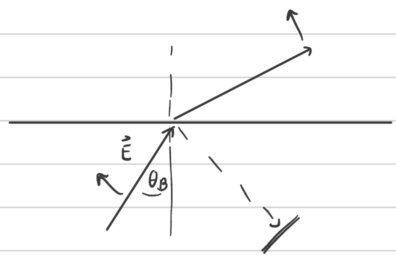
Vidrio $n=1,5$

$\theta_B \simeq 5,6°$

$$\rightarrow \sin^2\theta_B = \frac{1 - \left(\frac{n'}{n}\cdot\frac{\mu}{\mu'}\right)^2}{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - \left(\frac{n'}{n}\frac{\mu}{\mu'}\right)^2}$$

Ángulo de Brewster.

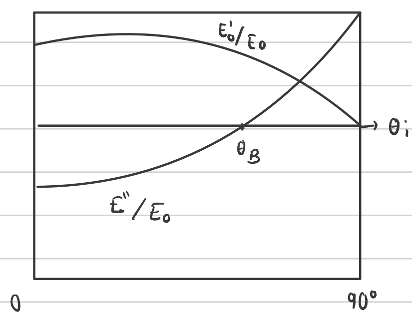
luz no polarizada



en θ_B
→ para la polarizaø ⊥ al plano es la que se refleja y la paralela la que se transmite.

para el caso (II):

cambio de fase. ←



Recordar: $\vec{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,|\vec{E}|^2\,\hat{k}$.

Intensidad: $I = \vec{S}\cdot\hat{n} = \vec{S}\cdot\hat{z}$

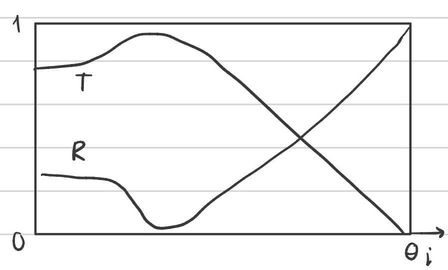
$I_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon v\,|\vec{E}_0|^2 \cos\theta_i$ → $v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ → vel. de la onda en el medio.

$I_r = \frac{1}{2}\,\varepsilon\, v\,|\vec{E}_0''| \cos\theta_t$

$I_t = \frac{1}{2}\,\varepsilon' v'\,|\vec{E}_0'| \cos\theta_t$

$T = I_t / I_I$

$R = I_r / I_i$



→ conservaø de energía.

Reflexión, refracción y transmisión.

26 · oct.

$$E_0'' = \left(\frac{\ldots \quad - n\sqrt{(n')^2 - n^2\sin^2\theta_i}}{\quad} \right)$$

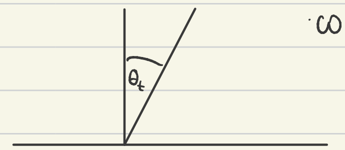
¿Qué pasa si la raíz se hace 0?

→ Recuerden:

$$\sin\theta_i = \frac{n'}{n}\sin\theta_t$$

$$\sqrt{\ldots} = \sqrt{(n')^2 - (n')^2\sin^2\theta_t}$$

$$= n'\cos(\theta_t)$$



· cos siempre positivo

↳ si θ_t es $\pi/2$ es 0 pero la raíz nunca va a ser imaginaria

· $\sin\theta_i = \left(\frac{n'}{n}\right)\sin\theta_t$ ← <1

restricción ← caso: $n > n'$

$\theta_t = \pi/2 \Rightarrow \left[\theta_i^0 = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right)\right]$

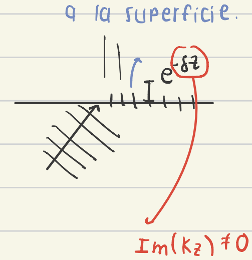
↓ caso crítico

⇓

componente k_z se vuelve imaginaria

↳ $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$ → decae exponencialmente

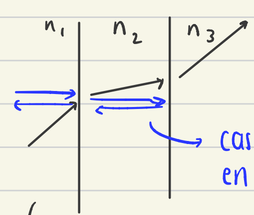
onda atrapada a la superficie.



$$\delta = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta_i - \sin^2\theta_i^0}}$$

~ cercano al caso del ángulo crítico.

casos propuestos.



· coef de transmisión?

caso preguntable en el control!

si o sí van a preguntar algo así.

$$\vec E_I = \vec E_0\, e^{i\vec k\cdot\vec r - i\omega t} + \vec E_0'\, e^{i\vec k'\cdot\vec r - i\omega t} \quad \longrightarrow \text{ se pueden calcular.}$$

onda que viaja a la derecha

3 regiones ←

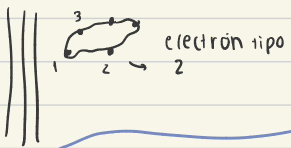
$$\vec E_{II} = \vec E_0'' \cdots + \vec E_0''' \cdots$$

↳ onda hacia la izquierda

$$\vec E_{III} = \vec E_0'''' \cdots$$

Dispersión

* le ponemos atención al medio.



$$m\left[\ddot{\vec r}_e + \underbrace{\gamma \dot{\vec r}_e}_{\text{roce}} + \underbrace{\omega_0^2\, \vec r_e}_{\text{frec. natural de oscilación del resorte}}\right] = \underbrace{-e\vec E(\vec r_0, t)}_{\text{externo}}$$

externo (electrón no le tira campo a sí mismo)

* despreciamos el $\vec B$ ya que debe estar moviéndose e en el inicio. si v es pequeño, $\vec B$ no es relevante

$$\vec E(\vec r_e, t) = \vec E_0\, e^{-i\omega t - i\cancel{\vec k\cdot\vec r_e(t)}}$$

0 ya que r_e es muy pequeño, si parte en el origen.

$$\vec r_e(t) = \vec r_0\, e^{-i\omega t}$$

sol. particular.

* sol. homogénea no interesa mucho ya que no es debido al forzado → solo entrega info del inicio.

$$\longrightarrow \quad m\left[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2\right]\vec r_0 = -e\vec E_0.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec P(t)}_{\text{momento dipolar}} = \vec P_0\, e^{-i\omega t} = \underbrace{-\vec r(t)\, e}_{\text{posición x su carga}} = -\vec r_0\, e^{i\omega t} e$$

$$\vec P_0 = -e\vec r_0 = \frac{e^2}{m}\frac{1}{[\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega]}\vec E_0 \quad \longrightarrow \text{ relacionado con la polarización.}$$

polarización: $\vec P = N \sum f_j\, \vec p_j$ — momento dipolar tipo j para el electrón (ω_j, γ_j)

N: nº de moléculas por unidad de volumen

f_j: # de electrones tipo j en la molécula.

total de e por molécula

$$Z = \sum_j f_j$$

parte temporal queda en el campo.

caso dinámico:

$$\vec{P} = \left[\frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega)} \right] \vec{E}$$

caso estático:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \longrightarrow \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \chi_e \vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

→ asumimos frec. pequeñas (cuasiestática).

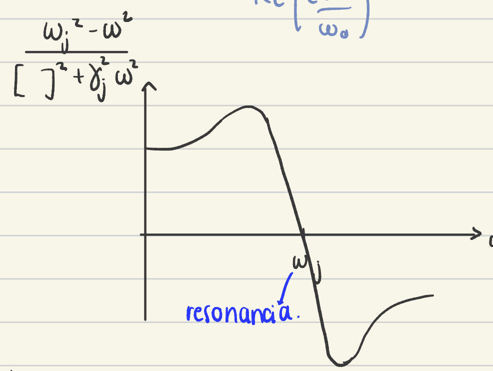
$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\omega_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

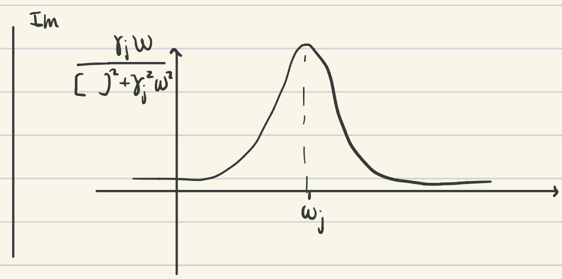
info. que depende de la onda

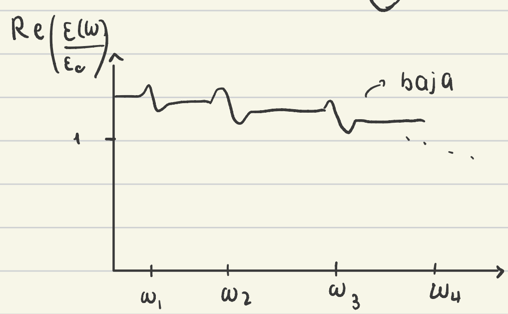
→ la frecuencia tiende a la frec. de la onda

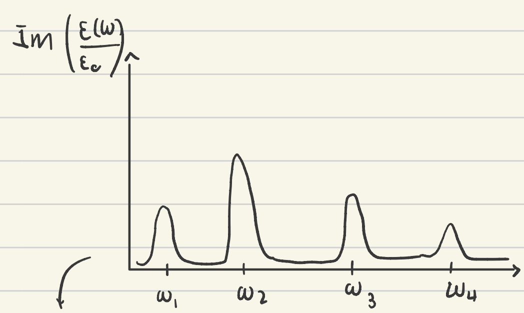
* mult. arriba y abajo por el complejo conjugado

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\omega_0} = 1 + \underbrace{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{[\omega_j^2 - \omega^2] + \gamma_j^2 \omega^2}}_{Re\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{\omega_0}\right)} + \underbrace{\frac{iNe^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j \gamma_j \omega}{[\omega_j^2 - \omega^2]^2 + \gamma_j^2 \omega^2}}_{Im\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}\right)}$$









distintas alturas según γ_j

$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2$ si $Im(\varepsilon) \neq 0 \Rightarrow Im(k) \neq 0$

$1/v^2$

$\Rightarrow k = \beta + i\frac{\alpha}{2}$ → reescribiendo k de una forma astuta.

coef. de absorción.

$$\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \mu Re(\varepsilon)\cdot\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} Re\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\cancel{2}\frac{\alpha}{\cancel{2}}\beta = \frac{\omega^2}{c^2} Im\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)$$

Asumamos $\alpha \ll \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{Im(\varepsilon)}{Re(\varepsilon)}\beta \\ \beta = \sqrt{Re\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}\frac{\omega}{c} \end{cases}$

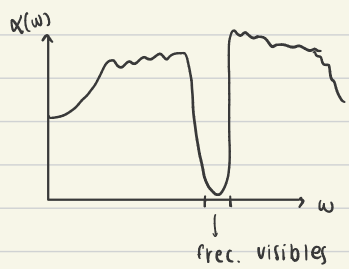
$$\vec{E} \propto e^{ikz - i\omega t} = e^{-\frac{\alpha}{2}z}\underbrace{e^{i(\beta z - \omega t)}}_{\text{onda habitual}}$$

onda decae

↓

imponer el mov. de electrones hace que la onda pierda energía.

$\delta^{-1} = \frac{\alpha}{2}$ → grosor de qué tan lejos puede llegar la luz.



→ agua de mar.

→ lo que más viaja x el agua es la luz visible.

RADIACIÓN

7. nov

$\Box \Psi = -4\pi f$ — fuentes

└ campos (cualquiera)

$$\psi^{(\pm)}(\vec{r},t) = \int dt' \int d^3r' \, G^{(\pm)}(\vec{r},t;\vec{r}',t')\, f(\vec{r}',t')$$

* + es retardado
  − es avanzado.

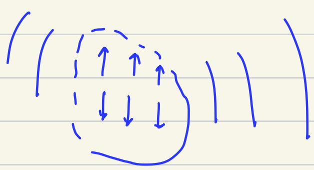
$$G^{(\pm)}(\dots) = \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\,\delta\left(t' - \left[t \mp \frac{1}{c}\|\vec{r}-\vec{r}'\|\right]\right)$$

si los bordes están muy lejos.

$$\psi = \cancel{\psi_{hom}} + \psi_{part.}$$

- sin fuente.
- se usa para imponer C.B.

· Transiente no nos preocupa.
└ ya está en todo el espacio la info.



→ El sólo hecho de que la fuente exista, hace que haya sol. particular.

nos quedamos con la soluø retardada
└ la informaø desde que emerge la fuente hacia el futuro.

$$\psi^{(+)}_{part}(\vec{r},t) = \int d^3r' \, \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\, \underbrace{f\left(\vec{r}', t - \frac{1}{c}\|\vec{r}-\vec{r}'\|\right)}_{[f(\vec{r}',t')]_{ret}}$$

ret → retardada.

$\nabla^2 \psi = f$

∞ funøes de Green →

$\to G^0$
$\to G^N$
$\vdots$
$\to G^x$

$G^x = G^{x'} + H$; t.q $\nabla^2 H = 0$ → H: sol. homogénea

$\nabla^2 G = \delta \dots$

* Podemos sumarle la homogénea a la retardada y nos da la avanzada.

no tocamos la variable r', sólo el argumento temporal

$$\boxed{\Psi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3r' \, [f(\vec{r}',t')]_{ret}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}} = \int d^3r' \left[\frac{f(\vec{r}',t')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right]_{ret.}$$

$\square \vec{A}(\vec{r},t) = \ \dots \vec{J}$

$\square \Phi(\vec{r},t) = \ \dots \rho + \dots \nabla\cdot\vec{J}$

Potenciales retardados $\longrightarrow$

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int d^3r' \dfrac{[\rho(\vec{r}',t')]_{Ret}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int d^3r' \dfrac{[\rho(\vec{r}',t')]_{ret}}{R} \\ \vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int d^3r' \dfrac{[\vec{J}(\vec{r}',t')]_{ret}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} = \dots \dfrac{1}{R} \end{cases}$$

$\cdot\ \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}'$, $\hat{R} = \dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$, $R = \|\vec{R}\|$

actúa sobre el espacio, no sobre el tiempo!

↳ la fuente es todo el objeto que actúa sobre r' pero al final se reemplaza la parte temporal.

$$\square\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(-\nabla\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\right)$$

$$\square\vec{B} = -\mu_0\,\nabla\times\vec{J}$$

(NO es $\rho(\vec{r}', t-[t'-\frac{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}{c}])$ xq no se deriva en t)

Soluciones retardadas:

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int d^3r' \dfrac{1}{R}\left[-\nabla'\rho(\vec{r}',t') - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{J}}{\partial t'}(\vec{r}',t')\right]_{Ret} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int d^3r' \dfrac{1}{R}\left[\nabla'\times\vec{J}(\vec{r}',t')\right]_{Ret}. \end{cases}$$

Cuidado:

$$\nabla[f]_{Ret} \neq [\nabla^2 f]_{Ret}.$$

Sin embargo:

$$[\nabla'\rho]_{Ret} = \underbrace{\nabla'[\rho]_{ret}}_{\nabla'\rho(\vec{r}',\, t-\frac{1}{c}\|\vec{r}-\vec{r}'\|)} - \frac{\partial\rho}{\partial t'}\cdot\nabla'\left(t - \frac{1}{c}\|\vec{r}-\vec{r}'\|\right)$$

actúa sobre ambos.

restamos cuando actúa sobre el tiempo (regla de la cadena).

NABLA YA NO ESTÁ ATRAPADO (PODEMOS DEJARLO LIBRE) $\leftarrow$

$$\boxed{[\nabla'\rho]_{Ret} = \nabla'[\rho]_{ret} - \frac{\hat{R}}{c}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t'}\right]_{ret}} \longrightarrow [\nabla' \times \vec{J}]_{Ret} = \nabla' \times [\vec{J}]_{Ret} + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'}\right]_{Ret} \times \hat{R}$$

ECS. DE JEFIMENKO

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \left\{ \underbrace{\frac{\hat{R}}{R^2}[\rho]_{Ret} + \frac{\hat{R}}{cR}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t'}\right]_{Ret}} - \frac{1}{c^2R}\left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'}\right]_{Ret} \right\}$$

$$\underbrace{-\frac{\nabla'[\rho]_{Ret}}{R}} + \frac{\hat{R}}{Rc}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]_{Ret}$$

$$-\int \frac{\nabla'[\rho]_{Ret}}{R} = \cancel{\int -\nabla'\left[\frac{\rho}{R}\right]} + \int \rho \nabla\left[\frac{1}{R}\right]$$

en la superficie (se va a 0)
↪ xq es una integral de superficie (Gauss).

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left\{ [\vec{J}]_{Ret} \times \frac{\hat{R}}{R^2} + \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t'}\right]_{Ret} \times \frac{\hat{R}}{cR} \right\}$$

Notar: $\left[\frac{\partial f}{\partial t'}(r',t')\right]_{Ret}$ v/s $\frac{\partial}{\partial t}\left[f(\vec{r}',t')\right]_{Ret} = \frac{\partial}{\partial t}\left[f(r, \underbrace{t - \tfrac{1}{c}\|\vec{r}-\vec{r}'\|}_{t'})\right]$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t'} f(\vec{r}',t') \cdot \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_{1}\right)\Bigg|_{t' = t - \frac{1}{c}\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$

$$= \left(\frac{\partial f(\vec{r},t')}{\partial t'}\right)\Bigg|_{t' = t - \frac{1}{c}\|\vec{r}-\vec{r}'\|}.$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial t'}\right]_{Ret}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \left\{ \frac{\hat{R}}{R^2}[\rho]_{Ret} + \frac{\hat{R}}{cR}\frac{\partial}{\partial t}[\rho]_{Ret} - \frac{1}{c^2R}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{J}]_{Ret} \right\}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \left\{ [\vec{J}]_{Ret} \times \frac{\hat{R}}{R^2} + \frac{\partial}{\partial t}[\vec{J}]_{Ret} \times \frac{\hat{R}}{cR} \right\}$$

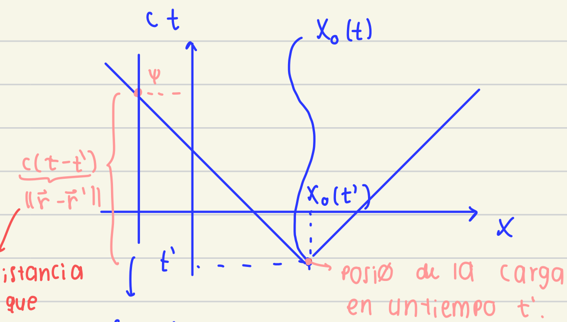
CASO PARTICULAR: CARGA PUNTUAL

en el volumen.

$$\rho(\vec{r}, t') = q\, \delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{r}_o(t'))$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t') = \rho(\vec{r}\,', t')\, \vec{v}_o(t')$$

$$\vec{v}_o(t') = \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_o(t')$$



la distancia a la que estamos de la carga en ese momento. → en tiempo t'

somos nosotros esperando que la señal de la carga llegue

Jefimenko para carga puntual:

Nos enfocamos en el 1° término.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r \left\{ \frac{\hat{R}}{R^2}\, q \left[\delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{r}_o(t'))\right]_{Ret} + \dots \right.$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \left\{ \frac{\hat{R}}{R^2}\, q\, \delta^{(3)}\Big(\underbrace{\vec{r}\,' - \vec{r}_o\big(t - \tfrac{1}{c}\overbrace{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}^{R}\big)}_{\neq 0}\Big) + \dots \right.$$

$\neq 0$ cuando $\vec{r}\,' = \vec{r}_o\big(\underbrace{t - \frac{1}{c}\overbrace{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}^{R}}_{t'}\big)$

- $\vec{r}\,' = \vec{r}_o(t')$

$$\boxed{t' = t - \frac{1}{c}\|\vec{r} - \vec{r}_o(t')\|}$$

ecuación para t'

↳ cuál es el valor de t' dada una cierta distancia entre nosotros y la partícula.

tiempo retardado.

$\Rightarrow$ $t' = t'(t)$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\hat{R}}{R^2}\right]_{Ret} + \dots$$

↳ reemplazar fuera de la integral c/ un tiempo retardado.

repasar!

$$\left([R]_{Ret} = \|\vec{r} - \vec{r}_o(t'(t))\| \right)$$

9-nov.

$\frac{\partial}{\partial t'}[\rho]_{Ret}$

por la delta se tiene una relaØ entre t y t'.

$\frac{\partial}{\partial t'}[\rho]_{Ret} = \frac{\partial t}{\partial t'}\cdot\frac{\partial}{\partial t}[\rho]_{Ret}$

$= \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}(q\,\delta(\dots))$

$\int d^3\vec{r}\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\,\text{\%}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta(\dots))$

$= \int d^3\vec{r}'\frac{\partial}{\partial t}[\;\;]$

$- \int d^3r'\,\delta(\dots)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\,\text{\%}\right)$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\left\{\frac{\hat{R}}{R^2}[\rho]_{Ret} + \frac{\hat{R}}{cR}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t'}\right]_{Ret} - \frac{1}{c^2R}\left[\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\right]_{Ret}\right\}$$

Part. puntual: $\rho(\vec{r}, t') = q\,\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(t'))$

conocida

$\vec{v}_0(t') = \frac{d}{dt}\vec{r}_0(t')$

$$[\rho]_{Ret} = q\,\delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_0\left(t - \tfrac{1}{c}\|\vec{r}-\vec{r}'\|\right)\right)$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{r}' = r_0\left(t - \tfrac{1}{c}\|\vec{r}-\vec{r}'\|\right)}$

$\vec{r}' = \vec{r}_0(t')$

$\boxed{t' = t - \frac{1}{c}\|\vec{r} - \vec{r}_0(t')\|}$ → si resolvemos para t'

$t'(t)$

$\Rightarrow$ se cumple la de $\vec{r}'$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{\hat{R}}{R^2}\right]_{Ret.} + \dots\right.$$

$I \sim |E|^2 \sim \frac{1}{R^2}$

para compensar el área de una esfera.

Energía total es conservada

Fuera de la integral:

$R = \|\vec{r}-\vec{r}'\| \rightsquigarrow [R]_{Ret} = \|\vec{r} - \vec{r}_0(t'(t))\|$

$[f(t')]_{Ret} = f(t'(t))$

$\frac{1}{c}\frac{\hat{R}}{R}\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{K}}_{\propto\dot{q}} = \frac{q}{cR}$

$\left(\frac{\vec{q}}{R}\right) \to \infty$

$\left\|\frac{\vec{v}}{c}\right\| \ll 1$

Resultado:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\overbrace{\left[\frac{\hat{R}(\vec{r},t)}{K R^2}\right]_{Ret}}^{\frac{1}{R}} + \overbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\hat{R}}{K R}\right]_{Ret}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\hat{v}}{K R}\right]_{Ret}\right\}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left\{\left[\frac{\vec{v}\times\vec{R}}{K R^2}\right]_{Ret} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\vec{v}\times\vec{R}}{K R}\right]_{Ret}\right\}$$

$K = 1 - v_0(t')\frac{\hat{R}}{c}$

después de la instrucØ hay que reemplazarlo en $t'(t)$

$[K]_{Ret} = 1 - \vec{v}_0(t'(t))\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0(t'(t))}{\|\vec{r}-\vec{r}_0(t'(t))\|}$ ↳ factor de dopler

$\frac{\partial t}{\partial t'} = ?$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(t - \frac{1}{c}\|\vec{r}-\vec{r}_0(t')\|\right) = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\|\vec{r}-\vec{r}_0(t')\|}_{R} = 1 + \frac{1}{c}\frac{1}{R}\vec{R}\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_0(t')}$$

↳ $\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_0(t'(t))$

$$= 1 + \frac{1}{c}\hat{R}\cdot\vec{v}(t'(t))\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t}\underbrace{\left(1-\frac{\hat{R}}{c}\cdot\vec{v}\right)}_{K} = 1 \longrightarrow \boxed{\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{K}}$$

FEYNMAN:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{\hat{R}}{R^2}\right]_{Ret} + \frac{[R]_{Ret}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\hat{R}}{R^2}\right]_{Ret} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\hat{R}]_{Ret.}\right\}$$

Hay que trabajar las expresiones anteriores

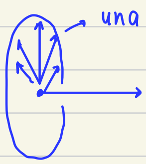
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi}\left\{\left[\frac{\vec{v}\times\hat{R}}{K^2 R}\right]_{Ret} + \frac{1}{c[R]_{Ret}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\vec{v}\times\vec{R}}{K}\right]_{Ret}\right\}$$

GRIFFITHS: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{a}(t) = 0 \rightsquigarrow \vec{r}_0(t) = t\vec{v}_0$

$$[R]_{Ret} = \left[\|\vec{r} - t'\vec{v}_0\|\right]_{Ret} = \|\vec{r} - t'(t)\vec{v}_0\| \qquad t' = t - \frac{1}{c}\|\vec{r} - t'\vec{v}_0\|$$

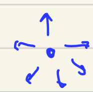
$$\frac{1}{c}\|\vec{r} - t'\vec{v}_0\| = t - t'$$

$$x^2 + y^2 + (z - t'v_0)^2 = c^2(t-t')^2.$$



una elipsoide → campo eléctrico es menos intenso en la direcc̸ que se mueve la partícula

$$F^{part}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x' & E_y' & E_z' \\ -E_x' & 0 & 0 & 0 \\ -E_y' & 0 & 0 & 0 \\ -E_z' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{part en reposo.}$$



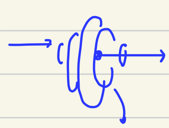
campo esférica# simétrico.

$$F^{lab}_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu'}_{\ \mu}\Lambda^{\nu'}_{\ \nu} F^{Part.}_{\mu'\nu'}$$

campo eléctrico — se achata por la contracc̸ de Lorentz.

$$\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ - & 0 & B_z & -B_x \\ \cdot & & 0 & B_y \\ \cdot & & & 0 \end{pmatrix}$$

sólo en el sistema en el cual uno ve a una partícula moverse.



anillos que decaen.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{K}\right]_{Ret} = \frac{1}{K^3}\frac{\hat{R}\cdot\vec{a}}{c} + \underbrace{\dots}_{\Theta(1/R)}$$

donde:

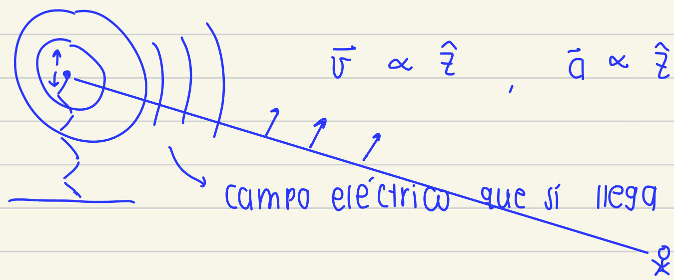
$\vec{u} \equiv c\hat{R} - \vec{v}$

$K = \frac{\hat{R}\cdot\vec{u}}{c}$

la define el término que decae más lentamente

$$\boxed{\vec{E}_{Rad}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(\hat{R}\cdot\vec{u})^3}\frac{1}{R}\cdot\hat{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})}$$

$\hat{R}\times(c\hat{R}\times\vec{a})$

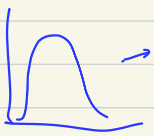


$\vec{v} \propto \hat{z}$, $\vec{a} \propto \hat{z}$

campo eléctrico que sí llega lejos.

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}(t')$.

cuerpo caliente



espectro del cuerpo negro

$$\boxed{\vec{B}_{rad} = \frac{1}{c}\hat{R}\times\vec{E}_{Rad}}$$

$$\vec{S}_{Rad} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_{Rad}\times\vec{B}_{Rad}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}\left[\vec{E}_{Rad}\times(\hat{R}\times\vec{E}_{Rad})\right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}\left[\vec{E}^2_{Rad}\hat{R} - \underbrace{(\hat{R}\cdot\vec{E}_{Rad})}_{0}\vec{E}_{Rad}\right] = \frac{1}{\mu_0 c}\hat{R}\,\vec{E}^2_{Rad}$$

$\vec{E}\perp\hat{R}$

se ajusta a la noción de onda plana.

POTENCIA

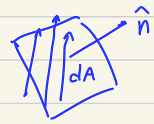
$$\boxed{dP = \vec{S} \cdot d\vec{A}}$$

w por unidad de t

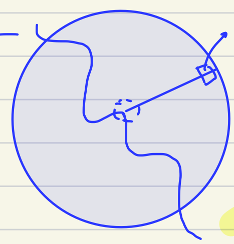
$\frac{\text{Energía}}{\text{tiempo} \cdot \text{área}}$.

↓

Para calcular la energía producto de la radiación.



$d\vec{A} = \hat{n}\, dA$



$dA = R^2 d\Omega$

R: distancia que se propaga la señal después de que fue emitido.

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \hat{R} \cdot \vec{S} = \frac{R^2}{\mu_0 c} E_{Rad}^2}$$

partícula se mueve y pasa por el origen

↓

1° caso → $v = 0$
$a \neq 0$

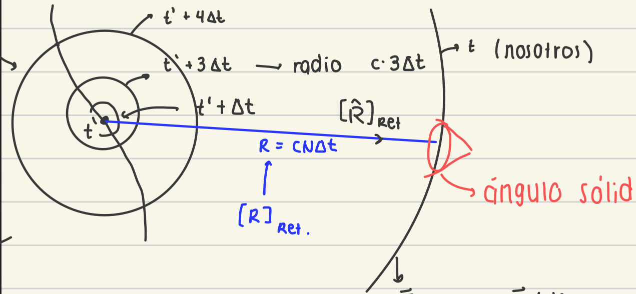
2° caso → $v \neq 0$
↓
doppler.

14 · nov

Partícula acelera $\Rightarrow$ genera radiación

Esfera es el cono de luz. Part. está siempre dentro de la esfera (no puede viajar + rápido que la luz

Sólo emite 1 señal en t'



→ En el espacio tridimensional (no espacio tiempo)

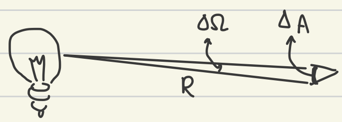
$$\vec{E}_{Rad} \sim \frac{\vec{a}(t')}{[R]_{Rad}}$$

$$\vec{S}_{Rad} = \frac{\hat{R}}{\mu_0 c} \vec{E}_{Rad}^{\,2}$$

Potencia por unidad de ángulo sólido. (geométrico).

$$\frac{dP}{d\Omega} = \vec{S}_{Rad} \cdot \hat{R} R^2$$

\#



$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{R^2}$$

$$\boxed{\# \frac{\Delta A}{R^2} \cdot \Delta t = E}$$

energía total que recibió el ojo.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{R^2 E_{Rad}^2}{\mu_0 c}$$

Asumimos

$\vec{v}(t') = 0$

$\vec{a}(t') \neq 0$

ya que sino no podría haber radiación

$\vec{v}(t') = 0 \Rightarrow \vec{u} = c\vec{R}$

$$\vec{E}_{Rad} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{R} \hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{a})$$

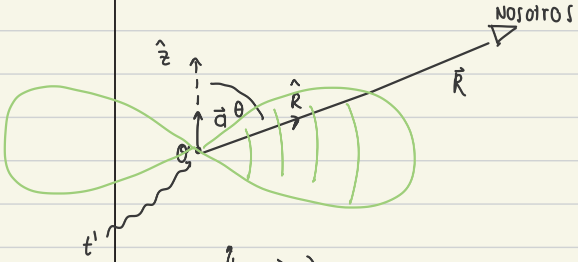
$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi R}\left[(\hat{R} \cdot \vec{a}) \hat{R} - \vec{a} \right]$$

* $R = R_{rad}$

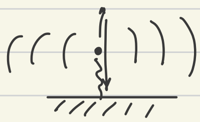
→ todo reemplazado en t'.

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$\vec S_{Rad} = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{\mu_0 q}{4\pi R}\right)^2 \overbrace{\left[\vec a^{\,2} - \underbrace{(\hat R\cdot a)^2}_{\vec a^{\,2}\cos^2\theta}\right]}^{\vec a^{\,2}\operatorname{sen}^2\theta} \hat R \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec S_{Rad} = \frac{\mu_0 q^2 \vec a^{\,2}}{16\cdot\pi c}\left(\frac{\sin^2\theta}{R^2}\right)\hat R}$$



la Radiaø es hacia los costados. → la energía se pierde hacia allá.



→ permite reconstruir cómo las partículas están siendo aceleradas.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 \vec a^{\,2}}{16\pi^2 c}\cdot\sin^2\theta$$

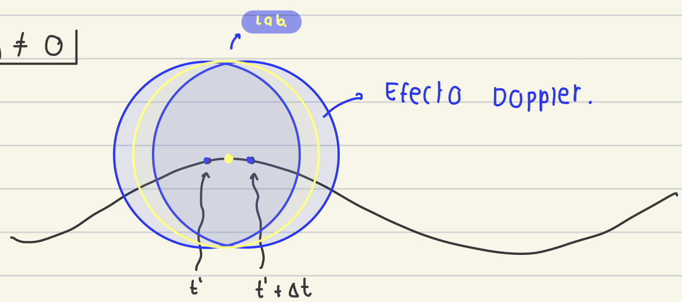
$$\vec a^{\,2} = \vec a\cdot\vec a$$

$$\rightarrow P = \oint d\Omega\,\frac{dP}{d\Omega} = \boxed{\frac{\mu_0 q^2 \vec a^{\,2}}{6\pi c} = P}$$

Larmor. → centrada en la partícula

Energía total radiada por unidad de tiempo.

$\boxed{\vec v(t') \neq 0}$



Efecto Doppler.

Física moderna:

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{lab} = \underbrace{\left(1 - \frac{\hat R\cdot\vec v}{c}\right)}_{} \left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{mov.}$$

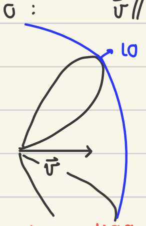
$$\frac{1}{K} = \frac{\hat R}{c}\cdot\vec u$$

$$\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{lab} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\,\frac{\|\hat R\times(\vec u\times\vec a)\|^2}{(\hat R\cdot\vec u)^5} \xrightarrow{\text{Integrando}} \boxed{P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c}\left(\vec a^{\,2} - \left\|\frac{\vec v\times\vec a}{c}\right\|^2\right)}$$

Lionard
↓
Resultado Relativista.

factor de Lorentz. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Ejemplo : $\vec{v} \parallel \vec{a}$



lo que nosotros vamos a medir.

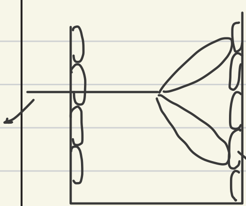
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \, q^2 \vec{a}^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^5}$$

BREMSSTRAHLUNG.

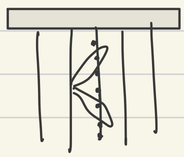
* la $\vec{a}$ puede estar hacia atrás o adelante (acelerando o desacelerando)

la radiaø depende del signo sólo de la velocidad (no de la aceleraø).

Rayo cósmico



detectores



Jueves: $\frac{dP}{d\Omega} \propto \sin^2\theta$

FUENTES OSCILANTES:

· ρ y $\vec{J}$ pueden ser complejos

$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$ → 1 sola frecuencia. Para 1 solo modo de radiación.

$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$

es factorizable ←

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \int dt' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}')\, e^{-i\omega t'}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\, \delta\left(t' - t + \frac{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}{c}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\, e^{-i\omega t}\, e^{+i\frac{\omega}{c}\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$

$\frac{\omega}{c} \to k$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \vec{J}(\vec{r}')\, \frac{e^{ik\|\vec{r}-\vec{r}'\|}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}\right)}_{\vec{A}(\vec{r})} e^{-i\omega t}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \underbrace{\vec{A}(\vec{r})}_{\text{puede ser complejo}}\, e^{-i\omega t}$$

puede depender del espacio.

se tiene que cumplir:

$\dot{\rho} + \nabla\cdot\vec{J} = 0$

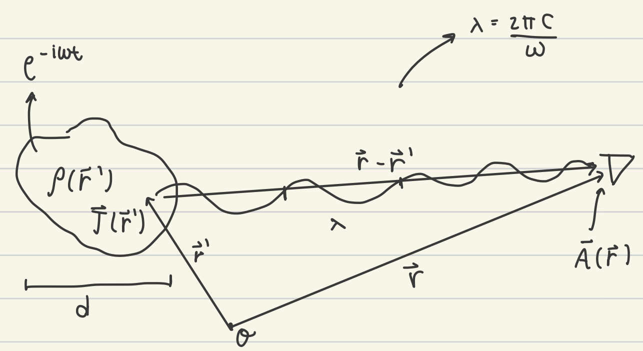
$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$

$\left(\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\right)$

$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\nabla\times\vec{H}$ → Maxwell. $\left(\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}.\right)$ → factorizados.

SITUACIÓN: (d, λ, r).

oscila ←



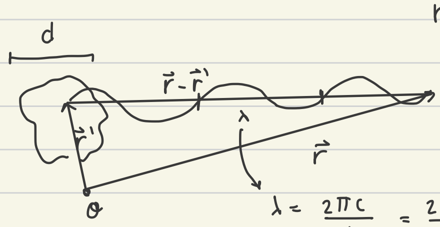
$\|\vec{r}-\vec{r}'\| \approx \|\vec{r}\| = r$

3 regímenes de interés:

* $d \ll r \ll \lambda$ → zona cercana
  $d \ll r \sim \lambda$ → zona intermedia
  $d \ll \lambda \ll r$. → zona lejana (zona de radiación).

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\; \vec{J}(\vec{r}\,')\; \frac{e^{ik\|\vec r - \vec r\,'\|}}{\|\vec r - \vec r\,'\|}$$

$$\left(\vec A(\vec r,t) = \vec A(\vec r)\, e^{-i\omega t}\right)$$

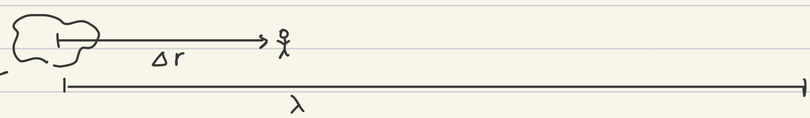


$r = \|\vec r\| \sim d$ → pequeño

$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$

ZONA CERCANA: $r \ll \lambda$ ⟶ cargas varían lentamente → λ largas.

movimientos que uno percibe



de algo apreciable a esta escala

$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \implies \frac{\Delta r}{\Delta t} \ll \frac{\lambda}{\Delta t} \implies v \ll \frac{\lambda}{\Delta t} = \frac{2\pi c}{\omega \Delta t}$. $\frac{v}{c} \ll \frac{2\pi}{\omega\Delta t} = \frac{T}{\Delta t}$ → puede ser $\ll 1$.

. $e^{ik\|\vec r - \vec r\,'\|} \sim e^{ir/\lambda} \simeq 1 + ik\|\vec r - \vec r\,'\| + \dots$ ($k \to \frac{1}{\lambda}$, $\|\vec r - \vec r\,'\| \to r$)

Potencial para el caso estático (límite cuasiestático).

$$\Rightarrow \vec A(\vec r) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \frac{\vec J(\vec r\,')}{\|\vec r - \vec r\,'\|}}_{\text{Magnetoestática.}}\left(1 + \dots\right)$$

⟶ mov. de las cargas es lento comparado con los mov. del observador.

requerimos $d \ll \lambda$

ZONA LEJANA : $\underset{r}{r} \gg \underset{1/k}{\lambda} \gg \underset{r'}{d}$

Taylor $\leftarrow$ $\|\vec{r} - \vec{r}\,'\| \simeq \|\vec{r}\| - \hat{r}\cdot\vec{r}\,' + \mathcal{O}\left(\frac{(r')^2}{r}\right)$

$$\cdot\ \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\,e^{ikr}\,e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}}{r\left(1 - \cancel{\frac{\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}{r}}\right)} \sim \frac{d}{\lambda} \ll 1$$

$\frac{d}{r} \ll 1$

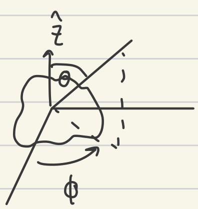
$\frac{1}{1 - \frac{\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}{r}} \simeq 1$

$\Downarrow$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\int d^3r'\,\vec{J}(\vec{r}\,')\,e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}}_{\vec{f}(\theta,\phi).}$$

$\hat{r} = \hat{r}(\theta,\phi)$

· Si la corriente está confinada
$\rightarrow \int d^3r'\,\vec{J}(\vec{r}\,') = 0$
por la ec. de continuidad. (no hay que sacar la exponencial).



$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{f}(\theta,\phi)}$$

---

para $\vec{B}$ $\leftarrow$

$$\underbrace{\nabla\times\vec{A}}_{\vec{B}} = \hat{\theta}\left[\underbrace{-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)}_{\sim 1/r} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_r)}}_{\sim \cancel{1/r^2}}\right]$$

no modifica el $1/r$

lo despreciamos.

(por la exp)

$$+ \frac{\hat{\phi}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) + \cancel{}\right] \quad \cancel{1/r^2}$$

$$+ \hat{r}\,\underbrace{\left[\cancel{\ \cdot\ \cdot\ }\right]}_{1/r^2}$$

$$= \hat{\theta}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}e^{ikr}f_\phi\right)\right] + \frac{\hat{\phi}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}e^{ikr}f_\theta\right)\right]$$

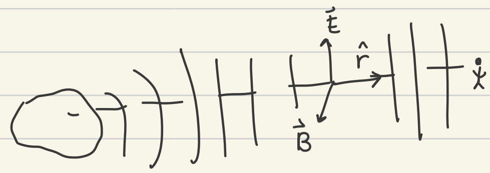
$$= ik\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left[-f_\phi\hat{\theta} + f_\theta\hat{\phi}\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Para $\vec{E}$ ⟵

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \frac{k^2\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left[f_\theta\hat{\theta} + f_\phi\hat{\phi}\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

* campo magnético decae como $1/r$ → campo de radio.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \vec{B}\cdot\hat{r} = 0 \\ \vec{E}\cdot\hat{r} = 0 \\ \vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \end{cases}$$



ondas planas (muy lejos).

$$e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'} = \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!}(\hat{r}\cdot\vec{r}\,')^n$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\sum_n \frac{(-ikr)^n}{n!}\int d^3r'\,\vec{J}(\vec{r}\,')\left(\frac{\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}{r}\right)^n}_{(kr)^n\cdot\left(\frac{d}{r}\right)^n \sim (k\cdot d)^n \ll 1.}$$

Primer momento:

$n=0$

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{J}(\vec{r}\,') = -i\frac{\mu_0\omega}{4\pi}\vec{p}\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

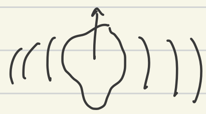
$\dot{\rho} + \nabla\cdot\vec{J} = 0$
↓
no se cumple $\nabla\cdot\vec{J}$ ya que $\dot{\rho}\neq 0$ xq se mueven las cargas.

$$\int d^3r'\,\vec{J}(\vec{r}\,') = -\int d^3r'\left[\vec{r}\,'\underbrace{(\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r}\,'))}_{-\dot{\rho}}\right] = \int d^3r'\left[\vec{r}\,'\underbrace{\dot{\rho}}_{-i\omega\rho}\right] = -i\omega\underbrace{\int d^3r'\,\vec{r}\,'\rho}_{\vec{p}\ \to\ \text{dipolo}} = -i\omega\vec{p}$$

Dipolo:

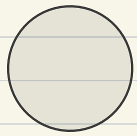
$\vec{p}(t) = \vec{p}\, e^{-i\omega t}$

cambia en el tiempo



→ radía perpendicular al dipolo.

* como el 1° término de la suma es dipolo, no hay uno anterior que sea un monopolo.



→ no radía si se expande y se contrae (esfera no es capaz de radiar x simetría esférica)

→ NO hay un lugar preferente donde radiar.

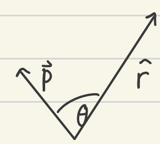
* ondas electromagnéticas → necesita un dipolo

* " gravitacionales → " " cuadripolo.

calculemos $\vec{E}$ y $\vec{H}$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{H} = \dfrac{ck^2}{4\pi}(\hat{r}\times\vec{p})\dfrac{e^{ikr}}{r} \sim \dfrac{1}{r} \text{ (radiac)} \\ \\ \vec{E} = Z_0\, \vec{H}\times\vec{r} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \end{cases}$$

Poynting: $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*$



$$\frac{dP}{d\Omega} = Re\left[\frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\hat{r}\, r^2\right]$$

$$= \frac{c^2 Z_0 k^4}{32\pi^2}\left\|(\vec{r}\times\vec{p})\times\hat{r}\right\|^2$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \underbrace{\frac{c^2 Z_0 k^2}{32\pi^2}}\, p^2 \sin^2\theta$$

config. dipolar ofrece dep. en θ , es como la carga puntual cuando oscilaba.

$\int d\phi\, d\theta \sin\theta \frac{\partial P}{\partial\Omega}$.

$$P = \frac{c^2 Z_0 k^4 p^2}{12\pi}$$

$\boxed{n=1}$

cuadripolar ←

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\, \vec J(\vec r')\,(\hat r\cdot\vec r')\cdot(-ikr)$$

$$(\hat r\cdot\vec r')\cdot\vec J(\vec r') = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(\hat r\cdot\vec r')\,\vec J(\vec r') + \big(\hat r\cdot\vec J(\vec r')\big)\,\vec r'}_{\int \nabla\cdot\vec J(\vec r\cdot\vec r').}\Big] + \frac{1}{2}\underbrace{\big(\vec r'\times\vec J(\vec r')\big)}_{\vec M(\vec r')}\times\hat r$$

dipolo magnético: $\vec m = \int d^3r'\, \vec M(\vec r')$.

$$\int d^3r'\, \vec J(\vec r')\,(\hat r\cdot\vec r') = \hat m\times\hat r \;-\; \frac{i\omega}{2}\underbrace{\int d^3r'\, \vec r'\,(\hat r\cdot\vec r')\,\rho(\vec r')}_{Q_{ij}}$$

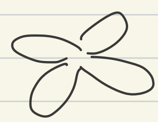
$$\cdot\ \vec A_1(\vec r) = \vec A_{\vec m} + \vec A_{\vec Q}$$

$$\to \vec A_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\vec m\times\vec r}_{\hat p}$$

$(((\uparrow\vec p)))$

$\uparrow\vec m$

cuadripolo.



21·nov.

Última clase: $n=0$ ✓, $n=1$?

(del mismo orden)

Parte espacial del potencial vectorial. ←

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_m(\vec{r}) + \vec{A}_{\overleftrightarrow{Q}}(\vec{r})$$

momento magnetico — cuadripolar

$$\left[\ \vec{m} \equiv \int d^3r'\, \vec{M}(\vec{r}') \quad \& \quad \vec{M}(\vec{r}') = \frac{1}{2}\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \right)$$

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = -ik\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,\vec{m}\times\vec{r}$$

$$\vec{A}_Q(\vec{r}) = \frac{-\omega}{2}k\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{r}'\,(\hat{r}\cdot\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')$$

Recordar:

$$Q_{ij} = \int d^3r'\,\rho(r')\left(3r_i'r_j' - (r')^2\delta_{ij}\right)$$

Definamos:

$$Q_i(\hat{r}) \rightsquigarrow \vec{Q}(\hat{r})$$

* potencial vectorial no es observable ya que depende del Gauge.

↓

pero si lo es $\vec{E}$ y $\vec{B}$

$$Q_i(\hat{r}) = \sum_j Q_{ij}\hat{r}_j$$

$\hat{r}\times\hat{r}=0.$

$$= 3\int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\,r_i'\,(\hat{r}\cdot\vec{r}') - \hat{r}_i\int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\,(r')^2$$

· $\vec{A}$ no es observable $\left(\vec{H} = \frac{ik}{\mu_0}(\hat{r}\times\vec{A})\right)$

$$\hat{r}\times\vec{A} =$$

Calculemos $\frac{1}{3}\vec{r}\times\vec{Q} = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\,(\hat{r}\times\vec{r}')(\hat{r}\cdot\vec{r}')$

$$\vec{r}\times\vec{A} = \frac{-i\omega k}{2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\int d^3r'\,\vec{r}\times\vec{r}'\,(\hat{r}\cdot\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')}_{\frac{1}{3}\vec{r}\times\vec{Q}}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{-ick^3}{24\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\,\hat{r}\times\vec{Q}(\hat{r})}$$

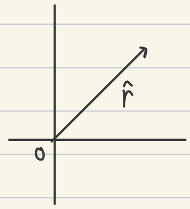
$$\vec{E} = \frac{ikZ_0}{\mu_0} (\hat{r} \times \vec{A}) \times \hat{r}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0 k^6}{1152\,\pi^2} \left\| (\hat{r} \times \vec{Q}) \times \hat{r} \right\|^2$$

$$\left\| (\hat{r} \times \vec{Q}) \times \hat{r} \right\|^2 = \vec{Q}^* \cdot \vec{Q} - \left\| \hat{r} \cdot \vec{Q} \right\|^2$$

$$\hat{r} \cdot \vec{Q} = \hat{r}^t Q \hat{r} = \hat{r}_i Q_{ij} \hat{r}_j$$

$$= \sum_{ijk} \hat{r}_i Q^*_{ij} Q_{jk} \hat{r}_k - \sum_{ijkl} \hat{r}_i \hat{r}_j \hat{r}_k \hat{r}_l Q^*_{ij} Q_{kl}$$



$$\int d\Omega\, \hat{r} = \int d\theta\, d\phi \sin\theta (\hat{r})$$

$(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z})$

$= 0.$

↳ se suma en toda la esfera y los contrarios se cancelan.

Necesitamos:

$$\int d\Omega\, \hat{r}_i \hat{r}_j = \#\, \delta_{ij}. \qquad \# = ?$$

$\# = 4\pi/3$

traza

$$\int d\Omega\, \delta^{ij} \underbrace{\hat{r}_i \hat{r}_j}_{\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{1}} = \#\, \underbrace{\delta^{ij}\delta_{ij}}_{3}.$$

$$\rightarrow \# = \frac{1}{3} \int d\Omega.$$

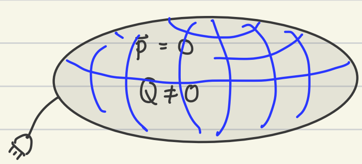
$$\boxed{\# = \frac{4\pi}{3}}$$

$$\int d\Omega\, \hat{r}_i \hat{r}_j \hat{r}_k \hat{r}_l = \frac{4\pi}{15} \left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \right)$$

se puede calcular la traza y obtener el $4\pi/15$.

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{c^2 Z_0 k^6}{1440\,\pi} \sum_{ij} |Q_{ij}|^2$$

Ej



$\times\, e^{-i\omega t}$

* una esfera perfecta no radía

$$\rightarrow Q_{ij} = Q_0 \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- matriz que describe la config cuadripolar
- no tiene traza. (Q no debe tener) (el monopolo es lo único proporcional a la integral de ρ).

$$Q_0 = \frac{-2}{5} q (b^2 - a^2)$$

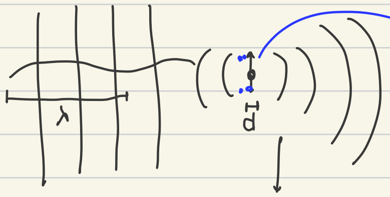
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0 k^6}{512 \pi^2} Q_0 \sin^2\theta \cos^2\theta$$

* para un dipolo se necesita un desbalance, no para el cuadripolo.

$\oplus$

$\ominus$

scatering



una forma de verlo: $\vec{p}\, e^{-i\omega t}$

la cantidad de radiación dispersada por el electrón.

$\cdot\ \lambda >> d$

→ sol no polarizado

polarizada ←

$$\vec{E}_{inc} = \vec{\varepsilon}_0 E_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot}$$

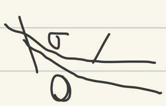
$$\vec{H}_{inc} = \frac{\vec{k}_0 \times \vec{E}_{inc}}{Z_0}$$

$$\vec{E}_{sc} = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left[(\hat{k} \times \vec{p}) \times \hat{k} - \hat{k} \times \frac{\vec{m}}{c} \right]$$

→ olvidando el cuadripolo

$$\vec{H}_{sc} = \hat{k} \times \frac{\vec{E}_{sc}}{Z_0}$$

área que le asignamos — sección (diferencial) eficaz de scattering $\quad \sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$



parámetro control.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{k}, \vec{\varepsilon}, \hat{k}_0, \vec{\varepsilon}_0) = \frac{r^2 \frac{1}{2Z_0} \| \vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{E}_{sc} \|^2}{\frac{1}{2Z_0} \| \vec{\varepsilon}_0^* \cdot \vec{E}_{inc} \|^2}$$

con la cual decidimos medir.

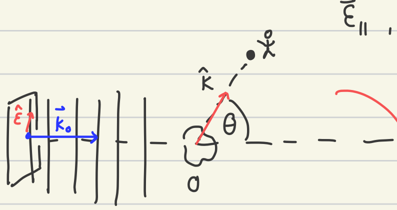
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \doteq \frac{\text{Potencia scatteriada hacia una unidad de ángulo sólido } \Omega}{\text{Potencia incidente por unidad de área}}$$

$$= \frac{\overset{d\Omega}{r^2 \hat{r}} \cdot \vec{S}_{rad}}{\|\vec{S}_{inc}\|}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\varepsilon_0 E_0^2)} \left\| \vec{\varepsilon}^{\,*} \cdot \vec{p} + (\hat{k} \times \vec{\varepsilon}^{\,*}) \cdot \frac{\vec{m}}{c} \right\|^2$$

23 · nov.

· plano de scattering: pizarra



$\vec{\varepsilon}_{\parallel}\ ,\ \vec{\varepsilon}_{\perp}$ → 2 opciones de la polarizaø.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 \|\vec{\varepsilon}^{\,*}\cdot \vec{E}_{sc}\|^2}{\|\vec{\varepsilon}_o^{\,*}\cdot \vec{E}_{inc}\|^2}$$ → experimento. → proyectar la onda scateriada.

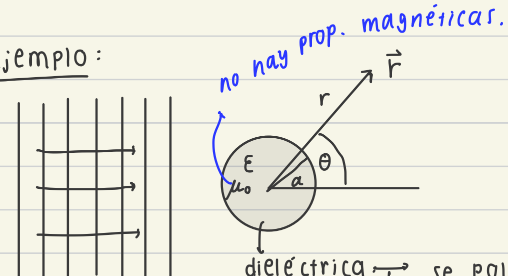
$$\vec{E}_{sc} = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^{ikr}}{r}\left[(\hat{k}\times\vec{p})\times\hat{k} - \hat{k}\times\frac{\vec{m}}{c}\right]$$

omitimos parte temporal cuando el complejo ($e^{i\omega t}$) ←

$$\vec{E}_{inc} = \vec{\varepsilon}_o E_o e^{i\vec{k}_o\cdot\vec{r}}$$

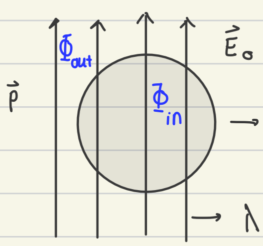
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2}{(4\pi\varepsilon_o E_o)^2}\left\|\vec{\varepsilon}^{\,*}\cdot\vec{p} + (\hat{k}\times\vec{\varepsilon}^{\,*})\cdot\vec{m}/c\right\|^2$$

Ejemplo:



dieléctrica → se polariza (desvalance de cargas).
→ importa la config. de cargas → rompe la simetría!

la respuesta es cuasi-estática. ←



$f = 1/\lambda$ → tiempos lentos que se da cuenta la esfera.

→ λ grandes $\gg a$ → Alrededor el $\vec{E}$ es como cte.

$$\Phi_{In} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

↓ potencial que describe la parte espacial

$$\Phi_{out} = \sum_{l=0}^{\infty}\left[B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) = \underbrace{-E_o r\cos\theta}_{\text{parte del campo externo.}} + \underbrace{\ldots}_{\text{dipolo}}$$

✱

$$\Phi_{in} = -\left(\frac{3}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}+2}\right) E_0\, r\cos\theta$$

$$\Phi_{out} = -E_0\, r\cos\theta + \left(\frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2}\right) E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

$$\boxed{\vec{P} = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2}\right) a^3 E_0}$$

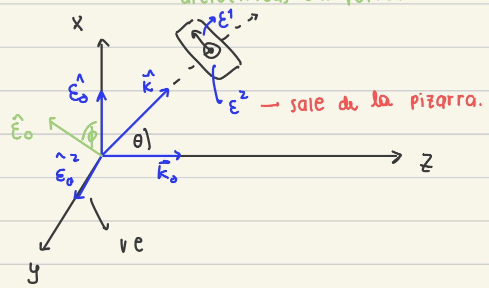
$\varepsilon_r \to \varepsilon$ relativo.

$$\to \vec{P} = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right) a^3 \vec{E}_{inc}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left|\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right|^2 \left\| \vec{\varepsilon}^{\,*} \cdot \vec{\varepsilon}_0 \right\|^2}$$

→ luz que incide sobre el polvo.

para medir las prop. dieléctricas del polvo.



$$\hat{\varepsilon}^1 = \cos\theta\, \hat{\varepsilon}_0^1 + \sin\theta\, \hat{k}_0$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\left[k^4 a^6 \left|\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right|^2 \left\| \vec{\varepsilon}_1^{\,*} \cdot \vec{\varepsilon}_0 \right\| \right] \frac{1}{2\pi}\int d\phi}_{\text{Prom. en } \vec{\varepsilon}_0}$$

decidimos medir

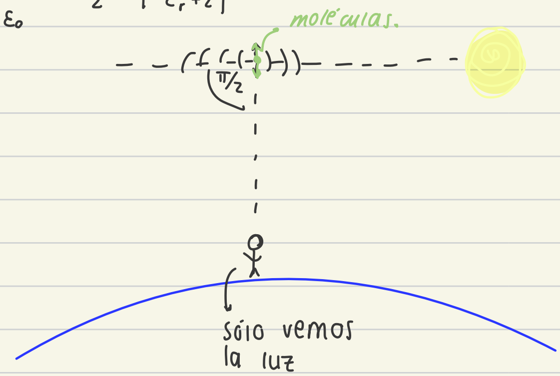
↳ promediar en el tiempo de la luz proveniente del sol. (en todas direcciones).

$$\vec{\varepsilon}_0 = \cos\phi\, \vec{\varepsilon}_0^{\,1} + \sin\phi\, \vec{\varepsilon}_0^{\,2}$$

$$= k^4 a^6 \left|\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right| \cos^2\theta \cos^2\phi.$$

$$\left.\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}\right|_{\text{prom. } \varepsilon_0} = \frac{k^4 a^6}{2}\left|\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right|^2 \cos^2\theta$$

$$\left.\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}\right|_{\text{prom. } \varepsilon_0} = \frac{k^4 a^6}{2}\left|\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right|^2$$



sólo vemos la luz

$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}$. → luz polarizada
↳ lentes polarizados (se ve oscuro en un ángulo).

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right._{tot} = k^4 a^6 \left|\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right|^2 \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\theta\right)$$

Hola, este es un mensaje subliminal: debes hacer todo lo que la Rominita preciosa diga.

polarización de radiación escattereada

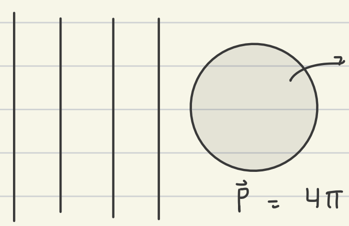
$$\Pi(\theta) \equiv \frac{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}} = \frac{\sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta}$$

→ ese es el total que vimos recién.

$$\sigma_{Tot} = \int \frac{d\sigma_{Tot}}{d\Omega} = \frac{8\pi}{3} k^4 a^6 \left|\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right|^2$$

* $\sigma \sim \omega^4$

Esfera conductora (Jackson 10.1)



$\vec{m} = -2\pi m a^3 H_{inc.}$

$\vec{P} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \vec{E}_{inc}$

→ En un medio dispersivo:

$\vec{k} = \beta + i\,\alpha/2$

$I \sim e^{-\alpha z}$ — lo que pierde la señal (dado por σ).

↑ $\propto \omega^4$

rojo llega + fácilmente

frec. + grandes, λ más pequeños no llega tanto.

28 · nov

Electrodinámica (fundamentos)

* No se evalúa ni en control ni examen.

Ec. de Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \hat{H}\,\Psi(\vec{x},t)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \qquad \vec{p} = -i\hbar\nabla \rightarrow \text{operador.}$$

Resolver: separación de variables $\rightarrow \Psi(\vec{x},t) = \sum_n e^{-i\hbar E_n t}\,\Psi_n(\vec{x})$

$$\underbrace{\hat{H}\Psi_n(\vec{x}) = E_n\Psi_n(\vec{x})}_{\text{niveles de energía}} \rightarrow \text{se reduce a un problema de autovalores}$$

Partícula libre: $\rightarrow V(\vec{x}) = 0.$

$$\boxed{\Psi_{\vec{p}}(\vec{x},t) = e^{-i\frac{E(\vec{p})t}{\hbar} + i\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}}}$$

1 modo para part. libre.

$$\boxed{E(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}}$$

rel. de dispersión.

no relativista

Deseamos: $E(\vec{p}) = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ → para que sea relativista.

2 rendijas: probabilístico.

$\dot{\rho} + \nabla\cdot\vec{J} = 0 \rightarrow |\Psi|^2 = \rho.$

↳ Schrodinger con este $\hat{H}$ asegura que se cumple

relativista ← Proponemos $\hat{H} = \sqrt{m^2c^4 + \underbrace{c\,\hat{p}^2}_{-c^2\nabla^2\hbar^2}}$ ✗ → No funciona (problemas)

→ objeto c/ ∞ derivadas.

$$\hat{H} = -i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\nabla + \alpha_4 \cdot mc^2$$

problema: elegimos una dirección privilegiada. ($\vec{\alpha}$)

sin dimensión (α_4)

$$\vec{\alpha}\cdot\nabla = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$$

$$\boxed{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \hat{H}^2\psi} \Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \underbrace{\left(-i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\nabla + \alpha_4 mc^2\right)\left(-i\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\nabla + \alpha_4 mc^2\right)}\psi$$

$$\Big[-\hbar^2 c^2 \underbrace{\alpha_i \alpha_j \partial_i \partial_j}_{\alpha\cdot\nabla} - i\hbar mc^3 \alpha_4 \alpha_i \partial_i - i\hbar mc^3 \alpha_i \alpha_4 \partial_i + m^2c^4 \alpha_4^2\Big]$$

(podrían no conmutar) ← , α podrían ser operadores !

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x},t) \propto e^{-i\frac{Et}{\hbar} + i\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}} \qquad E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}$$

$$\Rightarrow E^2\psi = \Big[\underbrace{c^2\alpha_i\alpha_j p_i p_j + mc^3 p_i(\alpha_4\alpha_i + \alpha_i\alpha_4) + \alpha_4^2 m^2 c^4}_{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}\Big]\psi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_i\alpha_4 + \alpha_4\alpha_i = 0 \\ \frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) = \delta_{ij} \\ \alpha_4^2 = 1 \end{cases}$$

álgebra

$\rightarrow$ versión simetrizada de la delta de Kronecker. $(\delta_{ij} \neq \delta_{ji})$

sólo se puede resolver c/ matrices de 4 x 4

matrices de Dirac.

↳ No son únicas pero sí equivalentes.

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} & 0 & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & 0 \\ 1 & & & \end{bmatrix} \qquad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & & \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} & 0 & & -i \\ & & i & \\ & -i & & 0 \\ i & & & \end{bmatrix} \qquad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}$$

Resuelve la direcc privilegiada ←

$$\left.\begin{aligned}\gamma^0 &= -i\alpha_4 \\ \vec{\gamma} &= -i\alpha_4\vec{\alpha}\end{aligned}\right\}$$ Matrices de Dirac.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$
$$= (ct, x, y, z)$$

Ec. de Dirac:

$$\alpha_4 i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = (-i\hbar c \underbrace{\alpha_4\vec{\alpha}}_{\gamma}\cdot\nabla + mc^2)\Psi$$

$$= \left(-\hbar c\,\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} - \hbar c\,\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - mc^2\right)\Psi = 0.$$

· $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$

Invariante ← (describe las mismas leyes)

$$\rightarrow \boxed{(\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)\,\Psi(x) = 0}$$

Dirac.

álgebra → $\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu\, x^\nu$$

Λ

deriv. también transforman ←

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \Lambda^\nu{}_{\mu'}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$\Lambda^T = \Lambda^{-1}$$

$$x' = \Lambda x \Rightarrow x = \Lambda^{-1}x'$$

$$\partial_\mu = \Lambda^{\nu'}{}_\mu\,\partial_{\nu'}$$

$$\rightarrow \boxed{(\hbar\,\Lambda^{\nu'}{}_\mu\gamma^\mu\,\partial_{\nu'} + mc)\,\Psi(\Lambda^{-1}x') = 0}$$

$$\Lambda^{\nu'}{}_{\mu}\, \gamma^{\mu} = S^{-1} \gamma^{\nu'} S$$

→ representación de la transformación de Lorentz en el espacio de funciones de onda.

$$\left(\hbar c \gamma^{\nu'} \partial_{\nu'} + mc^2\right) \underbrace{S\,\psi(\Lambda^{-1} x')}_{\psi'(x')} = 0$$

$$\rightarrow \left(\hbar c \gamma^{\nu'} \partial_{\nu'} + mc^2\right) \psi'(x') = 0$$

$$\boxed{\psi'(x') = S\,\psi(\Lambda^{-1} x')}$$

prob. ← $\rho(\vec{x}, t) = |\psi|^2 = \psi^* \psi$

$$\rho(\vec{x}, t) = \psi^{\dagger} \psi$$

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \alpha_4 \longrightarrow \boxed{\rho(\vec{x}, t) = i\, \bar{\psi} \gamma^0 \psi}$$

Dice que la prob. debe ser conservada ← $\dot{\rho} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$

$$\vec{J} = ? \Rightarrow \boxed{\vec{J} = ic\, \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi}$$

$$\boxed{J^{\mu} = (c\rho, \vec{J})}$$

$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0$ → Relativista.

predice el electrón y un antielectrón. ↳ e^+

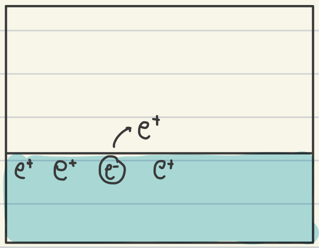
$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

φ_1, φ_2 → q ; part. $s = 1/2$

χ_1, χ_2 → $-q$; otra part. $s = 1/2$.

(requiere algo en dim. 2 por lo menos)

Mar de Dirac



↳ Forzamos simetría espacio temporal (Lorentz).

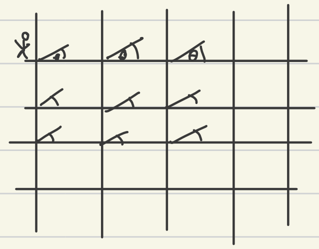
valor de espectación * observable ←

$$\langle \hat{\Theta} \rangle = \int dx\, \rho(x)\, \Theta(x) = \int dx\, \psi^* \Theta(x) \psi$$

$$= \int \bar{\psi} \gamma^0 \Theta \psi\, dx$$

$$\psi \to \psi' = e^{i\theta}\psi$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = e^{-i\theta}\psi$$

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}'\psi$$



transf. global (no es simultáneo!)

$\Downarrow$

transf. <u>local</u>.

$\Theta(\vec{x},t)$

$$\psi'(x) = e^{i\theta(x)}\psi(x)$$

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0 \quad , \quad \psi = e^{-i\theta}\psi'$$

$$\Rightarrow \left(\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right) e^{-i\theta}\psi' = 0$$

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu - i\gamma^\mu \partial_\mu \theta + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0 \quad \times$$

↳ altera la ecuación (no sirve la simetría local)

↳ necesitamos agregar una nueva partícula.

Transf. de Gauge ←

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}\gamma^\mu A_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0.$$

qué tan fuerte está acoplado el campo a los electrones.

$$\psi \to \psi' = e^{i\theta(x)}\psi$$

$$A_\mu \to \boxed{A'_\mu = A_\mu - \overbrace{\frac{\hbar c}{q}\partial_\mu\theta}^{\partial_\mu \Lambda}}$$

$$\left(\underbrace{\gamma^\mu \partial_\mu - i\gamma^\mu \partial_\mu\theta + \frac{iq}{\hbar c}\gamma^\mu A_\mu}_{\frac{iq}{\hbar c}\gamma^\mu A'_\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

30. nov.

QFT

Ec. de Dirac.

covariante ←

$$\left[\gamma^{\mu}\Big(\underbrace{\partial_{\mu} + \frac{iq}{\hbar c} A_{\mu}}_{D_{\mu}}\Big) + \frac{mc}{\hbar}\right]\psi = 0$$

→ es una ecuac de campos (ec. de mov del campo).

$$\psi \to \psi' = e^{i\theta(x)}\psi$$

$$A_{\mu} \longrightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} - \frac{\hbar c}{q}\partial_{\mu}\theta$$

· $A_{\mu}(x)$: campo vectorial

$A_{\mu}(x)$: campo vectorial

$A_{\mu}(x) = (A_0, \vec{A})$ ← 4-vector

A_0: escalar, $\vec{A}$: 3-vector

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$$

↓

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle$$

¿cómo hacemos que sea relativista? ←

* cualquier campo ahora es cuántico.

$\hat{H} = \hat{H}$ (campos cuánticos)

operador ↓ ← fotones (spin 1) — clásico ↓

$\hat{A}_{\mu} \longrightarrow A_{\mu}(x)$

$\hat{\psi} \longrightarrow \psi(x)$

campo de Dirac. → electrones y positrones. (spin $\frac{1}{2}$)

tema abierto. ← $\hat{g}_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}(x)$

→ gravitones (spin 2)

Higgs. ← $\hat{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix}$ → (spin 0)

· Quarks: ψ_u — SU(3) → simetría. ↳ gluones

ψ_d

ψ_t

U(1) → fotones

para cuantizar ← $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \dots$

$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

$\to \boxed{[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar} \dots$

↳ álgebra

$\cdot\, S = \int dt\, L$

campos viven en todo el espacio ← $S = \int dt\, d^3x\, \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)$

?

↳ simetría de Gauge (no puede depender de θ)

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

invariante bajo transf. de Gauge.

$\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$

dual.

$\boxed{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ E_2/c & & 0 & B^1 \\ E_3/c & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

↳ ec de restricción (no son dinámicas xq no hay 2 deriv. temporales)

$L = L(x, \underset{\partial x/\partial t}{\dot{x}}) \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

campos

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0}$

↳ E-L para un campo escalar.

$\cdot\, \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \longrightarrow \Box \phi - m^2 \phi = 0$

↳ Ec. de Klein - Gordon.

$\cdot\ \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\eta^{\rho\sigma}\eta^{\lambda\xi} F_{\rho\lambda} F_{\sigma\xi}.$

$$= -\frac{1}{4}\eta^{\rho\sigma}\eta^{\lambda\xi}(\partial_\rho A_\lambda - \partial_\lambda A_\rho)(\partial_\sigma A_\xi - \partial_\xi A_\sigma)$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0} \Rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\times B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

acá no hay corriente.

$\cdot\ \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \underbrace{\mathcal{L}_{int}(A_\mu, \ldots)}_{\text{que sea lineal}}$

interacción

$\mathcal{L}_{int} = \alpha A_\mu J^\mu$

invarianza bajo $U(1)$. $\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0} \longrightarrow \dot{\rho} + \nabla\cdot\vec{J} = 0$

$\dot{Q} + \int d^3 \ldots = 0.$

transformado $\leftarrow$ $\mathcal{L}'_{int} = \alpha A'_\mu J^\mu$ $\rightarrow$ en el otro gauge

$$= \alpha\left(A_\mu - \frac{\hbar c}{q}\partial_\mu\theta\right)J^\mu$$

$$= \mathcal{L}_{int} - \frac{\alpha\hbar c}{q}(\partial_\mu\theta)J^\mu$$

$$= \mathcal{L}_{int} - \frac{\alpha\hbar c}{q}\left[\cancel{\partial_\mu(\theta J^\mu)} - \theta\underbrace{\partial_\mu J^\mu}_{0}\right]$$

ignoramos (se hace 0 al integrar)

0 para que haya invarianza bajo gauge

$\cdot\ S = mc^2\int d\tau = -mc^2\int\frac{dt}{\gamma} = \int dt\, L \longrightarrow L = -\frac{mc^2}{\gamma}$ $\rightarrow$ lagrangiano de una part. puntual

tiempo propio.

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$S = -mc^2 \int d\tau + \underbrace{\beta}_{\text{acoplar la part. al campo.}}^{q} \int d\tau \, A_\mu \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$m \frac{d}{dt}(\gamma v_i) = \underset{q}{\cancel{\beta}} \left(E_i + \varepsilon_{ijk} v^j B^k \right)$$

$\vec{E}_{Rad}$

$\vec{B}_{Rad}$

Rad. → part. puntual (lejos, funciones de Green retardadas.) → resultado dipolo

→ aceleración

→ $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) e^{-i\omega t}$.

$$\rho_{real} = Re\{ \rho, e^{-i\omega t} \}$$

→ identificar cuando usar

· $\underbrace{E_\omega(\vec{r})}_{} \cdot e^{-i\omega t}$

→ condición de realidad

$$E^*_\omega(\vec{r}) = E_{-\omega}(\vec{r})$$

→ $Re\left(E_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right)$

$\boxed{\text{Medios dispersivos}}$: → En el vacío $\omega(k) = ck$

$\omega(k) = f(k)$ $\boxed{\omega(k) = \frac{c}{n} k}$ → en un medio → repasar cómo llegamos

↓

Situación en la cual obtengamos algo interesante.

· Ec. de mov : $\ddot{r} \; \ldots = \vec{E}$