14·03·23

Controles 10-13 hrs

C1 → sábado 15 de abril.

C2 → " 20 de Mayo

C3 → " 01 julio.

16·03·23

Capítulo 1: "Dinámica Langrangiana"

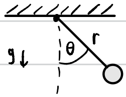
Movimiento bajo restricciones y coordenadas generalizadas:

Reducción de grados de libertad

El movimiento en un sistema físico, está generalmente sometido a una o varias restricciones, por lo que, desde un punto de vista práctico, nos permitirá reducir el n° de variables independientes.

Problema físico ⟹ Reducción de variables o grados de libertad

Ej: "péndulo plano"

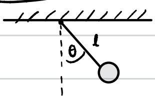


2 variables r, θ

puede ser un resorte.

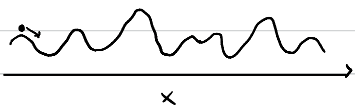
largo fijo.

$\boxed{r = l}$ → restricción.



1 variable θ

Las restricciones pueden ser mucho más complejas y diversas, por ej:



Restricciones:

Consideremos el movimiento de N partículas $\Rightarrow$ Total de $3N \equiv n$. ← 3 dimensiones

grados de libertad del problema.

n grados de libertad

Asumamos que $\exists$ "k" restricciones, de la siguiente forma:

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = C_j \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots, k$$

tiempo.

$C_j = cte \longrightarrow$ ej: $r = \ell$

Ej: 1 part. $\Rightarrow x_1 = x \; , \; x_2 = y \; , \; x_3 = z$

2 " $\Rightarrow x_1 = x_1 \; , \; x_2 = y_1 \; , \; x_3 = z_1 \; ,$
$x_4 = x_1 \; , \; x_5 = y_2 \; , \; x_6 = z_2 .$

Restricciones holonómicas

Cuando somos capaces de escribir una ecuación como la anterior, hablaremos de "restricciones holonómicas"

$\Rightarrow$ funciones analíticas diferenciables $\rightsquigarrow$ "Bien comportadas"

Ej: movimiento de una partícula en esfera

Restricción $\longrightarrow \boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2.}$

· 3 variables $\longrightarrow$ 2 variables.

Las restricciones "no holonómicas", son aquellas que no poseen una relación /ecuación analítica que relacione las variables del problema.

coordenadas generalizadas.

hay tantas var. independientes como grados de libertad.

N partículas $\rightarrow$ $n = 3N$ Grados de libertad.

k restricciones $\Rightarrow$ $n-k$ grados de libertad.

$\therefore$ Tendremos $q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}$ variables independientes para resolver el sistema bajo estudio.

A este conjunto de variables $\{q_\sigma\}$ las denominaremos "coordenadas generalizadas"

Ej "péndulo plano"

q_1 coord. generalizada de un péndulo de largo fijo $\rightarrow$

2 variables : r, θ

Restricción : $\boxed{f_1(r, \theta, t) = r = \ell}$ $\nearrow C_1$ 2 variables $\rightarrow$ 1 variable: $\boxed{q_1 = \theta}$

En cada caso, las relaciones entre las coord. cartesianas y las generalizadas se puede escribir de la siguiente manera:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \ldots, q_{n-k}, t)$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_n(\quad " \quad)$$

péndulo:

$x_1 = x = \ell \sin\theta$

$x_2 = y = \ell \cos\theta$

Asumimos que todas las coord. generalizadas y el tiempo cambian un poco. usamos, entonces, la diferenciación de una variable arbitraria:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{n-k}} dq_{n-k} + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt$$

$$\rightarrow \boxed{dx_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \cdot dq_\sigma + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt} \quad i = 1, \dots, n.$$

Def: **desplazamiento virtual δx_i**

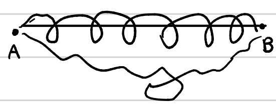
Lo definiremos como un desplazamiento infinitesimal, instantáneo, de las coordenadas x_i, respetando las restricciones del problema.

$\rightarrow dt = 0$

desplazamiento de las coordenadas.

$$\rightarrow \boxed{\delta x_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \cdot dq_\sigma}$$

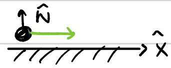
Ej

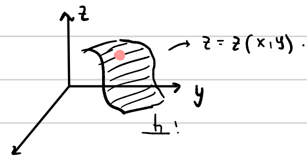


Principio de D'Alembert

Las fuerzas de restricción o reacción no actúan bajo un desplazamiento virtual.

En ausencia de roce, es claro que el movimiento en una superficie o curva dada será $\perp$ a la fuerza de restricción.





$\hat{N} \perp \hat{x}$ → no realiza W

En ambos ejemplos, el movimiento será paralelo a la superficie y la restricción será $\perp$ al movimiento.

Fuerzas de restricción NO realizan W

∴ como el W realizado por una $\vec{F}$ es el prod. vectorial entre la $\vec{F}$ y la distancia desplazada.

→ "las $\vec{F}$ de restricción NO realizan W".

* $\vec{F}$ aparecen en las restricciones holonómicas.
↳ Ej: tensión del material en el péndulo.

Por otro lado, la 2° ley de Newton para un sist. de N partículas, puede escribirse como:

$$\boxed{\dot{p}_i = F_i^{(a)} + R_i} \quad , i = 1, \ldots, n.$$

→ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ ⇒ para m cte

$F = \frac{dp}{dt}$ → momento.

p_i : i-ésima componente del momentum.

$F_i^{(a)}$: " " de la fuerza aplicada

R_i : " " de la restricción.

Multipliquemos ▭ por un desplazamiento virtual δx_i, y luego sumemos sobre todas las coordenadas:

$$\rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(F_i^{(a)} + R_i - \dot{p}_i \right) \delta x_i = 0}$$

Por lo de antes $\Rightarrow$ $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(F_i^{(a)} - \dot{p}_i \right) \delta x_i = 0}$ Prio. de D'Alembert.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} R \cdot \delta x_i = 0}$$

(i) supongamos que no hay restricciones

$\Rightarrow$ δx_i puede tomar cualquier valor.

$\Rightarrow$ ( ) : coef. tienen que ser nulos.

$\rightarrow$ $\boxed{\dot{p}_i = F_i}$ 2^{da} ley Newton movi@ sin restricciones.

DEM:
$$\underset{\text{IZQ}}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\right)} = \underset{\text{DER.}}{\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)}$$

$$dx_i = \sum_\lambda \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} dq_\lambda + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \qquad (s \to \lambda)$$

$$x_i \to \frac{\partial x_i}{\partial q_s}$$

$$\therefore d\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\right) = \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial q_\lambda}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\right) dq_\lambda + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\right) dt \quad / \cdot \frac{1}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\right) = \sum_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial q_\lambda}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\right)\dot{q}_\lambda + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\right) \qquad \boxed{\text{LADO IZQ.}}$$

Por otro lado,
$s \to \lambda$

$$dx_i = \sum_\lambda \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \cdot dq_\lambda + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \quad / \cdot \frac{1}{dt}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \sum_\lambda \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \cdot \dot{q}_\lambda + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{dx_i}{dt}\right) = \sum_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial q_s}\frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda}\right) \cdot \dot{q}_\lambda + \frac{\partial}{\partial q_s} \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)$$

$$= \qquad \parallel \qquad + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\right) \qquad \boxed{\text{LADO DER}}$$

Qed.

ecuaciones de lagrange

17 · marzo

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(F_i - \dot{p}_i)}_{\text{coef.}} \delta x_i = 0\right]$$

$F_i = F_i^{(a)}$.

i) $\Rightarrow \dot{p}_i = F_i$

ii) si hay restricciones, es más complejo (no directo) decir que los coeficientes (( )) son nulos.

→ Debemos escribir el principio de D'Alembert en términos de coord. generalizadas.

Primero consideremos el trabajo virtual ($dt = 0$) realizado por las $\vec{F}$ aplicadas dado un desplaza@ virtual:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} F_i \, \delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_i \sum_{\sigma=1}^{n-k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\right) \delta q_\sigma$$

$$\rightarrow \boxed{\delta W = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma}$$

son independientes.

"Fuerza generalizada": $\boxed{Q_\sigma = \sum_{i=1}^{n} F_i \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}}^{[m]}}$

puede ser torque. No necesaria# Newtons.

$$\rightarrow \boxed{\delta W = \sum_{\sigma=1}^{n-k} Q_\sigma \cdot \delta q_\sigma}$$

trabajo virtual relativo a las coord. generalizadas.

$dW = F \cdot dr$

Las partículas con masa m_i, obedecen a:

$$\dot{p}_i = m_i \ddot{x}_i \,, \quad i = 1, \ldots, n$$

· sumatoria relevante es la de σ ya que son las coord. generalizadas.

$$\rightarrow \sum_i \dot{p}_i \delta x_i = \sum_i m_i \ddot{x}_i \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \cdot \delta q_\sigma$$

$$= \sum_\sigma \left(\sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma$$

$$\frac{d}{dt}\dot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\right)}_{①} - \underbrace{\dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\right)}_{②}.$$

→ pasar para el otro lado la derivada del producto.

$$\cdot \; dx_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \cdot dq_\sigma + \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot dt \quad \Big/ \frac{1}{dt}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \boxed{\dot{x}_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma} + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

→ $\dot{x}_i$ velocidad. (deriv. total y no parcial).

$\dot{x}_i$ depende linealmente de $\dot{q}_\sigma$

$$\therefore \; \boxed{\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}}$$

$$① \quad \sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\right) = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma} (\dot{x}_i)^2$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma} T ,$$

T energía cinética total.

E cinética $= \frac{1}{2} m v^2$.

② $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\frac{d x_i}{\partial t}\right)$ → No es tan trivial entre deriv. parcial y total (está dem. en las notas de ucursos)

$$= \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\dot{x}_i$$

$$\sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2\right) = \frac{\partial}{\partial q_\sigma} T$$

→ energía cinética T

Ppio. de D'Alembert: $\sum_{i=1}^{n} (F_i - \dot{p}_i)\, \delta x_i = 0$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} F_i \,\delta x_i = \sum_\sigma Q_\sigma \,\delta q_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \,\delta x_i = \sum_\sigma \left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial}{\partial q_\sigma} T\right)\delta q_\sigma$$

Ecuaciones de Lagrange

$$\boxed{\sum_{\sigma=1}^{n-k}\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - Q_\sigma\right)\delta q_\sigma = 0}$$

→ Igual que la clase pasada, el ( ) debe ser 0. ya que es ∀ δq_σ

Principio de D'Alembert con respecto a las coord. generalizadas.

δq_σ son total# independientes!

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - Q_\sigma = 0.}$$

Ecuaciones de Lagrange

$\sigma: 1, \dots, n-k.$

En general, en este curso, trabajaremos solo con "fuerzas conservativas": $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$; U energía potencial.

↳ no depende del t.

'potencial conservativo'. ⟶ U dependerá, en este caso, sólo de las coordenadas:

$$U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

$$Q_\sigma = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial q_\sigma} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_\sigma}$$

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - Q_\sigma = \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial U}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial}{\partial q_\sigma}(T-U)$$

U no depende de $\dot{q}_\sigma \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma} T = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} + 0 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma}(T-U)$$

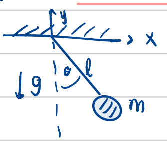
De esta manera, definiremos un funcional sobre el que operaremos para determinar la dinámica de un sistema arbitrario:

$$\boxed{L = T - U}$$ "Lagrangiano"

$\therefore$ Ecs. de Lagrange se escribirán como:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0} \qquad \sigma : 1, \ldots, n-k.$$

Ej: "péndulo plano" $\rightarrow$ largo fijo



largo fijo: $\boxed{r = \ell}$

$\therefore$ $r, \theta \longrightarrow \boxed{\theta = q_1}$ coord. generalizada del problema.

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

de todas las partículas.

$x = \ell \sin\theta \quad , \quad y = -\ell \cos\theta$

$\dot{x} = \ell \cos\theta \cdot \dot{\theta} \quad , \quad \dot{y} = \ell \operatorname{sen}\theta \cdot \dot{\theta}$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \ell^2 \cos^2\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \ell^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2$$
$$= \ell^2 \dot{\theta}^2$$

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2}$$

$$\boxed{U = -mg \cos\theta\, \ell + cte}$$

$\rightarrow$ al aumentar ángulo, aumenta la E potencial.

$\hookrightarrow$ $mg\ell(1-\cos\theta)$ puede ser donde pongamos el sistema

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta - cte}$$

Ecs. lag. $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta$

$\rightarrow \frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) + mg\ell\sin\theta = 0$

$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0 \longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$ Ec. dinámica péndulo plano.

θ chico $\longrightarrow \sin\theta \approx \theta \longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$

Tarea $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \longrightarrow \frac{y}{\ell} = \sin\theta \rightarrow \text{arcosen}\,\frac{y}{\ell} = \theta$

✱ $\rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\ell}\right)^2}} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{-\frac{\cancel{2}y}{\ell^2}}{{}^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{y}{\ell}\right)^2}} = -\frac{1}{\ell^2}\frac{y}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\ell}\right)^2}}$

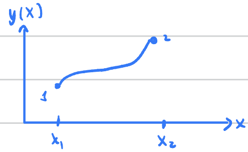
$-\frac{y\ell}{\sqrt{\ell^2-y^2}} + g = 0$ $(\ell+y)(\ell-y)$

$-y\ell + g$

cálculo de variaciones

21 · mar

sea x una variable independiente definida en el intervalo $\{x_1, x_2\}$. sea $y(x)$ alguna función diferenciable (función bonita, bien comportada) de x, definida en el mismo intervalo.



$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

supongamos, además, que existe un funcional ϕ, tal que:

* viernes: $q(t) \to y(x)$
$\dot{q}(t) \to y'(x)$
$t \to x$

$$\boxed{\phi = \phi[y(x), y'(x), x]}$$

→ funcional corresponde a una función de funciones.

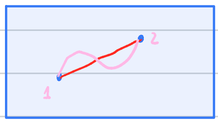
Entonces buscamos, por ejemplo, optimizar este funcional en un intervalo, que es lo mismo que buscar un extremo de este funcional, y para esto, debemos ser capaces de encontrar la función $y(x)$ correcta que torna a éste funcional un óptimo. para ésto, definimos la siguiente integral a optimizar.

camino lo hacemos pequeño.

$$\boxed{I = \int_{x_1}^{x_2} \phi(y, y', x)\, dx}$$

→ donde debemos buscar cuándo I es un extremo!

Ej : ¿ Cuál es la función y(x) que minimiza la distancia entre el punto 1 y 2 en un plano?



* línea recta

→ luz viaja en línea recta sólo si el índice de refracØ no cambia.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

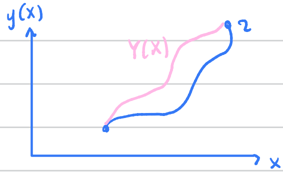
$$= \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Problema variacional a resolver para este ejemplo , será

$$I = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

En general, para resolver este tipo de problemas del cálculo variacional, consideremos lo sgte.
Asumamos que tenemos 2 trayectorias (caminos) infinitesimal% diferentes, pero con extremos iguales:

(suponemos que es $y(x)$)



$y(x)$: corresponde a la trayectoria / camino correcto.

$Y(x)$: camino vecino.

tal que: $Y(x) = y(x) + \epsilon\, \eta(x)$. ; ϵ pequeño.

→ $\eta(x)$ función arbitraria de x, tal que:

→ parecidas más un corrimiento.

$$\boxed{\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0}$$ → deben llegar al mismo punto.

Volvamos:

fomamos sol. incorrecta para ver como llego a la correcta.

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \phi\left[Y(x), Y'(x), x\right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \phi\left[y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', x\right] dx$$

* $Y' = y' + \epsilon\eta'$

→ como ϵ es pequeño, podemos expandir en ϵ a 1° orden:

Taylor: $f(x_1 + \epsilon_1, x_2 + \epsilon_2) \approx f(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\epsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\epsilon_2 + O(\epsilon_1^2, \epsilon_2^2)$.

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2}\left[\phi(y, y', x) + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\epsilon\eta + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\cdot\epsilon\eta' + O(\epsilon^2)\right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \phi(y, y', x)\, dx + \epsilon\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\cdot\frac{d\eta}{dx}\right] dx$$

→ El valor de I en Y no puede ser el óptimo.

→ es c/r a la desviación de la trayectoria correcta.

Si I es un extremo (mínimo o máximo) para la función y(x), entonces esta integral sólo podrá aumentar o disminuir cuando otra función (Y) sea evaluada.

$$\boxed{\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\to 0} = 0}$$

para la solución "verdadera" y(x) → I será un máximo o un mínimo.

En general, en física el mismo problema nos indicará si buscamos un máximo o un mínimo.

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\cdot\frac{d\eta}{dx}\right]dx = 0!$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y'}\cdot\frac{d\eta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y'}\cdot\eta(x)\right) - \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y'}\right)$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y'}\cdot\eta(x)\right)dx = \left.\frac{\partial\phi}{\partial y'}\cdot\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2} = 0! \rightarrow \eta(x_2)=\eta(x_1)=0$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\boxed{\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y'}\right)\right]}}_{=0!}\eta(x)\,dx = 0$$

completamente arbitraria

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y'}\right) - \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0}$$

Ecuación de "Euler Lagrange".

. Si I es un extremo (máx o mín), entonces la función verdadera / correcta / óptima $y(x)$, deberá satisfacer esta ec. de Euler-Lagrange.

Volvamos al ejemplo de la distancia más corta entre 2 puntos en un plano:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{\phi(y,\, y',\, x)}\, dx$$

E-L: $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ $\qquad \frac{\partial \phi}{\partial y'} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cancel{2} y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) - 0 = 0$$

$\Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \quad , \quad C_1$ cte!

$\Rightarrow y'^2 = (1+y'^2)\, C_1^2$

$\Rightarrow y'^2(1-C_1^2) = C_1^2$

$\Rightarrow y'^2 = \frac{C_1^2}{(1-C_1^2)} = C_2 \quad , \; C_2$ cte

$\Rightarrow \boxed{y' = \text{cte}}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \alpha x + \beta}$

solución correcta / verd. / óptima es la línea recta.

→ dist. más corta → min. $\underline{x}$

→ Mínimo de I → suma sobre los ds → $ds = \phi\, dx$ → e-L para ϕ c.r a y

$y(x) = y$ = soluø óptima

En mecánica, el funcional a optimizar será el lagrangiano L y la integral que minimizaremos será la acción:

$$\boxed{\int L\,dt = \text{"Acción"}}$$

"Principio de Hamilton": Este principio establece que de todos los caminos o trayectorias posibles, entre 2 extremos fijos, la trayectoria correcta / verdadera (la soluø) será aquella en que la acción sea un extremo, con $\boxed{L = T - U}$

$\Rightarrow$ E-L: $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0}$ $\quad \sigma, 1, \ldots, n-k$

Como el lagrangiano se define como $L = T - U$, entonces el principio de Hamilton nos dirá que la partícula minimizará la diferencia integrada entre la energía cinética T y la potencial U.

Como las ecs. de Lagrange son equivalentes a las leyes de Newton, para un sist. conservativo, podemos considerar al principio de Hamilton como un enunciado fundamental de la Mecánica.

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0}$$ "Ppio. de Hamilton"