

- Este problema vemos la expresión concreta de la batalla entre gravedad y rotación

$$U_{\text{eff}}(\theta) : U_{\text{eff}}(0) = -\omega c^2, \quad U_{\text{eff}}(\pm\pi) = \omega c^2$$

$$\Rightarrow U_{\text{eff}}(0) < U_{\text{eff}}(\pm\pi) \quad \text{siempre!}$$

$$\frac{\omega_c > \omega}{l}$$

g gana
en vez de
rotar.



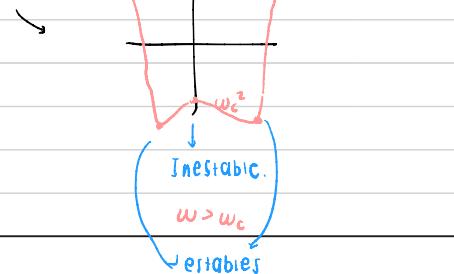
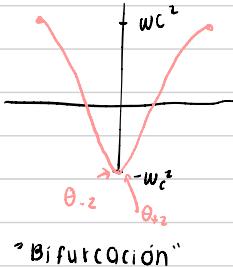
chequear! →

$$\underline{\omega_c \leq \omega} \quad U_{\text{eff}}(\theta \approx 0) = -\frac{\omega^2}{2} \left[l + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^4 \right]$$

$$\omega \rightarrow \omega_c \quad U_{\text{eff}}(\theta \approx 0) \rightarrow -\omega_c^2 = U(\theta_0)$$

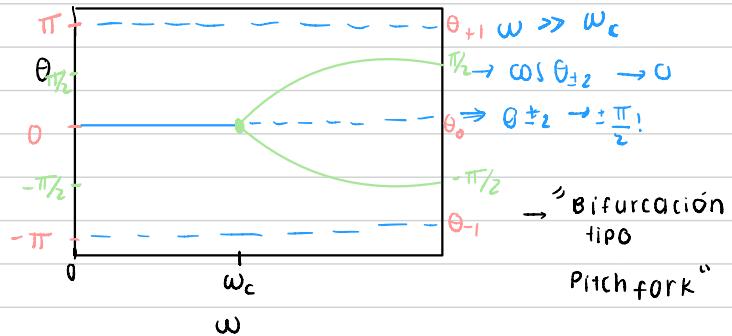
↳ bifurcan de la sol θ_0 y

después se alejan.



→ Dado un parámetro de control $\omega \rightarrow$ "Diagrama de bifurcación"

Nomenclatura: ————— estable
----- inestable.



→ Diagrama de bifurcaciones!

Pequeñas Oscilaciones



4 marzo

Formulación:

→ Sea $\{q_\sigma\}$ un conjunto de n variables generalizadas independientes

→ Asumamos que, además, el sistema bajo estudio es conservativo, (con un potencial tiempo - independiente (estático)):

$$U = U(q_1, \dots, q_n).$$

→ Asumamos también que no hay restricciones dependientes del tiempo: $\frac{dx_i}{dt} = 0$

* viene de:

$$dx_i = \sum_{\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \cdot dq_\sigma + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

podemos entonces, escribir T de la sgte forma:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\lambda \quad T = \sum_i \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}$$

∴ El lagrangiano se podrá escribir como:

$$\left[L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \right]$$

Pequeñas oscilaciones en torno

a qué?...

Las ecs de lagrange "originales" son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma = -\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}, \quad \sigma: 1, \dots, n$$

El potencial U determinará la fuerza generalizada Q_σ .

Recordamos \rightarrow "Equilibrio estático" $\Rightarrow \sum_i F_i = 0$

$$\sum_i C_i = 0$$

\Rightarrow velocidad y aceleración nula!

$$\Rightarrow \dot{q}_\sigma = \ddot{q}_\sigma = 0, \quad \sigma: 1, \dots, n$$

equilibrio
 $\Rightarrow q_r \rightarrow q_r^0$

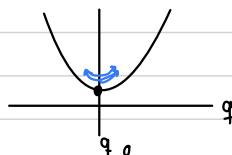
\therefore la fuerza generalizada Q_σ tiene que anularse en condiciones de equilibrio estático:

$$Q_\sigma \Big|_{q_r^0} = -\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} \Big|_{q_r^0} = 0 \quad \sigma: 1, \dots, n.$$

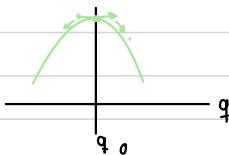
∴ LOS PTS. CRÍTICOS del potencial U estás
asociados a estas posiciones de equilibrio q_0 .

cuadros posibles:

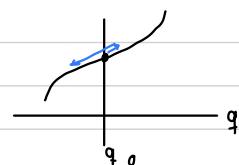
ESTABLE



INESTABLE



INESTABLE



→ Ej: guitarra, línea

del tren.

La partícula se
acotadamente en torno a la
posición de equilibrio q_0 .
Si realizamos una perturbación
pequeña.

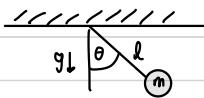
Tarde o temprano
se alejará de q_0 .



sólo para pequeñas!

* no se puede hacer $\cos\theta=1$
en el potencial ya que
sino es de y se anula al
derivar.

Ejemplo: "Pendulo plano".



$$U(\theta) = -mgl \cos\theta + ct$$

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$$

arbitrario

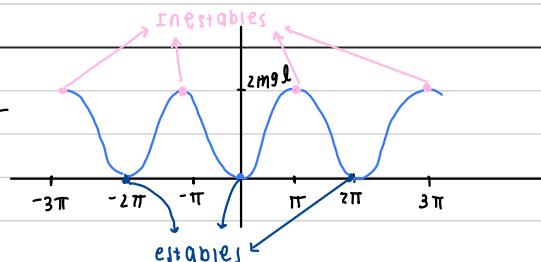
$$U(0) = 0 \rightarrow \text{mínimo}$$

$$U(\pm\pi) = 2mgl \rightarrow \text{máximo.}$$

Inestable pero no tanto
debilmente inestable

fuerter inestable.

hay que esperar mucho tiempo para que se vaya



ptos. equilibrio de $U(\theta)$: $\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgL \sin \theta = 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgL \cos \theta$$

$$\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

ptos. criticos

Estables: n par

doble deriv. positiva

Inestables: n impar.

Descripción analítica

sea: $q_\sigma = q_\sigma^0 + \eta_\sigma$, $\sigma: 1, \dots, n$

q_σ^0 : pto. de equilibrio

η_σ : perturbación pequeña. $\rightarrow \dot{q}_\sigma = \dot{\eta}_\sigma$

Así, la energía cinética T , en torno a la posicón de equilibrio será:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda}^0 \dot{\eta}_{\sigma} \dot{\eta}_{\lambda}$$

$$\rightarrow m_{\sigma\lambda}^0 = \sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) \Big|_{q_\sigma^0} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \right) \Big|_{q_\lambda^0}$$

$\rightarrow m_{\sigma\lambda}^0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ matriz simétrica y hermítica

$$m_{\sigma\lambda} = m_{\lambda\sigma} = m_{\sigma\lambda}^* = m_{\lambda\sigma}^*$$

La energía potencial, respecto a pequeños desplazamientos, en torno a las posiciones de equilibrio, será:

$$U(q_1, \dots, q_n) = U(q_i^0 + \eta_1, q_i^0 + \eta_2, \dots, q_n^0 + \eta_n)$$

→ como cambia si perturbo la otra variable?

→ Si $\cos \theta = 1 \rightarrow U$

Taylor 2º orden:

$$= U(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) + \sum_{\sigma} \left(\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} \right) \Big|_{q_0^0} \eta_\sigma + \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_\sigma \partial q_\lambda} \right) \Big|_{q_0^0} \eta_\sigma \eta_\lambda + O(\eta^3)$$

$\underbrace{\quad}_{\Theta^2}$ matriz Hessiana

Al estar perturbando en torno al equilibrio:

$$Q_\sigma \Big|_{q_0^0} = - \frac{\partial U}{\partial q_\sigma} \Big|_{q_0^0} = 0$$

$$\therefore U = U_0 + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} V_{\sigma\lambda}^0 \eta_\sigma \eta_\lambda$$

$$V_{\sigma\lambda}^0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_\sigma \partial q_\lambda} \right) \Big|_{q_0^0} \rightarrow V_{\sigma\lambda} \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow V_{\sigma\lambda} = V_{\lambda\sigma} = V_{\sigma\lambda}^* = V_{\lambda\sigma}^*$$

↑ hermiticidad.
matriz simétrica.

∴ Podemos ahora escribir el lagrangiano para pequeñas perturbaciones en torno a una posición de equilibrio:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} \left[m_{\sigma\lambda}^0 \ddot{\eta}_{\lambda} \dot{\eta}_{\sigma} - v_{\sigma\lambda}^0 \eta_{\lambda} \dot{\eta}_{\sigma} \right] + dt$$

Euler - L : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_{\sigma}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_{\sigma}} = 0 \quad , \sigma = 1, \dots, n.$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_{\sigma}} = - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \sum_{\lambda} v_{\sigma\lambda}^0 \eta_{\lambda} = - \sum_{\lambda} v_{\sigma\lambda}^0 \eta_{\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_{\sigma}} = \sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda}^0 \dot{\eta}_{\lambda} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_{\sigma}} \right) = \sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda}^0 \ddot{\eta}_{\lambda}$$

no depende del t por hipótesis inicial.

$$\therefore \sum_{\lambda} \left(m_{\sigma\lambda}^0 \ddot{\eta}_{\lambda} + v_{\sigma\lambda}^0 \eta_{\lambda} \right) = 0$$

Oscilaciones en torno a posiciones de equilibrio.

→ Ec. Lineal, 2º orden, para la perturbación η_{λ} .

→ se parece mucho a la ec. del oscilador armónico:

$$[m\ddot{x} + kx = 0]$$

Ejemplo: $U = U(x) \Rightarrow q_0 = q_1 = x$.

1D, m.

$$\rightarrow m_{\sigma\lambda}^{\circ} \rightarrow m_{11}^{\circ} = m \left(\frac{dx_1}{dq_1} \right)^2 = m \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right)^2 = m \cdot 1 = m$$

$$\sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \right)$$

$$\rightarrow V_{\sigma\lambda}^{\circ} = V_{11}^{\circ} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_{q_1^0} = U''(q_1^0)$$

$$\rightarrow \sum_\lambda -1 \text{ término : } m_{11}^{\circ} \ddot{\eta}_1 + V_{11}^{\circ} \eta_1 = 0$$

$$m \cdot \ddot{\eta}_1 + U''(q_1^0) \eta_1 = 0$$

→ ecuación que satisface la perturbación en torno a q_1^0 .

$$\rightarrow \underline{U''(q_1^0) > 0} : \text{Mínimo}$$

Potencial → equilibrio estable

Sol: cos y sen. →

$$\ddot{\eta}_1 + \omega^2 \eta_1 = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{U''(q_1^0)}{m}} \in \mathbb{R}!$$

↓ solución será

acotada → "Estabilidad".

→ Soluciones oscilatorias!

$\rightarrow U''(q_1^*) < 0$ máximo potencial \rightarrow Equilibrio inestable.

\rightarrow sol. hiperbólicas \rightarrow

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{-|U''(q_0)|}{m}} \in \mathbb{C}$$

Soluciones divergentes
no oscilatorias.

Algunas consideraciones:

6·abril

$$\sum_{\lambda=1}^n (m_{\sigma\lambda} \ddot{\eta}_\lambda + v_{\sigma\lambda} \eta_\lambda) = 0$$

→ $m_{\sigma\lambda}$ → representan los coeficientes de una matriz real, simétrica.

\hat{M}

↳ hermética implica sim.

→ $v_{\sigma\lambda}$ → representan los coef. de una matriz real, constante y simétrica

\hat{V}

Si $\lambda: 1, \dots, n \rightarrow \sigma: 1, \dots, n$.

$$\sigma = 1: m_{11} \ddot{\eta}_1 + m_{12} \ddot{\eta}_2 + \dots + m_{1n} \ddot{\eta}_n + v_{11} \eta_1 + v_{12} \eta_2 + \dots + v_{1n} \eta_n = 0$$

$$\sigma = 2: m_{21} \ddot{\eta}_1 + m_{22} \ddot{\eta}_2 + \dots + m_{2n} \ddot{\eta}_n + v_{21} \eta_1 + \dots + v_{2n} \eta_n = 0$$

:

$$\sigma = n: m_{n1} \ddot{\eta}_1 + m_{n2} \ddot{\eta}_2 + \dots + m_{nn} \ddot{\eta}_n + v_{n1} \eta_1 + v_{n2} \eta_2 + \dots + v_{nn} \eta_n = 0$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \hat{M} \cdot \ddot{\vec{\eta}} + \hat{V} \vec{\eta} = 0$$

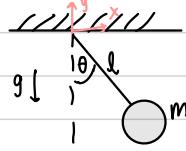
$$; \quad \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

Ec. diferencial matricial de 2^{do} orden, homogénea.

Luce como un oscilador armónico, pero matricial.

- Esto corresponde a un típico problema de autovalores. $\hat{A} \vec{v} = \lambda \vec{v}$

Ejemplo: "Péndulo plano".



$$X = l \sin \theta$$

$$Y = -l \cos \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = -mgl \cos \theta + \phi^0$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

$$\underline{\underline{E-L}}: \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Apliquemos el formalismo de pequeñas oscilaciones:

Este problema tiene sólo 1 coord. generalizada:

$$q_1 = q_\theta = \theta = q_\lambda = q_\sigma \rightarrow \sigma = \lambda = 1!$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y$$

* en torno a la posic
de equilibrio!

$$m_{\sigma\lambda}^0 = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \right) \Big|_{q_0}, \quad i: 1, 2, \dots, \sigma = \lambda = 1$$

$$\rightarrow m_{11} = m_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right) \Big|_{q_0} + m_2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1} \right) \Big|_{q_0} \quad m_1 = m_2 = m$$

$$= m \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 \Big|_{\theta_0} + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 \Big|_{\theta_0} \right] = m \left[(l \cos \theta_0)^2 + (l \sin \theta_0)^2 \right]$$
$$= m [l^2 \cos^2 \theta_0 + l^2 \sin^2 \theta_0]$$

$$\rightarrow m_{11} = m l^2$$

$$\rightarrow v_{r\lambda} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial q_\lambda} \right) \Big|_{q_0}$$

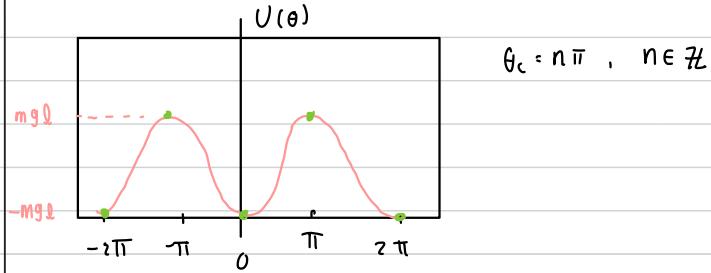
$$v_{rr} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial q_r} \right) \Big|_{q_0} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right) \Big|_{\theta_0} = mg l \cos \theta_0$$

$$\rightarrow m_{11} \ddot{\eta}_\theta + U_{rr} \eta_\theta = 0$$

$$\hookrightarrow m l^2 \ddot{\eta}_\theta + mg l \cos \theta_0 \cdot \eta_\theta = 0$$

$$\rightarrow \ddot{\eta}_\theta + \frac{g}{l} \cos \theta_0 \eta_\theta = 0$$

Ecuación dinámica de la perturbación η_θ en torno a la posición de equilibrio θ_0 .



* Ptos. críticos.

$$\theta_0' = 0, \quad \theta_0'' = \pi$$

Antes de evaluar estos equilibrios, buscaremos primero una solución a la ec. dinámica para η_θ

solución de prueba.

$$\text{Ansatz: } \eta_\theta(t) = A e^{bt} + B e^{-bt}, \quad A, B, b \text{ des!}$$

$$\ddot{\eta}_\theta = b^2 A e^{bt} + B b^2 e^{-bt} = b^2 \eta_\theta(t)$$

$$\rightarrow b^2 \eta_\theta(t) + \frac{g}{l} \cos \theta_0 \eta_\theta(t) = (b^2 + \frac{g}{l} \cos \theta_0) \eta_\theta(t) = 0$$

i) $\eta_\theta(t) = 0 \rightarrow$ no física.

puede tomar cualquier valor!

ii) $(b^2 + \frac{g}{l} \cos \theta_0) = 0 \rightarrow \eta_\theta(t) \neq 0 \quad \forall t!$

$$b = \pm \sqrt{-\frac{g}{l} \cos \theta_0}$$

A, B → determinan vía condiciones iniciales.

Evaluemos en los ptos. críticos:

$$\underline{\theta_0' = 0} \rightarrow b = \pm \sqrt{\frac{g}{l} \cos \theta} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}$$

* $\eta_\theta(t)$ es una perturbación en torno al equilibrio.

$$\left[\therefore \eta_\theta(t) = A e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + B e^{+i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \right] \sim \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

→ sol. oscilatorias. ⇒ equilibrio estable



⇒ sol. acotadas.



$$\underline{\theta_0^\circ = \pi} : \quad b = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \pi = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \in \mathbb{R}.$$

$$q_\sigma = q_\sigma^\circ + \eta_\sigma$$

↓
La variable va a crecer en el tiempo.

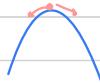
$$\left[\therefore \eta_\theta(t) = A e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + B e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \right] \sim \sinh h + \cosh h$$

⇒ sol. no acotadas

diverge

converge.

→ "la perturbación escapará de la posición de equilibrio".



2^{do} método "Directo al hueco". \rightarrow directo a la ec de movimiento.

$$\text{Ec. mov. péndulo plano} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

Perturbemos "directay." en torno a una posició de equilibrio:

$$\theta = \theta_0 + \eta_\theta \quad \rightarrow \eta_\theta \text{ es pequeño.}$$

$$\therefore \sin\theta = \sin(\theta_0 + \eta_\theta) = \sin\theta_0 \cdot \cos\eta_\theta + \cos\theta_0 \cdot \sin\eta_\theta \\ \approx \cos\theta_0 \cdot \eta_\theta$$

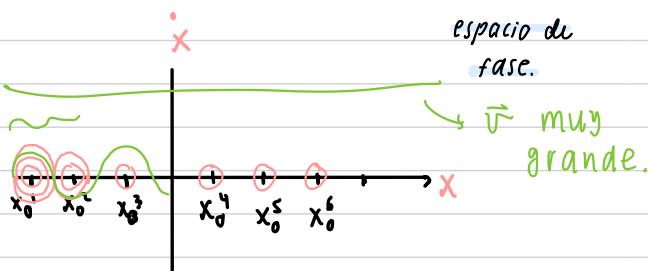
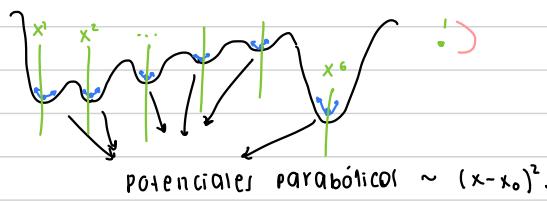
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\eta}_\theta + \frac{g}{l} \cos\theta_0 \eta_\theta = 0} \quad \boxed{\ddot{\theta} = \ddot{\eta}_\theta}$$

el martes haremos un ejemplito en 1D con $V=U(x)$.

$$W = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}} \quad \rightarrow \text{máx} \Rightarrow 2 \text{ deriv. neg.} \Rightarrow \text{complicado}$$

siempre podemos decir que es del estilo x^1 (para bólidos) ya que x^3 es muy chico (+ que x).

- Para cualquier funció $U(x)$ arbitraria (bien comportada), siempre podremos mirar con una "lupa" en torno a las posiciones de equilibrio estables (mínimos $U''>0$).
- En torno a esas posiciones, el potencial siempre lucirá como una parábola:



Capítulo 2: "Vibraciones y oscilaciones acopladas"

13. Abril.

① Oscilador armónico:

Hace unos 300 años, Robert Hooke descubrió que una masa sujeta al extremo de un resorte experimenta una fuerza "centrosimétrica" dada por:

$$F = -kx \quad \rightarrow \text{la dependencia de la fuerza es lineal respecto al estiramiento}$$

⇒ "Física lineal"
del resorte.

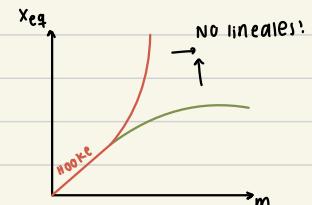
* k : ct. de restitución del resorte.

→ comportamiento ya no es lineal.

└ Aparece con un grado de exceso fuerte (+ energía)

Desafío experimental:

$$mg \downarrow \quad \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} y_{eq} \quad \rightarrow mg = k(y_{eq} - l_0).$$



* $\vec{P} = \epsilon_0 \vec{x}^0 \vec{E} \rightarrow \text{respuesta lineal.}$

+ $\epsilon_1 \vec{x}^{(1)} \vec{E}^2 \rightarrow \text{generación de colores. (generación de } \omega \text{ armónica).}$

$$F = -k_1 x^1 + k_2 x^2 + k_3 x^3 + k_4 x^4 + \dots$$

"física no lineal"

→ detrás de Hooke: Taylor al¹ orden. (buena aproximación).

Caos: sensibilidad a las condiciones iniciales.

son deterministas.

Ejemplo : "Péndulo plano"

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

$\cancel{\text{X}}' \rightarrow \sin \theta \approx \theta$.

$$\therefore \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \rightarrow \omega_0^2 = g/l$$

\Rightarrow periodo t dura. "Péndulo simple".

\rightarrow Términos pares no aparecen.

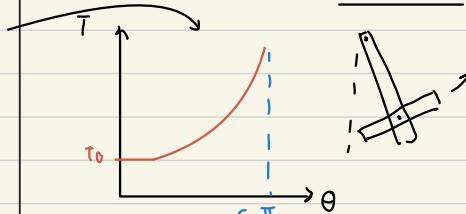
$$\cdot \sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad \text{Hooke "no lineal".}$$

$$\hookrightarrow k_1 = 0, k_3 = 0$$

* válido r ángulo.

sist. no lineal
cúbico.

Desafío 2

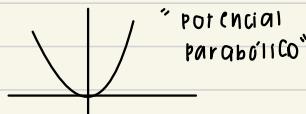


\hookrightarrow punto de equilibrio. Diverge en π .
Periodo ∞ ya que si lo dejo en π se queda (anque inestable).

Para Hooke podemos escribir un potencial como:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow F = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

↳ si U es conservativo, si F depende linealmente de la distancia.



para un sistema arbitrario conservativo, lo, caracterizado por un potencial genérico $U(q)$, podemos estudiar lo que sucede cercano a los pts. de equilibrio. supongamos que $U(q)$ tiene un equilibrio en q_0 , por lo que en la proximidad de q_0 , si $U(q)$ se comporta suavemente, podemos expandir en taylor en torno a esta pos \circ y obtener:

$$U(q) = U(q_0) + U'(q_0) q + \frac{1}{2} U''(q_0) q^2 + \dots$$

Primer término del potencial siempre va a ser parabólico

- 1^{er} término es irrelevante (la dt).

- 2^{do} término es nulo \rightarrow pos \circ de equilibrio.

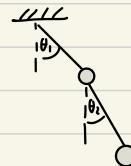
- 3^{er} término es el 1º que afecta realmente la dinámica.

Hooke. →

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} U''(q_0) q^2 + \dots$$

En 1era aproximación todo potencial es parabólico en torno a una posición de equilibrio.

Péndulo doble



La más inestable
xq tiene más
energía.

* cuando el sistema es muy caótico en un punto, la divergencia entre las trayectorias es muy grande.

Eg. de mov@: $\ddot{m}x + kx = 0$ Ec. de 2º orden diferencial, lineal

→ 2 dtu para resolverla

Ansatz: $x(t) = C e^{\lambda t}$; C, λ dtos a determinar.

$$\hookrightarrow m\lambda^2 C e^{\lambda t} + k C e^{\lambda t} = 0$$

$$(m\lambda^2 + k) C e^{\lambda t} = 0$$

$$\text{At } \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

$$\lambda = \pm i \omega_0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

↳ 2 soluciones!

* Cts deben ser complejas para llegar a una solu θ real.

"Principio de superposición":

$$\rightarrow x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 \bar{e}^{i\omega_0 t}$$

↪ sólo para física lineal. (al cuadrado no funciona).

para encontrar C_1 y C_2 utilizamos las cond. iniciales:

$$x(0) = x_0$$

$$v(0) = \dot{x}(0) = v_0$$

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = i\omega_0 (C_1 - C_2) = v_0$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{i\omega_0} \right) = \frac{1}{2} \left(x_0 - i \frac{v_0}{\omega_0} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0}{i\omega_0} \right) = \frac{1}{2} \left(x_0 + i \frac{v_0}{\omega_0} \right)$$

$$\hookrightarrow C_2 = C_1^*$$

También, podemos escribir esta solución en términos de senos y cosenos.

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm i \sin \omega_0 t.$$

$$\rightarrow x(t) = \theta_1 \cos \omega_0 t + \theta_2 \sin \omega_0 t$$

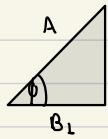
$$\theta_1 = C_1 + C_2$$

$$\theta_2 = i(C_1 - C_2)$$

$$B_1 = x_0$$

$$B_2 = \frac{V_0}{\omega_0}$$

Por último, podemos reescribir considerando:



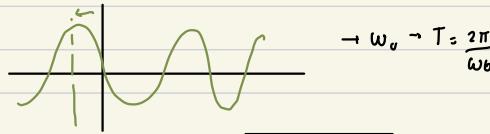
$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$

$$\tan \phi = \frac{B_2}{B_1}$$

$$x(t) = A \left(\frac{B_1}{A} \cos \omega_0 t + \frac{B_2}{A} \sin \omega_0 t \right)$$

$$= A \left(\cos \phi \cos \omega_0 t + \sin \phi \sin \omega_0 t \right)$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi) \quad A, \phi \text{ dts.}$$



$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{V_0}{x_0 \omega_0}$$

Control

2 problemas de Lagrangiano → pequeñas perturbaciones

↳ 1 directo al

· No fuerzas de restricción.

lunes o

· Optimizado → cálculo variacional.

formalismos

optimizado como la tarea ↓

equilibrios , pequeñas perturbaciones

Osciladores acoplados

"Vibraciones"

18-abril

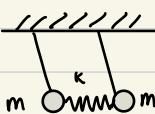
+ cerca en el espacio
⇒ + rápido el
acoplamiento (interacción
decae con la distancia)

* msn. frecuencia
→ + grave → 1º modo
→ msn. energía.

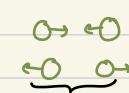
Acoplamiento ⇒ interacción entre osciladores

• Si existe alguna configuración de equilibrio en un sistema arbitrario, podemos esperar que el movimiento de este sistema como un todo, se mantenga acotado en torno a ese equilibrio (régimen lineal).

Ej. guía 2 → P8



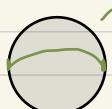
Fase



fuera de fase.

- A sist. físico el de + baja energía es en fase.
- n grados de libertad , n péndulos , n modos posibles.

Átomo de hidrógeno

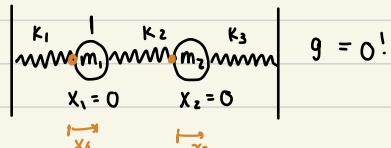


~ S



~ P.

Cadena lineal con 2 masas acopladas:



$$g = 0!$$

Cadena lineal (osc. pequeñas) con desplazamiento sólo en el eje horizontal.
respecto a las p.eq.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

$$\underline{E-L} \quad m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1 + (k_2 + k_1) x_1 - k_2 x_2 = 0.$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 (x_1 - x_2) + k_3 x_2 = m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - k_2 x_1 = 0.$$

fijarse en los resorte, no masas →

* Si $k_2 = 0 \Rightarrow$ oscilaciones desacopladas.	\rightarrow Sistema de osciladores acoplados! $\rightarrow k_2$ responsable.
	Vector posición: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$
con p.d. se llega a lo mismo	$\rightarrow \hat{M} \ddot{\vec{x}} + \hat{V} \dot{\vec{x}} = 0$ Ec. matricial tipo oscilador armónico
	$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ $\hat{V} = \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}$
	Modos "naturales" de oscilación (fase y contrafase) Tienen una característica común:
	\rightarrow Ambos modos de oscilación "natural" tienen una freq. característica.
	\rightarrow Modos en fase: $\theta_1 = \theta_2 \rightarrow$ Fase 0. ($e^{i\theta} = 1$)
	\rightarrow Modos fuera de fase: $\theta_1 = -\theta_2 \rightarrow$ fase π ($e^{i\pi} = -1$)
* $w = \frac{E}{\hbar}$ en cuántica.	Ansatz: $\vec{z} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$, ω freq. natural de oscilación de cada modo.
$\ddot{\vec{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \omega^2 e^{i\omega t}$ $= -\omega^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$ $= -\omega^2 \vec{a}$	* Importante. $x_1(t)$, $x_2(t) \rightarrow$ Distancia [m]
	$\dot{\vec{x}}(t) = \text{Re}[\vec{a}(t)]$
	$\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$
	$\hat{M} \cdot -\omega^2 \vec{a} + \hat{V} \vec{a} = 0$
	$(\hat{V} - \omega^2 \hat{M}) \vec{a} = 0$ \vec{a} = 0 forme!
	$ \hat{V} - \omega^2 \hat{M} = 0 \rightarrow$ problema de autovalores!
	Modos naturales se obtendrán como resultado de resolver este problema de autovalores.
Métricas \neq alteran el $\leftrightarrow \hat{M}$: se conoce como métrica y se dice que esta ecua \circ matricial es un problema de autovalores en la métrica \hat{M} .	
* a: amplitud.	

$$|\hat{V} - \omega^2 \hat{M}| = 0$$

• caso 1: sistema simétrico

$$\rightarrow m_1 = m_2 = m, K_1 = K_2 = K_3 = K$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = m \hat{I}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 2K - m\omega^2 & -K \\ -K & 2K - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (2K - m\omega^2)^2 - K^2 = 0 \rightarrow (2K - m\omega^2)^2 = K^2$$

$$\rightarrow 2K - m\omega^2 = \pm K$$

$$\omega^2 = \frac{2K \pm K}{m} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\text{K/m}} \\ \xrightarrow{3K/m} \end{matrix}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{m} \quad \rightarrow \text{orden "Energía".}$$

Efecto fotoeléctrico

$$E \sim \omega \rightarrow E = h\nu \rightarrow \text{menos energía, menor frecuencia.}$$

$$\bar{x}(t) = \bar{a} e^{i\omega t} \quad \rightarrow * \text{ tarea: demuéstrese a sí mismo que si escoge } \bar{e}^{i\omega t} \text{ obtendrá lo mismo.}$$

Frecuencias naturales
de oscilación de este sistema.

Modos de oscilación:

$$\text{modo 1: } \omega_1^2 = K/m$$

$$(\hat{V} - \omega^2 \hat{M}) \bar{a} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2K - K & -K \\ -K & 2K - K \end{pmatrix} \bar{a} = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{a_1 = a_2}$$

• amplitudes iguales
comporta® en fase.

$$\vec{x}(t) = R e [\vec{z}(t)]$$

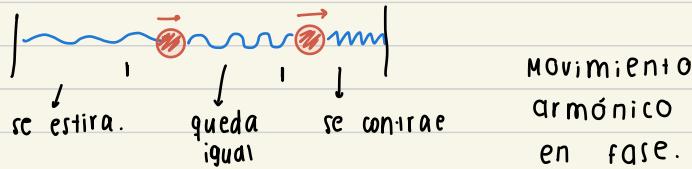
lo aplicé al modo normal 1

$$\vec{z}(t) = \vec{q} e^{i\omega t} = q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$q \in \mathbb{C} \rightarrow q_1 = A_1 e^{i\phi}$$

$$\vec{z}_1(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\omega_1 t - \phi)}$$

$$\boxed{\vec{x}_1(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi)} \rightarrow 1^{\text{er}} \text{ modo natural de oscilación.}$$



* cuatro grados de libertad
↳ cada pendulo tiene θ inicial

$$* \text{m} \xrightarrow{k} \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\text{Modo 2: } \omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

$$\begin{pmatrix} 2k-3k & -k \\ -k & 2k-3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{q_1 = -q_2}$$

relación de fase ir entre grados de libertad distintos

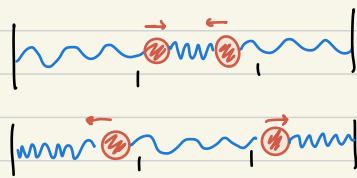
$$\hookrightarrow e^{i\pi} = -1.$$

$$\vec{z}_2(t) = \vec{q}_2 e^{i\omega_2 t}$$

$$= q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}, q_2 \in \mathbb{C}$$

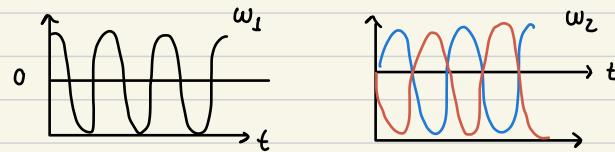
$$q_2 = A_2 e^{-i\phi_2} \rightarrow \vec{z}_2(t) = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i(\omega_2 t - \phi_2)}$$

$$\boxed{\vec{x}_2(t) = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)}.$$



Mov. armónico
fuera de fase.

Resumen movimiento:



$$x_1^1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \quad x_2^1(t) = A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

$$x_1^2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \quad x_2^2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2).$$

Ahora bien, una sol. gral para este problema, consistirá en una combinación lineal de los modos naturales de oscilación, como los que acabamos de encontrar, ya que al ser un sistema con $N=2$ grados de libertad, requerimos entonces una base de sólo $N=2$ autovectores para describir completamente el sistema.

Escribamos lo sgte:

$$\vec{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

Problema original es de 2º orden diferencial (newton).

→ $2 \times N$ condiciones iniciales.

$2 \times N$ das a determinar!

$$\text{cond. iniciales } \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix}$$

→ Hay transferencia periódica de E.

legos en cursos ←

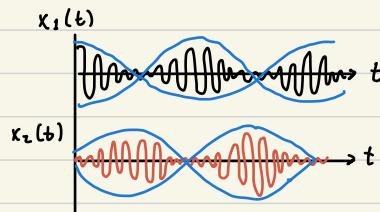
Ejemplo: Excitación de 1 solo oscilador (sin \vec{v} inicial).

$$x_1(0) = A, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

$$x_2(0) = 0$$

Expectativa → "transferencia periódica de energía entre osciladores".

Predictión teórica:



Cond. iniciales:

$$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \phi_1 + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\phi_2). \quad * \quad \vec{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1)$$

$$\vec{x}(0) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \omega_1 \sin \phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

$$\vec{x}(t) = A_1 \omega_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t - \phi_1) - A_2 \omega_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t - \phi_2)$$

$$\cdot A = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \quad \longrightarrow \quad A = 2A_1 = 2A_2.$$

$$0 = A_1 \cos \phi_1 - A_2 \cos \phi_2 \quad \longrightarrow \quad A_1 \cos \phi_1 = A_2 \cos \phi_2$$

$$0 = A_1 \omega_1 \sin \phi_1 + A_2 \omega_2 \sin \phi_2$$

$$0 = A_1 \omega_1 \sin \phi_1 - A_2 \omega_2 \sin \phi_2 \Rightarrow A_1 \omega_1 \sin \phi_1 = A_2 \omega_2 \sin \phi_2 = 0.$$

$$\omega_1, \omega_2 \neq 0, \quad A_1, A_2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \phi_1 = \phi_2 = 0 \quad \rightarrow \text{fases estándar} \quad , \text{ si hay } \vec{v} \text{ inicial, usualmente la fase es } \pi/2.$$

$$\Rightarrow A_1 = A_2 = A/2$$

$$\Rightarrow A_1 = A_2$$

$$\vec{x}(t) = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t) + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1(t) \\ \vec{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t \\ \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t \end{pmatrix}$$

Una solución gen. para nuestro problema original consistirá en una superposición de todas las soluciones armónicas del sistema:

* combinación lineal de las freq. que el sist. puede tener.

$$\vec{z}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \vec{a}_j e^{i\omega_j t}, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad n \text{ grados de libertad}$$

$\rightarrow \vec{\eta}(t) = \operatorname{Re}[\vec{z}(t)] \quad \rightarrow \text{coord. de los } n \text{ grados de libertad.}$

$$\vec{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{pmatrix}; \quad \eta_i(t) \text{ coordenada del } i\text{-ésimo oscilador.}$$

Ec. de autovalores nos dice: $\hat{V} \vec{a} = \omega^2 \hat{M} \vec{a}$

Autovector i -ésimo: $\hat{V} \vec{a}^i = \omega_i^2 \hat{M} \vec{a}^i$

Multiplicación de matriz \rightarrow
x vector

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ax_1 + Bx_2 + Cx_1 + Dx_2.$$

$$\sum_{\sigma} V_{\sigma\lambda} a_{\lambda}^i = \omega_i^2 \sum_{\sigma} M_{\sigma\lambda} a_{\lambda}^i$$

$$\text{Autovector } j\text{-ésimo: } \sum_{\lambda} V_{\tau\lambda} a_{\lambda}^j = \omega_j^2 \sum_{\lambda} M_{\tau\lambda} a_{\lambda}^j$$

Multiplicaremos ① y ② por: $\vec{a}^{\tau j}$ y $\vec{a}^{\tau i}$, respectivamente.

Además: nuestras matrices son hermíticas: $m_{\sigma\lambda} = m_{\lambda\sigma}$

$$V_{\sigma\lambda} = V_{\lambda\sigma}$$

$$\downarrow \quad \hat{M}^T = \hat{M} \\ \hat{V}^T = \hat{V}$$

$$\rightarrow \underbrace{\sum_{\sigma} \sum_{\lambda} a_{\sigma}^j V_{\sigma\lambda} a_{\lambda}^i}_{\text{eq. ①}} = \omega_i^2 \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} a_{\sigma}^j m_{\sigma\lambda} a_{\lambda}^i \quad \textcircled{A}$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{\sigma} \sum_{\lambda} a_{\sigma}^i V_{\tau\lambda} a_{\lambda}^j} = \omega_j^2 \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} a_{\sigma}^i m_{\sigma\lambda} a_{\lambda}^j \quad \textcircled{B}$$

$$\rightarrow \text{uso simetría matriz: } \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} q_{\lambda}^i \underbrace{v_{\lambda\sigma} q_{\lambda}^j}_{\text{reordenando}} = \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} q_{\lambda}^j v_{\lambda\sigma} q_{\sigma}^i$$

índices mudos: $\sum_{\lambda} \sum_{\sigma} q_{\sigma}^j v_{\sigma\lambda} q_{\lambda}^i = \left\{ \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} q_{\sigma}^j v_{\sigma\lambda} q_{\lambda}^i \right\}$

cambio orden
simetría.

lado derecho:

$$\omega_i^2 \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} q_{\lambda}^i m_{\lambda\sigma} q_{\sigma}^j = \omega_j^2 \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} q_{\lambda}^i m_{\sigma\lambda} q_{\sigma}^j = \omega_j^2 \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} q_{\sigma}^j m_{\sigma\lambda} q_{\lambda}^i$$

índices mudos
matriz simétrica.

$$= \omega_j^2 \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} q_{\sigma}^j m_{\sigma\lambda} q_{\lambda}^i$$

$$A - B : \boxed{o = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} q_{\sigma}^j m_{\sigma\lambda} q_{\lambda}^i}$$

Si todos los autovalores son distintos: $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$
(Física \rightarrow no hay degeneración).

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{\sigma} \sum_{\lambda} q_{\sigma}^j m_{\sigma\lambda} q_{\lambda}^i = 0}$$

$\Rightarrow \vec{q}^i$ y \vec{q}^j son vectores ortogonales, pero con un peso en la matriz \hat{M} . Se dice que estos vectores normales (naturales) son ortogonales en la "métrica de la matriz \hat{M} ".

$$\sum_{\sigma} \sum_{\lambda} q_{\sigma}^j m_{\sigma\lambda} q_{\lambda}^i \rightarrow \vec{q}^i \cdot \hat{M} \cdot \vec{q}^i$$

$$\underline{\text{Ejemplo: }} \hat{M} = m \hat{I} \rightarrow m \vec{q}^i \cdot \vec{q}^i = m A \cdot \delta_{ij}$$

$$\text{Delta de Kronecker: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

los modos normales (naturales) forman una base ortogonal cuando $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$.

$$\text{Si } i=j \rightarrow \omega_i^2 - \omega_j^2 = 0$$

siempre podremos normalizar los autovectores de forma arbitraria, tal que:

$$\sum_{\sigma} \sum_{\lambda} a_{\sigma}^i m_{\sigma \lambda} q_{\lambda}^i = 1 \rightarrow \text{convención arbitraria.}$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} a_{\sigma}^j m_{\sigma \lambda} q_{\lambda}^i = \delta_{ij}$$

$$\xrightarrow{\text{matricial}} (\vec{q}^j)^T \cdot \hat{M} \cdot \vec{q}^i = \delta_{ij}.$$

Definimos una matriz muy especial, conocida como "matriz modal", como aquella matriz "cavé" para el problema de osciladores acoplados y que se construye "colgando" los autovectores normalizados del sistema:

MATRIZ	$\hat{A} =$	$\begin{pmatrix} q_1^1 & q_1^2 & \dots & q_1^n \\ q_2^1 & q_2^2 & \dots & q_2^n \\ \vdots & & & \\ q_n^1 & \dots & & q_n^n \\ \downarrow & & & \downarrow \\ \vec{q}^1 & & & \vec{q}^n \end{pmatrix}$
--------	-------------	---

$$\rightarrow \hat{A}^T \cdot \hat{M} \cdot \hat{A} = \hat{I}$$

la matriz modal \hat{A} diagonaliza a la matriz \hat{M} .

* Chequear: $\boxed{n=2}$

Definamos la famosa matriz de autovalores:

$$\hat{\omega}^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

Recordemos que: $\hat{V}\vec{q}^i = \omega_i^2 \hat{M}\vec{q}^i / \vec{q}^{iT}$

$$\vec{q}^{iT} \hat{V} \vec{q}^i = \omega_i^2 \underbrace{\vec{q}^{iT} \hat{M} \vec{q}^i}_{\delta_{ij}} = \omega_i^2 \delta_{ij}$$

$\rightarrow \hat{A}^T \cdot \hat{V} \cdot \hat{A} = \hat{\omega}^2$ · la matriz modal \hat{A} también diagonaliza la matriz de "acoplado" \hat{V} .

* Lo realizado hasta ahora, supuso que no hay degeneración. ($\omega_i^2 \neq \omega_j^2$). Cuando hay degeneración ($\omega_i^2 = \omega_j^2$), el argumento de orthonormalidad derivado recién se complica. Siempre podremos recurrir a Gram - Schmidt para obtener una base ortogonal.

Ej

$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} m \\ k \\ m \end{pmatrix}$	$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
---	---

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = 3 \frac{k}{m}$$

$\vec{q}_1 = \text{Fase}$ $\vec{q}_2 = \text{Fuera de fase} \rightarrow \vec{q}_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{q}_1^T \cdot \hat{M} \cdot \vec{q}_1 = \alpha_1 (1) \underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{mI} \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = m \alpha_1^2 \cdot 2 = 1$$

$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}$

$$\vec{q}_2^T \cdot \hat{M} \cdot \vec{q}_2 = \alpha_2 (1 - 1) \underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{mI} \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_2^2 \cdot 2m = 1$$

$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}$

$$\vec{q}^1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{q}^2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
en fase fuera de fase.

$$\rightarrow \hat{A}^\top \cdot \hat{M} \cdot \hat{A} = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \hat{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{m}{2m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \hat{I} //$$

$$\rightarrow \hat{A}^\top \cdot \hat{V} \cdot \hat{A} = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k}{2m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k}{2m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{k}{2m} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} km & 0 \\ 0 & 3km \end{pmatrix}}_{\text{freq.}}$$

coordenadas normales

27·abr.

La idea de hoy será describir un estado general de oscilación / vibración de un sistema de osciladores acoplados:

$$\vec{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\sum_{j=1}^n c_j \vec{\alpha}_j e^{i\omega_j t} \right]$$

Por otro lado, trataremos de cambiar estas coordenadas ($\vec{\eta}$) a otra vía, natural #, la matriz modal:

$$\vec{\eta}(t) = \hat{A} \cdot \vec{\xi}(t) \quad ; \quad \xi \text{ coordenadas normales.}$$

$$\rightarrow \vec{\eta}^\top = (\hat{A} \vec{\xi})^\top = \vec{\xi}^\top \hat{A}^\top \quad \rightarrow \text{demuestrelo!}$$

$$* \hat{A}^\top \hat{V} \hat{A} = \hat{\omega}^2$$

$$\hat{A}^\top \hat{M} \hat{A} = I$$

$$\rightarrow \hat{A}^\top \hat{M} \hat{A} \cdot \vec{\xi}(t) = \vec{\xi} = \hat{A}^\top \hat{M} \cdot \vec{\eta}$$

"coordenadas normales"

Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} (m_{\lambda\sigma} \dot{\eta}_{\lambda} \dot{\eta}_{\sigma} - V_{\lambda\sigma} \eta_{\lambda} \eta_{\sigma}) - \cancel{U_0}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} (\dot{\eta}_{\lambda} m_{\lambda\sigma} \dot{\eta}_{\sigma} - \eta_{\lambda} V_{\lambda\sigma} \eta_{\sigma})$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{\eta}^\top \cdot \hat{M} \cdot \vec{\eta} - \vec{\eta}^\top \hat{V} \vec{\eta})$$

→ A no depende de t.

$$= \frac{1}{2} (\vec{\xi}^\top \underbrace{\hat{A}^\top \cdot \hat{M} \cdot \hat{A}}_{\hat{\xi}} \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi}^\top \underbrace{\hat{A}^\top \hat{V} \hat{A}}_{\hat{\omega}^2} \cdot \vec{\xi})$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{\xi}^\top \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi}^\top \hat{\omega}^2 \cdot \vec{\xi})$$

$$\rightarrow \hat{\omega}^2 \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \omega_1 \xi_1 \\ \omega_2 \xi_2 \\ \vdots \\ \omega_n \xi_n \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{\xi}_i^2 - \omega_i^2 \xi_i^2)$$

Lagrangiano "diagonalizado", porque cada coordenada normal era desacoplada de las otras.

$$\underline{E-L} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0 \quad \rightarrow \ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$$

∴ cada coordenada normal ξ_i oscila de forma independiente con frecuencia ω_i , tal como si fuera un simple oscilador armónico.

* Frec. son reales ya que las matrices son hermíticas. Nunca va a haber sol. hiperbólicas.

EN LAS COORDENADAS NORMALES EL MOVIMIENTO SIEMPRE SERÁ EL RESULTADO DE LA OSCILACIÓN DE "n" OSCILADORES INDEPENDIENTES / DESACOPLADOS, CADA UNO CON FRECUENCIA ω_i , EN CADA UNO DE LOS GRADOS DE LIBERTAD "n":

$$\text{SOLUCIÓN: } \xi_i(t) = c_i \cos(\omega_i t - \phi_i)$$

$$\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \\ c_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \\ \vdots \\ c_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \end{pmatrix}$$

c_i, ϕ_i
↳ SE DETERMINAN
VIA CONDICIONES INICIALES.

RECORDAMOS QUE EL PROBLEMA ORIGINAL A RESOLVER SIGUE SIENDO EL CONOCER / DETERMINAR EL VECTOR $\vec{\eta}(t)$, $\forall t$.

PARA DETERMINAR ESTE PROBLEMA DE 2^{DO} ORDEN DIFERENCIAL, REQUERIMOS DE LAS SIG. CONDICIONES INICIALES:

$\vec{\eta}(0)$ Y $\dot{\vec{\eta}}(0)$. → 2n CONDICIONES INICIALES.
t = 0 → 2n CTOS A DETERMINAR.

$$\vec{\eta}(t) = \hat{A} \cdot \vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & : & & : \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \\ c_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \\ \vdots \\ c_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\eta_i(t) = \sum_{\lambda=1}^n a_i^\lambda c_\lambda \cos(\omega_\lambda t - \phi_\lambda)} \rightarrow \text{DEMUESTRELO.}$$

Si conocemos la base del problema: a_i^λ y ω_λ y las cond. iniciales $\vec{\eta}(0)$ y $\dot{\vec{\eta}}(0)$, entonces podremos conocer un estado arbitrario ($\vec{\eta}(t)$) del sistema acoplado $\forall t$.

$$i) \text{ Masas idénticas: } \hat{M} = m \cdot \hat{I}$$

$$\rightarrow \vec{q}_i^T \cdot \hat{M} \cdot \vec{q}_i = m \cdot \vec{q}_i^T \cdot \vec{q}_i = \delta_{ij}.$$

Cond. iniciales: $\vec{\eta}(0)$ y $\dot{\vec{\eta}}(0)$

$$\vec{\eta} = \hat{A} \cdot \vec{\xi} \quad / \cdot \vec{q}_i^T$$

$$\vec{q}_i^T \cdot \vec{\eta} = \sum_{i=1}^n q_i^j \cdot \eta_i = (\vec{q}_i)^T \cdot \hat{A} \cdot \vec{\xi}$$

$$= (\vec{q}_i)^T \cdot \left(\sum_{\lambda} q_{i\lambda}^j c_{\lambda} \cos(\omega_{\lambda} t - \phi_{\lambda}) \right)$$

$$\sum_i q_i^j \eta_i = \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} q_{i\sigma}^j q_{\sigma\lambda}^j c_{\lambda} \cos(\omega_{\lambda} t - \phi_{\lambda}).$$

$$= \sum_{\lambda} c_{\lambda} \cos(\omega_{\lambda} t - \phi_{\lambda}) \underbrace{\sum_{\sigma} q_{i\sigma}^j q_{\sigma\lambda}^j}_{\frac{\delta_{i\lambda}}{m}}$$

\rightarrow Único término que sobrevive: $\sum A_i \delta_{ij} = A_j$

$$\therefore \boxed{\sum_i q_i^j \eta_i = \frac{c_j}{m} \cos(\omega_j t - \phi_j)}$$

$$\sum_i q_i^j \cdot \dot{\eta}_i = -\frac{c_j}{m} \omega_j \sin(\omega_j t - \phi_j)$$

$$\underset{t=0}{\sum_i} q_i^j \eta_i(0) = \frac{c_j}{m} \cos \phi_j \quad \textcircled{A}$$

$$\sum_i q_i^j \dot{\eta}_i(0) = \frac{c_j}{m} \sin \phi_j \quad \textcircled{B}$$

$$A^2 + B^2 \Rightarrow \boxed{c_j = m \sqrt{\left(\sum_i q_i^j \eta_i(0) \right)^2 + \left(\frac{\sum_i q_i^j \dot{\eta}_i(0)}{\omega_j} \right)^2}}$$

$$\frac{B}{A} \Rightarrow \boxed{\tan \phi_j = \frac{1}{\omega_j} \frac{\sum_i q_i^j \dot{\eta}_i(0)}{\sum_i q_i^j \eta_i(0)}}$$

$$* \text{TÍPICO} \rightarrow \eta_i(0) = 0 \Rightarrow \phi_j = 0$$

$$\eta_i(0) = 0 \Rightarrow \phi_j = \frac{\pi}{2}.$$

ii) Masas distintas: $m_i \neq m_j$

En este caso, la condición de ortogonalidad no es tan directa (hay que pasar a través de la métrica m^*) y habrá que resolver algebraicamente las ecs. de forma directa.

Esto es:

$$\eta_i(t) = \sum_{\lambda=1}^n a_i^\lambda c_\lambda \cos(\omega_\lambda t - \phi_\lambda)$$

$$\dot{\eta}_i(t) = - \sum_{\lambda=1}^n a_i^\lambda c_\lambda \omega_\lambda \sin(\omega_\lambda t - \phi_\lambda)$$

$$\eta_i(0) = \sum_{\lambda=1}^n a_i^\lambda c_\lambda \cos(\phi_\lambda)$$

$$\dot{\eta}_i(0) = \sum_{\lambda=1}^n a_i^\lambda c_\lambda \omega_\lambda \sin(\phi_\lambda)$$

Ej



$$\vec{q}^1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q}^2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\eta}(t) = \hat{A} \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \\ c_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} c_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + c_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \\ c_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) - c_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \end{pmatrix}$$

$$\text{si cond. inicial } \bar{\eta}(0) = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\bar{\eta}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{c_1 = c_2}$$

2 grad. de libertad:

$$\rightarrow m \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

$$\rightarrow m \ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0$$

$$\oplus \quad m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega_1^2 x = 0$$

→ Es lo mismo!

$$\ominus \quad m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3k(x_1 - x_2) = 0 \rightarrow \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0.$$

\ddot{y}

$$x_1(t) = \frac{1}{2} (c_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + c_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2))$$

$$\rightarrow x_1(t) = \frac{x+y}{2}$$

$$\rightarrow x_2(t) = \frac{x-y}{2}$$



Sistemas con N grados de libertad

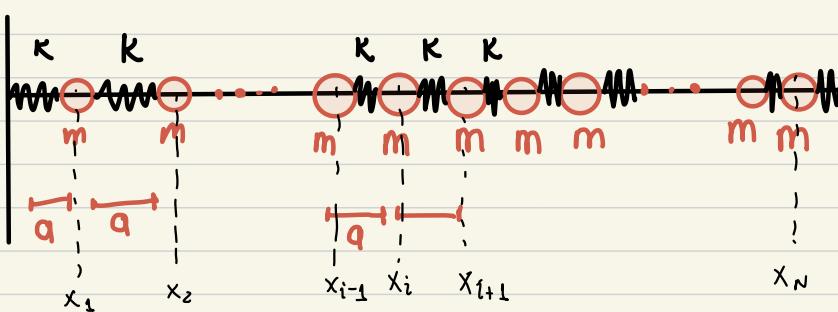
09.05.23.

ej. guía.



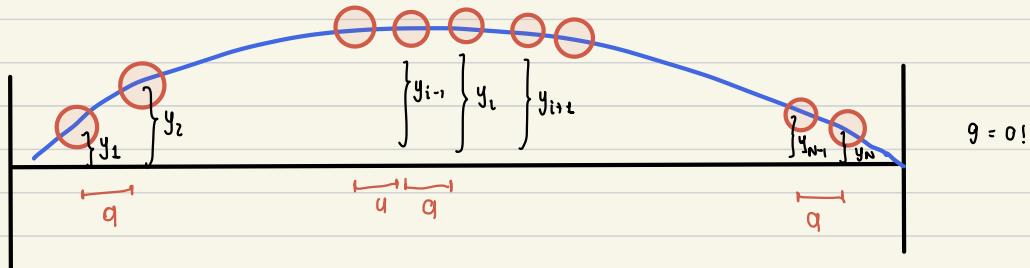
Trabajaremos con 2 ejemplos específicos:

a)



- N masas iguales unidas por resortes iguales.

b)



$y = 0!$

Importa cuánto se desplaza c/r a la pos. de equil.

física del estado sólido



* polarizaciones

↳ interac^{ción} electrones y fonones.

• superconductividad

↳ a t^0 bajas

fonones a $+T^0$ interac^{ción}.

* bandas finitas: solu^{ciones} dentro de éstas.

* bandas: solu^{ciones} lineales del siste. zonal donde viven los modos.

- N masas iguales unidas / pegadas a una cuerda de tensión $\text{de } T$.
→ La idea, igual que antes, es la de obtener / determinar los "N" modos normales de estos 2 sistemas.

→ Para resolver este problema, utilizaremos técnicas de sistemas extendidos (grandes) que son típicas en "física del estado sólido".

→ Las frecuencias de los N modos normales formarán lo que se conoce como el "espectro lineal" del problema o "estructura de bandas".

• Tanlo el problema ① como el ⑥ se clasificarían como sist. periódicos.
↳ "cristal". (Algun patrón mín. se replique).

Estudiemos ① el problema ①:

- En equilibrio, la separación entre masas es de: "a" .
- " x_i describirá el desplazamiento de la masa iésima a lo largo del sistema."

→ Coord. generalizadas: $q_\sigma = x_\sigma$; $\sigma = 1, \dots, N$.

Energía cinética: i -ésima $\rightarrow T_i = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2$

$$\therefore T = \sum_i T_i = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2$$

* $F = -kx$

Energía potencial: $U_i = \frac{1}{2} k (x_i - x_{i-1})^2 + \frac{1}{2} k (x_{i+1} - x_i)^2$

$$\therefore U = \frac{k}{2} \sum_{i=0}^N (x_{i+1} - x_i)^2$$

Exigimos:

$$\sim [x_{N+1} = 0]$$

|
N-1
N|

$$\sim [x_0 = 0]$$

|
1
2
N| $\rightarrow i=0 \rightarrow N$

$$\underline{i=i_0}: U = \dots \frac{k}{2} [(x_{i_0-1} - x_{i_0-2})^2 + (x_{i_0} - x_{i_0-1})^2 + (x_{i_0+1} - x_{i_0})^2 + (x_{i_0+2} - x_{i_0+1})^2] + \dots$$

$$U_i \rightarrow \frac{k}{2} (x_{i_0} - x_{i_0-1})^2 + \frac{k}{2} (x_{i_0+1} - x_{i_0})^2.$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} k \sum_{i=0}^N (x_{i+1} - x_i)^2.$$

$$E-L: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$



$$\rightarrow \ddot{x}_i + 2\omega_k^2 x_i - \omega_k^2 (x_{i+1} + x_{i-1}) = 0$$

↳ ¿Cómo resolvemos esto?

$$\cdot \omega_k^2 = \frac{k}{m}$$

$$\cdot x_0 = x_{N+1} = 0$$

$$\cdot i: 1 \dots N.$$

Comparar con

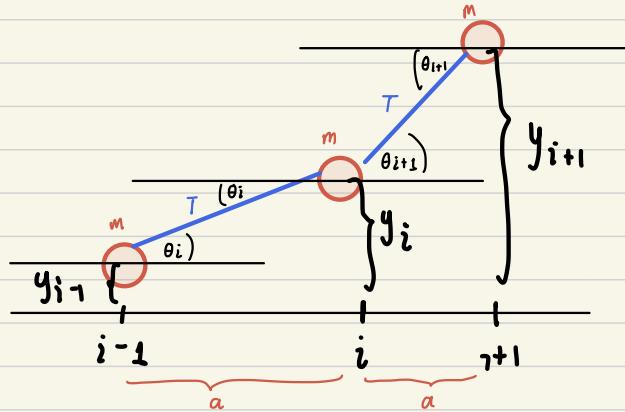
|
M
O
M
O
M|

|
M
O
M
O
M
O
M|

Estudiemos ahora el problema B: Td!

EN este caso, asumiremos que la cuerda sube y baja solamente, por lo que \nexists ningún desplazamiento horizontal de las masas en la cuerda.

\Rightarrow coord. generalizadas: $[q_\sigma = y_\sigma], \sigma = 1, \dots, N$



$$m \ddot{y}_i = T \sin \theta_{i+1} - T \sin \theta_i$$

Como las vibraciones son pequeños desplazamientos en torno a las posiciones de equilibrio.

→ Cuerda guitarra: desplazamiento $\sim \text{mm}$.

Largo cuerdas $\sim \text{m}$.

⇒ Δ's implicados son muy pequeños:

$\sin \theta \approx \tan \theta$; $\cos \theta \approx 1 \Rightarrow$ No hay mov. horizontal.

$$\sin \theta_{i+1} \approx \tan \theta_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{a}; \quad \sin \theta_i \approx \tan \theta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{a}$$

Si agrupamos todo:

$$\ddot{y}_i + 2\omega_0^2 \cdot y_i - \omega_0^2 \cdot (y_{i+1} + y_{i-1}) = 0. \quad \omega_0^2 = T/m a$$

$$y_0 = y_{N+1} = 0.$$

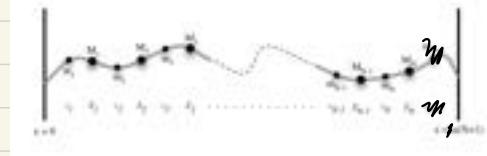
∴ La física del sist. A y el B es la misma. ¿Cómo paso del A al B?

$$x_i \rightarrow y_i; \quad k \rightarrow \frac{T}{a}$$

$$\rightarrow L = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N \dot{y}_i^2 - \frac{T}{2a} \sum_{i=0}^N (y_{i+1} - y_i)^2$$

Para resolver este problema y encontrar los modos normales del mismo, usaremos la técnica de "ondas planas" u "ondas viajeras" que es la forma estándar en física para resolver problemas extendidos de oscilaciones acopladas.

NOS enfocaremos específicamente en el ej. 6 de la guía 4.



¿Frecuencias y modos normales?

a) Ecs. de movimiento: $i \rightarrow n$ Rótulo!

$$\ddot{y}_n + 2\omega_n^2 y_n - \omega_n^2 (y_{n+1} + y_{n-1}) = 0 \quad ; \quad n = 2, \dots, N-1.$$

$$\ddot{y}_1 + 2\omega_1^2 y_1 - \omega_1^2 y_2 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0$$

$$\ddot{y}_N + 2\omega_N^2 y_N - \omega_N^2 (y_{N-1}) = 0 \quad ; \quad y_{N+1} = 0.$$

Principio de D'Alembert

11. may

$$\begin{array}{c} \uparrow\downarrow \\ \rightarrow \quad \leftarrow \\ f(x-vt) \quad g(x+vt) \end{array}$$

1D: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

Relación fundamental: $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$; k : n° de onda
 ω : freq. angular.

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$f[k(x-vt)] = f(kx - kvt) = f(kx - \omega t)$$

Dado un sistema ondulatorio t.q. hayan ondas en este, podremos construir un "ansatz" de las ondas que podrán viajar en este sistema. Si el sistema es completamente simétrico, entonces deberían existir sin ningún inconveniente ondas que viajen a la derecha y a la izquierda.

* k_x ya que las ondas pueden tener \neq dim. en el espacio.

1D continua: $\psi(x,t) = A e^{i(k_x x - \omega t)} + B e^{-i(k_x x + \omega t)}$

Como nuestro problema es "discreto": \downarrow
 $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$$x \rightarrow x_n = n \cdot a$$

$$y_n(t) = (\underbrace{A e^{i k_x n a}}_{y_n} + \underbrace{B e^{-i k_x n a}}_{y_n}) e^{-i \omega t}$$

$$\therefore y_n = -\omega^2 y_n$$

$$y_n(t) = y_n e^{-i \omega t}$$

ECS. de movi@: $\rightarrow [(2\omega_z^2 - \omega^2)y_n - \omega_z^2(y_{n+1} + y_{n-1})] e^{-i \omega t} = 0$

\downarrow depende del t .

$$(2\omega_z^2 - \omega^2)(A e^{i k_x n a} + B e^{-i k_x n a}) = \omega_z^2 [A e^{i k_x (n+1)a} + B e^{-i k_x (n+1)a} + A e^{i k_x (n-1)a} + B e^{-i k_x (n-1)a}]$$

$$= \omega_z^2 [A e^{i k_x n a} (\underbrace{e^{i k_x a} + e^{-i k_x a}}_{2 \cos k_x a}) + B e^{-i k_x n a} (\underbrace{e^{-i k_x a} + e^{i k_x a}}_{2 \cos k_x a})]$$

$$= 2\omega_0^2 \cos(k_x a) (A e^{ik_x n a} + B e^{-ik_x n a}).$$

$$(2\omega_0^2 - \omega^2 - 2\omega_0^2 \cos k_x a) (A e^{ik_x n a} + B e^{-ik_x n a}) = 0$$

$\neq 0$

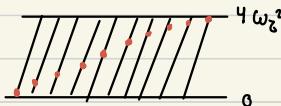
L

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos k_x a)$$

Frecuencias normales de los N osciladores acoplados en la cuerda.

$$\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \right)$$

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \left(\frac{k_x a}{2} \right).$$



Solo si es lineal.

Ǝ una "banda" de frecuencias permitidas



1º Bordo

$$n=1: \ddot{y}_1 + 2\omega_0^2 y_1 - \omega_0^2 y_2 = 0$$

$$\underbrace{(2\omega_0^2 - \omega^2)}_{\rightarrow} y_1 = \omega_0^2 y_2$$

$$(2\omega_0^2 \cos k_x a) \cdot y_1 = \omega_0^2 y_2$$

$$\omega_0^2 (e^{ik_x a} + e^{-ik_x a}) (A e^{ik_x \cdot 1 a} + B e^{-ik_x \cdot 1 a}) = \omega_0^2 (A e^{2ik_x a} + B e^{-2ik_x a})$$

$$\cancel{A e^{2ik_x a}} + B + A + \cancel{B e^{-2ik_x a}} = \cancel{A e^{2ik_x a}} + \cancel{B e^{-2ik_x a}}$$

$B + A = 0 \rightarrow B = -A$

Cambió la ecuación →

$$y_n = A e^{ik_x n a} + B e^{-ik_x n a}$$

$$= A (e^{ik_x n a} - e^{-ik_x n a}) = 2i A \sin(k_x n a). = y_n$$

2º Bordo

$$n=N: \ddot{y}_N + 2\omega_0^2 y_N - \omega_0^2 y_{N-1} = 0$$

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) y_N = \omega_0^2 y_{N-1}$$

$$\omega_0^2 (e^{ik_x a} + e^{-ik_x a}) \cdot A (e^{ik_x N a} - e^{-ik_x N a}) = \omega_0^2 A (e^{ik_x (N-1)a} - e^{-ik_x (N-1)a})$$

$$\rightarrow e^{ik_x (N+1)a} - e^{-ik_x (N-1)a} + \cancel{e^{ik_x (N-1)a}} - e^{-ik_x (N+1)a} = \cancel{e^{ik_x (N-1)a}} - e^{-ik_x (N-1)a}$$

$$\rightarrow e^{ik_x (N+1)a} - e^{-ik_x (N+1)a} = 0 \Rightarrow 0 = 2i \sin[k_x (N+1)a]$$

$$\Rightarrow k_x(N+1)a = v\pi, v \in \mathbb{Z}^+$$

N grados de libertad \rightarrow N modos normales.

$v: 1, \dots, N$.

$$\rightarrow \frac{k_x^v}{(N+1)a} = \frac{v\pi}{2(N+1)}$$

Cuantización de k_x !

$\rightarrow |\omega^2|$

Cuantizar la variable. \rightarrow

Modos normales

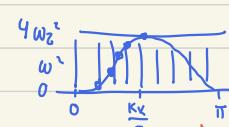
$$\omega^2 \rightarrow \omega_y^2 = 4\omega_b^2 \sin^2 \left[\frac{v\pi}{2(N+1)} \right]$$

N freq. normales.

$$y_n^v = \bar{A} \sin \left[\frac{v\pi}{(N+1)} n \right] \rightarrow y_n^v(t) = Y_n e^{-i\omega_y t}$$

RESUMEN

16 Mayo.

<p>Perfiles Y_n (\leftarrow cambia) los modos no cambian.</p> <p>oscila en el tiempo.</p>	<p>SOLUCIONES ESTACIONARIAS DEL PROBLEMA:</p> <p>\rightarrow Sol: $Y_n(t) = Y_n \cdot e^{-i\omega_n t}$</p> <p>• MODOS NORMALES SON SOL. ESTACIONARIAS.</p>	
<p>\rightarrow Relación de amplitudes se mantiene en el tiempo.</p>	$Y_n = A e^{ik_x n a} + B e^{-ik_x n a}$	
<p>(discretización de la segunda derivada) \leftarrow ecuación de onda en el discreto.</p>	<p>* $w_i^2 (Y_{n+1} + Y_{n-1} - 2Y_n) \rightarrow \sim \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$</p> <p>$\rightarrow w^2 = 4w_0^2 \cdot \sin^2\left(\frac{k_x a}{2}\right)$</p> <p>$\rightarrow Y_1, Y_N \rightarrow A = -B$.</p>	 <p>\rightarrow sólo pueden haber ω fuera de la banda si hay impurezas.</p>
	<p>• Y_n función seno (tiene sentido xq en el borde es 0).</p> <p>• si hay bordes libres probablemente sea coseno.</p>	<p>periodicidad. (buscar donde es máx y min).</p>
<p>lo importante es la relación de amplitudes de los modos:</p>	<p>$K_x: \text{nº discreto. (cuantizar)} \quad k_x^v = \frac{v\pi}{(N+1)a}, \quad v \in \mathbb{Z}^+, \quad v: 1, \dots, N$</p> <p>↓</p> <p>Periodos espaciales: $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$.</p>	<p>\downarrow osciladores.</p>
	<p>$Y_n(t) = \bar{A} \sin\left(\frac{v\pi}{(N+1)a} n\right) e^{-i\omega_n t}$</p>	
	<p>$w_y^2 = 4w_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi v}{2(N+1)}\right), \quad v: 1, \dots, N$</p>	
	<p>Ejemplos:</p> <p>$\underline{N=2}: \quad \rightarrow N+1=3 \quad \Rightarrow \quad v: 1, 2$</p> <p>$\underline{w_1} = 2w_0 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2w_0 \cdot \frac{1}{2} = w_0$</p> <p>$\underline{w_2} = 2w_0 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2w_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}w_0$</p>	<p>factor es el mismo.</p>

no podrían ser \neq
cn amplitud. (no hay
razón si son simétricos)

en fase

$$\rightarrow Y_{1,n} \sim \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \rightarrow Y_{11} \sim \frac{\sqrt{3}}{2}$$

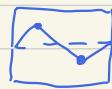
$$Y_{1,2} \sim \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{v=1} \Rightarrow \boxed{Y_{1,1} = Y_{1,2}}$$

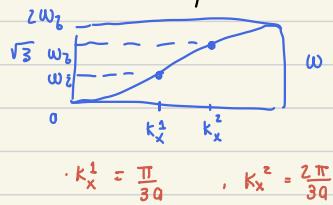
2 No forma una banda
pero viven dentro.

$$\underline{v=2} \Rightarrow Y_{2,n} \sim \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \rightarrow Y_{2,1} \sim \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{a contrafase} \rightarrow \boxed{Y_{1,1} = -Y_{1,2}}$$



$$Y_{2,2} \sim \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\underline{N=4:} \quad N+1 = 5 ; \quad v = 1, 2, 3, 4$$

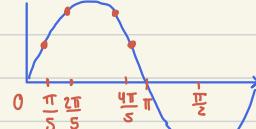
↳ 4 modos



$$\omega_1 = 2\omega_3 \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = 2\omega_3 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0,62 \omega_3 \quad , \quad K_x^1 = \frac{\pi}{5a}$$

$$Y_{1,n} \sim \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) \Rightarrow Y_{1,1} \sim \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0,6 \quad , \quad Y_{1,2} \sim \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0,95$$

$$Y_{1,3} \sim \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 0,95 \quad , \quad Y_{1,4} \sim \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0,6$$



$$Y_{1,1} = Y_{1,4}$$

$$Y_{1,2} = Y_{1,3}$$

$$\underline{v=2:} \quad \omega_2 = 2\omega_3 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1,18 \omega_3 \quad ; \quad K_2 = \frac{2\pi}{5a}$$

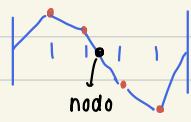
$$Y_{2,n} \sim \sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right) \rightarrow Y_{2,1} \sim \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0,95 \quad , \quad Y_{2,2} \sim \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0,6$$

$$Y_{2,3} \sim \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = -0,6 \quad , \quad Y_{2,4} \sim \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = -0,95$$

$$\downarrow \pi + \frac{\pi}{5}$$

$$\uparrow \pi + \frac{3\pi}{5}$$

Control:
pocos grados de lib.
↳ 10 freq.



$$V=3 : \quad \omega_3 = 1,62 \quad \omega_b, \quad K_3 = \frac{3\pi}{5a}$$

$$y_{3,n} \sim \sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right) \rightarrow y_{3,1} \sim \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 0,95, \quad y_{3,2} \sim \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = -0,6$$

$$y_{3,3} \sim \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos(2\pi) \cdot \sin\frac{\pi}{5}, \quad y_{3,4} \sim \sin\left(\frac{12\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos(2\pi) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0,95.$$

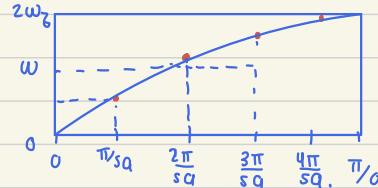


$$V=4 : \quad \omega_4 = 1,90 \quad \omega_b, \quad K_4 = \frac{4\pi}{5a}$$

$$y_{4,n} \sim \sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right) \rightarrow y_{4,1} \sim \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0,6, \quad y_{4,2} \sim \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = -0,95$$

$$y_{4,3} \sim \sin\left(\frac{12\pi}{5}\right) = 0,95, \quad y_{4,4} \sim \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \cos(3\pi) \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = -0,6.$$

Nodos: $\frac{v-1}{2}$
→ freq. positivas!



$$\omega_v = 2\omega_b \sin\left(\frac{k_1 a}{2}\right) = 2\omega_b \sin\left(\frac{\pi v}{2(N+1)}\right)$$

$$\omega_1 = 2\omega_b \sin\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) \quad ; \quad K_1 = \frac{\pi}{(N+1)a}$$

$$N \gg 1 \Rightarrow \omega_1 \rightarrow 2\omega_b \sin(\text{chico}) \approx 2\omega_b \frac{\pi}{2(N+1)} = \frac{\omega_b \cdot \pi}{(N+1)} \geq 0$$

$$K_1 = \frac{\pi}{(N+1)a} \geq 0$$

$\Rightarrow k_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \neq \text{fase entre masas vecinas nula.}$

$$Y_n = A e^{ik_x n a} + B e^{-ik_x n a}$$

$k_x^1 \rightarrow 0$, $Y_n = A + B = d.c.$ $\forall n \rightarrow$ igual fase entre ellas
 cuando hay muchos grados de libertad, tiende.
 al borde de la banda \hookleftarrow

\hookrightarrow fase del modo fundamental tiende a ser 0.

$$\omega_N = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi N}{2(N+1)}\right), k_N = \frac{\pi N}{(N+1)a}$$

$$N \gg 1 \rightarrow \omega_N \rightarrow 2\omega_0, k_N \rightarrow \frac{\pi}{a}$$

$$Y_n \rightarrow A e^{i\pi n} + B e^{-i\pi n}$$



modo de + energía. \hookleftarrow

relao de fase. \downarrow
 el π .

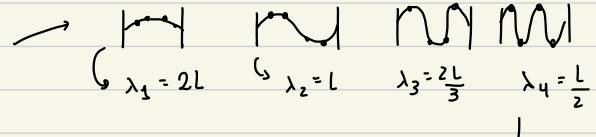
Transición desde sistemas discretos a sistemas continuos:

18. Mayo. 23

→ Microscopios llegan hasta resoluciones de micrómetros (luz visible).

- Partamos estudiando siste. discretos en el régimen de longitudes de onda larga.

λ : longitud de onda



- [Las ondas de radio son del mismo orden de magnitud que los cerros.]
- [λ grande "no ve" obstáculos pequeños.]

$$\downarrow k_{\max} \rightarrow \pi$$

- Para estas ondas grandes, la separación entre partículas (m) es irrelevante.

- Consideremos entonces, lo siguiente: $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$.

→ $L = (N+1)a = \text{cte!} \rightarrow$ Largo cuerdas!

Además, podemos definir una densidad de masa para la cuerda:

$$\sigma = \frac{m}{a} = \text{cte!}$$

los 1° modos:
 λ muy grande!

- Tomemos un modo y t.q.: $N \gg \nu$ (los de menor ν_f freq.)

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\nu\pi}{2(N+1)}\right) \approx \frac{\nu\pi}{2(N+1)}, \omega_0^2 = \frac{T}{m/q}$$

$$\therefore \omega_0^2 = \frac{4T}{m/q} \left(\frac{\nu\pi}{2(N+1)} \right)^2 \cdot \frac{a}{q} = \frac{T}{m/q} \left(\frac{\nu\pi}{(N+1)a} \right)^2$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\pi\nu}{L} \right)^2}$$

$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$: velocidad de la onda.

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

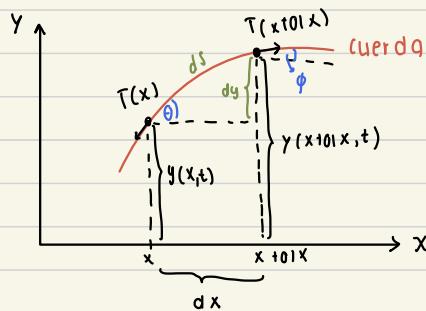
$\underbrace{\text{m} \cdot \overbrace{\text{a}}^{\text{largo}}}_{\text{m}}$

$$\omega_y^2 = c^2 \left(\frac{y\pi}{L} \right)^2 \rightarrow \boxed{\omega_y = c \cdot \left(\frac{y\pi}{L} \right)} \quad \text{Frecuencia en una cuerda uniforme}$$

$$c = \frac{\omega}{k} \rightarrow \boxed{k_y = \frac{y\pi}{L}}$$

$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y} \rightarrow \boxed{\lambda_y = \frac{2L}{y}} \quad \lambda_1 = 2L, \lambda_2 = L, \lambda_3 = \frac{2L}{3}, \lambda_4 = \frac{L}{2}$$

Tratamiento continuo de una cuerda:



$y(x,t)$: Desplazamiento transversal donde "x" es la variable continua que rotula o identifica la posición de la cuerda, en un tiempo dado "t".

$$y_n(t) \longrightarrow y(x,t)$$

consideremos la densidad de masa de la cuerda como σ . Un elemento infinitesimal de la cuerda tendrá entonces una masa:

$$dm = \sigma \cdot dx$$

En la aproximación de desplazamientos pequeños:

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \rightarrow \text{pendiente de la cuerda en la pos. "x".}$$

2da ley de Newton para el eje vertical:

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sigma dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T(x+dx) \sin \phi - T(x) \sin \theta.$$

$$\approx T(x+dx) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(x+dx,t) - T(x) \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$$

$$\text{Taylor 1º orden: } T(x+dx) \approx T(x) + dx \frac{\partial T}{\partial x} + O(dx^2).$$

$$y(x+dx, t) \approx y(x, t) + dx \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + O(dx^2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x+dx, t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + O(dx^2).$$

$$\approx T(x) \cancel{\frac{\partial y}{\partial x}(x, t)} + dx T(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + dx \frac{\partial T(x)}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + O(dx^2) - T(x) \cancel{\frac{\partial y}{\partial x}(x, t)}$$

$$\sigma_{dx} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx dx \left[T(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right]$$

$$\boxed{\sigma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right]} \quad \text{Ecación general para desplaza@ cuerda 1D.}$$

$$2D \rightarrow \sigma(x, y) \quad \vec{\nabla} \cdot \left[T(x, y) \nabla \Psi(x, y) \right]$$

Caso típico: $\sigma(x) = \sigma_0$, $T(x) = T$, σ_0, T dts!

$$\rightarrow \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad C = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

Solución general para la ec. de ondas con condiciones iniciales específicas:

$$* \text{ recordemos: } \vec{y}_n(t) = \sum_{v=1}^N c_v a_n^v e^{i\omega_v t}$$

Primeros buscaremos soluciones tipo modos normales de la forma:

$$y(x, t) = c_0 \rho(x) \cos(\omega t + \phi).$$

amplitud
forma del modo normal (perfil)
oscila en el tiempo.

para el desplazamiento $\rightarrow y(x, t) = c_0 \rho(x) e^{i\omega t}$
parte temporal.

Substituimos este ansatz en la ec. de ondas 1D: σ_0, T dls

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{d^2 p}{dx^2}$$

$$Ec. de ondas 1D \rightarrow -\omega^2 C_0 p \cos(\omega t + \phi) = c^2 C_0 \frac{d^2 p}{dx^2} \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2 p}{dx^2} + k^2 p = 0} \quad Ec. oscilador armónico.$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}, \quad v = \frac{\omega}{k}$$

$$\text{discreto} \rightarrow \eta: \boxed{\hat{M} \ddot{\eta} + \hat{V} \dot{\eta} = 0}$$

Para los modos:

$$\boxed{\frac{d^2 p}{dx^2} + k^2 p = 0}$$

Ec. oscilador armónico.

→ después de reemplazar el ansatz.

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}, \quad v = \frac{\omega}{k}}$$

$$\frac{d^2p}{dx^2} + k^2 p = 0 \rightarrow p(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

condiciones de borde : bordes fijos.

$$p(0) = p(L) = 0$$



$$p(0) = 0 = B \quad , \quad p(x) = A \sin(kx)$$

$$p(L) = 0 \rightarrow A \sin(kL) \rightarrow k_y = \frac{\gamma \cdot \pi}{L} \quad , \quad \gamma \in \mathbb{Z}^+$$

$$\cdot C = \frac{\omega}{k} : \text{veloc. onda} \rightarrow \omega_y = \frac{\gamma \pi c}{L}$$

$$\rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad , \quad \lambda \text{ es la longitud de onda.}$$

$$\rightarrow \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} = \frac{2L}{\gamma}$$

modos normales cuerda

$$p_y(x) = A_y \sin(k_y x) \quad , \quad k_y = \frac{\gamma \pi}{L}$$



γ crece $\Rightarrow \lambda_y$ decrece . ω_y aumenta

. Ahora, necesitamos normalizar nuestros modos normales $p_y(x)$ y para esto, usamos nuestro formalismo anterior.

$$\sum_{\sigma} \sum_{\lambda} m_{\lambda\sigma} q_{\lambda}^{(i)} q_{\sigma}^{(j)} = \delta_{ij}.$$

$$\text{luego } \frac{d^2p}{dx^2} + k^2 p = 0 \rightarrow p(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

Haremos esta misma operación, pero con respecto a la densidad de masa σ . Además, como ahora tenemos funciones continuas y no vectoriales, el producto vectorial de la sumatoria anterior, lo transformaremos en una integral a lo largo de la cuerda:

$$\sum_{\sigma} \sum_{x} m_{\sigma x} \rightarrow \int_0^L dx \sigma(x)$$

condición de
de normalización de
los modos normales

si los bordes son
abiertos hay un
cos.

$$\therefore \int_0^L p_y(x) \sigma(x) p_\mu(x) dx = \delta_{\mu, y}$$

condición de ortonormalización para los
modos normales $p_y(x)$

Caso 1: $\sigma(x) = \sigma$, Bordes fijos $\rightarrow p_y(x) = A_y \sin k_y x$

$$A_y \cdot A_\mu \cdot \sigma \int_0^L \sin(k_y x) \sin(k_\mu x) dx = \delta$$

$$\boxed{\mu = y} \rightarrow \int_0^L \sin^2(k_y x) dx = \int_0^L \frac{1 - \cos 2k_y x}{2} dx = \frac{x}{2} \Big|_0^L - \frac{\sin 2k_y x}{2k_y} \Big|_0^L = \frac{L}{2} - \frac{\sin(L\pi)}{2k_y}$$

$$\therefore A_y = \sqrt{\frac{2}{\sigma L}} \rightarrow p_y(x) = \sqrt{\frac{2}{\sigma L}} \sin\left(\frac{y\pi x}{L}\right)$$

$$\boxed{y \neq \mu} \rightarrow I = \int_0^L \sin\left(\frac{y\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\mu\pi x}{L}\right) dx \rightarrow \left(1 - \frac{y^2}{\mu^2}\right) \cdot I = 0$$

mostramos que
son ortogonales

$\Rightarrow \sin k_\mu x$ es b a $\sin k_y x$

• "Las funciones seno y coseno con \neq argumento k_y , forman una base de funciones ortogonales."

$$k_y = \frac{y\pi}{L}$$

Frecuencias espaciales

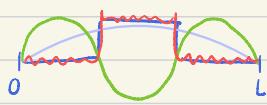
\rightarrow Condición de ortonormalización para obtener A : $\int p_y(x) \sigma(x) p_y(x) dx = 1$

$$\Rightarrow A^2 \sigma \int \sin^2(k_y x) dx = 1$$

→ Nuestro trabajo consistirá en escribir una función arbitraria en términos de esta base ortonormal de funciones continuas que existen en el rango $[0, L]$.

Son armónicos.

· Transf. de Fourier \leftarrow



$$k_1 = \pi/L$$

} al multiplicarlos:

al integrar se hace 0.

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{0\pi}{L} \\ \lambda_0 &= \frac{2}{4} \end{aligned}$$

wave

$$\begin{aligned} \text{Brochas} &+ \text{Brochas} = \text{Brochas} \\ \text{gordas} &\quad \downarrow \quad \text{delgadas.} \end{aligned}$$

· Una solución general para la ecuación de ondas en una cuerda con bordes fijos podrá escribirse como una superposición infinita de modos normales. Es decir, una combinación lineal de la base de este problema, que, ahora, a diferencias de los osciladores acoplados, poseen $N \rightarrow \infty$ grados de libertad.
⇒ ∞ términos expansión.

$$y(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \cdot p_v(x) \cos(\omega_v t + \phi_v)$$

$$\rightarrow y(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\sigma L}} \sin k_v x \cdot (a_v \cos \omega_v t + b_v \sin \omega_v t)$$

$$c_v \cos(\omega_v t + \phi_v) = a_v \cos \omega_v t + b_v \sin \omega_v t.$$

$$\dot{y}(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\sigma L}} \omega_v \sin(k_v x) (b_v \cos \omega_v t - a_v \sin \omega_v t)$$

condiciones iniciales:

$$y(x, 0) = f(x)$$

$$\dot{y}(x, 0) = g(x)$$

deformación inicial.

velocidad inicial

• f y g son funciones arbitrarias que representarán las C.I. del problema.

único modo normal
exitado en las CI
el este.

Ej. Fome



$$a_1, b_1 \neq 0, \quad a_y = 0, \quad y \neq 1, \\ b_y = 0$$

Entonces, nuestro trabajo consiste en ser capaces de representar las cond. iniciales como una combinación de modos normales:

$$\text{i)} \quad y(x,0) = f(x) = \sum_{y=1}^{\infty} f_y(x) \cdot a_y \quad \text{c} a_y?$$

$$\text{ii)} \quad \dot{y}(x,0) = g(x) = \sum_{y=1}^{\infty} f_y(x) \cdot w_y \cdot b_y \quad \text{c} b_y?$$

Usemos la propiedad de ortonormalidad:

* $\sigma \cdot p_\mu(x) \rightarrow \int_0^L dx$
 ↓ masa ↓ vectores
 matriz integrar en vez
 de sumar.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \int_0^L \sigma f(x) \cdot p_\mu(x) dx &= \sum_{y=1}^{\infty} a_y \int_0^L \sigma p_\mu(x) p_y(x) dx \\ &= \sum_{y=1}^{\infty} a_y \underbrace{\int_0^L \sigma p_\mu(x) p_y(x) dx}_{\delta_{\mu y}} \\ &= \sum_{y=1}^{\infty} a_y \delta_{\mu y} \\ &= a_\mu \end{aligned}$$

$$\cdot \quad q_\mu = \int_0^L \sigma f(x) p_\mu(x) dx$$

$$\cdot \quad b_\mu = \frac{1}{\omega_\mu} \int_0^L \sigma g(x) p_\mu(x) dx$$

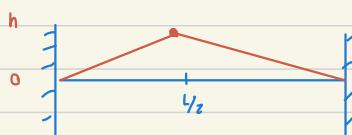
vect. cond. inicial.

o este

$$\rightarrow \text{C.I.: } y(x,0) = f(x) \\ \dot{y}(x,0) = g(x)$$

Quíqu 5: P1

25. mayo.



¿y(x,t)?

cuerda uniforme largo L.

condiciones iniciales →

$$y(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x & ; 0 \leq x \leq L \\ \frac{2h}{L}(L-x) & ; \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

velocidad nula →

$$g(x) = 0 \Rightarrow b_n = 0 !$$

$$a_n = \sigma \int_0^L f(x) p_n(x) dx = \sigma \sqrt{\frac{2}{\sigma L}} \int_0^L f(x) \sin(k_n x) dx$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$



2 densidades ≠!
(resolver para el control!)

$$c_{1n} = \sqrt{\frac{2\sigma}{L} \cdot \frac{2h}{L}} \left[\int_0^{L/2} x \sin k_n x dx + \int_{L/2}^L (L-x) \sin k_n x dx \right]$$

$$\cdot \int x \sin k_n x dx = \frac{1}{k_n^2} (\sin k_n x - k_n x \cos k_n x)$$

$$\int \sin k_n x dx = -\frac{1}{k_n} \cos k_n x$$

$$a_n \rightarrow \frac{1}{k_n^2} (\sin k_n x - k_n x \cos k_n x) \Big|_0^{L/2} - \frac{1}{k_n} \cos k_n x \Big|_{L/2}^L + - \frac{1}{k_n} (\sin k_n x - k_n x \cos k_n x) \Big|_0^L$$

$$= \frac{1}{k_n^2} \left(\underbrace{\sin \frac{n\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\cos \frac{n\pi}{2}}_{0} \right) - \frac{1}{k_n} \left(\cancel{\sin 0} - 0 \cdot \cancel{\cos 0} \right) - \frac{1}{k_n} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2})$$

$$+ \frac{1}{k_n^2} \left(\cancel{\sin n\pi} - \cancel{n\pi \cos n\pi} \right) + \frac{1}{k_n^2} \left(\underbrace{\sin \frac{n\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}}_{0} \right).$$

$$= \underbrace{\sin \frac{n\pi}{2} \cdot \frac{2}{k_n^2} + \cos \frac{n\pi}{2} \left(-\frac{n\pi}{2k_n^2} + \frac{L}{k_n} - \frac{n\pi}{2k_n^2} \right)}_{\frac{L^2}{n\pi} - \frac{\pi n}{n^2\pi^2} \cdot L^2 = 0} + \cos n\pi \left(-\frac{L}{k_n} + \frac{n\pi}{k_n^2} \right)$$

$$= \frac{2}{k_n^2} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

$$\rightarrow a_n = \frac{4h}{L} \sqrt{\frac{2\sigma}{L}} \cdot \frac{L}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{4h}{n^2\pi^2} \sqrt{2\sigma L} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

comparar con
transf. de Fourier!

n par: $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ todos los pares son nulos.

si agarro la cuerda → desde el centro,
no hay armónico par que se excite.

función converge! ←

⇒ Todas las frec./armónicos pares no fueron excitados por nuestro guitarrista.

→ w_2, w_4, w_6, \dots no aparecen.

↳ todos tienen centro 0 y los armónicos pares tienen amplitud 0.

n = impar: $n=1 \rightarrow 1$

$n=3 \rightarrow -1$

$n=5 \rightarrow 1$

$n=7 \rightarrow -1$

$$a_n = \frac{4h}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi L}{n^2}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}$$



"Mientras mayor sea n, más pequeño será el aporte del modo L-ésimo."

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi L} \right)^{1/2} \sin k_n x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$y(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin k_n x \cos \omega_n t$$

"impar" → si evalúo en n par, el 0 igual se hace 0.

Graficar ←

Movimiento forzado y amortiguado de una cuerda:

$$\text{Ec. ondas} \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\sigma}$$

$$\text{Newton} \rightarrow m\ddot{y} = F_y \quad , \quad y(x,t)$$

$$\rightarrow \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \sigma = \frac{m}{L}$$

FORZ@
DEPENDE DE LA POSIC@ Y DEL TIEMPO →

Añadiremos, ahora, fenomenología, el "roce" y un "forz@":

$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + D \frac{\partial y}{\partial t} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{F(x,t)}{L}$$

La idea, naturalmente, será la de resolver esta ecuación vía lo que conocemos del sistema. Es decir, expandiremos una solu@ "posible" en términos de los modos normales de la cuerda y veremos qué implica esto:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n(x)) \xi_n(t)$$

modos normales

Insertamos esto en la ec. de movi@:

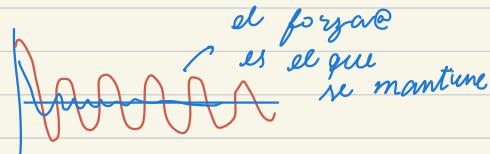
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma p_n \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} + D p_n \frac{d \xi_n}{dt} - T \xi_n \cdot \frac{d^2 p_n}{dx^2} \right) = \frac{F(x,t)}{L}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sigma \ddot{\xi}_n + D \dot{\xi}_n + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 T \xi_n \right] p_n = \frac{-k_n^2 p_n}{L^2} = \frac{F(x,t)}{L}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\int_0^L p_n \sigma \ddot{p}_n dx}_{\delta_{n,n}} \right] = / \cdot \sigma p_n$$

$$\rightarrow \sigma \ddot{\xi}_n + D \dot{\xi}_n + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 T \xi_n = \left[\frac{2}{\sigma L} \right] f_m(t)$$

$$* f_m(t) = \int_0^L \frac{F(x,t)}{L} \sin(k_n x) dx$$

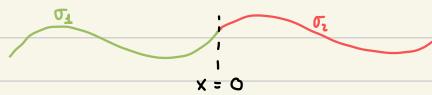


REFLEXIÓN EN UNA CUERDA

30·mayo

Consideremos una cuerda con 2 densidades:

T de:

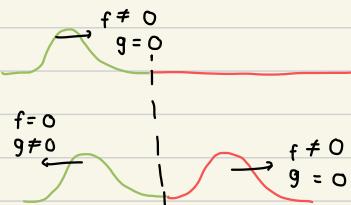


Consideremos un pulso incidiendo desde la izquierda ($x < 0$) hacia la derecha. ¿Cuáles serán las ondas reflejadas y cuáles las transmitidas debido a esta discontinuidad?

Primero, recordemos que podemos escribir cualquier solución de la ec. de ondas como:

$$f(x-vt) + g(x+vt) \quad ; \text{ sol d'Alembert.}$$

Cuadro visual del problema.



En $x=0$ (interfase), siempre coexistirán las ondas.

Región 1 ($x < 0$): Habrá una onda incidente y una reflejada.

Región 2 ($x > 0$): " " " transmitida

Matemáticamente:

Onda incidente: $A e^{i(k_1 x - \omega t)}$ $k_1 \rightarrow \sigma_1$

Así, podemos escribir las ondas en cada región:

$$\Psi_1(x, t) = \Psi_i + \Psi_r = A e^{i(k_1 x - \omega t)} + B e^{-i(k_1 x + \omega t)}, \quad x < 0$$

$$\Psi_2(x, t) = \Psi_t = C e^{i(k_2 x - \omega t)}$$

• La frecuencia ω de todas las ondas no cambia, ya que la discontinuidad en la cuerda es de carácter espacial. No hay, en este problema, ninguna perturbación / estímulo temporal que la afecte:

ω ctiva!

* k_1 y k_2 cambia
(espacial)

* ω no cambia
(temporal).

↳ discontinuidad
espacial!

Por otro lado, el cambio en la densidad de la cuerda si corresponde a un cambio espacial, por lo que las **frecuencias espaciales (k_i)** si **cambian** dependiendo del sector de la cuerda:



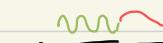
$$k_1 \neq k_2.$$

La velocidad de la onda en la cuerda : $v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$

Además, $v = \frac{\omega}{k} \rightarrow k = \frac{\omega}{v}$

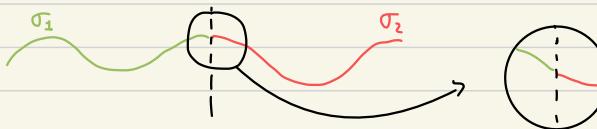
$$k_i = \frac{\omega}{\sqrt{T/\sigma_i}} = \frac{\omega}{\sqrt{T}} \sqrt{\sigma_i}, \quad i = 1, 2 \quad \rightarrow \boxed{k_2 = k_1 \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}} \quad T \text{ da!}, \quad k = 2\pi/\lambda$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

$\sigma_1 > \sigma_2 \rightarrow$ 

$\sigma_1 < \sigma_2 \rightarrow$ 

Los requerimientos o restricciones físicas del problema, se deben establecer en términos de las condiciones de borde. En este caso, estas son bastante simples/naturales, ya que se refieren a exigir continuidad de las funciones de onda y de sus derivadas:



$$\Psi_{izq}|_{x=0^-} = \Psi_{der}|_{x=0^+}$$

$$\Psi'_{izq}|_{x=0^-} = \Psi'_{der}|_{x=0^+}$$

uno no espera lo siguiente: 



La condición de continuidad en la derivada previene la existencia/aparición de fuerzas infinitas.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{0^-} \neq \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{0^+} \rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{du}{dx} \rightarrow \infty$$

Ec. de ondas: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \sim \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Rightarrow$ aceleración infinita \Rightarrow Fuerza $\infty \times$

Resumiendo: $\forall t$

$$\begin{aligned}\Psi \Big|_{x=0^-} &= \Psi \Big|_{x=0^+} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0^-} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0^+}\end{aligned}$$

Aplicamos cond. continuidad:

$$\Psi_1(x=0) = \Psi_2(0) \rightarrow A e^{-i\omega t} + B e^{i\omega t} = C e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow A + B = C$$

$$\Psi_1'(x=0) = \Psi_2'(x=0) \rightarrow i k_1 (A e^{-i\omega t} - B e^{i\omega t}) = i k_2 C e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow k_1(A - B) = k_2 C$$

$$\therefore k_1 A - k_1 B = k_2 A + k_2 B$$

$$\rightarrow \frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_2 + k_2} \equiv r ; \text{ coef. reflexión}$$

$$A + B = C \rightarrow \frac{C}{A} = 1 + \frac{B}{A} = 1 + r = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$t = \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad \text{coef. transmisión}$$

- i) las ondas transmitidas no cambian fase, respecto a la onda incidente:
 $t \geq 0$ siempre!



- ii) la fase de las ondas reflejadas puede ser 0 o π :

$$\textcircled{O} \quad k_1 > k_2 \quad (\sigma_1 > \sigma_2)$$

$\hookrightarrow r > 0 \Rightarrow$ no cambia fase la onda reflejada respecto a la incidente.



Definamos, ahora, "reflectancia" como la energía reflejada respecto a la energía incidente lo que naturalmente, ocurrirá en el mismo medio físico.

extra:

$$\boxed{\text{Cuerda} \quad E = H = T + U \sim |\text{amplitud}|^2}$$

• Reflecting

• Reflejancia : $R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = |r|^2$

“energía reflejada”

"energía reflejada"

Por conservación de la energía : "lo que llega / hay se reparte"

R + T = 1 , T: Transmisiones → % energía transmitida

$$T = 1 - R = 1 - \frac{(K_1 - K_2)^2}{(K_1 + K_2)^2} = \frac{4K_1^2}{(K_1 + K_2)^2} \cdot \frac{K_2}{K_1} = \frac{|t|^2 \cdot K_2}{K_1} = T$$

Lagrangiano para una cuerda continua:

1-julio

consideremos el caso en que la densidad y tensión son dis. tenemos que para el problema de osciladores acoplados este era lo siguiente:

Técnicas de paso →
al continuo.

$$L = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \dot{y}_i^2 - \frac{T}{2q} \sum_{i=0}^n (y_{i+1} - y_i)^2 \quad / \cdot \frac{q}{q}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m}{q} \sum_{i=1}^n \dot{y}_i^2 \cdot q - \frac{T}{2} \sum_{i=0}^n \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{q} \right)^2 \cdot q$$

Del paso del discreto al continuo:

$$q \rightarrow dx \quad y_i(t) \rightarrow y(x, t)$$

$$\frac{m}{q} \rightarrow \sigma \quad \sum_i q \rightarrow \int dx$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{q} \rightarrow \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\therefore L = \frac{\sigma}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{T}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

→ Lagrangiano para una cuerda continua con tensión T y densidad de masa σ.

Recordemos que cualquier estado de la cuerda se puede escribir como una combinación lineal de sus modos normales:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) c_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \\ p_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\sigma L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \rightarrow \int_0^L p_n(x) \sigma p_m(x) dx = \delta_{n,m} \\ \therefore y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \xi_n(t) \end{aligned}$$

Insertemos en el lagrangiano:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \dot{\xi}_n(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \cdot c_n \omega_n \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\sigma}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx &= \frac{\sigma}{2} \int_0^L \sum_n \sum_m p_n(x) p_m(x) c_n c_m \omega_n \omega_m \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin(\omega_m t + \phi_m) \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \sum_m c_n c_m \omega_n \omega_m \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin(\omega_m t + \phi_m) \int_0^L p_n(x) \sigma p_m(x) dx \end{aligned}$$

* word. normales. }.

1º término del lagran...

$$= \frac{1}{2} \sum_n C_n^2 w_n^2 \sin^2(w_n t + \phi_n) = \frac{1}{2} \sum_n \dot{\xi}_n^2(t)$$

2º término del lagrangiano $\rightarrow \int_0^L \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{T}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) y(x) \right]_0^L - \int_0^L y(x,t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$

$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \cdot \xi_n(t) \rightarrow \left[\frac{d^2 p_n}{dx^2} + k_n^2 p_n = 0 \right]$ borders fijos

$$\cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} \xi_n(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 p_n(x) \xi_n(t).$$

$$= \frac{T}{2} \int_0^L \sum_n \sum_m p_n \xi_n k_n^2 p_m(x) \xi_m(t) dx \cdot \frac{\sigma}{\sigma}$$

$$= \frac{T}{2\sigma} \sum_n \sum_m k_n^2 \xi_n \xi_m(t) \underbrace{\int_0^L p_n(x) \sigma p_m(x) dx}_{\delta_{n,m}}$$

$$= \frac{T}{2\sigma} \sum_n k_n^2 \xi_n^2(t)$$

$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$; velocidad onda en cuerda. \rightarrow además: $c = \frac{\omega}{k}$ k es una frecuencia en el espacio.

$$\rightarrow \omega_n = c \cdot k_n.$$

$$= \frac{1}{2} \sum_n c^2 k_n^2 \xi_n^2(t) = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n^2 \xi_n^2(t)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_n C_n^2 w_n^2 \cos^2(w_n t + \phi_n)$$

Escribimos el lagran...

$$L = \frac{1}{2} \sum \left(\dot{\xi}_n^2 - \omega_n^2 \xi_n^2 \right) \rightarrow$$

Hemos diagonalizado el lagrangiano de una cuerda.

$$\text{E-L} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_n} - \frac{\partial L}{\partial \xi_n} = 0 \rightarrow \ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$$

Oscilador armónico.

Energía de una cuerda

$$E_{\text{tot}} = T + U = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{x}_n^2 + \omega_n^2 x_n^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \omega_n \sin^2(\omega_n t + \phi_n) + \omega_n^2 c_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \right)$$

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \omega_n^2$$

La energía total será una suma directa de las contribuciones de cada modo del sistema de acuerdo a su presencia en la dinámica.

Ej]

Cada modo aportará entonces $\omega_n \frac{1}{2} \omega^2 A^2$; A amplitud

$$\text{modo 1: } E_1 = \frac{1}{2} A_1^2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} A_1^2 \left(\frac{\pi c}{L} \right)^2$$

$$\text{modo 2: } E_2 = \frac{1}{2} A_2^2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} A_2^2 \cdot 4 \left(\frac{\pi c}{L} \right)^2 = 2 A_2^2 \left(\frac{\pi c}{L} \right)^2$$

$$\text{Por ej: } A_1 = A_2 \rightarrow E_2 = 4 E_1$$

Con este ejemplo y lo anterior calculado, notamos que cuando nos referimos a ondas restringidas a vivir en cierto espacio, entonces la energía se discretiza (ya no es continua) y, podemos, hablar de una energía "cuantizada":

$$\begin{array}{c} E_4 \\ E_3 \\ E_2 \\ E_1 \end{array}$$

Recordemos la semana pasada

$$C_n = A_n = \frac{4 h}{\pi^2} \frac{\sqrt{2 \pi L}}{n^2} (-1)^{n-1/2}, \quad \omega_n = \frac{n \pi c}{L}$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 h^2}{\pi^4 n^2} \cdot \frac{2 \pi L}{n^2} \cdot \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2}, \quad C^2 \sigma = T$$

$$= \frac{16 h^2 T}{\pi^2 L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2 h^2 T}{L}$$

$\frac{\pi^2}{8}$ los n son impares.

le cambiamos al lagrangiano

$$\omega_n = \frac{n \pi c}{L}$$

que hacemos al tocar la guitarra?

era una suma impar (siempre es 1 el $(-1)^{n-1/2}$)

$$E_{101} = \frac{2\pi}{L} h^2$$

Ondas electromagnéticas = LUZ

6 Junio

Optica

Desde "electro" sabemos que tanto el campo eléctrico como el magnético satisfacen una ec. de ondas 3D:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \psi \rightarrow \vec{E}, \vec{B}.$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E} + \epsilon_0 \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \epsilon_0 \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \dots$$

$$v = \frac{c}{n} \quad ; \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

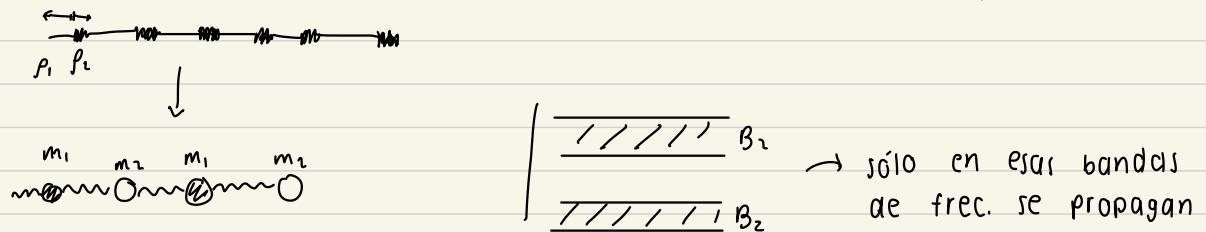
$$n^2 = 1 + 4\pi \chi^{(1)} \quad ; \text{ indice de refracción}$$

$n = n(\lambda)$: Dispersion cromática → "arcoíris".

Vacio → no hay cargas $\Rightarrow \chi^{(1)} = 0 \Rightarrow n \text{ vacío} = 1$.

medio arbitrario → hay cargas $\Rightarrow \chi^{(1)} \neq 0 \rightarrow n > 1, v < c!$

↳ 147 + lenta.



$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

D'Alembert!

Ondas planas



sist. discretos.

$$e^{ik_x x_n} e^{-i\omega t}$$

" continuos:

$$e^{i(k_x x)} e^{-i\omega t}$$

* D'Alembert: F de restricción no realizan w

* $v = \frac{c}{n}$, vacío: $n = 1$.

En óptica bidimensional, trabajaremos también con ondas planas, de la 3D

* $\square \wedge$ siguiente forma:

$$A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

fase
amplitud.

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$k_x x + k_y y + k_z z$$

Si aplicamos la ecuación de ondas a nuestra querida onda plana:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k} \cdot i\vec{k} = -k^2$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \rightarrow i(k_x, k_y, k_z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2 \Rightarrow -k^2 = -\frac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

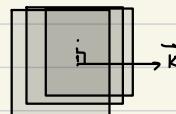
$|\vec{k}| = k$. N° de onda, cte propagad.

¿Porqué " $\vec{k} \cdot \vec{r}$ " representa una onda plana?

$$\vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$$

Piano

$$\vec{k} \cdot \vec{r}_2 = \vec{k} \cdot \vec{r}_1 = \text{cte!}$$



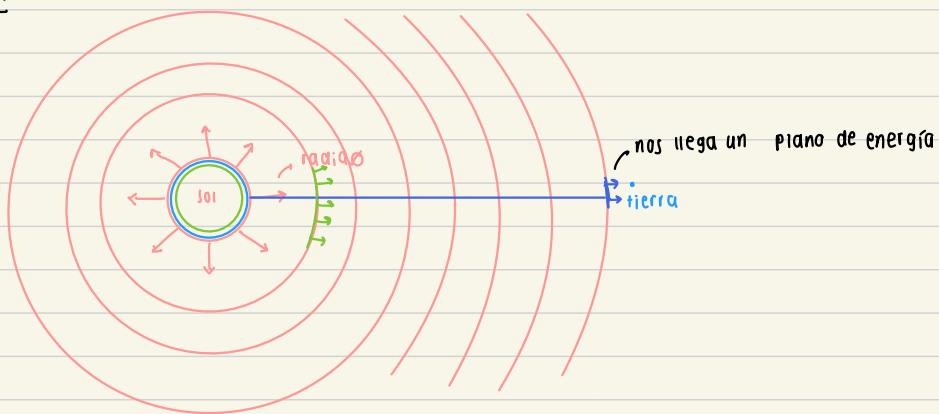
Ej 1 haz gaussiano

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

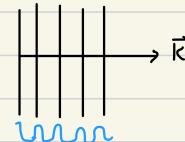
Potencia va disminuyendo ya que gaussiana se engorda



Ej 2:



ondas planas se pueden dibujar:

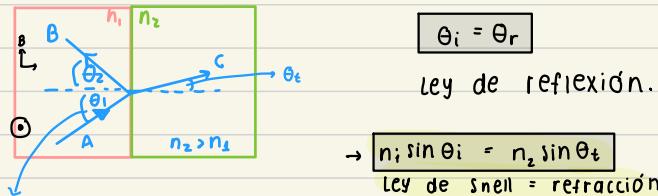


periódicas tanto en el tiempo como en el espacio.

$$\vec{\Psi}(\vec{r}, t) = \vec{\Psi}(\vec{r}, t + T) \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ periodo temporal}$$

$$\vec{\Psi}(\vec{r}, t) = \vec{\Psi}(\vec{r} + \lambda \hat{k}, t) \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \text{ periodo espacial} \quad , \lambda: \text{longitud de onda!}$$

¿Qué experimentan las ondas E.M. al transitar desde un medio n_1 a otro n_2 ?



ángulo de incidencia (entre rayo y la normal a la superficie).

Luz tiene polarización $\rightarrow \vec{E}$

• perpendicular al plano de incidencia \rightarrow senkrecht \rightarrow s. wave
• : " " " " " \rightarrow parallel \rightarrow p. wave.

ECS. Fresnel:

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r}, \quad r_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_r - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r}, \quad t_{\parallel} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i}$$

Reflectancia:

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = |r|^2$$

$$T = \frac{n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i} |t|^2$$

$$t = \frac{c}{A}$$

transmitancia.

$$\theta_i = 0 \Rightarrow \theta_r = \theta_t = 0$$

$$r_{\perp} = r_{\parallel} = r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$r = \frac{k_0 (n_1 - n_2)}{k_0 (n_1 + n_2)} = \frac{(k_1 - k_2)}{(k_1 + k_2)}, \quad ; \quad k_i = k_0 n_i$$

$$t_{\perp} = t_{\parallel} = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$$

$$t = \frac{k_0 2 n_1}{k_0 (n_1 + n_2)} = \frac{2 k_1}{k_1 + k_2} \Rightarrow 100\% \text{ igual a ondas mecánicas cuerdas!}$$

Interferencia

8 Junio

- Interferencia no es otra cosa que la superposición de 2 o más ondas en el tiempo y el espacio.
 - La superposición de 2 o + ondas sigue siendo una solución de la ec. de ondas. "Prp. de superposición".
 - Dada una onda electromagnética monocromática $\vec{\Psi}_1(\vec{r})$ y otra de igual frecuencia $\vec{\Psi}_2(\vec{r})$ [= color $\rightarrow e^{-i\omega t}$]
- * Diferentes colores no interfieren.
- El campo total de esta superposición, en el tiempo y el espacio, vendrá dada por:

$$\vec{\Psi}_t(\vec{r}, t) = \vec{\Psi}_1(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \vec{\Psi}_2(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

La intensidad de un campo óptico corresponde al módulo del vector de Poynting:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

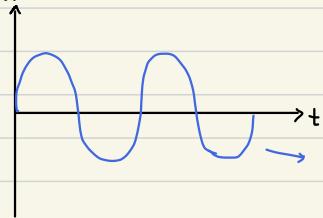
$$I = |\vec{S}| = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta} \quad \eta: \text{impedancia del material.}$$

$$\eta = \frac{\eta_0}{\epsilon_0}, \quad \eta_0: 377 \Omega$$

$$I \sim |\vec{E}|^2 \sim |\vec{\Psi}|^2$$

¿Alguien sabe que vemos cuando vemos?

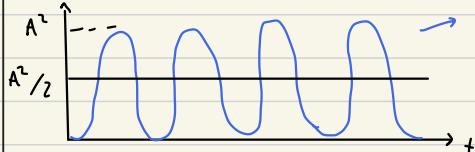
$$\vec{\Psi}(t)$$



\vec{E} o \vec{B} son ondas armónicas. \Rightarrow oscilan.

$$\langle \vec{\Psi}(t) \rangle_t = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \vec{\Psi}(t) dt = 0 \rightarrow \text{no lo vemos!}$$

$$|\vec{\Psi}(t)|^2$$



$$\langle |\vec{\Psi}|^2 \rangle_t = \frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} |\vec{\Psi}|^2 dt = \frac{A^2}{2} \rightarrow \text{vemos la intensidad!}$$

$$* P = \frac{V^2}{R} = \left[\frac{J}{s} \right] = [1 \text{ Watt}]$$

* Extra: Vector de Poynting representa la intensidad instantánea de energía electromagnética que fluye a través de 1 unidad de área \perp a la dirección de propagación.

$$[\epsilon] = \frac{V}{m} \rightarrow I = \frac{V^2}{m^2 \cdot \Omega} = \frac{P}{A}$$

potencia
área

igual potencia, si el área es menor, la intensidad es mayor \Rightarrow más peligroso

\rightarrow ampolleta $\sim 100\text{W}$

Sobre 1 mW el láser es peligroso

se multiplica por el conjugado para obtener la prob. asociada a la función de onda en la interpretación probabilística de la mecánica cuántica.

Lo que importa a nivel de observar el fenómeno de interferencia será la intensidad producida x la superposición de ondas:

$$|\Psi_T|^2 = (\bar{\Psi}_1(\vec{r}) + \bar{\Psi}_2(\vec{r})) e^{-i\omega t} \cdot (\bar{\Psi}_1^*(\vec{r}) + \bar{\Psi}_2^*(\vec{r})) e^{i\omega t}$$

$$= |\bar{\Psi}_1|_m^2 + |\bar{\Psi}_2|_m^2 + (\bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2^* + \bar{\Psi}_1^* \bar{\Psi}_2)$$

c/u por separado.

interferencia.

Ej 1 $\bar{\Psi}_1 = \Psi_1 \hat{x}, \bar{\Psi}_2 = \Psi_2 \hat{y} \rightarrow$ No hay interferencia!

Ej 2 $\bar{\Psi}_1 = A_1 e^{i\phi_1} \hat{x}, \bar{\Psi}_2 = A_2 e^{i\phi_2} \hat{x}$

A_i : Amplitud de la onda $\in \mathbb{R}$, ϕ_i : Fase de la onda. $\in \mathbb{R} \rightarrow \phi, A \in \mathbb{R}$

$$|\Psi_T|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2 (\cos(\phi_1 - \phi_2) + e^{-i(\phi_1 - \phi_2)})$$

$$|\Psi_T|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\phi), \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

dif. de fase entre ambas ondas

\rightarrow Todo fenómeno ondulatorio

dependerá fuertemente de su estructura de fase.

"Lo que uno ve"

\rightarrow El patrón de interferencia será:

$$\langle I \rangle_t = \langle |\bar{\Psi}_T|^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\phi$$

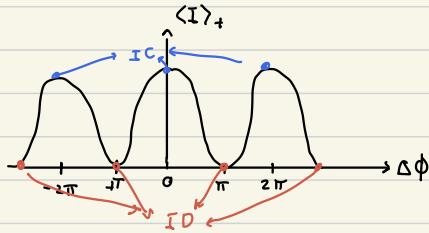
máximo posible.

Interferencia constructiva: (I.C) $\Rightarrow \cos \Delta\phi = 1 \Rightarrow \langle I \rangle_t \sim (A_1 + A_2)^2$, máximo

"" destructiva: (I.D) $\Rightarrow \cos \Delta\phi = -1 \Rightarrow \langle I \rangle_t \sim (A_1 - A_2)^2$, mínimo.

i) caso estándar en óptica: $A_1 \approx A_2 = A$

$$\langle I \rangle_t = 2A^2 (1 + \cos \Delta\phi) = 4A^2 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2}$$



$$I.C.: \Delta\phi = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, \langle I \rangle_t \text{ máx}$$

$$I.D.: \Delta\phi = (2n+1)\pi, m \in \mathbb{Z}, \langle I \rangle_t \text{ mín}$$

Para determinar la calidad de un patrón de interferencia definimos la "visibilidad de franjas":

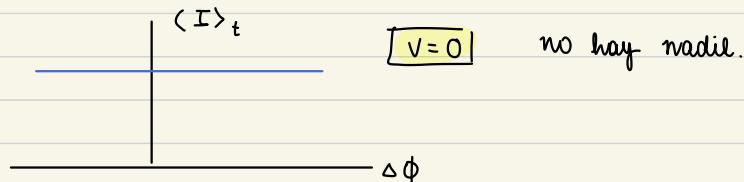
$$V = \frac{\langle I \rangle_{\text{máx}} - \langle I \rangle_{\text{min}}}{\langle I \rangle_{\text{máx}} + \langle I \rangle_{\text{min}}} \quad [V: 0-1]$$

1: 100% visibilidad
0: 0% "

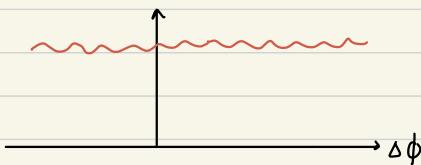
* Cada sección tendrá su visibilidad de franja.

i) $A_1 = A_2 = A: \frac{4A^2 - 0}{4A^2 + 0} = 1 \rightarrow$ siempre el mín. es 0.

ii) $A_1 = A, A_2 = 0: \text{No hay interferencia}$



iii) $A_1 \gg A_2$



$$V = \frac{(A_1 + A_2)^2 - (A_1 - A_2)^2}{(A_1 + A_2)^2 + (A_1 - A_2)^2} = \frac{4A_1 A_2}{2(A_1^2 + A_2^2)} = \frac{2A_1 A_2}{(A_1^2 + A_2^2)} \approx \frac{2A_1 A_2}{A_1^2}$$

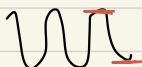
$$\approx \frac{2A_2}{A_1}$$

Pequeño,

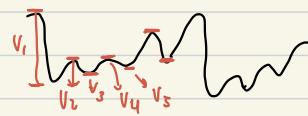
caso señal con ruido ←

j Control!

Ondas

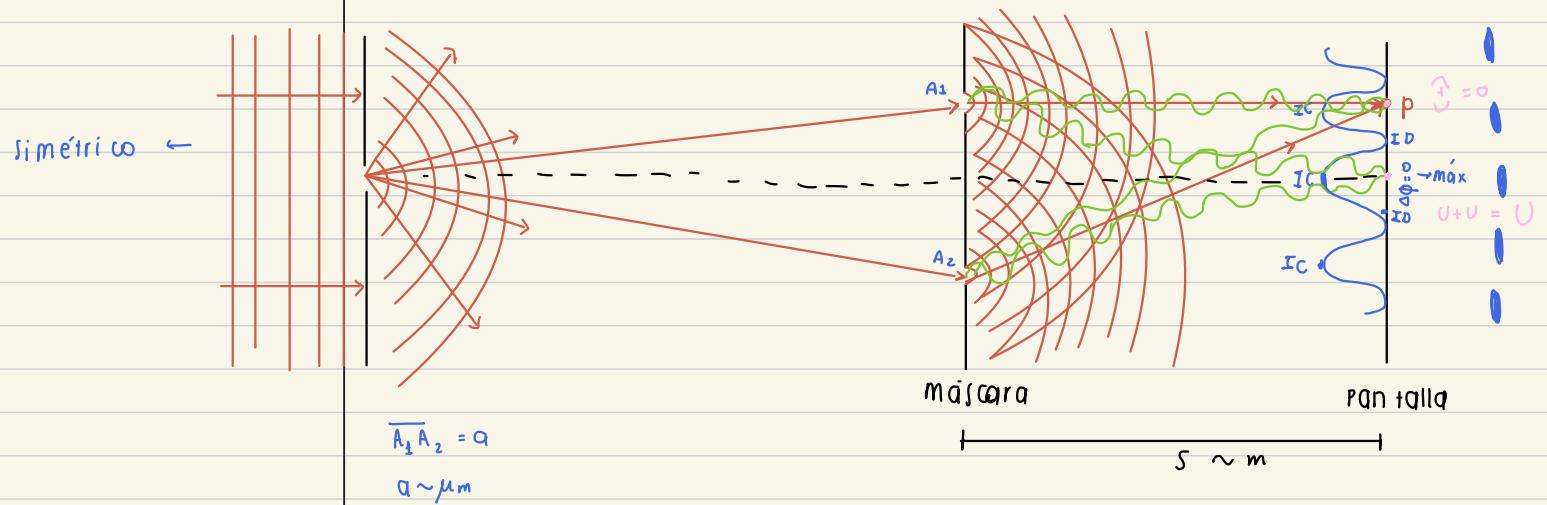


mezclas de + ondas



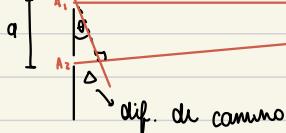
doble rendija de Young (1816)

9-junio



Matemáticamente

máscara



- Se puede demostrar que los rayos viajan de forma paralela y que la única dif. de camino o , que es lo mismo, de fase se produce debido a Δ .

$$\Delta = a \sin \theta$$

$$\theta : \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$\theta = 0 \rightarrow$ coincide con el centro de simetría.

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega t) - (\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega t)$$

$$= \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 = K_0 \cdot \Delta = \Delta\phi$$

↳ se asume que en \ viajan paralelas.

$$\Delta = a \sin \theta$$

$$\Delta\phi = k \Delta$$

$$\Delta\phi = k_0 \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$$

I.C.: $\Delta\phi = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$
 $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = 2\pi n \rightarrow \boxed{\Delta = n\lambda}$

periódicas tanto en + como en el espacio.

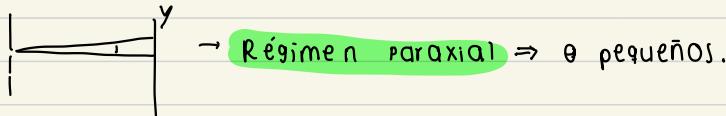
$$\Psi(\vec{r} + \lambda \hat{k}) = \Psi(\vec{r})$$

ID: $\Delta\phi = (2m+1)\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$
 $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = (2m+1)\pi$

$$\boxed{\Delta = \left(\frac{m+\frac{1}{2}}{2}\right)\lambda} \rightarrow \text{múltiplo semienriero de } \lambda.$$

$$\Psi(\vec{r} + \frac{\lambda}{2} \hat{k}) = -\Psi(\vec{r})$$

Aproximación de rayos paralelos $\Rightarrow s \gg a$



$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{s}$$

$$\Delta = a \sin\theta \approx \frac{ay}{s}$$

pojío de los máximos
I.C.: $y_n = n \cdot \frac{\lambda \cdot s}{a}$

$$\boxed{\Delta y = \frac{\lambda s}{a}} \quad \text{distancia entre 2 máximos consecutivos.}$$

s grande \rightarrow máximos más separados.

a chico \rightarrow " " "

la separación de máximos es proporcional a λ .

Exp: famoso medidor láser de pelo.

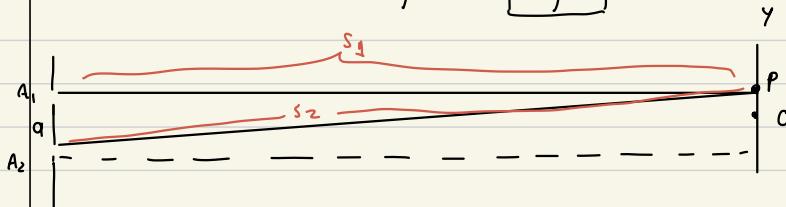
$a \sim$ grosor del pelo.

$$\Delta y \approx 10 \text{ cm}$$

$$s \sim 10 \text{ m}$$

experimento en
medio de un pelo

$$a \approx \frac{\lambda \cdot s}{\Delta y} = 100\lambda = 1 \cdot 10^2 \cdot 6,5 \cdot 10^{-7} = 65 \mu\text{m.} \sim [50 \mu\text{m.}]$$



$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_{1P} = k_0 s_1$$

$$s_1 = \sqrt{s^2 + (y - a/2)^2} \quad s_2 = \sqrt{s^2 + (y + a/2)^2}$$

$$= s \sqrt{1 + \left(\frac{y - a/2}{s}\right)^2} \quad = s \sqrt{1 + \left(\frac{y + a/2}{s}\right)^2}$$

$$\approx s \left(1 + \frac{(y - a/2)^2}{2s^2} - \frac{(y - a/2)^4}{8s^4} \right) \quad \approx s \left(1 + \frac{(y + a/2)^2}{2s^2} - \frac{(y + a/2)^4}{8s^4} \right)$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = s \left[1 + \frac{(y + a/2)^2}{2s^2} - \frac{(y + a/2)^4}{8s^4} - \left[1 + \frac{(y - a/2)^2}{2s^2} - \frac{(y - a/2)^4}{8s^4} \right] \right]$$

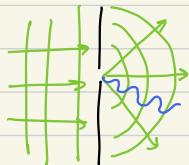
$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{ay}{s} \left[1 + \frac{(4y^2 + a^2)}{8s^2} + O(1) \right]$$

$$\Delta \approx \frac{ay}{s} \quad (\text{aprox. rayos paralelos.}) \rightarrow \frac{4 \cdot 10^{-2} + 2s \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 10^2} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$$

desarrollo formal ←
de dónde viene la
aprox de rayos
paralelos

Difracción

Se conoce como la desviación de la propagación inicialmente rectilínea de la luz.
→ Desviación / dispersión espacial!



Tanto la "interferencia" como la "difración" suponen un proceso de superposición de ondas, tanto en el tiempo como en el espacio.

Interferencia ⇒ nº discreto / finito de ondas.

Difracción → nº continuo/infinito de ondas.

Clasificación de la difracción

· "campo cercano (near field)": Difracción de Fresnel.

→ En este caso, se analiza la superposición de ondas muy cerca del obstáculo, por lo que el patrón de luz observado es más "turbulento" y ∴, matemáticamente, más complejo de escribir.

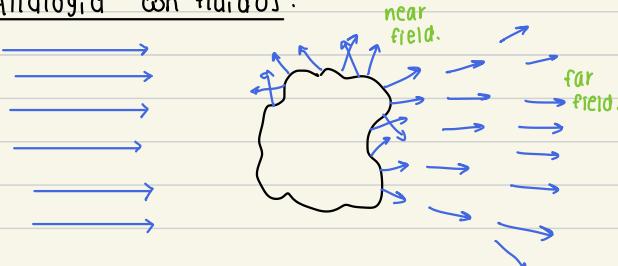
→ El patrón observado es más parecido al obstáculo

· "campo lejano (far field)": Difración de Fraunhofer.

* En este caso, se analiza la superposición de ondas muy lejos del obstáculo, por lo que la mezcla es más simple tanto en nº como en forma.

→ El patrón no se parece a la apertura, pero si depende fuertemente de ella.

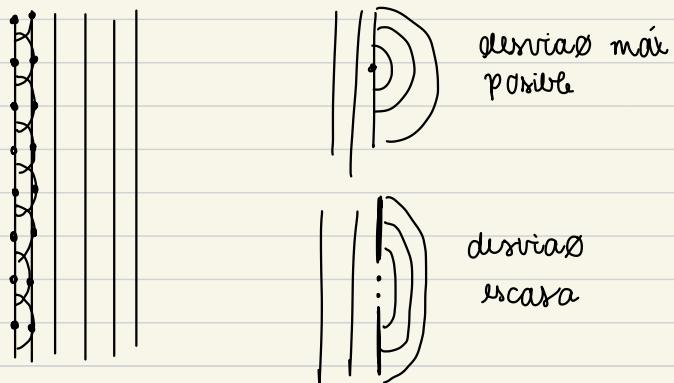
Analogía con fluidos:



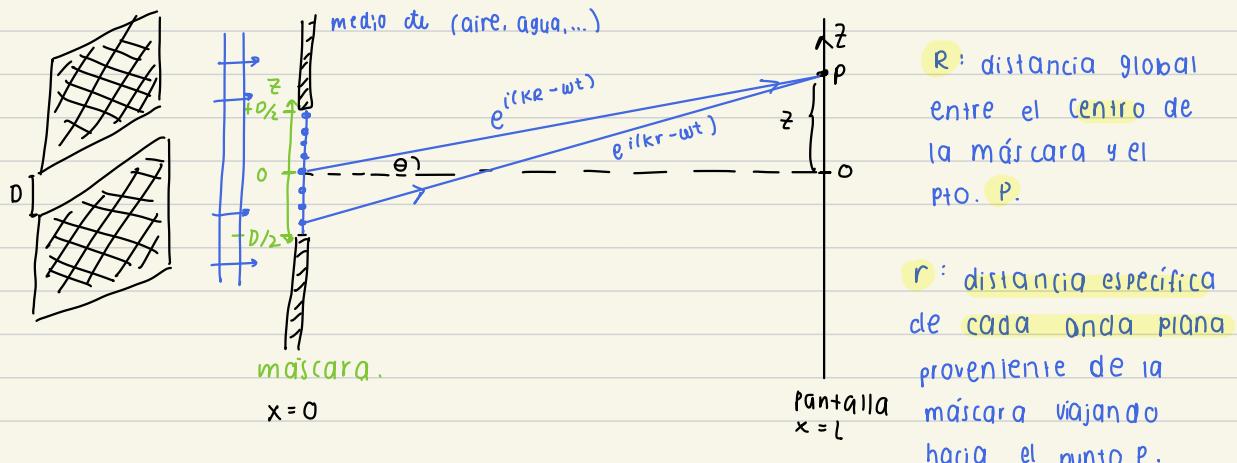
Principio de "Huygens - Fresnel"

fuentes con igual λ y w que la original

"Todo punto no obstruido de un frente de ondas, corresponderá a una fuente de ondas puntual, esférica, con igual longitud de onda y frecuencia que la original."



Difracción debido a una rendija 1D



* Son ondas planas que llegan a P



Cada onda plana que llega a la pantalla proviene del campo total que atraviesa la máscara, y contribuye infinitesimal γ al campo total que forma el patrón de difracción observado en la pantalla.

Cada onda aportará con una amplitud dependiendo de su "tamaño" definimos una "densidad de campo":

$$E_z = \frac{E_0}{D}$$

$$R = \sqrt{L^2 + Z^2}$$

$$r = \sqrt{L^2 + (Z - z)^2} = \sqrt{R^2 \left(1 - \frac{2zZ}{R^2} + \frac{z^2}{R^2}\right)}$$

• $\frac{zZ}{R^2}, \frac{z^2}{R^2} \sim z = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}, Z = 0,1 \text{ m}, R = 10 \text{ m}$

$$\frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^{-1}}{100} = 5 \cdot 10^{-8}$$

$$2,5 \cdot 10^{-11}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{zZ}{R^2} \gg \frac{z^2}{R^2}}$$

$$r \approx R \left(1 - \frac{2zZ}{R^2}\right)^{1/2} \approx R \left(1 - \frac{zZ}{R^2}\right) = R - \frac{zZ}{R}$$

- Si uno considera $r \approx R \rightarrow$ no habría interferencia / difracción.
- $r \neq R \rightarrow$ Acumular fase y que se produzca IC e ID.

(Z grande)



dil dibujo : $\sin \theta = \frac{Z}{R} \rightarrow \boxed{r = R \cdot \sin \theta \cdot z}$

separando esta expresión.

• Cada onda infinitesimal contribuirá al patrón de difracción con su amplitud y su fase acumulada :

$$dE(z) = \underbrace{E_0 d_z e^{i(kr - wt)}}_{\substack{\text{Amplitud} \\ \text{fase} \\ \text{acumulada}}} = \frac{E_0}{D} e^{i(kr - wt)} e^{-ikz \sin \theta} dz$$

$$E_{\text{tot.}}(P) = \int dE(z) = \frac{E_0}{D} e^{i(kr - wt)} \int_{-D/2}^{D/2} e^{-ikz \sin \theta} dz$$

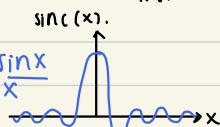
rendija



$$\int_{-D/2}^{D/2} e^{-ikz \sin \theta} dz = \underbrace{e^{-ikz \sin \theta}}_{-ik \sin \theta} \Big|_{-D/2}^{D/2} = \frac{e^{-ik \frac{D}{2} \sin \theta}}{-ik \sin \theta} - \frac{e^{ik \frac{D}{2} \sin \theta}}{-ik \sin \theta} = \frac{1}{ik \sin \theta} \left(e^{ik \frac{D}{2} \sin \theta} - e^{-ik \frac{D}{2} \sin \theta} \right) = \frac{2 \sin \left(\frac{KD}{2} \sin \theta \right)}{k \sin \theta}$$

.. $E_T(P) = E_0 \frac{\sin \left(\frac{KD \sin \theta}{2} \right)}{(KD \sin \theta / 2)} e^{i(kr - wt)}$

* $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$

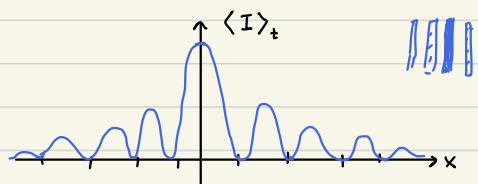


compacto! ←

$$E_T(P) = E_0 \operatorname{sinc}(x) e^{i(kR - \omega t)}$$

$$, \quad x = \frac{k \theta \sin \theta}{z}$$

$$\langle I \rangle_t \sim \langle |E_T(P)|^2 \rangle_t = \operatorname{sinc}^2(x)$$



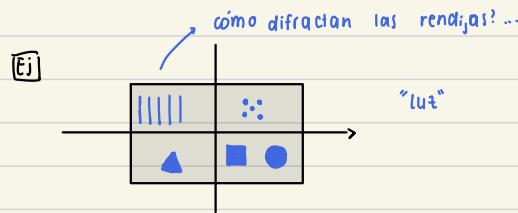
16 junio

Función transparencia

El martes, cuando definimos los límites de integración lo que en verdad hicimos fue decir / señalar / indicar / expresar por donde la luz puede pasar y ∴ de dónde provienen todas las ∞'s ondas que sumadas / restadas en la pantalla lejana dan lugar al patrón de interferencia / difracción.

la función transparencia corresponderá a una función 2D que nos informará o definirá de dónde proviene la luz → definición de la máscara.

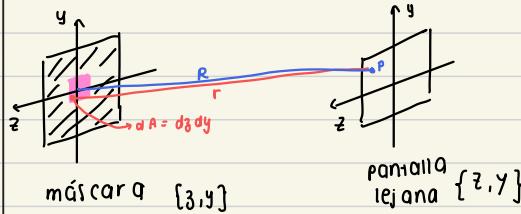
esta función se define como "t(z,y)" y representará cualquier problema arbitrario bajo estudio:



Para la rendija 1D del martes, vimos que el aporte de la fase para cada una de las ondas planas infinitesimales que provienen de la máscara y viajan hasta la pantalla lejana estaba dada por:

$$\textcircled{1} \quad e^{ik\vec{r}} \rightarrow e^{ikr} = e^{ik(R - \frac{z}{R})} ; \quad \frac{z}{R} = \sin \theta$$

EN 2D, veamos como escribir esto:



$$1D: kr - wt = (KR - wt) - \frac{kz}{R}$$

$$* r = \sqrt{L^2 + (z-z')^2 + (y-y')^2}$$

α 1º orden

$$2D: kr - wt = (KR - wt) - \frac{kz}{R} - \frac{ky}{R}$$

El campo total de todos los posibles contribuciones se puede escribir como:
 $E_T(p) \sim t(z_1, y_1) e^{-ikz_1} e^{-\frac{ky_1}{R}} + t(z_2, y_2) e^{-ikz_2} e^{-\frac{ky_2}{R}} + \dots$

Obviamente esto es ∞ y cuando hablamos de infinito pensamos en integrales:

$$\sum \rightarrow \int$$

1D: dz

2D: $dz dy$

tamaño de la fuente infinitesimal

El martes:



Trans. du Fourier.

pasó al espacio de freq. espaciales.

$$E_T(p) \sim e^{i(KR-wt)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(z, y) e^{-ikz} e^{-iky} dz dy$$

$$y = \frac{ky}{R}, \quad \mu = \frac{Kz}{R}$$

variable horizontal variable vertical en pantalla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(z, y) e^{-iy\mu} e^{-iz\gamma} dz dy \sim \tilde{t}(\mu, \nu)$$

$$\tilde{t} = \text{TF de } t$$

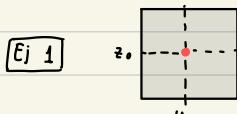
$$E_T(p) \sim \tilde{t}(\mu, \nu) \quad ; \text{ transformada de Fourier (excepto const.) de la func transparencia.}$$

∴ El patrón de difracción:

$$\langle I \rangle_t = (\|E_T(p)\|^2)_t \sim |\tilde{t}(\mu, \nu)|^2$$

Propiedades:

- Normalización: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(z, y) dz dy = 1. \rightarrow 100\% \text{ de la luz.}$



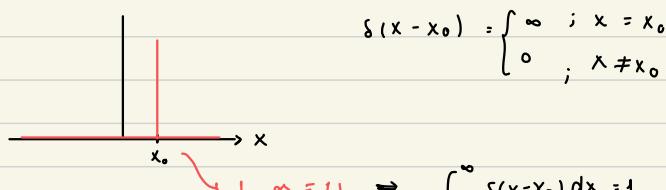
un único orificio:

la func por un punto en el espacio
densidad de campo (ct)

$$t(z, y) = t_0 \delta(z - z_0) \delta(y - y_0).$$

un punto en el espacio en ambas direcciones.

Función delta de Dirac:



$$\rightarrow \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \right]$$

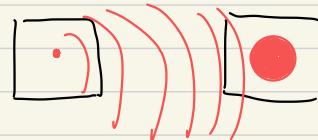
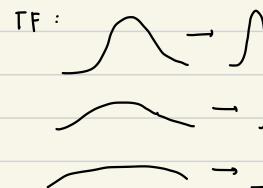
def. normalizació

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(\beta, y) d\beta dy = t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\beta - \beta_0) d\beta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - y_0) dy \\ = t_0 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow [t_0 = 1]$$

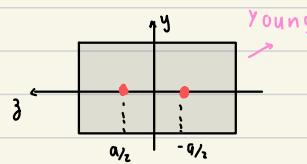
$$\tilde{t}(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0 \cdot \delta(\beta - \beta_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot e^{-i\mu\beta} e^{-i\nu y} d\beta dy \\ = t_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu\beta} \delta(\beta - \beta_0) d\beta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu y} \delta(y - y_0) dy = 1 \cdot e^{-i\mu\beta_0} e^{-i\nu y_0}$$

$$\langle I \rangle_t \sim |\tilde{t}(\mu, \nu)|^2 = 1 \rightarrow \text{cte!}$$

~~~



Ejemplo 2



$$t(\beta, y) = t_0 [\delta(\beta - a/2) \cdot \delta(y - 0) + \delta(\beta + a/2) \cdot \delta(y - 0)]$$

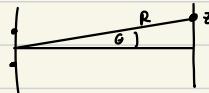
$$\text{Normalizació: } 1 = t_0 \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\beta - a/2) \delta(y - 0) d\beta dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\beta + a/2) \delta(y - 0) d\beta dy \right] \\ = t_0 [1 + 1] = 2t_0 = 1 \rightarrow \text{cada uno contribuye con un 50\%} \\ \rightarrow [t_0 = \frac{1}{2}]$$

$$\tilde{t}(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0 [\delta(\beta - a/2) + \delta(\beta + a/2)] \delta(y) e^{-i\mu\beta} e^{-i\nu y} d\beta dy.$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\beta - a/2) + \delta(\beta + a/2)] e^{-i\mu\beta} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) e^{-i\nu y} dy$$

$$\tilde{t}(\mu, \gamma) = \frac{1}{2} [e^{-i\mu\frac{q}{2}} + e^{i\mu\frac{q}{2}}] \cdot 1 = \cos\left(\frac{\mu q}{2}\right)$$

$$\langle I \rangle_t \sim |\tilde{t}(\mu, \gamma)|^2 = \cos^2\left(\frac{\mu q}{2}\right) = \boxed{\cos^2\left(\frac{kzq}{2R}\right)}$$



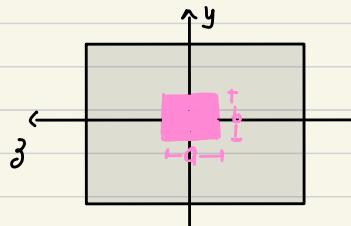
$$\frac{ka \sin \theta}{z} = n\pi \rightarrow \text{IC.}$$

$$\frac{k z_n \cdot q}{2R} = n\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda R} z_n \cdot q = n\pi \rightarrow \boxed{z_n = \frac{nR\lambda}{a}} \quad , \quad \boxed{\Delta z = \frac{R\lambda}{q}}$$



### Ej 3 Máscara rectangular



$$t(z, y) = t_0 \begin{cases} 1 & -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{fuera,} \end{cases} \begin{cases} 1 & -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$1 = t_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(z, y) dz dy$$

$$1 = t_0 \cdot ab \rightarrow t_0 = \frac{1}{ab} \rightarrow \text{es como la densidad de campo.}$$

$$\tilde{t}(\mu, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(z, y) e^{i\mu z} e^{-iy\gamma} dz dy$$

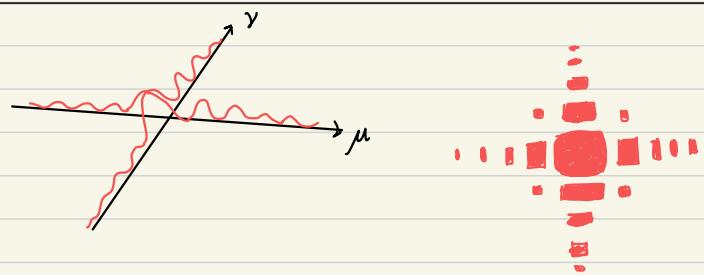
$$= \frac{1}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dz e^{i\mu z} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} dy e^{-iy\gamma}$$

$$= \frac{1}{ab} \frac{e^{-i\mu z}}{-i\mu} \Big|_{-a/2}^{a/2} \cdot \frac{e^{-iy\gamma}}{-iy} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{1}{ab\mu\gamma} \cdot \left( e^{\frac{i\mu a}{2}} - e^{-\frac{i\mu a}{2}} \right) \cdot \left( e^{\frac{iyb}{2}} - e^{-\frac{iyb}{2}} \right) \frac{2}{2}$$

$$= \frac{\sin(\mu a/2)}{\mu a/2} \cdot \frac{\sin(yb/2)}{yb/2}$$

$$\tilde{t}(\mu, \gamma) = \text{sinc}\left(\frac{\mu a}{2}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{yb}{2}\right)$$

$$\langle I \rangle_t \sim |\tilde{t}(\mu, \gamma)|^2 = \text{sinc}^2\left(\frac{\mu a}{2}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{yb}{2}\right)$$



# Interferencia de películas delgadas.

4.Julio

- Colores físicos → poza lluvia ciudad
- Burbujas
- Mariposas, escarabajos, pavo real.
- Óptico
- Nácar (conchas)

Incidencia normal:  $\theta_i = 0$

$$\frac{n_i}{n_t} \quad \downarrow \Psi_i$$

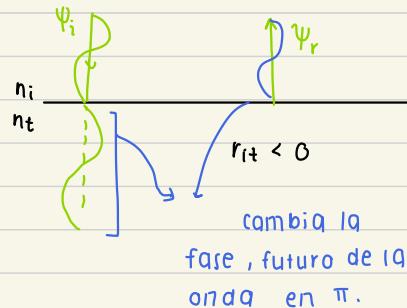
$$r_{it}^{\perp} = r_{it}^{\parallel} = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}$$

$$t_{it}^{\perp} = t_{it}^{\parallel} = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$



$$n_i < n_t \Rightarrow r_{it} < 0 \rightarrow r_{it} = -|r_{it}| = |r_{it}| e^{i\pi}$$

$$n_i > n_t \Rightarrow r_{it} > 0 \rightarrow r_{it} = |r_{it}| e^{i0}$$

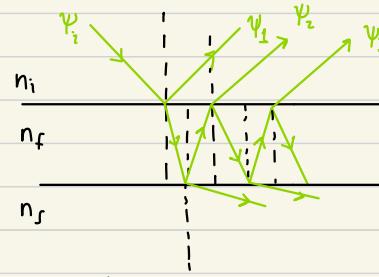


$$\Psi_i = |r_{it}| A_i \cos(k_i z - \omega t)$$

$$r_{it} < 0 \rightarrow \Psi_r = -|r_{it}| A_i \cos(k_i z - \omega t) \\ = |r_{it}| A_i \cos(k_i z - \omega t + \pi)$$

$$r_{it} > 0 \rightarrow \Psi_i = |r_{it}| A_i \cos(k_i z - \omega t + 0)$$

Película delgada:



Dado  $\Psi_i \rightarrow \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots \infty$ 's ondas reflejadas.

$$\Psi_1 = \underline{r_{if}} \Psi_i$$

sólo x dibujo .

$$\Psi_2 = t_{fi} \underline{r_{fs}} t_{if} \Psi_i$$

$$\Psi_3 = t_{if} \left( r_{fs} r_{fi} r_{fs} \right) t_{if} \Psi_i \quad ; \text{ coef. de reflexión} \rightarrow |r| < 1.$$

Películas delgadas  $n_i \approx n_f \approx n_s \rightarrow r$  chicos! ( $< 1$ )

$$\Rightarrow r_{fs} \gg r_{fs} \cdot r_{fi} \cdot r_{fs} \quad \therefore \Psi_2 \gg \Psi_3.$$

$\therefore$  El efecto clave en interferencia de películas delgadas ocurre con la interferencia de las 2 primeras películas delgadas.

→ Reducción a Young!

Descripción ondulatoria:

$$n_i < n_f < n_s$$

$$\Rightarrow r_{if} < 0 \quad (\pi) \quad r_{fs} < 0 \quad (\pi)$$

$$\vec{\Psi}_i \downarrow \quad \vec{\Psi}_i(\vec{r}) = A_i e^{-ik_i z} e^{-i\omega t} \quad \vec{k}, \vec{r}$$

$\frac{n_i}{n_f}$

$z=0$

$$\vec{\Psi}_r \quad \vec{\Psi}_r(\vec{r}) = r_{if} \cdot \vec{\Psi}_i(z=0) e^{ik_i z} e^{-i\omega t},$$

$\boxed{\vec{\Psi}_r = |r_{if}| A_i e^{i(k_i z - \omega t + \pi)} = \vec{\Psi}_\perp}$

$\frac{n_i}{n_f}$

$z=0$

hacia abajo.  
cambia el medio

$$\vec{\Psi}_t \quad \vec{\Psi}_t(\vec{r}) = t_{if} \cdot \vec{\Psi}_i(z=0) \cdot e^{-ik_f z} e^{-i\omega t}$$

$\frac{n_i}{n_f}$

$z=0$

$$= |t_{if}| \cdot A_i e^{-ik_f z} e^{-i\omega t}.$$

$\frac{n_i}{n_s}$

$z=-T$

$$\vec{\Psi}_s \quad \vec{\Psi}_s(\vec{r}) = r_{fs} \cdot \vec{\Psi}_t(z=-T) e^{+ik_f(z+T)} e^{-i\omega t}$$

$\frac{n_i}{n_f}$

$z=0$

$$= -|r_{fs}| |t_{if}| A_i e^{ik_s T} e^{ik_f(z+T)} e^{-i\omega t}$$

$\frac{n_s}{n_f}$

$z=T$

$$\vec{\Psi}_n = |r_{fs}| |t_{is}| A_i e^{i(k_f(z+2T) - wt + \pi)}$$

$$\vec{\Psi}_2(\vec{r}) = t_{fi} \cdot \vec{\Psi}_n(z=0) e^{ik_i z} \cdot e^{-iwt}$$

$$\vec{\Psi}_2(\vec{r}) = |t_{fi}| |r_{fs}| |t_{is}| A_i e^{i(2k_f T + \pi)} e^{i(k_i z - wt)}.$$

$$\therefore \vec{\Psi}_i(\vec{r}, t) = |r_{is}| A_i e^{i(k_i z - wt + \pi)}$$

$$\vec{\Psi}_i(\vec{r}, t) = |t_{fi}| |r_{fs}| |t_{is}| A_i e^{i[k_i z + 2k_f T + \pi - wt]}$$

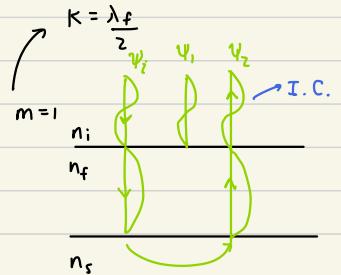
Young  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$

$$= k_f z + 2k_f T + \pi - wt - (k_i z - wt + \pi)$$

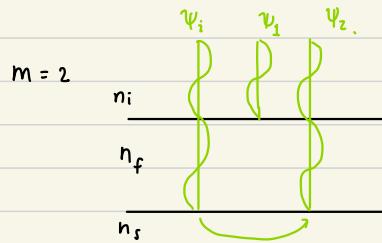
dif. de fase  $\rightarrow \Delta\phi = 2k_f T \rightarrow$  Bajó y subió (se infiere).

I.C. :  $\Delta\phi = 2m\pi ; m \in \mathbb{Z}^+$

I.D. :  $\Delta\phi = (2n+1)\pi ; n \in \mathbb{Z}^+$



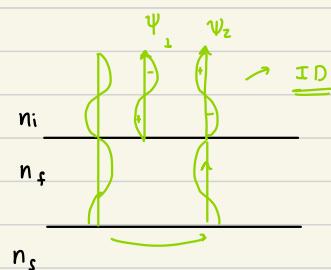
longitud para que haya I.C. ( $T$ ).  $\rightarrow T = \frac{m \cdot \lambda_f}{2}$



I.D. :  $T = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_f}{2}$

$n=0 \rightarrow T = \frac{\lambda_f}{4}$

$n=1 \rightarrow T = \frac{3}{4} \lambda_f$



Ejemplo:  $n_i = 1$  (aire)  
 $n_f = 1,33$  (agua)  
 $n_s = 1,5$  (vidrio) ; incidencia normal.

$$|r_{if}| = 0,14 \quad |r_{fs}| = 0,06 \quad |t_{if}| = 0,85 \quad |t_{fi}| = 1,14.$$

$$T_{if} = T_{fi} = \frac{4n_i n_f}{(n_i + n_f)^2}$$

¿Cuál es la intensidad del campo 1?

$$I_1 = R_{if} \cdot I_0 \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 0,02 \rightarrow 2\%$$

¿Cuánta intensidad tiene el campo 1?

$$\frac{I_1}{I_0} = T_{fi} \cdot R_{fs} \cdot T_{if} = T_{if}^2 \cdot R_{fs} \approx 0,003 \rightarrow 0,3\%$$

En este caso → el efecto es pobre/escaso.

$$\text{Si } n_s = 2 \rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 0,038 \rightarrow 3,8\%$$

¿ $n_f$  + g.  $I_1 = I_2$ ?

$$n_s = 1,78$$

conservación de la energía.

$$T: \text{Transmitancia} = 1 - R \Rightarrow \left[ T = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} \cdot |t|^2 \right]$$

$$R: \text{Reflectancia} = |r|^2$$

→ Buscar cosas que no han evaluado

\* No redes rotónicas