



# Electrodinámica

8 agosto

## Bibliografía:

→ Griffiths ← NO PROFUNDIZA, buena guía

→ Greiner

→ Schwinger

→ Jackson ← Profundizar tópicos.

Buenos problemas ←

→ Zangwill. \* bueno!

↳ descargar.

Muy bueno! ←

libro: Modern Physics, Weinberg

## Ecs. de Maxwell:

$$(I) \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

→ lado derecho: fuentes de materia.

$$(II) \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(III) \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$(IV) \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

medido ←

$$\text{Permitividad: } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (A = C/s.)$$

convenção →

$$\text{Permeabilidad: } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

↳ medida de corriente

$$\vec{E} [\text{V/C}], \vec{B} [\text{T}] \quad (\text{T} = \text{N/A})$$

$$\mu_0 \cdot \epsilon_0 = 1/c^2, \quad c: \text{vel. de la luz}$$

$\rho$ : densidad de carga [ $\text{C/m}^3$ ]

$\vec{J}$ : densidad de corriente [ $\text{A/m}^2$ ].

$$\nabla \cdot (IV) = \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B})}_{0} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = \mu_0 \cdot \nabla \cdot \vec{J}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

\* en mecánica cuántica sale esta ecuación pero  $\rho$  es una probabilidad de encontrar la partícula.

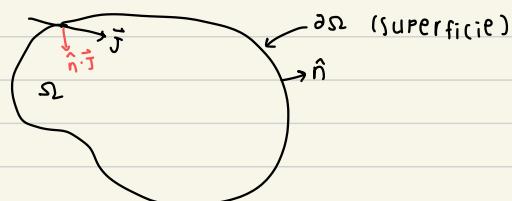
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0}$$

Ecuación de continuidad

la carga que disminuye  
está compensada por la  
corriente que aumenta.

$$Q_r = \int_{\Omega} d^3r \rho(\vec{r}, t)$$

en esa región



\* en el caso anterior,

$\vec{j} \cdot \hat{n}$  es neg.  $\rightarrow$

Q positivo (aumenta carga)

$$\dot{Q}_r = \int_{\Omega} d^3r \rho(\vec{r}, t) = - \int_{\Omega} d^3r \cdot \nabla \cdot \vec{j}$$

volumen fijo

$$= - \int_{\partial\Omega} d^2r \hat{n} \cdot \vec{j}$$

} teo. de la divergencia

$\vec{j}$  que realmente entra a la superficie

### Fuerza de Coulomb - Lorentz

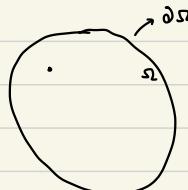
$$\vec{F}_q = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

donde está la carga

$$\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q)$$

en un volumen.

$$Q_{\Omega} = \int_{\Omega} d^3r \rho(\vec{r}) = q.$$



densidad de una carga puntual

←

dentro del volumen

campo generado por la carga  $= \vec{E}$ .

$$(I) \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q)$$

$$\int_{\Omega} d^3r \nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\partial\Omega} d\Omega \hat{n} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$d^2r = dA = R^2 d\Omega, \quad d\Omega = d\theta d\phi \sin\theta$$

$$\oint_{r=R} d\Omega R^2 \hat{r} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$\vec{E}$  tiene simetría esférica  
 $\vec{E} = \hat{r} \cdot E(r)$

$$R^2 E(R) \int_{\Omega} d\Omega \hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$R^2 E(R) 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_q(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ley de Coulomb.

para darle dirección.

$$\vec{E}_q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{\|\vec{r} - \vec{r}_q\|^3}$$

Solución completa de la ecuación:

$$\vec{E} = \vec{E}_q(\vec{r}) + \vec{E}_h(\vec{r})$$

$\nabla \cdot \vec{E}_h = 0 \rightarrow$  no es producto de una densidad.  
 $\nabla \cdot \vec{E}_h = 0 \rightarrow$  contribución homogénea. (campo debido a otras cargas).

Ej:  $\vec{t}_h :$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} + \vec{E}_h$$

no es la única solución a una configuración de cargas.

$$\sum_{i=1}^N q_i \rightarrow \int dq$$

$$dq = \begin{cases} d^3 r' \rho(r') \\ d^2 r' \sigma(r') \\ dr' \lambda(r') \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(r') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} + \vec{E}_h(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(r') \nabla \cdot \left[ \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right]$$

$\underbrace{\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}}_{4\pi \delta(r - \vec{r}')} \rightarrow$  identidad matemática.

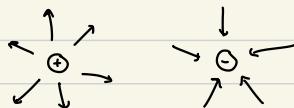
→ la div. mató la solución homogénea.

· cuando hay flujo neto  $\neq 0$ ,  
 $\Rightarrow$  hay una carga dentro

FLUJO:

$$\oint_{\partial V} d^2r \hat{r} \cdot \vec{E} = \int_V d^3r \cdot \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r \rho = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

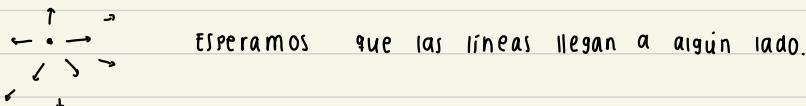
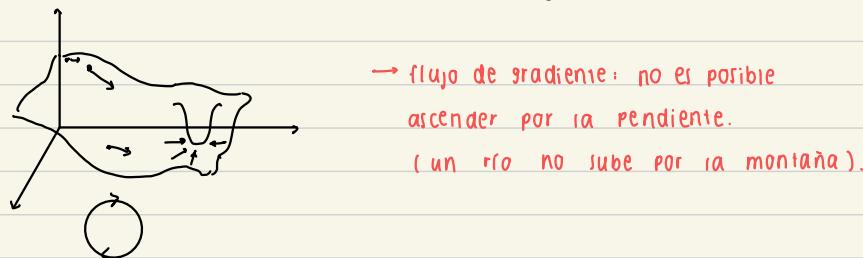
$\underbrace{\phantom{d^3r \cdot \nabla \cdot E}}_{\neq 0}$



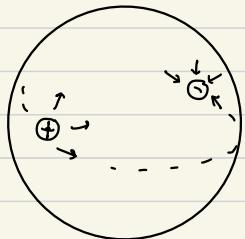
$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \text{campo no puede ser un loop cerrado.}$$

$$\rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

$V(r)$   $\rightarrow +$  pendiente  $\rightarrow$  mayor  $\vec{E}$



Ej] Universo cerrado



→ debe haber al otro lado una carga negativa.  
 ↳ Electrones con carga positiva: positrones.

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

no depende del camino

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \cdot \vec{E}_q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_q)}{\|\vec{r} - \vec{r}_q\|^3} \end{array} \right\} V_q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_q\|} + \text{ct}$$

(movemos  $r_0$  a  $\infty$ ) si  $\vec{r} = \vec{r}_0$  debe anularse

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}, \quad \sum_{i=1}^N q_i \rightarrow \int d\vec{q}' \quad \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}' \quad d\vec{q}' = \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad \boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}} \quad (*)$$

todo el espacio

separamos el espacio →

$$\underbrace{\vec{r}}_{S_1} \quad \underbrace{\vec{r}}_{S_2} \quad = \int dV \quad dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{q}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

suma de los potenciales debidos a  $d\vec{q}'$ .

$$V(\vec{r}) = V_{S_1}(\vec{r}) + V_{S_2}(\vec{r}) = \int_{S_1} dV + \int_{S_2} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d^3 r' \rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \int_{S_2} \dots$$

debido a las cargas dentro de  $S_2$

hay + información en esta ya que integra las otras ecuaciones.

Resto. (importante)

$$\vec{E} = -\nabla V \quad \left. \begin{array}{l} \nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{array} \right\} \text{Además :} \quad \nabla^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|} = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

actúa en  $\vec{r}$

$$\nabla^2 \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}').$$

$$* d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla^2 \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \rho(\vec{r}').$$

$$(*) V(F) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d^3r' \rho(r')}{\| \vec{r} - \vec{r}' \|} + V_h(\vec{r}) \rightarrow \nabla^2 V_h(\vec{r}) = 0 \left( \begin{array}{l} \text{recordar} \\ \vec{E}_h \text{ t.q. } \nabla \cdot \vec{E}_h = 0 \end{array} \right)$$

componente paralela no sufre discontinuidades.

C.B

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_I'' - \vec{E}_{II}'' &= 0 && \text{viene de } \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \vec{E}_I^\perp - \vec{E}_{II}^\perp &= \frac{1}{\epsilon_0} \sigma && \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \vec{E}_I - \vec{E}_{II} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \end{aligned} \right\}$$

viene de  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$

¿Cuánta energía se requiere para armar una configuración?

### Trabajo

- Si algo de energía gastamos en el  $\infty$ , lo recogemos en el origen.
- $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ \dots$  carga se pone más difícil la energía que le damos en el  $\infty$  para que se acerque a las otras.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3r' \rho(r') V(r') = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} d^3r' \underbrace{\nabla \cdot \vec{E}(r')}_{\rho(r') = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}} V(r') \\ &\quad \nabla \cdot (\vec{E}(r') V(r')) - \vec{E}(r') \cdot \nabla V \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial\Omega} d^2r' \hat{n} \cdot \vec{E} V + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} d^3r' \vec{E}^2 \end{aligned}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} d^3r' \vec{E}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial\Omega} d^2r' \hat{n} \cdot \vec{E} V$$

término de borde.

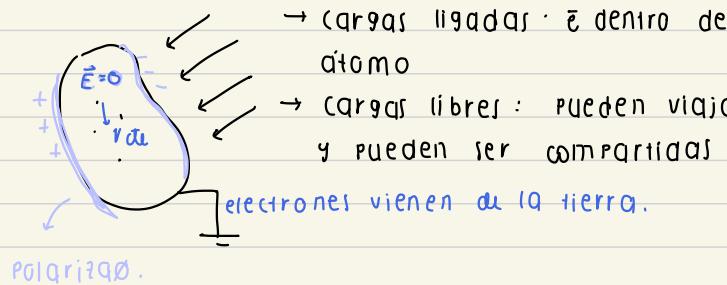
$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r' \vec{E}^2$$

Toda el espacio.

También repasar

\* conductores →

\* capacitancias



# Teorema de Green

\* Tierra significa  $\infty$   
 $v=0$ .

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{z} d^3r = \int_{\partial\Omega} \vec{z} \cdot \hat{n} d^2r$$

$$\vec{z}_1 = \phi \nabla \psi$$

$\phi$  y  $\psi$   
 campos  
 escalares.

$$\nabla \cdot \vec{z}_1 = (\nabla \phi) (\nabla \psi) + \phi \nabla^2 \psi$$

$$\rightarrow \int_{\Omega} d^3r (\nabla \phi \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi) = \oint_{\partial\Omega} d^2r \phi \frac{\partial}{\partial n} \psi$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla \right)$$

derivada parcial en la  
 dirección  $\hat{n}$

$$\vec{z}_2 = \psi \nabla \phi \quad (\phi \rightarrow \psi)$$

$$\rightarrow \int_{\Omega} d^3r (\nabla \phi \nabla \psi + \psi \nabla^2 \phi) = \oint_{\partial\Omega} d^2r \psi \frac{\partial}{\partial n} \phi$$

Restando las anteriores:

$$\Rightarrow \int_{\Omega} d^3r' (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \oint_{\partial\Omega} d^2r' \left[ \phi \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right]$$

Podemos tomar  $\phi$  y  $\psi$  como queramos!

elejimos

$$\rightarrow \text{así: } \phi(\vec{r}') = V(\vec{r}') \quad y \quad \psi(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}') \quad \text{taq} \quad \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

Reemplazando:

$$\int_{\Omega} d^3r' V(\vec{r}') \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') - \int_{\Omega} d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \nabla^2 V(\vec{r}') = \oint_{\partial\Omega} d^2r' V(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}') - \oint_{\partial\Omega} d^2r' G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} V(\vec{r}') - \int_{\Omega} d^3r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}')$$

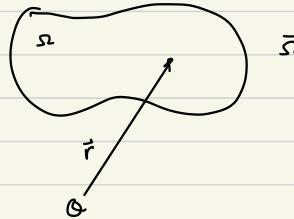
$$-4\pi V(\vec{r})$$

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3 r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}'). + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} d^2 r' \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial V}{\partial n'} (\vec{r}') - V(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right]$$

proviene de cargas del interior

info del exterior codificada en la superficie.



$$\nabla^2 \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

$\curvearrowright G(\vec{r}, \vec{r}')$

\*  $\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho + 0$   
si aplicamos  $\nabla^2$  (en  $\vec{r}$ ) las otras expresiones deben cancelarse.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \dots}_{\sim}$$

Recordar

$$V(\vec{r}) = \underline{V_{\Omega}(\vec{r})} + \text{Resto}$$

$\curvearrowright$  potencial fuera del volumen está en la superficie.

# condiciones de Borde

11. agosto

\* cualquier función de Green sirve. Solo debe satisfacer

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3 r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} d^2 r' \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial V}{\partial n'} - V(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') \right]$$

→ donde  $\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$

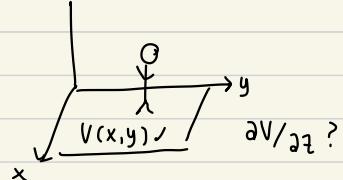
por ejemplo:  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$  → puede que sea poco práctica. Elegiremos la función que sea lo más cómoda posible.

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + F(\vec{r}, \vec{r}')$$

↳ quitamos el polo que produce la delta.

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{H(\vec{r}, \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \dots$$

expansión en Taylor



## condiciones de Borde

### \* Dirichlet

conocemos  $V(\vec{r}')$  en  $\partial\Omega$

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{para } \vec{r}' \in \partial\Omega$$

### \* Neumann

conocemos  $\frac{\partial V}{\partial n'}(\vec{r}')$  en  $\partial\Omega$ .

$$\left( \vec{E} = -\nabla V, \hat{n} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial n} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = 0 \quad \text{para } \vec{r}' \in \partial\Omega. \rightarrow \text{NO es posible imponer esto!}$$

Es decir conocemos ← el campo eléctrico en la frontera!

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

simetría ya que la física dice que entre 2 cargas se transfiere la misma info. de una carga q otra

$$[G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})], \quad \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \times (-4\pi).$$

Fuentes de Green transmiten reciprocidad entre 2 cargas. Fótones transmiten esta info.

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \dots$$

$$\nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}) \dots$$

problema.

$$\nabla'^2 G_N(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r})$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} d^3 r' \nabla' \cdot (\nabla' G_N(\vec{r}, \vec{r}'))}_{\text{...}} = -4\pi$$

$$\int_{\partial\Omega} d^2 r' \hat{n}' \cdot \nabla' G_N(\vec{r}, \vec{r}') = \boxed{\int_{\partial\Omega} d^2 r' \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi}$$

↳ lo satisface cualquier función de Green

pero no es posible  $\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = 0$  en todo  $\partial\Omega$ .

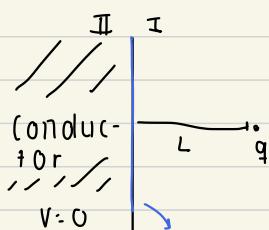
$$\text{Neumann: } \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') = \text{const} = -\frac{4\pi}{\text{área.}} = -\frac{4\pi}{A_{\partial\Omega}}$$

Termina que no es 0!

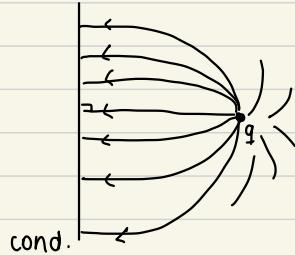
$$\rightarrow -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} d^2 r' V(\vec{r}') \left( -\frac{4\pi}{\text{Área}} \right) = \frac{1}{\text{Área}} \oint_{\partial\Omega} d^2 r' V(\vec{r}') = \bar{V} = \text{cte.} \quad \checkmark$$

↳ no afecta que no conocemos  $\bar{V}$ .

# Método de imágenes

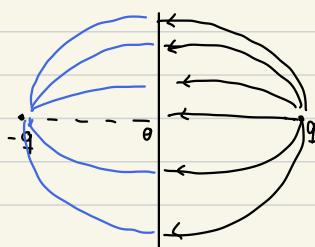


$\sigma$  (debe existir densidad superficial).



\* llegan las líneas del campo de forma normal

sin el cond:



\* En la superficie llegan las líneas en la comp. normal.

No es difícil verificar  
 $V(0) = 0 \quad (\vec{r} = 0)$

Existe 1 solu<sup>o</sup> que cumpla con las c.b:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \hat{z}\|} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} + \hat{z}\|}$$

para  $z > 0$ .

↓  
potencial debido a la carga imagen.

$$\vec{E}_I - \vec{E}_{II} = \frac{\hat{z}\sigma}{\epsilon_0}$$

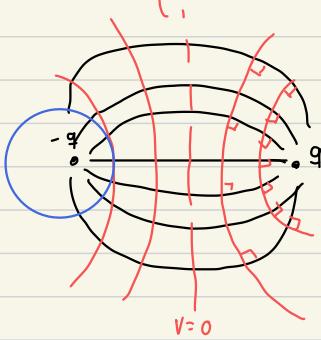
$$\vec{E}_I = \frac{\hat{z}}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \epsilon_0 \hat{z} \cdot \vec{E}_I = -\epsilon_0 \hat{z} \cdot \nabla V \Big|_{z=0}$$

$$= -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

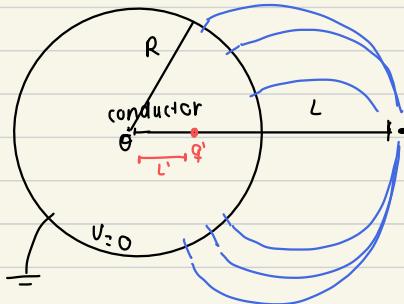
en el caso del conductor es la sol. del lado derecho

equipotencial 0



→ Si  $-q \neq q \Rightarrow$  se forma una esfera equipotencial al rededor de la menor. No necesariamente centrada en  $-q$ .

$q'$  y  $L'$  desconocidos.



$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \hat{z}\|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - L\hat{z}\|}$$

$$V(R\hat{r}) = 0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|R\hat{r} - L\hat{z}\|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|R\hat{r} - L\hat{z}\|}$$

Supongamos.  $q > 0 \Rightarrow q' < 0$ ,  $q' = -|q'|$

$$\Rightarrow \frac{\frac{q}{R}}{\frac{1}{R} \|R\hat{r} - L\hat{z}\|} = \frac{|q'| / L'}{\|R\hat{r} - L\hat{z}\| / L'}$$

$$\frac{q/R}{\|\hat{r} - \frac{L}{R}\hat{z}\|} = \frac{|q'|/L'}{\|\hat{z} - \frac{R}{L}\hat{r}\|}$$

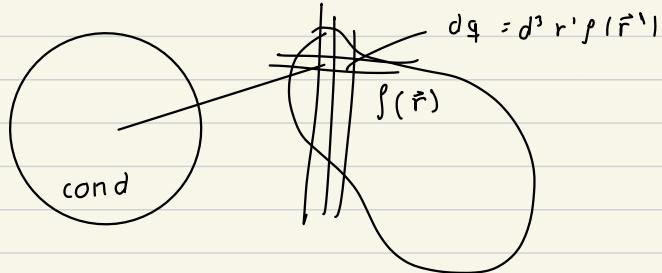
$$\frac{q/R}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{R^2} - 2\hat{r}\cdot\hat{z}\frac{L}{R}}} = \frac{|q'|/L'}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L'^2} - 2\hat{z}\cdot\hat{r}\frac{R}{L'}}}$$

Denominando...  $\Rightarrow \frac{L}{R} = \frac{R}{L'} \Leftrightarrow \dots \wedge \hat{r}$

Numerador  $\Rightarrow q' = -q \frac{L'}{R}$

$$\Rightarrow l' = \frac{R^2}{L}$$

$$q' = -\frac{q R}{L}$$



$$dV(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} - \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{\|\vec{r}'\|} \frac{1}{\|\vec{r} - R/\|\vec{r}'\|^2 \cdot \vec{r}'\|}$$

*l dist. al origen*

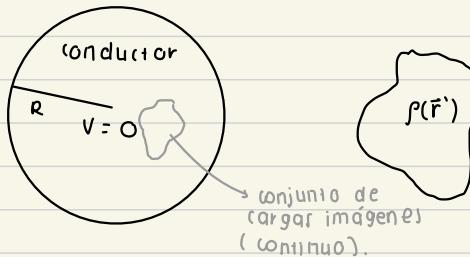
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \left[ \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} - \frac{R}{\|\vec{r}'\| \left\| \vec{r} - \frac{R^2 \vec{r}'}{\|\vec{r}'\|^2} \right\|} \right]$$

ej simétrico  
ie,  $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = G_D(\vec{r}') \vec{r}$

función de Green. :  $G_D$

(Dirichlet ya que es 0 en la frontera para la esfera).

\* También sirve para una carga dentro de la esfera.

Última clase: $V(\vec{r}) = ? \rightarrow$  en todo el espacio excepto el conductor.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}')$$

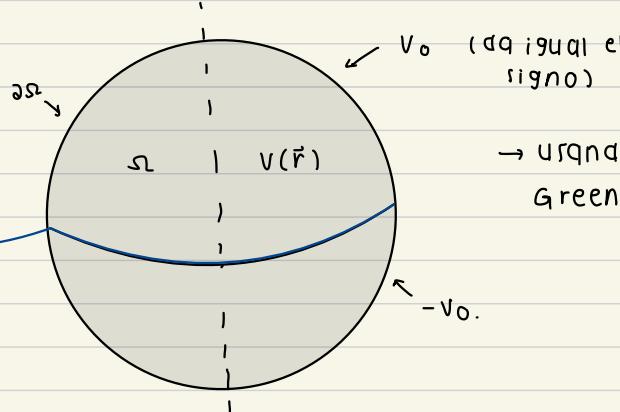
$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} - \frac{R}{\|\vec{r}'\|} \frac{\vec{r} - R^2 \vec{r}'}{\|\vec{r}'\|^2}$$

es una función de Dirichlet que se hace 0 en una esfera. (Específica para el problema.).

Tipo Dirichlet  
(0 en la superficie)

$\leftarrow G(R\hat{r}, \vec{r}') = 0.$

Simétrico  $\leftarrow * G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$

Tarea

¿Potencial en todo el espacio?

→ Usando el método de funciones de Green

(luego de evaluar).

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3 r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial\Omega} d^2 r' \left[ G(\vec{r}', \vec{r}) \frac{\partial V}{\partial n'} - V(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} \right]$$

(no hay cargar dentro)

queremos que  $G(\vec{r}', \vec{r}) = 0$  en la frontera

\* No conocemos  $\frac{\partial V}{\partial n'}$

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial\Omega} d^2 r' V(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}', \vec{r})}{\partial n'}.$$

$d^2 r = R^2 d\Omega$

$= R^2 \sin\theta d\theta d\phi$

$$= -\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \iint d\theta d\phi \sin\theta V(\theta) \frac{\partial G_D(\vec{r}', \vec{r})}{\partial r'} \Big|_{r'=R}$$

$\hat{n} \cdot \nabla' = \hat{r}' \cdot \nabla' = \frac{\partial}{\partial r'}$

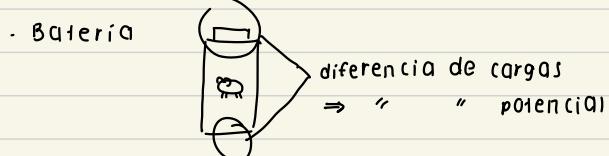
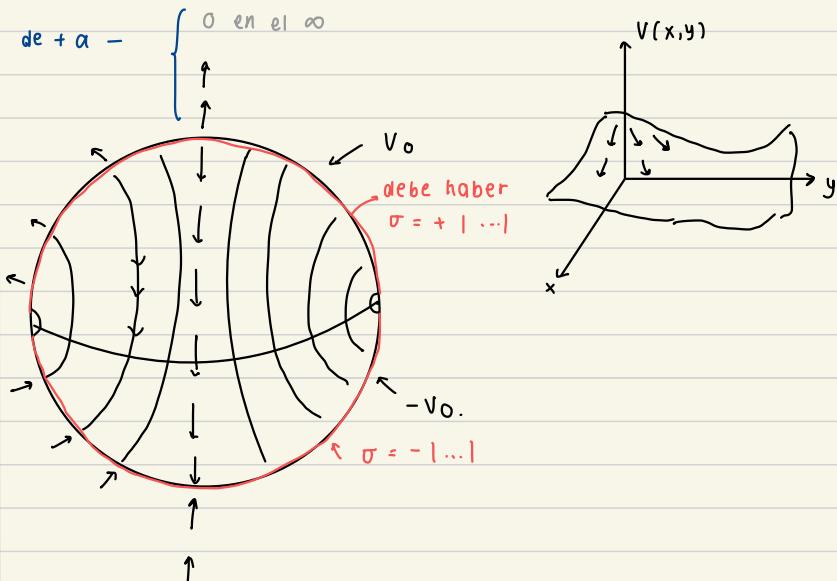
→ cambio de coordenadas  
de las bases también!

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi} \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} * \text{verificar!}$$

$$\hat{r} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial r}$$

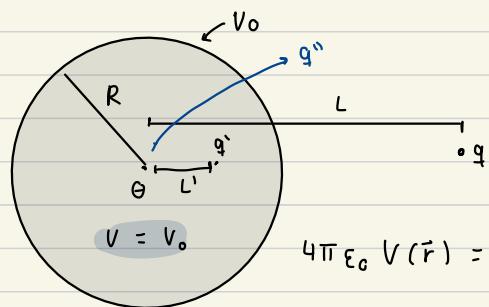
unetas de campo.

\* cargas positivas son fuentes de campo.



### Método de imágenes

$q''$  carga imagen



ubicar una nueva carga  $q''$  al centro para que la superficie siga siendo equipotencial.

$$4\pi\epsilon_0 V(\vec{r}) = \frac{q}{\|\vec{r} - \vec{L}\|} + \frac{q'}{\|\vec{r} - \vec{L}'\|} + \frac{q''}{\|\vec{r}\|}$$

$$V(R\hat{r}) = V_0 = \underbrace{\#_1 + \#_2}_0 + \frac{q''}{R}$$

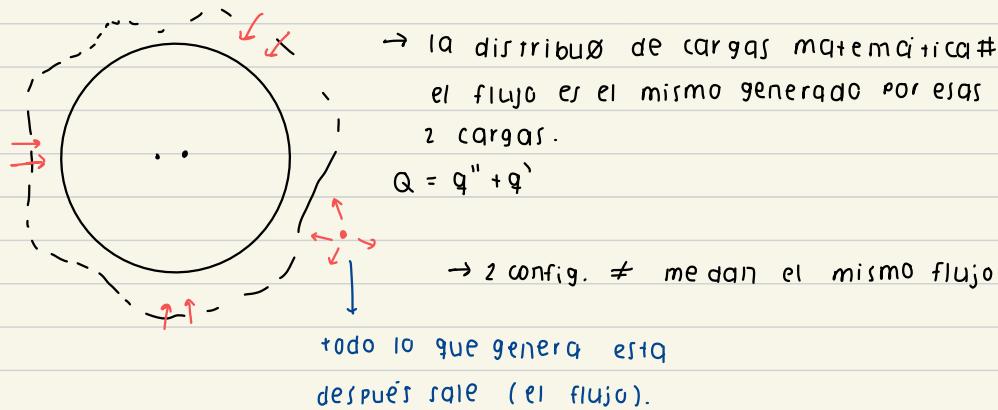
$$q'' = V_0 R \cdot 4\pi\epsilon_0$$

$q''$  y  $q'$  son cargas imágenes sólo para visualizar (no existen!).

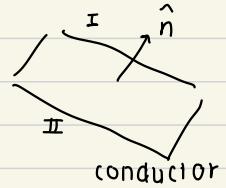
carga total en la superficie

$$Q_{\text{conductora}} = q'' + q' \rightarrow q'' = Q - q' = Q + \frac{qR}{L}$$

$$4\pi\epsilon_0 V_0 R = Q + \frac{qR}{L}$$



C.B.  $\vec{E}_I - \vec{E}_{II} = \frac{\hat{n}}{\epsilon_0} \sigma$   $\vec{E}_{II} = 0$



$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_I = \frac{\hat{r}\sigma}{\epsilon_0} \\ \vec{E}_{II} = 0 \end{array} \right\} \nabla V = -\frac{\hat{r}\sigma}{\epsilon_0} / \hat{r}$$

$$\hat{r} \cdot \nabla V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

# Separación de variables.

$$\nabla^2 V = 0 + C.B$$

\* Cartesianas:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = 0.$$

(Idea)

$$V(x, y, z) = \sum_n \sum_m X_{nm}(x) Y_{nm}(y) Z_{nm}(z).$$

$$V(x, y, z) = \sum_{nm} V_{nm}(x, y, z) \quad \text{donde } V_{nm}(x, y, z) = X_{nm}(x) Y_{nm}(y) Z_{nm}(z),$$

\* sumamos soluciones (cada una es solución).

\*  $nm$  está ahí solo que no lo escribo.

$$\nabla^2 V_{nm}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) X(x) Y(y) Z(z) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)}_{\text{solo función de } x} + \underbrace{\frac{1}{y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y)}_{\text{solo función de } y} + \underbrace{\frac{1}{z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z)}_{\text{solo función de } z} = 0.$$

$\Rightarrow$  cada una es constante.

$$\underbrace{\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)}_{-\alpha^2} + \underbrace{\frac{1}{y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y)}_{-\beta^2} + \underbrace{\frac{1}{z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z)}_{\gamma^2} = 0. \quad \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

· asumiendo  $\alpha$  y  $\beta$  reales y positivos  $\Rightarrow \gamma$  real y positi.

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{X''}{X} = -\alpha^2 \\ \frac{Y''}{Y} = -\beta^2 \\ \frac{Z''}{Z} = \gamma^2 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} X'' + \alpha^2 X = 0 \\ Y'' + \beta^2 Y = 0 \\ Z'' - \gamma^2 Z = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} X(x) = A_x e^{i\alpha x} + B_x e^{-i\alpha x} \\ Y(y) = A_y e^{i\beta y} + B_y e^{-i\beta y} \\ Z(z) = A_z e^{\gamma z} + B_z e^{-\gamma z} \end{array} \right.$$

Típicamente  $\alpha \rightarrow \alpha_n$  (discreto)

$$\beta \rightarrow \beta_m$$

$$\gamma \rightarrow \gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}$$

$$X_n(x) = A_n^x e^{i\alpha_n x} + B_n^x e^{-i\alpha_n x}$$

$$Y_m(y) = A_m^y e^{i\beta_m y} + B_m^y e^{-i\beta_m y}$$

$$Z_{nm}(z) = A_{nm} e^{\gamma_{nm} z} + B_{nm} e^{-\gamma_{nm} z}$$

Falta

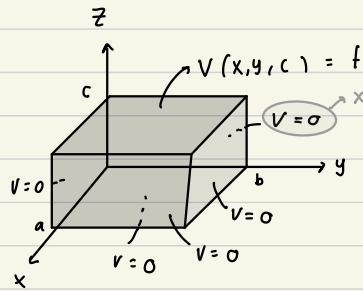


Juntar las ecuaciones y satisfacer las cond. de borde.

ej:

# separación de variables

18 · agosto



$$V = X Y Z \rightarrow 1 \text{ solu} \theta$$

$$X(x) = A_n^x e^{i\alpha_n x} + B_n^x e^{-i\alpha_n x}$$

$$Y(y) = \dots$$

$$Z(z) = \dots$$

CB

$$X(0) = 0, X(a) = 0$$

$$\rightarrow X(0) = 0 \quad \& \quad X(a) = 0$$

$$Y(0) = 0, Y(b) = 0$$

$$\hookrightarrow 0 = A_n^y + B_n^y$$

$$Z(0) = 0, Z(c) \neq 0$$

$$-B_n^z = A_n^z$$

$$\Rightarrow X(x) = A_n^x e^{i\alpha_n x} - A_n^x e^{-i\alpha_n x}$$

$$X(x) = A_n^x (e^{i\alpha_n x} - e^{-i\alpha_n x})$$

$$= 2i A_n^x \sin(\alpha_n x)$$

$$X(x) \propto \sin(\alpha_n x)$$

$$X(x) = \sin(\alpha_n x)$$

$$X(a) = 0 \Rightarrow \sin(\alpha_n a) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_n a = n\pi$$

$$\Rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{a}$$

Repetimos para  $y(y)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(y) = \sin(\beta_n y) \\ \beta_n = \frac{m\pi}{b} \end{array} \right.$$

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}$$

$$Z(z) = A_{nm}^z e^{\gamma_{nm} z} + B_{nm}^z e^{-\gamma_{nm} z}$$

$$\rightarrow Z(0) = 0 \Rightarrow A_{nm}^z + B_{nm}^z = 0 \Rightarrow B_{nm}^z = -A_{nm}^z$$

$$\rightarrow Z(z) = A_{nm}^z (e^{\gamma_{nm} z} - e^{-\gamma_{nm} z}) = 2 A_{nm}^z \sinh(\gamma_{nm} z) = \sinh(\gamma_{nm} z)$$

↑  
normalizando

$$V(x, y, z) = \sum_{n,m}^{\infty} C_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z)$$

$$V(x, y, c) = f(x, y).$$

Sólo con la suma podemos decirlo, no  $\exists z \approx f(x, y)$  (había que esperar para armar la completa).

Fourier discreto!

hay un prod. punto entre funciones base.

? recordar

$\langle x | x \rangle$   
extra

$$\Rightarrow \sum_{n,m} C_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c) = f(x, y) \quad (*)$$

Fourier

$$\int_0^a dx \sin(\alpha_n x) \sin(\alpha_{n'} x) = \frac{a}{2} \delta_{nn'}$$

ortogonales si  $n = n'$   
(es 0).

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \quad v_i$$

Buena notación  
 $\vec{v} = \sum_i v^i \vec{e}_i$   
base

$v_i \rightarrow v(i)$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \dots = \sum_i v(i) u(i)$$

$f(x)$   
 $\vec{f} = \int dx f(x) |x\rangle$

base para las funcións que viven en un espacio vectorial.

dirac ket?

$$\vec{f}^t = \int dx f(x) \langle x|$$

bra

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \int dx f(x) g(x)$$

$$\vec{f}^t \vec{g} = \left( \int dx f(x) \langle x| \right) \left( \int dx g(x) |x\rangle \right)$$

$$\underbrace{\int dx \int dx' f(x) g(x') \langle x | x' \rangle}_{\delta(x-x')} \quad * \vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij}. \quad \hookrightarrow \text{delta Kronecker}$$

delta Dirac.

$$= \int dx f(x) g(x).$$

$$|\Psi\rangle = \int dx |x\rangle \langle x | \Psi \rangle$$

$$* \sum \vec{e}_i \vec{e}_i^t = (1, \dots)$$

$$= \int dx |x\rangle \Psi(x).$$

Função de Onda.

$$\int dx (*) \sin(\alpha_n x) = \int dx f(x,y) \sin(\alpha_n x) \quad q_2 \delta_{nn'}$$

$$\int dx (*) \sin(\alpha_n x) = \sum_{nm} C_{nm} \sinh(\gamma_{nm}c) \sin(y\beta_m) \underbrace{\int dx \sin(\alpha_n x) \sin(\alpha_{n'} x)}$$

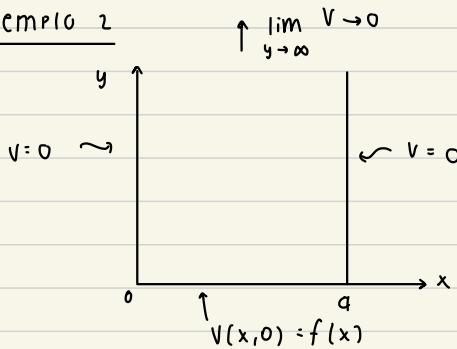
$$\rightarrow \frac{q}{2} \sum_m C_{nm} \sinh(\gamma_{nm}c) \sin(y\beta_m) = \int dx f(x,y) \sin(\alpha_n x).$$

Nos saca una delta de Kronecker y se despeja  $C_{nm}$ .

REPETIMOS PARA Y: (mult. por un  $\sin(\beta my)$  e integramos)

$$\Rightarrow C_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm}c)} \int_0^a dx \int_0^b dy f(x,y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta my).$$

### Ejemplo 2



Se puede hacer:

no cambia en z  $\Rightarrow \tilde{f}(z) = 0$

Habrá que hacer se puede hacer  $X(x) \cdot Y(y)$ .  
todo denuevo

$$\tilde{f}'(z) = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta^2 = -\alpha^2 \\ \beta = \pm i\alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(x) &= A^x e^{i\alpha x} + B^x e^{-i\alpha x} \\ Y(y) &= A^y e^{i\beta y} + B^y e^{-i\beta y} \\ &= A^y e^{i(-i\alpha)y} + B^y e^{-i(-i\alpha)y} \end{aligned}$$

$$= A^y e^{\alpha y} + B^y e^{-\alpha y}$$

\*  $\alpha_n$  debe ser discreto  
denuevo qq que  
 $X(0) = X(a) = 0$ .

$$x(0) = 0 \quad \underbrace{\text{y} \quad x(a) = 0}$$

$$x_n(x) = \sin(\alpha_n x) \quad \text{con } \alpha_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y(y) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad A^y = 0 \quad (\text{para que no explote con } \alpha \text{ real y positivo}).$$

omito de  $B^y$

$$\Rightarrow y(y) = e^{-\alpha_n y}$$

Juntando:

$$V(x,y) = \sum_n c_n e^{-\alpha_n y} \sin(\alpha_n x)$$

$$V(x,0) = f(x)$$

$$\Rightarrow \sum_n c_n \sin(\alpha_n x) = f(x) \quad / \cdot \sin(\alpha_n x) : \int dx.$$

$$\Rightarrow [c_n = \frac{2}{a} \int_0^a dx f(x) \sin(\alpha_n x)]$$

caso particular:  $f(x) = V_0$ .

$$\Rightarrow c_n = \frac{2V_0}{a} \int dx \sin(\alpha_n x)$$

$$= -\frac{2V_0}{a} \left. \frac{\cos(\alpha_n x)}{\alpha_n} \right|_0^a = \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi n} & , n \text{ impar} \\ 0 & , n \text{ par.} \end{cases}$$

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$n = 2n-1$$

$$= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \left[ \left( e^{\frac{\pi i}{a}(ix-y)} \right)^{2n-1} - \left( e^{\frac{\pi i}{a}(ix+y)} \right)^{2n-1} \right]_{2i}$$

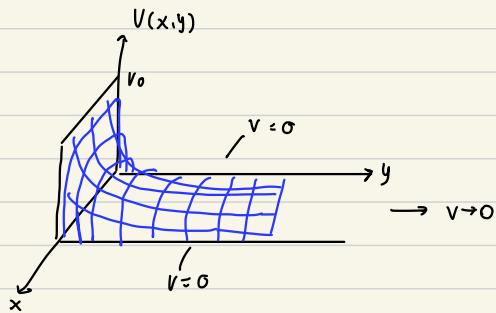
$$\rightarrow \operatorname{Arctgh}(z) = \sum_n \frac{1}{2n-1} \frac{z^{2n-1}}{z} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \leftarrow$$

$$V(x,y) = \frac{V_0}{\pi i} \left[ \ln \left( \frac{1 + e^{\frac{\pi}{q}(ix-y)}}{1 - e^{\frac{\pi}{q}(ix-y)}} \right) - \ln \left( \frac{1 + e^{\frac{\pi}{q}(ix+y)}}{1 - e^{\frac{\pi}{q}(ix+y)}} \right) \right]$$

$$= \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Arctg} \left( \frac{\sin(\frac{\pi}{q}x)}{\sinh(\frac{\pi}{q}y)} \right)$$

Formula:

$$\rightarrow \operatorname{Arctg}(z) = \frac{1}{2i} \ln \left( \frac{1+iz}{1-iz} \right) \leftarrow$$



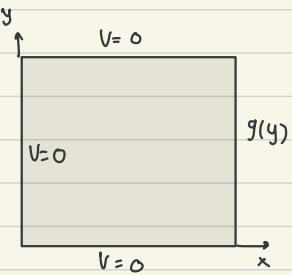
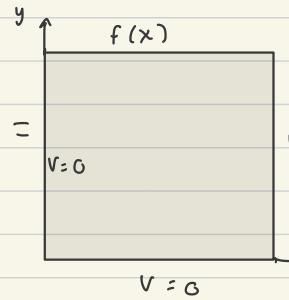
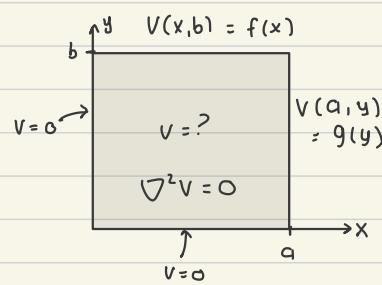
# Separación de variables en coord. esféricas

22. Agosto.

→ 2 tapas ≠ 0  
¡superposición!

i Hecharle una mirada!

caso particular con  
 $f(x)$  y  $g(y)$  cts.



→ Mucho más eficiente.

$$\nabla^2 V = 0$$

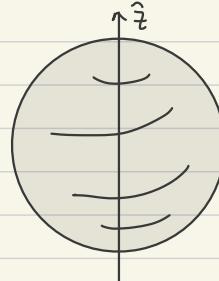
$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right] = 0$$

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV)$$

simetrías en torno  
a un eje

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \rightarrow V = V(r, \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$



esta es 1 de todas las soluciones!

$$V(r, \theta) = \sum_l R_l(r) \Theta_l(\theta)$$

multipolos de los multipolos de legendre.

revisar!

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right]} = 0.$$

$$\underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right)}_{\text{const} = l(l+1)} + \underbrace{\frac{1}{\Theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right)}_{\text{const} = -l(l+1)} = 0$$

$$R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

$$\Theta_l(\theta) = P_l(\cos \theta) \quad \text{con } l = 0, 1, 2, 3, \dots \rightarrow \text{es una función periódica, } V \text{ es simétrico periódico.}$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^l - 1)^l$$

Polinomios de legendre

Prop.

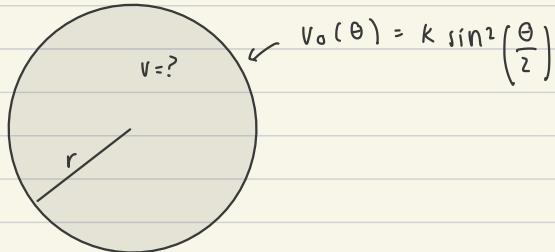
$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \begin{cases} 0 & l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1} & l = l' \end{cases}$$

$$= \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

$$x = \cos \theta \rightarrow dx = -\sin \theta d\theta$$

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{2 \delta_{ll'}}{2l+1}$$

Ej]



Diverge en  $r=0$

Indicación de una carga

Dipolo vq como  $\frac{1}{r^2}$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

$$B_l = 0 \quad \forall l$$

o  $\rightarrow$  xq  $V$  es cero en el centro. No hay cargas en el interior

Si  $l=1$ , campo eléctrico dr.

$l=2$ , hay algo fuera.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta).$$

Son vectores ortogonales

(proyectar en esa base.)

Imponiendo C.B.  $\rightarrow$

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = k \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{k}{2} (1 - \cos \theta).$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

:

$$= \frac{k}{2} (P_0 - P_1(\cos\theta))$$

└ Expandimos en funciones base:  
Polinomios de Legendre.



Podemos proyectar  $\vec{v}$  en las bases:

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = v^1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = 50$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_2 = v^2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_2 = 3$$

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i$$

$$\vec{v} = 50 \cdot \vec{e}_1 + 3 \vec{e}_2$$

└ todos son 0 excepto  $v_1$  y  $v_2$ .

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_3 = v^3$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_3 = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_0 \cdot P_0 = \frac{k}{2} P_0 \Rightarrow [A_0 = \frac{k}{2}] \\ A_l R \cdot P_l(\cos\theta) = -\frac{k}{2} P_l(\cos\theta) \end{array} \right.$$

Resto:

$$A_l = 0$$

para  $l \geq 2$

$$V(r, \theta) = \frac{k}{2} - \frac{k}{2} \frac{r}{R} \cos\theta = \frac{k}{2} \left( 1 - \frac{r}{R} \cos\theta \right)$$

//

una receta un poco  
más general →

$$\sum_l A_l R^l P_l(\cos\theta) = V_0(\theta) \cdot P_l(\cos\theta) \text{ y luego } \int_0^\pi d\theta \sin\theta$$

$$\underbrace{\sum_l A_l R^l \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta)}_{\frac{2\delta_{ll}}{2l+1}} = \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_l(\cos\theta) V_0(\theta) = \frac{A_l R^l 2}{2l+1}$$

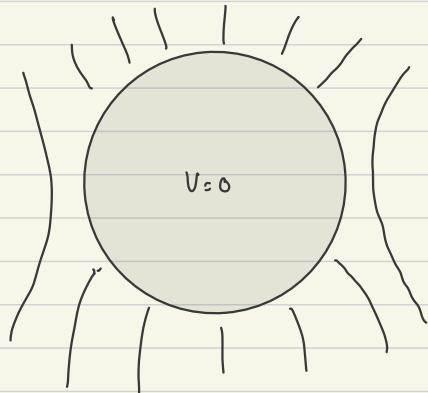
$$\Rightarrow A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^\pi d\theta \sin\theta V_0(\theta) P_l(\cos\theta)$$

→ para cualquier  
potencial!

↓  
Prod. punto = proyectar.

Utile para las  
tareas igual.

$$V_0(\theta) = k \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \text{ hacemos la integral}$$



Campo  $\vec{E}$  que llega en forma normal a la superficie.

$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$$

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l$$

→ solución solo es válida hasta la superficie ( $V$  afuera).

- campo a lo mucho lineal afuera.
- campo  $E$  a lo afuera.

$$A_l = 0 \quad \forall l \geq 2$$

$$A_0 \neq 0$$

$$A_1 \neq 0$$

$$V_1 = A_1 \underbrace{r \cos \theta}_{\hat{z}} + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta$$

en esféricas

$$= A_1 \hat{z} + \frac{B_1 \cos \theta}{r^2} \hat{z} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\text{en } \infty} \rightarrow r \rightarrow \infty, \nabla V = -\vec{E}_0.$$

$$= A_1 \hat{z} \rightarrow \text{campo de}$$

completarlo yo!

(con C.B.).

$$\nabla(c \cdot \hat{z}) = c \hat{z}$$

caso más general

$$V = V(r, \theta, \phi). \xrightarrow{\text{ansatz}} V = R(r) \Theta(\theta) \Psi(\phi).$$

Imponiendo que la parte de la ec. de Laplace es  $\partial_r^2 u$  y la llamamos  $-m^2$ .

completar esos pasos.

$$\Phi''(\phi) + m^2 \bar{\Phi}(\phi) = 0$$

Asumiendo que la solu $\theta$  es igual en 0 como en  $2\pi$ :

$$\bar{\Phi} = A^\Phi e^{im\phi} + B^\Phi e^{-im\phi} \rightarrow m = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$$

$m$  tiene que ser entero.

$$R(r) = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \Theta \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0$$

$$\text{SOLUCIONES SON: } P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l.$$

$$\hookrightarrow m = -l, \dots, l.$$

$$\hookrightarrow \text{orden } 2l.$$

→ muere después de un cierto n° de derivadas.

esféricos.  
armónicos

$$Y_l^m(\theta, \phi) \propto P_l^m e^{im\phi}$$

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}.$$

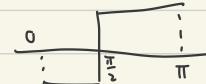
Tarea 1:

Horarios de consulta

L: 12:00 - 13:00

$$V(r, \theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$\left. \begin{aligned} V(r, \theta) &= A_l r^l P_l(\cos\theta) \\ &= \begin{cases} V_0 & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V_0 & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases} \end{aligned} \right\} A_l$$



→ Es posible expandir una Heaviside en polinomios de Legendre.

$$V(r, \theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta) = \sum_l A_l r^l P_l(1)$$

\* Va a faltar la suma en la tarea.  
 $\theta = 0$  o  $\pi$  en la tarea.

hay que empacarlo  
 en algo conocido.

$$z > 0 \rightarrow \theta = 0$$

$$\rightarrow V(r, 0).$$

~~~~~

Jackson → desarrollado

~~~~~

$$V_{\text{proton}}(r) = \frac{q_{\text{prot}}}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = V_{\text{proton}} + V_{\text{electron}}$$

$$V_{\text{electrón}} = V - V_{\text{protón}}.$$

↓  
 No puede producir divergencias.

Taylor

$$V = \frac{e^{-r/a_0}}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{r}{a_0}\right) \underset{\substack{\# \\ \text{Potencial} \\ \text{Protón}}}{\underbrace{\sim}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} + \dots$$

↓  
 divergencia en r:0.  
 (añadimos al protón)

- Laplaciano de  $V_{\text{prot}}$  es  $\infty$  en  $r=0$
- Delta de Dirac. (en la deriv. de  $V_{\text{prot}}$ )
- $\nabla^2 V_{\text{prot.}} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{0})$ .
- $\nabla^2 V_{\text{proton}} \neq 0$ !

$$\int d^3r \nabla^2 V_{\text{prot.}} = \oint d^3r \hat{\mathbf{r}} \cdot \underbrace{\nabla V}_{-\vec{E}} = \oint_{r=R} d^2r \frac{1}{\|\hat{\mathbf{r}}\|^2}$$

$$= 4\pi \dots \neq 0$$

↙  
lo hicimos!

$$= 4\pi \int d^3r \delta^3(r).$$

**Propiedades  
esféricas  
armónicas**

$$\cdot Y_{l-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi)$$

$$\cdot \int d\Omega Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

ángulo  
sólido

$$\leftarrow \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \dots$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta').$$

no hay algo ←  
así en el control.  
(ni en tareas).

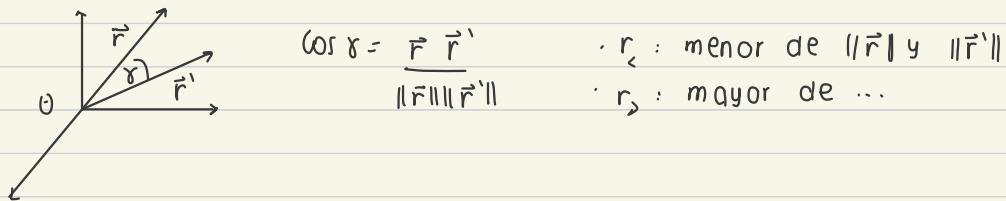
$$\left. \begin{aligned} V(R, \theta, \phi) &= f(\theta, \phi). \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{aligned} \right\} A_{lm} = ?$$

\* prod. punto se hace  
c/r a la base  
(esféricos armónicos)

$$\int d\Omega f(\theta, \phi) \cdot Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm} \underbrace{\int d\Omega Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi)}_{\delta_{ll'} \delta_{mm'}} = A_{l'm'}$$

$$\Rightarrow A_{lm} = \int d\Omega f(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi).$$

útil para alguna tarea.



$$\frac{1}{||\vec{r} - \vec{r}'||} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_c^l}{r_s^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \rightarrow \text{puede ser útil.}$$

$$\frac{1}{||\vec{r} - \vec{r}'||} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_c^l}{r_s^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi).$$

## Coordenadas Cilíndricas

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$V = R(\rho) \Phi(\phi) Z(z)$$

hiperbólicas  
senos y cos.

$$\begin{aligned} \tilde{z}'' - k^2 \tilde{z} &= 0 \\ \tilde{\Phi}'' + \nu \tilde{\Phi} &= 0 \\ R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R &= 0. \end{aligned}$$

aparecen las otras dos.

$$x \equiv kp$$

Bessel  $\rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{\gamma^2}{x^2} \right) R = 0$$

$$R(x) = \begin{cases} J_\nu(x) \\ J_{-\nu}(x) \end{cases}$$

para habitualmente

si  $\nu = m \in \mathbb{N}$   $\rightarrow J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \rightarrow$  no son li.  
(perdemos una solu<sup>o</sup> li.).

### Fun<sup>o</sup> de Neumann

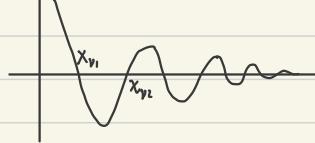
$$N_\nu(x) \equiv \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \rightarrow \text{no deja de ser li. (siempre es li de las otras).}$$

solu<sup>o</sup> general  $\leftarrow R_\nu(p) = A J_\nu(kp) + B N_\nu(kp)$ .  
(parte radial).

Fun<sup>o</sup> de Bessel  $\nu$

$$X_\nu = J_\nu(X_\nu) = 0$$

ceros de la fun<sup>o</sup> de Bessel



rela<sup>o</sup> de ortogonalidad:

$$\Rightarrow \left[ \int_0^a dp p J_\nu \left( X_{\nu n} \frac{p}{a} \right) J_\nu \left( X_{\nu n} \frac{p}{a} \right) = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(X_{\nu n}) \delta_{nn} \right]$$

$$\cdot V(p, \phi, z) = \sum$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \Rightarrow \Phi(\phi) = \begin{cases} e^{im\phi} \\ e^{-im\phi} \end{cases}, m \in \mathbb{Z}$$

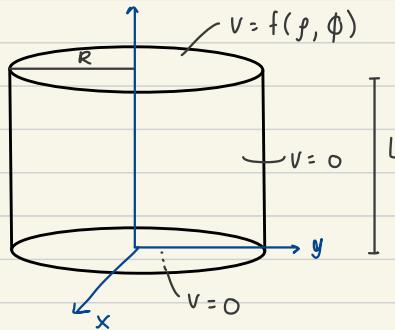
Fuerza que  $\gamma = m$

$$\bar{\Phi} = A \sin(m\phi) + B \cos(m\phi).$$

$$\bar{z}(z) = \dots$$

$$V(\rho, \phi, z) = \sum_{km} R_m(\rho) Z_k(z) \left( A_m \sin(m\phi) + B_m \cos(m\phi) \right)$$

Ejemplo



$$\bar{\Phi}(0) = \bar{\Phi}(2\pi), \rightarrow \forall \rho, z.$$

$$\Rightarrow \gamma = m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\bar{\Phi}(\phi) = A \sin(m\phi) + B \cos(m\phi)$$

$$\bar{z}(0) = 0 \Rightarrow z(z) = \sinh(kz),$$

$$z(L) = f(\rho, \phi)$$

$$R(\rho) = C J_m(k\rho) + D N_m(k\rho).$$

diverge si  $\rho \rightarrow 0$

$\lim_{\rho \rightarrow 0} N_m(k\rho) \rightarrow \infty$

SOLUCION NO PUEDE DIVERGIR DENTRO.

$$R(\rho) = J_m(k\rho).$$

$$\cdot R(R) = J_m(kR) = 0 \Rightarrow k_m = \frac{\chi_m}{R} \quad (\text{discretizada}),$$

$$V(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn} \sin(m\phi) + B_{mn} \cos(m\phi) \right) J_m(k_m n \rho) \cdot \sinh(k_m n z)$$

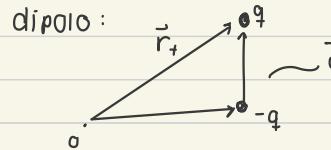
Falta

$$V(\rho, \phi, L) = f(\rho, \phi) \rightarrow \text{hay que usar lo anterior y usar vectores bases}$$

↳ sen  
↳ cos  
↳ hiperbólicos.

¡Cuidado con los saltos en la tapa!

Molécula:

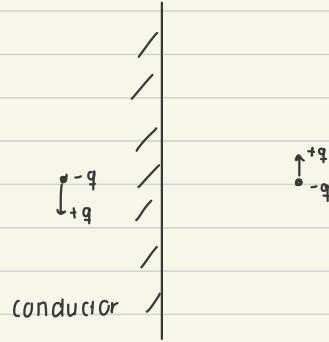


momento dipolar:

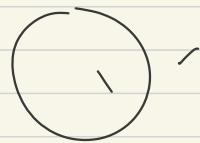
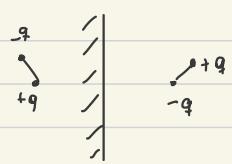
$$\vec{p} = \vec{d} q \rightarrow \vec{p} = q \vec{r}_+ + (-q) \vec{r}_- \quad (\text{promedio pesado por las cargas}).$$

$$\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \quad \|\vec{d}\| \rightarrow 0 \\ |q| \rightarrow \infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{es finito} \\ \vec{p} = \|\vec{p}\| \hat{\vec{p}} \\ (\text{objeto puntual}) \end{array}$$



• dipolo imagen con momento opuesto.  
└ estamos poniendo 2 cargas imagen.

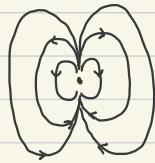


$\nabla^2 V_{\text{pot}} \rightarrow \text{gauss}$

# Dipolos

$$\vec{p} = (+q) \vec{r}_+ + (-q) \vec{r}_- = \vec{dq}$$

→ Desde lejos:



→ Líneas de campo se comportan distintas a la de una carga.

¿Qué tanto decrece el campo hacia afuera?

↳ Tiene que ser más débil, decrecer más rápido ya que cargas se están cancelando la una a la otra.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{\|\vec{r} - \vec{r}_+\|} - \frac{q}{\|\vec{r} - \vec{r}_-\|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{\|\vec{r} - \vec{r}_d - \frac{d}{2}\|} - \frac{q}{\|\vec{r} - \vec{r}_d + \frac{d}{2}\|} \right)$$

en la posicón del dipolo hacia arriba.

Este potencial tiene simetría axial (centro q p).

$$\lim_{d \rightarrow 0} V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_d)}{\|\vec{r} - \vec{r}_d\|^3} \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow \vec{E} \sim \frac{1}{r^3}$$

$q \rightarrow \infty$

$$\text{Si } r_d = 0 \Rightarrow V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sim \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Potencial y simetría →  $V(r, \theta) = \sum_l (A_l r^l + B_l \frac{1}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta)$  satisface  $\nabla^2 V = 0$

$l=0 \sim V_0 = \frac{1}{r}$  no puede tener dependencia angular

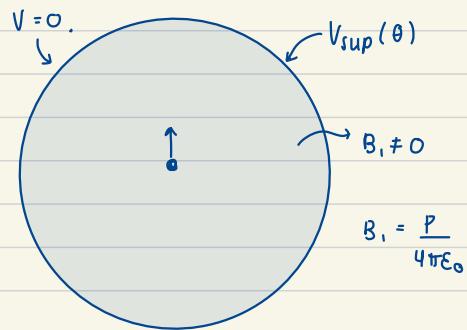
$$l=1 \sim V_1 = \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$r \cos \theta = \hat{r} \cdot \hat{e}_r$$

$\frac{\cos \theta}{r^2}$  → dipolo homogéneo.

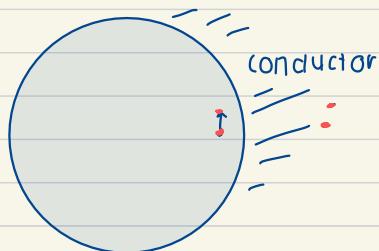
→ Potencial de un campo eléctrico homogéneo.

podría ser de control!



→ todos los  $l$  pueden ser 0, excepto  $l=1$  para conservar el potencial.

→ separación de variables.



→ con método de imágenes (si no está en el centro).

$$\begin{matrix} d \\ I \\ l \end{matrix} \begin{matrix} +q \\ -q \\ -q \\ +q \end{matrix}$$

→ decays más rápido que el dipolo. (no es tan difícil examinarlo).



→ Toroide de revolución.

Cuadrípolo

$$\rightarrow l=2 \rightarrow P_2(\cos\theta) = \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2}$$

$$\nabla \left( \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} \right)$$

no tiene simetría axial.

$$-q \quad +q$$

$$+q \quad -q$$

estéricos armónicos  
(ratifican Laplace).

$$V(\theta, \phi, r) = \sum_{lm} \left( A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

↳ encapsula la exp. compleja.

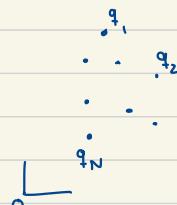
$l=0 \rightarrow$  Potencial coulombiano.

$l=1 \rightarrow$  Dipolo.

$l=2$

$Y_{2+2}$  } no hay simetría  
 $Y_{2+1}$  } axial!  
 $Y_{20}$

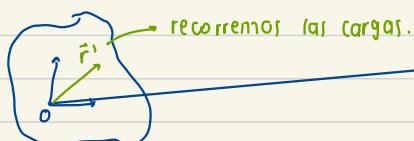
\*  $l =$  Grado del multipo



$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i$$

=  $\int d^3r' p(\vec{r}') \vec{r}' \rightarrow$  Definición de Dipolo en el límite continuo.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d^3r' p(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



→ Cuando estoy lejos solo veo  $\vec{p}$  para arriba pero no la estructura.

$$\left( \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \right)$$

$\|\vec{r}\| \gg \|\vec{r}'\|$   
 '      ''  
 $r'_<$      $r'_>$

Expansion en esféricos armónicos del potencial (en separación de variables)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_l \sum_m \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) \underbrace{q_{lm}}$$

→ No aparece  $r^l$  xq el potencial va disminuyendo cuando me alejo

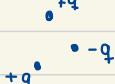
$$\hookrightarrow q_{lm} = \int d^3r' (r')^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') p(\vec{r}').$$

↳ Estructura interna.

$$\text{• } l=0, \quad q_{00} = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \rho(r') = \frac{Q}{4\pi} \quad \rightarrow \quad V_{00} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

$\nearrow$   
 $Y_{00}$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Ej:   $\rightarrow$  Si hay algo coulombiano es debido al exceso de carga  
 $\rightarrow$  En este caso sería  $+q$ .

$$l=1 \quad \begin{cases} q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \underbrace{\int d^3r' \rho(r') (x' - iy')}_{p_x - ip_y} \\ q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \underbrace{\int d^3r' \rho(r') z'}_{p_z} \end{cases}$$

Usando  $\bar{p} = \int d^3r' \rho(r') \vec{r}$

$$q_{1-1} = \dots$$

$(q_{1-1} = (-1)^{+1} q_{11}^*) \rightarrow$  negativo del complejo conjugado.

¿Cuántos  $m$  hay?

$l \approx m$  hay  $2l+1$

$l=1 \approx 3$ .

$l=2 \approx 5$

↳ Tensor de rango 2.

$$\rightarrow l=1 \rightarrow \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow l=2 \rightarrow \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = T_{ij} = T_{ji}$$

Simétrica.

No puede tener traza

$$\sum_i T_{ii} = 0$$

En gravedad, la parte que tiene dinámica no tiene traza:

⇒ 5 grados de libertad

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ \vdots & \boxed{\cdots} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$l=2 : \quad q_{22} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \left( Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22} \right)$$

$$q_{11} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \left( Q_{13} - iQ_{23} \right)$$

$$q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}$$

donde:

$$Q_{ij} = \int d^3r' f(r') \left( 3 r_i^i r_j^j - (r')^2 \delta_{ij} \right)$$

$$Q_{ij} = Q_{ji}$$

$$\text{Tr } Q = 0.$$

Componentes del tensor.

Tensor:

$$\vec{v} = v^i \hat{e}_i \quad \begin{matrix} \text{base rotada} \\ \downarrow \\ \text{dipolo no se rota} \end{matrix} \quad = v^i \hat{e}'_i \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{base en la que rota} \end{matrix}$$

$$\sim \hat{e}'_i = \hat{e}_i R^{i'}_i \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{nueva base} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{combinación lineal de las bases antiguas.} \end{matrix}$$

$v^i = R^{i'}_i v^{i'} \rightarrow$  cambian las componentes del vector. vr a la base nueva.

$$T = T^{ijk} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j \otimes \hat{e}_k$$

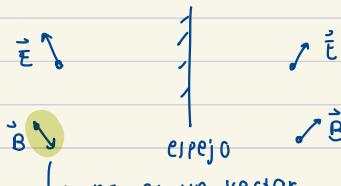
~~~

$$\vec{B} \sim \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y \\ B_z & 0 & -B_x \\ -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

↳ Rota

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & \dots \\ -E_y & -B_z & 0 & \\ -E_z & \vdots & 0 & \end{pmatrix}$$

Vector: Rota como vector:



↳ no es un vector.

Ej un tensor de rango 2 ya que en un espejo no se refleja.

Tensor de rango 2 de dim. 4 que junta el campo electromagnético.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) q_{lm} \quad (*)$$

$$q_{lm} = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') (r')^l Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

El  $\vec{P}$

|           |                         |                                                |
|-----------|-------------------------|------------------------------------------------|
| $l=0$ ... | $\sim Q$                | Tensor de rango 0 $\rightarrow 1$ ...          |
| $l=1$ ... | $\sim \vec{p}$          | " " " 1 $\rightarrow 3$ cant. que lo definen   |
| $l=2$ ... | $\sim \vec{Q} = Q_{ij}$ | Tensor de rango 2. $\rightarrow 5$ cant. " " " |
| $l=3$ ... | $\sim Q_{ijk}$          | " " " 3. $\rightarrow 7$ " " "                 |

↳ simétrico en todos los índices.  
 $Q_{ijk} = Q_{jik} = Q_{jki} = Q_{kij} = \dots \} 7$  cant.  
 Traza cero:  $\delta_{ij} Q_{ijk} = 0$ .

$$(*) \quad V(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} Q}_{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{m=+1} Y_{1m}(\theta, \phi) q_{1m}}_{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_{m=-2}^{+2} Y_{2m}(\theta, \phi) q_{2m}}$$

potencial del dipolo.

expansión en taylor

$\underline{l=1}$

$$V \propto \sum_{m=-1}^{+1} y_{1m}(\theta, \phi) q_{1m}$$

(dipolo apuntando arriba o abajo).

- Si tiene simetría axial  $\rightarrow P_z(\cos\theta) \sim \cos\theta$
- Si no tiene simetría axial  $\rightarrow$  dipolo pero no alineado en  $\vec{z}$ .

↗ rearrojamos el sistema en  $\hat{z}'$  y tendrá simetría axial.

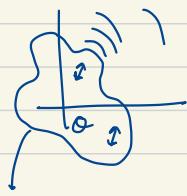
para otros  
cursos.

{ ¿Cómo transforman los esféricos armónicos bajo rotaciones?

$$Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) = \underbrace{D_{l'm'm}}_{[R]} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Representación de la rotación.

\* 0 es  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}$



$$\vec{E}_q \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{E}_p \sim \frac{1}{r^3}$$

$\rightarrow$  (dip)  $E_{rad} \sim \frac{1}{r}$  → el lo que predomina  
↳ la radio. (material caliente)

- lo más relevante es la carga total (lo primero que siento, en 1º approx., maa), monopolo → 0 si no está ionizado
- 2º approx. → dipolo
- si no tiene una dirección privilegiada → cuadripolo
- Config. de Carga Vibran.

$$\Rightarrow \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{(l+1)}{(2l+1)} \frac{1}{\epsilon_0} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+2}} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{2l+1} \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_{lm}}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ E_\phi = -\frac{1}{rsin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = -\frac{im}{(2l+1)} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_{lm}}{\sin\theta} \frac{1}{r^{l+2}} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{cases} \rightarrow \text{esféricos armónicos}$$

son complejos (suma dura ser real).

$\downarrow$  ratio de derivar

$Y_{lm}(\theta, \phi) \propto e^{ilm\phi}$ .

no depende de las coordenadas.  
↳ dipolo puede estar orientado en cualquier dirección

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{3\hat{n}(\hat{p} \cdot \hat{n}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}$$

## REPASO ELECTROMAGNETISMO : MEDIOS DIELECTRICOS



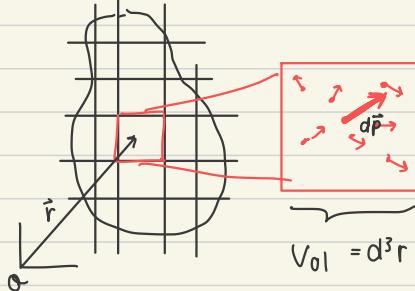
moleculas neutras (digamos que no tienen dirección)

↓ aplicamos campo

molecula descrita como dipolo

↳ cargas atrapadas en estructuras.

· Un medio es una colección de dipolos



va a haber un exceso en una dirección

↳ (dipolo promedio)

·  $d\bar{P} \propto d^3r$  → Esto para un lugar intermedio  
(si el vol. es muy grande no sirve)

$$d\bar{P} \equiv \vec{P}(\vec{r})d^3r$$

↳ depende de la ubicación del cuadrante.

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$

carga total del cuadrante.

$$\delta V_{int} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{dQ_a}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{d\bar{P}_b \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} + \dots \right]$$

Si está cargado ↗  
serán cargas libres. ↗  
cargas.

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} + P(\vec{r}') \dots$$

MATERIAL CON CARGAS LIBRES SUPERFICIALES:



$$V_{total} = V_{int} + V_{sup}$$

$$dV_{sup} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\vec{r}') dA'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial\Omega} d^3r' \left[ \frac{\rho_d(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right]$$

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial\Omega} dA' \frac{\sigma_d(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\nabla \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\nabla \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = +\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} d^3 r' \left[ \frac{\rho_e(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \nabla' \left( \frac{\vec{P}_b(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) - \underbrace{\frac{\nabla' \cdot \vec{P}_b(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial\Sigma} dA' \hat{n}' \cdot \vec{P}_b} \right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial\Sigma} dA' \frac{\sigma_b(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

En la 1º clase →

$$V(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d^3 r' \rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dA' \sigma(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Igualando:

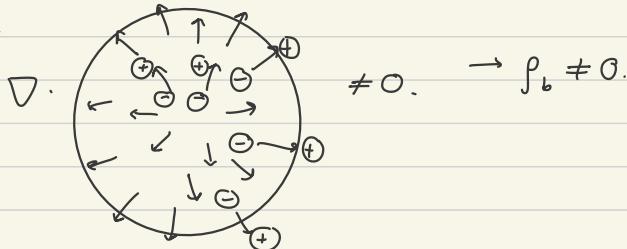
$$\Rightarrow \begin{cases} \rho(\vec{r}) = \rho_e(\vec{r}') - \nabla \cdot \vec{P}_b(\vec{r}) \\ \sigma(\vec{r}) = \sigma_e(\vec{r}) + \hat{n} \cdot \vec{P}_b(\vec{r}) \end{cases} \quad | \quad \begin{cases} \rho_b(\vec{r}) \equiv -\nabla \cdot \vec{P}_b(\vec{r}) \\ \sigma_b(\vec{r}) \equiv \hat{n} \cdot \vec{P}_b(\vec{r}) \end{cases}$$

EXPLICACIÓN gráfica

no hay carga neta

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \rho_b = 0$$

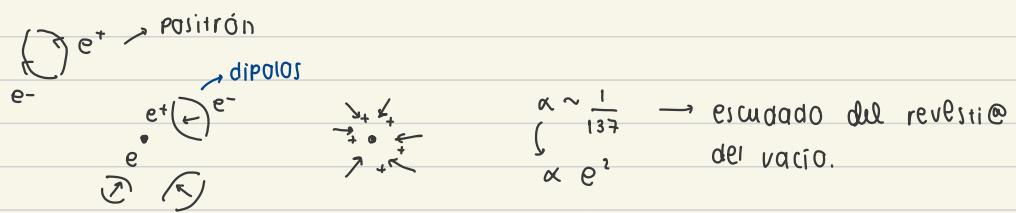
exceso de cargas neg. al interior.



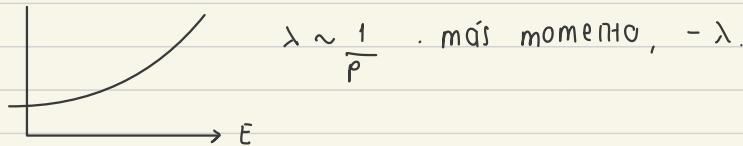
$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{pmatrix} \neq 0. \rightarrow \rho_b \neq 0.$$

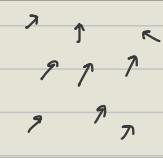
Física de  
partículas

Polarizaci@ del →  
vacío.



lel → aumenta la carga del e. (+ negativa)  
↳ verdadera carga del e es infinita.



polarizaciones  $\vec{P}$  = 

$$\vec{d\rho}' = P(\vec{r}') d^3 r'$$

densidad de carga  $\rho(\vec{r}) = \rho_l(\vec{r}) + \rho_b(\vec{r})$   $\rightarrow \rho_b(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}$

carga del electron polarizado  
• el vacío.

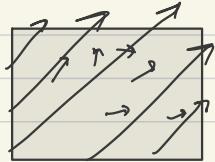
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_l - \nabla \cdot \vec{P})$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_l \rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

es como un campo para las libres

comparando

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_l$$



campo  $\vec{E}$  global

$$\vec{P} \propto \vec{E} \rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi_c \vec{E}$$

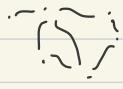
dielectricos lineales.

$$\cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_c) \vec{E} \rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad ; \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_c)$$

configuración de cargas.

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 d^3 r \rightarrow \text{ya que en el vacío, } \vec{D} = \vec{E}$$

cuánto tomó armar esta configuración?

 campo es como resortes (está almacenando energía).  
→ No depende de las posiciones de las cargas

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d^3 r$$

si existe un material dieléctrico.

\* veritasium  
↳ youtube.

Ecs. de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Magnetostática

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$\rightarrow \vec{B}$  no tiene fuentes que

emanen  $\vec{B}$ .

(no  $\exists$  monopos magnéticos).



$\rightarrow$  campo magnético debe ser un loop cerrado!

No puede comenzar ni terminar.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{Existe } \vec{A} \text{ t.q. } \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\text{Análogo} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$



Potencial vector

Una simetría más grande.

$$\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \nabla \psi$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{A}'(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) + \underbrace{\nabla \times \nabla \psi}_0$$

$\rightarrow$  Así que no hay diferencia.

Transformación de Gauge

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \vec{A})}_0 = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

\* El nuevo potencial hace que se pueda tener el mismo campo

\*  $\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \neq \nabla^2 V$ !

grad de laplaciano la div.

sin  $\nabla(\nabla \cdot \vec{A})$  cada componente ofrecería 1 ec. de Poisson.

Existe  $\Psi$  s.t.  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ?

$$0 = \nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Psi \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \Psi = -\nabla \cdot \vec{A}}$$

✓ se puede resolver cualquier eq.

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{J}}$$

Gauge de Coulomb.

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

depende del gauge.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{J}(r')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

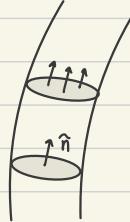
$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int d^3 r' \frac{\vec{J}(r')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

(sirve para el gauge de coulomb)  
pero si  $A$  no depende del gauge!

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \vec{J}(r') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}}$$

sobre  $r$ , no  $r'$ !

extra. \* MS  $\sim SU(3) \times SU(2) \times U(1)$   $\rightarrow$  simetría del gauge del modelo estándar.



$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \hat{n} dA = I$$

$\rightarrow$  Flujo de la densidad de corriente

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{cable}} d\vec{l}' \int_{\Sigma} d^2 r' \underbrace{\vec{J}(r')}_{J(r') \hat{n}'} \times [\dots]$$

$$\left| \int_{\Sigma} d^2 r' \vec{J}(r') = I \right. \quad \text{cte}$$

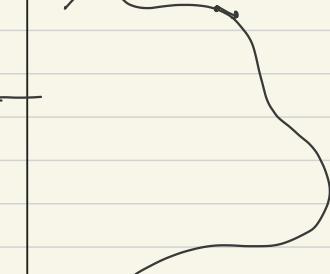
$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \int_{\text{cable}} d\vec{l}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}}, \quad (d\vec{l}' = \hat{n}' d\vec{l}')$$

Ley de Biot-Savart.

velocidad de la carga.

$$I = \lambda \frac{d\vec{l}}{dt} = \lambda v$$

$$* dq = d\lambda$$



$$d\vec{F}_{\text{mag}} = dq \vec{v} \times \vec{B} = d\lambda \vec{v} \times \vec{B}$$

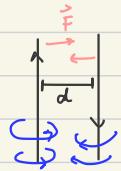
$$= \lambda v d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\boxed{dF_{\text{mag}} = I d\vec{l} \times \vec{B}}$$

Fuerza mag. sobre el cable sobre el cual circula corriente.

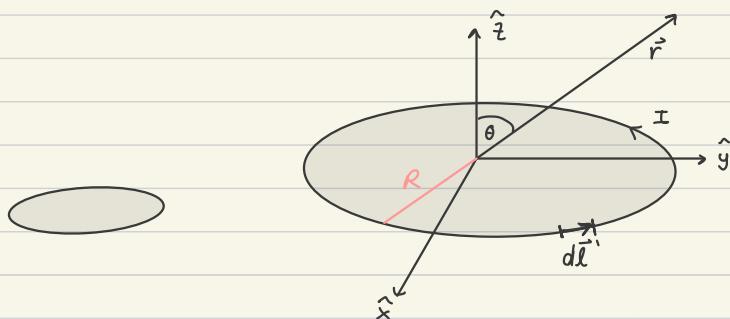
cargas en reposo  
no tienen fuerza.

$$\vec{F}_{\text{mag}} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$



$$\vec{F} \sim \frac{1}{d} I_1 I_2$$

Dos cables que se acercan es difícil acercarlos.



Circuitos  
(la forma es  
poco importante  
desde ellos).

\*  $d\vec{l}'$  = tramo que recorren las cargas que circulan por el cable.

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{l}' = d\vec{l} \hat{\phi}' \\ \vec{J}(\vec{r}') = \hat{\phi}' I \delta(\theta' - \frac{\pi}{2}) \delta(r' - R) \end{array} \right.$$

fijo en el ángulo  $\theta$ , se mueve en  $\phi$ .  
corriente es 0 en todas partes excepto donde está el circuito.  
Xg es dividido en R?  
cuando se integra debe dar I.



$$I = \int_{\Sigma} d^2 r' \vec{J}(\vec{r}') \cdot \hat{\phi}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dr' d\theta' d\phi' \frac{\sin(\theta') (r')^2 \hat{\phi}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} I \delta(\phi') \delta(\theta' - \frac{\pi}{2})$$

$$I = \int I \delta(\theta - \pi/2) \delta(r' - R) d^2 r' = \int \int I \delta(\theta - \pi/2) \delta(r' - R) \int d\theta d\phi$$

$$A_\phi(\theta, r) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int \frac{d\phi' \omega \phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin\theta \cos\phi'}} \quad \left[ \right]$$

→ donde muy lejos  
seremos capaces de  
aproximar.

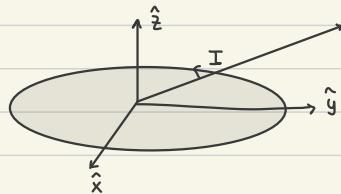
$$Ar = 0$$

$$A_\theta = 0.$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = A_r \hat{r} + A_\phi \hat{\phi} + A_\theta \hat{\theta}$$

en el Gauge de Coulomb

Propio del Gauge de Coulomb.



$$A_\phi(\theta, r) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int \frac{d\phi' \sin\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\phi'}}$$

pequeño.

Expansión ( $r \gg R$ ,  $r \ll R$ ,  $\theta \ll \pi/2$ )

↳ q lo largo del eje.

$$A_\phi(\theta, r) = \frac{\mu_0 I R^2 \sin\theta}{4\pi (R^2 + r^2)^{3/2}} \left[ 1 + \frac{15}{8} \frac{R^2 r^2 \sin^2\theta}{(R^2 + r^2)^2} + \dots \right]$$

$r \gg R$

$$\rightarrow A_\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^2}$$

dónde

$$m = I(\pi R^2)$$

corriente

$$\vec{m} = \hat{z}$$

Momento magnético.

Potencial vectorial del anillo. Sólo tiene componente en  $\phi$  pero esto depende del gauge (no tiene sentido físico).

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

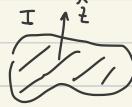
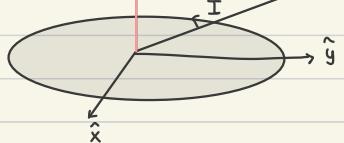
$$(\vec{B} = B_\phi \hat{\phi} + B_r \hat{r} + B_\theta \hat{\theta})$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} B_\phi = 0 \\ B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} \right]$$

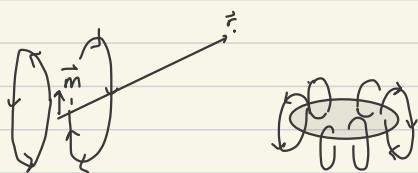
↳ es igual al campo eléctrico de un dipolo.

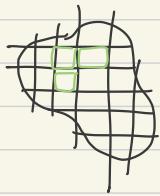
$$\vec{m} = \hat{z}(I\pi R^2)$$



→ mismo resultado con otro eje y cambia el área. representativo de cualquier distribución de corriente

como un dipolo con prop. magnéticas





¿Xq ese circuito muy rejas puede verse como un anillo?

→ se puede dividir en muchos circuitos con corriente I  
Argumento es superposición.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3 r'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} + \dots$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') d^3 r' + \dots$$

debe ser 0

$$\vec{J} = \sum_i J_i \hat{e}_i, \quad \hat{e}_i = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$$

$$\int_{\Omega} d^3 r' J_i(\vec{r}') \quad , \quad \text{sabemos que} \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \rightarrow \text{densidad de corriente}$$

no se puede anular

$$0 = \int_{\Omega} d^3 r' r_i (\nabla \cdot \vec{J}) = \int d^3 r' \left[ \nabla \cdot (r_i \vec{J}) - \vec{J} \cdot \nabla(r_i) \right]$$

$$= \underbrace{\int d^3 r' \nabla \cdot (r_i \vec{J})}_{\int_{\partial\Omega} d^2 r' r_i \vec{J} \cdot \hat{n}} - \underbrace{\int d^3 r' \vec{J} \cdot \nabla(r_i)}_{\hat{e}_i \vec{J}_j} \Bigg\} = - \int d^3 r' J_i$$

$$\rightarrow \boxed{\int d^3 r' \vec{J} = 0}$$

$$\Rightarrow A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot \int d^3 r' \vec{r}' J_i(\vec{r}') = \sum_j \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{r_j}{\|\vec{r}\|^3} \underbrace{\int d^3 r' r'_j J_i(\vec{r}')}_{?}$$

$$\vec{r}' = \sum_j \hat{e}_j r_j$$

$$\int \dots = ?$$

Al igual que antes →  
teo de la div.  
Como en la superficie  
no hay corriente,  $\vec{J} \cdot \hat{n} = 0$

$$0 = \int d^3r' r'_i r'_j \nabla \cdot \vec{J} \Rightarrow \int d^3r \left( J_i(\vec{r}') r'_j + J_j(\vec{r}') r'_i \right) = 0$$

$$\rightarrow \int d^3r' r'_i J'_i = - \int d^3r' r'_i J'_j$$

$$A_i(\vec{r}) = - \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{r_j}{\|\vec{r}\|^3} \int d^3r' r'_i J_j(\vec{r}')$$

; prod. punto

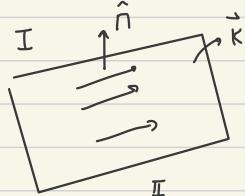
\* Identificamos cuánto  
debe ser  $\vec{m}$  para que  
tenga esta forma

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{donde } \vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')$$

✓ generalizació del momento magnético.  
válido para el origen. (sin importar la corriente).

### condiciones de Borde

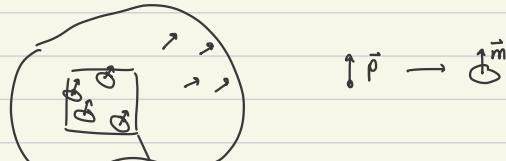
$$\vec{B}_I^\perp = \vec{B}_{II}^\perp = 0$$



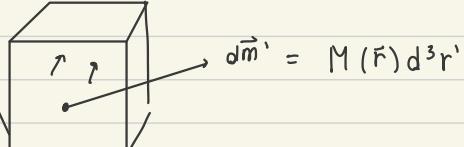
$$\vec{B}_I'' - \vec{B}_{II}'' = \mu_0 \vec{k} \times \hat{n}$$

$$\vec{A} : ? \quad \vec{A}_I = \vec{A}_{II}$$

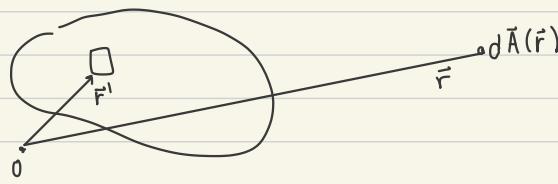
$$\hat{n} \cdot \nabla (\vec{A}_I - \vec{A}_{II}) = -\mu_0 \vec{k}$$



$$\uparrow \vec{p} \rightarrow \uparrow \vec{m}$$



$$d\vec{m}' = M(\vec{r}) d^3r'$$



\* corrientes ligadas (b) y libres.

$$d\vec{A}_\Omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}_L(\vec{r}') d^3 r'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\vec{J}_L(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\vec{M}_b(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] d^3 r'$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3 r' \frac{\vec{J}_L(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3 r' \vec{M}_b(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}}_{\nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\Omega} d^2 r' \frac{\vec{K}_b(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

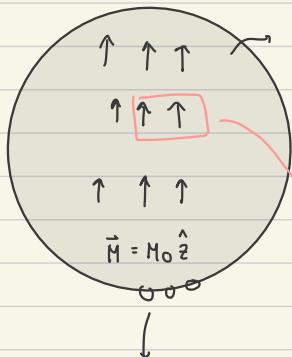
$$\int d^3 r' \left[ \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times \vec{M}_b - \nabla' \times \left( \frac{\vec{M}_b}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \right]$$

escribiendo las →  
fuentes.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3 r' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \left( \vec{J}_L(\vec{r}') + \underbrace{\nabla' \times \vec{M}_b}_{\vec{J}(\vec{r}')} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\Omega} d^2 r' \left( \frac{\vec{K}_b + \underbrace{\vec{M}' \times \hat{n}'}_{\vec{K}(\vec{r}')}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_l(\vec{r}) + \underbrace{\vec{J}_b(\vec{r})}_{\nabla \times \vec{M}(\vec{r})}, \quad \vec{K}(\vec{r}) = \vec{K}_l(\vec{r}) + \underbrace{\vec{K}_b(\vec{r})}_{\vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}}$$

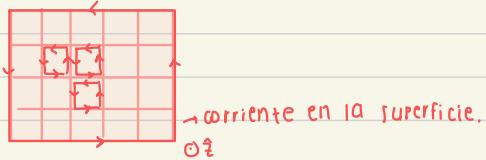
Ejemplo:



$$\vec{J} = 0 \\ \nabla \times \vec{M} = 0 \rightarrow \text{No hay corrientes ligadas (netas)}$$

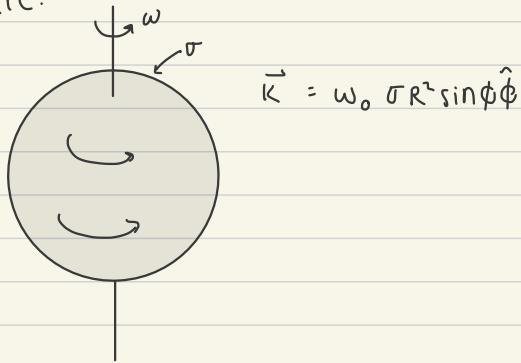
(si hay corrientes microscópicas det. por  $M$ ).

Aprendemos la  
Electrodinámica  
↔ ↔ ↔



$$\vec{K}_b : M_0 \hat{z} \times \hat{r} = M_0 \sin \theta \hat{\phi} \rightarrow \text{como una corriente superficial inducida.}$$

Equivale a:



$$\vec{K} = \omega_0 \sigma R^2 \sin \phi \hat{\phi}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2}{3} \mu_0 \cdot \vec{M} \quad r < R$$

Volumen de la  
esfera.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} \right] \quad \text{con } \vec{m} = \underbrace{\frac{4\pi R^3}{3} \vec{M}}$$

para el campo magnético, ec. inhomogénea:

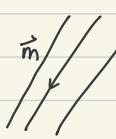
$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \vec{J}_l + \mu_0 \nabla \times \vec{M}$$

$$\nabla \times \left( \underbrace{\frac{\vec{B}}{\mu_0}}_{\vec{H}} - \vec{M} \right) = \vec{J}_l \rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_l}$$

condiciones de Bordo

$$\vec{H}_I'' - \vec{H}_{II}'' = \vec{k}_L \times \hat{n}$$

$$\vec{H}_I^\perp - \vec{H}_{II}^\perp = -(\vec{M}_I^\perp - \vec{M}_{II}^\perp)$$



$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

↓  
suscept. magnética

,  $\chi_m > 0 \rightarrow$  paramagnéticos

$\chi_m < 0 \rightarrow$  diamagnéticos

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

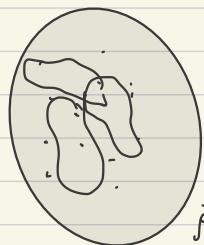
$$\vec{B} = \mu \vec{M} \text{ con } \mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$



Campo eléctrico guarda la energía como reservas apresadoras.

$$W_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Sigma} d^3r \vec{E}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\partial\Sigma} d^2r \hat{n} \cdot \vec{E} V$$

para juntar  $E$  en el campo eléctrico.



Circuitos cerrados

$$W_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Sigma} d^3r \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} - \frac{1}{2\mu_0} \int_{\partial\Sigma} d^2r \hat{n} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$



$\mu_0$  para poner cargas en movimiento.

Hay flujo que puede salir de la esfera y volver a entrar.

Recordar  $(\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2})$

$$(1) \nabla \cdot \vec{E} = \frac{j}{\epsilon_0}$$

$$(2) \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla \cdot \vec{J} + j = 0)$$

$$(4) \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\xrightarrow{\quad} (\vec{J}_d + \vec{J}_b + \nabla \cdot \vec{J}_b) + \nabla \cdot \vec{J}_b = 0 \\ = 0 \text{ (continuidad).}$$

$$\rho = \rho_L + \rho_b = \rho_L - \nabla \cdot \vec{P} \rightarrow \text{polarizaci}\ddot{o}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_b = \vec{J}_L + \nabla \times \vec{M}$$

$$\dot{\rho}_b = - \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$\dot{\rho}_b + \nabla \cdot \vec{J}_b = 0 \longrightarrow$

|                                           |                         |
|-------------------------------------------|-------------------------|
| $\vec{J}_b^{(m)} = \nabla \times \vec{M}$ | → ecuaciones estáticas. |
| $\rho_b = - \nabla \cdot \vec{P}$         |                         |

$$\vec{J}_b^{(p)} \circ \vec{J}_b^{(m)}$$

corriente  
de polarizaci\ddot{o}

$$\dot{\rho}_b + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{J}_b^{(p)} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Nuevas ecr. de  
Maxwell  
(hay cambios temp.  
en el sistema).

$$\rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (1)^*$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)^*$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (3)^*$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_L \quad (4)^*$$

## Leyes de conservación

$$1) \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

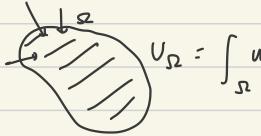
2) ...

3) ...

4) ...

$$U = \int_{\infty} d^3r u, \quad u = \text{densidad de energía.}$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$



$$U_{\Omega} = \int_{\Omega} u$$

\* Si aumenta  $U_{\text{total}}$  debe haber traspaso de energía por la frontera.

↳  $\dot{u} + \nabla \cdot \vec{s} = 0$  → debe haber igualdad de continuidad para la energía (se conserva).

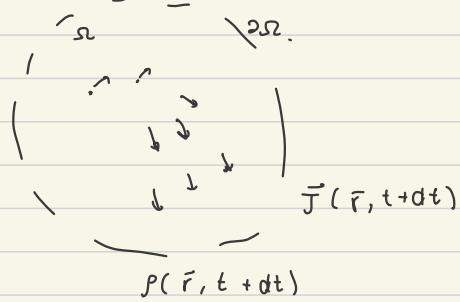
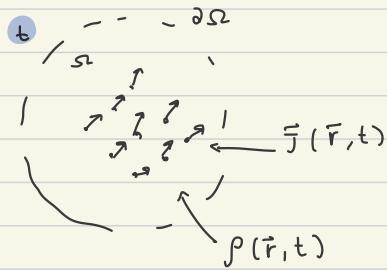
Densidad de energía:

$$u = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$$

Debe satisfacer  $u + \nabla \vec{J} = 0$

$t + dt$

¿Cuánto trabajo tuvimos que invertir para efectuar este cambio?



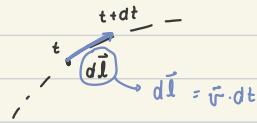
• Hay un traslado de energía entre campos y partículas.

i-ésima partícula de carga  $q_i$

$$\begin{aligned} dw^{(i)} &= \vec{F}^{(i)} \cdot d\vec{l} \\ &= q_i (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot (\vec{v}_i dt) \end{aligned}$$

incluye el campo generado por las otras partículas.

$$= q_i \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i dt$$



$$\begin{aligned} q_i \rightarrow dq &= d^3r \rho(\vec{r}) \\ \vec{r}_i \rightarrow \vec{r} & \end{aligned}$$

$$dw_i \rightarrow dw = d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E} \cdot \vec{v} dt = d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\Rightarrow dw_{\Omega} = \left( \int_{\Omega} d^3r \cdot \vec{E} \cdot \vec{J} \right) dt \quad \Rightarrow \frac{dw_{\Omega}}{dt} = \int_{\Omega} d^3r \vec{E} \cdot \vec{J}$$

de todos los cubitos que generan el espacio

$$\begin{aligned}
 \vec{E} \cdot \vec{J} &= \frac{\vec{E}}{\mu_0} \cdot \left( \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})}{\mu_0} - \underbrace{\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{1}{2} \frac{d(\vec{E}^2)}{dt}} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 + \epsilon_0 \vec{E}^2 \right) \right] - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \\
 \text{de la ec. de Maxwell:} \\
 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} &= 0 \quad \leftarrow \\
 \text{verificar} \rightarrow & \quad = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 + \epsilon_0 \vec{E}^2 \right) \right] - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \\
 \boxed{\vec{E} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_{\Omega}}{dt} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\Omega} d^3r u}_{U_{\Omega}} - \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\int_{\Omega} d^3r \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}_{\oint_{\partial\Omega} d^2r \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}$$

$\cdot \vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$

$$\frac{dW_{\Omega}}{dt} + \frac{dU}{dt} = - \oint_{\partial\Omega} \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt} (W + U)_{\Omega} = - \oint_{\partial\Omega} \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

energía en los campos  
energía en las partículas

→ flujo (energía liberándose)  
↳ radiación

$$(u + \nabla \cdot \vec{S} = 0)$$

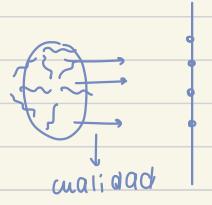
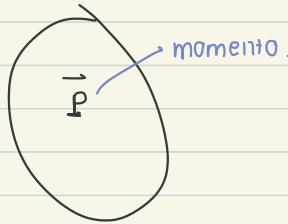
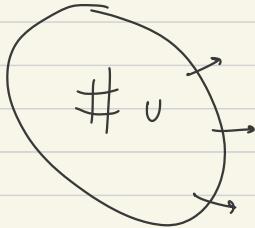


→ si  $W+U$  es positivo  
y el flujo debe ir  
haciendo adentro del  
volumen.

omitimos las partículas  
(los pensamos como  
resortes los campos)

si no hay partículas,  $w = 0$

$\frac{\partial \#}{\partial t} = \{ \#, H \}$  → Energía: " " " " temporaria.  
 $\frac{\partial \#}{\partial t}$  → Momento: cómo cambia el sistema espacialmente.



le traslada el momento y la fuerza a las partículas

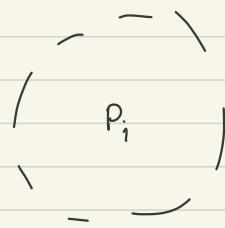
$$\vec{F} = \int d^3r \rho(\vec{r}) (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \int d^3r \underbrace{\left( \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \right)}_{\vec{f}}$$

densidad  
fuerza

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} =$$

$$\vec{f} = -\nabla u - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \epsilon_0 \left[ (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \cdot \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[ (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \cdot \vec{B} \right]$$

\*  $\dot{P}_i$  = momento que guarda el campo.



$$\dot{P}_i + \partial^j S_{ij} = 0 \quad \begin{cases} \dot{P} + \partial^i J_i = 0 \\ \dot{u} + \partial^i S_i = 0 \end{cases}$$

tensor de rango 2

Def Tensor de Stress

$$T_{ij} = \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{B}^2)$$

$$\Leftrightarrow f_j = \partial_i T_{ij} - \epsilon_0 \mu_0 \dot{S}_j$$

Fuerza de los campos ejercen sobre las partículas.

$$F_j = \int_{\Omega} d^3r \partial_i T_{ij} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3r S_j$$

$$= \oint_{\partial\Omega} d^2r n_i T_{ij} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3r S_j$$

$$F_j^{c/p} = \frac{d}{dt} P_j^{\text{part}} = \dots$$

momento que guardan los campos.

→ parecido a

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left( P_j^{\text{part}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_{\Omega} d^3r S_j \right) = - \oint_{\partial\Omega} d^2r n_i (-T_{ij}) \quad \frac{d}{dt} (W + U) = - \oint ..$$

$\underbrace{P_j^{\text{tot}}}_{\text{Punto}}$

↓ flujo de (momento);

a lo largo de la dirección i :  $-T_{ij}$

· El campo puede apuntar → y el momento hacia ↑ por lo que al chocar el campo con la part. , este sale hacia arriba.

·  $g_i$  = densidad de momento de los campos =  $\epsilon_0 \mu_0 S_i$

$$\rightarrow \dot{g}_i + \partial_i (-T_{ij}) = 0 \quad \rightarrow \text{Ecua} \theta \text{ de continuidad para momento.}$$

Momento angular:  $L_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & L_3 - L_2 \\ -L_3 & 0 & L_1 \\ L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix}$  →  $L_{ij} = \int d^3r \ l_{ij}$

$L$  tensor de rango 2  
Antisimétrico.

$$\dot{g}_{ij} + \partial_k T_{ijk} = 0$$

análogo al anterior  
ley de conservación.

# Leyes de conservación

5 Oct.

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E}$$

densidad de  
energía

$$W_B = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B}$$

densidad de ←  
energía

$$U = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \rightarrow \frac{1}{2} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

$$\frac{1}{2} (\epsilon \vec{E} + \mu \vec{H}^2) \rightarrow \text{resulta útil.}$$

flujo de energía ←

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \rightarrow \vec{E} \times \vec{H}$$

densidad de  
momento de los  
campos.

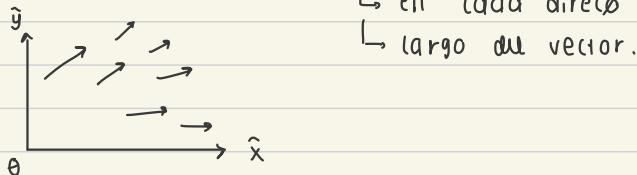
$$\vec{g} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} \rightarrow \mu_0 \epsilon \vec{E} \times \vec{H}$$

## Tensor de stress

$$T_{ij} = \varepsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2)$$

## campo vectorial

$\tilde{v}(\vec{x}) \rightarrow$  3 grados de libertad en cada lugar



$$v_i(\vec{r}) = \underbrace{a_i v_i^s(\vec{r})}_{\text{escalar}} + \underbrace{v_i^v(\vec{r})}_{\text{parte vectorial}}$$

un gradiente  
 de un potencial

$$\vec{v} = \nabla v^s + \vec{v}^v$$