b) Para que $\vec{E}_3$ fuera paralelo a $\vec{E}_1$, θ_3 debe ser igual a θ_1.

Si nos piden una densidad de carga libre entre el medio 2 y 3, debemos reformular la ec. para las componentes normales entre el medio 2 y 3, es decir:

2| $D_{3n} - D_{2n} = \sigma_\ell$

$$\varepsilon_3 E_3 \cos\theta_3 - \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2 = \sigma_\ell$$

Las demás ecs. se mantienen:

1| $\varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2 - \varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \sigma$

$$\varepsilon_3 E_3 \cos\theta_3 - \varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \sigma_\ell \quad (2)$$

$$\varepsilon_3 E_3 \cos\theta_3 = \sigma_\ell + \varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1$$

Juntando (2) y (1):

$$\frac{\sigma_\ell + \varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1}{E_1 \sin\theta_1} = \frac{\varepsilon_3 E_3 \cos\theta_3}{E_3 \sin\theta_3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_\ell}{E_1 \sin\theta_1} + \varepsilon_1 \cot\theta_1 = \varepsilon_3 \cot\theta_3$$

$$\Rightarrow \sigma_\ell = (-\varepsilon_1 \cot\theta_1 + \varepsilon_3 \cot\theta_3) E_1 \sin\theta_1$$

Para que sean paralelos $\theta_1 \stackrel{!}{=} \theta_3$

$$\Rightarrow \sigma_\ell = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \cot\theta_1 E_1 \sin\theta_1$$

$$\sigma_\ell = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \cos\theta_1 E_1$$

Auxiliar 17

Antonia Cisternas
21.084.284-5

Corriente eléctrica

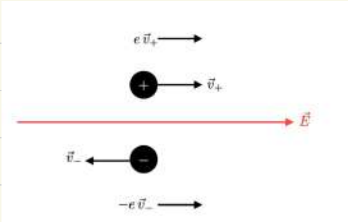
Intensidad de corriente I

· Cantidad de carga eléctrica que atraviesa la sección transversal de un conductor por unidad de t.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Densidad de corriente $\vec{J}$

· cantidad de corriente por unidad de área transversal de un conductor.
Tiene el mismo sentido de $\vec{E}$.

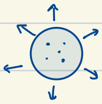


$$\vec{J} = \underbrace{n}_{\text{n° de portadores de carga por unidad de volumen}} \cdot \underbrace{q}_{\text{carga}} \cdot \underbrace{\vec{v}}_{\text{velocidad.}}$$

si "sumamos" estas corrientes que pasan por una superficie infinitesimal en toda la superficie transversal, tenemos la corriente.

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

· si tomamos un volumen cerrado:



$$\underbrace{\oint_s d\vec{s} \cdot \vec{J} = I}_{\text{cuanta carga sale por unidad de tiempo}} = \underbrace{-\frac{dQ_{enc}}{dt}}_{\text{disminuye la carga encerrada}}$$

$\Rightarrow \int dv\, \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{d}{dt} \int dv\, \rho$; aplicando teo. de la divergencia.

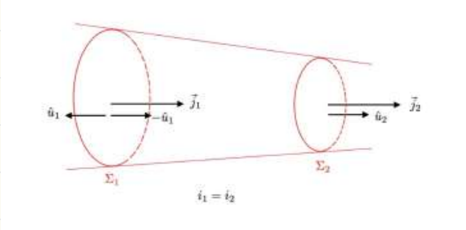
$\Rightarrow \int dv\, \underline{\underline{\nabla \cdot \vec{J}}} = -\int dv\, \underline{\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t}}}$

Ecuación de continuidad : Ecuación de conservación de la carga.

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

En el estado estacionario, la carga contenida en ese volumen no varía, i.e.:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$ ⟶ *Esto nos dice que toda la corriente que entre por esa superficie, tiene que salir.*



→ En condiciones estacionarias, la intensidad es la misma en cualquier sección del conductor.

Ley de Ohm

$\vec{J} = \underbrace{g}_{\text{conductividad}} \cdot \vec{E}$; Resistividad: $\eta = \frac{1}{g}$.

conductividad: Qué tan a menudo choca una part. con otra.

Efecto Joule

$\boxed{V = I \cdot R}$

(ΔV) resistencia del material $\rightarrow$ $R = \int_A^B \frac{1}{g} \frac{dh}{\Sigma}$

longitud

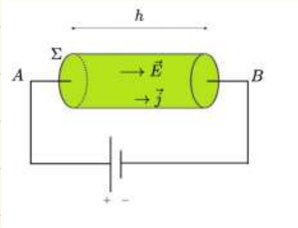
área transversal

unidad: Ohm

$[\Omega] = \left[\frac{V}{A}\right]$

voltios

amperes.



Condiciones de borde

- componente tangencial: $E_{1t} = E_{2t}$
- componente normal: $J_{2n} = J_{1n}$ $\longrightarrow$ si la densidad de carga libre es estacionaria $\left(\frac{\partial \sigma_\ell}{\partial t} = 0\right)$

$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_\ell$

$\varepsilon_1/g_1 \, J_{1n} - \varepsilon_2/g_2 \, J_{2n} = \sigma_\ell$ $\longrightarrow$ si hay una carga estacionaria en la interfaz, tiene ese valor.

Potencia

- velocidad en que la energía eléctrica se consume:

$P = RI^2$ $\rightarrow$ potencia que se tiene que gastar para hacer circular una corriente en un tramo conductor.

$\rightarrow$ Para varios ejercicios (pasos comunes)

- Notar si $\nabla \cdot \vec{J} = 0$
- calcular $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$
- obtener $\vec{J} = g \cdot \vec{E}$
- calcular $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$
- Reconocer $V = IR$

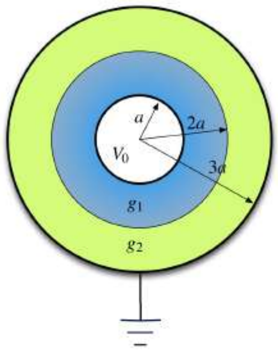
P1

Problema 8.3

Considere dos esferas conductoras concéntricas de radios a y $3a$. La región entre $a < r < 2a$ es llenada con un material de conductividad g_1 y la región entre $2a < r < 3a$ tiene material de conductividad g_2. Asuma que ambos materiales tienen una permitividad igual a ε_0. La esfera interior se encuentra a un potencial $V = V_0$ y la exterior $V = 0$. Determine

a) La resistencia del sistema.

b) La densidad superficial de carga en $r = 2a$.



a) Por simetría, $\vec{E} = E(r)\hat{r} \Rightarrow \vec{J} = J(r)\hat{r}$

luego, asumiendo estado estacionario (no varía la carga contenida ya que la carga que entra, sale).

$\nabla \cdot \vec{J} = 0$

en coord. esféricas:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 J_r) = 0 \Rightarrow \left[\vec{J} = \frac{C}{r^2}\hat{r}\right] \quad ; \ C = \text{cte.}$$

* Queremos obtener C.

Por cond. de borde en $r = 2a$, $J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \dfrac{C_1}{(2a)^2} = \dfrac{C_2}{(2a)^2} \Rightarrow C_1 = C_2$

Además, como $\vec{J} = g\vec{E}$ $\rightarrow$ $\vec{E}_1 = \dfrac{C}{r^2 g_1}\hat{r}$, $\vec{E}_2 = \dfrac{C}{r^2 g_2}\hat{r}$ } para cada medio.

se sabe que la d.d.p será:

$$\Delta V = \underbrace{V_0}_{V(a)} - \underbrace{0}_{V(3a)} = -\int_{3a}^{a} \vec{E}(r)\, d\vec{r} = \int_{a}^{3a} E(r)\,dr$$

$$V_0 = \int_a^{2a} E_1(r)\,dr + \int_{2a}^{3a} E_2(r)\,dr$$

$$V_0 = \frac{C}{g_1}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^{2a} + \frac{C}{g_2}\left[-\frac{1}{r}\right]_{2a}^{3a}$$

$$= \frac{C}{g_1}\left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\right) + \frac{C}{g_2}\left(-\frac{1}{3a} + \frac{1}{2a}\right)$$

$$= \frac{C}{g_1}\left(\frac{1}{2a}\right)\cdot\frac{3g_2}{3g_2} + \frac{C}{g_2}\left(\frac{1}{6a}\right)\cdot\frac{g_1}{g_1}$$

$$V_0 = \frac{(3g_2 + g_1)C}{6a g_1 g_2} \Longrightarrow \boxed{C = \frac{V_0\, 6a g_1 g_2}{(3g_1 + g_2)}}$$

Así, $\vec{J} = \frac{V_0\, 6a\, g_1 g_2}{(3g_1 + g_2)} \cdot \frac{1}{r^2}\,\hat{r}$

luego, podemos calcular la corriente dada por: $I = \int \vec{J}\cdot d\vec{s}$

como $\vec{J}$ es el mismo en ambos medios, la corriente es una sola.

* Notar que J depende del radio y para calcular I, tenemos que integrar en una superficie con el mismo radio que con el que se define $\vec{J}$ en ese punto.

luego, $I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{V_0\, 6a\, g_1 g_2}{(3g_1+g_2)} \cdot \frac{1}{\cancel{r^2}}\cancel{\hat{r}} \cdot \cancel{r^2}\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \cancel{\hat{r}}$

$$= \frac{V_0\, 6a\, g_1 g_2}{(3g_1+g_2)} \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\phi}_{4\pi}$$

$$I = \frac{V_0\, 6a\, g_1 g_2}{(3g_1+g_2)} \cdot 4\pi$$

por último, $R = \frac{V}{I} = \cancel{V_0} \cdot \frac{(3g_1+g_2)}{\cancel{V_0}\, 6a\, g_1 g_2 \cdot 4\pi}$

$$\boxed{R = \frac{(3g_1+g_2)}{24\pi a\, g_1 g_2}}$$

b) si hay una densida de carga en la interfaz:

$\varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_0 E_{1n} = \sigma_\ell$

En $r = 2a$:

$\Longrightarrow \varepsilon_0 \frac{C}{(2a)^2 g_2} - \varepsilon_0 \frac{C}{(2a)^2 g_1} = \sigma_\ell$

$\Longrightarrow \frac{\varepsilon_0}{\cancel{4a^2}_{2}} \cdot \underbrace{V_0 \frac{\cancel{6}^{3}\cancel{a}\, g_1 g_2}{(3g_1+g_2)}}_{C} \left(\frac{1}{g_2} - \frac{1}{g_1}\right) = \sigma_\ell$

$\Longrightarrow \frac{3V_0\varepsilon_0}{2a} \frac{\cancel{g_1}\cancel{g_2}}{(3g_1+g_2)} \left(\frac{g_1-g_2}{\cancel{g_2}\cancel{g_1}}\right) = \sigma_\ell$

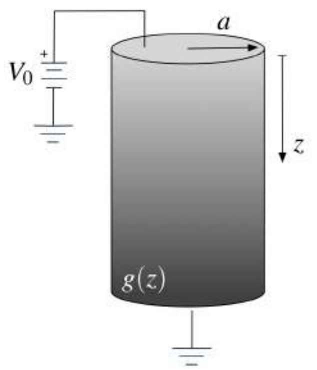
$\Longrightarrow \boxed{\frac{3V_0\varepsilon_0}{2a} \frac{(g_1-g_2)}{(3g_1+g_2)} = \sigma_\ell}$

Problema 8.8

Entre dos placas conductoras de radio a existe una barra conductora cilíndrica de radio a y longitud L, permitividad ε_0 y conductividad $g = g_0\left(1+\frac{z}{L}\right)$. Se aplica un potencial V_0 entre las placas.

a) Calcular la densidad de corriente $\vec{J}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del cilindro.

b) Calcular la potencia disipada en un disco de espesor e cuyo centro está situado justo en la mitad del conductor.



a) Si la d.d.p. genera una corriente en $\hat{z} \Rightarrow$ $\vec{E}(r) = E(z)\hat{z}$

$\vec{J}(r) = J(z)\hat{z}$

Asumiendo estado estacionario,

$$\nabla\cdot\vec{J} = 0 \implies \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 \implies J_z = cte$$

Así, como $\vec{J} = g(z)\vec{E} \implies \vec{E}(z) = \frac{J_z\hat{z}}{g(z)} = \frac{J_z}{g_0\left(1+\frac{z}{L}\right)}\hat{z}$

* Queremos encontrar J_z.

Dada la d.d.p:

$$\Delta V = \underbrace{V_0}_{V(0)} - \underbrace{0}_{V(L)} = -\int_L^0 E(z)\,dz = -\int_L^0 \frac{J_z}{g_0\left(1+\frac{z}{L}\right)}dz$$

$$= \frac{J_z}{g_0}\int_0^L \frac{1}{1+\frac{z}{L}}dz$$

$$= \frac{J_z}{g_0} L \ln\left(1+\frac{z}{L}\right)\Big|_0^L$$

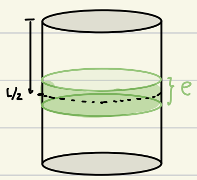
$$\implies V_0 = \frac{J_z L}{g_0}\left(\ln(1+1) - \cancelto{0}{\ln(1)}\right)$$

$$V_0 = \frac{J_z L}{g_0}\ln(2)$$

$$\implies J_z = \frac{V_0 g_0}{L\ln(2)} \rightsquigarrow \boxed{\vec{J} = \frac{V_0 g_0}{L\ln(2)}\hat{z}}$$

Así, $\boxed{\vec{E} = \frac{V_0 \cancel{g_0}}{L\ln(2)}\frac{1}{\cancel{g_0}\left(1+\frac{z}{L}\right)}\hat{z}}$

b)



La potencia que se gasta para hacer circular la corriente en un trozo será:

$$P = RI^2$$

Dado $I = \int \vec{J}\cdot d\vec{S}$

└→ sección transversal a la corriente.

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{V_0 g_0}{L\ln(2)}\cdot\hat{z}\cdot r\,dr\,d\theta\,\hat{z} = \frac{V_0 g_0}{L\ln(2)}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a 2\pi = \frac{V_0 g_0}{L\ln(2)}\frac{a^2}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi$$

$$\boxed{I = \frac{V_0\, g_0\, a^2 \pi}{L \ln(2)}}$$

Así, la resistencia del sistema $R = \frac{V}{I}$

Pero V es la d.d.p. en el disco de altura e :

$$\Delta V = \int_{L/2 - e/2}^{L/2 + e/2} E(z)\, dz$$

$$= \int_{L/2 - e/2}^{L/2 + e/2} \frac{V_0}{L \ln(2) \left(1 + \frac{z}{L}\right)}\, dz$$

$$= \frac{V_0}{\cancel{L} \ln(2)} \left[\cancel{L} \ln\left(1 + \frac{z}{L}\right) \right]_{(L-e)/2}^{(L+e)/2}$$

$$= \frac{V_0}{\ln(2)} \left[\ln\left(1 + \frac{L+e}{2L}\right) - \ln\left(1 + \frac{L-e}{2L}\right) \right]$$

$$= \frac{V_0}{\ln(2)} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{e}{2L}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{e}{2L}\right) \right]$$

$$= \frac{V_0}{\ln(2)} \ln\left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{e}{2L} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{e}{2L} \cdot \frac{2}{3}} \right)$$

$$\Delta V = \frac{V_0}{\ln(2)} \ln\left(\frac{1 + \frac{e}{3L}}{1 - \frac{e}{3L}} \right)$$

$$\Rightarrow R = \underbrace{\frac{\cancel{V_0}}{\cancel{\ln(2)}} \ln\left(\frac{1 + \frac{e}{3L}}{1 - \frac{e}{3L}} \right)}_{V} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\cancel{V_0}\, g_0\, a^2 \pi}{L \cancel{\ln(2)}}}}_{1/I} = \ln\left(\frac{1 + \frac{e}{3L}}{1 - \frac{e}{3L}} \right) \cdot \frac{L}{g_0 a^2 \pi}$$

Por último, dado $P = R I^2$

$$\Rightarrow \quad P = \ln\left(\frac{1 + \frac{e}{3L}}{1 - \frac{e}{3L}} \right) \cdot \frac{L}{g_0 a^2 \pi} \left(\frac{V_0\, g_0 a^2 \pi}{L \ln(2)} \right)^2$$

$$\boxed{P = \ln\left(\frac{1 + \frac{e}{3L}}{1 - \frac{e}{3L}} \right) \frac{\pi a^2 g_0}{L} \frac{V_0^2}{\ln(2)^2}}$$

será la potencia disipada //

Pauta aux. 18

Antonia Cisternas
21.084.284-5

Ley de Biot-Savart

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}\hat{r} \longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$$

; $d\vec{\ell}$: parametriza la dirección de la corriente.

$\vec{r}$: lugar donde se desea conocer $\vec{B}$.

$\vec{r}\,'$: lugar donde se encuentra la corriente.

μ_0 : permeabilidad magnética del vacío.

Para distribuciones más complejas de corriente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{K(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}ds$$

; $K(\vec{r}\,') = \sigma\vec{v}$ → Densidad de corriente superficial

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}dV$$

; $\vec{J}(\vec{r}\,') = \rho\vec{v}$ → Densidad de corriente volumétrica.

→ Campos magnéticos rotan en torno a la corriente siguiendo la regla de la mano derecha.

(a) Regla de la mano derecha para el producto cruz (b) Regla de la mano derecha para campos magnéticos

Fuerza de Lorentz

Una carga q con velocidad $\vec{v}$ bajo la influencia de un campo magnético $\vec{B}$ y eléctrico $\vec{E}$ sentirá una fuerza:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Para un diferencial de carga:

$$d\vec{F} = dq\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Para un circuito con corriente I (segunda ley de Laplace)

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$ → Fuerza magnética ortogonal a la corriente.

↳ dirección de la corriente.

· Vel. angular (para una part. de masa m y carga q)

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$$

· Periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$

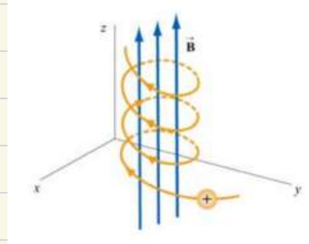
· Frecuencia: $f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$

→ Radio de curvatura de la trayectoria:

$r = \frac{m v_\perp}{qB}$; $v_\perp$: componente de $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{B}$.

→ Paso de la hélice:

$P = v_p T = \frac{2\pi m v_\parallel}{qB}$; $v_\parallel$: componente de $\vec{v}$ paralelo a $\vec{B}$.



→ $m \cdot \vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$ → $\frac{|v|^3}{|v \times a|} =$

→ $m(v \times a) = q\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B})$

$q\vec{v} \times v_\perp B$

* La orientación de un metal en un campo magnético, no requiere que haya una corriente neta en el metal. El movimiento de los e^- en el átomo producen un momento magnético atómico que se orienta según la configuración que minimice la energía dada por el campo magnético externo.

Ley de Ampère

Campo

Eléctrico		Magnético
$\vec{E}$	$\longrightarrow$	$\vec{B}$
Q	$\longrightarrow$	I
ρ	$\longrightarrow$	$\vec{J}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Gauss Ampère

Forma integral

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \longrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}$$

superficie línea

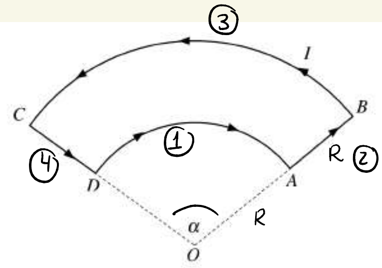
Teo. de la divergencia Teo. de Stokes

Ley de Gauss magnética:

$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$ No existen monopolos magnéticos.

Problema 10.1

Considere el alambre $ABCDA$ que se muestra en la figura. Por él circula una corriente I en la dirección indicada. Si BC y DA son arcos de circunferencia subtendidos por un ángulo α de modo que $OA = OD = R$ y $OB = OC = 2R$. Calcule el campo magnético $\vec{B}$ que produce en el centro O.



Utilizando Biot-Savart,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

; $\vec{r} = 0 \rightarrow$ Queremos B en el centro.

; $\vec{r}'$: cambia por segmentos.

Separando el campo para cada segmento:

1 $\vec{r}' = R\hat{r}$

$d\vec{l} = R\, d\phi\, \hat{\phi}$ $\longrightarrow$ diferencial en cilíndricas.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\alpha \frac{I R\, d\phi\, \hat{\phi} \times (0 - R\hat{r})}{|R|^3} \quad ; \quad \hat{\phi}\times\hat{r} = -\hat{k}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\alpha I\frac{R^2}{|R|^3}\, d\phi\, \hat{k}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\alpha\hat{k}$$

2 $\vec{r}' = r'\hat{r}$

$d\vec{l} = dr'\hat{r}$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\cancelto{0}{I\, dr'\, \hat{r} \times (0 - r'\hat{r})}}{|r'|^3} = 0$$

3 $\vec{r}' = 2R\hat{r}$

$d\vec{l} = 2R\, d\phi\, \hat{\phi}$ — lím. de integración con la dirección de I.

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\alpha^0 \frac{I\, \cancel{2R}\, d\phi\, \hat{\phi}\times(0 - \cancel{2R}\hat{r})}{(2R)^{\cancel{3}}}$$

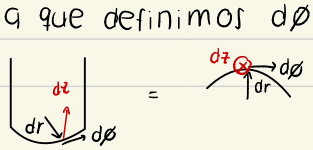
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_\alpha^0 \frac{d\phi\, \hat{k}}{(2R)}$$

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{8\pi R}\alpha\hat{k}$$

4 Análogo a 2 $\Rightarrow \vec{B}_4 = 0$

$$\therefore \vec{B}_{Tot}(r=0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\alpha\hat{k} - \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\alpha\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\alpha\hat{k}$$

$\longrightarrow$ Notar que $\hat{k}$ está entrando a la pizarra ya que definimos $d\phi$ en dirección horaria!

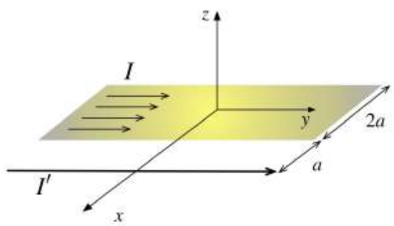


Problema 11.6

Considere una cinta de ancho $2a$ por la cual circula una corriente I homogéneamente distribuida. A una distancia distancia a de ella, circula un cable con corriente I' (ver figura).

a) Encuentre el campo magnético en todo el plano $x > a$.

b) Determine la fuerza por unidad de largo que siente la cinta debido al cable.



a) Dado que la corriente circula en dirección $\hat{y}$ tanto para el plano como para el cable.

Podemos utilizar el ppio. de superposición para calcular el campo magnético total.

$\hookrightarrow \vec{B}_{TOT} = \vec{B}_{cable} + \vec{B}_{cinta}$

Por simetría, $\vec{B} = B(x)\hat{z}$

Utilizando Biot-Savart,

$$\vec{B}_{cable} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I' d\vec{\ell} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} \quad ; \vec{r} = x\hat{x} + \cancelto{0}{y\hat{y}} \quad (\text{con } x > 2a) \quad \sim \text{B no depende de } y.$$

$$\vec{r}' = y'\hat{y} + (2a)\hat{x}$$

$$d\vec{\ell} = dy'\hat{y}$$

$$= \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'\hat{y} \times (x\hat{x} - (y'\cancelto{0}{\hat{y}} + 2a\hat{x}))}{\|x\hat{x} - (y'\hat{y} + 2a\hat{x})\|^3} \quad ; \hat{y}\times\hat{y} = 0, \quad \hat{y}\times\hat{x} = -\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'(x-2a)(-\hat{z})}{[y'^2 + (x-2a)^2]^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I'}{4\pi}(x-2a)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(y'^2 + (x-2a)^2)^{3/2}}}\hat{z} \quad ; \text{c.v. } y' = (x-2a)\tan\theta \longrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$dy' = -(x-2a)\sec^2\theta \, d\theta$$

$$\int \frac{-(x-2a)\sec^2\theta \, d\theta}{((x-2a)^2\sec^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{(x-2a)^2}\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta \, d\theta}_{\operatorname{sen}\theta\big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2}$$

$$= -\frac{\mu_0 I'}{\cancel{2}\,\cancel{4}\,\pi}\frac{(x-a)}{(x-2a)^2}\cdot\cancel{2}\,\hat{z}$$

$$\vec{B}_{cable} = \frac{-\mu_0 I' \hat{z}}{2\pi(x-2a)}$$

Luego,

$$\vec{B}_{cinta} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{\vec{K}(r)\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}ds' \; ; \quad \vec{r} = x\hat{x} + \cancelto{0}{y\hat{y}} \longrightarrow \text{en un plano con } x > a$$

$$\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$$

$$\vec{K}(r) = K\hat{y} \quad ; \text{densidad de corriente constante.}$$

$$ds' = dx'dy'$$

$$\vec{B}_{cinta} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\hat{y}\times(x\hat{x} - x'\hat{x} - \cancel{y'\hat{y}}^{\,0})\; dy'dx'}{((x-x')^2+y'^2)^{3/2}} \qquad ; \quad \hat{y}\times\hat{x} = -\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}(-\hat{z})\int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k(x-x')\,dy'dx'}{((x-x')^2+y'^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-a}^{a}dx'\,k\cancel{(x-x')}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy'}{((x-x')^2+y'^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{(x-x')^{\cancel{2}}}}$$

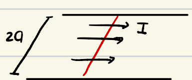
$$= -\frac{\mu_0}{\cancel{4}_{2}\pi}\hat{z}\int_{-a}^{a}dx'\,\frac{k\,\cancel{2}}{(x-x')}$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi}k\,\hat{z}\Big[-\ln(x-x')\Big]_{-a}^{a}$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi}k\Big[-\ln(x-a)+\ln(x+a)\Big]\hat{z}$$

$$\vec{B}_{cinta} = -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)\hat{z}$$

· pero k es la densidad superficial de corriente (cuánta corriente atraviesa en una línea)



$\rightsquigarrow$ $K = I/2a$

Finalmente, $\boxed{\vec{B}_{TOT} = \frac{-\mu_0 I}{4\pi a}\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)\hat{z} + \frac{-\mu_0 I'}{2\pi(x-2a)}\hat{z}}$

b) La cinta sólo va a sentir el campo que genera el cable.

Se tiene que:

$$d\vec{F} = \underbrace{I\,d\vec{l}}_{\text{para una superficie:}\ \vec{K}ds\ =\ \frac{I}{2a}\hat{y}\,dxdy} \times \underbrace{\vec{B}}_{\text{campo externo: } \vec{B}\ (x=2a)}$$

$$\rightarrow d\vec{F} = \left(\frac{I}{2a}dy\,dx\,\hat{y}\right)\times\left(\frac{-\mu_0 I'}{2\pi}\frac{1}{(x-2a)}\hat{z}\right) \qquad ; \quad \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$$

$$d\vec{F} = -\frac{\mu_0 I' I}{4a\pi}\hat{x}\cdot\frac{dx\,dy}{(x-2a)} \qquad /\iint$$

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I' I}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{x-2a}\,dy\,\hat{x}$$

$$\vec{F} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\mu_0 I' I}{4\pi a}\underbrace{\ln(x-2a)\Big|_{-a}^{a}}_{-\ln(3)}dy\,\hat{x} = \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{\mu_0 I' I}{4\pi a}\ln(3)\hat{x}}_{dF/dy}\,dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{F}}{dy} = \frac{\mu_0 I' I}{4\pi a}\ln(3)\,\hat{x}}$$

→ se atraen ambas corrientes. → Regla de la mano derecha!

→ la $\vec{F}$ que siente el cable debido a la cinta es igual con sentido contrario. (se podía calcular así de forma más fácil) → 3ra ley de Newton.

Como se ve en la Figura 2, hay dos caminos cerrados (*Loops Amperianos*) que encierran dos loops conductores con corrientes I_1 e I_2. Calcular el valor de la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ para ambos caminos.

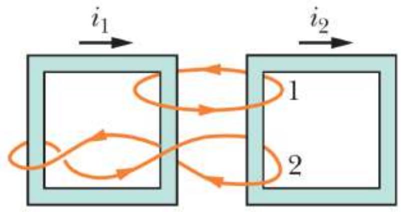


Figura 2

· Por ley de Ampère, para el camino cerrado 1,

· $\oint_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_2 - \mu_0 I_1$ $\longrightarrow$ por regla de la mano derecha, la corriente debe ir hacia arriba.

para el camino 2,

· $\oint_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (- I_2 - I_1 - I_1) = -\mu_0 (2I_1 + I_2)$

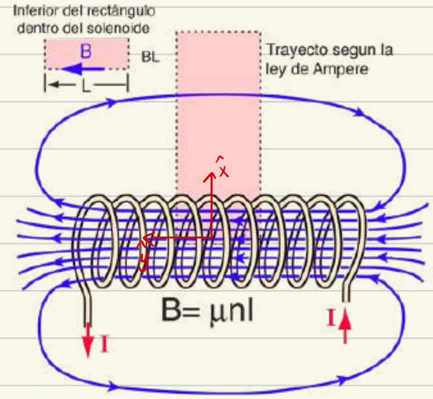
Pauta auxiliar 21

Antonia Cisternas
21.084.284-5

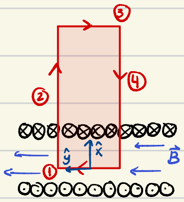
Fórmulas útiles

- Ley de Ampère: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}$
- Ley de Biot-Savart: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$
- Energía potencial magnética: $U_p = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

P1 a) Utilizando ley de Ampère, podemos crear un loop como el de la imagen que encierre una densidad de espiras $\left(n = \frac{N}{\ell} = \frac{N \text{ espiras}}{\text{largo } \ell}\right)$



Por simetría, el campo tiene sólo dirección en $\hat{y}$ la espira es infinita.



Podemos crear un loop amperiano que tendremos que separar por segmentos (para cada campo):

$$\int_{①} \vec{B}\cdot dy\,\hat{y} + \int_{②} \underbrace{\vec{B}}_{B\hat{y}}\cdot \cancel{dx\,\hat{x}}^{\,0} + \int_{③} \vec{B}\cdot dy\,\hat{y} + \int_{④} \underbrace{\vec{B}}_{B\hat{y}}\, \cancel{dx\,\hat{x}}^{\,0} = \mu_0 \underbrace{I_{enl.}}$$

$\longrightarrow I_{enl} = I \cdot N$ (I: corriente, N: N espiras en ese largo)

Luego, notamos que podemos hacer este loop muy alto y el resultado será el mismo por lo que el campo fuera del solenoide debe ser constante y si asumimos que en el ∞ es cero,

$$\int_{③} \vec{B}\cdot dy\,\hat{y} = 0$$

Así,

$$\int_{①} B\hat{y}\, dy\hat{y} = \mu_0 I N \implies \int_{-L/2}^{L/2} B\, dy = \mu_0 N I$$

asumiendo un ancho L

$$\implies B\cdot L = NI\mu_0$$

$$\implies \boxed{\vec{B} = I\frac{N}{\underbrace{L}_{n}}\mu_0\hat{y} = In\mu_0\hat{y}}$$

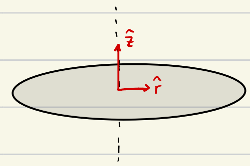
$\rightarrow$ Notamos que no depende de x (es constante dentro del solenoide).

b) Utilizando Biot-Savart para el campo de una sola espira para un punto en el eje de esta,

$\vec{r} = z\hat{z}$

$\vec{r}' = r'\hat{r}$ (con $r' = R$)

$d\vec{l} = r' d\phi \, \hat{\phi}$



Así,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r' d\phi\, \hat{\phi} \times (z\hat{z} - r'\hat{r})}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} \quad ; \quad \hat{\phi}\times\hat{z} = \hat{r}, \quad \hat{\phi}\times\hat{r} = -\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\cancel{\int_0^{2\pi} \frac{d\phi\, r' z \hat{r}}{(z^2+r'^2)^{3/2}}}^{\,0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{d\phi\, r'^2 \hat{z}}{(z^2+r'^2)^{3/2}}}_{\frac{r'^2}{(z^2+r'^2)^{3/2}}\cdot 2\pi\hat{z}}\right]$$

$\hat{r} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\cancel{4\pi}_{\,2}} \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \cdot \cancel{2\pi}\,\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2 \,\hat{z}}{(z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Así, para un solenoide de ancho d:

→ El campo magnético para una espira en la posición s será $\vec{B}(z-s)$.

→ Por principio de superposición, podemos sumar el campo sobre el eje de todas las espiras.

$$\vec{B}_{TOT}(z) = \sum_{k=1}^{N} \vec{B}_{espira}(z - s_k) \quad ; \quad N: \text{ número de espiras.}$$

→ Si las espiras están muy próximas entre sí, podemos pasar al límite continuo:

$$\vec{B}(z) \approx \int \vec{B}_{espira}(z-s)\cdot \underline{dN}$$

↳ N° de espiras en ese intervalo: $dN = n\, ds$ (n: densidad de espiras; ds: diferencial de línea.)

$$= \int_{-d/2}^{d/2} \vec{B}_{espira}(z-s)\cdot n\, ds$$

Reemplazando,

$$\vec{B}(z) = n\int_{-d/2}^{d/2} \frac{\mu_0 I R^2}{2\left((z-s)^2+R^2\right)^{3/2}}\, ds\, \hat{z} \quad ; \quad \underline{C.V}\ \ z - s = u,\ -ds = du \ \rightarrow\ -\int_{z-d/2}^{z+d/2}$$

$$= \frac{n\mu_0 I}{2}\int_{z-d/2}^{z+d/2} \frac{R^2}{\left((u)^2+R^2\right)^{3/2}}\, du\, \hat{z} \quad ; \text{ si } \frac{d}{du}\left(\frac{u}{(u^2+R^2)^{1/2}}\right) = \frac{1}{(u^2+R^2)^{1/2}} - \frac{1}{\cancel{2}}\frac{u\,\cancel{2}u}{(u^2+R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{(u^2+R^2) - u^2}{(u^2+R^2)^{3/2}}$$

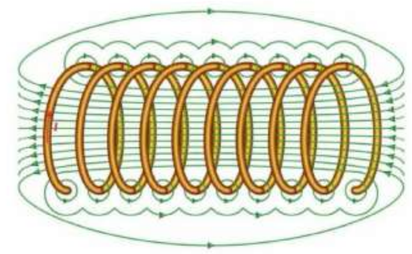
$$= \frac{R^2}{(u^2+R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{n\mu_0 I}{2}\left[\frac{u}{(u^2+R^2)^{1/2}}\right]_{z+d/2}^{z+d/2}.$$

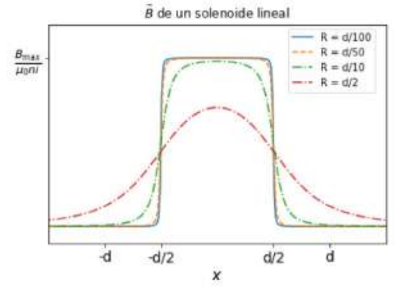
$$\rightarrow \boxed{\vec{B}(z) = \frac{n\mu_0 I}{2}\left[\frac{(z+d/2)}{((z+d/2)^2+R^2)^{1/2}} - \frac{(z-d/2)}{((z-d/2)^2+R^2)^{1/2}}\right]\hat{z}}$$

· si derivamos e igualamos a 0 (misma derivada anterior)

$$\rightarrow \frac{dB}{dz} = \frac{n\mu_0 I}{2}\left[\frac{R^2}{((z+d/2)^2+R^2)^{3/2}} - \frac{R^2}{((z-d/2)^2+R^2)^{3/2}}\right] \overset{!}{=} 0$$



$\Rightarrow z_{max} = 0 \longrightarrow$ campo magnético es máximo en $z=0$, es decir, en el centro del solenoide.



→ se tiene que, en $z=0$ será:

$$\vec{B}(z=0) = \frac{n\mu_0 I}{2} \cdot \frac{d}{((d/2)^2+R^2)^{1/2}}\hat{z} = n\mu_0 I \frac{d}{(d^2+4R^2)^{1/2}}\hat{z}$$

Finalmente, si es infinito, $d \gg R$:

$\boxed{\vec{B} = n\mu_0 I \hat{z}} \longrightarrow$ concuerda con lo que encontramos en a)!

c) Si el imán es un dipolo magnético con momento magnético $\vec{m}$, se tiene que la energía potencial magnética en prescencia de un campo magnético externo $\vec{B}$ es:

$$U_p = -\vec{m}\cdot\vec{B}$$

como $\vec{m} = m\hat{z}$ y $\vec{B} = B\hat{z}$ (se alinea con $\vec{B}$),

$$U_p = -m B(z)$$

Luego, la fuerza sobre el imán será:

$$\vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}) = m\frac{dB(z)}{dz}\hat{z}$$ (B sólo depende de z)

Así, $$\boxed{\vec{F} = m\frac{n\mu_0 I}{2}\left[\frac{R^2}{((z+d/2)^2+R^2)^{3/2}} - \frac{R^2}{((z-d/2)^2+R^2)^{3/2}}\right]\hat{z}}$$ //

Pauta auxiliar 22

Reparo C2

Antonia Cisternas
21.084.284-5

· Ley de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{I_{enl.}}_{}$$

$$I_{enl.} = \iint \underbrace{\vec{J}}_{\text{densidad de corriente}} \cdot d\vec{s}$$

· Para todo campo, existe un potencial magnético $\vec{A}$ tal que
$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

· El momento o dipolo magnético $\vec{m}$ de un circuito con corriente I será:

$$\vec{m} = \oint \vec{r}' \times I d\vec{l} = I A \hat{n}$$

con el campo magnético generado por el momento dado por:

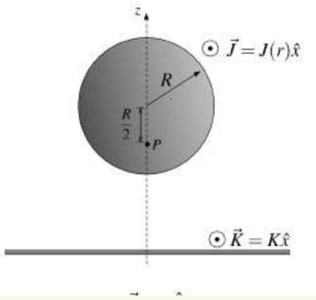
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}'|^3} \left[\frac{3[\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')](\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \vec{m} \right]$$

Torque en un momento magnético:
$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$

Ley de Ampère

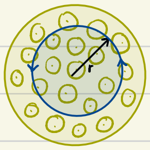
Problema 12.8

Se tiene dos corrientes, ambas con igual sentido. Una de ellas es una corriente plana e infinita de densidad lineal K y otra es una corriente cilíndrica infinitamente larga cuya densidad es $J(r) = J_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$. Encuentre el valor de J_0 en función de K que hace que el campo magnético resultante en el punto P ubicado a una distancia $\frac{R}{2}$ del centro del cilindro sea nulo.



Podemos utilizar ley de Ampère para calcular el campo generado por ambas densidades de corriente.

Campo producido por el cilindro:



Así, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$

Podemos calcular la corriente encerrada a partir de la densidad de corriente.

Como queremos el campo en el punto P, calculamos el campo para $r < R$:

$$I_{enc} = \iint \vec{J}(r)\cdot d\vec{S}$$

↳ superficie definida por el loop encerrado

corriente encerrada hasta un $r<R$.

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{r} J_0\left(1-\frac{r'}{R}\right)\hat{z}\cdot r'\,dr'\,d\theta\,\hat{z}$$

$$= J_0\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{r} r'\,dr'\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{r}\frac{r'^2}{R}\,dr'\,d\theta\right] = J_0\left[2\pi\left[\frac{r'^2}{2}\right]_0^r - \frac{1}{R}2\pi\left[\frac{r'^3}{3}\right]_0^r\right]$$

$$\boxed{I_{enc}(r) = J_0 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right]}$$

Por simetría, $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$

Por ley de Ampère:

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\theta}\cdot\underbrace{r\,d\theta\,\hat{\theta}}_{d\vec{l}} = \mu_0 I_{enc}$$

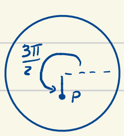
$$\Rightarrow B(r)\cancel{r}\,\cancel{2\pi} = J_0\cancel{2\pi}\,r^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3R}\right)\mu_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = J_0 r\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{3R}\right)\mu_0}$$

Así, el campo en el punto P será $B(R/2) = J_0\frac{R}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cancel{R}}{6\cancel{R}}\right)\mu_0 = \frac{J_0 R}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{6}\mu_0$

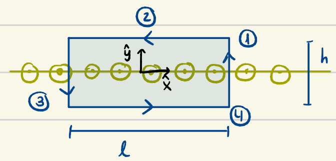
$$B(R/2) = \frac{\mu_0 J_0 R}{6} = \vec{B}_{cilindro}(P)$$

* $\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y} \longrightarrow$ como en P, $\theta = \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow \hat{\theta} = -(-1)\hat{x} + 0 = \hat{x}$



$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B}_{cilindro}(P) = \frac{\mu_0 J_0 R}{6}\hat{x}}$$

Campo producido por el plano:



Utilizando ley de Ampère, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = I_{enc}\,\mu_0$

Donde $I_{enc} = \displaystyle\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \underbrace{K}_{\text{densidad lineal}} dx = K\ell$

Luego, por simetría, ignorando efectos de borde:

$\vec{B} = B(y)\,\hat{x}$ (regla de la mano derecha)

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc}.$$

Separando el loop según cada segmento,

$$\Rightarrow \int_{①} \cancel{B(y)\,\hat{x}\cdot dy\,\hat{y}}^{\,0} + \int_{②} B(y_{arriba})\hat{x}\cdot dx\,\hat{x} + \int_{③} \cancel{B(y)\,\hat{x}\cdot dy\,\hat{y}}^{\,0} + \int_{④} B(y_{abajo})\,\hat{x}\cdot dx\,\hat{x} = \mu_0 K\ell.$$

$$\Rightarrow \int_{\ell/2}^{-\ell/2} B(y_{arriba})\,dx + \int_{-\ell/2}^{\ell/2} B(y_{abajo}) = \mu_0 K\ell$$

$$\Rightarrow -B(y_{arriba})\,\ell + B(y_{abajo})\,\ell = \mu_0 K\ell.$$

Como sabemos que $B(y)\,\hat{x} = -B(-y)\,\hat{x} \Rightarrow B(y_{arriba}) = -B(y_{abajo})$

$$\Rightarrow -2B(\underbrace{y_{arriba}}_{\text{arbitrario}})\cancel{\ell} = \mu_0 K\cancel{\ell}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}\,\hat{x} & y>0 \\ \dfrac{\mu_0 K}{2}\,\hat{x} & y<0 \end{cases} \equiv \vec{B}_{plano}(P)$$

$\rightarrow$ No depende de y ya que es infinito!

Luego, sumando ambas contribuciones de los campos en P:

$$\vec{B}_{TOT,P} = \vec{B}_{cilindro}(P) + \vec{B}_{plano}(P) = \frac{\mu_0 J_0 R}{6}\,\hat{x} + -\frac{\mu_0 K}{2}\,\hat{x} \overset{!}{=} 0$$

(Queremos que sea 0 en P)

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\mu_0} J_0 R}{6} = \frac{\cancel{\mu_0} K}{2}$$

$$\therefore \boxed{J_0 = \frac{3K}{R}}$$

Obteniendo lo pedido//

Ojo: comparar las aproximaciones del campo de una superficie y el solenoide infinito.

En el caso del solenoide, $\vec{B}(\infty) \to 0$ pero no en el plano.

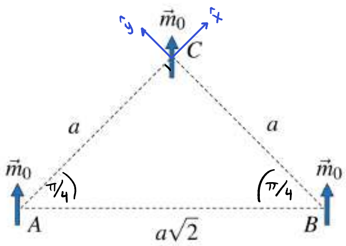
Momento magnético

Problema 13.10

Considere tres momentos magnéticos iguales $\vec{m}_0$, ubicados en los vértices de un triángulo rectángulo ABC de lados a, a y $a\sqrt{2}$.

a) Determine el trabajo necesario para invertir la posición del momento magnético ubicado en el vértice C.

b) ¿Cuál es el torque que sienten los momentos magnéticos ubicados en C?.



a) Debido a que el trabajo está dado por

$W = -\Delta U$

se tiene que la energía potencial magnética es $U_p = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

Así, cada dipolo A y B ejercerá una energía potencial magnética sobre C.

Si para cada momento magnético: $\vec{m} = m_0\hat{z}$

Si el campo magnético generado por el dipolo está dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\left[\frac{3[\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')](\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} - \vec{m}\right]$$

Si el origen está en C, el campo que ejerce A en C será:

- $\vec{r} = 0$ (lo queremos calcular en C)
- $\vec{r}' = -a\hat{x}$

$$\vec{B}_{A\to C} = \frac{\mu_0}{4\pi a^3}\left[\frac{3[\cancel{m_0\hat{z}\cdot(-a\hat{x})}^{\,0}](a\hat{x})}{a^2} - m_0\hat{z}\right] = -\frac{\mu_0 m_0\hat{z}}{4\pi a^3}$$

Análogamente para B, como $\hat{x},\hat{y}\perp\hat{z}$:

- $\vec{r}' = -a\hat{y}$

$$\vec{B}_{B\to C} = \frac{\mu_0}{4\pi a^3}\left[\frac{3[\cancel{m_0\hat{z}\cdot(-a\hat{y})}^{\,0}](-a\hat{y})}{a^2} - m_0\hat{z}\right] = -\frac{\mu_0 m_0\hat{z}}{4\pi a^3}$$

Utilizando el principio de superposición, $\vec{B}_{Tot,C} = \vec{B}_{A\to C} + \vec{B}_{B\to C}$

$$\boxed{\vec{B}_{Tot,C} = -\frac{\mu_0 m_0}{2\pi a^3}\hat{z}}$$

Así, la energía potencial que tiene el momento magnético en C será:

$$U_{p+} = -\vec{m}\cdot\vec{B} = -m_0\hat{z}\cdot\frac{-\mu_0 m_0}{2\pi a^3}\hat{z} = \frac{\mu_0 m_0^2}{2\pi a^3}$$

Luego, la energía potencial del magneto invertido será:

$$U_{p-} = -\vec{m}\cdot\vec{B} = -(-m_0\hat{z})\cdot -\frac{\mu_0 m_0}{2\pi a^3}\hat{z} = -\frac{\mu_0 m_0^2}{2\pi a^3}$$

momento invertido

$$\therefore\ W = \Delta U = U_{p+} - U_{p-} = \boxed{\frac{\mu_0 m_0^2}{\pi a^3} = W}$$

b) Luego, se sabe que el torque está dado por $\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}$

Así, para C:

$$\tau = (m_0\hat{z})\times\left(-\frac{\mu_0 m_0}{2\pi a^3}\hat{z}\right) = 0$$

Fuerza de Lorentz

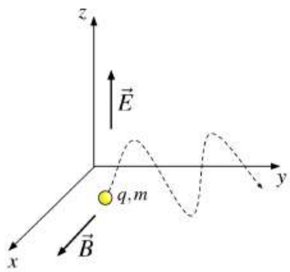
Problema 11.4

Una partícula de masa m y carga q que está sometida a la influencia simultánea de un campo eléctrico oscilatorio en la dirección vertical $\vec{E} = E_0 \cos(\Omega t)\hat{z}$ y un campo magnético constante en la dirección horizontal $\vec{B} = B_0\hat{x}$ como se ilustra en la figura. Sí la partícula parte en el reposo,

a) Encuentre las componentes x, y y z de la aceleración de la partícula.

b) Encuentre la velocidad en función del tiempo.

c) Encuentre la trayectoria y discuta que ocurre cuando la frecuencia es $\Omega = \frac{qB}{m}$



a) Se sabe que la fuerza de Lorentz de la partícula será:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Es 0 inicialmente pero no para todo t!

$$= q\left(E_0 \cos(\Omega t)\hat{z} + \vec{v} \times B_0\hat{x}\right)$$

La posición de la partícula está dada por $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z})$$

; $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$

$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$

Luego, $m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}) = q\left(E_0 \cos(\Omega t)\hat{z} + [\cancel{\dot{x}\hat{x}} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}] \times [B_0\hat{x}]\right)$

$$m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}) = q\left(E_0 \cos(\Omega t)\hat{z} - \dot{y}B_0\hat{z} + \dot{z}B_0\hat{y}\right)$$

Separando por componentes:

$\hat{x}$] $\boxed{m\ddot{x} = 0}$ $\Rightarrow \dot{x} = \text{cte}$

como $\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = 0}$

Podemos elegir $x(t=0) = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = 0}$

$\hat{y}$] $\boxed{m\ddot{y} = qB_0\dot{z}}$ $/\int dt$

$$\Rightarrow m\dot{y} = qB_0 z$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{qB_0 z}{m}$$; eligiendo $z(t=0) = 0$.

$\hat{z}$] $\boxed{m\ddot{z} = qE_0\cos(\Omega t) - \dot{y}B_0 q}$

$$m\ddot{z} = qE_0\cos(\Omega t) - \left(\frac{qB_0 z}{m}\right)B_0 q$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} + \frac{q^2B_0^2}{m}z = qE_0\cos(\Omega t) \quad /\frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{q^2B_0^2}{m^2}z = \frac{qE_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Teniendo la solución de un mov. armónico forzado: $z(t) = \dfrac{\frac{q}{m}E_0}{\frac{q^2B_0^2}{m^2} - \Omega^2}\cos(\Omega t - \delta)$

Como $z(t=0)=0 \Rightarrow \dfrac{qE_0}{m\left(\frac{q^2B_0^2}{m^2}-\Omega^2\right)}\cos(-\delta)=0$

$\Rightarrow \delta = \pi/2$

$$\Rightarrow \boxed{z(t)=\frac{\frac{q}{m}E_0}{\frac{q^2B_0^2}{m^2}-\Omega^2}\sin(\Omega t)} \rightarrow \boxed{\dot{z}(t)=\frac{qE_0}{m\left(\frac{q^2B_0^2}{m^2}-\Omega^2\right)}\cos(\Omega t)\Omega.}$$

Luego, podemos obtener la ec. para $y(t)$:

$\underline{\hat{y}}$ $\dot{y}=\dfrac{qB_0 z}{m}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{y}=\frac{qB_0}{m}\left(\frac{\frac{q}{m}E_0}{\frac{q^2B_0^2}{m^2}-\Omega^2}\sin(\Omega t)\right)} \quad //\int$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{qB_0}{m}\cdot\frac{\frac{q}{m}E_0}{\left(\frac{q^2B_0^2}{m^2}-\Omega^2\right)}\cdot\left(-\frac{\cos(\Omega t)}{\Omega}\right)+C$$

Eligiendo, $y(t=0)=0$

$$\Rightarrow -\frac{qB_0}{m\Omega}\cdot\frac{\frac{q}{m}E_0}{\left(\frac{q^2B_0^2}{m^2}-\Omega^2\right)}+C=0$$

$$\Rightarrow C=\frac{q^2B_0E_0}{m^2\Omega\left(\frac{q^2B_0^2}{m^2}-\Omega^2\right)}$$

$$\therefore \boxed{y(t)=\frac{q^2B_0E_0}{m^2\Omega\left(\frac{q^2B_0^2}{m^2}-\Omega^2\right)}\left(1-\cos(\Omega t)\right)} //$$

Notamos que si $\Omega=\dfrac{qB_0}{m}$ es la frecuencia de resonancia por lo que su amplitud tiende a ∞.

Antonia Cisternas
21.084.284-5

Magnetización en la materia

Vector magnetización

$\vec{M}$ = magnitud vectorial definida como el momento dipolar magnético del material x unidad de volumen.

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} = n\vec{\mu}}$$

n: átomos o moléculas por unidad de volumen.

dV: volumen

$\vec{\mu}$: momento dipolar inducido x átomo o molécula.

Vector intensidad magnética

$\vec{H}$ = campo magnetizante

↳ campo externo aplicado sobre el material.

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})}$$

→ Relación campo magnético externo con magnetización del material.

↓ en medio lineal

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{M} = \chi \vec{H} \end{array}}$$

, μ: permeabilidad magnética del material.

, χ: suceptibilidad magnética.

* μ_0 = permeabilidad magnética del vacío.

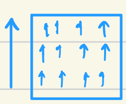
$$\boxed{\mu = \mu_0(1+\chi)}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi\vec{H}) = \mu_0(1+\chi)\vec{H}$$

Materiales:

→ Ante un campo externo:

Paramagnéticos

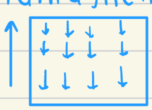


$\chi > 0$, $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} > 1$

$\Rightarrow \mu > \mu_0$

↳ $\vec{M}$ acorde a $\vec{B}$ externo.

Diamagnéticos

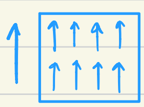


$\chi < 0$, $\mu_r < 1$

$\Rightarrow \mu < \mu_0$

↳ $\vec{M}$ opuesta al campo magnético externo

Ferromagnéticos



sin campo externo
↳ queda igual.

$\chi \gg 0$, $\mu_r \gg 1$

$\Rightarrow \mu \gg \mu_0$

Ley de Ampère Generalizada $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{libre}$. → Es la corriente de conducción (distinta a las corrientes amperianas del material)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{Libre}.$$

Condiciones de Borde:

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_{Libre}$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

→ Densidad superficial de corriente de magnetización: $\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n}$

→ 〃 volumétrica 〃 〃 〃 〃 : $\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$.

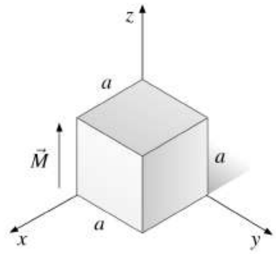
Pauta aux. 26

Problema 14.10

Un cubo de lado a está hecho de un material ferromagnético el cual está permanentemente magnetizado, con una magnetización igual

$$\vec{M} = \frac{M_0 x}{a}\hat{z}$$

Encuentre las densidades de corriente de magnetización presentes en el cubo.



Queremos tanto las densidades superficiales como volumétricas, i.e., $\vec{J}_m$ y $\vec{K}_m$.

Si $\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

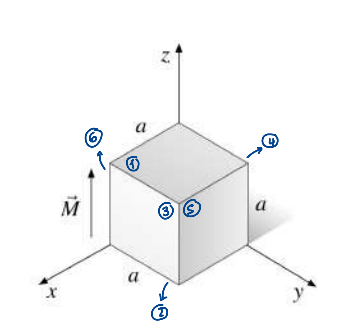
$$= \vec{\nabla} \times \frac{M_0 x}{a}\hat{z}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cancelto{0}{M_x} & \cancelto{0}{M_y} & M_z \end{vmatrix} = \hat{x}\cancelto{0}{\frac{\partial M_z}{\partial y}} - \hat{y}\frac{\partial M_z}{\partial x}$$

; Ya que $M_z = M_z(x)$

$$\vec{J}_m = -\frac{M_0}{a}\hat{y}$$

Además, si $\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n}$, debemos evaluar en cada superficie:



Las normales de las superficies son:

$\hat{n}_1 = \hat{z}$, $\hat{n}_2 = -\hat{z}$

$\hat{n}_3 = \hat{x}$, $\hat{n}_4 = -\hat{x}$

$\hat{n}_5 = \hat{y}$, $\hat{n}_6 = -\hat{y}$

Si $\vec{M} = M(x)\hat{z} \implies \vec{M} \times \hat{n}_1 = \vec{M} \times \hat{n}_2 = 0 \implies \vec{K}_{m,1}(z=a) = \vec{K}_{m,2}(z=0) = 0$

Así, $$\vec{K}_{m,3}(x=a) = \left(\frac{M_0 x}{a}\hat{z} \times \hat{x}\right)_{x=a} = \frac{M_0 \cancel{a}}{\cancel{a}}\hat{y} = M_0\hat{y}$$

$$\vec{K}_{m,4}(x=0) = \left(\frac{M_0 x}{a}\hat{z} \times -\hat{x}\right)_{x=0} = 0$$

$$\vec{K}_{m,5}(y=a) = \left(\frac{M_0 x}{a}\hat{z} \times \hat{y}\right)_{y=a} = -\frac{M_0 x}{a}\hat{x}$$

$$\vec{K}_{m,6}(y=0) = \left(\frac{M_0 x}{a}\hat{z} \times -\hat{y}\right)_{y=0} = \frac{M_0 x}{a}\hat{x}$$

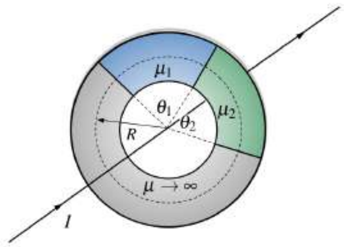
Problema 14.5

Considere un toroide de sección transversal circular A y de radio medio R como se muestra en la Figura. El toroide está compuesto por tres medios de permeabilidades μ, μ_1 y μ_2 (ver Figura). Un cable con corriente I atraviesa el toroide por su centro por eje perpendicular al toroide. Para efectos de calculo, puede considerar que $\mu \to \infty$.

a) Calcule $\vec{H}$ y $\vec{B}$, para cada material si las permeabilidades de los materiales son lineales, uniformes e isotrópicas.

b) Si las permeabilidades de los materiales son lineales uniformes e isotrópicas ¿existirían densidades de corriente de magnetización?. Si existieran, calcúlelas.

c) ¿Cómo cambia (explique) $\vec{H}$, $\vec{B}$ y las corrientes de magnetización si $\mu_1 = \alpha r$ o $\mu_1 = \alpha\theta$?.



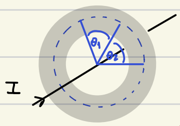
a) se tiene que el campo producido por la corriente será $\vec{B} = B(\theta, r)\hat{\theta}$ (si la corriente va en $\hat{z}$)

· Utilizamos la ley de Ampère generalizada para el campo $\vec{H}$ ya que tenemos el valor de la corriente libre I.

$\hookrightarrow$ intensidad magnética

Así,

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{libre}$$



en el aux. me equivoqué en el signo porque si la corriente está en $\hat{z}$, el loop debe tener dirección de la regla de la mano derecha.

$$\Rightarrow -\int_0^{\theta_2} \vec{H}_2 \cdot r\,d\theta\,\hat{\theta} - \int_{\theta_2}^{\theta_2+\theta_1} \vec{H}_1 \cdot r\,d\theta\,\hat{\theta} - \int_{\theta_2+\theta_1}^{2\pi} \vec{H}_0\, r\,d\theta\,\hat{\theta} = I \longleftarrow I_{Libre} = I$$

Podemos utilizar condiciones de borde entre los medios para relacionar los campos.

$$\Rightarrow \quad B_{1n} = B_{2n} = B_{0n}$$

como $\vec{B} = B\hat{\theta} \Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \vec{B}_0 = \vec{B}$

Además, $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{H}_1 = \vec{B}/\mu_1$$
$$\vec{H}_2 = \vec{B}/\mu_2$$
$$\vec{H}_0 = \vec{B}/\mu.$$

Por lo tanto,

(por enunciado) $\rightarrow$ Si $\mu \to \infty \Rightarrow \vec{H}_0 = 0$.

$$\rightarrow -\int_0^{\theta_2} \frac{B(r)}{\mu_2}\hat{\theta}\cdot r\,d\theta\,\hat{\theta} - \int_{\theta_2}^{\theta_2+\theta_1} \frac{B(r)}{\mu_1} r\,d\theta - \cancel{\int_{\theta_2+\theta_1}^{2\pi} \frac{B(r)}{\mu \to \infty} r\,d\theta}^{\,0} = I$$

$$\rightarrow -\frac{B(r)r}{\mu_2}\cdot\theta_2 - \frac{B(r)}{\mu_1} r\,(\cancel{\theta_2} + \theta_1 - \cancel{\theta_2}) = I$$

$$\rightarrow -B(r)\,r\left(\frac{\theta_2}{\mu_2} + \frac{\theta_1}{\mu_1}\right) = I$$

$$\rightarrow B(r) = -\frac{I}{r}\frac{1}{\left(\frac{\theta_2}{\mu_2} + \frac{\theta_1}{\mu_1}\right)}$$

Evaluado en el radio medio.

$$\vec{B}(R) = -\frac{I}{R}\frac{\mu_2\mu_1}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)}\hat{\theta}$$

Así,

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}}{\mu_1} = -\frac{I}{R}\frac{\mu_2}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)}\hat{\theta} \quad y \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{B}}{\mu_2} = -\frac{I}{R}\frac{\mu_1}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)}\hat{\theta} \quad //$$

b) calculando el vector magnetización, se tiene que:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \longrightarrow \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \vec{M}$$

Así, para el medio 1:

$$\rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}_1 = \vec{M}_1$$

$$\rightarrow -\frac{I}{R}\frac{\mu_2\mu_1}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)\mu_0}\hat{\theta} + \frac{I}{R}\frac{\mu_2}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)}\hat{\theta} = \vec{M}_1$$

$$\rightarrow \frac{I}{R}\frac{\mu_2}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)}\left[-\frac{\mu_1}{\mu_0}+1\right]\hat{\theta} = \vec{M}_1$$

Análogamente,

$$\rightarrow \vec{M}_2 = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H}_2$$

$$\rightarrow \vec{M}_2 = \frac{I}{R}\frac{\mu_1}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)}\left[-\frac{\mu_2}{\mu_0}+1\right]\hat{\theta}$$

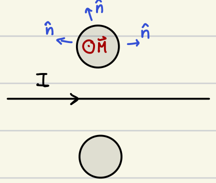
Por último,

$$\rightarrow \vec{M}_0 = \vec{B}/\mu_0 - \cancelto{0}{\vec{H}_0}$$

$$\rightarrow \vec{M}_0 = -\frac{I}{R}\frac{\mu_2\mu_1}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)\mu_0}\hat{\theta}$$

Notamos que si $\vec{M} = M\hat{\theta}$ y $K_m = \vec{M}\times\hat{n}$ $\Rightarrow$ las superficies que tendrán densidad superficial serán $\perp\hat{\theta}$.
Así, para las superficies entre cada medio, no habrá $\vec{K}_m$ pero si habrá para la superficie externa que es $\perp$ a $\hat{\theta}$.

Si cortamos el toroide veremos:



calculando las densidades superficiales para cada medio (en módulo).

$$|\vec{K}_1| = \frac{I}{R}\frac{\mu_2}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)}\left[-\frac{\mu_1}{\mu_0}+1\right]$$

$$|\vec{K}_2| = \frac{I}{R}\frac{\mu_1}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)}\left[-\frac{\mu_2}{\mu_0}+1\right]\hat{\theta}$$

$$|\vec{K}_0| = \frac{I}{R}\frac{\mu_2\mu_1}{(\theta_2\mu_1+\theta_1\mu_2)\mu_0}$$

Por último, si $\vec{\nabla}\times\vec{M} = \vec{J}_m$

como $\vec{M}$ es constante, $\vec{\nabla}\times\vec{M} = 0 = \vec{J}_m$ //

c) si $\mu_1 = \alpha r$, cambiará $\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}}{\mu_1} = \frac{\vec{B}}{\alpha r}$

Luego, utilizar Ampère,

$$\rightarrow -\int_0^{\theta_2}\frac{B(r)}{\mu_2}\hat{\theta}\cdot r\,d\theta\,\hat{\theta} - \int_{\theta_2}^{\theta_2+\theta_1}\frac{B(r)}{\mu_1}r\,d\theta - \cancel{\int_{\theta_2+\theta_1}^{2\pi}\frac{B(r)}{\mu_{\to\infty}}r\,d\theta}^{\,0} = I$$

$$\rightarrow -\int_0^{\theta_2}\frac{B(r)}{\mu_2}r\,d\theta - \int_{\theta_2}^{\theta_1+\theta_2}\frac{B(r)}{\alpha\cancel{r}}\cancel{r}\,d\theta = I$$

$$\rightarrow -B(r)r\frac{\theta_2}{\mu_2} - B(r)\frac{\theta_1}{\alpha} = I$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{B}(r) = -\frac{I\mu_2\alpha}{\theta_1\mu_2 + r\theta_2\alpha}\hat{\theta}}$$

Luego, $\boxed{\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}}{\mu_1} = -\frac{I\mu_2\cancel{\alpha}}{\theta_1\mu_2 + r\theta_2\alpha}\left(\frac{1}{\cancel{\alpha}r}\right)\hat{\theta}}$

$$\boxed{\vec{H}_2 = -\frac{I\cancel{\mu_2}\alpha}{\theta_1\mu_2 + r\theta_2\alpha}\frac{1}{\cancel{\mu_2}}\hat{\theta}}$$

si $\mu_1 = \alpha\theta$, cambiará $\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}(r)}{\mu_1} = \frac{\vec{B}(r)}{\alpha\theta}$

$$\rightarrow -\int_0^{\theta_1}\frac{B(r)}{\mu_2}r\,d\theta - \int_{\theta_2}^{\theta_2+\theta_1}\frac{B(r)}{\alpha\theta}r\,d\theta = I$$

$$\rightarrow -\frac{B(r)r}{\mu_2}\theta_1 - \frac{B(r)r}{\alpha}\Big[\ln\theta\Big]_{\theta_2}^{\theta_1+\theta_2} = I$$

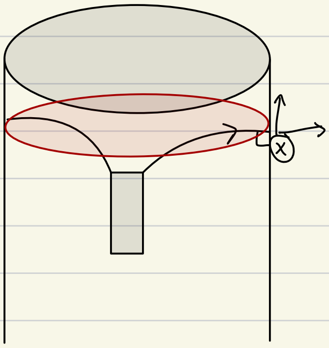
$$\rightarrow -B(r)r\left[\frac{\theta_1}{\mu_2} + \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{\theta_2}\right)\right] = I$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{B}(r) = -\frac{I\hat{\theta}}{r}\frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{\mu_2} + \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{\theta_2}\right)\right]}}$$

Luego,

$$\boxed{\vec{H}_1(\theta,r) = -\frac{I\hat{\theta}}{\alpha\theta r}\frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{\mu_2} + \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{\theta_2}\right)\right]}} \quad y \quad \boxed{\vec{H}_2 = -\frac{I\hat{\theta}}{\mu_2 r}\frac{1}{\left[\frac{\theta_1}{\mu_2} + \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{\theta_2}\right)\right]}} \;//$$

Experimento cobre e imán.



$F = \vec{v} \times \vec{B}$

$\hat{z} \times \vec{B} = a\hat{\rho} + b\hat{z} = f\hat{\varphi}$

$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$

$\hat{\varphi} \quad \hat{\rho} \quad = -\hat{z} \rightarrow$ $\vec{F}$ en la espira

$$\rightarrow \quad v_{imán} = \frac{m_{imán}\, g\, \rho_{cu}}{4\pi\, r_{tubo}\, B^2\, he}\left(1 - e^{-\dots t}\right)$$

$\rightarrow 0$ al pasar el tiempo $\rightarrow$ luego se mueve con $\vec{v}$ de

vel. terminal:

$$v_{imán,} = \frac{m_{imán}\, g\, \rho_{cu}}{4\pi\, r_{tubo}\, B^2\, he}$$

→ aumenta la resistividad de cobre (peor conductor) $\Rightarrow$ aumenta la $\vec{v}$ del imán

Pauta aux. 27

Antonia Cisternas
21.084.284-5

Ley de Faraday

- Fuerza electromotriz (f.e.m.): Energía por unidad de carga que una fuente proporciona para mantener una d.d.p. y mover las cargas en un circuito.

$\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt}$; Φ: flujo del campo magnético en un área respectiva.

$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ → La variación del flujo del campo magnético genera un campo eléctrico inducido.

$\rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Ley de Lenz

- La corriente inducida en un circuito debido a la variación temporal del flujo del campo magnético siempre es opuesta al crecimiento/decrecimiento del mismo

Inductancia mutua

- Efecto de producir una f.e.m. en una bobina debido al cambio de corriente en otra bobina.

$M = \dfrac{\Phi_{1\to 2}}{I_1} = \dfrac{\Phi_{2\to 1}}{I_2}$ → Es simétrica.

Flujo que genera el circuito 2 sobre 1

corriente que circula en el circuito 2.

$\Rightarrow \varepsilon_2 = -\dfrac{d\Phi_{1\to 2}}{dt} = -M\dfrac{dI_1}{dt}$

f.e.m. en el circuito 2

flujo sobre el circuito 2.

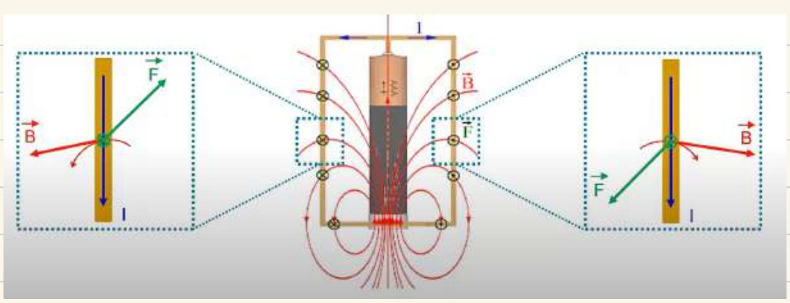
Inductancia propia

$L = \dfrac{\Phi_{1\to 1}}{I_1} \Rightarrow \varepsilon_1 = -\dfrac{d\Phi_{1\to 1}}{dt} = -L\dfrac{dI_1}{dt}$ ⟶

En presencia de otro circuito 2:

$\varepsilon_{1,tot} = -M\dfrac{dI_2}{dt} - L\dfrac{dI_1}{dt}$

Motor homopolar



* Acá está al revés la fuerza (regla de la mano izquierda xd)

$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$

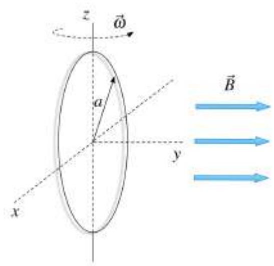
Problema 16.9

Considere inicialmente una espira circular de radio a que yace sobre el plano xz. En $t = 0$ la espira comienza a girar con una velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$. Si en el espacio existe un campo homogéneo y constante de valor $\vec{B} = B_0 \hat{y}$ determine:

a) La fem inducida en el circuito.

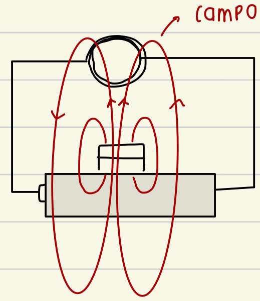
b) La corriente en función del tiempo que circula por la espira, si la espira posee una resistencia R y una autoinducción L.

c) El torque que siente la espira, suponiendo que ésta ha estado rotando un tiempo muy largo.



En el experimento...

campo magnético del imán.



a) se tiene que la fem inducida está dada por:

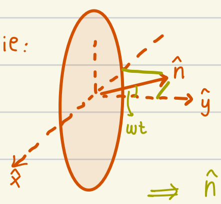
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

En el cuál, el flujo en el campo magnético es:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Notamos que el flujo por la espira cambiará en el tiempo ya que si el campo apunta en $\hat{y}$ siempre y el anillo rota, la superficie por la que pasa el flujo cambia.

$$\Rightarrow \Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \vec{B} \cdot r\,dr\,d\theta\, \underbrace{\hat{n}}_{\text{dirección en que apunta la superficie}}$$



→ si comienza a girar con velocidad angular ω_0 → $\hat{n}$ cambia un ángulo $\omega_0 t$.

$$\Rightarrow \hat{n} = \left[-\sin(\omega_0 t)\hat{x} + \cos(\omega_0 t)\hat{y}\right]$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} B_0 \hat{y}\; r\,dr\,d\theta\, \hat{n}$$

$\hat{y} \cdot \hat{x} = 0$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} B_0 r\,dr\,d\theta\;\; \hat{y} \cdot \left[\cancel{-\sin(\omega_0 t)\hat{x}} + \cos(\omega_0 t)\hat{y}\right]$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} B_0\, r\,dr\,d\theta\, \cos(\omega_0 t)$$

$$\Phi = B_0 \frac{a^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi \cos(\omega_0 t)$$

luego, la f.e.m. será:

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = + B_0 a^2 \pi \sin(\omega_0 t) \cdot \omega_0}$$

//

b) Si la espira posee una autoinducción L, se sabe que la f.e.m. producida por esta autoinducción será:

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

la f.e.m. inducida por el campo externo es $\varepsilon = B_0 a^2 \pi \sin(\omega_0 t)\omega_0$.

Luego, la caída de potencial producida por la resistencia será $V_R = IR$.

usando la ley de Kirchoff de voltajes:

$$\rightarrow \underbrace{IR}_{\text{consume voltaje.}} = \underbrace{\varepsilon + \varepsilon_L}_{\text{aportan voltaje neto}}$$

$$\rightarrow \quad L\frac{dI}{dt} + IR = B_0 a^2 \pi \sin(\omega_0 t)\omega_0$$

Queremos resolver la edo., usando el método del factor integrante en el que

$y' + p(x)y = g(x) \rightarrow$ factor integrante: $u(x) = e^{\int p(x)dx}$

$\rightarrow \frac{d}{dx}(u(x)y) = u(x)g(x)$

$\rightarrow u(x)y = \int u(x)g(x) + C.$

$$\Rightarrow \dot{I} + \frac{R}{L}I = \frac{B_0 a^2 \pi \omega_0}{L}\sin(\omega_0 t) \quad / \cdot e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{R}{L}t} I\right) = \frac{B_0 a^2 \pi \omega_0}{L}\sin(\omega_0 t)e^{R/L\,t} \quad / \int_0^t$$

$$\Rightarrow e^{R/L\,t} I = \frac{B_0 a^2 \pi \omega_0}{L}\int_0^t \sin(\omega_0 t')e^{R/L\,t'}dt'$$

Integrando por partes:

$u = \sin(\omega_0 t) \rightarrow du = \cos(\omega_0 t)\omega_0$

$dv = e^{R/L\,t}dt \rightarrow v = \frac{L}{R}e^{Rt/L}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^t \sin(\omega_0 t)e^{R/L\,t}dt}_{A} = \left[\sin(\omega_0 t)\frac{L}{R}e^{Rt/L}\right]_0^t - \underbrace{\int_0^t \frac{L}{R}e^{Rt/L}\cos(\omega_0 t)\omega_0\,dt}_{\omega_0 \frac{L}{R} B}$$

I.p.p denuevo

$u = \cos(\omega_0 t) \rightarrow du = -\sin(\omega_0 t)\omega_0$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^t \cos(\omega_0 t)e^{R/L\,t}dt}_{B} = \left[\cos(\omega_0 t)\frac{L}{R}e^{Rt/L}\right]_0^t + \underbrace{\int_0^t \frac{L}{R}e^{Rt/L}\sin(\omega_0 t)\omega_0\,dt}_{\omega_0 \frac{L}{R} A}$$

Juntando,
$$A = \sin(\omega_0 t)\frac{L}{R}e^{Rt/L} - \frac{\omega_0 L}{R}\left(\left[\cos(\omega_0 t)\frac{L}{R}e^{Rt/L}\right]_0^t + \frac{L\omega_0}{R}A\right)$$

$$A = \sin(\omega_0 t)\frac{L}{R}e^{Rt/L} - \omega_0\left(\frac{L}{R}\right)^2\cos\omega_0 t\, e^{R/L\,t} + \omega_0\left(\frac{L}{R}\right)^2 - \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2 A$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2\right)A = \sin(\omega_0 t)\frac{L}{R}e^{Rt/L} - \omega_0\left(\frac{L}{R}\right)^2\cos\omega_0 t\, e^{R/L\,t} + \left(\frac{L}{R}\right)^2\omega_0}$$

Volviendo a la ec anterior:

$$\Rightarrow e^{R/L\,t} I(t) = \frac{B_0 a^2 \pi \omega_0}{\cancel{L}}\left[\frac{\sin(\omega_0 t)\frac{\cancel{L}}{R}e^{Rt/L} - \omega_0\left(\frac{\cancel{L}}{R}\right)^2\cos\omega_0 t\, e^{R/L\,t} + \omega_0\left(\frac{\cancel{L}}{R}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}\right]\cdot\frac{R^2}{R^2} \quad / e^{-Rt/L}$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{B_0 a^2 \pi \omega_0}{(R^2+\omega_0^2 L^2)}\left(\sin(\omega_0 t)R - \omega_0 L\cos(\omega_0 t) + \omega_0 L e^{-Rt/L}\right)}$$

//

c) Por último, el torque estará dado por

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

En el cuál el momento magnético es:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint \vec{r}' \times I d\vec{l} = I A \hat{n}$$

(con I indep. del ángulo)

↳ normal a la superficie.

$$= I A \left(-\sin \omega_0 t \, \hat{x} + \cos \omega_0 t \, \hat{y} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = I A \left(-\sin \omega_0 t \, \hat{x} + \cancel{\cos \omega_0 t \, \hat{y}} \right) \times B_0 \hat{y}$$

0

Reemplazando la corriente encontrada en b),

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \frac{B_0 a^2 \pi \omega_0}{(R^2 + \omega_0^2 L^2)} \left(\sin(\omega_0 t) R - \omega_0 L \cos(\omega_0 t) + \omega_0 L e^{-Rt/L} \right) \overbrace{\pi a^2}^{A} \cdot \left(-\sin \omega_0 t \right) B_0 \hat{z}$$

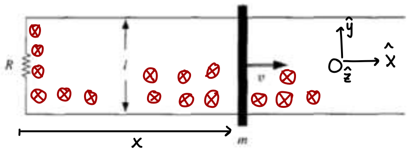
Para un tiempo muy largo, $e^{-Rt/L} \to 0$ pero las demás componentes oscilan.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = -\frac{B_0^2 a^4 \pi^2 \omega_0}{(R^2 + \omega_0^2 L^2)} \left(\sin(\omega_0 t) R - \omega_0 L \cos(\omega_0 t) \right) \sin(\omega_0 t) \, \hat{z}}$$

//

* Nota: suponemos que la espira está rotando debido con vel. angular ~~de~~ debido a algo externo. El torque que se le aplica es el producido por la corriente inducida pero no modifica ω_0 porque el mov. no es libre.

Una barra metálica de masa m se desliza sin fricción sobre dos carriles conductores paralelos separados por una distancia l. Una resistencia R está conectada a través de los carriles y un campo magnético uniforme B, apuntando hacia la página, llena toda la región.



a) Si la barra a se desplaza hacia la derecha con una velocidad v, ¿cuál es la corriente en la resistencia? ¿En qué dirección fluye?

b) ¿Cuál es la fuerza magnética sobre la barra? ¿En qué dirección apunta?

c) Si la barra comienza con velocidad v_0 en el tiempo $t = 0$, y se deja deslizar, ¿cuál es su velocidad en un tiempo t más tarde?

a) calculamos el flujo Φ, definiendo $d\vec{s}$ hacia afuera de la página.

$$\Phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_0^x \int_0^\ell -B\hat{z}\cdot\hat{z}\, dy\, dx = -B\ell x$$

luego, la f.e.m. será: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt} = +B\ell \underbrace{\dfrac{dx}{dt}}_{v}$ vel. a la que se mueve la barra.

Utilizando kirchoff de voltajes:

$\underbrace{\varepsilon}_{\text{f.em. inducida}} = \underbrace{IR}_{\text{caída de potencial}}$ $\Longrightarrow +B\ell v = IR$

$\Rightarrow \boxed{+\dfrac{B\ell}{R} v = I}$ ⟶ corriente inducida en la resistencia.

según nuestra elección de $d\vec{s}$, $d\vec{\ell}$ está en dirección antihoraria.

luego, dado que la f.e.m. es un potencial:

$-\dfrac{d\Phi}{dt} > 0 \Rightarrow \int \vec{E}\cdot d\vec{\ell} > 0$ ⟶ convención de signo que tiene relación con las leyes de kirchoff (sección 10.2 del apunte de Sapone)

$\Rightarrow \vec{E}$ va en igual dirección que $d\vec{\ell}$. (en sentido antihorario)

$\Rightarrow I$ va en sentido antihorario (se opone al cambio del flujo).

b) la fuerza que genera esa corriente será:

$d\vec{F} = d\vec{I} \times \vec{B}$

campo sobre la corriente

sobre la barra:

$$\vec{F} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} I\, dy\, \hat{y} \times -B\hat{z} = -IB\ell\hat{x}$$

Dada la corriente obtenida → $\boxed{\vec{F} = -\dfrac{(B\ell)^2 v}{R}\hat{x}}$

Tiene sentido que la fuerza apunte en $-\hat{x}$ ya que la corriente se opone al cambio en el flujo.

c) si queremos la $\vec{v}$ y tenemos la $\vec{F}$, podemos escribir la ec. de mov.

$$F = m\dot{v}_x = -\frac{B^2 l^2 v_x}{R}$$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{B^2 l^2}{Rm} \int_0^t dt$$

$$\rightarrow \ln(v)\Big|_{v_0}^{v} = -\frac{B^2 l^2}{Rm} t$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{B^2 l^2}{Rm} t$$

$$\boxed{v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{Rm} t\right)}$$

//

Pauta aux. 28

Antonia Cisternas
21.084.284-5

Ley de Faraday

· Fuerza electromotriz (f.e.m.) : Energía por unidad de carga que una fuente proporciona para mantener una d.d.p. y mover las cargas en un circuito.

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}}$$; Φ : flujo del campo magnético en un área respectiva.

$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ → La variación del flujo del campo magnético genera un campo eléctrico inducido.

$\rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Ley de Lenz

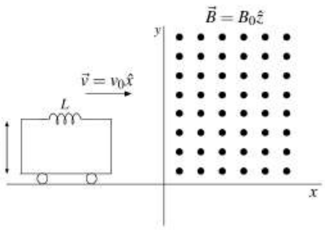
· La corriente inducida en un circuito debido a la variación temporal del flujo del campo magnético siempre es opuesta al crecimiento/decrecimiento del mismo

Inductancia propia

$$L = \frac{\Phi_{1\to 1}}{I_1} \Longrightarrow \varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{1\to 1}}{dt} = -L\frac{dI_1}{dt}$$

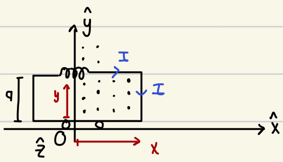
Problema 16.10

Un carrito de masa m que se desplaza con velocidad $v_0\hat{x}$, hasta llegar a una región en que existe un campo magnético uniforme en $x = 0$. El carrito es perfectamente conductor (ie. resistencia nula) y posee una autoinductancia L. Determine la velocidad del carrito en el tiempo y la corriente que circula por éste. ¿Cuál debe ser la condición sobre el largo del carrito para que éste logre entrar completamente a la zona de campo?.



A medida que el carro va entrando a la zona con campo, el flujo del campo que atraviesa dentro del circuito cambia y por lo tanto, hay una f.e.m. inducida.

Así, el flujo dentro del carrito será:



$$\Phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_0^a\int_0^x B_0\hat{z}\cdot(-)\,dx\,dy\,\hat{z}$$

normal definida por la dirección de la corriente

$$= -B_0 x a$$

La f.e.m. inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = +B_0 a\frac{dx}{dt} = +B_0 a\dot{x}$$

f.e.m. de la autoinductancia: $\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$

Por ley de Kirchoff de voltajes: $\sum V = 0 \Rightarrow \varepsilon + \varepsilon_L = 0$

$\rightarrow +B_0 a\dot{x} = L\frac{dI}{dt}$ (1)

→ Por regla de la mano derecha, la corriente inducida tendrá sentido horario. (se genera una corriente contraria al cambio en el flujo.).

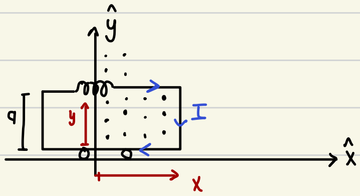
Por otro lado, al generarse una corriente en el carrito, el campo magnético externo va a generar una fuerza:

$\rightarrow d\vec{F} = I d\vec{l}\times\vec{B}$ $\quad /\int$

Notamos que la fuerza sólo se aplicará en el costado derecho del carrito que está en presencia de un campo:

$$\vec{F} = \cancel{\int_0^x I\,dx\,\hat{x}\times B_0\hat{z}} + \int_a^0 I\,dy\,\hat{y}\times B_0\hat{z} + \cancel{\int_x^0 I\,dx\,\hat{x}\times B_0\hat{z}}$$; se cancelan.

$$\vec{F} = I B_0\int_a^0 dy\,\hat{x}$$



$$\vec{F} = -IB_0 a\hat{x}$$

· Escribiendo la componente en $\hat{x}$ de la ecuación de movimiento.

$m\ddot{x} = -I B_0 a$ (2)

Así, juntando (1) y (2).

· $m\ddot{x} = -I B_0 a$ (2)

$L\dot{I} = +B_0 a \dot{x}$ (1)

Solución para la corriente I(t)

(1) $L\ddot{I} = B_0 a \ddot{x} \Rightarrow \frac{L}{B_0 a}\ddot{I} = \ddot{x}$

$\Rightarrow m\left(\frac{L}{B_0 a}\ddot{I}\right) = -I B_0 a$

$\Rightarrow \ddot{I} + \frac{B_0^2 a^2}{Lm} I = 0$ $\longrightarrow$ M.A.S. con frec. de oscilación $\omega = \frac{B_0 a}{\sqrt{mL}}$

Así, la solución será de la forma:

$I(t) = A\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$

si $I(t=0) = 0$, (se generó la corriente recién al entrar a la zona con campo).

Reemplazando,

$I(t=0) = A\cos(0) + C\sin(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\rightarrow I(t) = C\sin(\omega t)$ (3)

Solución para la posición x(t)

(1) $L\dot{I} = B_0 a \dot{x}$

$\Rightarrow \int_0^t \frac{dI}{dt}dt = \frac{B_0 a}{L}\int_0^t \frac{dx}{dt}dt$

$\Rightarrow I(t) - \cancelto{0}{I(0)} = \frac{B_0 a}{L}\left(x(t) - \cancelto{0}{x(0)}\right)$; $x(t=0) = I(t=0) = 0$

$\Rightarrow I(t) = +\frac{B_0 a}{L}x(t)$

Reemplazando $I(t)$ de (3):

$\cdot\ C\sin(\omega t) = B_0 q/_L \; x(t)$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = +\frac{CL}{B_0 q}\sin(\omega t)} \quad (4)$$

Por condiciones iniciales para la velocidad: $\dot{x}(t=0) = v_0$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{C\omega L\cos(\omega t)}{B_0 q}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t=0) = \frac{C\omega L}{B_0 q} = v_0 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{v_0 B_0 q}{\omega L} = \frac{v_0 \cancel{B_0 q}\sqrt{L}}{\cancel{B_0 q}\, L} = \frac{v_0\sqrt{Lm}}{L} = \frac{v_0 m}{\sqrt{Lm}}$$

Finalmente, de (3) y (4):

$$\boxed{I(t) = +\frac{v_0 m}{\sqrt{Lm}}\sin\left(\frac{B_0 q}{\sqrt{mL}}t\right)}$$

Ojo:

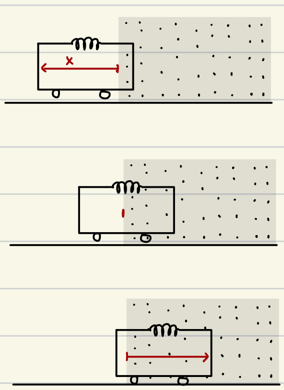
Nos piden v(t)!

$$x(t) = +\frac{v_0 m}{\sqrt{mL}}\cdot\frac{L}{B_0 q}\sin\left(\frac{B_0 q}{\sqrt{mL}}t\right) \longrightarrow v(t) = \frac{v_0 \cancel{mL}}{\cancel{\sqrt{mL}}}\frac{1}{\cancel{B_0 q}}\cdot\underbrace{\omega}_{\frac{\cancel{B_0 q}}{\cancel{\sqrt{mL}}}}\cos\left(\frac{B_0 q}{\sqrt{mL}}t\right)$$

$$\boxed{v(t) = v_0\cos\left(\frac{B_0 q}{\sqrt{mL}}t\right)}$$

//

El carrito tendrá un movimiento oscilatorio
Luego, para que logre entrar, al momento en que la oscilación esté en un máximo, queremos que entre el carrito:

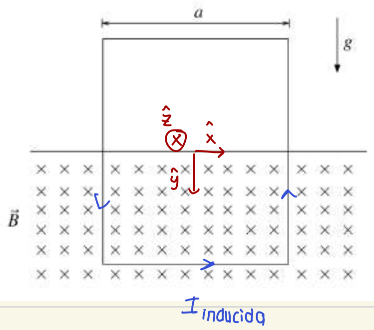


→ Queremos que en este momento, el carrito como máximo tenga el largo de la amplitud de la oscilación para que logre entrar.

Así, la condición debe ser que $x_{max} = \dfrac{v_0\, mL}{\sqrt{mL}\, B_0 q} = \dfrac{v_0\sqrt{mL}}{B_0 q}$

Problema 15.9

Una espira rectangular de resistencia R, ancho a, largo L (muy grande) y de masa m cae bajo efecto de la gravedad bajo un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular al plano de la espira y [redacted] nulo solo en la parte superior del plano. Asuma que una parte de la espira siempre está afuera de la región de campo magnético, determine la velocidad terminal y el sentido de la corriente inducida en la espira.



El flujo dentro de la espira será

superficie tiene normal en la dirección en que fluye la corriente.

$$\Phi = \int_0^y \int_{-a/2}^{a/2} B_0 \hat{z} \cdot \ominus dx\, dy\, \hat{z} = -B_0 a y$$

Y por lo tanto, la fem. será:

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = +B_0 a \dot{y}$$

por ley de Kirchoff de voltajes, si la espira tiene resistencia R,

$$\sum V = 0 \Rightarrow \varepsilon = IR$$

$$\Rightarrow \boxed{-B_0 a \dot{y} = IR} \quad (1)$$

Se puede obtener la fuerza magnética $\vec{F}$

Al igual que la pregunta anterior, se cancelan las componentes de la corriente en $\hat{y}$, así:

$$\vec{F} = \int_{-a/2}^{a/2} I\, dx\, \hat{x} \times B_0 \hat{z} = -I B_0 a \hat{y}$$

Finalmente, la velocidad terminal estará dado por el momento en que la $\vec{F}$ total sea cero:

$$\rightarrow \vec{F}_{peso} + \vec{F}_{mag.} = 0$$

$$mg\hat{y} - IB_0 a\hat{y} = 0$$

$$mg = IB_0 a$$

$$\boxed{\frac{mg}{B_0 a} = I_{terminal}}$$

Finalmente, reemplazando en (1)

$$\Rightarrow +B_0 a \dot{y}_{terminal} = \frac{mg}{B_0 a} R$$

$$\Rightarrow \dot{y}_{terminal} = +\frac{mgR}{B_0^2 a^2}$$

Por regla de la mano derecha, la corriente inducida tendrá sentido antihorario (se opone al cambio en el flujo.//.