Função de máxima verossimilhança para um modelo AR(1)

Temos

$$Y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad t = 1, \dots T \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \tau^{-1}) \text{ iid}$$

Como $\varepsilon_t \sim N(0, \tau^{-1}) \rightarrow Y_t \sim N(\phi y_{t-1}, \tau^{-1})$

* Seja θ o vetor paramétrico t.q. $\theta = (\phi_1, \tau^{-1}, y_0)$
A função de máxima verossimilhança para θ é

$$L(\theta; y_1, \dots y_T) = f(y_1, \dots, y_t; \theta)$$

Por sua vez a conjunta $f(y_1, \dots, y_t)$

$$f(y_0, \dots y_t) = f(y_t | y_{t-1}, \dots y_0) f(y_1, \dots, y_{t-1})$$
$$= f(y_t | y_{t-1} \dots y_0) f(y_{t-1} | y_{t-2} \dots y_0) f(y_{t-2} \dots y_0 \quad)$$
$$= \prod_{t=1}^{T} f(y_{t-1}, \dots, y_0 \mid f(y_0)$$

$$\rightarrow L(\underset{\sim}{\theta}; y_t, \dots, y_1) = \prod_{t=i+1}^{T} f(y_t | y_{t-1} \dots y_i; \underset{\sim}{\theta}) f(y_i \dots y_1; \theta)$$

Supondo $T = \{1, 2\}$

$$L(\underset{\sim}{\theta}; y_2, y_1) = f(y_2 | y_1) f(y_1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \tau^{2}}} \exp\left\{ \frac{-1}{2\tau^2} (y_2 - \phi_1 y_1)^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi \tau^{-2}}} \exp\left\{ (y_1 - \phi y_0)^2 \right\}$$

Generalizando $T = \{1, \dots, t\}$

$$L(\theta; X) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \tau^{-1}}} \right)^t \exp\left\{ \frac{-1}{2\tau^{-1}} \sum_{i=1}^{t} (y_t - \phi y_{t-1})^2 \right\}$$

É a nossa função de máxima verossimilhança