Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 6

Построение и программная реализация алгоритмов численного дифференцирования

Студент Криков А. В.

Группа ИУ7-43Б

Оценка (баллы) ________________

Преподаватель Градов В. М.

Москва.
2021 г.

1. Цель работы

Получение навыков построения алгоритма вычисления производных от сеточных функций .

2. Задание

Задана табличная (сеточная) функция. Имеется информация, что закономерность, представленная этой таблицей, может быть описана формулой

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x},$$

Вычислить первые разностные производные от функции и занести их в столбцы таблицы:

1 - односторонняя разностная производная ,

2 - центральная разностная производная,

3 - 2-я формула Рунге с использованием односторонней производной,

4 - введены выравнивающие переменные.

5 - вторая разностная производная.

Входные данные:
Заданная таблица

Выходные данные:
Заполненная таблица с краткими комментариями по поводу использованных формул и их точности.

3. Описание алгоритма

Используя ряд Тейлора, получаем разностные формулы:

$$y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \qquad y_n' = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

Первое выражение — правая разностная производная, второе — левая разностная производная. Данные формулы имеют самый низкий (первый) порядок точности относительно шага.

Таким же образом получим центральную формулу:

$$y_n' = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$$

Эта формула имеет второй порядок точности.

Используя преобразования в рядах Тейлора, приходим к первой формуле Рунге:

$$\psi(x)h^p = \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1}$$

Отсюда можно получить вторую формулу Рунге:

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1}$$

Отметим, что формулы Рунге справедливы не только для операции дифференцирования, но и для любых других приближенных вычислений (при условии, что погрешность формул имеет вышеприведенный вид)

Следует также описать метод вода выравнивающих переменных. При удачном подборе таких переменных исходная кривая может быть преобразована в прямую, производная от которой вычисляется точно даже по простым формулам. Пусть задана некоторая функция $y(x)$, и введены выравнивающие переменные $\xi(x)$ и $\eta=\eta(y)$. Тогда, возврат к заданным переменным осуществляется этой формулой: $y'_x=\frac{\eta'_\xi \xi'_x}{\eta'_y}$

4. Результат работы программы

```
/home/akrik/.jdks/openjdk-15.0.2/bin/java -javaagent:/snap/intellij-idea-ultimate/295/lib/idea_rt.jar=42515:/snap/int
 X          Y         Left side     Center Side     RungeDiff       AlignVarsDiff       SecondDiff
1.0   |   0.571   |    -----    |    -----    |    -----    |      0,408      |     -----
2.0   |   0.889   |    0,318    |    0,260    |    -----    |      0,247      |    -0,116
3.0   |   1.091   |    0,202    |    0,171    |    0,144    |      0,165      |    -0,062
4.0   |   1.231   |    0,140    |    0,121    |    0,109    |      0,118      |    -0,038
5.0   |   1.333   |    0,102    |    0,090    |    0,083    |      0,089      |    -0,023
6.0   |   1.412   |    0,079    |    -----    |    0,068    |      -----      |     -----

Process finished with exit code 0
```

Пояснения:

1. X

2. Y

3. В вычислениях использовалась левосторонняя формула. Точность O(h)

4. В вычислениях использовалась центральная формула. Точность $O(h^2)$

5. В вычислениях использовалась вторая формула Рунге с использованием левосторонней формулы.

6. Использовался метод выравнивающих переменных. Формула, использованная в вычислениях: $y'_x=\frac{\eta'_\xi \xi'_x}{\eta'_y}=\frac{\eta'_\xi y^2}{x^2}$

$\eta_{\xi}^{'}$ определяется с помощью правосторонней формулы: $\dfrac{\dfrac{-1}{y_{i+1}}+\dfrac{1}{y_i}}{\dfrac{-1}{x_{i+1}}+\dfrac{1}{x_i}}$

7. В вычислениях использовалась вторая разностная производная. Точность — O(h^2)

5. Исходный код программы

Main.java

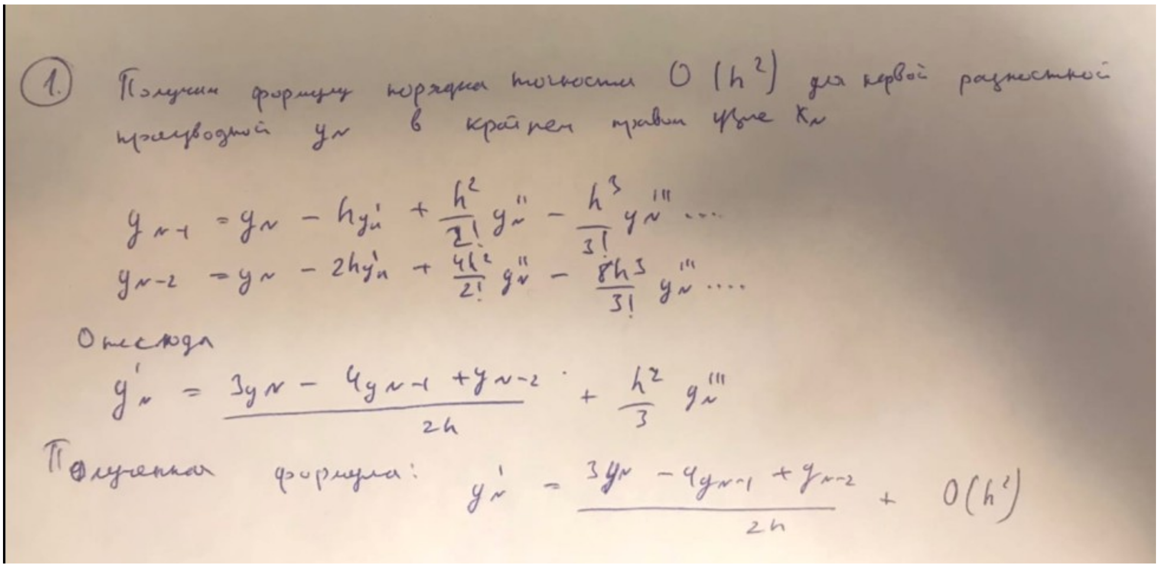
```java
public class Main {
    private static Double[] X = {1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0};
    private static Double[] Y = {0.571, 0.889, 1.091, 1.231, 1.333, 1.412};
    private static Double[][] table = {
            {0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0},
            {0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0},
            {0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0},
            {0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0},
            {0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0},
            {0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0}
    };


    private static Double leftSide(Double[] y, Double step, int i) {
        if (i > 0) {
            return (y[i] - y[i - 1]) / step;
        }
        return null;
    }

    private static Double rightSide(Double[] y, Double step, int i) {
        if (i < y.length - 1) {
            return (Y[i + 1] - Y[i]) / step;
        }
        return null;
    }

    private static Double centerSide(Double[] y, Double step, int i) {
        if (i > 0 && i < y.length - 1) {
            return (y[i + 1] - y[i - 1]) / 2 / step;
        }
        return null;
    }

    private static Double secondDiff(Double[] y, Double step, int i) {
        if (i > 0 && i < y.length - 1) {
            return (y[i - 1] - 2 * y[i] + y[i + 1]) / (step * step);
        }
        return null;
```

```java
private static Double rungeDiff(Double[] y, Double step, int i) {
    if (i >= 2) {
        Double F1 = leftSide(y, step, i);
        Double F2 = (y[i] - y[i - 2]) / (2 * step);

        return F1 + F1 - F2;
    }
    return null;
}

private static Double alignVarsDiff(Double[] y, Double[] x, int i) {
    if (i <= y.length - 2) {
        Double etaKsiDiff = (1 / y[i + 1] - 1 / y[i]) / (1 / x[i + 1] - 1 / x[i]);
        Double Y = y[i];
        Double X = x[i];
        return etaKsiDiff * Y * Y / X / X;
    }
    return null;
}
```

```java
    public static void main(String[] args) {
        System.out.println(" X          Y        Left side    Center Side    RungeDiff      AlignVarsDiff      SecondDiff");

        for (int i = 0; i < X.length; i++) {
            System.out.print(X[i] + "   |    " + Y[i] + "   |   ");
            Double res = leftSide(Y, step: X[1] - X[0], i);
            if (res != null) {
                System.out.printf(" %.3f    |  ", res);
            } else {
                System.out.printf(" -----    |  ");
            }
            res = centerSide(Y, step: X[1] - X[0], i);
            if (res != null) {
                System.out.printf("  %.3f     | ", res);
            } else {
                System.out.printf("  -----     | ");
            }
            res = rungeDiff(Y, step: X[1] - X[0], i);
            if (res != null) {
                System.out.printf("   %.3f     | ", res);
            } else {
                System.out.printf("   -----     | ");
            }
            res = alignVarsDiff(Y, X, i);
            if (res != null) {
                System.out.printf("    %.3f       | ", res);
            } else {
                System.out.printf("    -----       | ");
            }
            res = secondDiff(Y, step: X[1] - X[0], i);
            if (res != null) {
                System.out.printf("   %.3f      ", res);
            } else {
                System.out.printf("    -----      ");
            }
            System.out.println();
        }
    }
}
```

6. Ответы на контрольные вопросы

1. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для первой разностной производной y'_N в крайнем правом узле x_N.



1. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для первой разностной производной y_N в крайнем правом узле x_N

$$y_{N-1} = y_N - h y'_N + \frac{h^2}{2!} y''_N - \frac{h^3}{3!} y'''_N \dots$$

$$y_{N-2} = y_N - 2h y'_N + \frac{4h^2}{2!} y''_N - \frac{8h^3}{3!} y'''_N \dots$$

Отсюда

$$y'_N = \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + \frac{h^2}{3} y'''_N$$

Полученная формула: $y'_N = \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + O(h^2)$

2. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для второй разностной производной y''_0 в крайнем левом узле x_0.

② Используем разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{h}{1!} y_0' - \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \frac{h^4}{4!} y_0^{IV} + \ldots\ldots & (1) \\ y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!} y_0' - \frac{(2h)^2}{2!} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0''' + \frac{16h^4}{4!} y_0^{IV} + \ldots\ldots & (2) \\ y_3 = y_0 + \frac{3h}{1!} y_0' - \frac{(3h)^2}{2!} y_0'' + \frac{(3h)^3}{3!} y_0''' + \frac{81h^4}{4!} y_0^{IV} + \ldots\ldots & (3) \end{cases}$$

I (2) − 2·(1):

$$y_2 - 2y_1 = -y_0 + \frac{2h^2}{2!} y_0'' + \frac{6h^3}{3!} y_0''' + \frac{14h^4}{4!} y_0^{IV} + \ldots$$

II (3) − 3·(1):

$$y_3 - 3y_1 = -2y_0 + \frac{6h^2}{2!} y_0'' + \frac{24h^3}{3!} y_0''' + \frac{78h^4}{4!} y_0^{IV} + \ldots$$

III 4·(I) − (II)

$$4y_2 - 8y_1 - y_3 + 3y_1 = -2y_0 + \frac{2h^2}{2!} y_0'' - \frac{22h^4}{4!} y_0^{IV} + \ldots\ldots$$

$$-5y_1 + 4y_2 - y_3 = -2y_0 + h^2 y_0'' - \frac{11}{12} h^4 y_0^{IV} + \ldots\ldots$$

$$y_0'' = \frac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2} + \frac{11h^2}{12} y_0^{IV}$$

$$y_0'' = \frac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2} + O(h^2)$$

3. Используя 2-ую формулу Рунге, дать вывод выражения (9) из Лекции №7 для первой производной y'_0 в левом крайнем узле

$$\Omega = \varphi(h) + \frac{\varphi(h) - \varphi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1}) =$$

$$= \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \frac{\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} - \dfrac{y_{n+2} - y_n}{2h}}{2^1 - 1} + O(h^2) =$$

$$= \frac{-3y_n + 4y_{n+1} - y_{n+2}}{2h} + O(h^2)$$

Для левого узла: $n = 0,\ n+1 = 1,\ n+2 = 2 \Rightarrow y_0' = \dfrac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2)$

4. Любым способом из Лекций №7, 8 получить формулу порядка точности $O(h^3)$ для первой разностной производной y'_0 в крайнем левом узле x_0.

4. Используем разложение в ряд Тейлора

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} \ldots & (1) \\ y_2 = y_0 + 2hy_0' + \frac{4h^2}{2!}y_0'' + \frac{8h^3}{3!}y_0''' + \frac{16h^4}{4!}y_0^{IV} + \ldots & (2) \\ y_3 = y_0 + 3hy_0' + \frac{9h^2}{2!}y_0'' + \frac{27h^3}{3!}y_0''' + \frac{81h^4}{4!}y_0^{IV} + \ldots & (3) \end{cases}$$

I. (2) − 4·(1):

$$y_2 - 4y_1 = -3y_0 - 2hy_0' + \frac{4h^3}{3!}y_0''' + \frac{12h^4}{4!}y_0^{IV} + \ldots$$

II. (3) − 9(1):

$$y_3 - 9y_1 = -8y_0 - 6hy_0' + \frac{18h^3}{3!}y_0''' + \frac{72h^4}{4!}y_0^{IV} + \ldots$$

III 2(II) − 9(I):

$$2y_3 - 18y_1 - 9y_2 + 36y_1 = 11y_0 + 6hy_0' + \frac{36h^4}{4!}y_0^{IV} + \ldots$$

$$18y_1 - 9y_2 + 2y_3 = 11y_0 + 6hy_0' + \frac{3h^4}{2}y_0^{IV} + \ldots$$

$$y_0' = \frac{-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3}{6h} - \frac{1}{4}h^3 y_0^{IV}$$

$$y_0' = \frac{-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3}{6h} + O(h^3)$$