Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по дисциплине «Математическая статистика»

Тема Интервальные оценки

Студент Криков А.В.

Группа ИУ7-63Б

Оценка (баллы) ____________

Преподаватель Власов П. А.

Москва — 2022 г.

Задание

Цель работы

Построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Постановка задачи

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:
   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Теоретические сведения

Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с уровнем доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с уровнем доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания;
$S(\vec{X}) = \sqrt{S^2(\vec{X})}$ – квадратный корень из точечной оценки дисперсии;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{St(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}} \tag{3}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}} \tag{4}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{\chi^2(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$ с $n-1$ степенями свободы.

Код программы

```
% Вариант 11

function lab()
    clc
    X =[
            -2.54,-0.79,-4.27,-3.09,-3.82,-0.61,...
            -0.64,-1.24,-1.73,-2.91,-1.48,-1.28,...
            -0.37,-1.88,-2.19,-1.61,-1.52,-3.17,...
            -1.36,-3.08,-3.11,-3.07,-1.57,-1.51,...
            -2.37,-0.58,-3.05,-2.93,-1.01,-1.40,...
            -2.06,-3.05,-1.84,-1.24,-1.89,-2.06,...
            -1.59,-2.83,-1.07,-2.96,-3.17,-3.08,...
            -0.49,-3.11,-3.14,-2.30,-3.99,-1.56,...
            -1.28,-3.46,-2.63,-0.82,-2.18,-0.89,...
            -3.08,-1.13,-1.62,-1.06,-2.98,-1.55,...
            -1.49,-1.65,-1.45,-2.29,-0.85,-1.44,...
            -2.87,-2.40,-2.13,-3.52,-1.42,-3.64,...
            -3.47,-2.05,-2.39,-2.07,-0.80,-1.52,...
            -3.92,-2.22,-0.78,-2.60,-1.78,-1.61,...
            -1.65,-2.06,-3.33,-3.41,-1.97,-1.74,...
            -2.04,0.01,-1.37,-3.15,-2.35,-3.66,...
            -1.79,-2.56,-1.87,-1.06,-0.64,-2.49,...
            -1.85,-1.40,-0.86,-0.17,-0.62,-2.85,...
            -2.12,-1.17,-2.48,-1.65,-3.74,-2.87,...
            -3.15,-1.89,-1.34,-4.33,-0.96,-1.79];

    % Уровень доверия
    gamma = 0.9;

    % Объем выборки
    n = length(X);

    % Оценка мат. ожидания
    mu = sum(X) / n;

    % Исправленная выборочная дисперсия
    S2 = sum((X - mu).^ 2) / (n - 1);

    % Нижняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
    muLow = findMuLow(n, mu, S2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
    muHigh = findMuHigh(n, mu, S2, gamma);

    % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
    S2Low = findS2Low(n, S2, gamma);
```

```
    % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
    S2High = findS2High(n, S2, gamma);

    % Вывод полученных ранее значений
    fprintf('mu = %.4f\n', mu);
    fprintf('S2 = %.4f\n', S2);
    fprintf('muLow = %.4f\n', muLow);
    fprintf('muHigh = %.4f\n', muHigh);
    fprintf('S2Low = %.4f\n', S2Low);
    fprintf('S2High = %.4f\n', S2High);

    % Создание массивов точечных оценок
    muArray = zeros(1, n);
    S2Array = zeros(1, n);
    % Создание массивов границ доверительных интервалов
    muLowArray = zeros(1, n);
    muHighArray = zeros(1, n);
    S2LowArray = zeros(1, n);
    S2HighArray = zeros(1, n);

    for i = 1 : n
        mu = sum(X(1:i)) / i;
        S2 = sum((X(1:i) - mu).^ 2) / (i - 1);

        muArray(i) = mu;
        S2Array(i) = S2;

        muLowArray(i) = findMuLow(i, mu, S2, gamma);
        muHighArray(i) = findMuHigh(i, mu, S2, gamma);
        S2LowArray(i) = findS2Low(i, S2, gamma);
        S2HighArray(i) = findS2High(i, S2, gamma);
    end

    % Построение графиков
    plot(1 : n, [(zeros(1, n) + mu)', muArray', muLowArray', muHighArray']);
    xlabel('n');
    ylabel('y');
    legend('$\hat \mu(\vec x_N)$', '$\hat \mu(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\mu}(\vec x_n)$', '$\overline{\mu}(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
    figure;
    plot(1 : n, [(zeros(1, n) + S2)', S2Array', S2LowArray', S2HighArray']);
    xlabel('n');
    ylabel('z');
    legend('$\hat S^2(\vec x_N)$', '$\hat S^2(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\sigma}^2(\vec x_n)$', '$\overline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
end

% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для матожидания
function muLow = findMuLow(n, mu, S2, gamma)
    muLow = mu - sqrt(S2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для матожидания
function muHigh = findMuHigh(n, mu, S2, gamma)
```

```
    muHigh = mu + sqrt(S2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для дисперсии
function S2Low = findS2Low(n, S2, gamma)
    S2Low = ((n - 1) * S2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
end

% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для дисперсии
function S2High = findS2High(n, S2, gamma)
    S2High = ((n - 1) * S2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end
```

Результаты расчётов

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = -2,0585$$

$$S^2(\vec{x}_n) = 0,9440$$

$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = -2,2055$$

$$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = -1,9115$$

$$\underline{S^2}(\vec{x}_n) = 0,7723$$

$$\overline{S^2}(\vec{x}_n) = 1,1848$$

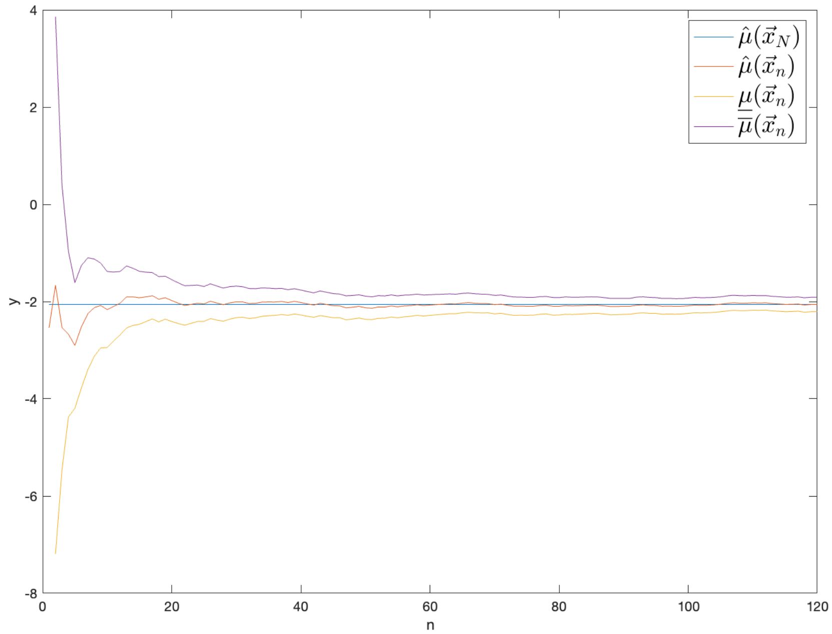

Рис. 1: Прямая $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графики функций $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

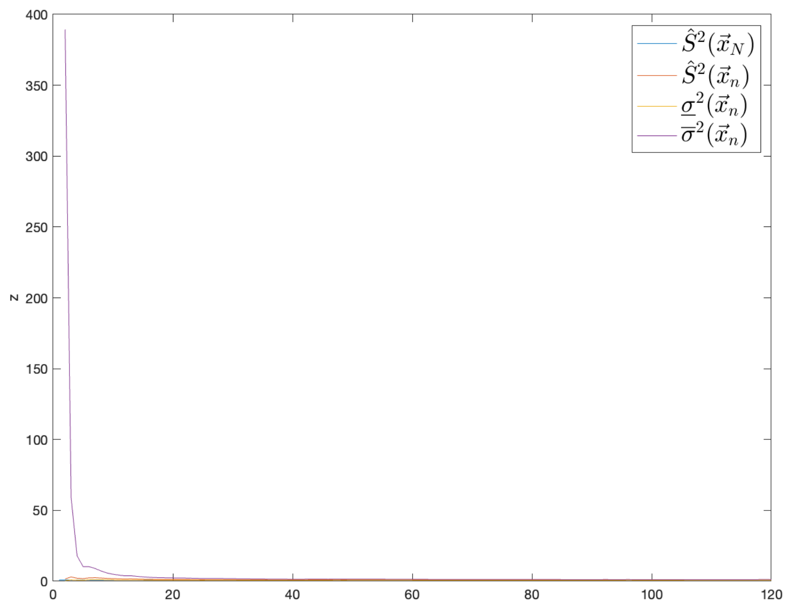

Рис. 2: Прямая $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

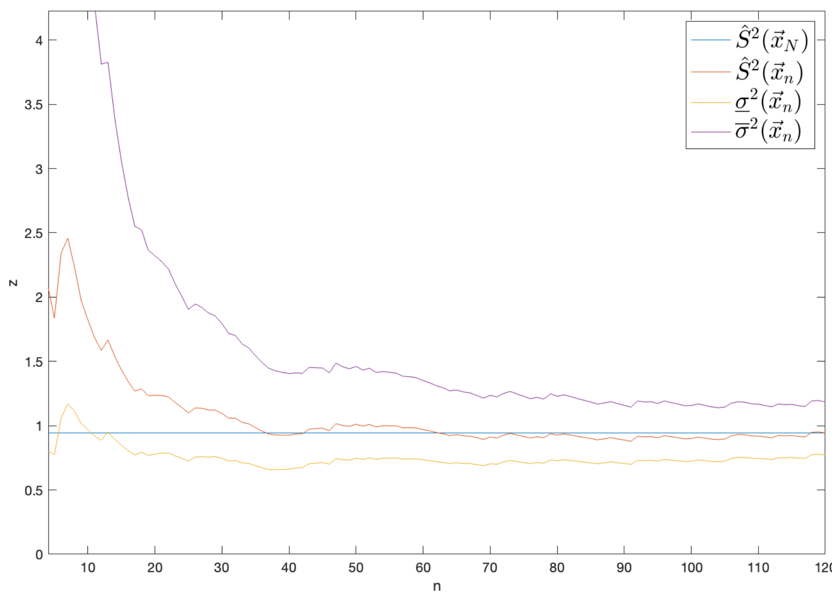

Рис. 3: Прямая $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N (приближенный)