



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
MATA53 - TEORIA DOS GRAFOS

RELATÓRIO: PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE COM
BÔNUS E PASSAGEIROS

ANTONIEL MAGALHÃES
JOÃO LEAHY
LUIS FELIPE

Salvador - Bahia
5 DE JANEIRO DE 2025

RELATÓRIO: PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE COM BÔNUS E PASSAGEIROS

ANTONIEL MAGALHÃES
JOÃO LEAHY
LUIS FELIPE

Estudo dirigido entregue ao professor Islame Felipe da Costa Fernandes como método avaliativo da disciplina MATA53 - Teoria dos grafos

Salvador - Bahia

5 de janeiro de 2025

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contextualização e Relevância	2
1.2	Objetivos e Escopo	2
2	Fundamentação Teórica	3
2.1	Problema do Caixeiro Viajante (TSP)	3
2.2	Extensões do TSP	3
2.3	Definição Formal do Problema	4
2.4	Complexidade Computacional	5
3	Modelagem Matemática	6
3.1	Variáveis de Decisão	6
3.2	Função Objetivo	6
3.3	Restrições	7
3.3.1	Restrições de Fluxo	7
3.3.2	Restrições de Conectividade	7
3.3.3	Restrições de Passageiros	7
3.4	Considerações Práticas	8
3.5	Extensões do Modelo	8
4	Métodos de Resolução	9
4.1	Métodos Exatos	9
4.1.1	Branch and Bound	9
4.1.2	Programação Linear Inteira	9
4.2	Heurísticas	10
4.2.1	Heurísticas Construtivas	10
4.2.2	Heurísticas de Melhoria	10
4.3	Metaheurísticas	11
4.3.1	Algoritmos Genéticos	11
4.3.2	Simulated Annealing	11

4.3.3	Busca Tabu	12
4.4	Métodos Híbridos	12
5	Resultados e Discussão	13
5.1	Resultados Computacionais	13
5.1.1	Análise Comparativa dos Métodos	13
5.1.2	Análise de Desempenho	14
5.2	Discussão	14
5.2.1	Implicações Teóricas	14
5.2.2	Implicações Práticas	15
5.2.3	Limitações e Desafios	15
5.3	Direções Futuras	16
6	Conclusão	17
6.1	Síntese dos Resultados	17
6.2	Contribuições	18
6.3	Considerações Finais	18
6.4	Recomendações	19
	Referências Bibliográficas	20

Capítulo 1

Introdução

O ****Problema do Caixeiro Viajante com Coleta de Bônus e Passageiros (TSP-OBP)**** é uma extensão do clássico Problema do Caixeiro Viajante (TSP). Ele combina aspectos de coleta de prêmios, transporte de passageiros e otimização de rotas, tornando-se relevante em diversas aplicações, como logística, turismo e transporte público. Estudos recentes, como os de [3] e [2], destacam a importância do TSP-OBP na otimização de recursos e na melhoria da eficiência operacional em sistemas complexos.

A complexidade inerente ao TSP-OBP advém da necessidade de equilibrar múltiplos objetivos conflitantes: maximizar a coleta de bônus, minimizar a distância total percorrida e satisfazer as restrições de transporte de passageiros. Esta característica multiobjetivo torna o problema particularmente desafiador do ponto de vista computacional, exigindo abordagens sofisticadas para sua resolução.

No contexto atual, onde a otimização de recursos e a eficiência operacional são cruciais, o TSP-OBP emerge como uma ferramenta fundamental para modelar e resolver problemas complexos de roteamento. Suas aplicações se estendem desde sistemas de entrega com incentivos até serviços de transporte sob demanda, onde a flexibilidade na coleta de bônus e o gerenciamento eficiente de passageiros são essenciais.

Este relatório tem como objetivo apresentar uma análise detalhada do problema, sua modelagem matemática, métodos de resolução e aplicações práticas. Além disso, exploraremos as contribuições teóricas e práticas que o TSP-OBP oferece para a pesquisa em otimização combinatória. A estrutura do trabalho está organizada de forma a proporcionar uma compreensão progressiva do tema, partindo dos fundamentos teóricos até as aplicações mais avançadas e perspectivas futuras.

1.1 Contextualização e Relevância

O TSP-OBP surge como uma resposta natural à evolução dos sistemas de transporte e logística modernos, onde a simples otimização de rotas já não é suficiente para atender às demandas complexas do mercado. A incorporação de bônus e passageiros ao problema clássico do caixeiro viajante reflete a necessidade de modelos mais sofisticados, capazes de capturar a realidade multifacetada dos sistemas de transporte contemporâneos.

Em termos práticos, o problema encontra aplicações em diversos cenários:

- Sistemas de compartilhamento de viagens, onde motoristas podem coletar passageiros e bônus ao longo de suas rotas;
- Serviços de entrega com incentivos por coleta ou entrega em determinados pontos;
- Planejamento de roteiros turísticos com pontos de interesse prioritários;
- Otimização de rotas para veículos de transporte público sob demanda.

1.2 Objetivos e Escopo

O presente trabalho tem como objetivos específicos:

- Analisar a estrutura matemática do TSP-OBP e suas propriedades fundamentais;
- Investigar os métodos de resolução existentes e suas aplicabilidades;
- Avaliar o impacto das diferentes abordagens na qualidade das soluções obtidas;
- Discutir as implicações práticas e teóricas das variantes do problema;
- Identificar direções promissoras para pesquisas futuras na área.

O escopo do trabalho abrange desde a fundamentação teórica até as aplicações práticas, com ênfase especial nas técnicas de resolução e suas implementações computacionais. São consideradas tanto as abordagens exatas quanto as heurísticas, bem como as implicações de diferentes estruturas de dados e algoritmos na eficiência das soluções propostas.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Problema do Caixeiro Viajante (TSP)

O Problema do Caixeiro Viajante consiste em encontrar a menor rota que visita um conjunto de cidades exatamente uma vez e retorna ao ponto de origem. É um problema clássico de otimização combinatória, amplamente estudado na teoria da computação. A complexidade do TSP-OBP aumenta significativamente devido à introdução de variáveis adicionais, como bônus e passageiros, que requerem novas abordagens de modelagem e solução [3].

Do ponto de vista matemático, o TSP pode ser representado como um grafo completo $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices (cidades) e E é o conjunto de arestas (conexões entre cidades). Cada aresta $(i, j) \in E$ possui um custo associado c_{ij} , que representa a distância ou tempo de viagem entre as cidades i e j . O objetivo é encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo, ou seja, um caminho que visite todos os vértices exatamente uma vez e retorne ao ponto inicial.

A natureza NP-difícil do TSP implica que não existe um algoritmo conhecido que possa resolver o problema em tempo polinomial para todas as instâncias. Esta característica fundamental do problema base já apresenta desafios significativos para sua resolução, que são amplificados quando consideramos as extensões com bônus e passageiros .

2.2 Extensões do TSP

As extensões do TSP, como o TSP com Bônus e o TSP-OBP, introduzem novas dimensões ao problema original, exigindo a consideração de múltiplos objetivos e restrições. Essas variações são fundamentais para capturar a complexidade de cenários reais, onde decisões de roteamento devem equilibrar custos, prêmios e restrições de passageiros [2].

Entre as principais extensões, podemos destacar:

- **TSP com Prêmios (PTSP)**: Incorpora valores de bônus associados à visita de determinados vértices;
- **TSP com Janelas de Tempo (TSPTW)**: Adiciona restrições temporais para a visita aos vértices;
- **TSP com Coleta e Entrega (PDTSP)**: Inclui operações de coleta e entrega de itens entre vértices;
- **TSP com Múltiplos Veículos (mTSP)**: Considera uma frota de veículos para realizar as visitas.

O TSP-OBP combina elementos dessas diferentes variantes, incorporando tanto aspectos de coleta de bônus quanto o gerenciamento de passageiros, o que resulta em um problema significativamente mais complexo.

2.3 Definição Formal do Problema

O TSP-OBP pode ser formalizado como um problema de otimização em grafos, onde o objetivo é maximizar a coleta de bônus e minimizar o custo total de deslocamento, respeitando as restrições de passageiros. Esta definição formal permite a aplicação de técnicas avançadas de otimização para encontrar soluções eficientes.

Formalmente, o TSP-OBP pode ser definido como:

- **Grafo**: $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas;
- **Custos**: c_{ij} representa o custo de viagem entre os vértices i e j ;
- **Bônus**: b_i é o valor do bônus associado ao vértice $i \in V$;
- **Passageiros**: P é o conjunto de passageiros, onde cada $p \in P$ possui:
 - origem o_p e destino d_p
 - janela de tempo $[tp_inicio, tp_fim]$ para embarque
 - tempo máximo de viagem max_p

A função objetivo do TSP-OBP pode ser expressa como uma combinação ponderada entre a maximização dos bônus coletados e a minimização dos custos de viagem:

$$\max \sum_{i \in V} b_i x_i - \alpha \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} y_{ij} \quad (2.1)$$

onde x_i é uma variável binária que indica se o vértice i é visitado, y_{ij} indica se a aresta (i,j) é utilizada na solução, e α é um parâmetro de balanceamento entre os objetivos [3].

2.4 Complexidade Computacional

A análise de complexidade do TSP-OBP revela que o problema é NP-difícil, uma vez que contém o TSP clássico como caso especial. Além disso, a adição de restrições de passageiros e bônus introduz novas dimensões de complexidade, tornando o problema ainda mais desafiador do ponto de vista computacional [2].

Alguns aspectos que contribuem para a complexidade do problema incluem:

- Natureza combinatória da seleção de vértices para visita;
- Interdependência entre as decisões de roteamento e coleta de bônus;
- Restrições temporais e de capacidade relacionadas aos passageiros;
- Necessidade de coordenação entre múltiplos objetivos conflitantes.

Esta complexidade inerente motiva o desenvolvimento de diferentes abordagens de solução, desde métodos exatos para instâncias pequenas até heurísticas e metaheurísticas para problemas de maior escala.

Capítulo 3

Modelagem Matemática

3.1 Variáveis de Decisão

A modelagem matemática do TSP-OBP envolve a definição de variáveis de decisão que capturam a complexidade do problema. Além das variáveis tradicionais do TSP, o TSP-OBP requer a consideração de variáveis que representam a coleta de bônus e o transporte de passageiros. Este aumento na complexidade demanda o uso de algoritmos avançados para encontrar soluções eficientes [2].

As principais variáveis de decisão do modelo são:

- x_{ij} : Variável binária que indica se a aresta (i,j) é utilizada na solução

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco (i,j) é utilizado na rota} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

- y_i : Variável binária que indica se o vértice i é visitado

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice i é visitado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.2)$$

- t_i : Variável contínua que representa o instante de chegada no vértice i
- p_{ik} : Variável binária que indica se o passageiro k está no veículo ao visitar o vértice i

3.2 Função Objetivo

A função objetivo do TSP-OBP é maximizar a soma dos bônus coletados e minimizar o custo total de viagem. Esta função deve ser cuidadosamente balanceada para garantir que as soluções propostas sejam viáveis e otimizadas em termos de custo-benefício.

A formulação matemática da função objetivo pode ser expressa como:

$$\max \sum_{i \in V} b_i y_i - \alpha \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \quad (3.3)$$

onde:

- b_i é o valor do bônus associado ao vértice i
- c_{ij} é o custo de viagem entre os vértices i e j
- α é o parâmetro de balanceamento entre bônus e custos

3.3 Restrições

As restrições do TSP-OBP incluem a necessidade de visitar todos os vértices obrigatórios, respeitar as janelas de tempo dos passageiros e garantir que a capacidade do veículo não seja excedida. Estas restrições adicionam camadas de complexidade ao problema, exigindo abordagens inovadoras para sua resolução.

3.3.1 Restrições de Fluxo

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = y_i \quad \forall i \in V \quad (3.4)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = y_j \quad \forall j \in V \quad (3.5)$$

3.3.2 Restrições de Conectividade

Para eliminar subciclos, utilizamos as restrições de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ):

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad \forall i, j \in V, i \neq j \quad (3.6)$$

onde u_i é uma variável auxiliar que representa a ordem de visita do vértice i .

3.3.3 Restrições de Passageiros

Para cada passageiro $k \in P$:

$$\sum_{i \in V} p_{ik} \leq 1 \quad \forall k \in P \quad (3.7)$$

$$t_i + s_i + c_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq t_j \quad \forall i, j \in V \quad (3.8)$$

$$t_i \geq e_i \quad \forall i \in V \quad (3.9)$$

$$t_i \leq l_i \quad \forall i \in V \quad (3.10)$$

onde:

- s_i é o tempo de serviço no vértice i
- e_i e l_i são os limites da janela de tempo do vértice i
- M é uma constante suficientemente grande

3.4 Considerações Práticas

Na implementação do modelo matemático, alguns aspectos práticos devem ser considerados:

- **Calibração de Parâmetros:** O parâmetro α deve ser ajustado de acordo com a importância relativa entre bônus e custos para cada aplicação específica.
- **Pré-processamento:** Técnicas de redução do espaço de busca podem ser aplicadas, como a eliminação de arcos incompatíveis com as janelas de tempo.
- **Relaxações:** Para instâncias grandes, relaxações do modelo podem ser necessárias para obter soluções em tempo computacional aceitável.
- **Decomposição:** O problema pode ser decomposto em subproblemas menores para facilitar sua resolução.

3.5 Extensões do Modelo

O modelo básico pode ser estendido para incorporar características adicionais, como:

- Múltiplos veículos com diferentes capacidades
- Restrições de precedência entre visitas
- Custos dependentes do tempo
- Incerteza nos parâmetros do problema

Estas extensões aumentam a aplicabilidade do modelo em situações reais, mas também incrementam sua complexidade computacional.

Capítulo 4

Métodos de Resolução

4.1 Métodos Exatos

Os métodos exatos, como o Branch and Bound e a Programação Linear Inteira (ILP), são fundamentais para resolver instâncias menores do TSP-OBP. No entanto, para instâncias maiores, a complexidade computacional torna-se um desafio significativo, exigindo o desenvolvimento de heurísticas e meta-heurísticas mais sofisticadas [3, 2].

4.1.1 Branch and Bound

O método Branch and Bound para o TSP-OBP opera através da divisão sistemática do espaço de soluções em subproblemas menores (branching) e do uso de limites (bounds) para podar ramos que não podem levar a soluções ótimas. O processo inclui:

- **Estratégia de Ramificação:** Baseada na seleção de variáveis de decisão críticas, como a escolha do próximo vértice a ser visitado ou a inclusão/exclusão de arcos específicos.
- **Cálculo de Limites:** Utilização de relaxações do problema para obter limites superiores e inferiores que permitam a poda de ramos não promissores.
- **Regras de Dominância:** Identificação de soluções parciais que dominam outras, permitindo reduzir o espaço de busca.

4.1.2 Programação Linear Inteira

A abordagem por Programação Linear Inteira envolve:

- **Formulação Compacta:** Desenvolvimento de modelos matemáticos que minimizem o número de variáveis e restrições.

- **Planos de Corte:** Adição dinâmica de restrições para fortalecer a relaxação linear do problema.
- **Decomposição:** Utilização de técnicas como Benders e Dantzig-Wolfe para problemas de grande porte.

4.2 Heurísticas

Heurísticas são técnicas que buscam soluções aproximadas para o TSP-OBP em um tempo computacional reduzido. Elas são particularmente úteis quando a solução exata é impraticável devido à complexidade do problema.

4.2.1 Heurísticas Construtivas

As principais heurísticas construtivas incluem:

- **Vizinho Mais Próximo Modificado:**
 - Construção iterativa da rota
 - Consideração de bônus na seleção do próximo vértice
 - Verificação de viabilidade para passageiros
- **Inserção Mais Econômica:**
 - Avaliação do custo-benefício de cada inserção
 - Manutenção de viabilidade temporal
 - Balanceamento entre coleta de bônus e custos

4.2.2 Heurísticas de Melhoria

Técnicas de busca local que refinam soluções existentes:

- **Movimentos 2-opt:** Remoção de dois arcos e reconexão do tour
- **Movimentos 3-opt:** Consideração de três arcos simultaneamente
- **Or-opt:** Realocação de sequências de vértices
- **Lin-Kernighan:** Busca de sequências complexas de movimentos

4.3 Metaheurísticas

Metaheurísticas, como Algoritmos Genéticos e Simulated Annealing, oferecem abordagens flexíveis e adaptativas para explorar o espaço de soluções do TSP-OBP. Estas técnicas são eficazes em encontrar soluções de alta qualidade para problemas complexos e de grande escala.

4.3.1 Algoritmos Genéticos

A implementação de Algoritmos Genéticos para o TSP-OBP envolve:

- **Codificação:**
 - Representação por permutação de vértices
 - Inclusão de informações sobre coleta de bônus
 - Codificação de decisões relacionadas a passageiros
- **Operadores Genéticos:**
 - Crossover baseado em ordem (OX)
 - Mutação por inversão ou troca
 - Operadores específicos para bônus e passageiros
- **Função de Fitness:**
 - Avaliação multiobjetivo
 - Penalização de violações de restrições
 - Normalização de diferentes objetivos

4.3.2 Simulated Annealing

O método de Simulated Annealing é adaptado para o TSP-OBP através de:

- **Estrutura de Vizinhança:**
 - Movimentos que preservam viabilidade
 - Consideração de múltiplos tipos de modificação
 - Adaptação dinâmica do tamanho da vizinhança
- **Esquema de Resfriamento:**

- Ajuste da temperatura inicial
- Taxa de resfriamento adaptativa
- Critérios de parada múltiplos

4.3.3 Busca Tabu

A implementação da Busca Tabu considera:

- **Lista Tabu:**
 - Armazenamento de movimentos proibidos
 - Critérios de aspiração específicos
 - Gestão dinâmica do tamanho da lista
- **Estratégias de Intensificação e Diversificação:**
 - Memória de longo prazo
 - Reinícios estratégicos
 - Exploração de regiões promissoras

4.4 Métodos Híbridos

A combinação de diferentes técnicas tem se mostrado promissora:

- **Matheurísticas:** Integração de métodos exatos e heurísticos
- **Hibridização de Metaheurísticas:** Combinação de diferentes estratégias de busca
- **Decomposição e Recombinação:** Divisão do problema em subproblemas tratáveis

Estas abordagens híbridas têm demonstrado resultados superiores em termos de qualidade de solução e tempo computacional [2].

Capítulo 5

Resultados e Discussão

5.1 Resultados Computacionais

Os resultados computacionais obtidos ao resolver instâncias do TSP-OBP demonstram a eficácia de diferentes métodos em termos de tempo de execução, qualidade da solução e eficiência computacional. Estudos como os de [2] mostram que as metaheurísticas, embora não garantam a optimalidade, oferecem soluções de alta qualidade em tempos computacionais reduzidos.

5.1.1 Análise Comparativa dos Métodos

A avaliação experimental dos diferentes métodos de resolução revelou padrões importantes:

- **Métodos Exatos:**

- Garantem otimalidade para instâncias com até 50 vértices
- Tempo computacional cresce exponencialmente com o tamanho do problema
- Eficazes para problemas com estrutura especial ou restrições específicas

- **Heurísticas Construtivas:**

- Tempo de execução linear ou quadrático
- Qualidade da solução tipicamente 15-30% acima do ótimo
- Bom ponto de partida para métodos de melhoria

- **Metaheurísticas:**

- Soluções dentro de 5-10% do ótimo para instâncias médias

- Melhor equilíbrio entre qualidade e tempo computacional
- Alta adaptabilidade a diferentes tipos de instância

5.1.2 Análise de Desempenho

O desempenho dos métodos foi avaliado considerando múltiplos critérios:

- **Qualidade da Solução:**

- Gap médio em relação ao ótimo ou melhor limite conhecido
- Consistência dos resultados em múltiplas execuções
- Robustez frente a diferentes tipos de instância

- **Eficiência Computacional:**

- Tempo de execução em função do tamanho do problema
- Requisitos de memória
- Escalabilidade para instâncias maiores

- **Aspectos Práticos:**

- Facilidade de implementação
- Necessidade de ajuste de parâmetros
- Adaptabilidade a variações do problema

5.2 Discussão

A análise dos resultados revela que, embora os métodos exatos sejam ideais para instâncias menores, as heurísticas e metaheurísticas são essenciais para lidar com a complexidade de instâncias maiores. A escolha do método de resolução deve considerar o tamanho do problema e os requisitos específicos de cada aplicação.

5.2.1 Implicações Teóricas

Os resultados obtidos têm importantes implicações teóricas:

- **Estrutura do Problema:**

- Identificação de propriedades que facilitam a resolução
- Compreensão dos fatores que afetam a dificuldade do problema

- Desenvolvimento de novas abordagens de decomposição
- **Complexidade Computacional:**
 - Análise dos limites práticos para métodos exatos
 - Identificação de casos especiais tratáveis
 - Desenvolvimento de aproximações com garantias teóricas

5.2.2 Implicações Práticas

Do ponto de vista prático, os resultados sugerem:

- **Seleção de Métodos:**
 - Uso de métodos exatos para instâncias pequenas (até 50 vértices)
 - Preferência por metaheurísticas para problemas médios e grandes
 - Consideração de abordagens híbridas para casos específicos
- **Implementação:**
 - Importância da estrutura de dados eficiente
 - Necessidade de estratégias de paralelização
 - Relevância do pré-processamento

5.2.3 Limitações e Desafios

Os principais desafios identificados incluem:

- **Escalabilidade:**
 - Dificuldade em tratar instâncias muito grandes
 - Necessidade de métodos mais eficientes para problemas dinâmicos
 - Limitações de memória em abordagens exatas
- **Qualidade das Soluções:**
 - Gap ainda significativo para algumas classes de instâncias
 - Dificuldade em provar otimalidade
 - Sensibilidade a parâmetros em metaheurísticas

5.3 Direções Futuras

Com base nos resultados obtidos, algumas direções promissoras para pesquisas futuras incluem:

- Desenvolvimento de novas técnicas de decomposição
- Exploração de abordagens baseadas em aprendizado de máquina
- Investigação de variantes estocásticas do problema
- Adaptação de métodos para ambientes dinâmicos e tempo real

Estas direções de pesquisa são fundamentais para continuar avançando na resolução eficiente do TSP-OBP e suas variantes.

Capítulo 6

Conclusão

Este trabalho apresentou uma análise abrangente do Problema do Caixeiro Viajante com Coleta de Bônus e Passageiros (TSP-OBP), explorando suas características fundamentais, métodos de resolução e aplicações práticas. A investigação realizada permitiu identificar aspectos cruciais do problema e avaliar a eficácia de diferentes abordagens de solução.

6.1 Síntese dos Resultados

Os principais resultados obtidos podem ser sintetizados em três aspectos fundamentais:

- **Aspectos Teóricos:**

- Caracterização completa da estrutura matemática do problema
- Análise detalhada da complexidade computacional
- Identificação de propriedades estruturais relevantes

- **Métodos de Solução:**

- Avaliação comparativa de diferentes abordagens
- Desenvolvimento de estratégias híbridas eficientes
- Análise de trade-offs entre qualidade e tempo computacional

- **Aplicações Práticas:**

- Identificação de cenários de aplicação relevantes
- Avaliação de requisitos práticos de implementação
- Análise de limitações e desafios operacionais

6.2 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho incluem:

- Sistematização do conhecimento existente sobre o TSP-OBP
- Análise comparativa abrangente dos métodos de solução
- Identificação de direções promissoras para pesquisas futuras
- Proposição de estratégias práticas para implementação

6.3 Considerações Finais

O TSP-OBP representa um avanço significativo na modelagem de problemas complexos de roteamento, incorporando aspectos práticos essenciais como a coleta de bônus e o transporte de passageiros. A análise realizada demonstra que, apesar dos desafios computacionais, existem métodos eficazes para sua resolução, especialmente quando se consideram abordagens híbridas e metaheurísticas avançadas [3, 2].

Por fim, vale ressaltar que, apesar de a formulação geral do TSP-OBP possuir aplicações práticas, a riqueza do problema também está em sua relação profunda com conceitos fundamentais de grafos. Da perspectiva teórica, a complexidade e as dificuldades de resolução se tornam campos férteis para pesquisa, ligando-se de forma intrínseca aos estudos sobre Ciclos Hamiltonianos, Subtours e combinatória de alto nível [1].

Trabalhos Futuros

As perspectivas para trabalhos futuros incluem:

- **Aspectos Teóricos:**
 - Investigar propriedades estruturais de grafos que possam facilitar a identificação de ciclos factíveis no TSP-OBP
 - Desenvolver novas formulações matemáticas mais compactas
 - Estudar casos especiais com propriedades interessantes
- **Métodos de Solução:**
 - Desenvolver heurísticas híbridas que combinem elementos de corte (Branch and Cut) com técnicas de otimização populacional
 - Investigar aplicações de aprendizado de máquina

- Explorar métodos de decomposição avançados
- **Aplicações Práticas:**
 - Explorar versões do TSP-OBP em grafos não completos, onde a ausência de arestas introduz maior rigidez nas rotas possíveis
 - Desenvolver implementações eficientes para casos práticos
 - Investigar extensões para cenários dinâmicos e estocásticos

6.4 Recomendações

Para futuros trabalhos na área, recomenda-se:

- Foco em métodos híbridos que combinem diferentes estratégias
- Consideração explícita de aspectos práticos de implementação
- Desenvolvimento de benchmarks padronizados
- Exploração de novas aplicações em contextos emergentes

O campo continua aberto para inovações tanto teóricas quanto práticas, com amplo potencial para desenvolvimento de novas técnicas e aplicações.

Referências Bibliográficas

- [1] W. Carnielli and R. Epstein. *Computabilidade e Funções Computáveis*. UNESP, 2017.
- [2] M. R. Carvalho. Métodos heurísticos para o tsp-obp. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2022.
- [3] José Gomes Lopes Filho. *Problema do Caixeiro Viajante com Coleta Opcional de Bônus, Tempo de Coleta e Passageiros*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 2019.