



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO  
MATA53 - TEORIA DOS GRAFOS

RELATÓRIO: PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE COM  
BÔNUS E PASSAGEIROS

ANTONIEL MAGALHÃES  
JOÃO LEAHY  
LUIS FELIPE

Salvador - Bahia  
5 DE JANEIRO DE 2025

# RELATÓRIO: PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE COM BÔNUS E PASSAGEIROS

ANTONIEL MAGALHÃES  
JOÃO LEAHY  
LUIS FELIPE

Estudo dirigido entregue ao professor Islame Felipe da Costa Fernandes como método avaliativo da disciplina MATA53 - Teoria dos grafos

**Salvador - Bahia**

5 de janeiro de 2025

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| Introdução . . . . .   | 1         |
| Estrutura do Trabalho . . . . .                                      | 1         |
| <b>1 Fundamentação Teórica</b>                                       | <b>3</b>  |
| 1.1 Caminhos e Ciclos Eulerianos: Motivação Histórica . . . . .      | 3         |
| 1.2 Ciclos Hamiltonianos e o TSP . . . . .                           | 3         |
| <b>2 TSP e Suas Variações</b>  | <b>5</b>  |
| 2.1 Problema do Caixeiro Viajante (TSP) . . . . .                    | 5         |
| 2.2 TSP com Bônus . . . . .  | 5         |
| 2.3 TSP com Bônus e Passageiros (TSP-OBP) . . . . .                  | 6         |
| <b>3 Modelagem Matemática e Conceitos Fundamentais</b>               | <b>7</b>  |
| 3.1 Definição Formal do TSP-OBP . . . . .                            | 7         |
| 3.2 Relação com Subproblemas de Fluxo e Correspondência . . . . .    | 7         |
| <b>4 Métodos de Resolução</b>  | <b>9</b>  |
| 4.1 Métodos Exatos . . . . .   | 9         |
| 4.1.1 Branch and Bound / Branch and Cut . . . . .                    | 9         |
| 4.1.2 Formulações em Programação Linear Inteira (ILP/MILP) . . . . . | 9         |
| 4.2 Heurísticas e Metaheurísticas . . . . .                          | 10        |
| 4.2.1 Construção Gritosa (Gulosa) . . . . .                          | 10        |
| 4.2.2 Buscas Baseadas em População . . . . .                         | 10        |
| <b>5 Resultados e Discussão</b>                                      | <b>11</b> |
| 5.1 Perspectiva Teórica . . . . .                                    | 11        |
| 5.2 Comparações e Trade-offs . . . . .                               | 11        |
| <b>6 Conclusão</b>   | <b>12</b> |

# Introdução

O Problema do Caixeiro Viajante com Coleta de Bônus e Passageiros (TSP-OBP) é uma variação do clássico Problema do Caixeiro Viajante (TSP). O TSP clássico pode ser entendido como a busca de um ciclo Hamiltoniano de menor custo em um grafo, enquanto o TSP-OBP adiciona complexidade ao incorporar dois componentes: a possibilidade de coletar bônus em certos nós e a restrição de transporte de passageiros.

Para construir o arcabouço teórico que embasa o TSP-OBP, é fundamental explorar conceitos de Teoria dos Grafos, partindo inicialmente dos Caminhos Eulerianos (que focam no percurso de todas as arestas) e avançando para a noção de Ciclos Hamiltonianos (que focam em visitar todos os vértices). A partir daí, introduzimos o TSP, uma das aplicações mais conhecidas de Ciclos Hamiltonianos, e evoluímos para suas extensões que incluem coleta de bônus (TSP com bônus) e, finalmente, coleta de bônus aliada ao transporte de passageiros (TSP-OBP).

## Contexto Teórico

Apesar de o TSP ter se tornado notoriamente popular por suas aplicações em logística e roteirização, o estudo aqui apresentado se concentrará principalmente em seus fundamentos teóricos. Isso inclui aspectos de complexidade computacional, modelagem matemática, algoritmos clássicos e heurísticas.

Os Caminhos Eulerianos, por exemplo, foram objeto de estudo inicial na Teoria dos Grafos, inaugurada com o problema das Sete Pontes de Königsberg, analisado por Leonhard Euler. Um **Caminho Euleriano** percorre todas as arestas de um grafo exatamente uma vez, podendo ou não terminar no mesmo vértice inicial. Já um **Ciclo Euleriano** é um Caminho Euleriano que começa e termina no mesmo vértice. Em contrapartida, o TSP parte da noção de **Ciclo Hamiltoniano**, que busca visitar todos os vértices exatamente uma vez, ao invés de todas as arestas.

Portanto, o TSP-OBP pode ser visto como uma culminação de conceitos de Teoria dos Grafos que vão além dos Caminhos Eulerianos, demandando soluções mais complexas e específicas para lidar com restrições adicionais de bônus e passageiros.

## Estrutura do Trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

- Na **Seção 1**, revisitamos o conceito de Caminhos Eulerianos e brevemente o comparamos com a noção de Ciclos Hamiltonianos, estabelecendo uma ponte inicial entre problemas clássicos de grafos.

- No **Capítulo 2**, descrevemos o Problema do Caixeiro Viajante (TSP) em sua formulação clássica e suas características fundamentais, como a relação com Ciclos Hamiltonianos e a dificuldade computacional (NP-dificuldade).
- No **Capítulo 3**, abordamos o *TSP com Bônus*, apresentando como a possibilidade de coletar prêmios em vértices opcionais altera a dinâmica tradicional do TSP.
- No **Capítulo 4**, introduzimos a variação TSP-OBP, acrescentando o elemento de transporte de passageiros, que traz novas restrições e complexidades ao problema.
- No **Capítulo 5**, discutimos possíveis métodos de resolução (exatos, heurísticos e metaheurísticos), enfatizando a complexidade teórica inerente a esses problemas e as estratégias para contorná-la.
- No **Capítulo 6**, apresentamos e debatemos resultados computacionais e teóricos, comparando as diferentes estratégias de solução.
- Por fim, no **Capítulo 7**, concluímos destacando as principais contribuições teóricas do trabalho, bem como perspectivas para pesquisas futuras em Teoria dos Grafos e otimização.

# Capítulo 1

## Fundamentação Teórica

### 1.1 Caminhos e Ciclos Eulerianos: Motivação Histórica

Os Caminhos Eulerianos marcaram o início do estudo formal da Teoria dos Grafos. O problema das Sete Pontes de Königsberg, enunciado por Leonhard Euler no século XVIII, consistia em determinar se era possível percorrer todas as pontes de uma cidade exatamente uma vez, retornando ou não ao ponto de partida. Esse problema pioneiro levou à definição de:

- **Caminho Euleriano:** Caminho que percorre todas as arestas de um grafo exatamente uma vez;
- **Ciclo Euleriano:** Caminho Euleriano que começa e termina no mesmo vértice.

A caracterização clássica aponta que um grafo conexo admite um Caminho Euleriano se e somente se tem exatamente 0 ou 2 vértices de grau ímpar. Em particular, ele admite um Ciclo Euleriano se e somente se todos os vértices têm grau par [?].

### 1.2 Ciclos Hamiltonianos e o TSP

Em contraposição aos caminhos/ciclos que focam nas arestas (Euler), surgem problemas em que o interesse é visitar todos os vértices, caracterizando **Ciclos Hamiltonianos**. Esses ciclos visitam cada vértice exatamente uma vez e retornam ao ponto inicial.

O **Problema do Caixeiro Viajante (TSP)** é a aplicação mais estudada de Ciclos Hamiltonianos. Formalmente, dado um grafo completo ponderado  $G = (V, E)$ , o TSP consiste em encontrar um ciclo que contenha todos os vértices de  $G$  e que tenha o menor custo (ou distância) total [?].

Embora os caminhos/ciclos eulerianos tenham sido resolvidos de forma elegante por Euler (e posteriormente Hierholzer), os problemas hamiltonianos — e em particular o

TSP — revelaram-se substancialmente mais complexos. O TSP é considerado NP-difícil, e sua resolução prática muitas vezes recorre a heurísticas ou algoritmos de aproximação.

# Capítulo 2

## TSP e Suas Variações

### 2.1 Problema do Caixeiro Viajante (TSP)

O TSP clássico pode ser definido da seguinte maneira: sendo  $G$  um grafo completo de  $n$  vértices, com uma função de custos  $c_{ij}$  para cada aresta  $(i, j)$ , deseja-se encontrar um ciclo Hamiltoniano de custo mínimo, ou seja, uma permutação dos vértices que minimize o somatório de  $c_{ij}$  ao visitar todos os vértices exatamente uma vez e retornar à origem.

Apesar de existirem soluções exatas, como *branch and bound* e *branch and cut*, e formulações em Programação Linear Inteira, essas estratégias se tornam rapidamente impraticáveis com o aumento do número de vértices, dada a explosão combinatória característica de problemas NP-difíceis.

### 2.2 TSP com Bônus

Uma variação importante do TSP é o **TSP com Bônus**, no qual alguns vértices podem ser visitados de forma opcional para obtenção de ganho adicional (bônus). Nesse sentido, o caixeiro passa a ter a possibilidade de equilibrar o custo adicional de viajar até os vértices “opcionais” em troca de uma recompensa ou vantagem associada.

Modelos de TSP com Bônus podem ser úteis em cenários teóricos para analisar a influência de vértices com diferentes pesos ou mesmo para estudar a estrutura de subgrafos preferenciais em termos de custo-benefício. Embora frequentemente associados a aplicações práticas (coleta de prêmios, pontos de interesse etc.), também constituem um rico campo de investigação na Teoria dos Grafos, pois exigem generalizações de formulações clássicas do TSP e podem ter maior complexidade combinatória dependendo do número de vértices opcionais.



## 2.3 TSP com Bônus e Passageiros (TSP-OBP)

O **TSP-OBP** surge, então, como um desdobramento ainda mais complexo, no qual são adicionadas restrições relacionadas ao embarque e desembarque de passageiros. Nesse caso, não basta determinar se os vértices opcionais serão visitados ou não para coleta de bônus; também é preciso garantir que exista uma sequência de visitas factível para acomodar passageiros que têm janelas de tempo específicas ou locais exatos de embarque e desembarque.

Do ponto de vista teórico, a inclusão de passageiros pode ser encarada como um conjunto adicional de restrições sobre o caminho Hamiltoniano, exigindo o cumprimento de condições de precedência (pegar o passageiro antes de deixá-lo), limite de capacidade e possíveis penalidades por atrasos ou antecipações.

A evolução do TSP para o TSP-OBP — passando pelos caminhos Eulerianos, Ciclos Hamiltonianos e TSP com Bônus — ilustra a riqueza da Teoria dos Grafos em gerar novos problemas conforme adicionamos camadas de restrições e variáveis. Cada nova variação exige adaptações nos modelos matemáticos e métodos de resolução, revelando aspectos teóricos aprofundados sobre a estrutura dos grafos e a complexidade computacional.

## Capítulo 3

# Modelagem Matemática e Conceitos Fundamentais

### 3.1 Definição Formal do TSP-OBP

Apesar de seu viés aplicado, o TSP-OBP pode ser formalizado como um problema de otimização em grafos, onde:

- $G = (V, E)$  é um grafo completo com um conjunto de vértices  $V$  e arestas  $E$ ;
- Cada aresta  $(i, j)$  tem um custo  $c_{ij}$ ;
- Cada vértice  $i$  pode oferecer um bônus  $b_i$  (caso seja visitado) e/ou ter um passageiro associado, implicando em restrições de embarque e desembarque.

O objetivo é construir um ciclo Hamiltoniano (possivelmente relaxado para permitir omissão de vértices opcionais) que maximize a coleta de bônus e minimize o custo total de deslocamento, respeitando as restrições de passageiros.

### 3.2 Relação com Subproblemas de Fluxo e Correspondência

Tanto o TSP quanto suas variações podem ser conectados a *subproblemas* de fluxo em redes e problemas de correspondência perfeita (matching), onde as arestas selecionadas devem satisfazer condições de equilíbrio de fluxo ou de emparelhamento. Na formulação em Programação Inteira Mista (MILP), isso se traduz em:

- Restrições de grau, garantindo que cada vértice seja visitado no máximo (ou exatamente) uma vez;

- Restrições de eliminação de subtours, para assegurar que o resultado seja um ciclo que abranja todo o conjunto de vértices relevantes;
- Restrições de capacidade de passageiros, janelas de tempo, etc., no caso do TSP-OBP.

O grande desafio teórico é que a adição de restrições (bônus, passageiros, tempos) faz com que a complexidade cresça exponencialmente, tornando os métodos exatos inviáveis para instâncias de maior dimensão.

# Capítulo 4

## Métodos de Resolução

Nesta seção, focamos em como a Teoria dos Grafos suporta os diversos métodos de resolução para TSP, TSP com Bônus e TSP com Bônus e Passageiros. Embora muitas destas estratégias sejam motivadas por aplicações concretas, a base teórica — envolvendo decomposição de grafos, ciclos, caminhos, emparelhamentos, cortes etc. — é o ponto de partida para o desenvolvimento de algoritmos.

### 4.1 Métodos Exatos

#### 4.1.1 Branch and Bound / Branch and Cut

As técnicas de *Branch and Bound* e *Branch and Cut* são extensões naturais de algoritmos de busca em espaço de soluções. No contexto de grafos, a poda (bound) muitas vezes utiliza relaxações lineares e desigualdades que capturam propriedades de ciclos ou caminhos para identificar regiões do espaço de soluções que não contêm o ótimo.

#### 4.1.2 Formulações em Programação Linear Inteira (ILP/MILP)

A formulação de subtours (Eliminação de Ciclos) e a abordagem de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) são alguns exemplos de como as propriedades de ciclos em grafos podem ser traduzidas em restrições lineares. Para o TSP-OBP, adicionam-se variáveis que modelam a coleta de bônus e a alocação de passageiros, complicando ainda mais a formulação.

## 4.2 Heurísticas e Metaheurísticas

### 4.2.1 Construção Gritosa (Gulosa)

Algoritmos gulosos buscam a melhor escolha local a cada passo. Embora normalmente não forneçam garantias de obtenção da solução ótima, são úteis para instâncias pequenas e como ponto de partida para outras heurísticas.

### 4.2.2 Buscas Baseadas em População

Metaheurísticas como *Algoritmos Genéticos*, *Ant Colony Optimization* e *Simulated Annealing* utilizam mecanismos inspirados na natureza e em processos físicos para explorar o espaço de soluções. O princípio subjacente está em combinar e aperfeiçoar caminhos ou ciclos em grafos, partindo de uma população inicial de candidatos.

# Capítulo 5

## Resultados e Discussão

### 5.1 Perspectiva Teórica

Do ponto de vista estritamente teórico, as variações do TSP evidenciam a natureza rica e complexa dos problemas baseados em Ciclos Hamiltonianos. Cada restrição adicional pode ser vista como a sobreposição de novas condições (fluxo, janelas de tempo, capacidade) sobre a condição fundamental de encontrar um ciclo que visita vértices ou arestas — relembrando, nesse sentido, o contraste com problemas Eulerianos, cuja solução é dada por condições de grau dos vértices.

### 5.2 Comparações e Trade-offs

Heurísticas rápidas podem fornecer soluções aceitáveis em pouco tempo, mas normalmente não provam otimalidade. Métodos exatos provam otimalidade, mas tornam-se impraticáveis conforme o tamanho do problema cresce. Nessa tensão, a Teoria dos Grafos fornece ferramentas para criar desigualdades de corte, heurísticas de busca local e análise de robustez que ajudam a entender melhor o “espaço” de possíveis ciclos.

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma evolução teórica a partir dos Caminhos Eulerianos para os Ciclos Hamiltonianos, culminando nas extensões do TSP clássico para o TSP com Bônus e, por fim, o TSP com Bônus e Passageiros (TSP-OBP). Enquanto problemas Eulerianos são resolvidos de modo relativamente direto mediante condições de grau, os problemas hamiltonianos demonstram alta complexidade, exigindo abordagens mais sofisticadas de otimização.

- Discutimos o TSP e a formulação matemática por trás desse problema central na Teoria dos Grafos;
- Abordamos a variação TSP com Bônus, que incorpora um conjunto opcional de vértices premiados;
- Analisamos como o TSP-OBP acrescenta uma dimensão adicional de restrições relativas a passageiros, ampliando o leque de desafios teóricos.

Embora o TSP (e suas variações) seja frequentemente associado à logística, o foco deste trabalho recaiu em sua estrutura teórica e em como ele ilustra a complexidade inerente aos problemas que envolvem Ciclos Hamiltonianos e restrições adicionais. As principais contribuições residem no aprofundamento das formulações matemáticas, no mapeamento de algoritmos exatos e heurísticos e na demonstração de como cada elemento extra (bônus, passageiros) impacta significativamente a análise de complexidade e a busca de soluções.

## Trabalhos Futuros

- Investigar propriedades estruturais de grafos que possam facilitar a identificação de ciclos factíveis no TSP-OBP;

- Desenvolver heurísticas híbridas que combinem elementos de corte (Branch and Cut) com técnicas de otimização populacional;
- Explorar versões do TSP-OBP em grafos não completos, onde a ausência de arestas introduz maior rigidez nas rotas possíveis.

Por fim, vale ressaltar que, apesar de a formulação geral do TSP-OBP possuir aplicações práticas, a riqueza do problema também está em sua relação profunda com conceitos fundamentais de grafos. Da perspectiva teórica, a complexidade e as dificuldades de resolução se tornam campos férteis para pesquisa, ligando-se de forma intrínseca aos estudos sobre Ciclos Hamiltonianos, Subtours e combinatória de alto nível.