


Étude analytique et numérique du phénomène de capture des moustiques dans l'équation de diffusion

Aya Chaieb[†], Baptiste Petiot[‡], Antonin Decouvrelaere[†], Lucas Bourret[†], Mathieu Prioux[†],
Facundo Muñoz[‡] 

28 janvier 2026

Résumé

Nous considérons un modèle déterministe de diffusion spatiale décrivant l'évolution de la densité surfacique de moustiques. Ce modèle est formulé par une équation aux dérivées partielles parabolique augmenté de termes permettant de rendre compte de la mort naturelle des moustiques et de la capture par les pièges. Cette modélisation s'inscrit dans l'étude de stratégies de contrôle des populations, en particulier la méthode SIT (*Sterile Insect Technique*).

Nous analysons d'abord la possibilité d'obtenir des solutions explicites dans des configurations simplifiées, ainsi que des approximations analytiques fondées sur une troncature de la série de Duhamel. La résolution numérique du modèle est ensuite abordée à l'aide de différentes méthodes de résolution numériques parmi lesquelles différences finies, éléments finis et volumes finis. Ces méthodes sont comparées en termes de précision, de robustesse et de coût de calcul, et le schéma retenu apparaît comme le plus efficace parmi ceux étudiés.

Ce cadre numérique est enfin utilisé pour effectuer l'inférence des paramètres du modèle à partir de données, conduisant à des valeurs estimées cohérentes du point de vue physique. L'objectif de ce travail est ainsi de fournir un cadre mathématique et numérique cohérent pour l'analyse, la simulation et l'estimation des paramètres de stratégies de contrôle spatial des populations de moustiques. Cette étude s'inscrit dans un projet plus large mené par le CIRAD.



[†] Étudiants-chercheurs du programme ingénieur de CentraleSupélec, Université Paris-Saclay.

[‡] CIRAD, UMR ASTRE, F-34398 Montpellier, France.

ASTRE, Univ Montpellier, CIRAD, INRAE, Montpellier, France.

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Rappel du contexte global de l'étude	3
1.2	Objectif et méthodologie	3
2	Étude analytique de l'équation de diffusion avec capture	4
2.1	Diffusion et mortalité uniforme : solutions exactes	4
2.1.1	Noyau de la chaleur et diffusion pure	4
2.1.2	Ajout de la mortalité naturelle	6
2.2	Modèle inhomogène : exactitude mathématique et invalidité physique	6
2.2.1	Solution intégrale par la formule de Duhamel	6
2.2.2	Exemples	6
2.2.3	Analyse critique	6
2.3	De la non-existence de solution analytique exacte	7
2.3.1	Réduction spectrale formelle	7
2.3.2	Formes fermées et contraintes algébriques	7
2.3.3	Application au modèle de capture	7
2.3.4	Portée de l'énoncé	7
2.4	Approche par série de Duhamel	8
2.4.1	Formulation intégrale exacte	8
2.4.2	Série de Duhamel	8
2.4.3	Approximation perturbative	9
2.4.4	Conditions de validité et de convergence	9
2.4.5	Complexité algorithmique	9
2.4.6	Portée de l'approximation	10
2.5	Conclusion	10
3	Définition des paramètres et discrétisation pour la résolution numérique	10
3.1	L'Équation maîtresse	10
3.2	Définition des variables physiques	10
3.2.1	Identifiabilité des paramètres d'intérêt	11
3.3	Condition initiale et conservation	11
4	Méthode des différences finies	12
4.1	Discrétisation pour la méthode des différences finies (MDF)	12
4.2	Analyse de la complexité algorithmique	12
4.2.1	Coût par pas de temps	12
4.2.2	Impact de la condition CFL sur le temps	12
4.2.3	Complexité globale	12
4.3	Implémentation de la méthode et résultats	13
4.4	Analyse des résultats	14
5	Méthode des éléments finis	14
5.1	Définition du maillage triangulaire	14
5.2	Étude de l'EDO	15
5.3	Complexité et précision	16
5.4	Implémentation de la méthode et résultats	16
5.5	Analyse des résultats	17
6	Méthode des volumes finis	17
6.1	Synthèse - rappel de la modélisation par Volumes Finis	17
6.1.1	Maillage et Géométrie	17
6.1.2	Discrétisation spatiale et temporelle	17
6.2	Complexité de l'algorithme et précision	17

6.3	Résultats	18
6.4	Distribution spatiale et diffusion	18
6.5	Analyse de l'efficacité des pièges	18
6.6	Maillage adapté aux pièges	18
6.6.1	Méthode de génération du maillage	18
6.6.2	Résultats avec un maillage adapté	19
7	Inférence des paramètres physiques de notre modèle à partir de données de captures réelles	22
7.1	Motivation	22
7.2	Identifiabilité des paramètres physiques	22
7.2.1	Justification du problème d'identifiabilité	22
7.2.2	Solution appliquée : contrainte fonctionnelle	22
7.2.3	Identifiabilité des autres paramètres	23
7.3	Stratégie d'optimisation et algorithme de minimisation	24
7.3.1	Formulation de la fonction de coût	24
7.3.2	Justification de l'algorithme L-BFGS-B	24
7.3.3	Principe de l'algorithme L-BFGS-B	24
7.4	Résultats de l'optimisation et analyse	24
7.5	Conclusion sur l'inférence des paramètres par la méthode d'optimisation	25
8	Conclusion	26
	Annexes	27
A	Code	27
B	Données	27

1 Introduction

Dans cet article, nous poursuivons l'étude initiée dans CHAIEB et al., [2025](#).

1.1 Rappel du contexte global de l'étude

Notre étude vise à modéliser les dynamiques de dispersions des moustiques stériles dans le cadre de la méthode SIT (*Sterile Insect Technique* ou technique de l'insecte stérile). Cette technique vise à réguler certaines populations de moustiques qui sont un vecteur épidémiologique préoccupant (Dengue, Zika, Chikungunga). Cette technique repose sur la stérilisation de moustiques mâles par des rayons X ou γ , les moustiques stériles sont ensuite relâchés et contribuent à la diminution de la fécondité des moustiques femelles. Dans le cadre de la mise en place de cette technique, la connaissance fine des dynamiques spatiales des moustiques constitue un enjeu central.

1.2 Objectif et méthodologie

Ce travail est un prolongement des recherches sur la calibration du modèle de diffusion probabiliste des moustiques (CAPEL et MUÑOZ, [2024](#)), mené par le CIRAD. Nous avons développé un modèle macroscopique, limite déterministe du modèle probabiliste régit par l'équation d'Îto : l'équation de réaction-diffusion. Après avoir étudié le caractère bien posé de cette équation et assuré l'existence de solution dans le premier article CHAIEB et al., [2025](#), on se propose maintenant d'approfondir l'expression de ces solutions par plusieurs méthodes analytiques et numériques et d'évaluer leurs pertinences. Une attention particulière est portée au temps de calcul de chacune de ces approches, dans le but d'identifier la méthode la plus adaptée à un usage intensif en simulation inverse ou en inférence bayésienne. Nous viserons à calibrer le mieux possible ces modèles afin d'étendre leurs utilisations à l'ajustement des paramètres d'intérêts dans des situations réelles. Nous utiliserons pour cela des données issues de simulations discrètes (modèle stochastique).

2 Étude analytique de l'équation de diffusion avec capture

On s'intéresse à l'équation de diffusion suivante, définie sur le plan :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) = D\Delta \rho(\mathbf{r}, t) - \nu \rho(\mathbf{r}, t) - K(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}, t), & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \\ \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (1)$$

La fonction $\rho(\mathbf{r}, t) \in L^2(\mathbb{R}^2, (0, T))$ représente la densité surfacique de moustiques et $\rho_0(\mathbf{r}) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ la distribution initiale de moustiques associée, ces deux grandeurs s'exprimant en moustiques $\cdot \text{m}^{-2}$. Le coefficient $D > 0$ est la diffusivité supposée constante dont l'unité est $\text{m}^2 \cdot \text{jour}^{-1}$, $\nu > 0$ le taux de mortalité naturelle uniforme ainsi que $K(\mathbf{r}) \geq 0$ modélisant la capture des moustiques via les pièges, ces deux dernières grandeurs s'exprimant dans l'unité : jour^{-1} . La fonction K est intentionnellement laissée sous forme non explicite, contrairement aux sections qui suivent, afin de rester le plus général possible pour l'instant.

L'objectif de cette section est de déterminer dans quels cas il est possible d'obtenir :

- des solutions analytiques exactes
- des représentations intégrales exploitables
- des approximations contrôlées

Une attention particulière est portée à la pertinence physique des modèles étudiés.

2.1 Diffusion et mortalité uniforme : solutions exactes

On commence par le cas sans pièges, $K := 0$, c'est-à-dire la diffusion homogène des moustiques dans tout l'espace, à l'instar de la diffusion de la chaleur. Ce premier point constitue le socle analytique de toute l'étude dans la présente section.

2.1.1 Noyau de la chaleur et diffusion pure

L'équation

$$\partial_t \rho = D\Delta \rho$$

admet en toute dimension une solution explicite exprimée à l'aide du noyau de la chaleur. En dimension 2, celui-ci s'écrit

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{4Dt}\right)$$

Pour toute donnée initiale ρ_0 , la solution est donnée par la convolution

$$\rho(\mathbf{r}, t) = (G * \rho_0)(\mathbf{r}, t).$$

Cette solution conserve la masse totale et reste positive. Nous procédons à présent à la démonstration de ce résultat en dimension 1, la solution en dimension 2 s'obtenant de manière parfaitement analogue. On définit le problème de Cauchy étudié comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(x, t) = D\partial_{xx} \rho(x, t) \\ \rho(x, 0) = N_0 \delta(x) \end{cases} \quad (2)$$

Pour ce faire, on a recours à la transformée de Fourier spatiale :

$$\mathcal{F}\{\rho(x, t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) e^{-ikx} dx$$

On doit par ailleurs supposer que la fonction solution appartienne à l'espace de Schwartz que l'on définit comme suit :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall m, n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \partial_x^n f(x)| < \infty \}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\mathcal{F}\{\partial_{xx}\rho\}(k, t) = -k^2\hat{\rho}(k, t)$$

et

$$\mathcal{F}\{\delta\}(k) = 1$$

de sorte que le problème de Cauchy (2) puisse s'écrire :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\rho}(k, t) = -Dk^2 \hat{\rho}(k, t) \\ \rho(k, 0) = N_0 \end{cases} \quad (3)$$

On obtient une équation différentielle simple en la coordonnée temporelle dont la solution est donnée par :

$$\hat{\rho}(k, t) = N_0 e^{-Dk^2 t}$$

La transformée de Fourier inverse donne alors

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}(k, t) e^{ikx} dk \\ &= \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-Dk^2 t} dk \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$ikx - Dtk^2 = \left(k - i\frac{x}{2Dt}\right)^2 - \frac{x^2}{4Dt}.$$

Donc

$$\rho(x, t) = \frac{N_0}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-Dt \left(k - i\frac{x}{2Dt} \right)^2 \right] dk$$

Puis on substitue $u = k - i\frac{x}{2Dt}$ ce qui donne $du = dk$ et donc

$$\rho(x, t) = \frac{N_0}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-Dtu^2] du$$

Puis par l'identité $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ on obtient enfin

$$\rho(x, t) = \frac{N_0}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Et d'une manière plus générale, si on définit le noyau de la chaleur G par

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Alors pour toute distribution initiale $\rho_0(x)$ on a

$$\rho(x, t) = (G * \rho_0)(x, t)$$

Où l'on définit le produit de convolution $*$ par

$$(G * \rho_0)(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \xi, t) \rho_0(\xi, t) d\xi$$

Car en effet, par dérivation sous le signe intégral

$$\partial_t \rho = \int (\partial_t G)(x - \xi, t) \rho_0(\xi) d\xi$$

$$\partial_{xx} \rho = \int (\partial_{xx} G)(x - \xi, t) \rho_0(\xi) d\xi$$

Comme G vérifie $\partial_t G = D\partial_{xx} G$, on obtient

$$\partial_t \rho(x, t) = D\partial_{xx} \rho(x, t)$$

Et lorsque $t \rightarrow 0^+$, on a $G(\cdot, t) \rightarrow \delta$ au sens des distributions, donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho(x, t) = \int \delta(x - \xi) \rho_0(\xi) d\xi = \rho_0(x)$$

2.1.2 Ajout de la mortalité naturelle

On considère maintenant

$$\begin{cases} \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) = D\Delta \rho(\mathbf{r}, t) - \nu \rho(\mathbf{r}, t) \\ \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (4)$$

En posant $\rho(\mathbf{r}, t) = e^{-\nu t} u(\mathbf{r}, t)$, on obtient que u satisfait l'équation de diffusion pure. Il en résulte

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e^{-\nu t} (G * \rho_0)(\mathbf{r}, t)$$

On utilisera la notation issue des semi-groupes qui permet d'encapsuler sous une notation compacte la solution de l'équation 4 (théorie non abordée dans cet article, le lecteur pourra se référer à KATO, 1995 pour plus de détails).

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e^{-\nu t} (G * \rho_0)(\mathbf{r}, t) = e^{tL} \rho_0(\mathbf{r}, t)$$

où $L = D\Delta - \nu$.

Interprétation physique : La mortalité naturelle induit une décroissance exponentielle uniforme de la densité, indépendante de la position. Ce terme correspond à un processus de mort individuelle à taux constant, tandis que la diffusion ne modifie que la répartition spatiale. Cette manière de définir la mort naturelle des moustiques reste par ailleurs discutable dans ce modèle déterministe et pourrait faire l'objet d'approfondissements.

2.2 Modèle inhomogène : exactitude mathématique et invalidité physique

Avant de traiter le terme de capture proportionnel à ρ , il est instructif d'examiner le modèle

$$\partial_t \rho = D\Delta \rho - \nu \rho - K(\mathbf{r}),$$

où le terme de capture n'est plus homogène à la densité ρ .

2.2.1 Solution intégrale par la formule de Duhamel

En notant $L = D\Delta - \nu$, la solution s'écrit

$$\rho(t) = e^{tL} \rho_0 - \int_0^t e^{(t-s)L} K ds.$$

Cette expression est exacte et permet, pour certaines formes de K , d'obtenir des solutions explicites.

2.2.2 Exemples

- Si $K(\mathbf{r}) = \gamma \mathbf{1}_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq R}(\mathbf{r})$, la solution s'exprime en termes de fonctions d'erreur.
- Si $K(\mathbf{r}) = \gamma \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{R}\right)^2\right)$, le terme intégral reste calculable analytiquement par convolution gaussienne.

2.2.3 Analyse critique

Malgré son exactitude mathématique, ce modèle est physiquement inadéquat. Le terme additif impose une extraction indépendante de la densité locale. Ainsi, même dans une région presque vide, un nombre fini de moustiques est retiré, ce qui peut conduire à des densités négatives.

Or, physiquement, le nombre de moustiques capturés doit être proportionnel au nombre de moustiques présents. Le terme additif ne rend donc pas compte du mécanisme réel de capture et doit être rejeté.

2.3 De la non-existence de solution analytique exacte

On considère à présent l'équation physiquement pertinente

$$\partial_t \rho(\mathbf{r}, t) = D\Delta \rho(\mathbf{r}, t) - \nu \rho(\mathbf{r}, t) - K(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \quad (5)$$

où le terme de capture est proportionnel à la densité locale.

2.3.1 Réduction spectrale formelle

Par séparation des variables formelle $\rho(\mathbf{r}, t) = e^{-\lambda t} \psi(\mathbf{r})$, l'équation (5) conduit à un problème spectral stationnaire de type Schrödinger :

$$-D\Delta \psi(\mathbf{r}) + (\nu + K(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r}) = \lambda \psi(\mathbf{r}). \quad (6)$$

L'obtention d'une solution analytique exacte de l'équation d'évolution supposerait donc une connaissance explicite du spectre et des fonctions propres de l'opérateur

$$H = -D\Delta + \nu + K(\mathbf{r}).$$

2.3.2 Formes fermées et contraintes algébriques

Il est bien connu que les équations de Schrödinger exactement solubles avec des fonctions élémentaires bien connues correspondent à des potentiels très particuliers, associés à des structures algébriques rigides (algèbres de Lie finies, symétries, factorisations exactes). Ces potentiels constituent une classe exceptionnelle, incluant notamment les potentiels harmonique, coulombien, de Morse ou de Pöschl–Teller.

Au début de leur article, Turbiner et Ushveridze rappellent à quel point les potentiels pour lesquels on ne connaît pas encore de solution analytique exacte sont peu étudiés en physique mathématique. TURBINER et USHVERIDZE, 1987

2.3.3 Application au modèle de capture

Dans le cadre du modèle (5), la fonction $K(\mathbf{r})$ est introduite pour représenter un dispositif de capture spatialement localisé. Les candidats $K(\mathbf{r})$ pouvant modéliser de manière fidèle notre potentiel sont les suivants :

- $K(\mathbf{r}) = \gamma \mathbb{1}_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq R}(\mathbf{r})$
- $K(\mathbf{r}) = \gamma \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{R}\right)^2\right)$

ou plus précisément une somme de fonctions de ce type centrées en différents points \mathbf{r}_0 de l'espace pour les différents pièges à moustiques. D'autres options sont envisageables mais ces deux dernières options sont les plus simples auxquelles nous pouvons penser. Ces fonctions ne possèdent :

- ni symétrie globale suffisante
- ni forme permettant une réduction à une équation différentielle spéciale connue

Il en résulte que l'opérateur H n'appartient pas à la classe des opérateurs exactement solubles au sens de la théorie spectrale algébrique.

2.3.4 Portée de l'énoncé

Il est important de souligner que l'on ne démontre pas ici une impossibilité absolue d'expression analytique, notion qui n'est pas définie de manière mathématiquement rigoureuse. En réalité on pourrait définir un nouvel ensemble de fonctions spéciales, solutions de l'équation spécifiquement étudiée ici pour un choix clairement défini de K , puis en étudier les propriétés, mais l'objectif en cherchant une solution explicite à base de fonctions élémentaires ou spéciales connues était de pouvoir calculer efficacement la solution recherchée, l'introduction d'une nouvelle famille de fonction seule n'aurait aucun intérêt

en lui-même si on ne s'attarde pas sur un algorithme de calcul efficace de ces fonctions nouvellement introduites.

Par conséquent, l'équation d'évolution (5) ne peut, pour une fonction de capture réaliste, être résolue analytiquement de manière exacte au sens des fonctions usuelles, et doit dès lors être abordée à l'aide de représentations intégrales implicites ou d'approximations contrôlées, cadre méthodologique que l'on développe dans la sous-section suivante.

2.4 Approche par série de Duhamel

On revient à l'équation d'origine :

$$\partial_t \rho = D\Delta \rho - \nu \rho - K(\mathbf{r})\rho.$$

2.4.1 Formulation intégrale exacte

En utilisant la formule de Duhamel, la solution vérifie l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\rho(t) = e^{tL} \rho_0 - \int_0^t e^{(t-s)L} (K\rho(s)) ds, \quad L = D\Delta - \nu. \quad (7)$$

où K est ici considéré comme une perturbation, c'est-à-dire possédant des propriétés spatiales et temporelles permettant d'être considérée comme négligeable par rapport aux autres termes de l'équation. Cette équation intégrale est exacte mais implicite. La formulation intégrale (7) est une conséquence classique de la théorie des semi-groupes fortement continus et de la formule de Duhamel KATO, 1995, Chap. IX, §1.

2.4.2 Série de Duhamel

En itérant la relation précédente, on obtient la série de Duhamel :

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \rho^{(n)},$$

où

$$\rho^{(0)}(t) = e^{tL} \rho_0, \quad \rho^{(n+1)}(t) = \int_0^t e^{(t-s)L} (K\rho^{(n)}(s)) ds.$$

Cette série est formellement exacte.

La relation de récurrence précédente permet d'expliciter chaque terme de la série par itération successive. On obtient ainsi, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\rho^{(n)}(t) = \int_{0 \leq s_n \leq \dots \leq s_1 \leq t} e^{(t-s_1)L} K e^{(s_1-s_2)L} K \dots K e^{s_n L} \rho_0 ds_n \dots ds_1.$$

Autrement dit, la solution s'écrit formellement sous la forme de la série développée

$$\begin{aligned} \rho(t) &= e^{tL} \rho_0 - \int_0^t e^{(t-s_1)L} K e^{s_1 L} \rho_0 ds_1 \\ &+ \int_{0 \leq s_2 \leq s_1 \leq t} e^{(t-s_1)L} K e^{(s_1-s_2)L} K e^{s_2 L} \rho_0 ds_2 ds_1 \\ &- \dots \\ &+ (-1)^n \int_{0 \leq s_n \leq \dots \leq s_1 \leq t} e^{(t-s_1)L} K e^{(s_1-s_2)L} K \dots K e^{s_n L} \rho_0 ds_n \dots ds_1 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

La série obtenue est une série de Volterra ordonnée dans le temps, également interprétable comme une série de Neumann associée à l'opérateur intégral

$$(\mathcal{K}\rho)(t) = \int_0^t e^{(t-s)L} (K\rho(s)) ds.$$

Sa convergence dépend des propriétés spectrales de L et des hypothèses de caractère borné (ou de caractère borné relatif) de l'opérateur K .

2.4.3 Approximation perturbative

La série de Duhamel fournit une représentation exacte mais généralement inexploitable dans sa forme complète. Dans le régime de capture faible ou pour des temps suffisamment courts, il est naturel de considérer une troncature de la série à un ordre fini.

À l'ordre zéro, on néglige entièrement l'effet des pièges et l'on retrouve la solution libre

$$\rho^{(0)}(t) = e^{tL} \rho_0.$$

À l'ordre un, on obtient la première correction non triviale induite par la capture :

$$\rho(t) \simeq e^{tL} \rho_0 - \int_0^t e^{(t-s)L} (K e^{sL} \rho_0) ds. \quad (\text{P1})$$

Cette approximation correspond à un unique événement de capture agissant sur une densité évoluant librement entre l'instant initial et le temps t . Elle constitue l'approximation perturbative minimale physiquement cohérente.

2.4.4 Conditions de validité et de convergence

La convergence de la série de Duhamel repose sur le caractère contractant de l'opérateur intégral

$$(\mathcal{K}\rho)(t) = \int_0^t e^{(t-s)L} (K\rho(s)) ds.$$

De manière heuristique mais physiquement pertinente, une convergence rapide est assurée lorsque les deux conditions suivantes sont simultanément satisfaites :

$$\|K\|_\infty t \ll 1 \quad \text{et} \quad t \ll \frac{R^2}{D}$$

La première condition limite l'effet cumulatif de la capture sur l'intervalle de temps considéré : le taux de capture maximal multiplié par la durée d'évolution doit rester petit. Du point de vue analytique, cette condition correspond au régime de convergence de la série de Neumann associée à l'opérateur intégral de Volterra, tel qu'il apparaît dans la théorie de la perturbation des semi-groupes KATO, 1995, Chap. IX, §2. La seconde condition garantit que la diffusion n'a pas encore exploré l'échelle spatiale caractéristique R associée aux pièges.

Dans ce régime, les termes d'ordre élevé de la série sont fortement amortis par les facteurs exponentiels du semi-groupe e^{tL} , ce qui justifie la troncature à bas ordre.

Remarque. Ces conditions ne constituent pas un critère de convergence au sens strict de la théorie des opérateurs, mais fournissent une estimation asymptotique suffisante pour un usage appliqué et numérique.

2.4.5 Complexité algorithmique

À l'ordre k , la troncature de la série de Duhamel implique :

- k intégrales temporelles imbriquées, discrétisées sur N_t points,
- k convolutions spatiales successives sur une grille bidimensionnelle de taille $N_x \times N_x$.

Il en résulte une complexité algorithmique asymptotique

$$\mathcal{O}\left(N_t^k N_x^{2k}\right) \quad \text{pour un point donné,} \quad \mathcal{O}\left(N_t^k N_x^{2k+2}\right) \quad \text{pour une grille complète.}$$

Cette croissance combinatoire limite sévèrement l'ordre de troncature exploitable en pratique. Dans les applications numériques, on se restreint donc à l'ordre $k = 1$, au-delà le coût computationnel devient impraticable. Un script python a été développé pour essayer de mettre en œuvre cet algorithme mais la complexité quartique prédite pour l'ordre 1 ne permet effectivement pas d'obtenir de résultat rapidement, même pour des grilles avec par exemple $N_x \times N_x = 20 \times 20$.

2.4.6 Portée de l'approximation

L'approche perturbative fondée sur la série de Duhamel fournit :

- une justification analytique claire des approximations numériques,
- une interprétation physique précise des mécanismes de capture,
- un cadre contrôlé permettant d'évaluer l'erreur commise par troncature.

Elle constitue ainsi un compromis rigoureux entre exactitude mathématique et faisabilité numérique, particulièrement adapté aux régimes de capture modérée et aux temps d'observation courts à intermédiaires.

2.5 Conclusion

L'équation de diffusion avec capture proportionnelle ne possède pas, en général, de solution fermée. La série de Duhamel fournit cependant une représentation exacte et justifie une approche perturbative rigoureuse.

Si cette approche est physiquement cohérente, sa complexité algorithmique interdit l'utilisation d'ordres élevés, ce qui rend l'approche numérique difficilement exploitable.

3 Définition des paramètres et discrétisation pour la résolution numérique

Dans la continuité de l'étude numérique des méthodes de résolution (voir Partie 1, CHAIEB et al., 2025), nous nous concentrons ici sur la modélisation physique précise des termes de l'équation de réaction-diffusion. Nous adoptons le formalisme mécaniste-statistique développé par Nguyen et al. NGUYEN et al., 2025, qui permet de relier les paramètres macroscopiques de l'EDP aux comportements individuels des moustiques.

3.1 L'Équation maîtresse

La dynamique de la densité de population de moustiques, notée $\rho(x, y, t)$, est régie par l'équation de Fokker-Planck suivante, qui généralise l'équation (1) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \underbrace{D \Delta \rho}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\nu \rho}_{\text{Mortalité}} - \underbrace{\rho \sum_{k=1}^{N_{traps}} f_k(x, y)}_{\text{Capture par les pièges}} \quad (8)$$

Contrairement aux notations génériques $K(r)$ utilisées précédemment, nous explicitons ici chaque terme biologique pour permettre leur identification statistique.

3.2 Définition des variables physiques

Coefficient de diffusivité (D ou σ) : Le coefficient de diffusivité spatial D est issu de la loi de Fick (cf. CHAIEB et al., 2025). Au niveau microscopique la volatilité microscopique d'un seul moustique est représentée par σ . Le lien entre le coefficient macroscopique D (utilisé dans notre code MDF) et la volatilité microscopique σ est donné par $D = \frac{\sigma^2}{2}$.

- Unité : $m^2 \cdot jour^{-1}$.
- Interprétation : Une valeur élevée indique une dispersion rapide des moustiques loin du point de lâcher x_0 .

Taux de mortalité naturelle (ν) : La durée de vie d'un individu T est ici modélisée comme une variable aléatoire continue suivant une distribution exponentielle. Le paramètre ν correspond au

taux de risque constant de l'événement "mort naturelle". La probabilité de survie à l'instant t suit une distribution exponentielle par rapport au temps :

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \nu du\right) = e^{-\nu t} \quad (9)$$

Dans la simulation, ce taux est dérivé de la **probabilité de survie quotidienne** (pds) telle que $\nu = -\ln(pds)$.

- Unité : $jour^{-1}$.
- Interprétation physique : L'espérance de vie moyenne est $1/\nu$. Ce terme agit comme un puits uniforme linéaire ($-\nu u$) dans l'équation MDF.

Fonction de capture des pièges (f_k) : La capture est modélisée comme un risque concurrent (competing risk) dépendant de la position. Pour un piège k situé en q_k , la fonction $f_k(x, y)$ ne représente pas une simple "zone", mais le *taux de risque instantané conditionnel* de capture. Conformément aux calculs théoriques (voir CAPEL et MUÑOZ, 2024), ce risque suit une décroissance gaussienne par rapport à la distance au carré :

$$f_k(x, y) = \gamma \cdot \exp\left(-\frac{\|(x, y) - q_k\|^2}{R_{trap}^2}\right) \quad (10)$$

Efficacité du piège (γ) : Ce paramètre représente le taux de capture maximal au centre du piège. Il agrège l'attractivité du leurre et la performance mécanique du dispositif.

- Unité : $jour^{-1}$.

Rayon d'action (R_{trap}) : Il correspond à l'écart-type de la gaussienne. À une distance R_{trap} du centre, l'efficacité du piège tombe à 37% de γ .

- Unité : *mètre*.

3.2.1 Identifiabilité des paramètres γ et R_{trap}

L'article CAPEL et MUÑOZ, 2024 soulève un problème statistique important : celui de l'identifiabilité des paramètres γ et R_{trap} . En effet, il est difficile de distinguer l'effet de l'intensité et de la portée uniquement avec les données de captures. Une capture élevée peut venir d'un piège efficace mais petit ou d'un piège peu efficace mais très large. Pour mieux gérer cette incertitude on va reparamétriser les paramètres pour qu'ils correspondent à des probabilités cibles connues : on dispose de la probabilité de capture au centre du piège : $pc0 = 0.8$ et la probabilité de capture à 5m : $pc5 = 0.1$.

On a alors :

$$\begin{cases} P(0) = \gamma = pc0 \\ P(5) = \gamma \cdot e^{-\frac{5^2}{R_{trap}^2}} = pc5 \end{cases} \quad (11)$$

Ce qui donne :

$$\gamma = pc0 \quad \text{et} \quad R_{trap}^2 = \frac{5^2}{\ln(pc0) - \ln(pc5)} \quad (12)$$

3.3 Condition initiale et conservation

Le lâcher de moustiques est modélisé par une masse de Dirac discrète. Si N_{total} moustiques sont relâchés en (x_0, y_0) , la grille est initialisée telle que :

$$\sum_{i,j} \rho_{i,j}^0 \Delta x^2 = N_{total} \quad (13)$$

Dans notre modélisation, on distribue cette masse sur un petit voisinage gaussien d'écart-type R_0 pour réduire les instabilités numériques initiales.

4 Méthode des différences finies

Cette méthode facile à implémenter va nous permettre d'approximer une solution à l'équation (8).

4.1 Discrétisation pour la méthode des différences finies (MDF)

Le principe de la méthode est détaillé dans la partie 1 (CHAIEB et al., 2025). Pour la résolution numérique, le domaine spatial $\Omega = [-L, L] \times [-L, L]$ est discrétisé en une grille $N \times N$.

- **Variables discrètes** : Soit $\rho_{i,j}^n$ l'approximation de la densité au point (x_i, y_j) et à l'instant t^n . Les pas d'espace et de temps sont notés $\Delta x = L/N$ et Δt .
- **Matrice des pièges (V_{trap})** : L'ensemble des fonctions de capture est pré-calculé dans une matrice statique V_{trap} de taille $N \times N$, évitant de recalculer les exponentielles à chaque itération temporelle :

$$(V_{trap})_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_{traps}} \gamma \exp \left(-\frac{(x_i - x_{q_k})^2 + (y_j - y_{q_k})^2}{R_{trap}^2} \right) \quad (14)$$

- **Schéma numérique global** : L'équation d'évolution discrète implémentée dans notre code Python devient alors :

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \Delta t [D(\Delta_h \rho)_{i,j}^n - (\nu + (V_{trap})_{i,j}) \rho_{i,j}^n] \quad (15)$$

Où $(\Delta_h \rho)$ est l'opérateur Laplacien discret à 5 points.

4.2 Analyse de la complexité algorithmique

Soit N_x le nombre de points de grille le long d'une dimension spatiale (la grille contient donc $N_x \times N_x$ cellules).

4.2.1 Coût par pas de temps

À chaque itération temporelle, le schéma explicite aux différences finies effectue des opérations matricielles (calcul du Laplacien par convolution, produit terme à terme pour la réaction). Comme établi par Chaieb et al., le calcul du laplacien et du terme source en chaque point constitue une opération de complexité proportionnelle au nombre total de cellules (CHAIEB et al., 2025).

$$\mathcal{C}_{spatial} = \mathcal{O}(N_x^2) \quad (16)$$

4.2.2 Impact de la condition CFL sur le temps

Le nombre de pas de temps nécessaires, noté N_t , n'est pas indépendant de N_x . Pour garantir la stabilité numérique, le pas de temps Δt doit respecter la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) :

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{4D + h^2 K_{max}} \approx \frac{h^2}{4D} \quad (17)$$

Puisque le pas spatial est $h = L/N_x$, on a $h^2 \propto 1/N_x^2$. Par conséquent, pour simuler une même durée physique T_{max} , le pas de temps Δt doit diminuer quadratiquement lorsque la résolution augmente. Le nombre d'itérations temporelles suit alors.

$$N_t = \frac{T_{max}}{\Delta t} \propto N_x^2 \quad (18)$$

4.2.3 Complexité globale

La complexité algorithmique totale de la simulation, notée \mathcal{C}_{total} , est le produit du coût spatial et du nombre d'itérations temporelles :

$$\mathcal{C}_{total} \approx \mathcal{C}_{spatial} \times N_t \approx \mathcal{O}(N_x^2) \times \mathcal{O}(N_x^2) = \mathcal{O}(N_x^4) \quad (19)$$

4.3 Implémentation de la méthode et résultats

On implémente la méthode avec des paramètres issues du modèle probabiliste à savoir $N_{initial} = 50000$, $D = 150\text{m}^2 \cdot \text{jour}$, $R_{trap}^2 = \frac{5^2}{\ln(pc0) - \ln(pc5)} \approx 12.02\text{m}^2$, $\gamma = 0.8\text{jour}^{-1}$ et $\nu = 0.2\text{jour}^{-1}$

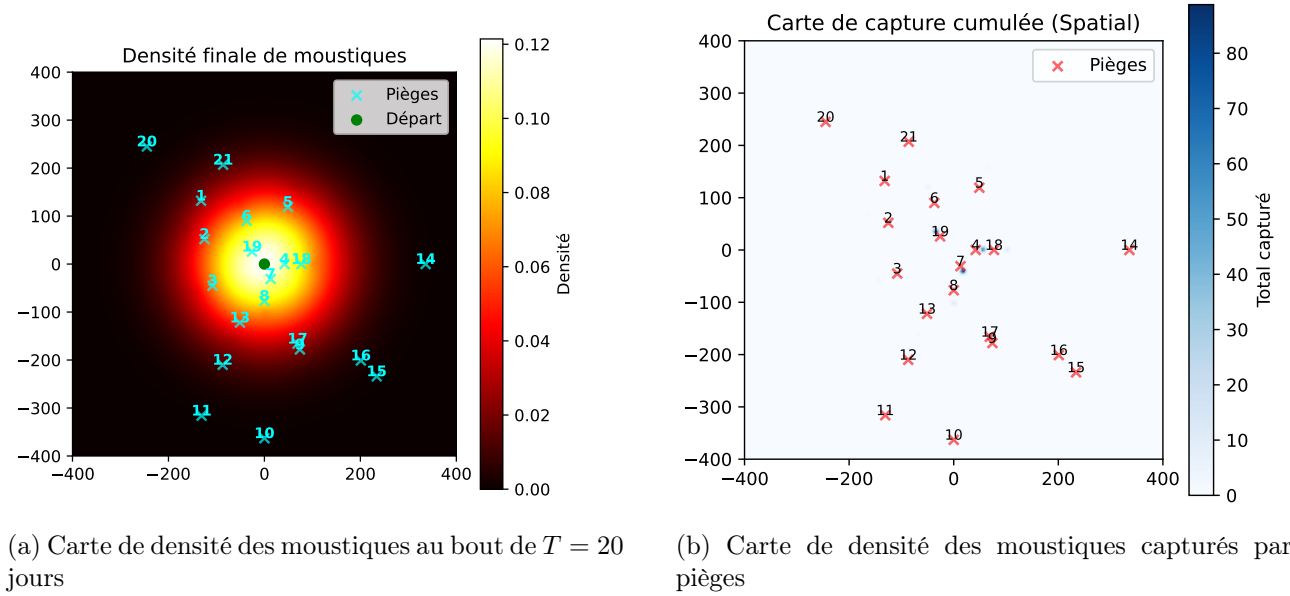


FIGURE 1 – Résultat de la simulation avec les hyperparamètres du modèle cible

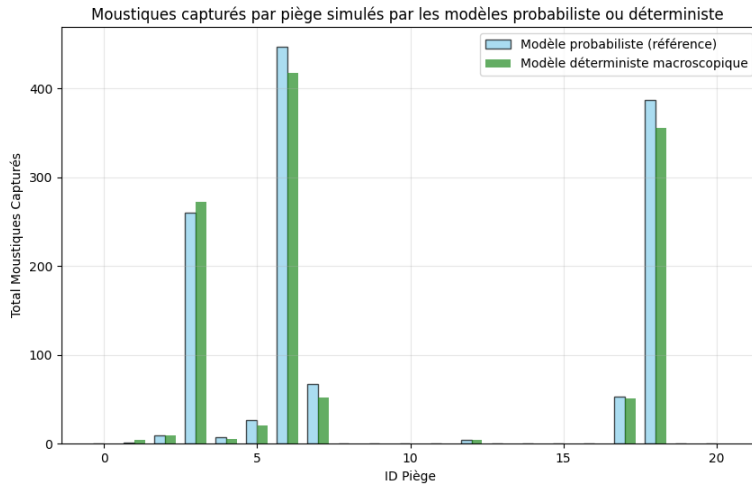


FIGURE 2 – Comparaison du modèle probabiliste et du modèle déterministe (simulation par différences finies)

4.4 Analyse des résultats

Les résultats de la simulation 1 sont cohérents avec l'équation de diffusion de Fokker-Planck (8), les contributions des pièges ne sont pas visibles graphiquement en raison du taux de capture relativement faible par rapport au nombre de moustiques morts en raison de facteurs naturels. En effet pour 50000 moustiques lâchés initialement, 48292 meurent en raison de facteurs naturels (contribution du terme $\nu\rho$) et 1192 sont capturés par les pièges. On observe sur la figure 2 que notre simulation par la méthode des différences finis permet de retrouver les résultats du modèle probabiliste de façon cohérente et avec des temps de calcul bien inférieurs, on retrouve ici la dualité du modèle microscopique et macroscopique. Ainsi, on peut conclure que notre modèle est bien calibré.

5 Méthode des éléments finis

L'objectif de cette section est d'approcher numériquement une solution de l'équation de diffusion via la méthode des éléments finis. Cette méthode comporte plusieurs avantages par rapport à la méthode des éléments finis. Tout d'abord, elle permet une grande robustesse par rapport aux paramètres du modèle. De plus, la méthode des éléments finis permet de construire un maillage adapté, précis localement dans les zones à fortes concentrations de pièges, tout en garantissant la convergence. La définition des espaces, des fonctions test et de la formulation variationnelle sont décrites dans l'article (CHAIEB et al., 2025). Au cours de cette étude, un maillage triangulaire régulier, ne dépendant pas de la présence de pièges, afin de faciliter l'implémentation numérique.

5.1 Définition du maillage triangulaire

On considère $h > 0$ le pas de discrétisation et $\Omega = [-N, N] \times [-M, M]$ le domaine de diffusion. On définit la grille de nœuds par :

$$N_h = \{(ih, jh) \mid i = -N, \dots, N, j = -M, \dots, M\} \quad (20)$$

où $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ représente un point du maillage.

Pour $i = -N, \dots, N-1$ et $j = -M, \dots, M-1$, on associe à chaque nœud le carré

$$S_{i,j} = [ih, (i+1)h] \times [jh, (j+1)h] \quad (21)$$

qui constitue une subdivision élémentaire de Ω .

Chaque carré $S_{i,j}$ est découpé en deux triangles (voir figure 3), définis par

$$T_{i,j}^{(1)} = \text{conv}\{(ih, jh), ((i+1)h, jh), ((i+1)h, (j+1)h)\} \quad (22)$$

$$T_{i,j}^{(2)} = \text{conv}\{(ih, jh), ((i+1)h, (j+1)h), (ih, (j+1)h)\} \quad (23)$$

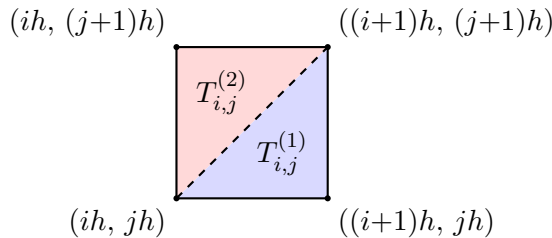


FIGURE 3 – Subdivision d'un carré $S_{i,j}$ en deux triangles $T_{i,j}^{(1)}$ et $T_{i,j}^{(2)}$

où

$$\begin{aligned} \text{conv} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \\ A &\longmapsto \text{conv}(A) \end{aligned}$$

désigne l'application qui associe à tout ensemble fini $A = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^d$ son enveloppe convexe :

$$\text{conv}(A) = \left\{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\} \quad (24)$$

Autrement dit, $\text{conv}(A)$ est le plus petit ensemble convexe contenant A .

Le maillage triangulaire¹ complet est alors

$$\mathcal{T}_h = \bigcup_{i=0}^{N-1} \bigcup_{j=0}^{M-1} \{T_{i,j}^{(1)}, T_{i,j}^{(2)}\} \quad (25)$$

5.2 Étude de l'EDO

Après projection sur la base $(\varphi_{i,j})_{i,j}$, l'assemblage conduit au système d'équations différentielles ordinaires

$$M \dot{U}(t) + (A + R) U(t) = 0 \quad (26)$$

où les matrices sont définies par :

$$M_{(i,j),(k,l)} = \int_{\Omega} \varphi_{i,j}(x, y) \varphi_{k,l}(x, y) dx dy \quad (27)$$

$$A_{(i,j),(k,l)} = \int_{\Omega} D \nabla \varphi_{i,j}(x, y) \cdot \nabla \varphi_{k,l}(x, y) dx dy \quad (28)$$

$$R_{(i,j),(k,l)} = \int_{\Omega} K(x, y) \varphi_{i,j}(x, y) \varphi_{k,l}(x, y) dx dy \quad (29)$$

Pour étudier l'EDO matricielle obtenue, on peut utiliser le schéma de Crank-Nicolson qui consiste à approximer la dérivée temporelle par une différence centrée et à considérer une moyenne des termes à t^n et t^{n+1} pour le second membre.

Le schéma s'écrit donc :

$$M \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (A + R) (U^{n+1} + U^n) = 0 \quad (30)$$

En réarrangeant, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2} (A + R) \right) U^{n+1} = \left(M - \frac{\Delta t}{2} (A + R) \right) U^n \quad (31)$$

On obtient après intégration numérique, les coefficients suivants pour les matrices de masse, de rigidité et de réaction :

$$A = D \begin{pmatrix} 4 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (32)$$

avec des 4 sur la diagonale (intégrale faisant intervenir 2 fois la même fonction test) et des -1 lorsque l'on fait l'intégrale produit entre une fonction test en un point et celle en un autre point voisin, telle que ces 2 voisins partagent une arête.. Pour M, on obtient

$$M = \frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} 6 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 6 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad (33)$$

avec des 6 sur la diagonale (intégrale faisant intervenir 2 fois la même fonction test) et des 1 lorsque l'on fait l'intégrale produit entre une fonction test en un point et celle un autre point voisin, telles que ces 2 voisins partagent au moins 1 triangle (moins restrictif).

1. Le choix d'un tel maillage se justifie par sa facilité d'implémentation et son adaptation au problème.

5.3 Complexité et précision

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la complexité dépend principalement de l'assemblage du système linéaire (matrice de raideur et vecteur second membre), ainsi que de sa résolution à chaque pas de temps. En considérant un maillage régulier composé de N_x^2 éléments triangulaires, la phase d'assemblage est de complexité $\mathcal{O}(N_x^2)$, tandis que la résolution d'un système linéaire creux de taille $N_x^2 \times N_x^2$ est dans notre cas en $\mathcal{O}(N_x^3)$. La complexité temporelle globale s'élève donc à $\mathcal{O}(N_t \times N_x^3)$.

Sur le plan de la précision, la méthode des éléments finis linéaires (\mathbb{P}_1) sur un maillage régulier fournit une approximation spatiale du second ordre : l'erreur est en $\mathcal{O}(h^2)$, où h désigne la taille caractéristique des éléments du maillage. Pour le temps, l'utilisation de la méthode de Crank-Nicolson entraîne une erreur en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

5.4 Implémentation de la méthode et résultats

On implémente la méthode avec des paramètres issue du modèle probabiliste à savoir $N_{initial} = 50000$, $D = 150$, $R_{trap}^2 = \frac{5^2}{\ln(pc0) - \ln(pc5)}$, $\gamma = 0.8$ et $\nu = 0.2$

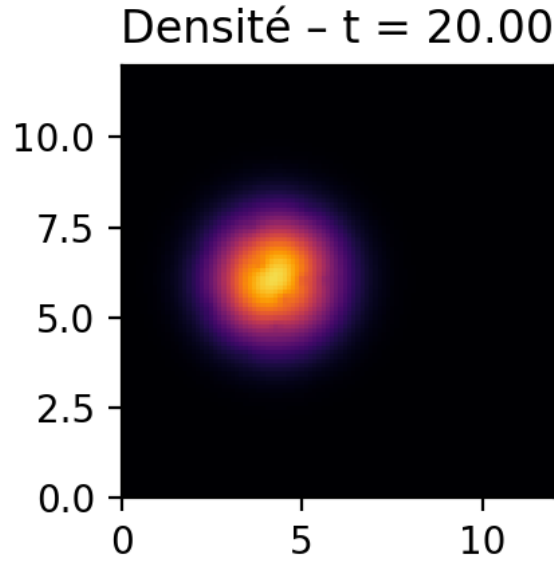


FIGURE 4 – Carte de densité finale des moustiques

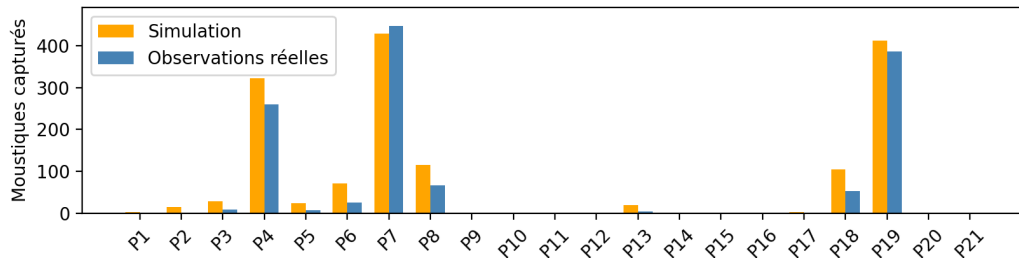


FIGURE 5 – Comparaison du modèle probabiliste et du modèle déterministe résultat de la simulation par éléments finis

5.5 Analyse des résultats

On observe que notre simulation à l'aide de la méthode des éléments finis permet de retrouver les résultats du modèle probabiliste de façon cohérente. Cependant, certaines configurations de paramètres donnent des résultats meilleurs. De plus, la complexité temporelle élevée du programme (deux à trois minutes pour une grille 100*100) empêche de déterminer rigoureusement les valeurs optimales par un algorithme de descente du gradient.

6 Méthode des volumes finis

6.1 Synthèse - rappel de la modélisation par Volumes Finis

Nous reprenons quelques aspects théoriques et quelques définitions de la méthode des volumes finis (voir Partie 6 CHAIEB et al., 2025).

La méthode des Volumes Finis (MVF), conservative par construction, repose sur la discrétisation des lois de conservation intégrales sur un maillage du domaine Ω .

6.1.1 Maillage et Géométrie

Le domaine est partitionné en un ensemble de cellules (ou volumes de contrôle) convexes, notées C , formant un maillage admissible \mathcal{T} . Chaque cellule est définie par son volume $|C|$ et un centre \mathbf{r}_C . Pour garantir la consistance des flux numériques, le maillage doit respecter une condition d'orthogonalité : le segment reliant les centres de deux cellules voisines C et L doit être orthogonal à leur arête commune $e = (C|L)$.

6.1.2 Discrétisation spatiale et temporelle

En intégrant l'équation sur chaque cellule C et en appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky, le bilan de masse s'écrit :

$$|C| \frac{d\rho_C}{dt} + \sum_{e \in \mathcal{E}_C} \Phi_e = -|C|(\nu + K_C)\rho_C \quad (34)$$

Le flux diffusif Φ_e est approximé par : $\Phi_e \approx -D \frac{|e|}{d_{CL}} (\rho_L - \rho_C)$.

Pour assurer la stabilité numérique face aux termes de réaction, nous utilisons un schéma d'Euler **implicite**. La densité à l'instant t^{k+1} est solution du système linéaire :

$$(\mathbf{V} - \Delta t \mathbf{D} \mathbf{A} + \Delta t \mathbf{V} \mathbf{R}) \boldsymbol{\rho}^{k+1} = \mathbf{V} \boldsymbol{\rho}^k \quad (35)$$

Où :

- \mathbf{V} est la matrice diagonale des volumes $|C|$.
- \mathbf{A} est la matrice laplacienne contenant les transmissibilités $\frac{|e|}{d_{CL}}$.
- \mathbf{R} est la matrice diagonale des taux de perte cumulés : $R_{ii} = \nu + K(r_C)$.

6.2 Complexité de l'algorithme et précision

Dans le cadre de la méthode des volumes finis, la complexité dépend principalement de la génération du maillage et des matrices du système, mais aussi la boucle de calcul pour inverser le système linéaire. La triangulation de Delaunay est de complexité $\mathcal{O}(N_x^2 \log N_x)$, la génération et factorisation des matrices est de complexité $\mathcal{O}(N_x^3)$ et la boucle de simulation est de complexité $\mathcal{O}(N_t * N_x^2 \log N_x)$. Ainsi, la complexité temporelle globale s'élève à $\mathcal{O}(N_t * N_x^2 \log N_x) + \mathcal{O}(N_x^2)$.

6.3 Résultats

La simulation a été réalisée sur un domaine carré $L \in [-400, 400]$ discrétisé par un maillage non structuré généré via une triangulation de Delaunay ($N \approx 8100$ points). La dynamique de la population de moustiques est régie par une équation de diffusion-réaction prenant en compte :

- La diffusion ($D = 150$) simulant le mouvement aléatoire.
- La mortalité naturelle ($\lambda = 0.2$).
- Les termes puits (pièges) modélisés par des fonctions gaussiennes locales ($A = 0.8$, $\sigma = 3$).

L'état initial correspond à une concentration dense centrée en $(0, 0)$ et de rayon 5.

À $t = 20$, la population passe de l'état initial (approx. 46000 individus) à une population résiduelle, témoignant de l'efficacité du système de piégeage sur l'horizon temporel considéré.

6.4 Distribution spatiale et diffusion

La carte de densité (Figure 6a) illustre l'étalement du nuage de moustiques. Le maillage non structuré permet de résoudre correctement les gradients de concentration sans privilégier de direction axiale. On observe clairement l'effet local des pièges : des zones de faible densité (en bleu sombre) apparaissent autour des pièges. Le centre du domaine reste la zone la plus dense, la diffusion n'ayant pas encore transporté la totalité de la population vers les pièges.

6.5 Analyse de l'efficacité des pièges

L'histogramme des captures (Figure 6b) révèle une forte hétérogénéité dans l'efficacité des pièges. Cette disparité s'explique par la topologie du système :

Proximité de la source : Les pièges situés proches de l'origine $(0, 0)$ (le centre de l'essaim initial) enregistrent les scores les plus élevés. Ils interceptent la population avant qu'elle ne se disperse.

6.6 Maillage adapté aux pièges

Le nouveau code ne se contente plus de poser des points au hasard uniformément. Il utilise une technique appelée Échantillonnage par rejet (Rejection Sampling) pour créer un maillage adaptatif : il y aura beaucoup de petits triangles près des pièges (pour la précision) et des gros triangles loin des pièges (pour économiser du temps de calcul dans les zones moins intéressantes).

6.6.1 Méthode de génération du maillage

Pour déterminer le maillage, les points sont en fait encore générés aléatoirement ; seulement ici, on augmente la probabilité de générer des points près des pièges.

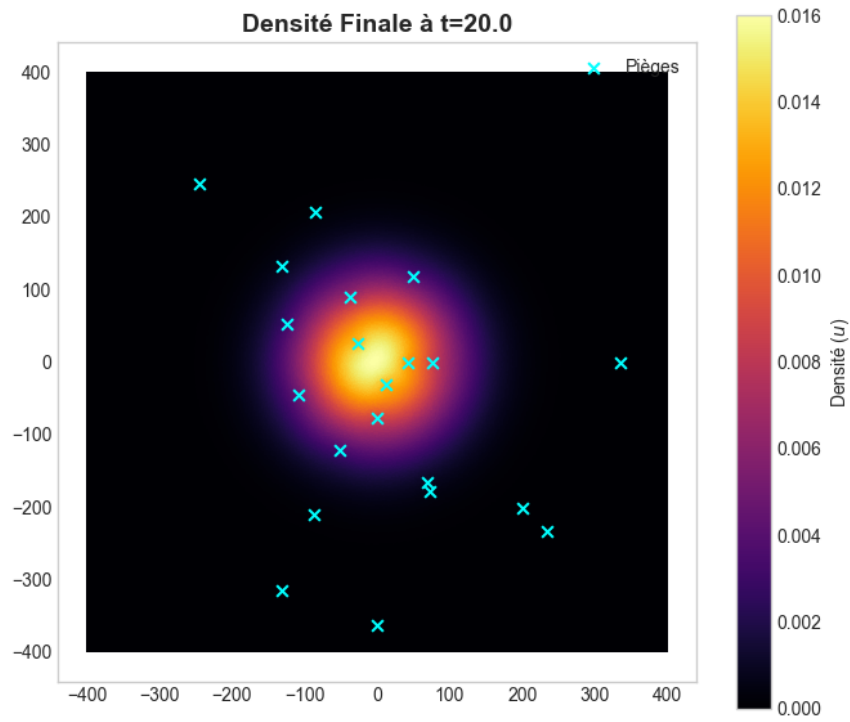
Pour cela, on introduit une fonction de densité de points $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ qui est d'autant plus proche de 1 dans une zone donnée que l'on veut générer de nombreux points dans cette zone.

Ensuite, pour générer les point, on suit la méthode suivante : on tire un point (x, y) aléatoirement suivant la loi uniforme sur Ω ainsi qu'une valeur aléatoire λ , on conserve alors le point si et seulement si $f(x, y) > \lambda$. On recommence ensuite la procédure jusqu'à avoir le nombre de points souhaité.

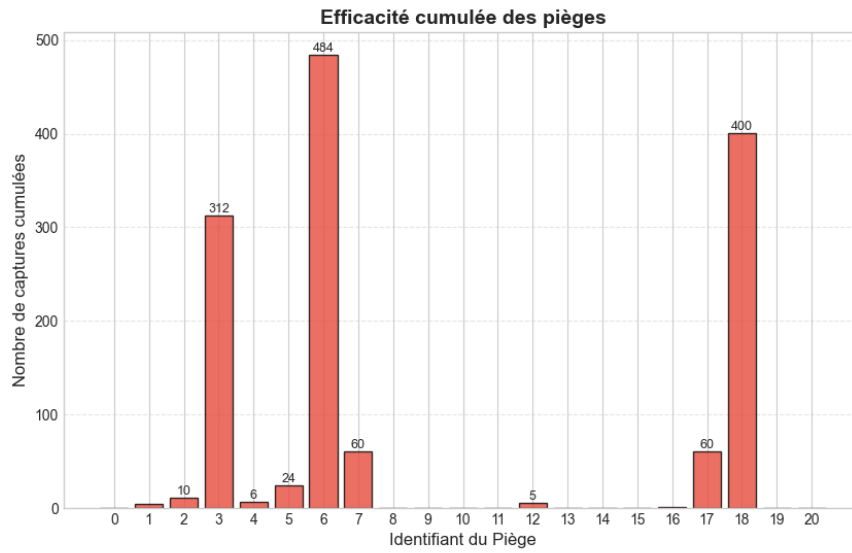
Dans notre cas nous avons utilisé la fonction : $f(r) = \max_{i \in \{1, \dots, N_{\text{piège}}\}} (g(|r - r_i|))$ où r_i est la position

$$\text{au } i\text{-ème piège et } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq R_{\text{trap}} \\ 1 - 0.85 * \frac{x - R_{\text{trap}}}{R} & \text{si } R_{\text{trap}} \leq x < 2R_{\text{trap}} \\ 0.15 & \text{sinon} \end{cases}$$

où R_{trap} est la taille caractéristique des pièges. Ce qui donne le profil donné en figure 7. Pour en faire un maillage, on utilise ensuite la triangulation de Delaunay, la figure 8 montre comment les triangles du maillage sont répartis.



(a) Densité de moustiques



(b) Efficacité des pièges

FIGURE 6 – Résultat de la simulation de la MVF à $t=20$

6.6.2 Résultats avec un maillage adapté

Les résultats obtenus restent très proches de ceux de la figure 6a, et sont proches des résultats du modèle probabiliste (Cf figure 9). Le temps de calcul est identique car on garde le même nombre de points, la seule différence est l'augmentation de la précision.

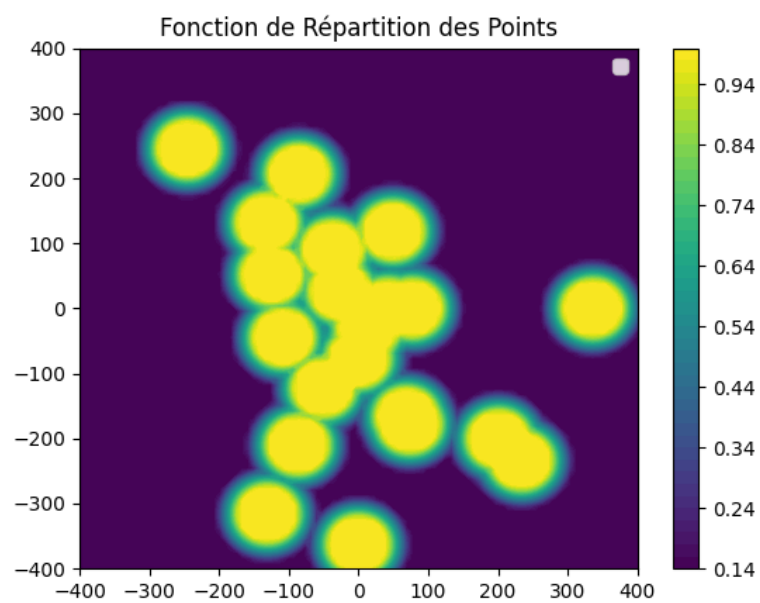


FIGURE 7 – Fonction de densité de points choisie

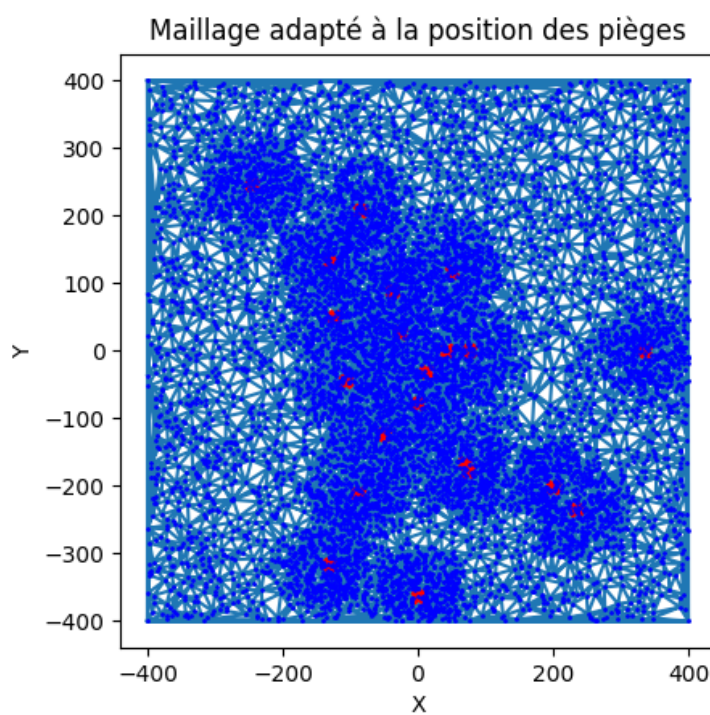


FIGURE 8 – Maillage MVF

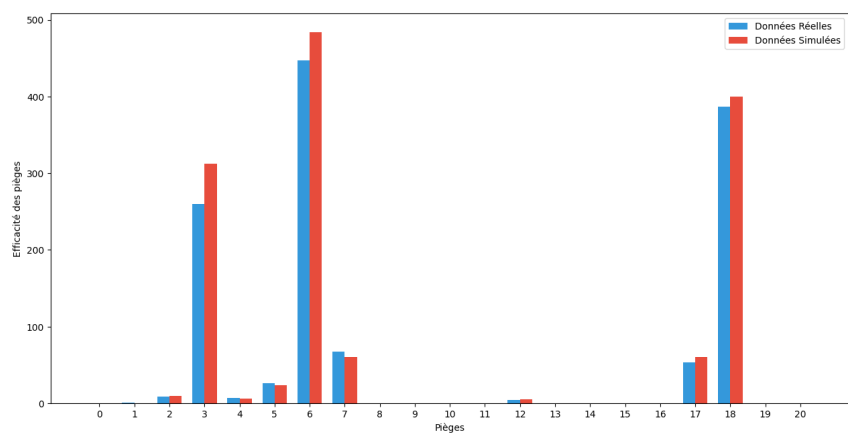


FIGURE 9 – Comparaison des résultats de la MVF avec le modèle probabiliste

7 Inférence des paramètres physiques de notre modèle à partir de données de captures réelles

7.1 Motivation

Maintenant que notre simulation déterministe est bien calibrée, notre objectif est d'adapter cette simulation à des situations réelles en inférant à partir des données de captures des pièges, les paramètres macroscopiques de l'équation de réaction-diffusion. Cela va alors nous permettre d'offrir une modélisation précise du déplacement de l'ensemble des moustiques.

La méthode des différences finies converge suffisamment rapidement pour pouvoir être utilisé pour optimiser ces paramètres.

7.2 Identifiabilité des paramètres physiques

7.2.1 Justification du problème d'identifiabilité

En reprenant les résultats sur l'identifiabilité des paramètres présentés dans l'article CAPEL et MUÑOZ, 2024, les paramètres γ et R_{trap} correspondant respectivement à l'efficacité maximal des pièges et leurs rayon caractéristique de capture, souffrent d'un manque d'identifiabilité critique. Pour mettre en évidence le conflit d'identifiabilité de ces paramètres, la topologie de la fonction de coût en fonction des paramètres γ et R_{trap} est tracée en figure 10. En effet, le paysage ne représente pas un puits

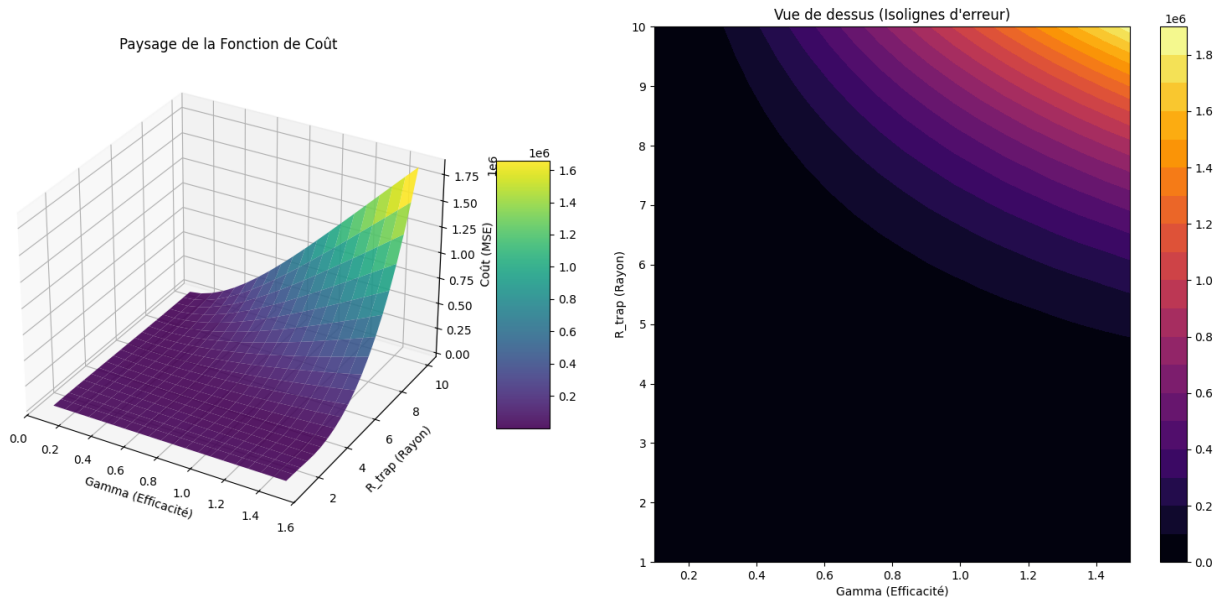


FIGURE 10 – Paysage de la fonction de coût en fonction de γ et R_{trap}

marqué mais une zone de compromis où une augmentation de l'efficacité γ peut être compensée par une diminution du rayon R_{trap} .

7.2.2 Solution appliquée : contrainte fonctionnelle

Pour stabiliser l'optimisation L-BFGS-B et garantir l'unicité de la solution, nous avons introduit une relation fonctionnelle entre les deux paramètres. En imposant une contrainte de risque de capture cible à une distance donnée (ex : $R_{trap} = \sqrt{\frac{25}{\ln(\gamma/0.1)}}$), nous réduisons l'espace de recherche à une courbe au sein de cette vallée. Cette méthode permet d'assurer la convergence vers des paramètres biologiquement interprétables tout en respectant la physique du modèle de réaction-diffusion.

7.2.3 Identifiabilité des autres paramètres

Pour vérifier la robustesse de notre méthode d'optimisation, nous réalisons un GridSearch sur le paramètre de diffusivité D et le taux de mortalité naturelle ν . Dans cette analyse, les paramètres de capture γ et R_{trap} ont été fixés.

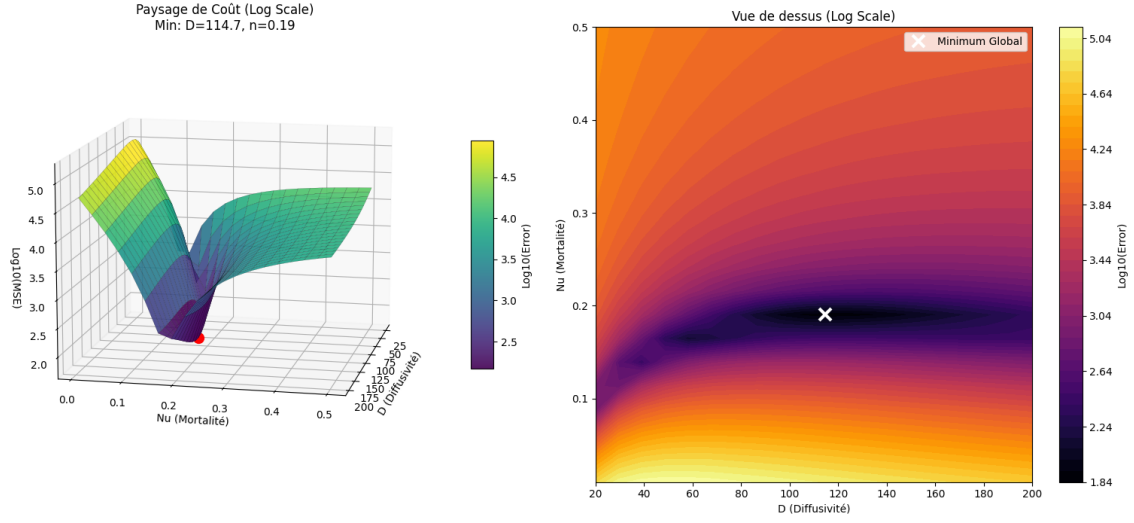


FIGURE 11 – Paysage de la fonction de coût en fonction de D et ν

Les résultats obtenus, illustrés par le paysage de la fonction de coût (MSE) en Figure 11, permettent de tirer les conclusions suivantes :

- **Présence d'un minimum global unique** : Contrairement aux paramètres de capture, le couple (D, ν) affiche un puits de potentiel nettement marqué. Cela indique que ces deux paramètres sont structurellement identifiables.
- **Découplage des mécanismes de perte** : Bien que la diffusion (dispersion spatiale) et la mortalité (décroissance temporelle) contribuent toutes deux à la réduction du nombre de moustiques détectés localement par un piège, elles possèdent des signatures mathématiques distinctes.

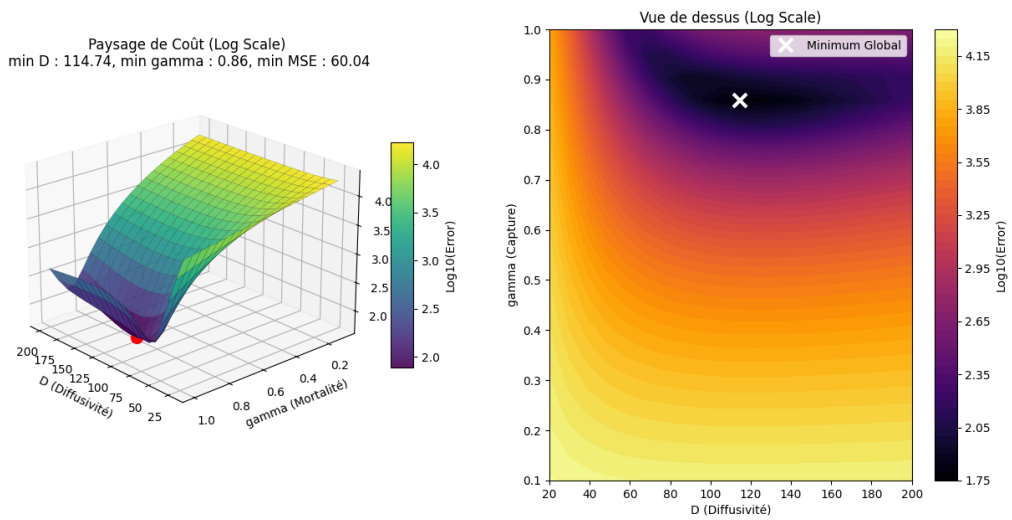


FIGURE 12 – Paysage de la fonction de coût en fonction de D et γ

Par ailleurs, l'analyse de sensibilité croisée entre la diffusivité (D) et l'efficacité des pièges (γ), réalisée en annexe 12, révèle la présence d'un minimum global unique, confirmant que les paramètres

techniques du pièges sont découplés de la dynamique de dispersion. Ainsi, l'existence de ces minimums garantit l'existence d'une solution à notre problème d'optimisation.

7.3 Stratégie d'optimisation et algorithme de minimisation

L'optimisation des paramètres physiques de notre modèle (D, ν, γ) constitue un problème d'optimisation non linéaire.

7.3.1 Formulation de la fonction de coût

Notre métrique est la fonction MSE (*Mean Square Error*) qui va calculer l'erreur quadratique entre le nombre de moustiques capturés dans la simulation et les données réelles pour chaque piège. L'objectif est de minimiser cette fonction de coût $J(\theta)$ en ajustant les paramètres du modèle via la fonction `minimize` du module `scipy.optimize`.

7.3.2 Justification de l'algorithme L-BFGS-B

Le choix de l'algorithme de minimisation **L-BFGS-B** (*Limited-memory Broyden Fletcher Goldfarb Shanno with Bounds*) est motivé par les 2 points suivants :

1. **Coût de calcul de la fonction objectif** : Notre fonction de coût $J(\theta)$ repose sur une simulation numérique complète (MDF) à chaque évaluation. Le calcul de la matrice Hessienne exacte (dérivées secondes) est computationnellement trop lourd pour être calculé de façon exacte. L-BFGS-B appartient aux méthodes *quasi-Newton*, qui approximent la Hessienne sans la calculer explicitement, offrant une convergence plus rapide que la simple descente de gradient.
2. **Contraintes physiques strictes (Bounds)** : Les paramètres du modèle représentent des grandeurs physiques qui ne peuvent être négatives (ex : un coefficient de diffusion $\sigma < 0$ ou un rayon $R_{trap} < 0$ n'a aucun sens physique). La variante "-B" de l'algorithme permet de définir des bornes strictes ($\mathbf{l} \leq \theta \leq \mathbf{u}$), garantissant la validité physique de la solution.

7.3.3 Principe de l'algorithme L-BFGS-B

L'algorithme cherche à minimiser une fonction objectif régularisée définie par :

$$J(\theta) = \text{MSE}(\theta) + \lambda \cdot \Omega(\theta) \quad (36)$$

Où MSE est l'erreur quadratique moyenne entre les captures simulées et réelles, et Ω est le terme de régularisation (pénalité L2) maintenant les paramètres proches des priors physiques.

L'algorithme L-BFGS approxime l'inverse de la Hessienne $H_k \approx [\nabla^2 J]^{-1}$ en utilisant les informations de courbure accumulées lors des itérations précédentes. La mise à jour suit la formule :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha_k H_k \nabla J(\theta_k) \quad (37)$$

où α_k est le pas d'apprentissage déterminé par une recherche linéaire.

7.4 Résultats de l'optimisation et analyse

En testant notre optimisation pour retrouver les paramètres de l'optimisation La procédure d'optimisation converge (au bout de 23 itérations) vers les paramètres suivants :

- **Diffusion** : $D_{approx} = 134$ - valeur cible $D=150$ (10% d'erreur)
- **Taux de mort naturelle** $\nu_{approx} = 0.18$ - valeur cible $\nu = 0.2$ (8% d'erreur)
- **Paramètres des pièges** : $\gamma_{approx} = 0.58, R_{trap_{approx}} = 0.3.77$ - valeurs cibles : $\gamma = 0.8$ et $R_{trap} = 3,46m$ Cependant ici, il ne s'agit pas d'une erreur d'approximation de la méthode car on a là encore un problème d'identifiabilité des paramètres.

La comparaison des captures par piège entre notre simulation avec les résultats optimisés et les données de la simulation probabiliste est la suivante (figure 13) :

Ainsi, cette méthode d'optimisation offre des résultats d'approximation précis et fonctionnel, en un temps de convergence plutôt faible (23 itérations).

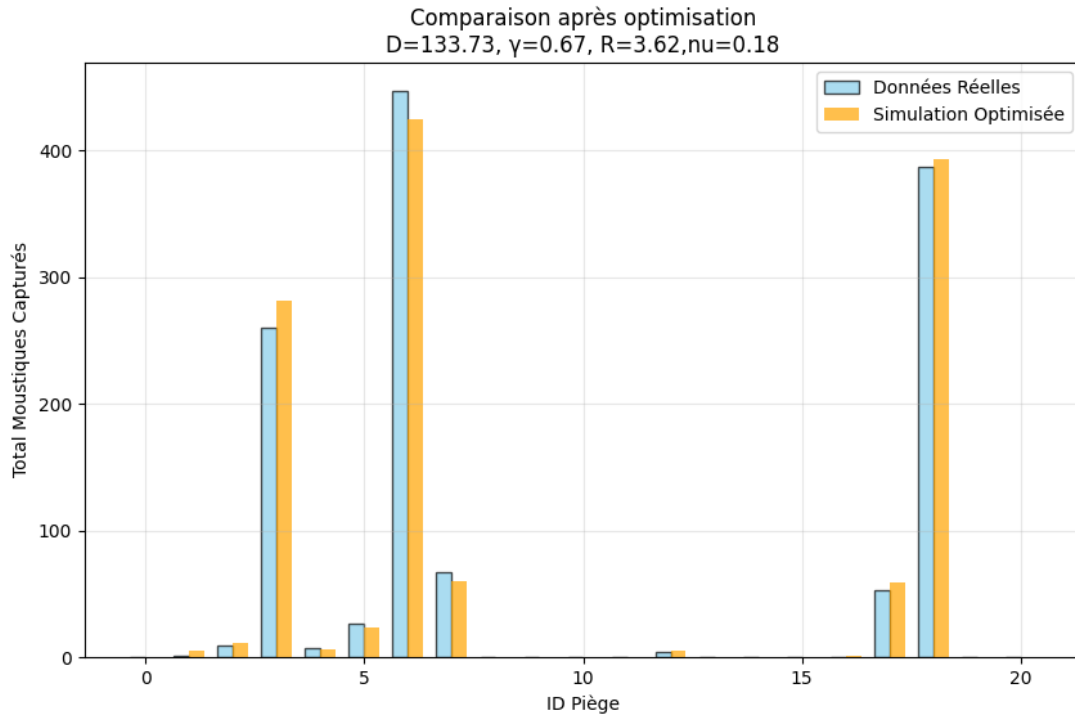


FIGURE 13 – Résultat de l’optimisation permettant de retrouver les paramètres du modèle cible

7.5 Conclusion sur l’inférence des paramètres par la méthode d’optimisation

La méthode est validée scientifiquement pour l’inférence des paramètres de survie et de dispersion, mais nécessite la fixation d’un paramètre de capture pour garantir l’unicité des solutions liées aux pièges.

8 Conclusion

Ce travail a permis d'établir un cadre mathématique et numérique robuste pour la modélisation de la dynamique des populations de moustiques soumis à des dispositifs de piégeage, dans l'optique d'optimiser les stratégies de lutte vectorielle type SIT.

Sur le plan théorique, notre étude analytique a mis en évidence l'absence de solutions exactes fermées pour des fonctions de capture physiquement réalistes. Si l'approche perturbative via la série de Duhamel offre un cadre rigoureux pour comprendre les mécanismes de capture à temps court, sa complexité combinatoire limite fortement son usage pratique, justifiant le recours aux méthodes numériques.

Sur le plan numérique, la mise en œuvre comparative des méthodes des Différences Finies (MDF), Éléments Finis (MEF) et Volumes Finis (MVF) a confirmé la cohérence du modèle continu basé sur l'équation de diffusion avec les simulations stochastiques atomistiques. Bien que la MEF et la MVF offrent une meilleure gestion des géométries complexes et des gradients locaux autour des pièges, la méthode des Différences Finies s'est révélée particulièrement efficace en termes de compromis coût/implémentation pour les tâches d'optimisation itératives.

Pour la suite, il serait intéressant d'essayer de calibrer les paramètres du modèle de diffusion pour qu'il permette de reproduire le comportement d'observation réel. Pour cela, nous avons déjà mis en place une méthode qui nous permet d'ajuster les paramètres de l'équation à des données réelles. Néanmoins, nous n'avons pas eu le temps et ni les données pour déterminer les paramètres optimaux dans qui correspondent aux observation, bien que la méthode fonctionne et puisse facilement être mise en place une fois les données acquises.

Annexes

A Code

Le dépôt GitLab utilisé pour le projet est disponible à [cette adresse](#).

B Données

Les données de captures utilisées pour l'ensemble des simulations sont présentées dans le [tableau 1](#), tandis que les coordonnées des pièges sont reportées dans le [tableau 2](#).

TABLE 1 – Captures cumulées au fil des jours pour chaque piège

Jour	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Piège 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piège 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Piège 3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	9
Piège 4	0	8	52	103	147	173	202	218	231	237	241	246	251	254	257	259	260	260	260	260	260
Piège 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3	4	5	5	5	7	7
Piège 6	0	0	0	0	1	3	4	6	9	12	15	18	19	21	24	25	25	25	25	25	26
Piège 7	0	37	143	244	312	353	389	403	415	422	433	437	440	443	444	447	447	447	447	447	447
Piège 8	0	0	0	3	11	18	22	28	42	46	50	55	57	61	62	64	66	66	66	67	67
Piège 9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piège 10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piège 11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piège 12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piège 13	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4
Piège 14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piège 15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piège 16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piège 17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piège 18	0	0	0	4	12	21	27	33	37	42	43	44	47	47	50	50	50	50	51	53	53
Piège 19	0	37	117	190	246	289	310	332	351	361	371	372	373	379	381	383	385	385	387	387	387
Piège 20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Piège 21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 2 – Coordonnées (x, y) des pièges

id	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x	-131.7	-124.7	-108.3	42.3	49.2	-37.3	12.8	0.0	73.6	0.0	-130.8	-87.0	-50.6	335.9	233.9	200.8	68.9	76.6	-26.4	-245.4	-85.7
y	131.7	51.6	-44.9	0.0	118.7	90.2	-30.8	-76.9	-177.6	-362.8	-315.8	-210.0	-122.2	0.0	-233.9	-200.8	-166.3	0.0	26.4	245.4	207.0

Un petit script python permet également de visualiser ces données, un extrait de l'animation gif créée dans le projet gitlab est disponible à la [figure 14](#).

Nombre de moustique attrapés par pièges (J=19)

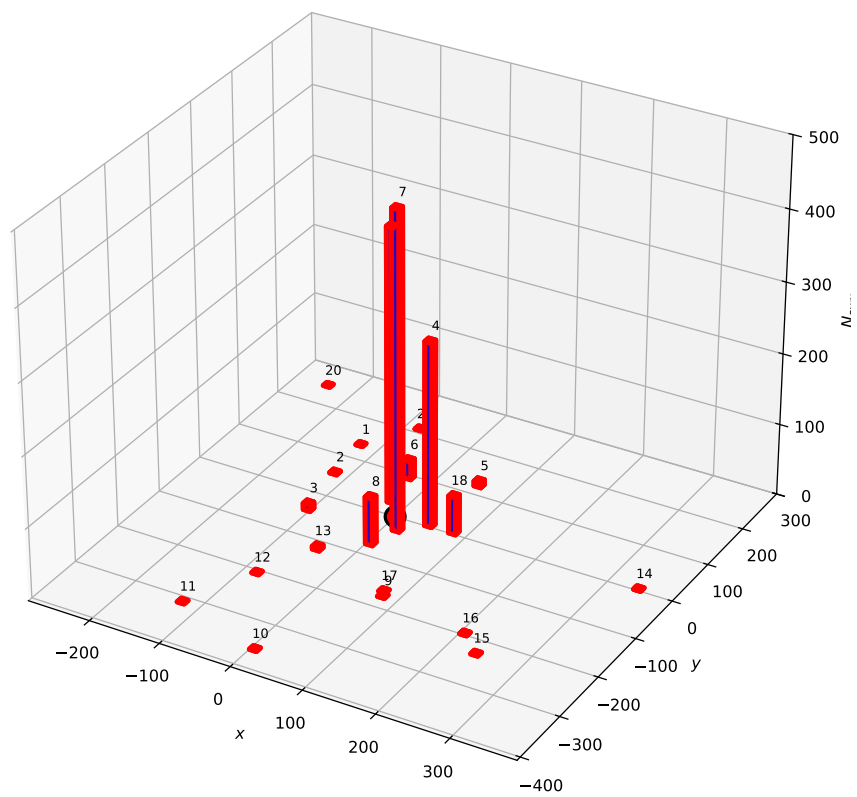


FIGURE 14 – Plot 3D des données de captures utilisées

Références

- CAPEL, A., & MUÑOZ, F. (2024, septembre). *Survival and dispersion model using capture time for SIT* (Research Report). CIRAD. <https://umr-astre.pages-forge.inrae.fr/sit-methods/>
- CHAIÉB, A., PETIOT, B., MUDARRA, L., BOURRET, L., & MUÑOZ, F. (2025). Points de divergence négative dans l'équation de diffusion pour la modélisation de capture des moustiques [Projet d'études - Programme ingénieur CentraleSupélec]. <https://hal.science/hal-05084285v1>
- CIARLET, P. G. (1978). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland.
- CIRAD. (s. d.). CIRAD - Centre de coopération internationale en recherche agronomique pour le développement.
- CRANK, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion* (2^e éd.). Oxford University Press.
- KATO, T. (1995). *Perturbation Theory for Linear Operators* (2^e éd.). Springer Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-642-66282-9>
- NGUYEN, N., BONNEFON, O., GATO, R., ALMEIDA, L., & ROQUES, L. (2025). Mechanistic-statistical inference of mosquito dynamics from mark-release-recapture data [Preprint submitted to HAL on 9 Oct 2025]. *hal-05306369*. <https://hal.science/hal-05306369v1>
- PIRONNEAU, O. (1988). *Finite Element Methods for Fluids* [Notes de cours données à l'Université Pierre et Marie Curie & INRIA ; à paraître en 1988, Wiley]. Wiley. Récupérée mai 9, 2025, à partir de <https://www.ljll.fr/pironneau/publi/publications/OPfemInFluids.pdf>
- TURBINER, A., & USHVERIDZE, A. (1987). Spectral singularities and quasi-exactly solvable quantal problem. *Physics Letters A*, 126(3), 181-183. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0375-9601\(87\)90456-7](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0375-9601(87)90456-7)