



# Etude de la dynamique des foules

Par le biais de la physique moderne

## **Auteurs :**

NADAUD Antonin  
JANINI Raphaël  
LUBIN Thomas  
NUCE LAMOTHE Augustin

## **Encadrant :**

DESPLAT Lucie

**11 mai 2025**



# Sommaire

<b>1</b>	<b>Objectif</b>	<b>1</b>
1.1	Évacuation depuis une salle unique . . . . .	1
1.2	Comparaison entre une et deux issues de secours . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Théorie sous-jacente</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Méthode</b>	<b>2</b>
3.1	Determiner l'équation . . . . .	2
3.2	Resolution d'équation différentielle . . . . .	3
3.2.1	Contextualisation . . . . .	3
3.2.2	Méthode Euler . . . . .	4
3.2.3	Résultat graphique . . . . .	4
3.2.4	Resultats de runge kutta 2 et 4 . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Explication du code</b>	<b>7</b>
4.1	Structure et contextualisation . . . . .	7
4.2	Modélisation physique . . . . .	7
4.2.1	Force motrice . . . . .	7
4.2.2	Force sociale(s) . . . . .	8
4.2.3	Force répulsion mur . . . . .	8
4.2.4	Force interaction rectangle . . . . .	9
4.3	Resolution . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Analyse</b>	<b>11</b>
5.1	Situation 1 . . . . .	11
5.2	Situation 2 . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Références</b>	<b>13</b>

---

# 1 Objectif

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un travail de foulométrie, visant à modéliser et analyser les dynamiques d'évacuation d'un groupe d'individus dans des environnements clos. À travers différentes configurations, nous cherchons à comprendre l'impact de la configuration des lieux sur le temps d'évacuation global. Deux scénarios ont été étudiés dans cette analyse.

## 1.1 Évacuation depuis une salle unique

Dans ce second scénario, on a deux salles identiques, mais leurs nombres de sortie est différent. En effet la salle 1 dispose d'une seule porte, tandis que la salle 2 en a deux. Les deux espaces accueillent 31 personnes (composés d'un professeur et d'étudiants). L'objectif est ici de quantifier l'impact de la présence d'une issue supplémentaire sur l'efficacité de l'évacuation, en comparant les temps d'évacuation des deux configurations.

## 1.2 Comparaison entre une et deux issues de secours

Dans ce second scénario, on a deux salles identiques, à l'exception du nombre de sorties : la salle 1 dispose d'une seule porte, tandis que la salle 2 en possède deux. Les deux espaces accueillent un total de 31 individus (composés d'un professeur et d'étudiants). L'objectif est ici de quantifier l'impact de la présence d'une issue supplémentaire sur l'efficacité de l'évacuation, en comparant les temps d'évacuation des deux configurations.

# 2 Théorie sous-jacente

Nous nous sommes appuyé sur les travaux du modèle de force sociale, de Helbing et Molnár<sup>1</sup>, visant à simuler le comportement de piétons dans des foules. Il y a deux forces principales dans ce modèle : la force motrice et la force d'interaction.

**Force motrice.** Chaque individu  $i$  cherche à atteindre une vitesse souhaitée  $\vec{v}_i^0$  dans une direction donnée. Ce comportement est modélisé par une force motrice, qui pousse l'individu à ajuster sa vitesse actuelle  $\vec{v}_i$  à sa vitesse désirée, selon :

---

1. Lien vers l'étude <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.4282>

---


$$\vec{f}_i^m = m_i \frac{\vec{v}_i^0 - \vec{v}_i}{\tau_i} \quad (1)$$

où  $m_i$  est la masse de l'individu et  $\tau_i$  est le temps de relaxation modélisant la rapidité avec laquelle l'individu peut atteindre sa vitesse cible.

**Force interaction.** Les piétons interagissent entre eux via des forces dites sociales, traduisant leur tendance à maintenir une distance avec d'autres personnes, aussi les piétons interagissent avec l'environnement avec des forces dites d'interaction. Ces interactions sont traduites par la même modélisation :

$$\vec{f}_{ij}^s = \exp\left(\frac{r_{ij} - d_{ij}}{B_i}\right) \vec{n}_{ij} \quad (2)$$

où :

- $B_i$  est une constante ( la zone de confort de la personne i),
- $r_{ij}$  est la somme des rayons des individus respectifs  $i$  et  $j$ ,
- $d_{ij}$  est la distance entre les centres des deux individus (ou individu masse),
- $\vec{n}_{ij}$  est le vecteur unitaire (de  $j$  vers  $i$ ).

Ces forces permettent de modéliser des comportements réalistes d'évitement.

## 3 Méthode

### 3.1 Déterminer l'équation

Afin d'établir l'équation, nous avons tout d'abord supposé que le référentiel d'étude est galiléen, pour ensuite appliquer la seconde loi de newton  $\sum \vec{F}_{\text{ext}}\{particule\} = m_{\text{particule}} \vec{a}$ .

(on ne considère pas le poids ni la réaction du support car selon  $\vec{e}_z$ )

On a :

$$\vec{f}_{\text{direction}} + \vec{f}_{\text{social}} = m_{\text{particule}} \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Au final après quelques simplification on a :

$$\frac{\vec{v}_i^0 - \vec{v}_i}{\tau_i} + \frac{1}{m_{\text{particule}}} \sum_{j \neq i} \exp\left(\frac{r_{ij} - d_{ij}}{B_i}\right) \vec{n}_{ij} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3)$$

---

## 3.2 Resolution d'équation différentielle

### 3.2.1 Contextualisation

Pour résoudre (3). Nous avons décidé d'utiliser la méthode d'Euler (car meilleure complexité temporelle). Nous avons aussi implémenté Runge-Kutta à l'ordre 2 et 4 :

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \Delta t \cdot \vec{F}_n$$

On introduit une personne modélisée en Python par un dictionnaire (pour mieux comprendre la fonction qui permet de résoudre cette équation) :

```
1 {  
2     "position": np.array([0, 0]),  
3     "masse": 10,  
4     "vitesse_desiree": 1.34,  
5     "vitesse": np.array([0, 0]), #vitesse initiale  
6     "to": .2,  
7     "rayon": 10 + random.randint(-2, 2),  
8     "destination": np.array([100,100])  
9 }
```

- "position" : Un tableau NumPy qui contient les coordonnées  $[x, y]$  de la personne dans l'espace.
- "masse" : La masse de la personne, ici fixée à 10 (arbitrairement).
- "vitesse\_desiree" : La vitesse désirée que la personne souhaite atteindre, (ici  $1.34 \text{ m s}^{-1}$ ).
- "vitesse" : Un tableau NumPy qui représente la vitesse initiale de la personne. La vitesse initiale est définie comme un vecteur nul  $[0, 0]$  (immobile au départ)
- "to" : fixé à 0.2 (capacité à être à l'aise proche d'une autre personne)
- "rayon" : Le rayon de la personne (représentée comme un cercle), fixé à 10 plus un nombre aléatoire compris entre -2 et 2.

**Equation à résoudre** On cherche à résoudre l'équation différentielle avec comme force seulement la force motrice pour simplifier l'interprétation graphique.

$$\frac{\vec{v}_i^0 - \vec{v}_i}{\tau_i} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4)$$

### 3.2.2 Méthode Euler

Le code qui permet de résoudre l'équation différentielle avec Euler est :

```
1 def euler(tab_personne, personne, indice, step=.02):
2
3
4     f_totale = force_motrice(personne) #calcul de la force motrice
5
6     #projection sur Ux et Uy
7     vitesse_x = personne["vitesse"][0] + step * f_totale[0]
8     vitesse_y = personne["vitesse"][1] + step * f_totale[1]
9
10    #on actualise la position
11    personne["position"] = np.array( [
12        personne["position"][0] + vitesse_x,
13        personne["position"][1] + vitesse_y
14    ])
15
16    # v(t_{n+1})
17    personne["vitesse"] = np.array([
18        vitesse_x,
19        vitesse_y
20    ])
```

Dans les premières lignes on calcul la force totale.  
Puis on applique la méthode d'euler :

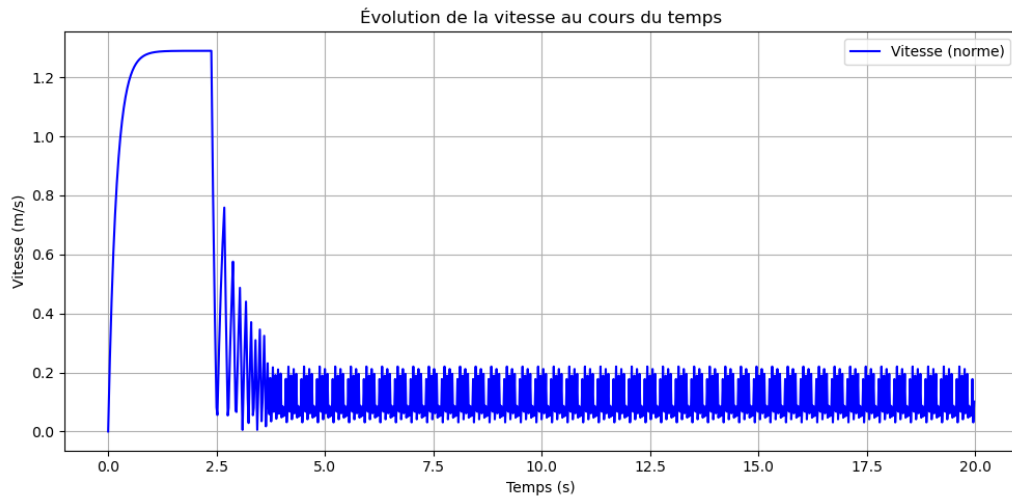
$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \Delta t \cdot \vec{F}_{totale} \quad (5)$$

Pour chaque direction ( $0_y$ ) et ( $0_x$ ) on projette pour avoir la vitesse en composante respective x et y. (ligne 8 et 9), ici  $\Delta t = 0.02$  ce qui minimise la marge d'erreur.

La dernière ligne permet d'actualiser  $\vec{v}_n$ .

### 3.2.3 Résultat graphique

On lance le programme, sur une particule on récupère les valeurs de  $V_n$  pour ensuite tracer la courbe si dessous (la particule démarre à la position (0, 0) et vise le point (100, 100)) :



Le résultat est bien cohérent. On voit que la particule atteint à la manière d'une exponentielle inversée sa  $v_{desiree}$  pour ensuite l'atteindre totalement. Dès que la position (100,100) est atteinte sa vitesse décroît pour revenir vers la position souhaitée. On voit qu'en suite la fonction devient périodique, la particule passe d'un bout à l'autre de la position (100,100) sans jamais l'atteindre.

## Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

Cette méthode plus couteuse temporellement s'avère être plus précise qu'Euler.

L'équation générale est :

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + k_2$$

avec :

$$k_1 = h \cdot \vec{F}(\vec{v}_n, \vec{r}_n)$$

$$k_2 = h \cdot \vec{F}\left(\vec{v}_n + \frac{1}{2}k_1, \vec{r}_n\right)$$

**Dans le code :**

- Le pas de temps est  $h = 0,02$
- $k_1$  est calculé par :

$$k_1 = h \cdot \text{resultante}(\text{tab\_personne}, \text{personne}, \text{indice}, \text{obstacles}, \text{portes})$$

- Puis on modifie temporairement la vitesse :

$$\vec{v} += \frac{1}{2}k_1$$



---

— Ensuite, on recalcule la force :

$$k_2 = h \cdot \text{resultante}(\dots)$$

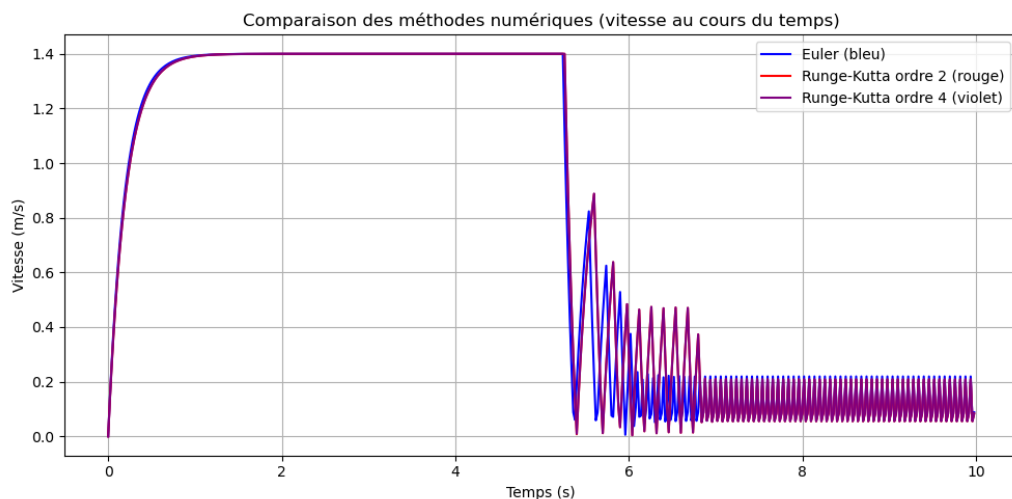
— Enfin, on met à jour la vitesse avec :

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + k_2$$

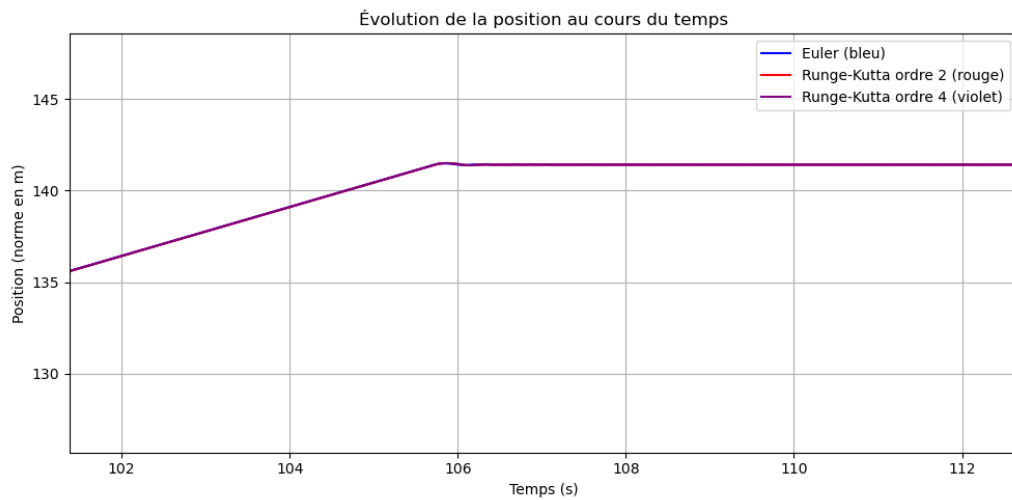
A noter que *resultante()* dans ce cas renvoie que la force motrice. Voici sa signature (pour la retrouver dans le code) :

```
1 def runge_kutta_2(tab_personne, personne, indice, obstacles,  
  ↪ portes, step=.02)
```

### 3.2.4 Resultats de rungge kutta 2 et 4



Au final, on observe un léger écart, dû à la plus grande précision de la méthode de Runge-Kutta. Mais cette écart sur la vitesse n'a pas un grand impact sur la position à en croire le graphique suivant :



## 4 Explication du code

### 4.1 Structure et contextualisation

Le code est divisé en trois modules distincts :

- **main.py** s'occupe de dessiner la fenêtre de gérer plusieurs actions. Il initialise le tableau de personnes (tableau de particule)
- **physique.py** contient uniquement des fonctions pour la gestion physique
- **affichage.py** contient les situations et centralise la gestion des dessins dans le canvas

### 4.2 Modélisation physique

Cette section présente les différentes fonctions du fichier **physique.py**, accompagnées de leur signature pour faciliter leur identification dans le code.

#### 4.2.1 Force motrice

Pour calculer la force motrice on applique simplement (1)

```
1 def force_motrice(personne):
```

La fonction **calcul\_i0** retourne le vecteur directionnel en soustrayant le point souhaité de la position actuelle de la personne, puis en normalisant le

---

résultat comme suivant.

Soient  $a$  la position de la particule et  $ptSouhaite$  les coordonnées de la porte :

$$\vec{e}_\theta = \vec{a} - ptSouhaite \quad (6)$$

#### 4.2.2 Force sociale(s)

```
1 def force_intercation_social(tab_personne, personne, indice,
  ↪ b0=config["b0"], seuil_interaction=50)
```

Pour calculer on applique (2)

Afin de limiter la complexité temporelle de la simulation, on ajoute deux conditions : une personne ne peut pas interagir avec elle-même (ce qui est logique d'un point de vue physique), et elle n'interagit qu'avec les autres personnes situées à moins de 50 unités de distance. Ce seuil d'interaction (fixé à 50) est vérifiable physiquement, une personne à une certaine distance d'un autre individu n'agissent pas deux à deux entre elle. A noté que cette valeur à été fixé expérimentalement.

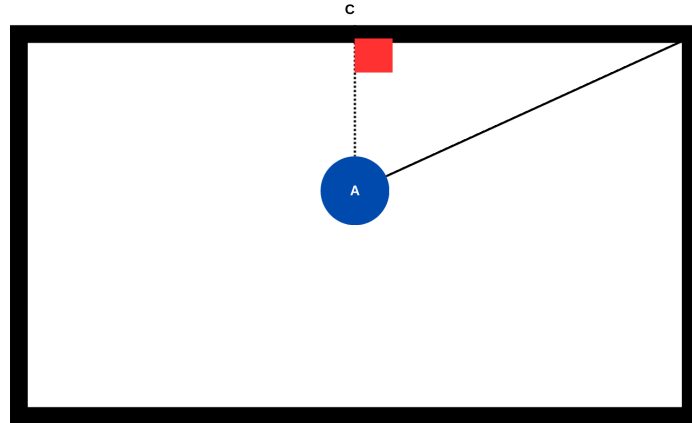
Pour calculer  $d_{ij}$  on prend la norme de la position de la personne avec la norme de la personne avec laquelle elle intéragit. On soustrait ensuite les deux rayons qui correspondent à  $r_{ij}$ .  $\vec{n}_{ij}$  est le vecteur normal (  $a - b$  ) qu'on norme pour avoir un vecteur unitaire.

#### 4.2.3 Force répulsion mur

```
1 def force_interaction_social_mur(personne, indice, portes, b0
  ↪ = config["b0"]):
```

Pour déterminer la force de répulsion on calcule la distance avec les 4 murs grâce à la trigonométrie.

La condition sert à ne pas agir si on a une porte. La fonction `distance_mur_vect` utilise le sinus. Elle renvoie un tuple avec, premièrement, la distance entre le mur visé ( $\mathbf{d}_{ij}$ ), ainsi que le vecteur normal ( $\mathbf{n}_{ij}$ ). Pour mieux comprendre voici un exemple :



On a déjà la longueur  $AB$  et on cherche  $AC$ , on obtient facilement l'angle  $\widehat{ABC}$  que l'on notera  $\alpha$ .  
On a alors :  $AC = \sin(\alpha) \cdot AB$

Cette opération est répétée pour les autres murs de manière quasi analogue. Une condition supplémentaire est ajoutée afin d'ignorer la zone correspondant à l'emplacement de la porte.

#### 4.2.4 Force interaction rectangle

```
1 def force_interaction_rectangle(personne, rectangle,
   ↪ b0=config["b0"]):
```

Pour cette méthode on a créé une fonction qui détermine le point le plus proche d'un rectangle. Selon la méthode suivante

**Vecteurs de projection :** Soit un rectangle défini par ses coordonnées de coin inférieur gauche  $(x, y)$ , sa longueur  $l$ , et sa hauteur  $h$ . Nous définissons deux vecteurs :

- $\vec{v}_{\text{longueur}} = (l, 0)$  : vecteur représentant la longueur du rectangle.
- $\vec{v}_{\text{hauteur}} = (0, h)$  : vecteur représentant la hauteur du rectangle.

**Position relative :** La position de la personne par rapport au coin inférieur gauche du rectangle est :

$$\vec{p}_{\text{relatif}} = (x_{\text{personne}} - x, y_{\text{personne}} - y)$$

---

**Projection sur les bords du rectangle :** Pour trouver le point le plus proche sur le rectangle, on projette  $\vec{p}_{\text{relatif}}$  sur les vecteurs  $\vec{v}_{\text{longueur}}$  et  $\vec{v}_{\text{hauteur}}$ . On a donc :

$$k_1 = \frac{\vec{p}_{\text{relatif}} \cdot \vec{v}_{\text{longueur}}}{\|\vec{v}_{\text{longueur}}\|^2}$$
$$k_2 = \frac{\vec{p}_{\text{relatif}} \cdot \vec{v}_{\text{hauteur}}}{\|\vec{v}_{\text{hauteur}}\|^2}$$

**Ajustement des projections :** Les valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  sont ajustées (pour s'assurer qu'elles se situent bien dans le rectangle) :

- Si  $k_1 < 0$ , alors  $k_1 = 0$ .
- Si  $k_1 > l$ , alors  $k_1 = l$ .
- Si  $k_2 < 0$ , alors  $k_2 = 0$ .
- Si  $k_2 > h$ , alors  $k_2 = h$ .

**Calcul du point le plus proche :** Le point le plus proche sur le rectangle est donc :

$$\vec{p}_{\text{proche}} = (x, y) + k_1 \cdot \frac{\vec{v}_{\text{longueur}}}{\|\vec{v}_{\text{longueur}}\|} + k_2 \cdot \frac{\vec{v}_{\text{hauteur}}}{\|\vec{v}_{\text{hauteur}}\|}$$

Pour finir on applique (2) ici  $r_{ij} = r_i - 0$  car pas de rayon.

## 4.3 Resolution

### Situation 1

Bilan des forces : Trois types de forces principales agissent sur l'individu :

- **Les forces motrices**, modélisées par l'équation (1) ;
- **Les forces d'interaction entre personnes**, données par (2) ;
- **Les forces d'interaction avec les murs**, également représentées par (2).

On peut également intégrer les interactions avec d'autres obstacles. Dans le cas où aucun obstacle n'est présent, le vecteur de force associé sera simplement nul :  $\vec{0}$ .

Ainsi, on peut généraliser le système via une fonction basée sur la méthode d'Euler (et de Runge-Kutta), capable de traiter l'ensemble des cas évoqués.

C'est ce que font les fonctions de résolution suivantes.

```

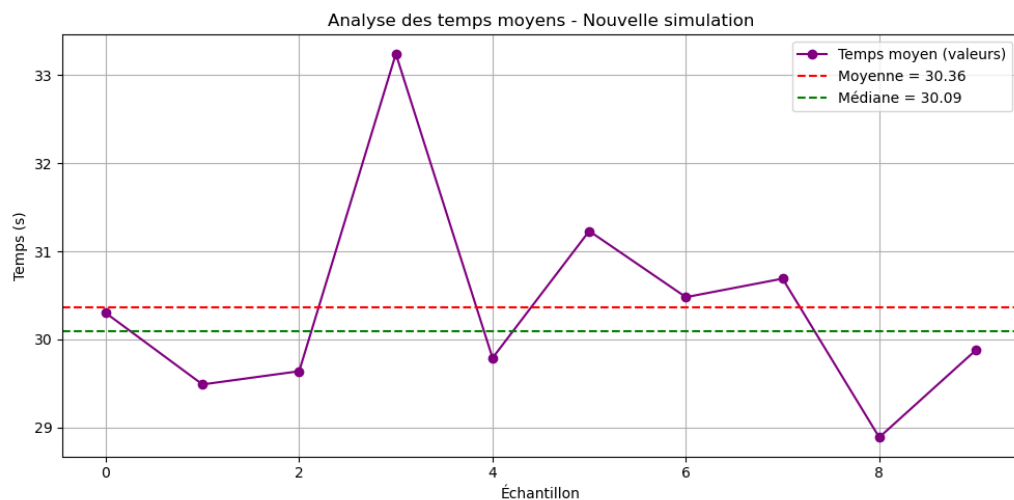
1 def runge_kutta_2(tab_personne, personne, indice, obstacles,
  ↪ portes, step=.02):
2 def runge_kutta_4(tab_personne, personne, indice, obstacles,
  ↪ portes, step=.02):
3 def euler(tab_personne, personne, indice, obstacles, portes,
  ↪ step=.02):

```

## 5 Analyse

Le temps de notre expérience est en unité de temps il ne dépend pas de la puissance de l'ordinateur pour un résultat plus fiable c'est seulement un incrément à chaque étape de la modélisation. Les différences observées sont dûes à la vitesse qui varie de  $1.34 \pm 0.25$  unité de vitesse avec aussi le rayon qui oscille de  $10 \pm 2$  unités de longueur.

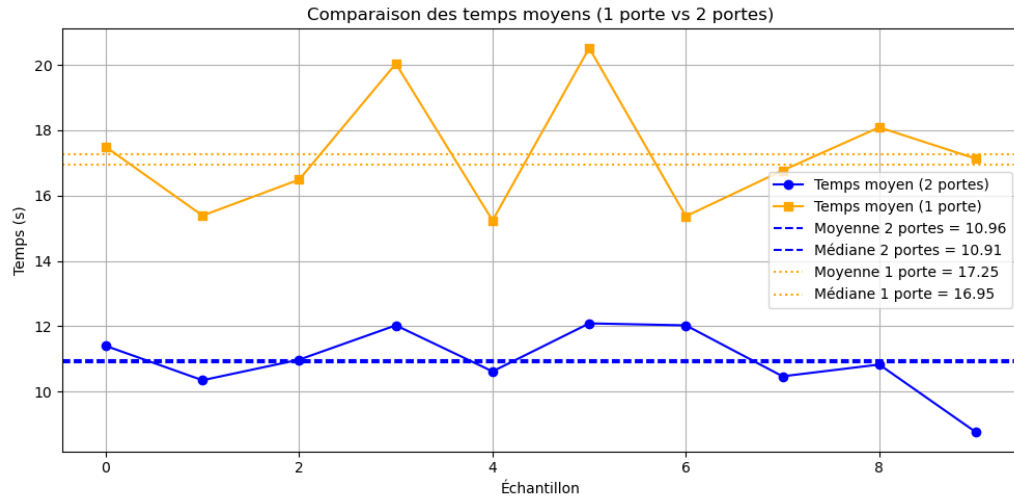
### 5.1 Situation 1



Sur un échantillonnage de 10 valeurs

Pour cette simulation on obtient un temps moyen de **30.36** unités de temps.

## 5.2 Situation 2



On obtient une moyenne de temps sur 10 échantillons pour la classe avec 2 portes de 10.96 unités de temps tandis qu'avec 1 porte la moyenne est de 17.25 unité de temps. Pour ramener sur une échelle plus parlante que des unités de temps dans le cas où il y a seulement une porte le temps sera augmenté d'environ **61%**.

**Conclusion** Une telle augmentation peut avoir des conséquences critiques en situation d'urgence, car chaque seconde supplémentaire est un risque, en particulier en cas de panique ou de mouvements de foule.

A noter que notre modèle aurait pu être plus proche de la réalité en ajoutant le principe de décision individuelle pour avoir des chemins différents.

---

## 6 Références

- [Social force model for pedestrian dynamics](#) (Dirk Helbing et Péter Molnár)
- [Lien vers le dépo git](#)