# Etude de la dynamique des foules

Par le biais de la physique moderne

**Auteurs :**

NADAUD Antonin
JANINI Raphaël
LUBIN Thomas
NUCE LAMOTHE Augustin

**Encadrant :**

DESPLAT Lucie

**10 mai 2025**

CY Tech – préing-2 groupe 2

# Sommaire


**1 Objectif** **1**
- 1.1 Situation 1 . . . 1
- 1.2 Situation 2 . . . 1

**2 Théorie sous-jacente** **1**

**3 Méthode** **2**
- 3.1 Determiner l'équation . . . 2
- 3.2 Resolution d'équation différentiel . . . 2
  - 3.2.1 Contextualisation . . . 2
  - 3.2.2 Présentation du code . . . 3
  - 3.2.3 Résultat graphique . . . 4
  - 3.2.4 Méthode via rugge kutta . . . 5

**4 Explication du code** **5**
- 4.1 Structure et contextualisation . . . 5
- 4.2 Modélisation physique . . . 5
  - 4.2.1 Force motrice . . . 5
  - 4.2.2 Force social(s) . . . 6
  - 4.2.3 Force répulsion mur . . . 7
  - 4.2.4 Force interaction rectangle . . . 7
- 4.3 Resolution . . . 8

**5 Analyse** **9**
- 5.1 Situation 1 . . . 9
- 5.2 Situation 2 . . . 9

**6 Bibliographie** **10**

# 1 Objectif

## 1.1 Situation 1

La première situation (imposée) dans le cadre de cette étude, consiste à modéliser l'évacuation d'une foule depuis un espace rectangulaire, tel qu'une salle. Les individus se dirigent vers une sortie sous l'effet d'une force motrice, tout en interagissant les uns avec les autres par le biais de forces sociales. Chaque individu est associé à une vitesse cible, représentant son intention de déplacement. L'objectif est d'avoir le temps d'évacuation totale pour la foulle

## 1.2 Situation 2

On repart sur les bases de la situation une, mais cette fois dans une salle de cour. On ajoute aussi le sentiment de panique pour certains individus, modélisée par une vitesse plus importante. L'objectif est de savoir combien de personne doivent paniquer en pourcentage pour avoir une évacuation optimale.

# 2 Théorie sous-jacente

Le modèle de force sociale, introduit par Helbing et Molnár [1], vise à simuler le comportement de piétons dans des environnements denses, en représentant chaque individu comme une particule soumise à des forces comportementales. Deux forces fondamentales structurent ce modèle : la force motrice et la force sociale.

**Force motrice.** Chaque individu $i$ cherche à atteindre une vitesse souhaitée $\vec{v}_i^0$ dans une direction donnée. Ce comportement est modélisé par une force motrice, qui pousse l'individu à ajuster sa vitesse actuelle $\vec{v}_i$ à sa vitesse désirée, selon :

$$\vec{f}_i^{\mathrm{m}} = m_i \frac{\vec{v}_i^0 - \vec{v}_i}{\tau_i} \tag{1}$$

où $m_i$ est la masse de l'individu et $\tau_i$ est un temps de relaxation caractérisant la rapidité avec laquelle l'individu tente d'atteindre sa vitesse cible.

1. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.4282

**Force sociale.** Outre la volonté individuelle de se diriger vers une destination, les piétons interagissent entre eux via des forces dites sociales, traduisant leur tendance à maintenir une distance interpersonnelle. Ces interactions sont modélisées par une force répulsive de la forme :

$$\vec{f}_{ij}^{\mathrm{s}} = A_i \exp\left(\frac{r_{ij} - d_{ij}}{B_i}\right) \vec{n}_{ij} \tag{2}$$

où :

— $A_i$ et $B_i$ sont des constantes positives liées à l'intensité et à la portée de la répulsion,

— $r_{ij}$ est la somme des rayons corporels des individus $i$ et $j$,

— $d_{ij}$ est la distance entre les centres de masse des deux individus,

— $\vec{n}_{ij}$ est le vecteur unitaire pointant de $j$ vers $i$.

Ces forces permettent de simuler des comportements réalistes d'évitement et de gestion de l'espace dans des environnements contraints, comme lors d'une évacuation.

# 3 Méthode

## 3.1 Determiner l'équation

Afin d'établir l'équation, nous avons tout d'abord supposé que le référentiel d'étude est galiléen, pour ensuite appliquer la seconde loi de newton $\sum \vec{F}_{\text{particule}} = m_{\text{particule}}\vec{a}$.

On a :

$$\vec{f}_{\text{direction}} + \vec{f}_{\text{social}} = m_{\text{particule}} \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Au final après quelques simplification on a :

$$\frac{\vec{v}_i^0 - \vec{v}_i}{\tau_i} + \frac{1}{m_{\text{particule}}} \sum_{j \neq i} A_i \exp\left(\frac{r_{ij} - d_{ij}}{B_i}\right) \vec{n}_{ij} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3}$$

## 3.2 Resolution d'équation différentiel

### 3.2.1 Contextualisation

Pour résoudre (3). Nous avons décider d'utiliser méthode d'euler :

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \Delta t \cdot \vec{F}_n$$

On introduit une personne modélisée en Python par un dictionnaire (pour mieux comprendre la fonction qui permet de résoudre cette équation) :

```python
{
        "position": np.array([0, 0]),
        "masse": 10,
        "vitesse_desiree": 1.34,
        "vitesse": np.array([0, 0]), #vitesse initiale
        "to": .2,
        "rayon": 10 + random.randint(-2, 2),
        "destination": np.array([100,100])
}
```

- "position" : Un tableau NumPy qui contient les coordonnées $[x, y]$ de la personne dans l'espace.
- "masse" : La masse de la personne, ici fixée à 10 (arbitrairement).
- "vitesse_desiree" : La vitesse désirée que la personne souhaite atteindre, (ici 1.34 $ms^{-1}$).
- "vitesse" : Un tableau NumPy qui représente la vitesse initiale de la personne. La vitesse initiale est définie comme un vecteur nul $[0, 0]$ (immobile au départ)
- "to" : Un paramètre fixé à 0.2. Il pourrait représenter un coefficient de friction, de résistance ou tout autre facteur de modification des interactions.
- "rayon" : Le rayon de la personne (representée comme un cercle), calculé comme 10 plus un nombre aléatoire compris entre -2 et 2.

### 3.2.2 Présentation du code

Voici un exemple pour resoudre l'equation différentiel suivante (force motrice) :

$$\frac{\vec{v}_i^0 - \vec{v}_i}{\tau_i} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{4}$$

**Le code qui permet de resoudre donc l'equation differentiel :**

```
1 def euler(tab_personne, personne,indice, step=.02):
2
3
4     f_totale = force_motrice(personne) #cacul de la force motrice
5
6     #projection sur Ux et Uy
7     vitesse_x =  personne["vitesse"][0] + step * f_totale[0]
8     vitesse_y = personne["vitesse"][1] + step * f_totale[1]
9
10     #on actualise la position
11     personne["position"] = np.array( [
12         personne["position"][0] + vitesse_x,
13         personne["position"][1] + vitesse_y
14     ])
15
16     # v(t_n+1)
17     personne["vitesse"] = np.array([
18         vitesse_x,
19         vitesse_y
20     ])
```

Dans les premières lignes on calcul la force totale.
Puis on applique la méthode d'euler :

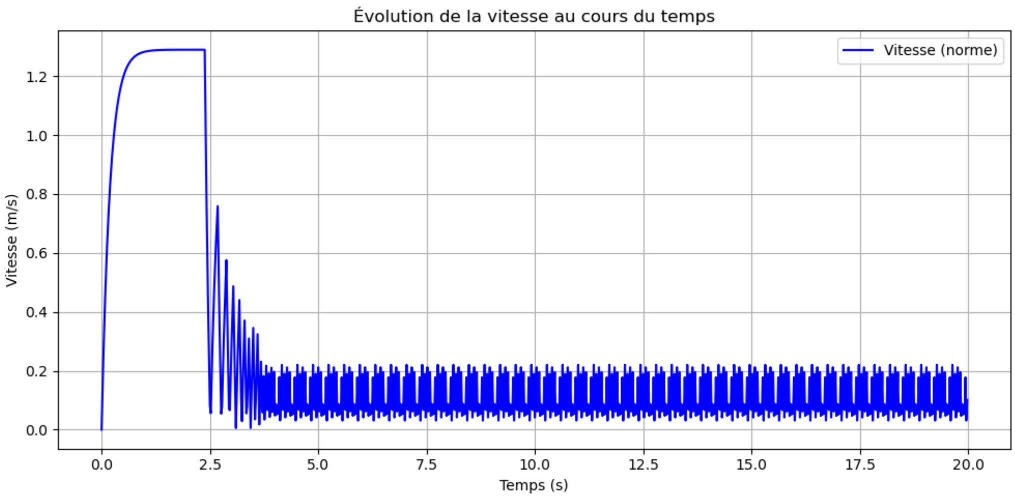
$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \Delta t \cdot \vec{F_{totale}} \tag{5}$$

Pour chaque direction $(0_y)$ et $(0_x)$ on projette pour avoir la vitesse en composante respective x et y. (ligne 8 et 9), ici $\Delta t = 0.02$ ce qui minimise la marge d'erreur.

La dernière ligne permet d'actualiser $\vec{v_n}$.

### 3.2.3 Résultat graphique

On lance le progamme, sur une particule on recupère les diverses valeurs de $V_n$ pour en suite tracer la courbe si dessous (la paricule démarre à la position $(0, 0)$ et vise le point $(100, 100)$ :




Le résultat est bien cohérent on voit que la particule atteint à la manière d'une exponentielle inversé sa $v_{desiree}$ pour en suite l'atteindre totale. Dès que la position $(100, 100)$ est atteinte sa vitesse décroit pour revenir vers la position. On voit qu'en suite la fonction devient périodique, la particule passe d'un bout à l'autre de la position (100,100) sans jamais l'atteindre.

#### 3.2.4 Méthode via rugge kutta

# 4 Explication du code

## 4.1 Structure et contextualisation

Le code est divisé en trois modules distincts :

- **main.py** s'occupe de dessiner la fênetre de gérer plusieurs actions il initialise le tableau de personne (tableau de particule)
- **physique.py** contient uniquement des fonction pour la gestion physique

## 4.2 Modélisation physique

### 4.2.1 Force motrice

Pour caculer la force motrice on applique simplement (1)

```
def force_motrice(personne):

```

```
    resultat = personne["vitesse_desiree"] * calcul_ei0(personne)
    resultat -= personne["vitesse"]

    return  resultat /  personne["to"]
```

La fonction **calcul_i0** retourne le vecteur directionnel en soustrayant le point souhaité de la position actuelle de la personne, puis en normalisant le résultat.

```
#position desiree
pt_souhaite = personne["destination"]
#direction
vecteur_ei0 =  pt_souhaite - personne["position"]
vecteur_ei0 = [0, 1] if all(vecteur_ei0 == [0, 0]) else vecteur_ei0
# normalisation du vecteur
norm = np.linalg.norm(vecteur_ei0)
vecteur_ei0 = vecteur_ei0 / norm
```

### 4.2.2 Force social(s)

Pour caculer on applique (2)

```
def force_intercation_social(tab_personne, personne, indice, b0=config["b0"], seuil_interaction=50):

    for indice_personne, personne_autre in enumerate(tab_personne):
                    estTropLoin =
        if indice_personne != indice and (np.linalg.norm(personne_autre["position"] - personne["position"]))  < seuil_interaction:

            a = personne["position"]
            b = personne_autre["position"]

            norme_ab = np.linalg.norm(a - b) - personne_autre["rayon"] - personne["rayon"]
                        direction = (a - b) / np.linalg.norm(a - b)

```

```
            resultat = resultat + np.exp((- norme_ab / b0)) *
             ↪  direction

    return resultat
```

La condition sert à ce qu'une particule n'agisse pas sur elle même, elle définie un seuil d'interaction pour réduire la compléxité temporelle ce qui est justifiable physiquement par le fait q'un personne trop n'agis pas sur nous (à partir d'un certain seuil).

Pour calculer $d_{ij}$ onprend la norme de la position de la personne avec la norme de la personne avec laquel elle intéragis on soustrait en suite les deux rayon qui correspond à $r_{ij}$. $\vec{n_{ij}}$ est le vecteur normal ( a - b ) qu'on norme pour avoir un vecteur unitaire.

### 4.2.3 Force répulsion mur

La force de repulsion de mur est plus compliquée à calculer. Il faut la calculer pour chaque mur avec toujours un seuil d'intéraction (un mur agis sur nous que s'il nous touche). $r_{ij}$ reste le même. Mais pour caculer $d_{ij}$ cette fois ci on utilise pythagore.

La condition sert à ne pas agir si on a une porte. La fonction `distance_mur_vect` utilise le théorème de Pythagore. Elle renvoie un tuple avec, premièrement, la distance entre le mur visé ($\mathbf{d_{ij}}$), ainsi que le vecteur normal ($\mathbf{n_{ij}}$). A PLUS DETAILLER +-*7g4rg

### 4.2.4 Force interaction rectangle

Pour cette méthode on a créé une fonction qui détermine le point le plus proche du rectangle.

**Vecteurs de Projection :** Soit un rectangle défini par ses coordonnées de coin inférieur gauche $(x, y)$, sa longueur $l$, et sa hauteur $h$. Nous définissons deux vecteurs :

- $\vec{v}_{\text{longueur}} = (l, 0)$ : vecteur représentant la longueur du rectangle.
- $\vec{v}_{\text{hauteur}} = (0, h)$ : vecteur représentant la hauteur du rectangle.

**Position Relative :** La position de la personne par rapport au coin inférieur gauche du rectangle est donnée par le vecteur :

$$\vec{p}_{\text{relatif}} = (x_{\text{personne}} - x, y_{\text{personne}} - y)$$

**Projection sur les Bords du Rectangle :** Pour trouver le point le plus proche sur le rectangle, on projette $\vec{p}_{\text{relatif}}$ sur les vecteurs $\vec{v}_{\text{longueur}}$ et $\vec{v}_{\text{hauteur}}$. On a donc les projections :

$$k_1 = \frac{\vec{p}_{\text{relatif}} \cdot \vec{v}_{\text{longueur}}}{\|\vec{v}_{\text{longueur}}\|^2}$$
$$k_2 = \frac{\vec{p}_{\text{relatif}} \cdot \vec{v}_{\text{hauteur}}}{\|\vec{v}_{\text{hauteur}}\|^2}$$

**Ajustement des Projections :** Les valeurs de $k_1$ et $k_2$ sont ajustées pour s'assurer qu'elles se situent dans le rectangle :

— Si $k_1 < 0$, alors $k_1 = 0$.
— Si $k_1 > l$, alors $k_1 = l$.
— Si $k_2 < 0$, alors $k_2 = 0$.
— Si $k_2 > h$, alors $k_2 = h$.

**Calcul du Point le Plus Proche :** Le point le plus proche sur le rectangle est donc :

$$\vec{p}_{\text{proche}} = (x, y) + k_1 \cdot \frac{\vec{v}_{\text{longueur}}}{\|\vec{v}_{\text{longueur}}\|} + k_2 \cdot \frac{\vec{v}_{\text{hauteur}}}{\|\vec{v}_{\text{hauteur}}\|}$$

```python
def force_intercation_rectangle(personne, rectangle,
    b0=config["b0"]):
    point = point_le_plus_proche_rectangle(personne,
        rectangle)


    distance_mur = np.linalg.norm(point -
        personne["position"]) - personne["rayon"]

    return 15. * np.exp(- distance_mur / b0) *
        normalize(personne["position"] - point)
```

Pour finir on applique (2) ici $r_{ij} = r_i$ - 0 car pas de rayon.

## 4.3 Resolution

**Situation 1**

Bdf trois forces :

- **forces motrices** (1)
- **forces interactions personnes** (2)
- **forces interactions murs** (2)

Mais on peut ajouter aussi, les forces d'interaction avec les rectangle comme il n'y a pas de mur le vecteur sera $\vec{0}$.

**donc au final on obtient une fonction euler qui généralise les deux cas**

On revient à l'equa dif : (3), en utilisant euler

# 5 Analyse

## 5.1 Situation 1

## 5.2 Situation 2

# 6 Bibliographie

Voici la liste :


— Social force model for pedestrian dynamics (Dirk Helbing et Péter Molnár)
— Lien vers le dépo git
— Wikipedia