

RELAZIONE

**FONDAMENTI DI
AUTOMATICA**

*Antonino Vaccarella
matricola: 201107*

A.A. 2021/2022

a. Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta al segnale $u(t) = e^{-t} 1(t)$

$$y(t) = \left(-\frac{e^{-t}}{61} + \frac{62}{671} e^{-2t} \sin(11t) + \frac{1}{61} e^{-2t} \cos(11t) \right) 1(t)$$

Determinare:

1. la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri;
2. i modi di evoluzione libera del sistema;
3. la risposta all'impulso del sistema;
4. il grafico della risposta al gradino;
5. la risposta alla rampa;
6. un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio;
7. tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali il transitorio della risposta al gradino è nullo.

b. Costruire, utilizzando Adobe Illustrator o programma equivalente ed argomentando tutti i passaggi, il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento (Allegare file .ai o .eps)

$$G(s) = \frac{40 \left(1 - \frac{s}{20} \right)}{s \left(s^2 + \frac{s}{16} + 1 \right)}$$

d. Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.

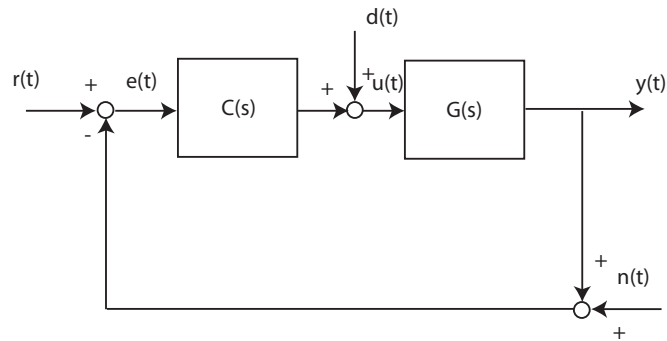


Figure 2:

dove $G(s)$ rappresenta la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{9(0.04s + 1)}{s^2 + 6s + 4}$$

Si chiede di determinare un regolatore $C(s)$ di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore di inseguimento inferiore al 10 % per un riferimento a rampa;
2. errore nullo in uscita per un disturbo di carico a gradino;
3. Picco di Risonanza $M_{r,dB} \leq 3 \text{ dB}$, banda passante $2 \leq \omega_{BW} \leq 8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

restart : *with* (*intrtrans*) : *with* (*DynamicSystems*) : *with* (*plots*) :

Qui sopra, vengono inseriti i comandi per riavviare l'area di lavoro e i toolbox necessari per lo svolgimento dell'esercizio.

PROGETTO di FONDAMENTI DI AUTOMATICA

ANTONINO VACCARELLA

matricola: 201107

Esercizio A

Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta al segnale

$$u_{in}(t) := e^{-t} \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

$$y_{out}(t) := \left(-\frac{e^{-t}}{61} + \frac{62}{671} \cdot e^{-2t} \cdot \sin(11t) + \frac{1}{61} \cdot e^{-2t} \cdot \cos(11t) \right) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

Determinare:

1. la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri;
2. i modi di evoluzione libera del sistema;
3. la risposta all'impulso del sistema;
4. il grafico della risposta al gradino;
5. la risposta alla rampa;
6. un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio;
7. tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali il transitorio della risposta al gradino è nullo.

1. Funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri

Un sistema lineare e stazionario a tempo continuo (detto anche LTI-TC) si dice *continuo* in quanto analizza con continuità un dato fenomeno e *stazionario* poiché a parità di ingresso viene restituito lo stato indipendentemente dal tempo.

In particolare, per via della linearità, si avrà che la mappa di uscita sarà una funzione lineare in x (con x spazio di stato, ovvero dei valori assunti dallo stato del sistema) ed u (con u spazio delle funzioni di ingresso).

Un sistema del genere prevede anche parametri costanti e la validità del PSE (Principio di Sovrapposizione degli Effetti).

Si definisce Funzione di Trasferimento $G(s)$ per un sistema dinamico, quella funzione complessa Real Razionale ottenuta come rapporto della Trasformata di Laplace dell'uscita forzata e della Trasformata di Laplace del suo relativo ingresso.

In alternativa, si può definire la Funzione di Trasferimento come la Trasformata di Laplace di quella particolare risposta forzata ad un ingresso tale per cui la sua Trasformata di Laplace è unitaria (il cosiddetto Impulso di Dirac).

Avendo a disposizione come dato l'uscita forzata ed il suo relativo ingresso nel dominio temporale, conviene portare tali due segnali nel dominio della Trasformata di Laplace dove si potrà applicare la definizione sopra enunciata per calcolare la Funzione di Trasferimento.

Si calcola la Trasformata di Laplace applicata alla risposta:

$$Y := s \rightarrow \text{laplace}(y_{out}(t), t, s) : \\ Y(s) = \frac{s - 1}{((s + 2)^2 + 121)(1 + s)} \quad (1.1)$$

Si prosegue con la Trasformata di Laplace applicata all'ingresso:

$$U := s \rightarrow \text{laplace}(u_{in}(t), t, s) : \\ U(s) = \frac{1}{1 + s} \quad (1.2)$$

Quindi, si ha tutto quello che ci serve per calcolare la funzione di trasferimento G(S):

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} : \\ G(s) = \frac{s - 1}{(s + 2)^2 + 121} \quad (1.3)$$

L'ordine di un sistema caratterizzato dalla sua funzione di trasferimento è dato dal grado del suo denominatore: in questo caso ci troviamo di fronte ad un sistema di ordine 2.

Inoltre, il grado del numeratore è minore di quello del denominatore, perciò ci troviamo di fronte ad un sistema proprio.

Una volta ottenuta la funzione di trasferimento, possiamo procedere nel determinare i poli e gli zeri di G(s)

Ricordiamo che la funzione di trasferimento G(s) è definita come

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \text{ che si può scrivere nella forma fattorizzata } G(s) \\ = \frac{k \cdot (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_n)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

Gli zeri del sistema sono tutti quei numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $G(z) = 0$, ovvero sono tutti quei numeri che annullano il numeratore della funzione di trasferimento.

Per determinare gli zeri del sistema basterà calcolare le radici del numeratore di G(s):

$$zeri := solve(numer(G(s)) = 0, s)$$

$$zeri := 1$$

(1.4)

Notiamo la presenza di un solo zero in $s=1$ (viene detto *zero a fase non minima* in quanto esso giace nel semipiano destro del piano di Gauss).

I poli del sistema, invece, sono tutti quei numeri $p \in \mathbb{C}$ tali che $\lim_{s \rightarrow p} G(s) = \infty$, ovvero tutti quei numeri che annullano il denominatore della funzione di trasferimento.

Perciò, per determinare i poli del sistema basterà calcolare le radici del denominatore di $G(s)$:

$$poli := solve(denom(G(s)) = 0, s)$$

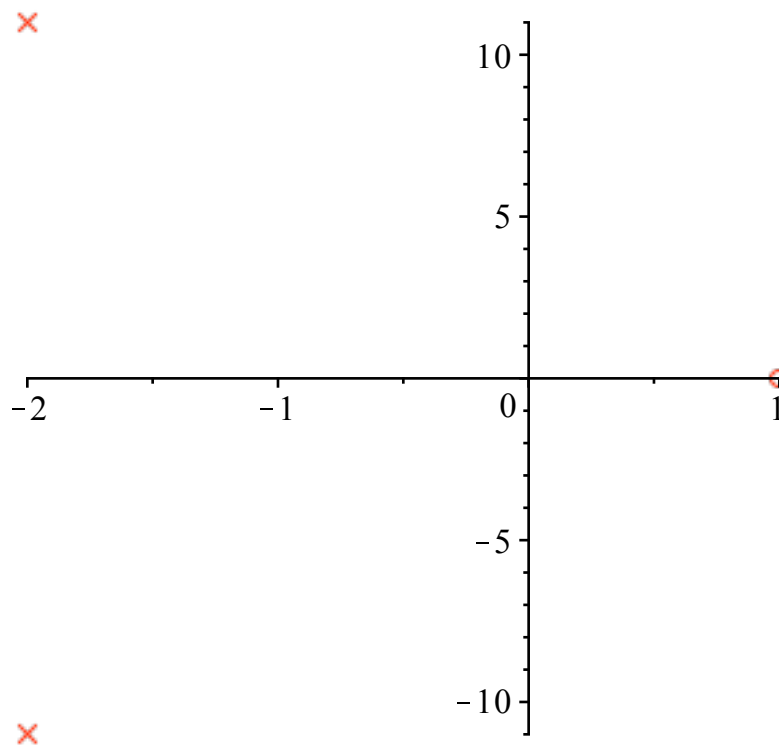
$$poli := -2 + 11i, -2 - 11i$$

(1.5)

Si rappresentano ora graficamente gli zeri e i poli della funzione di trasferimento ottenuta.

`ZeroPolePlot(TransferFunction(G(s)), color = [red], title = "Grafico di zeri e poli di G(s)", size = [300, 300])`

Grafico di zeri e poli di G(s)



L'ordine del sistema si può anche stabilire contando il numero dei poli della funzione di trasferimento, in questo caso i poli sono 2 e anche l'ordine del sistema è 2 (come si era precedentemente stabilito).

Dall'analisi dei poli del sistema possiamo verificarne la **BIBO-STABILITÀ**.

Un sistema dinamico si dice *BIBO-stabile* se per ogni ingresso limitato, la corrispondente uscita forzata è limitata.

La condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare e stazionario a tempo continuo sia BIBO-stabile è la seguente:

i poli della funzione di trasferimento di $G(s)$ devono avere parte reale strettamente negativa, o in termini matematici $\Re(p_i) < 0$ con $i=1..r$ (dove r è il numero dei poli di $G(s)$).

Con queste considerazioni, si conclude che il sistema in esame è BIBO-STABILE.

2. Modi di evoluzione libera del sistema

I modi di evoluzione libera di un sistema sono funzioni right-sided che rappresentano il "contributo" che il sistema fornisce, in termini di proprie componenti interne, alla risposta.

Poiché i poli del sistema sono una coppia di poli complessi e coniugati, i modi di evoluzione libera del sistema saranno **pseudo-oscillatori**: l'argomento dell'esponenziale è dato dalla parte reale dei poli e la pseudo-pulsazione dei modi è data dalla parte immaginaria.

Il numero dei modi di evoluzione libera di un sistema è pari all'ordine di quest'ultimo, in questo caso si avranno 2 modi di evoluzione libera.

Per calcolarli si procede in questo modo:

Procedimento manuale

$$\begin{aligned} \text{modo}_1 &:= e^{(\Re(\text{poli}[1]) \cdot t)} \cdot \cos(\Im(\text{poli}[1]) \cdot t) \cdot \text{Heaviside}(t) \\ \text{modo}_1 &:= e^{-2t} \cos(11t) \text{Heaviside}(t) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} \text{modo}_2 &:= e^{(\Re(\text{poli}[2]) \cdot t)} \cdot \sin(\Im(\text{poli}[2]) \cdot t) \cdot \text{Heaviside}(t) \\ \text{modo}_2 &:= -e^{-2t} \sin(11t) \text{Heaviside}(t) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Procedimento automatico

Si calcola l'antitrasformata:

$$\begin{aligned} g &:= t \rightarrow \text{invlaplace}(G(s), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) : \\ g(t) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-2t} (11 \cos(11t) - 3 \sin(11t)) \text{Heaviside}(t)}{11} \quad (2.2.1)$$

$$\text{modi_liberi} := \text{expand}((2.2.1), \cos, \sin, \exp)$$

$$\text{modi_liberi} := e^{-2t} \cos(11t) \text{Heaviside}(t) - \frac{3 e^{-2t} \sin(11t) \text{Heaviside}(t)}{11} \quad (2.2.2)$$

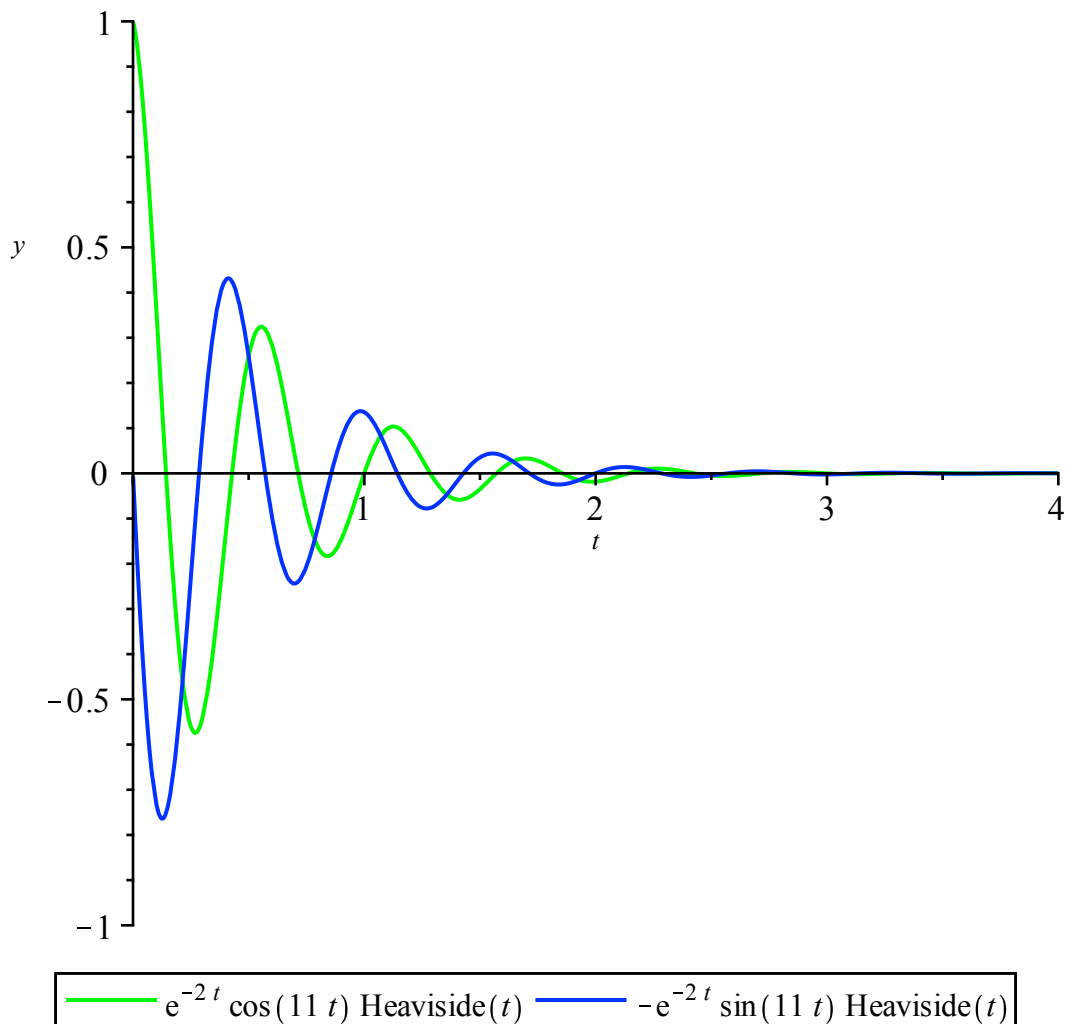
Si raccolgono i coefficienti

$$\begin{aligned} \text{modi_liberi} &:= \left\{ 1 \cdot \text{op}(1, \text{modi_liberi}), \frac{11}{3} \cdot \text{op}(2, \text{modi_liberi}) \right\} \\ \text{modi_liberi} &:= \{ e^{-2t} \cos(11t) \text{Heaviside}(t), -e^{-2t} \sin(11t) \text{Heaviside}(t) \} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Qui di seguito, vengono rappresentati graficamente i modi

`plot([(2.1.1), (2.1.2)], t = 0 .. 4, y = -1 .. 1, title = "Modi di evoluzione libera del sistema", legend = [(2.1.1), (2.1.2)], color = [green, blue], size = [400, 400])`

Modi di evoluzione libera del sistema



3. Risposta all'impulso del sistema

La risposta all'impulso del sistema è quella risposta che si ottiene dalla risposta forzata il cui ingresso ha L-Trasformata unitaria, conosciuta anche come "impulso di Dirac". Precisamente, se Y_f rappresenta la risposta forzata del sistema e $G(s)$ rappresenta la risposta all'impulso si ha che:

$$Y_f = G(s) \cdot 1 = G(s) :$$

L'oggetto $G(s)$ è quindi, nel dominio della L-Trasformata, la risposta all'impulso e coincide con la funzione di trasferimento del sistema.

Per calcolare la risposta all'impulso del sistema nel dominio del tempo $g(t)$, basterà calcolare l'antitrasformata di Laplace di $G(s)$:

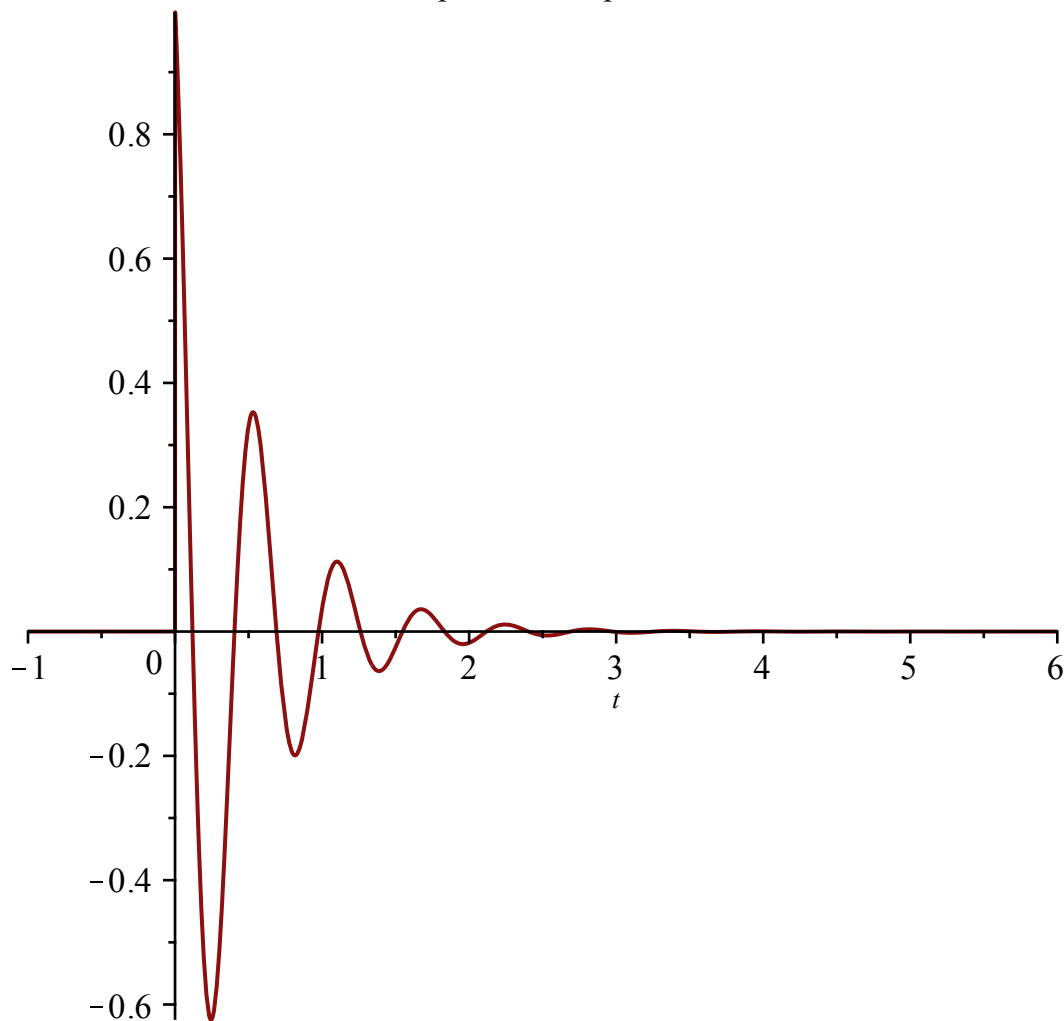
$g := t \rightarrow \text{invlaplace}(G(s), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$
 $g(t)$

$$\frac{e^{-2t} (11 \cos(11t) - 3 \sin(11t)) \text{Heaviside}(t)}{11} \quad (3.1)$$

Rappresento graficamente la risposta

$\text{plot}(g(t), t = -1 \dots 6, \text{size} = [400, 400], \text{title} = \text{"Risposta all'impulso"})$

Risposta all'impulso



Si ricava inoltre dal grafico che tale risposta per $t \rightarrow \infty$ tenderà a zero, e dalla teoria sappiamo che un qualsiasi sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento è BIBO-Stabile se la sua risposta impulsiva tende a zero appunto per $t \rightarrow \infty$, risultato che ci si aspetta anche dalla natura dei poli che, come detto prima, risiedono tutti nel semipiano sinistro del piano di Gauss.

4. Il grafico della risposta al gradino

Il gradino unitario (o Funzione di Heaviside) è una funzione Right-Sided, ovvero nulla fino allo 0 dei tempi, tale che a partire da $t=0$ essa vale 1.

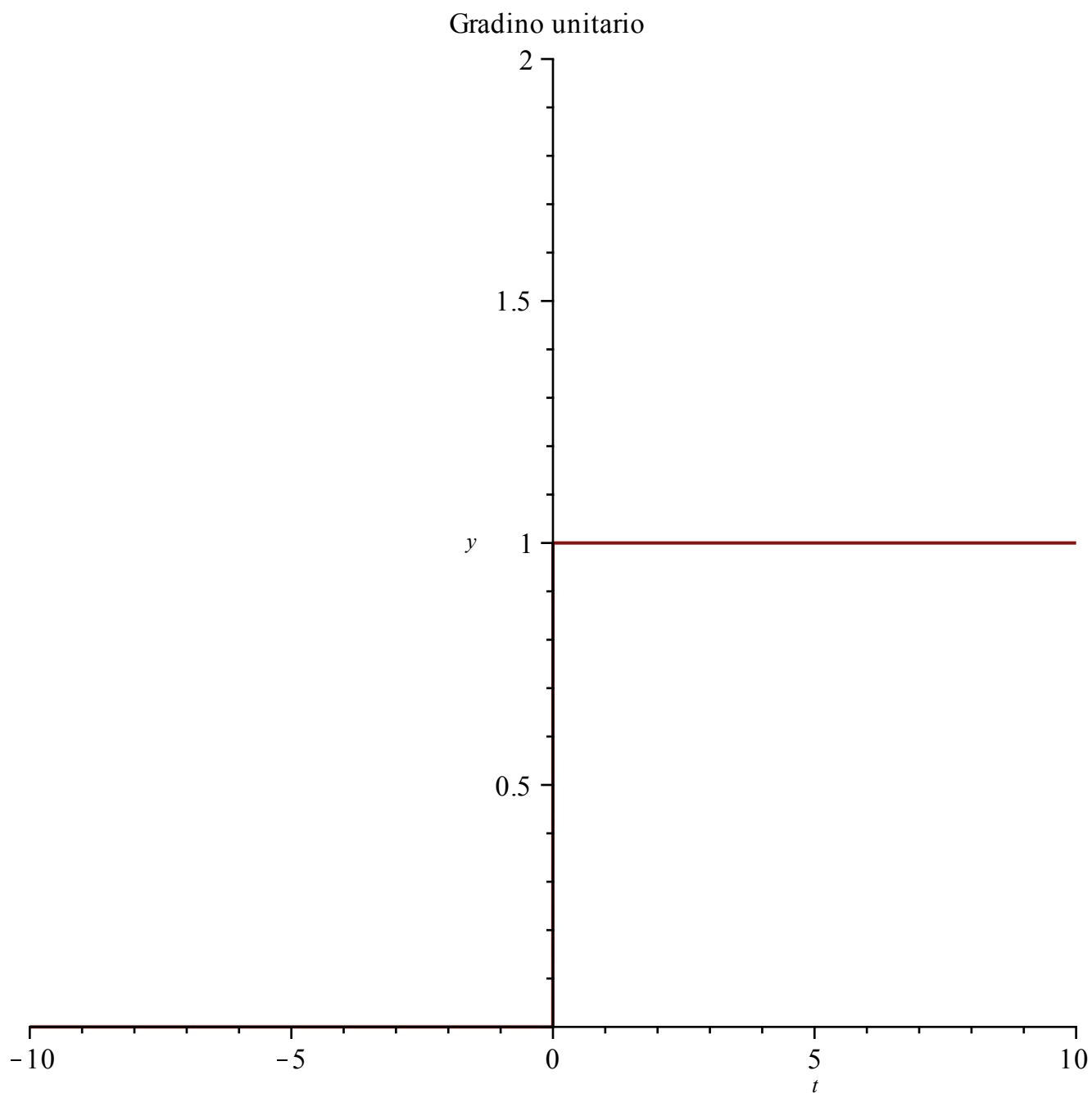
Tale funzione è molto importante nell'ambito dei sistemi dinamici, perché analizzando la risposta del sistema ad essa, possiamo estrapolare dei parametri molto utili per l'analisi delle prestazioni.

La funzione gradino unitario è un segnale così definito:

$$u_{gradino}(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} :$$

Descritta dal grafico:

```
plot(u_gradino(t), t=-10..10, y=0..2, title="Gradino unitario")
```



Ci si trova di fronte ad una funzione di classe L e quindi \mathcal{L} -trasformabile.

Si tratta infatti di una funzione continua a tratti e di ordine esponenziale α , esiste cioè una funzione esponenziale con cui possiamo maggiorare il gradino:

$$M \cdot e^{\alpha t} = 1 \quad \text{con } M=1 \text{ e } \alpha=0$$

Si può perciò calcolare la \mathcal{L} -trasformata del gradino:

$$U_{gradino}(s) := \text{laplace}(u_{gradino}(t), t, s) :$$

$$U_{gradino}(s)$$

$$\frac{1}{s}$$

(4.1)

Data la funzione di trasferimento $G(s)$, per calcolare la risposta al gradino del sistema (nel dominio del tempo) basterà calcolare l'antitrasformata della funzione $Y_{gradino}(s) = G(s) \cdot U_{gradino}(s)$

$$y_{gradino}(t) := \text{invlaplace}(G(s) \cdot U_{gradino}(s), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

$$y_{gradino}(t) \left(-\frac{1}{125} + \frac{e^{-2t} (11 \cos(11t) + 127 \sin(11t))}{1375} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (4.2)$$

Da cui si può evidenziare la componente a regime della risposta al gradino come:

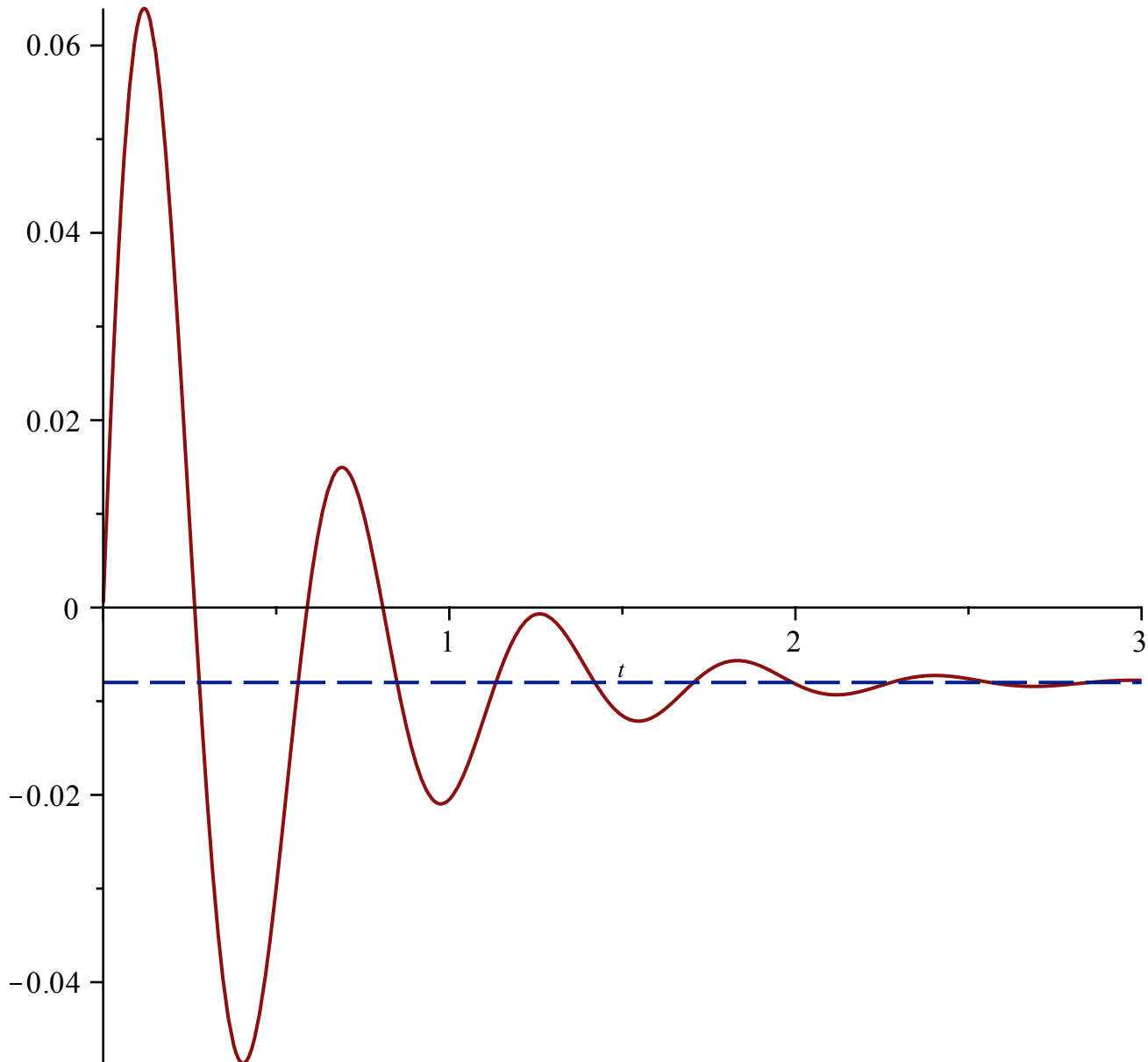
$$y_{regime}(t) := \lim_{t \rightarrow \infty} y_{gradino}(t) : \\ y_{regime}(t) - \frac{1}{125} \quad (4.3)$$

Se il sistema dinamico è BIBO-stabile (come in questo caso), la risposta a regime è la risposta del sistema al gradino di ampiezza U nell'ipotesi che l'istante iniziale sia posizionato nel "passato" rispetto all'istante di valutazione della risposta.

Ecco qui mostrata graficamente la risposta al gradino del sistema:

$$\text{plot}([y_{gradino}(t), y_{regime}(t)], t = 0 .. 3, \text{title} = \text{"Risposta al gradino"}, \text{legend} = [\text{"Risposta al gradino"}, \text{"Componente a regime"}], \text{'linestyle'} = [\text{solid}, \text{dash}])$$

Risposta al gradino



— Risposta al gradino — Componente a regime

Da cui si evince che, a transitorio esaurito, la risposta forzata tende al valore di regime.

5. La risposta alla rampa

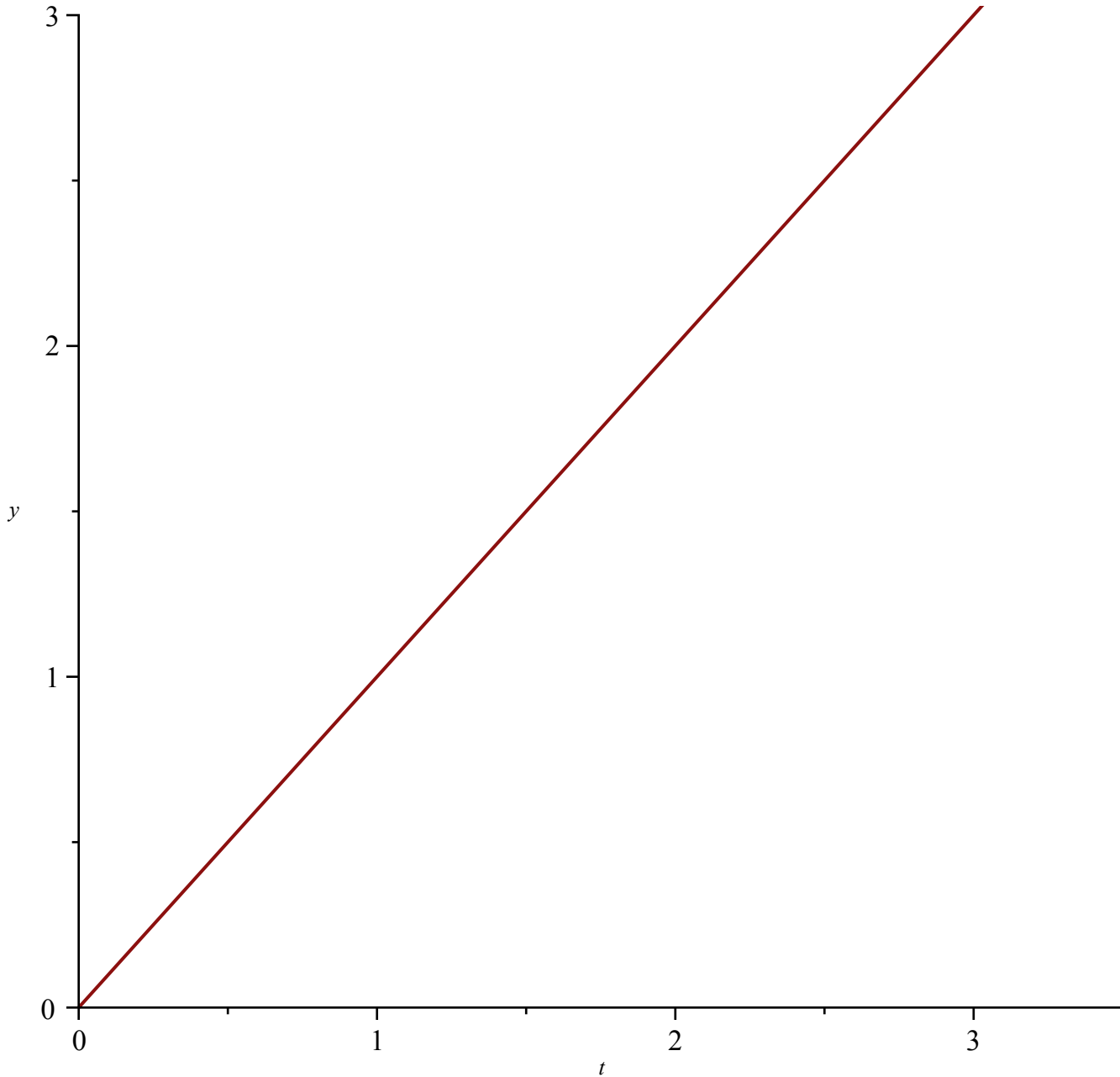
La rampa unitaria è una funzione right-sided così definita:

$$u_{rampa}(t) := \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} :$$

Descritta dal grafico:

`plot(urampa(t), t = 0 .. 3.5, y = 0 .. 3, title = "Rampa unitaria")`

Rampa unitaria



Anche questa funzione è di classe L, si può dunque procedere al calcolo della sua \mathcal{L} -trasformata:

$$U_{rampa}(s) := \text{laplace}(u_{rampa}(t), t, s) :$$

$$\frac{1}{s^2}$$

(5.1)

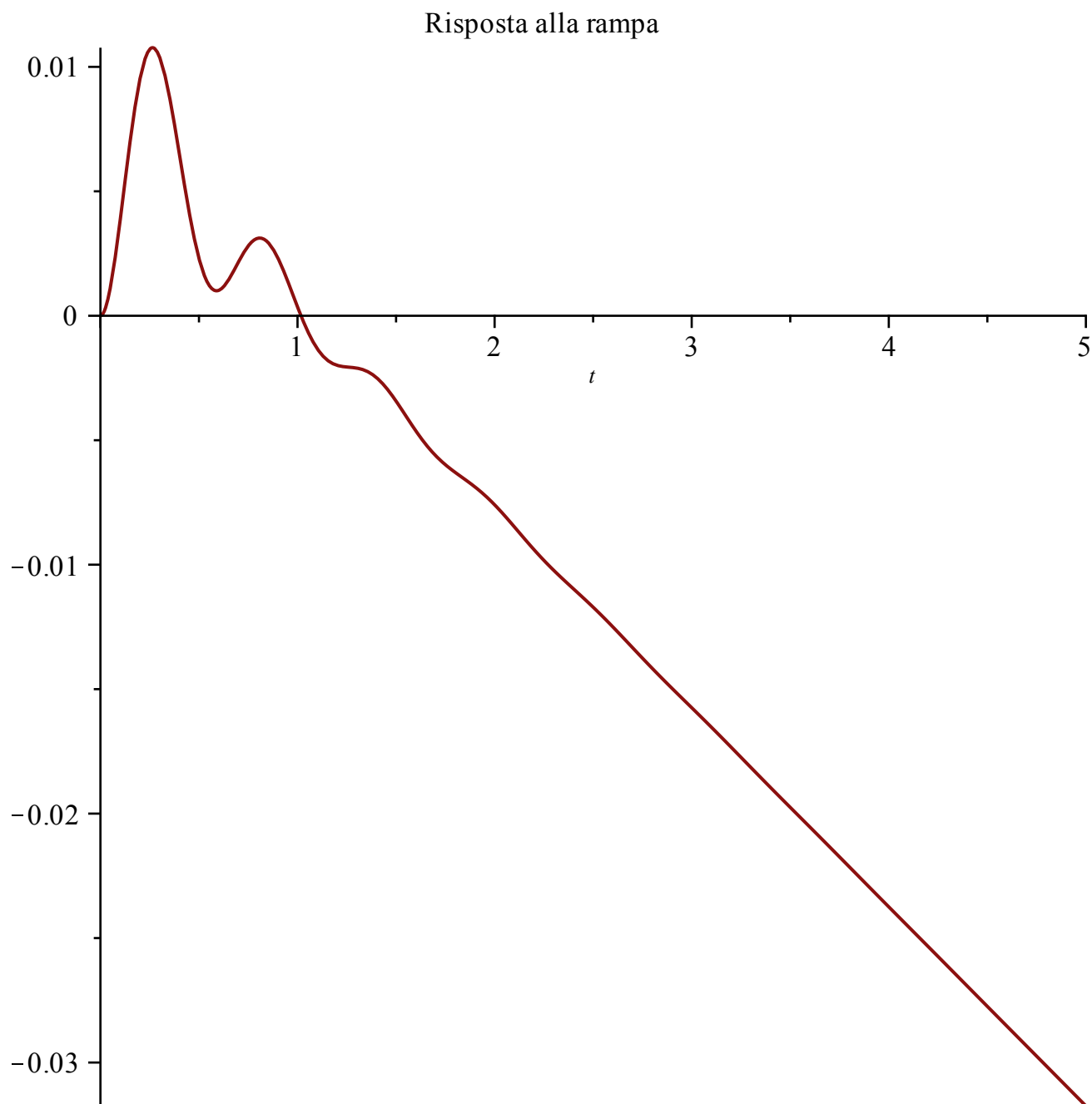
Data la funzione di trasferimento $G(s)$, per calcolare la risposta al gradino del sistema (nel dominio del tempo) basterà calcolare l'antitrasformata della funzione $Y_{rampa}(s) = G(s) \cdot U_{rampa}(s)$

$$y_{rampa}(t) := \text{invlaplace}(G(s) \cdot U_{rampa}(s), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

$$y_{rampa}(t) \left(\frac{129}{15625} - \frac{t}{125} - \frac{e^{-2t} (1419 \cos(11t) + 133 \sin(11t))}{171875} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (5.2)$$

Vediamola graficamente:

`plot(y_rampa(t), t = 0 ..5, title = "Risposta alla rampa")`



6. Modello ARMA

Per modello ARMA (Auto **R**egressive-**M**oving **A**verage - Modello autoregressivo a media mobile) è una rappresentazione I-U ottenuta dalla relazione che lega, nel dominio delle trasformate, l'uscita alla F. D. T. del sistema e l'ingresso: $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$.

Scomponendo la $G(s)$ in numeratore e denominatore si può ottenere una relazione del tipo

$$\text{den}(G(s)) \cdot Y(s) = \text{num}(G(s)) \cdot U(s).$$

Successivamente è possibile antitrasformare ed applicare il Teorema della Derivata: si è ottenuta una equazione differenziale nel dominio del tempo che lega l'ingresso all'uscita. L'utilità di utilizzare questo modello è intuitiva: esso fornisce istante per istante un valore di uscita basandosi sui precedenti valori in entrata ed in uscita.

Detto ciò, si prosegue scomponendo numeratore e denominatore della Funzione di Trasferimento:

$$\text{num}_G := s \rightarrow \text{numer}(G(s)) :$$

$$\text{den}_G := s \rightarrow \text{denom}(G(s)) :$$

E adesso si applica la definizione precedentemente esposta, ottenendo una equazione differenziale:

$$\begin{aligned} \text{eq_diff} &:= \text{expand}(\text{den}_G(s) \cdot Y_{ARMA}(s) = \text{num}_G(s) \cdot U_{ARMA}(s)) \\ \text{eq_diff} &:= Y_{ARMA}(s) s^2 + 4 Y_{ARMA}(s) s + 125 Y_{ARMA}(s) = U_{ARMA}(s) s - U_{ARMA}(s) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Adesso si effettua l'antitrasformata di Laplace ed il Teorema della Derivata per ottenere il modello ARMA:

$$\begin{aligned} \text{modello_ARMA} &:= \text{invlaplace}(\text{eq_diff}, s, t) \\ \text{modello_ARMA} &:= \mathcal{L}^{-1}(Y_{ARMA}(s) s^2, s, t) + 4 \mathcal{L}^{-1}(Y_{ARMA}(s) s, s, t) + 125 \mathcal{L}^{-1}(Y_{ARMA}(s), s, t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}(U_{ARMA}(s) s, s, t) - \mathcal{L}^{-1}(U_{ARMA}(s), s, t) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Per rendere il risultato più leggibile utilizzo il comando *subs* di Maple per sostituire alcuni termini:

$$\begin{aligned} \text{modello_ARMA} &:= \text{subs}\left(\left\{\text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s) s^2, s, t) = y_{ARMA}''(t), \text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s) s, s, t) = y_{ARMA}'(t), \right.\right. \\ &\quad \left.\left.\text{invlaplace}(Y_{ARMA}(s), s, t) = y_{ARMA}(t), \text{invlaplace}(U_{ARMA}(s) s, s, t) = u_{ARMA}'(t), \right.\right. \\ &\quad \left.\left.\text{invlaplace}(U_{ARMA}(s), s, t) = u_{ARMA}(t)\right\}, (6.2)\right) \\ \text{modello_ARMA} &:= D^{(2)}(y_{ARMA})(t) + 4 D(y_{ARMA})(t) + 125 y_{ARMA}(t) = D(u_{ARMA})(t) \\ &\quad - u_{ARMA}(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Si è così ottenuto un modello I-U minimale (di ordine minimo) legando in questo modo l'uscita all'ingresso.

7. Tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali il transitorio della risposta al gradino è nullo

Si considera innanzitutto il *modello ARMA* calcolato nel punto 6. dell'esercizio:

modello_ARMA

$$D^{(2)}(y_{ARMA})(t) + 4 D(y_{ARMA})(t) + 125 y_{ARMA}(t) = D(u_{ARMA})(t) - u_{ARMA}(t) \quad (7.1)$$

Per ricavare le condizioni iniziali nelle quali il transitorio della risposta al gradino si esaurisce, per prima cosa si determinano quali sono le componenti del transitorio:

$y_{gradino}(t)$

$$\left(-\frac{1}{125} + \frac{e^{-2t} (11 \cos(11t) + 127 \sin(11t))}{1375} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (7.2)$$

Si torna nel dominio della Trasformata di Laplace:

$eq_diff := \text{laplace}(\text{modello_ARMA}, t, s)$

$$\begin{aligned} eq_diff := s^2 \mathcal{L}(y_{ARMA}(t), t, s) - D(y_{ARMA})(0) - s y_{ARMA}(0) + 4 s \mathcal{L}(y_{ARMA}(t), t, s) \\ - 4 y_{ARMA}(0) + 125 \mathcal{L}(y_{ARMA}(t), t, s) = s \mathcal{L}(u_{ARMA}(t), t, s) - u_{ARMA}(0) - \mathcal{L}(u_{ARMA}(t), t, s) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Come fatto nel punto precedente (6.), si usa il comando *subs* per non appesantire troppo la notazione:

$$\begin{aligned} eq_diff := \text{subs}(\{ \text{laplace}(y_{ARMA}(t), t, s) = Y_{ARMA}(s), \text{laplace}(u_{ARMA}(t), t, s) = U_{ARMA}(s) \}, eq_diff) \\ eq_diff := Y_{ARMA}(s) s^2 - D(y_{ARMA})(0) - s y_{ARMA}(0) + 4 Y_{ARMA}(s) s - 4 y_{ARMA}(0) \\ + 125 Y_{ARMA}(s) = U_{ARMA}(s) s - u_{ARMA}(0) - U_{ARMA}(s) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Inoltre, consideriamo nulle le condizioni iniziali sull'ingresso (con il comando *eval*):

$$\begin{aligned} eq_diff := \text{eval}(eq_diff, u_{ARMA}(0) = 0) \\ eq_diff := Y_{ARMA}(s) s^2 - D(y_{ARMA})(0) - s y_{ARMA}(0) + 4 Y_{ARMA}(s) s - 4 y_{ARMA}(0) \\ + 125 Y_{ARMA}(s) = U_{ARMA}(s) s - U_{ARMA}(s) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Si calcola, dunque, la Trasformata di Laplace della Risposta Forzata e della Risposta In Evoluzione Libera: ambedue calcolate rispetto a $Y_{ARMA}(s)$ della nostra equazione differenziale.

Per calcolare la Risposta Forzata pongo le condizioni iniziali nulle, cosicché si annulli la componente in Evoluzione Libera.

Per il calcolo della Risposta In Evoluzione Libera poniamo provvisoriamente $U(s)$ uguale a zero.

$$Y_{forzata} := \text{solve}(\text{eval}(\text{eq_diff}, \{y_{ARMA}(0) = 0, y_{ARMA}'(0) = 0, y_{ARMA}''(0) = 0\}), Y_{ARMA}(s))$$

$$Y_{forzata} := \frac{U_{ARMA}(s) (s - 1)}{s^2 + 4s + 125} \quad (7.6)$$

$$Y_{libera} := (\text{solve}(\text{eval}(\text{eq_diff}, \{U_{ARMA}(s) = 0\}), Y_{ARMA}(s)))$$

$$Y_{libera} := \frac{s y_{ARMA}(0) + D(y_{ARMA})(0) + 4 y_{ARMA}(0)}{s^2 + 4s + 125} \quad (7.7)$$

$$Y_{f_gradino} := \text{eval}\left(Y_{forzata}, U_{ARMA}(s) = \frac{1}{s}\right)$$

$$Y_{f_gradino} := \frac{s - 1}{s (s^2 + 4s + 125)} \quad (7.8)$$

$$Y_{gradino} := \text{simplify}(Y_{f_gradino} + Y_{libera})$$

$$Y_{gradino} := \frac{(s^2 + 4s) y_{ARMA}(0) + D(y_{ARMA})(0) s + s - 1}{s (s^2 + 4s + 125)} \quad (7.9)$$

$$y_g := t \rightarrow \text{invlaplace}(Y_{gradino}, s, t) :$$

$$y_g(t)$$

$$-\frac{1}{125} + \frac{1}{1375} \left((11 \cos(11 t) (125 y_{ARMA}(0) + 1) + \sin(11 t) (125 D(y_{ARMA})(0) + 250 y_{ARMA}(0) + 127)) e^{-2 t} \right) \quad (7.10)$$

$$\text{collect}(\text{op}(2, y_g(t)), \exp)$$

$$\left(\frac{\cos(11 t) (125 y_{ARMA}(0) + 1)}{125} + \frac{\sin(11 t) (125 D(y_{ARMA})(0) + 250 y_{ARMA}(0) + 127)}{1375} \right) e^{-2 t} \quad (7.11)$$

$$eq_1 := \cos(11 t) (125 y_{ARMA}(0) + 1) = 0$$

$$eq_1 := \cos(11 t) (125 y_{ARMA}(0) + 1) = 0 \quad (7.12)$$

$$eq_2 := \sin(11 t) (125 D(y_{ARMA})(0) + 250 y_{ARMA}(0) + 127) = 0$$

$$eq_2 := \sin(11 t) (125 D(y_{ARMA})(0) + 250 y_{ARMA}(0) + 127) = 0 \quad (7.13)$$

Condizioni iniziali che annullano il transitorio della risposta alla rampa:

$solve(\{eq_1, eq_2\}, \{y_{ARMA}(0), D(y_{ARMA})(0)\})$
$$\left\{y_{ARMA}(0) = -\frac{1}{125}, D(y_{ARMA})(0) = -1\right\}$$
(7.14)

$eval(y_g(t), (7.14))$
$$-\frac{1}{125}$$
(7.15)

restart : *with(intrans)* : *with(DynamicSystems)* : *with(plots)* :

Qui sopra, vengono inseriti i comandi per riavviare l'area di lavoro e i toolbox necessari per lo svolgimento dell'esercizio.

PROGETTO di FONDAMENTI DI AUTOMATICA

ANTONINO VACCARELLA

matricola: 201107

Esercizio B

Costruire, utilizzando Adobe Illustrator o programma equivalente ed argomentando tutti i passaggi, il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) := \frac{40 \cdot \left(1 - \frac{s}{20}\right)}{s \cdot \left(s^2 + \frac{s}{16} + 1\right)} :$$

Diagramma di Bode

Il diagramma di Bode è un tipo di rappresentazione della risposta in frequenza di un sistema dinamico in cui si hanno due grafici: uno è il diagramma dei moduli $|G(jw)|$ e l'altro è relativo alla fase $\angle G(jw)$ entrambi al variare della variabile indipendente w mentre le variabili dipendenti sono il modulo e la fase.

Inoltre, le scale delle ordinate sono logaritmiche poiché il modulo verrà descritto in decibel mentre la fase è già logaritmica.

Per tracciare il diagramma di Bode è necessario manipolare la funzione di trasferimento in modo da ottenere la risposta armonica nella cosiddetta *Forma di Bode*.

Si procede dunque nel calcolare i vari parametri necessari al problema quali il fattore di Bode K_b , gli zeri e i poli.

Per quanto riguarda il modulo si identificano la pulsazione di bassa e alta frequenza che sono il minimo e il massimo tra le pulsazioni di rottura dei poli e degli zeri.

Zeri e poli

Si procede nel calcolare gli zeri e i poli della funzione di trasferimento sottoforma di vettori

$$poli := [solve(denom(G(s)), s)]$$

$$poli := \left[0, -\frac{1}{32} + \frac{1\sqrt{1023}}{32}, -\frac{1}{32} - \frac{1\sqrt{1023}}{32} \right] \quad (1.1.1)$$

$$zeri := [solve(numer(G(s)), s)]$$

$$zeri := [20] \quad (1.1.2)$$

Quindi, si calcola il numero di effetti integrali (poli nell'origine) presenti della funzione di trasferimento

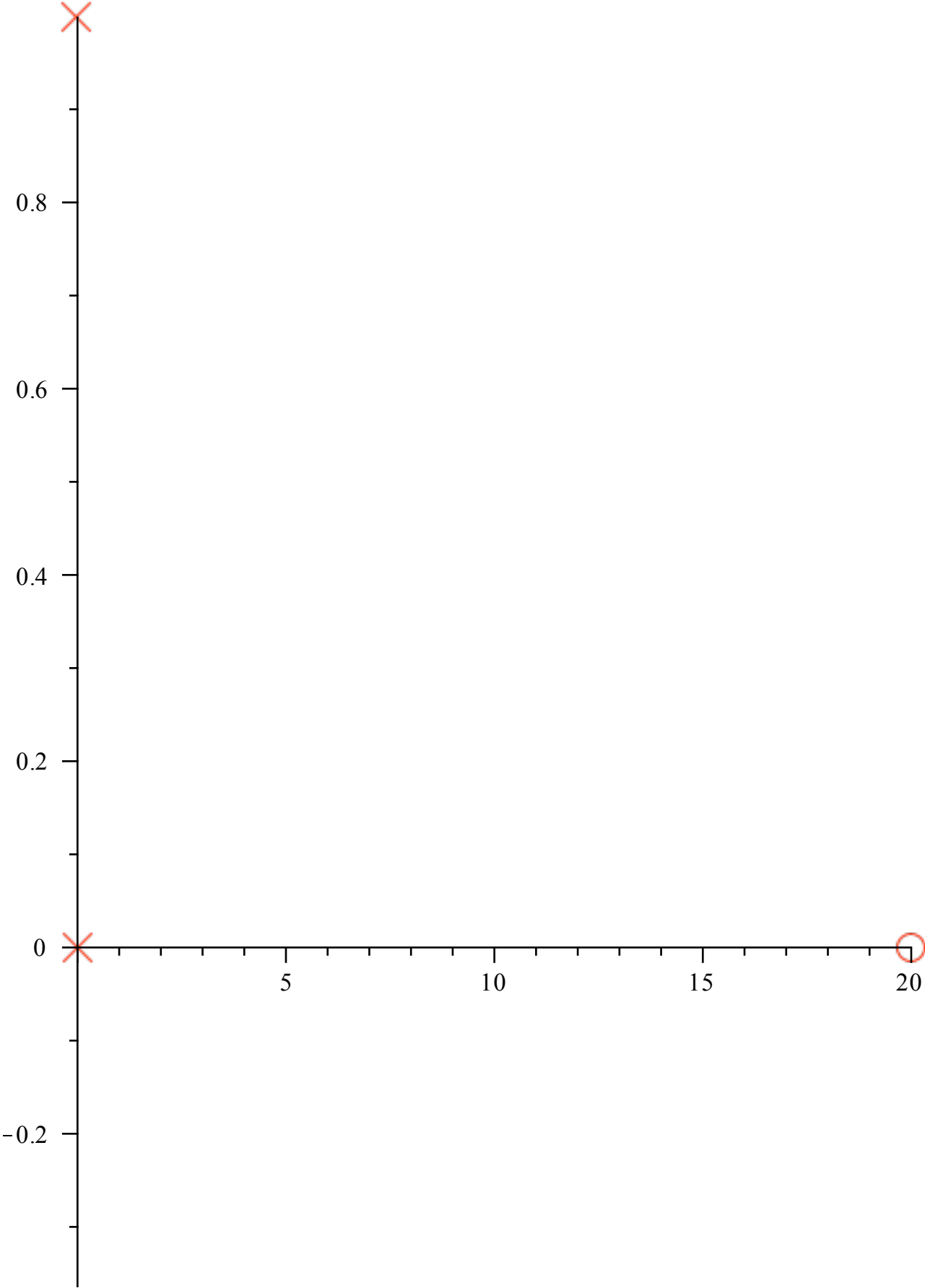
$$eff_int := numboccur(poli, 0)$$

$$eff_int := 1 \quad (1.1.3)$$

Vengono di seguito rappresentati graficamente gli zeri e i poli della funzione di trasferimento ottenuta

```
ZeroPolePlot(TransferFunction(G(s)), color = [red], title = "Grafico di zeri e poli di G(s)", size  
= [1000, 1000])
```

Grafico di zeri e poli di $G(s)$



In particolare, con le croci vengono identificati i tre poli ottenuti, mentre con il cerchio l'unico zero. È presente uno zero in 20 ed esso si definisce zero a fase non minima in quanto ha parte reale maggiore di zero mentre i due poli ottenuti sono complessi e coniugati.

La funzione di trasferimento sarebbe bipo stabile visti i poli $\frac{1}{32} + \frac{j\sqrt{1023}}{32}$ e $-\frac{1}{32} - \frac{j\sqrt{1023}}{32}$ che si trovano nel semipiano sinistro in quanto hanno parte reale strettamente negativa ma è presente un polo instabile nell'origine che annulla tale considerazione.

Smorzamento e pulsazione naturale

Nel caso dato si ha il cosiddetto fenomeno della risonanza proprio a causa della presenza di poli complessi e coniugati detti poli a basso smorzamento.

Ciò significa che si avrà un picco che non renderà monotono decrescente il diagramma dei moduli e l'approssimazione asintotica avrà sempre un errore; il massimo errore sarà proprio pari al picco di risonanza.

In particolare, si determina lo smorzamento δ e la pulsazione naturale ω_n (nel cui intorno vi sarà una pulsazione di risonanza ω_r) associando il polinomio del denominatore

$$s^2 + \frac{s}{16} + 1 \text{ al polinomio } s^2 + \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega_n}{16} + \omega_n^2.$$

Utilizzando il principio di identità dei polinomi in particolare si avrà:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = 1 \\ 2 \cdot \delta \cdot \omega_n = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\text{solve}\left(\left\{\omega_n^2 = 1, 2 \cdot \delta \cdot \omega_n = \frac{1}{16}\right\}, [\delta, \omega_n]\right)$$

$$\left[\left[\delta = \frac{1}{32}, \omega_n = 1\right], \left[\delta = -\frac{1}{32}, \omega_n = -1\right]\right] \quad (1.2.1)$$

Si prende in considerazione il primo risultato ottenuto ovvero $\delta := \frac{1}{32} : \omega_n := 1$: in quanto è

importante notare che per $\delta \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ si ha il fenomeno della risonanza.

Inizialmente non si tiene in considerazione la risonanza ma si costruisce il diagramma di Bode approssimato dal quale poi si andranno ad effettuare le correzioni dovute.

Si escludono i poli nell'origine dalla lista dei poli e calcolo la pulsazione di taglio

$\text{poli} := \text{remove}(x \rightarrow x = 0, \text{poli})$

$$\text{poli} := \left[-\frac{1}{32} + \frac{j\sqrt{1023}}{32}, -\frac{1}{32} - \frac{j\sqrt{1023}}{32}\right] \quad (1.1)$$

Si calcola il numero di poli e zeri al netto degli effetti integrali

$np := \text{numelems}(poli)$

$$np := 2 \quad (1.2)$$

$nz := \text{numelems}(zeri)$

$$nz := 1 \quad (1.3)$$

Pulsazioni di taglio

Pulsazione di taglio degli zeri

$\Omega_t := \text{abs}\sim(zeri)$

$$\Omega_t := [20] \quad (1.3.1)$$

Pulsazione di taglio dei poli

$\omega_t := \text{abs}\sim(poli)$

$$\omega_t := [1, 1] \quad (1.3.2)$$

Guadagno di Bode

Il guadagno di Bode che è una costante in grado di far "slittare" il diagramma di Bode.

Considerando la presenza di un polo nell'origine di molteplicità due, tale valore sarà diverso da G(0)

$K_b := \lim_{s \rightarrow 0} s^{\text{eff_int}} \cdot G(s)$

$$K_b := 40 \quad (1.4.1)$$

Il guadagno di Bode è minore di uno. Ciò significa che ha un contributo sul diagramma delle fasi.

Inoltre, il polo nell'origine dà come contributo sui moduli una retta con pendenza -40 dB/decade passante per l'origine mentre sulle fasi garantisce un ritardo costante di 180°.

Valuto lo spostamento operato dal guadagno di Bode sul grafico dei moduli

$K_{b_dB} := \text{evalf}(20 \cdot \log_{10}(|K_b|))$

$$K_{b_dB} := 32.04119982 \quad (1.4.2)$$

Dunque, esso non causerà alternazioni al grafico.

Diagramma dei moduli

Procedo ora a valutare i contributi dei vari fattori. Il metodo dell'approssimazione asintotica corrisponde nel calcolare gli asintoti della funzione in alta e bassa frequenza in modo poi da raccordarli.

Contributo dei poli e degli zeri

Per quanto riguarda il nell'origine esso darà un contributo pari ad una retta di coefficiente angolare pari a -20·eff_int db/decade che passa per l'origine degli esponenti.

Poiché la loro molteplicità è 1 allora la retta avrà pendenza -20 db/decade. Per riassumere:

-20·log10(ω) :

Per quanto riguarda lo zero a fase non minima esso darà un contributo pari a zero in bassa frequenza per ogni pulsazione inferiore alla pulsazione di taglio mentre in alta frequenza per pulsazioni maggiori alla pulsazione di taglio darà un contributo pari ad una semiretta di pendenza +20 db/dec a partire da 1 che è il valore della pulsazione di rottura Ω_t . Per riassumere:

$$\begin{cases} 0 & \omega < 1 \\ 20 \cdot \log_{10}(\omega) & \omega \geq 1 \end{cases} :$$

Per quanto riguarda i poli complessi si può procedere non considerando la risonanza e approssimandoli a poli reali e coincidenti con pulsazione di taglio ω_n pari a quella naturale.

Il loro contributo al diagramma dei moduli in bassa frequenza sarà pari a 0 db per ogni pulsazione inferiore alla pulsazione naturale e, in alta frequenza per pulsazioni maggiori alla pulsazione naturale, pari ad una retta con pendenza -20 db/decade. Per riassumere:

$$\begin{cases} 0 & \omega < 1 \\ -20 \cdot \log_{10}(\omega) & \omega \geq 1 \end{cases} :$$

Rappresentazione della funzione modulo

Si determina la pulsazione di taglio a più bassa frequenza sui moduli

$$\begin{aligned} \text{omegaleftmodulo} &:= \min(\min(\Omega_t), \min(\omega_t)) \\ \text{omegaleftmodulo} &:= 1 \end{aligned} \quad (1.5.2.1)$$

Si determina la pulsazione di taglio a più alta frequenza sui moduli

$$\begin{aligned} \text{omegarightmodulo} &:= \max(\max(\Omega_t), \max(\omega_t)) \\ \text{omegarightmodulo} &:= 20 \end{aligned} \quad (1.5.2.2)$$

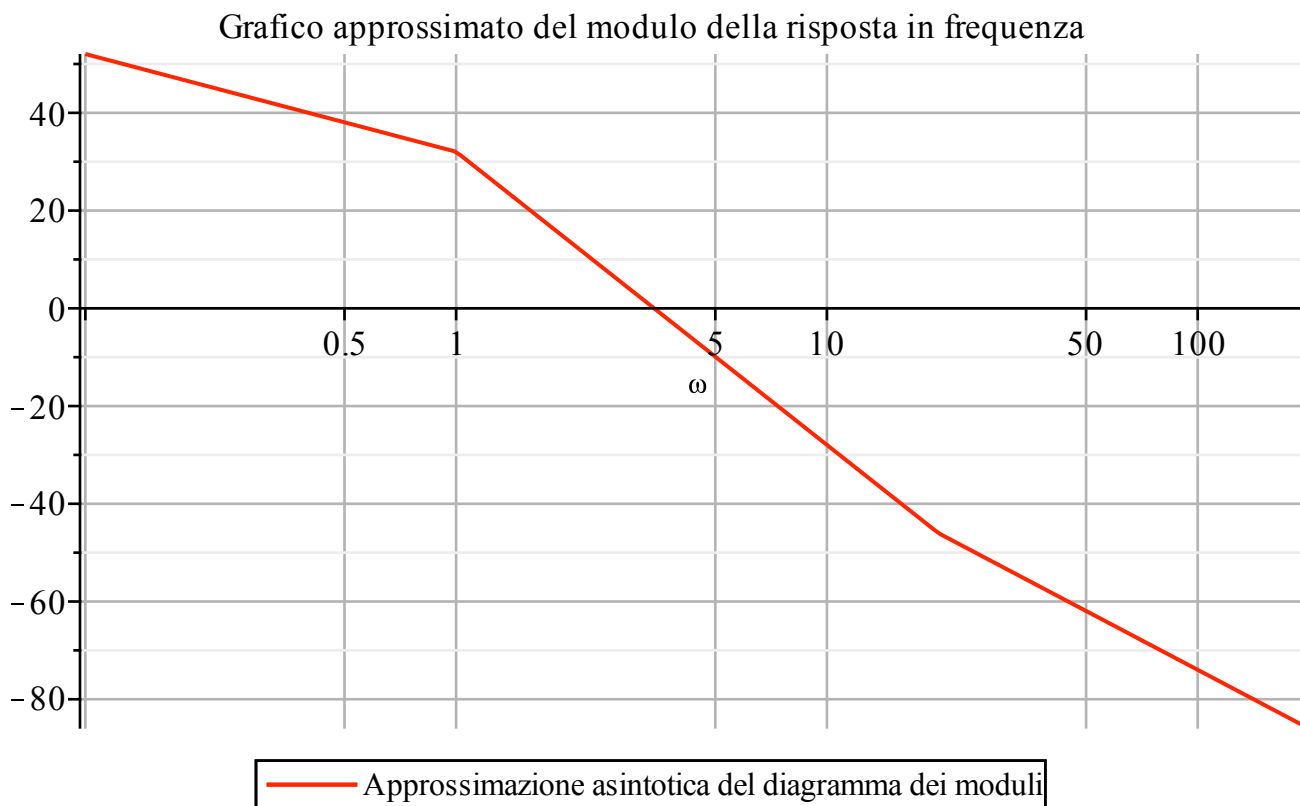
Per approssimare la funzione modulo unisco i singoli contributi in una funzione:

$$f_a(\omega, \omega_c) := \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 1 \end{cases} :$$

$$f_G(\omega) := 20 \cdot \log_{10}(|K_b|) - \text{eff_int} \cdot 20 \cdot \log_{10}(\omega) + \sum_{i=1}^{nz} f_a(\omega, \Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} f_a(\omega, \omega_t[i]) :$$

Vengono rappresentate le funzioni approssimate

```
semilogplot(f_G(omega), omega = 0.1 * omegaleftmodulo .. 10 * omegarightmodulo, axis = [gridlines], title
= "Grafico approssimato del modulo della risposta in frequenza", legend
= ["Approssimazione asintotica del diagramma dei moduli"], color = [red], size = [500, 300])
```



Si rappresenta poi effettivamente la funzione attraverso il comando `MagnitudePlot` di Maple

```
MagnitudePlot( TransferFunction( G(s) ), size = [ 650, 300 ], color = [ red ], title
= "Grafico effettivo del modulo della risposta in frequenza", legend
= [ "Funzione reale del diagramma dei moduli" ] )
```

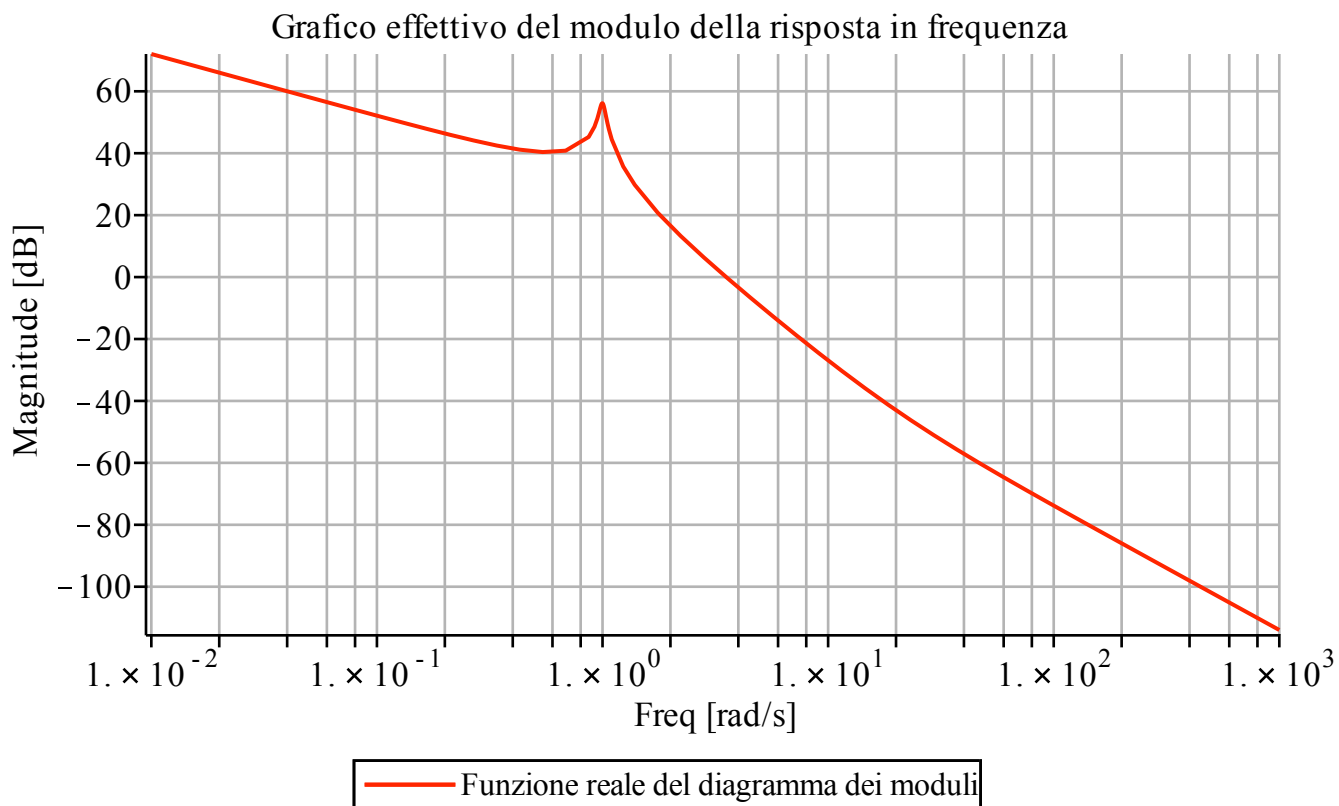


Diagramma delle fasi

Si procede ora a valutare i contributi dei vari fattori

Contributo dei poli e degli zeri

Per quanto riguarda lo zero, esso è a fase non minima e darà un contributo pari a zero per pulsazioni minori di un decimo della pulsazione di taglio Ω_t , un contributo pari a un segmento in ritardo crescente con pendenza pari a -45° per le pulsazioni comprese fra un decimo di Ω_t e 10 volte Ω_t nella cosiddetta banda di media frequenza e infine un contributo pari a -90° nella zona di alta frequenza per valori maggiore di 10 volte Ω_t . Per riassumere:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \omega < \frac{1}{10} \\ -\frac{\text{Pi}}{4} \cdot \log_{10}(10 \cdot \omega) & \frac{1}{10} \leq \omega < 10 \\ -\frac{\text{Pi}}{2} & \omega \geq 10 \end{array} \right.$$

Per quanto riguarda i poli nell'origine, essi causeranno uno slittamento in ritardo un una fase pari a

$$\frac{eff_int \cdot \Pi}{2}$$

Per quanto riguarda i poli complessi e coniugati essi saranno considerati come reali e coincidenti, trascurando per ora il fattore risonanza. Di conseguenza, essi definiranno un contributo pari a zero nella zona di bassa frequenza, un contributo pari ad una retta di pendenza pari a -90° per le pulsazioni comprese nella zona di bassa frequenza ovvero fra un decimo di Ω_t e 10 volte Ω_t e infine un contributo pari ad un ritardo costante di 180° nella zona di alta frequenza. Per riassumere:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \omega < \frac{1}{10} \\ -\frac{\Pi}{2} \cdot \log_{10}(10 \cdot \omega) & \frac{1}{10} \leq \omega < 10 \\ -\Pi & \omega \geq 10 \end{array} \right.$$

Rappresentazione del diagramma delle fasi

Si determina la pulsazione di taglio a più bassa frequenza sulla fase

$$omegaleftphase := \min \left(\min \left(\frac{\Omega_t}{10} \right), \min \left(\frac{\omega_t}{10} \right) \right)$$

$$omegaleftphase := \frac{1}{10} \quad (1.6.2.1)$$

Si determina la pulsazione di taglio a più alta frequenza sulla fase

$$omegarightphase := \max \left(\max \left(10 \cdot \Omega_t \right), \max \left(10 \cdot \omega_t \right) \right)$$

$$omegarightphase := 200 \quad (1.6.2.2)$$

Per approssimare la funzione modulo si uniscono i singoli contributi in una funzione:

$$g_a(\omega, \omega_c) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi}{4} \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega}{\frac{\omega_c}{10}} \right) & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ \frac{\Pi}{2} & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 10 \end{array} \right. :$$

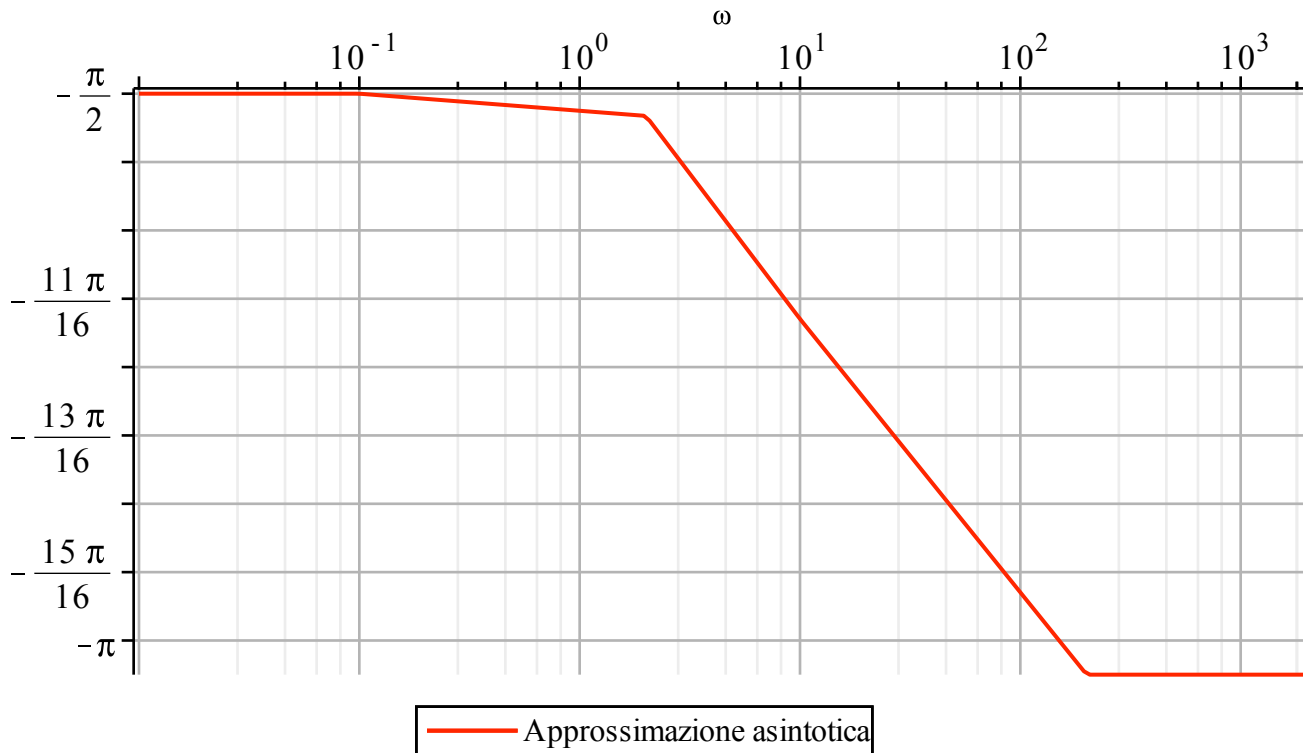
$$g_G(\omega) := \frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \Pi - \frac{eff_int \cdot \pi}{2} + \sum_{i=1}^{nz} \text{signum}(-zeri[i]) \cdot g_a(\omega, \Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} \text{signum}(-poli[i]) \cdot g_a(\omega, \omega_t[i]) :$$

Vengono di seguito rappresentate le funzioni approssimata e non in maniera sovrapposta per valutarne

l'andamento

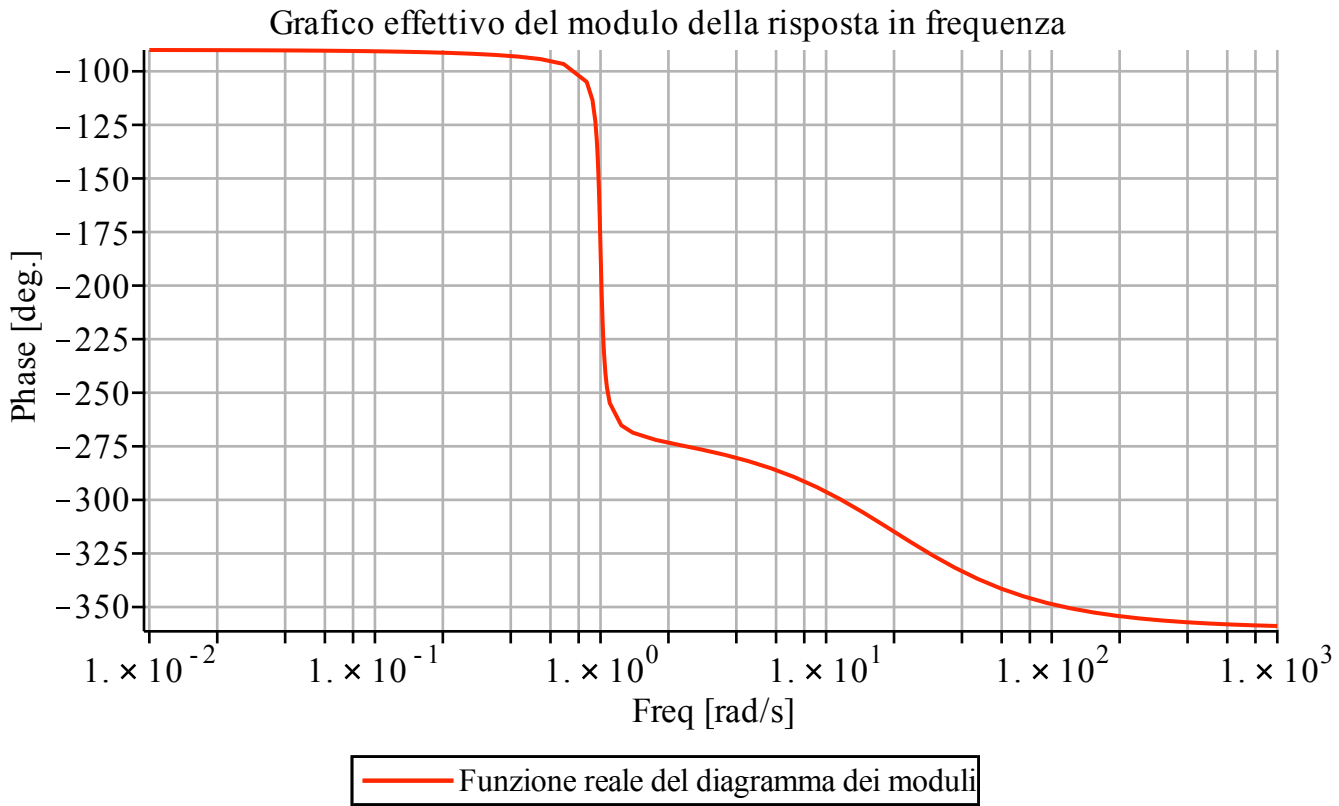
```
semilogplot([g_G(omega)], omega = 0.1*omegaleftfase .. 10*omegarightfase, axis = [gridlines], tickmarks
= [default, piticks], title = "Grafico approssimato della fase della risposta in frequenza", legend
= ["Approssimazione asintotica"], color = [red], size = [500, 300])
```

Grafico approssimato della fase della risposta in frequenza



Si rappresenta poi effettivamente la funzione attraverso il comando MagnitudePlot di Maple

```
PhasePlot(TransferFunction(G(s)), size = [650, 300], color = [red], title
= "Grafico effettivo del modulo della risposta in frequenza", legend
= ["Funzione reale del diagramma dei moduli"])
```



Specifiche

Si calcola la pendenza iniziale e quella finale sul diagramma dei moduli. La misurazione avviene in dB/decade

$$pendenza_{in} := -20 \cdot eff_int$$

$$pendenza_{in} := -20 \quad (1.7.1)$$

$$pendenza_{fin} := -20 \cdot eff_int + 20 \cdot (nz - np)$$

$$pendenza_{fin} := -40 \quad (1.7.2)$$

Si calcola la fase iniziale e quella finale.

Per fare ciò bisogna separare i poli e gli zeri che si trovano nel semipiano destro da quelli che si trovano nel semipiano sinistro, non considerando i poli nell'origine

$$nz_{pos} := numelems(remove(x \rightarrow \text{Re}(x) > 0, zeri))$$

$$nz_{pos} := 0 \quad (1.7.3)$$

$$nz_{neg} := numelems(remove(x \rightarrow \text{Re}(x) < 0, zeri))$$

$$nz_{neg} := 1 \quad (1.7.4)$$

$$np_{pos} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) > 0, \text{poli}))$$

$$np_{pos} := 2 \quad (1.7.5)$$

$$np_{neg} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) < 0, \text{poli}))$$

$$np_{neg} := 0 \quad (1.7.6)$$

Bisogna ricordare che un polo di molteplicità due si trova nello zero

Si calcola la fase iniziale

$$fase_iniziale := \frac{(1 - \text{signum}(K_b))}{2} \cdot \text{Pi} - \frac{\text{eff_int} \cdot \text{Pi}}{2}$$

$$fase_iniziale := -\frac{\pi}{2} \quad (1.7.7)$$

$$fase_finale := fase_iniziale + \frac{(nz_{pos} - nz_{neg}) \cdot \text{Pi}}{2} - \frac{(np_{pos} - np_{neg}) \cdot \text{Pi}}{2}$$

$$fase_finale := -2\pi \quad (1.7.8)$$

$$sfasamento_relativo := fase_finale - fase_iniziale$$

$$sfasamento_relativo := -\frac{3\pi}{2} \quad (1.7.9)$$

Si ha dunque che il grafico della fase inizia a 0 gradi e termina a -270 gradi

Per calcolare le pendenze negli intervalli intermedi, si considerano i punti in cui avviene un cambio di pendenza in modo da accoppiarli secondo ciascun intervallo.

Calcolo degli intervalli per il diagramma dei moduli

Si calcola quali sono le pulsazioni di taglio in cui avvengono cambiamenti di pendenza

$$puls_taglio_moduli := \text{sort}(\text{convert}(\text{convert}(\Omega_t, \text{set}) \mathbf{union} \text{convert}(\omega_t, \text{set}), \text{list}))$$

$$puls_taglio_moduli := [1, 20] \quad (1.7.1.1)$$

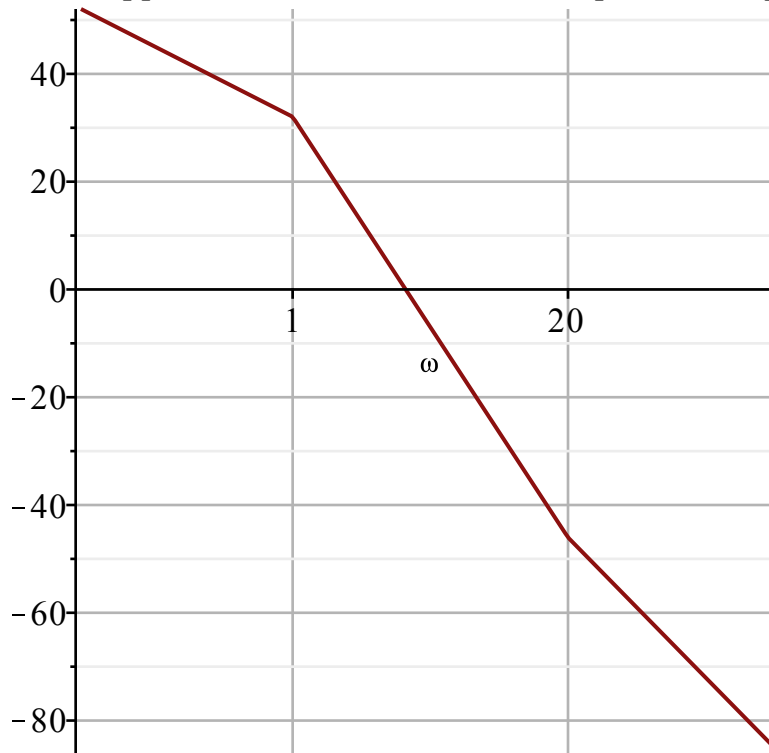
Ecco rappresentato nuovamente il grafico per comodità

$$\text{semilogplot}(f_G(\omega), \omega = 0.1 \cdot \text{omegaleftmodulo} .. 10 \cdot \text{omegarightmodulo}, \text{axis} = [\text{gridlines}], \text{tickmarks}$$

$$= [puls_taglio_moduli, \text{default}], \text{title}$$

$$= \text{"Grafico approssimato del modulo della risposta in frequenza"}, \text{size} = [300, 300])$$

Grafico approssimato del modulo della risposta in frequ



Si procede al calcolo delle pendenze del diagramma utilizzando la derivata logaritmica e considerando le pulsazioni di taglio presenti nel diagramma. Ecco per prima cosa le funzioni derivate

$$df(\omega, \omega_c) := \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 1 \end{cases} :$$

$$d_modulo(\omega) := -eff_int \cdot 20 + \sum_{i=1}^{nz} df(\omega, \Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} df(\omega, \omega_t[i]) :$$

$$len_1 := numelems(puls_taglio_moduli)$$

$$len_l := 2$$

(1.7.1.2)

Si procede tramite il comando seq a calcolare le pendenze dei tratti della spezzata

$$seq \left(\left[[puls_taglio_moduli[k], puls_taglio_moduli[k+1]], \right. \right. \\ \left. \left. d_modulo \left(\frac{puls_taglio_moduli[k] + puls_taglio_moduli[k+1]}{2} \right) \right], k = 1 .. len_1 - 1 \right)$$

$$[[1, 20], -60]$$

(1.7.1.3)

Calcolo degli intervalli per il diagramma delle fasi

Si calcola quali sono le pulsazioni di taglio in cui avvengono cambiamenti di pendenza

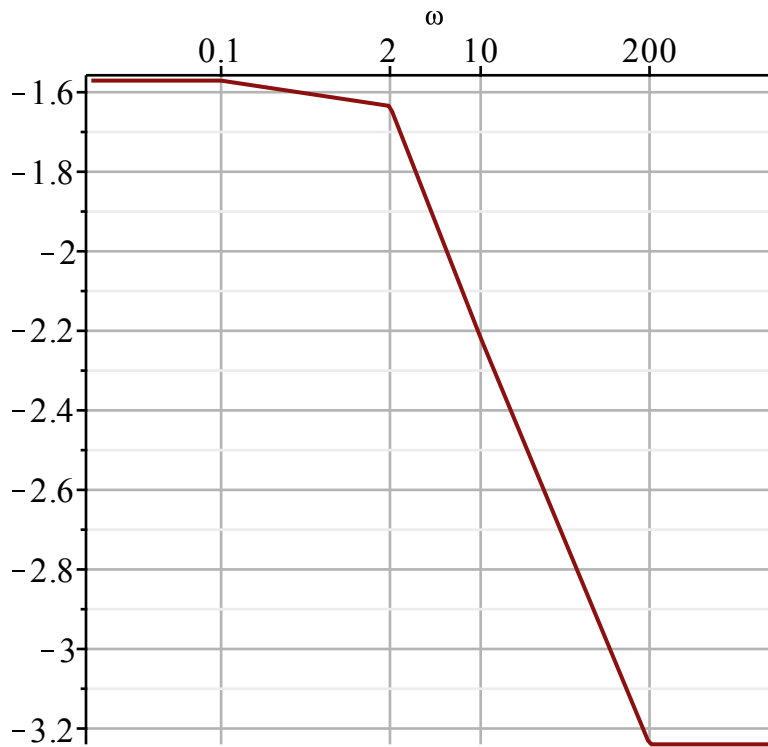
$$puls_taglio_fase := sort \left(convert \left(convert \left(\frac{\Omega_t}{10}, set \right) \mathbf{union} convert \left(\frac{\omega_t}{10}, set \right) \mathbf{union} convert \left(10 \cdot \Omega_t, set \right) \mathbf{union} convert \left(10 \cdot \omega_t, set \right), list \right) \right)$$

$$puls_taglio_fase := \left[\frac{1}{10}, 2, 10, 200 \right] \quad (1.7.2.1)$$

Ecco nuovamente il grafico per comodità

`semilogplot(gG(ω), ω = 0.1·omegaleftfase .. 10·omegarightfase, axis = [gridlines], tickmarks = [puls_taglio_fase, default], title = "Grafico approssimato della fase della risposta in frequenza", size = [300, 300])`

Grafico approssimato della fase della risposta in frequen



Si procede al calcolo delle pendenze del diagramma utilizzando la derivata logaritmica e considerando le pulsazioni di taglio presenti nel diagramma. Scrivo per prima cosa le funzioni derivate

$$dg(\omega, \omega_c) := \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ 0 & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
d_fase(\omega) &:= \sum_{i=1}^{nz} \text{signum}(-zeri[i]) \cdot dg(\omega, \Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} \text{signum}(-poli[i]) \cdot dg(\omega, \omega_t[i]) : \\
len_2 &:= \text{numelems}(puls_taglio_fase) \\
len_2 &:= 4
\end{aligned} \tag{1.7.2.2}$$

Si procede tramite il comando seq a calcolare le pendenze dei tratti della spezzata

$$\begin{aligned}
&seq\left(\left[[puls_taglio_fase[k], puls_taglio_fase[k+1]], \right. \right. \\
&\quad \left. \left. d_fase\left(\frac{puls_taglio_fase[k] + puls_taglio_fase[k+1]}{2}\right) \right], k=1 \dots len_2 - 1\right) \\
&\left[\left[\frac{1}{10}, 2 \right], \frac{\left(-\frac{1}{32} + \frac{1\sqrt{1023}}{32}\right)\pi}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{32} - \frac{1\sqrt{1023}}{32}\right)\pi}{4} \right], \left[[2, 10], -\frac{\pi}{4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left(-\frac{1}{32} + \frac{1\sqrt{1023}}{32}\right)\pi}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{32} - \frac{1\sqrt{1023}}{32}\right)\pi}{4} \right], \left[[10, 200], -\frac{\pi}{4} \right]
\end{aligned} \tag{1.7.2.3}$$

Correzioni da applicare per la risonanza

Il fenomeno della risonanza causa un'assenza di monotonicità sul diagramma dei moduli in quanto è presente un picco alla cui altezza, nel diagramma delle fasi, si evince invece una discesa più "ripida". E' dunque possibile individuare la cosiddetta pulsazione di risonanza all'altezza della quale è presente una tangente orizzontale; essa corrisponde dunque al picco del grafico dei moduli e si calcola come

$$\begin{aligned}
M_r &:= \text{evalf}\left(\frac{1}{2 \cdot \delta \cdot \sqrt{1 - \delta^2}}\right) \\
M_r &:= 16.00781823
\end{aligned} \tag{1.8.1}$$

In decibel sarà:

$$\begin{aligned}
M_{r_dB} &:= \text{evalf}\left(20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{2 \delta \cdot \text{sqrt}(1 - \delta^2)}\right)\right) \\
M_{r_dB} &:= 24.08664288
\end{aligned} \tag{1.8.2}$$

La pulsazione di risonanza all'altezza della quale si ha il picco di risonanza è

$$\begin{aligned}
\omega_r &:= \text{evalf}\left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2}\right) : \\
\omega_r & \\
\omega_r & \\
\omega_r &:= 0.9990229603
\end{aligned} \tag{1.8.3}$$

Si possono dunque applicare delle "correzioni" per rendere il grafico maggiormente fedele grazie anche al fatto che il valore di smorzamento è minore di 0.5; per valori maggiori le correzioni sono ininfluenti,

Si opera innanzitutto innalzando il diagramma dei moduli nell'intorno della pulsazione di risonanza che è

centrato in corrispondenza della pulsazione naturale ω_n con un'ampiezza pari a $2 \cdot \delta$ e si raccorda il grafico di conseguenza.

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi, invece, si ha che:

- per $\omega < \omega_n \cdot 10^{-\delta}$ si approssima a 0°
- per $\omega > \omega_n \cdot 10^\delta$ si approssima a -180°
- per $\omega_n \cdot 10^{-\delta} \leq \omega \leq \omega_n \cdot 10^\delta$ si approssima con un segmento di pendenza $-\frac{90}{\delta} \frac{\text{deg}}{\text{decade}}$

Dunque si dovrà modificare l'intervallo in media frequenza dei poli complessi e coniugati, ovvero

$\frac{\omega_n}{10} \leq \omega \leq 10 \cdot \omega_n$, con il seguente intervallo:

$$\text{evalf}\left(\omega_n \cdot 10^{-\delta}\right) \leq \omega \leq \text{evalf}\left(\omega_n \cdot 10^\delta\right) = 0.9305720409 \leq \omega \leq 1.074607828$$

ed il segmento in media frequenza sul diagramma delle fasi avrà pendenza pari a $-\frac{90}{\delta} = -2880$

$\frac{\text{gradi}}{\text{decade}}$

Si otterrebbe così dunque un grafico che rappresenta meglio il picco di risonanza.

Qui sotto invece, si utilizzano gli strumenti di Maple per ricavare il diagramma vero e proprio.

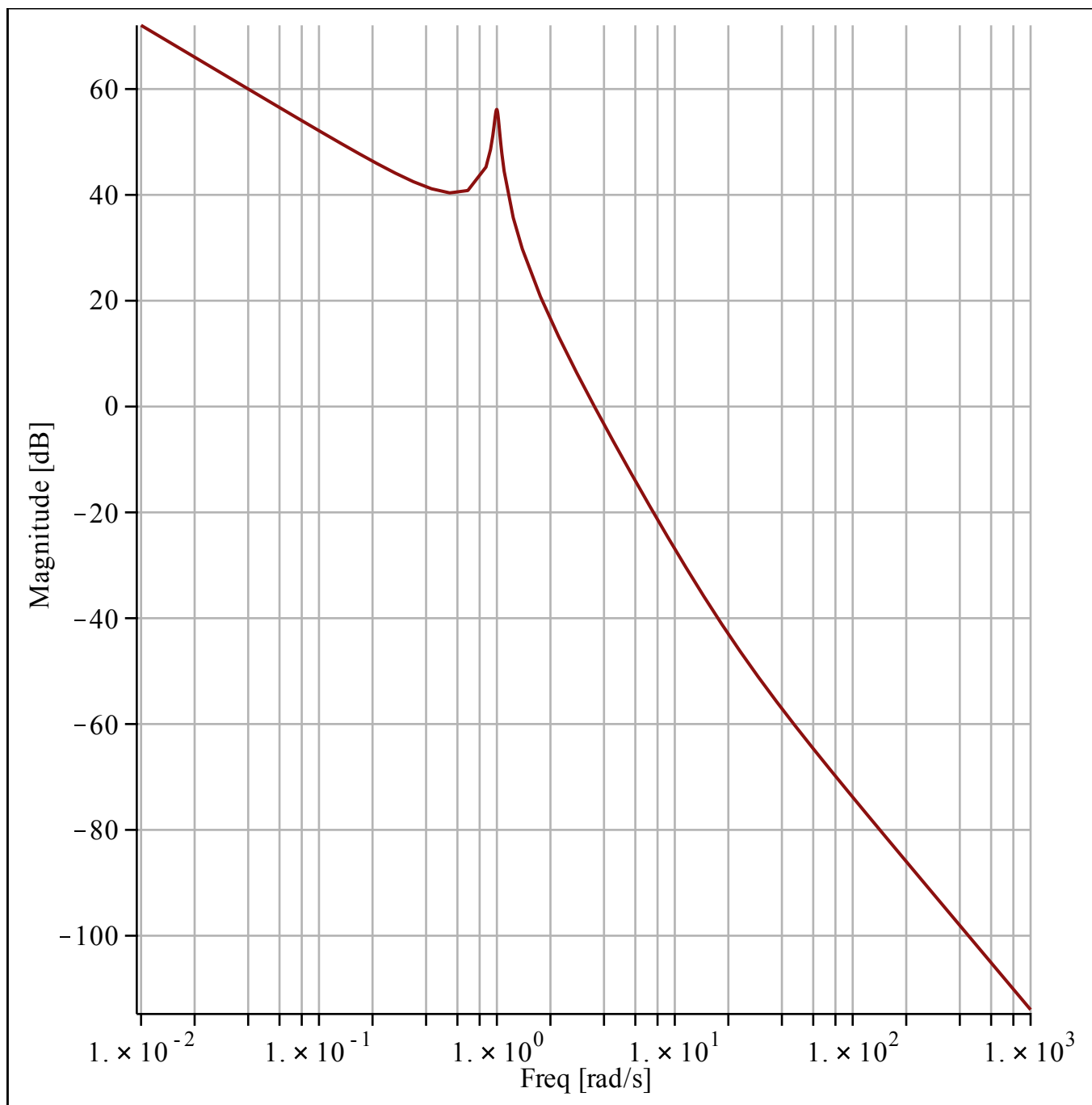
Ricavo la forma di Bode di $G(s)$:

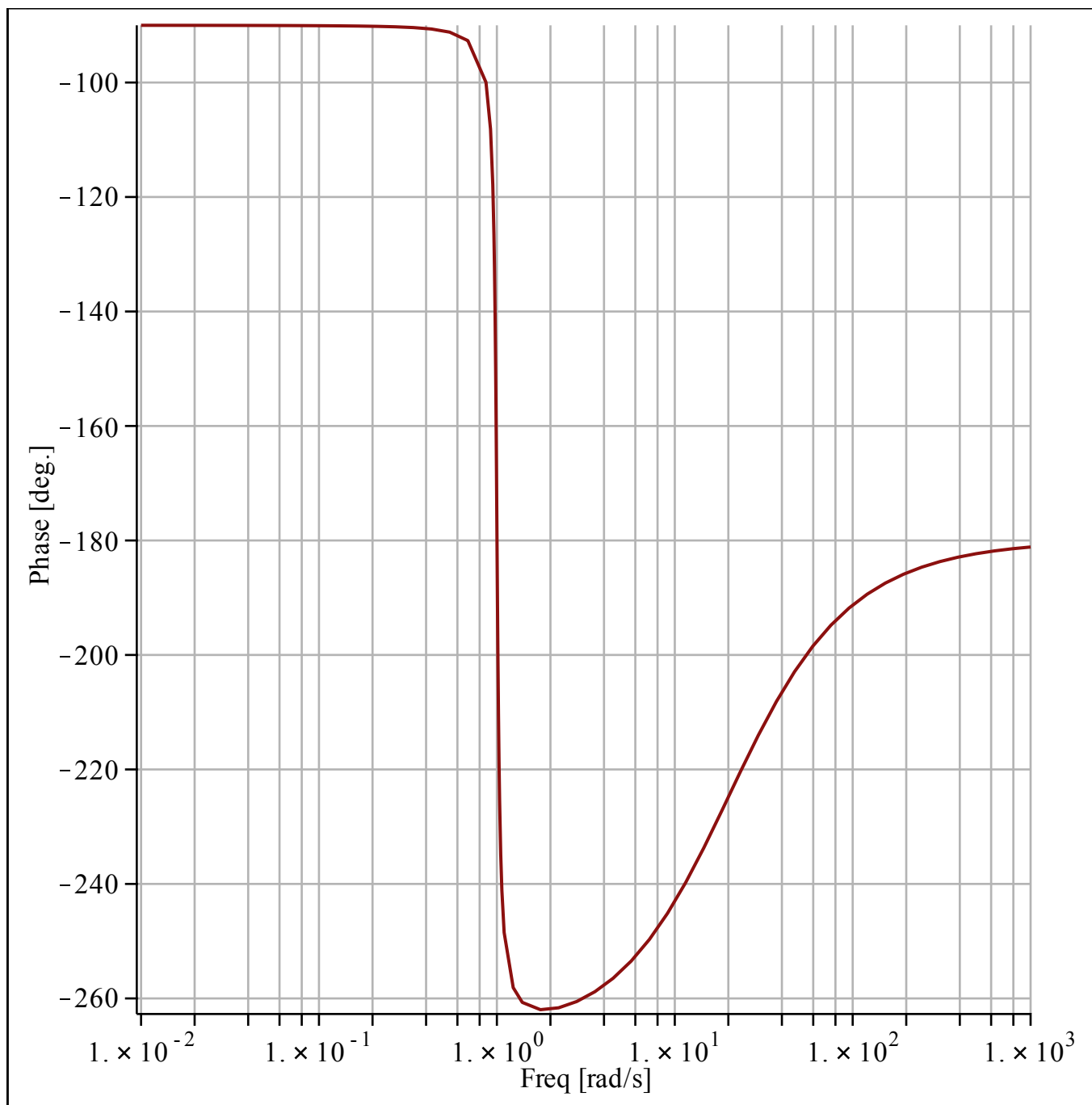
$$G_{Bode} := s \rightarrow K_b \cdot \frac{\left(1 + \text{sign}(-\text{zeri}) \cdot \frac{s}{20}\right)}{s \cdot \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2 \cdot \delta \cdot \frac{s}{\omega_n} + 1\right)} :$$

$G_{Bode}(s)$

$$\frac{40 \left(1 + \frac{s}{20}\right)}{s \left(s^2 + \frac{1}{16} s + 1\right)} \quad (1.4)$$

$\text{BodePlot}\left(\text{TransferFunction}\left(G_{Bode}(s)\right)\right)$





restart : with (intrans) : with (DynamicSystems) : with (plots) :

Qui sopra, vengono inseriti i comandi per riavviare l'area di lavoro e i toolbox necessari per lo svolgimento dell'esercizio.

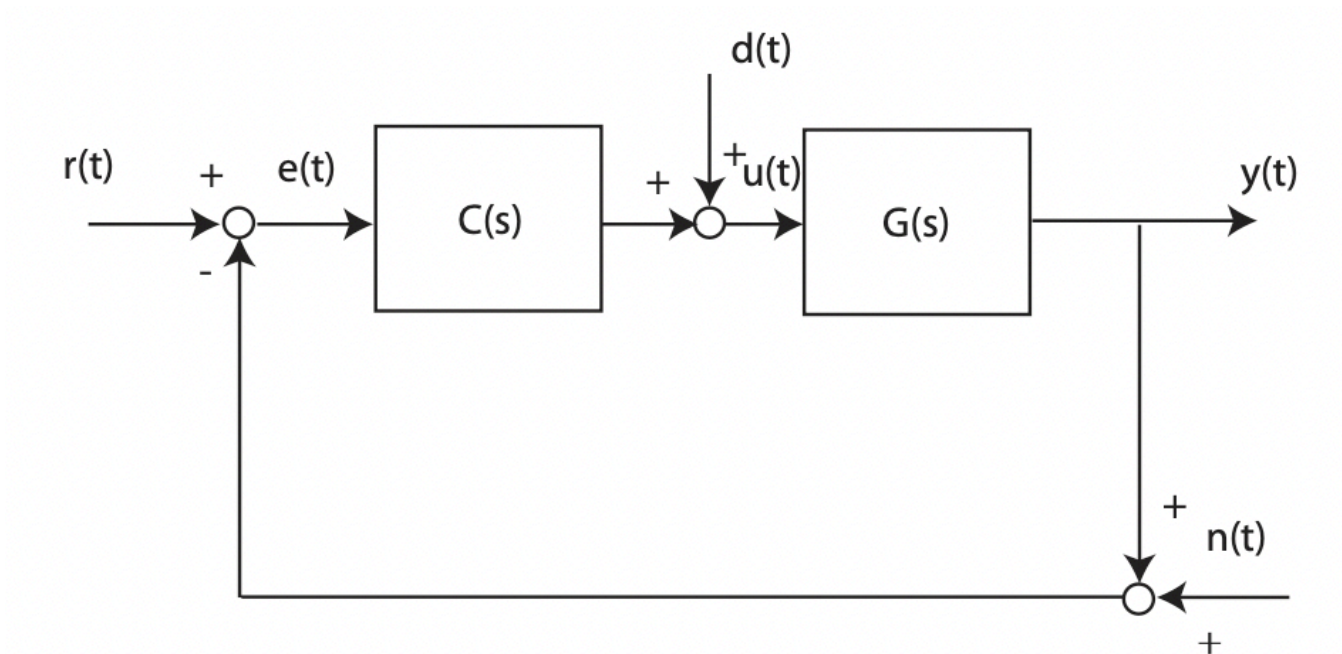
PROGETTO di FONDAMENTI DI AUTOMATICA

ANTONINO VACCARELLA

matricola: 201107

Esercizio D (punto 1 e 2)

Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.



dove $G(s)$ rappresenta la f.d.t. del processo

$$G(s) := \frac{9 \cdot (0.04 \cdot s + 1)}{s^2 + 6 \cdot s + 4} :$$

Si chiede di determinare un regolatore $C(s)$ di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore di inseguimento inferiore al 10 % per un riferimento a rampa;
2. errore nullo in uscita per un disturbo di carico a gradino.

1. Errore di inseguimento inferiore al 10 % per un riferimento a rampa

Prima di svolgere tale punto bisogna effettuare la seguente considerazione.

Il segnale d'ingresso è la rampa unitaria quindi il problema che bisogna studiare per questo esercizio è un problema di asservimento di velocità.

Si rappresenta la Funzione di Trasferimento fornita dall'esercizio:

$$G(s) = \frac{0.36 s + 9}{s^2 + 6 s + 4} \quad (1.1)$$

Il problema in questione è un problema di precisione statica, in particolare un problema di asservimento di velocità dove il riferimento è un segnale a rampa che è un tipo di segnale polinomiale definito come

$$r(t) = R * t * 1(t)$$

dove R indica la pendenza della rampa.

Un problema di controllo, in generale, consiste nel disegno o progetto di un regolatore C(s) il cui obiettivo deve essere quello di garantire che e(t) che rappresenta l'errore di inseguimento si approssimi il più possibile a 0 ovvero sia un valore limitato.

In particolare l'errore di inseguimento riferito ad una rampa sarà pari a

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

dove r(t) rappresenta il segnale di riferimento mentre y(t) è l'uscita dell'impianto, tale che sia soddisfatto il vincolo

$$e_v = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) \leq \frac{1}{10} :$$

Si verifica i poli della f.d.t.

$$\begin{aligned} poli &:= [solve(denom(G(s)) = 0, s)] \\ poli &:= [\sqrt{5} - 3, -3 - \sqrt{5}] \end{aligned} \quad (1.2)$$

La funzione L(s) definita anche come funzione di anello si definisce come serie tra controllore C(s) e G(s), e si dice di tipo 1 (può essere anche di tipo superiore) quando presenta un polo nell'origine ovvero quando presenta un effetto integrale.

Andando a calcolare i poli di G(s) notiamo che non ho poli nell'origine, questo significa che bisogna disegnare il nostro regolatore come segue

$$\begin{aligned} C &:= s \rightarrow \frac{k}{s} : \\ C(s) &= \frac{k}{s} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ovvero è necessario inserire con C(s) il polo affinché L(s) sia una funzione di tipo 1; k rappresenta una variabile ed è definito come amplificatore.

Ora è possibile determinare la funzione d'anello L(s):

$$L(s) := s \rightarrow C(s) \cdot G(s) :$$

$$L(s) = \frac{k (0.36 s + 9)}{s (s^2 + 6 s + 4)} \quad (1.4)$$

La formula dell'errore d'inseguimento è uguale a 1/Kv dove Kv è il limite per s che tende a zero di L(s)*s:

$$K_v := \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L(s)$$

$$K_v := 2.250000000 k \quad (1.5)$$

$$e_{\infty, v} := \frac{1}{K_v}$$

$$e_{\infty, v} := \frac{0.4444444444}{k} \quad (1.6)$$

La specifica impone un errore di velocità inferiore al 10%. Da tale dato è possibile calcolare 'k':

$$\text{solve}(\{e_{\infty, v} < 0.1, k > 0\}, k)$$

$$\{4.444444444 < k\} \quad (1.7)$$

$$\text{unassign}('k')$$

Il valore di k deve essere maggiore di 4.4444444 quindi è stato scelto il valore 4.6.

Si sceglie quindi il valore di:

$$k := 4.6$$

$$k := 4.6 \quad (1.8)$$

Il valore sull'uscita a transitorio esaurito è:

$$\text{evalf}(e_{\infty, v})$$

$$0.09661835746 \quad (1.9)$$

$$C(s)$$

$$\frac{4.6}{s} \quad (1.10)$$

Soddisfa la specifica del punto 1. Definiamo la L(s) che come già detto è pari C(s) * G(s)

La funzione d'anello è:

$$L(s)$$

$$\frac{4.6 \left(0.36 s + 9 \right)}{s \left(s^2 + 6 s + 4 \right)} \tag{1.11}$$

```

clear;close all;
%Qui sopra, vengono inseriti i comandi per ripulire l'area di lavoro

% Definisco la variabile che conterrà la funzione di trasferimento
s=zpk('s');
G=(9*(0.04*s+1)/(s^2+6*s+4));

%Precisione statica
C=4.6/s;

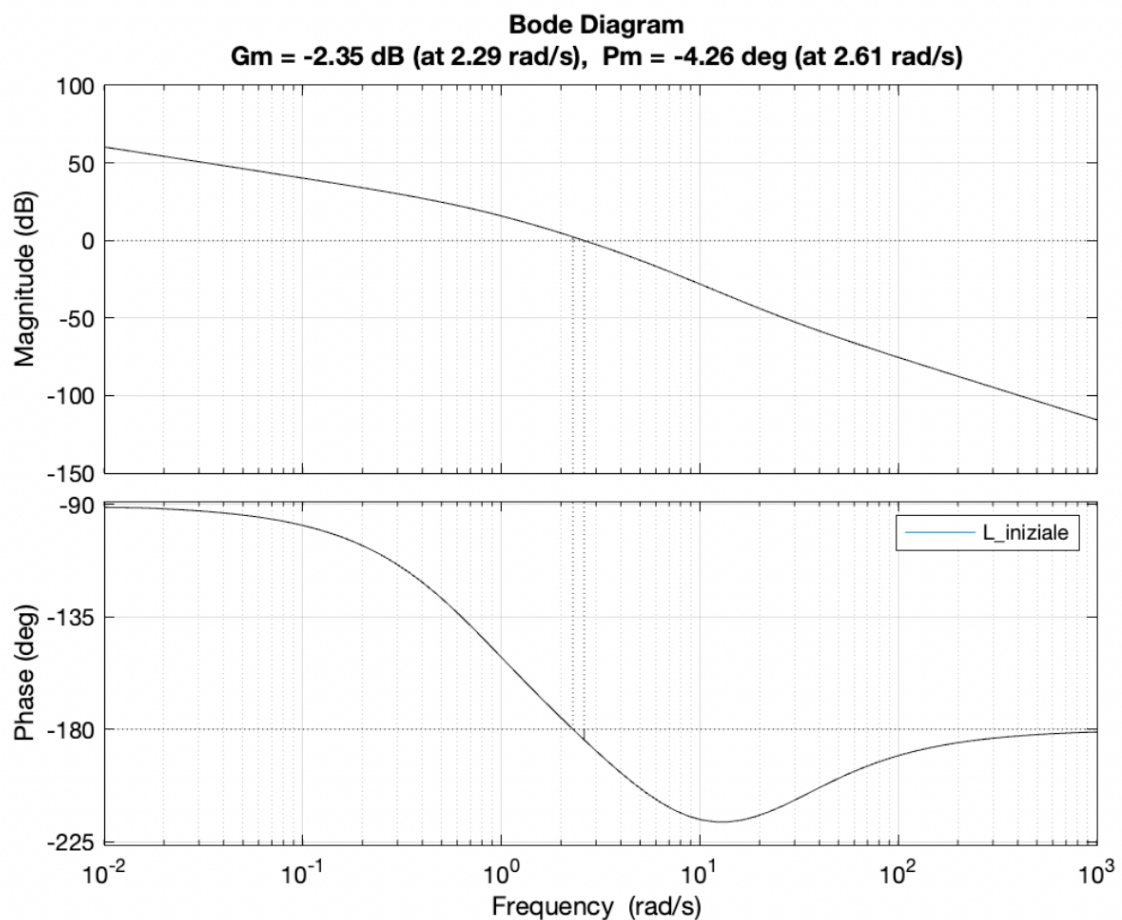
% Si genera la funzione di anello L(s):

L_iniziale=series(C,G);

%Diagramma di Bode della funzione di anello

figure(1);
margin(L_iniziale);
grid;
legend;

```



Si deduce che la funzione di anello non è BIBO-stabile in quanto il margine di fase Pm è negativo.

(Verrà approfondito ciò nel punto 3)

2. Errore nullo in uscita per un disturbo di carico a gradino

Si introduce un disturbo, anche in questo caso a gradino, che si può assumere unitario per comodità poiché la richiesta è in termini percentuali.

$$\begin{aligned} D_g &:= s \rightarrow \text{laplace}(\text{Heaviside}(t), t, s) : \\ D_g(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (1.1)$$

La Funzione di Trasferimento è in questo caso $E_D(s) = S_D(s) \cdot D(s)$ con $S_D(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s) + G(s)}$
Sensitività del disturbo e $D(s)$ disturbo pari al gradino unitario per quanto detto.

$$\begin{aligned} E_D &:= s \rightarrow \frac{G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} \cdot D_g(s) : \\ E_D(s) &= \frac{0.36 s + 9}{(s^2 + 6 s + 4) \left(1 + \frac{4.6 (0.36 s + 9)}{s (s^2 + 6 s + 4)} \right)} s \end{aligned} \quad (1.2)$$

L'errore relativo sull'uscita regolata, a transitorio esaurito, a fronte del disturbo assegnato, è calcolabile tramite il teorema del valore finale applicato alla FdT appena descritta.

Una volta determinato, si potranno stabilire i valori di k che regolano l'errore in modo da rispettare le specifiche sulla precisione statica richieste.

$$\begin{aligned} e_{\infty, d} &:= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_D(s) \\ e_{\infty, d} &:= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

```

clear;close all;
%Qui sopra, vengono inseriti i comandi per ripulire l'area di lavoro

%{
TRACCIA ESERCIZIO D (punto 3):

Picco di risonanza  $M_r, \text{dB} \leq 3 \text{ dB}$ , banda passante  $2 \leq \omega_{BW} \leq 8 \text{ rad/sec}$ .

%}

%{
Si vogliono modulare i parametri richiesti per avere una nuova funzione
di anello in modo tale che essa abbia i valori desiderati.
Si procedrà in una logica EX-ANTE per poi operare verifiche
finali.
Se dopo di ciò le richieste della traccia non sono state rispettate,
si potranno operare delle modifiche ai valori scelti fino al
raggiungimento del risultato.
%}

% Definisco la variabile che conterrà la funzione di trasferimento
s=zpk('s');
G=(9*(0.04*s+1)/(s^2+6*s+4));

%Precisione statica
C=4.6/s;

% Si genera la funzione di anello L(s):

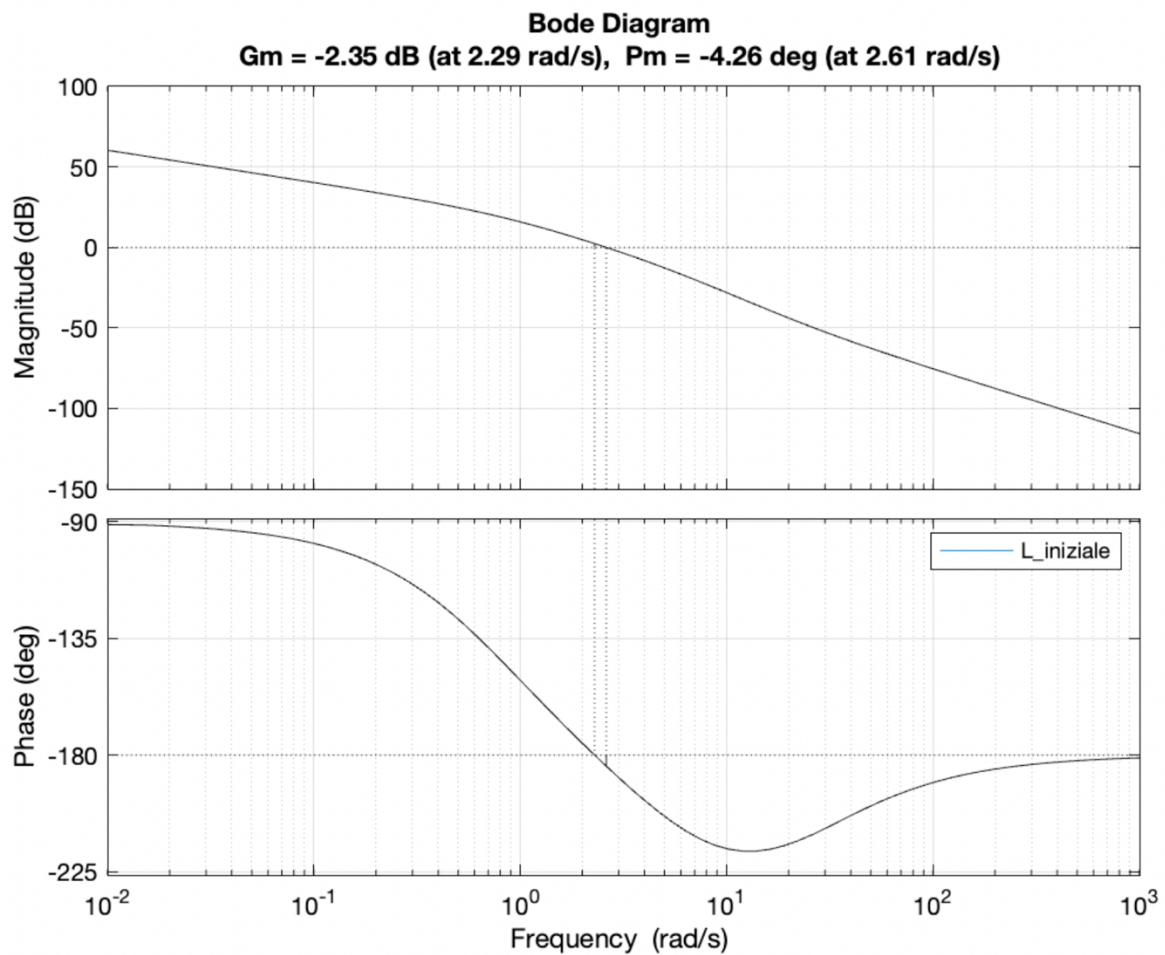
L_iniziale=series(C,G);

%{
Si modella il sistema mediante una rete corretttrice posta in
cascata alla funzione di anello in modo tale da ottenere un picco di
risonanza inferiore a 3 dB ed una pulsazione di banda passante
compresa fra 2 e 8 rad/sec.
Questo tipo di problema è legato alla precisione dinamica e, per
il momento, ragiono in una logica EX-ANTE, ovvero prima di chiudere
l'anello in retroazione.

Tramite il comando margin, verifico i valori di  $\omega_c$ ,
ovvero la pulsazione di attraversamento e della fase che chiamo  $\phi$ .
%}

```

```
figure(1);
margin(L_iniziale);
grid;
legend;
```



%{
 Ottengo un $\omega_c = 2.61 \text{ rad/s}$ e $\phi = -4.26^\circ$ dunque la funzione d'anello non è BIBO stabile per il criterio di Bode, il quale asserisce che se una funzione di anello presenta guadagno statico positivo, diagramma dei moduli monotono decrescente, pulsazione di attraversamento unica e margine di fase positivo allora è stabile.
 In questo caso viene a cadere l'ultima condizione.

Dunque l'algoritmo di controllo dovrà stabilizzare in retroazione il sistema oltre che rispettare le specifiche legate alla precisione dinamica.

Il picco di risonanza è definito come il massimo assoluto del diagramma dei moduli della risposta in frequenza e per essere minore o uguale a 3 dB bisogna calcolare lo smorzamento critico ovvero quel valore che corrisponde proprio ad un picco di 3 dB.
Lo calcolo grazie alla funzione smorz_Mr.
%}

```
delta_cr=smorz_Mr(3);
```

```
%{  
Si ottiene che lo smorzamento critico è delta_cr = 0.3832.  
Se il picco di risonanza aumenta, lo smorzamento diminuisce, poiché  
inversamente proporzionali.
```

Di conseguenza, sapendo che il margine di fase è all'incirca 100 volte il valore dello smorzamento critico, esso sarà pari a circa a 39°.

La pulsazione di attraversamento è un minorante della pulsazione di banda passante ($w_{bw} > w_c$).

Si hanno, quindi, due specifiche di progetto da verificare successivamente:

1. $\phi_m \geq 39^\circ$
2. $2 \leq w_c \leq 8$ rad/sec

Si ha un margine di fase di progetto pari a 39° e la pulsazione di attraversamento di progetto:
%}

```
wc=2.1;
```

```
%{  
Per banda passante si intende l'intervallo di pulsazioni in corrispondenza  
del quale il modulo della risposta in frequenza è pressoché piatto e  
quindi la fase della risposta in frequenza è nulla.  
Procedo ora a calcolare i valori della funzione di anello tenendo in  
considerazione la nuova pulsazione e ottengo così i valori di  
modulo e fase.  
%}
```

```
[modulo,fase]=bode(L_iniziale,wc);  
%modulo = 1.5693  
%fase = -177.0622  
margine_fase_iniziale=180-abs(fase);  
%margine_fase_iniziale= 2.9378
```

```

%{
Si ottiene un valore del modulo maggiore di 1 e l'argomento negativo.

Inoltre, si ha che il margine di fase iniziale, pari a  $180 - \text{abs}(\text{argomento})$ ,
sarà  $2.9378^\circ$  ovvero minore del margine di fase richiesto che è  $39^\circ$ .
Poiché picco di risonanza e smorzamento sono inversamente proporzionali,
per mantenerlo al di sotto dei 3 dB allora il margine di fase deve essere
al di sopra del valore critico e cioè maggiore di  $39^\circ$ .

Si necessita, dunque, di due effetti combinati:
attenuazione per abbassare il guadagno e
anticipo sulla fase per recuperare i gradi necessari sul margine
di fase.
Il compensatore necessario è la "Rete a Sella".
%}

m=1/modulo;

theta=42-margine_fase_iniziale;

k=15;

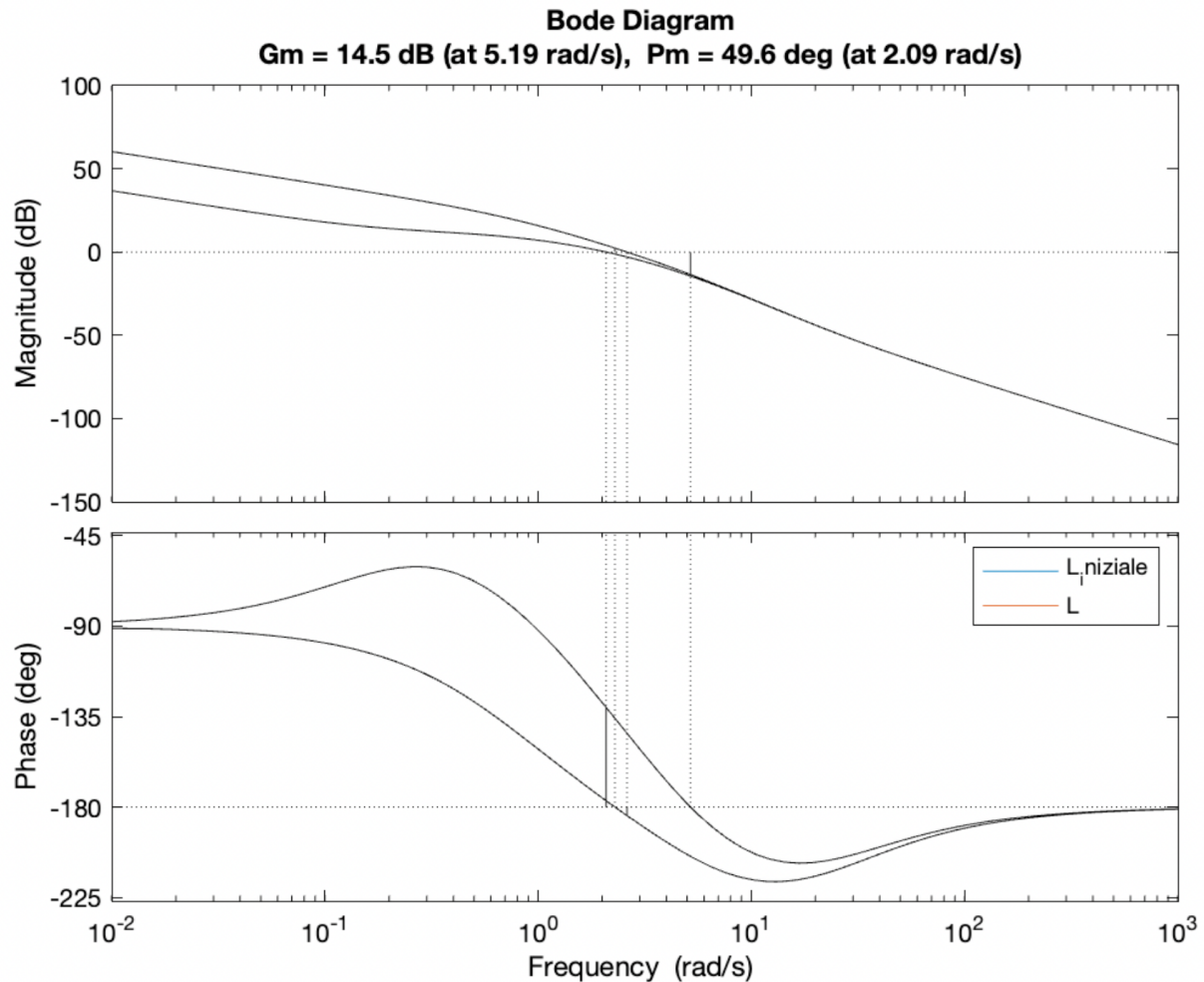
% Calcolo alpha, T1 e T2
[alpha,T1,T2] = sella(wc,m,39,k);

% Espressione della rete corretttrice a sella
C_lag_lead = ((1 + s*alpha*T1)/ (1*s*T1))* ((1*s*T2) /(1+s*alpha*T2));
L = series(C_lag_lead,L_iniziale);

% Si mostrano, ora, le differenze tra il grafo di partenza e quello
% con la rete corretttrice in un grafico.

figure(2);
margin(L_iniziale);
hold on;
margin(L);
legend('L_iniziale','L');

```



%{

La pulsazione di banda passante è circa 5.19 rad/s, che soddisfa la richiesta della traccia (tra 2 e 8 rad/s).
 Qui di seguito, si verifica che il picco di risonanza sia minore di 3 dB.

Per ogni $\Delta_{cr} > 0.3832$ il picco di risonanza è minore dei 3 dB.
 In particolare in questo caso il Δ vale 0.4960 ($P_m/100$), che è maggiore del valore precedentemente citato.

Si procede nel controllare il picco di risonanza con il grafico dei moduli della retroazione algebrica e unitaria.

Inoltre, la rete a sella ha reso il sistema retroazionato BIBO stabile rendendo il margine di fase di $L > 0$;
 per il criterio di Bode dopo aver sistemato le specifiche statiche il sistema retroazionato non era BIBO stabile in quanto non soddisfaceva la condizione che vedeva il margine di fase > 0 .
 Adesso quella condizione è stata recuperata.

%}


```
figure(3);  
T = feedback(L,1);  
bodemag(T);
```

