

Tesi di Laurea in Modelli Lineari Generalizzati

Item Selection, Penalized Estimating Function and
Variable Selection in Item Response Theory Models

Antonio Cola

Università degli Studi di Napoli Federico II

27 Febbraio 2024

Relatrice:
Ch.ma Prof.ssa Maria Iannario



Correlatore:
Ch.mo Prof. Alfonso Iodice D'Enza

1 Modelli Item Response Theory per Dati Ordinali

2 Partial Credit Model

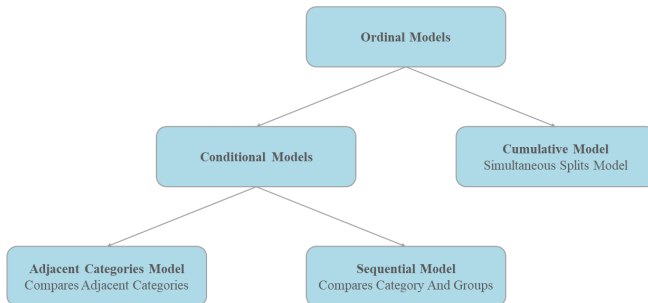
3 Simulazione

4 Applicazione

5 Conclusioni

Struttura dei Modelli IRT per Dati Ordinali

I **tre principali tipi di modelli ordinali** comunemente utilizzati possono essere caratterizzati in base al modo in cui utilizzano modelli binari come loro blocchi di costruzione.



Item Selection

L'**obiettivo principale** di questa fase è **identificare un insieme ottimale di item** che massimizzi la qualità delle misurazioni riducendo contemporaneamente il carico computazionale. Introduciamo un **nuovo algoritmo** che offre una soluzione flessibile per affrontare la sfida della selezione degli item nei modelli IRT¹. Questo algoritmo impiega **due approcci distinti**:

Metodo	Vantaggi	Svantaggi
Bruteforce	Alta precisione	Tempi di esecuzione lunghi
Backward	Tempi di esecuzione brevi	Minore precisione

¹Questa metodologia non è applicabile per scale psicometriche validate o nei casi in cui il tratto latente è multidimensionale.

1 Modelli Item Response Theory per Dati Ordinali

2 Partial Credit Model

3 Simulazione

4 Applicazione

5 Conclusioni

Partial Credit Model con Covariate

La **struttura fondamentale del PCM** può essere presentata come segue:

$$\log \left(\frac{P(Y_{pi} = r)}{P(Y_{pi} = r - 1)} \right) = \theta_p - \delta_{ir}, \quad r = 1, \dots, k$$

Sia $\mathbf{x}_p^T = (x_{p1}, \dots, x_{pm})$ a indicare un **vettore** specifico per soggetto **di covariate** che si presume possa modificare la risposta. In una variante del PCM che incorpora covariate, il parametro delle persone θ_p **viene sostituito da** $\theta_p + \mathbf{x}_p^T \gamma_i$, risultando nella seguente formulazione:

$$\log \left(\frac{P(Y_{pi} = r)}{P(Y_{pi} = r - 1)} \right) = \theta_p + \mathbf{x}_p^T \gamma_i - \delta_{ir}, \quad r = 1, \dots, k$$

Aspetti Inferenziali

Le **stime di massima verosimiglianza penalizzata (PML)** modificano la tradizionale massima verosimiglianza (ML) aggiungendo un **termine di penalizzazione** alla funzione di verosimiglianza.

L'obiettivo è massimizzare il logaritmo della verosimiglianza penalizzata:

$$\ell_p(\{\gamma_i\}, \{\delta_{ir}\}) = \sum_{p=1}^P \log \left(\int \prod_{i=1}^I \prod_{r=1}^k P(Y_{pi} = r)^{y_{pir}} f(\theta_p) d\theta_p \right) - P_\lambda(\{\gamma_i\})$$

Approccio Classico

LASSO, acronimo di **Least Absolute Shrinkage and Selection Operator**, è una tecnica di regolarizzazione.
Il termine di penalità LASSO:

$$P_{\lambda}(\{\gamma_i\}) = \lambda \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l |\gamma_{ij}|$$

La regressione **Ridge** è un metodo di regolarizzazione utilizzato per affrontare problemi di multicollinearità nei modelli statistici.

Il termine di penalità Ridge:

$$P_{\lambda}(\{\gamma_i\}) = \lambda \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l \gamma_{ij}^2$$

Approccio Nuovo

Un metodo alternativo (**Fusion with Zero: Grouped LASSO on Differences and Selection**) è ottenuto incorporando il seguente **termine di penalità**:

$$P_{\lambda}(\{\gamma_i\}) = \lambda_f \sum_{j=1}^m \left(\sum_{r < s} |\gamma_{rj} - \gamma_{sj}| + \sum_r |\gamma_{rj}| \right)$$

Approcci alternativi posso essere ottenuti considerando **due parametri di tuning** uno per Selection e uno per Fusion:
Selection Only:

$$P_{\lambda}(\{\gamma_i\}) = \lambda_s \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^I \gamma_{ij}^2}$$

Fusion Only:

$$P_{\lambda}(\{\gamma_i\}) = \lambda_f \sum_{j=1}^m \sum_{r < s} |\gamma_{rj} - \gamma_{sj}|$$

Combined:

$$P_{\lambda}(\{\gamma_i\}) = \lambda_s \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^I \gamma_{ij}^2} + \lambda_f \sum_{j=1}^m \sum_{r < s} |\gamma_{rj} - \gamma_{sj}|$$

1 Modelli Item Response Theory per Dati Ordinali

2 Partial Credit Model

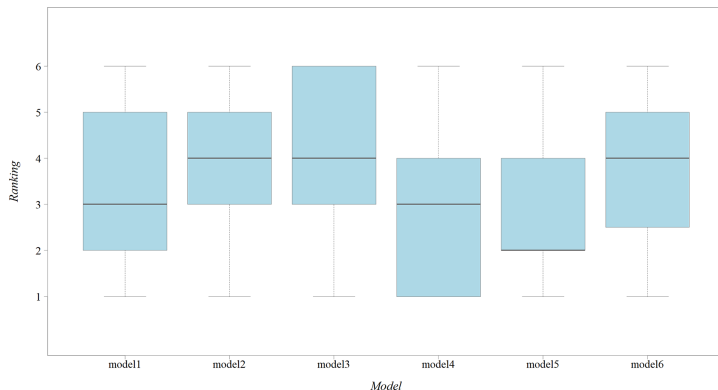
3 Simulazione

4 Applicazione

5 Conclusioni

Risultati della Simulazione

Per la simulazione, sono stati generati **1000 dataset** e stimati **6000 modelli**.



① Modelli Item Response Theory per Dati Ordinali

② Partial Credit Model

③ Simulazione

④ Applicazione

⑤ Conclusioni

Sismologia Emotiva - Un'Analisi della Percezione dei Terremoti

L'indagine condotta, presso **LAS²**, mira a comprendere la **percezione** individuale in relazione agli **eventi sismici**. Il dataset, disponibile tramite **QR-Code**, è il risultato di un sondaggio condotto dal 31 ottobre al 16 novembre 2023. Il campione raccolto con schema **snowball sampling** copre tutto il territorio italiano.

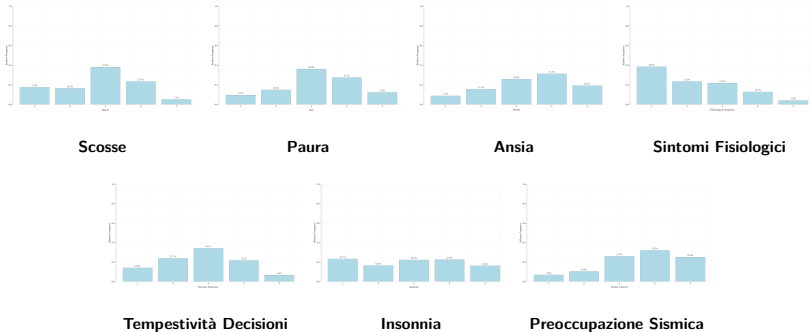
Osservazioni	226
Variabili	44



²Laboratory for Statistical Data Analysis (LAS²) –University of Naples Federico II
Scientific Director: Maria Iannario –Domenico Vistocco

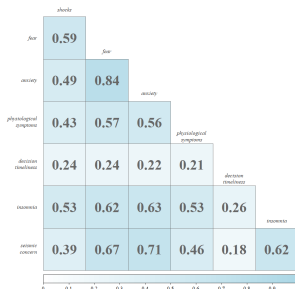
Distribuzione degli Item

L'analisi delle distribuzioni dei **7 item** rivela una **tendenza generale di variabilità** nelle risposte degli individui riguardo alla loro percezione degli eventi sismici.



Correlazione e Alpha di Cronbach

I valori della **correlazione** degli item sono tutti positivi, variando **da un minimo di 0.18 a un massimo di 0.84**. Si può affermare che vi è una dipendenza lineare positiva tra tutte le coppie di item. Successivamente, è stato calcolato l'**alpha di Cronbach**.



$$\alpha = \frac{I}{I-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^I \sigma_{y_i}^2}{\sigma_y^2} \right) = 0.86$$

Selezione degli item

Nel processo di selezione degli item sono stati utilizzati due approcci: "**bruteforce**" e "**backward**". Entrambi hanno identificato la stessa combinazione di **4 item migliori** per misurare lo "**Stress da Terremoto**": **paura, ansia, insonnia e preoccupazione sismica**.

Dopo la selezione ottimizzata degli item, **l'alpha di Cronbach è aumentato da 0.86 a 0.89**, indicando una maggiore coerenza interna nelle risposte degli individui. **L'InfoRatio è pari a 1**, confermando la massima informatività della combinazione selezionata.

$$InfoRatio = \frac{I_{InfoMean > 1}}{I}$$

Dove $I_{InfoMean > 1}$ è il numero di item con un'informazione media maggiore di uno e I è il numero di item considerati nel modello.

Partial Credit Model con Covariate e Stime Penalizzate

L'analisi della tabella, che mostra i **coefficienti stimati** per vari PCM con diverse penalizzazioni, rivela come diverse variabili influenzano il costrutto latente dello "**Stress da Terremoto**".

Variable	model1	model2	model3	model4	model5	model6
age	-0,0242	-0,0298	-0,0296	-0,033	-0,0269	-0,0283
sexMale	-0,6222	-0,8111	-0,8766	-0,8785	-0,8624	-0,8123
family_disabilitiesYes	-0,6429	-0,6937	-0,7764	-0,7241	-0,7743	-0,7133
shocks	0,4195	0,6083	0,6606	0,5608	0,6819	0,6358
physiological_symptoms	0,4491	0,5432	0,5668	0,5639	0,603	0,5756
decision_timeliness	0,3235	0,2259	0,2471	0,2177	0,2553	0,2332
out_of_regionYes	-0,5298	-0,6651	-0,7157	-0,6931	-0,6996	-0,6654
change_of_residence_earthquakeYes	0,4726	0,6137	0,6741	0,6199	0,6719	0,6283
radio_info	-	-	-	0,3125	-	-
TV_info	-	-0,2535	-	-	-	-
social_media_info	0,212	0,2528	0,2808	-	0,2499	0,2502
app_info	-0,3065	-0,3107	-0,3174	-0,2583	-0,3197	-0,3127
vehicle_typeNone	-0,585	-0,6923	-0,7671	-0,7162	-0,7629	-0,7063

Confronto Modelli

La tabella presentata fornisce un confronto basato su: logaritmo della verosimiglianza (ℓ_m) e Bayesian Information Criterion (**BIC**), per sei diversi PCM. Questi criteri sono comunemente utilizzati per valutare la bontà di adattamento dei modelli statistici.

Model	ℓ_m	BIC
model1	-1044,59	2504,39
model2	-1038,94	2493,09
model3	-1035,71	2486,64
model4	-1045,16	2505,53
model5	-1035,58	2486,38
model6	-1036,33	2487,89

1 Modelli Item Response Theory per Dati Ordinali

2 Partial Credit Model

3 Simulazione

4 Applicazione

5 Conclusioni

Conclusioni

Questo studio può essere esteso al caso dello "**Stile di Risposta**" tramite il pacchetto **MultOrdRS**.

References

[1]

A. Agresti.

Analysis of Ordinal Categorical Data.

Wiley, 2 edition, 2010.

[2]

A. Agresti.

Categorical Data Analysis.

Wiley, 3 edition, 2013.

[3]

D. Andrich.

A probabilistic irt model for unfolding preference data.

Applied Psychological Measurement, 13(2):193–216, 1989.

[4]

D. Andrich.

A rating formulation for ordered response categories.

Psychometrika, 75:292–308, 2010.

[5]

D. Andrich.

Sufficiency and conditional estimation of person parameters in the polytomous rasch model.

Psychometrika, 75:292–308, 2010.

[6]

F. B. Baker, S. Kim, and Others.

The Basics of Item Response Theory Using R.

Springer, 2017.

[7]

R. P. Chalmers.

mirt: A multidimensional item response theory package for the r environment.

Journal of statistical Software, 48, 2012.

[8]

A. Cola, M. Iannario, and G. Tutz.

Item selection method in irt models.

Technical article, 2024.

[9]

I. J. Cronbach.

Coefficient alpha and the internal structure of tests.

Psychometrika, 16(3):297–334, 1951.

[10]

A. Dobson.

[11]

A. E. Hoel and R.W. Kennard.

Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems.

Technometrics, 12:55–67, 1970.

[12]

M. Iannario, A. C. Monti, D. Piccolo, and E. Ronchetti.

Robust inference for ordinal response models.

Electronic Journal of Statistics, 2017.

[13]

T. R. Johnson.

On the use of heterogeneous thresholds ordinal regression models to account for individual differences in response style.

Psychometrika, 68:563–583, 2003.

[14]

C. Li and M. Hansen.

Limited information goodness of fit testing of hierarchical item factor models.

British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 66(2), 2013.

[15]

G. N. Masters.

A rasch model for partial credit scoring.

Psychometrika, 47(2):149–174, 1982.

[16]

G. N. Masters and B. D. Wright.

The essential process in a family of measurement models.

Psychometrika, 49:529–544, 1984.

[17]

E. Muraki.

A generalized partial credit model: Application of an em algorithm.

Applied Psychological Measurement, 16(2):159–176, 1992.

[18]

E. Muraki and M. Muraki.

Generalized partial credit model.

[19]

K. P. Murphy.

Machine Learning: A Probabilistic Perspective.

MIT press, 1 edition, 2012.

[20]

L. Palazzo, M. Iannario, and F. Palumbo.

Integrated assessment of financial knowledge through a latent profile analysis.

Behaviormetrika, 51:319–339, 2024.

[21]

D. Piccolo.

Statistica.

Il Mulino, 3 edition, 2010.

[22]

General Data Protection Regulation.

Regolamento (UE) 2016/679 del Parlamento europeo e del Consiglio sulla Protezione dei Dati.

European Union Publications Office, 2016.

[23]

G. Schauberger.

MultOrdRS: Model Multivariate Ordinal Responses Including Response Styles, 2024.

R package version 1.1-3.

[24]

G. Schwarz.

Estimating the dimension of a model.

The Annals of Statistics, 6(2):461–464, 1978.

[25]

W. G. Smith.

Does gender influence online survey participation? a record-linkage analysis of university faculty online survey response behavior.

Online submission, 2008.

[26]

D. Thissen and L. Steinberg.

[27]

R. Tibshirani.

Regression shrinkage and selection via the lasso.

Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 58:267–88, 2010.

[28]

G. Tutz.

Regression for Categorical Data.

Cambridge University Press, 2012.

[29]

G. Tutz.

On the structure of ordered latent trait models.

Journal of Mathematical Psychology, 96, 2020.

[30]

G. Tutz.

Ordinal regression: a review and a taxonomy of models.

WIREs Computational Statistics, to appear, 2021.

[31]

G. Tutz.

Ordinal regression: A review and a taxonomy of models.

Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 14(2):e1545, 2022.

[32]

G. Tutz.

Penalties.

Technical article, 2024.

[33]

G. Tutz and G. Schauberger.

Uncertainty in latent trait models.

Applied Psychological Measurement, 44:447–464, 2020.

[34]

G. Tutz, G. Schauberger, and M. Berger.

Response styles in the partial credit model.

Applied Psychological Measurement, 42:407–427, 2018.

[35]

A taxonomy of item response models.

Psychometrika, 51(4):567–577, 1986.

Antonio Cola
Tesi di Laurea in Modelli Lineari Generalizzati

Università degli Studi di Napoli Federico II
91 / 22

Graxie!