

Controllo del posizionamento di un drone planare

Progetto Controlli Automatici – T

Anno 2020/2021

Tipologia 1c

Gruppo U

Indice

Introduzione	3
Definizione delle specifiche	3
Modellazione del sistema	3
Calcolo del punto di equilibrio	4
Linearizzazione	4
Funzione di trasferimento	6
Progetto del regolatore	7
Specifiche statiche	
Specifiche dinamiche	
Calcolo della funzione di trasferimento estesa	8
Progettazione regolatore dinamico	9
Sistema ad anello	10
Risposta del sistema nell'intorno del punto di equilibrio	12
Risposta del sistema a variazioni di W	13

Introduzione

Lo scopo del progetto è regolare il posizionamento di un drone planare soggetto ad un vento laterale e alla forza di gravità. In questo progetto ci occuperemo di studiare l'assetto del drone costruendo un singolo controllore per l'angolo. Attraverso l'analisi dei diagrammi di Bode della risposta in frequenza del sistema, progetteremo un regolatore per il sistema di controllo. Una volta completata la sintesi del sistema di controllo questo dovrà essere provato sul modello non lineare per valutarne l'efficienza nell'intorno del punto di equilibrio.

Definizione delle specifiche

È richiesto il rispetto delle seguenti specifiche:

1. Errore a regime nullo con riferimento a gradino con ampiezza $w(t) = \frac{\pi}{6} * 1(t)$
2. Un margine di fase $M_f \geq 45^\circ$
3. Una sovraelongazione percentuale $S\% \leq 1\%$
4. Un tempo di assestamento $T_{a1\%} \leq 0.4$
5. Garantire un margine di fase adeguato per rispettare le specifiche sopra elencate a variazioni di F_v di ± 1

Occorre garantire inoltre un abbattimento, di almeno 30 volte, del disturbo prodotto dal sensore, che agisce a partire da una frequenza $\omega_n = 2 * 10^4 \left[\frac{rad}{s} \right]$, con una ampiezza $M_n = 0.03$.

Modellazione del sistema

Scegliamo come stati interni:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \omega = \dot{\theta}$$

La struttura è modellizzata dalle equazioni non lineari:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = \omega = x_2$$

$$I_d \dot{x}_2 = I_d \dot{\omega} = -\beta x_2 + \frac{a}{2} \sin(x_1) F_v + au$$

$$y = \theta$$

dove:

- x_1 descrive l'angolo che il drone forma rispetto ad un punto di riferimento arbitrario
- x_2 rappresenta la velocità angolare del drone rispetto al punto di riferimento precedentemente citato
- L'ingresso del sistema $u_1 = F_2 - F_1$ è la differenza tra le forze di propulsione.

Le caratteristiche dell'impianto sono riportate in tabella:

β	0.3	Coefficiente di attrito dovuto all'aria
I_d	0.3	Momento d'inerzia del drone rispetto all'asse di rotazione
F_v	-12	Forza del vento

Calcolo del punto di equilibrio

Dalle specifiche date

$$x_{1e} = -\frac{\pi}{6}$$

$$x_{2e} = 0$$

per ottenere la coppia d'equilibrio imponiamo $f(x, u) = 0$.

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-\beta x_2 + \frac{a}{2} \sin(x_1) F_v + au}{I_d} = 0 \longrightarrow u = -\frac{1}{2} \sin(x_1) F_v$$

Linearizzazione

Per descrivere il comportamento del sistema non lineare attorno all'equilibrio nominale, linearizziamo il sistema in (x_e, u_e) . Otteniamo le matrici:

$$A_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{x=x_e, u=u_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a(\cos x_1) F_v}{2I_d} & \frac{-\beta}{I_d} \end{bmatrix} \Big|_{x=x_e, u=u_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-5\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \end{bmatrix} \Big|_{x=x_e, u=u_e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{x=x_e, u=u_e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_e = 0$$

Il punto di equilibrio è (x_e, u_e) definito dai valori:

x_{1e}	$-\frac{\pi}{6}$
x_{2e}	0
u_e	-3

Il sistema linearizzato risulta:

$$\partial \dot{x} = A\partial x + B\partial u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-5\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \partial x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \partial u$$

$$\partial y = C\partial x + D\partial u = [1 \quad 0] \partial x + 0 \partial u$$

dove $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$.

Si tratta di un sistema:

SISO: $\partial u \in \mathbb{R}^1$, $\partial y \in \mathbb{R}^1$

Strettamente proprio: $\partial y(t) = h(\partial x(t))$

Forzato: $\partial \dot{x}(t) = f(x(t), \partial u(t))$, $\partial y = h(\partial x(t))$

Tempo invariante: $\partial \dot{x}(t) = f(\partial x(t), \partial u(t))$, $\partial y = h(\partial x(t))$

Lineare: $\partial \dot{x} = A\partial x + B\partial u$, $\partial y = C\partial x + D\partial u$

La matrice di stato A_e ha autovalori:

$$\lambda_1 = -0.5 + 2.0199i \quad m_a = 1, \quad m_g = 1$$

$$\lambda_2 = -0.5 - 2.0199i \quad m_a = 1, \quad m_g = 1$$

Per il teorema di asintotica stabilità, il sistema è asintoticamente stabile, perché la parte reale di ogni autovalore è negativo.

I modi naturali associati agli autovalori sono:

$$\lambda_1 = -0.5 + 2.0199i$$

$$\lambda_2 = -0.5 - 2.0199i$$

autovalori complessi coniugati:

$$e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \phi_1) = e^{-0.5t} \cos(2.0199t + \phi_1)$$

Funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento $G = C * (sI - A)^{-1} * B + D$ risulta:

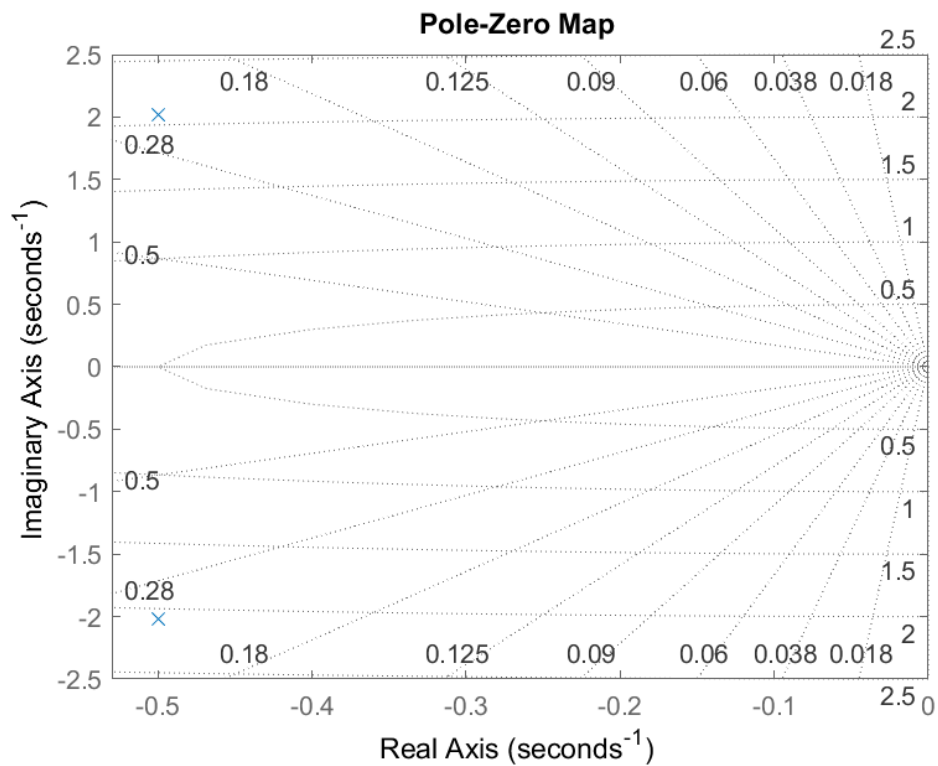
$$G(s) = \frac{0.83333}{s^2 + s + 4.33}$$

I poli di $G(s)$, coincidenti con gli autovalori di A_e , sono:

$$p_1 = -0.5 + 2.0199i, \quad p_2 = -0.5 - 2.0199i$$

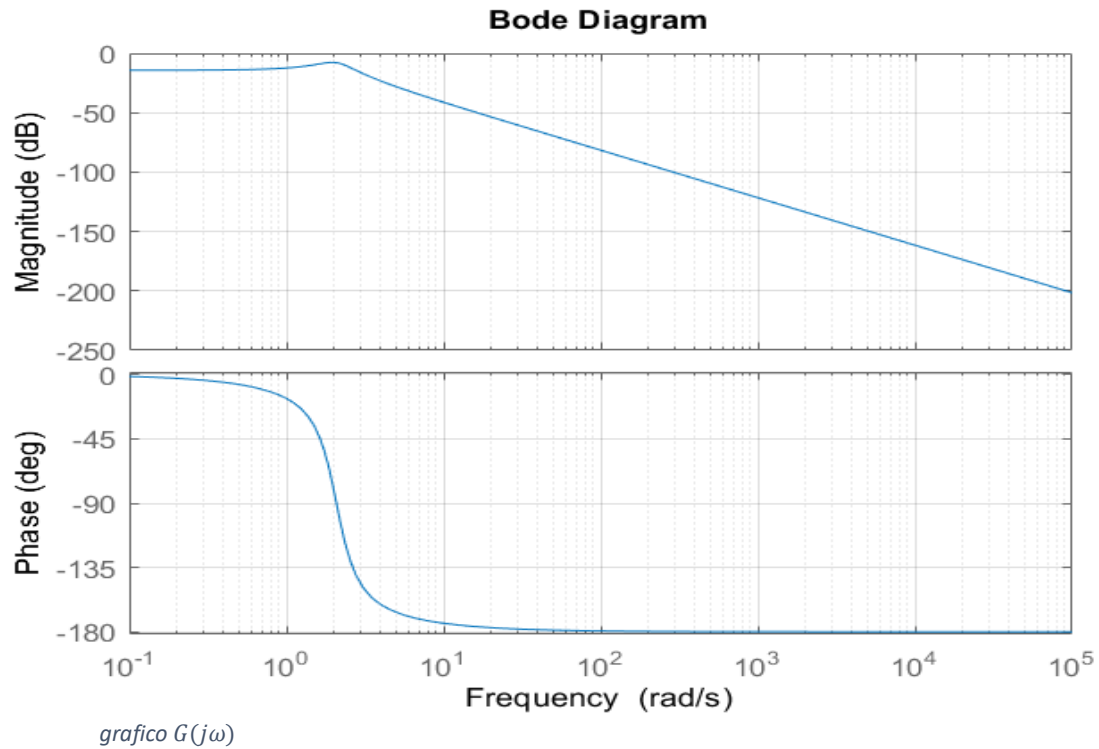
Possiamo osservare che il sistema è BIBO stabile perché la parte reale dei poli è strettamente minore di 0.

I poli sono collocati nel piano come segue:



Per verificare se il sistema rispetta le specifiche, analizziamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento:

$$G(j\omega) = \frac{0.83333}{j\omega^2 + j\omega + 4.33}$$



Progetto del regolatore

Specifiche statiche

Nel regolatore statico abbiamo inserito un polo nell'origine per rispettare il vincolo di errore a regime nullo. Non essendoci altri vincoli, abbiamo un guadagno statico libero $\mu_s = 1$:

$$R_s = \frac{1}{s}$$

Specifiche dinamiche

La sovraelongazione è:

$$S\% = e^{\left(\frac{-\pi \cdot \xi^*}{\sqrt{1-(\xi^*)^2}}\right)}$$

Dovendo imporre $S\% < 0.01$, ricaviamo che $\xi = 0.8261$

Dato che $F(s)$ ha una coppia di poli dominanti in prossimità di ω_c , vale la seguente:

$$\xi = \frac{M_f}{100}$$

Ciò impone un vincolo più stringente del primo su M_f : si dovrà avere $M_f > \xi^* * 100 = 82.61 \approx 83$

Per rispettare questa relazione, dobbiamo aggiungere dei poli in modo tale da alzare la fase.

Il tempo di assestamento è:

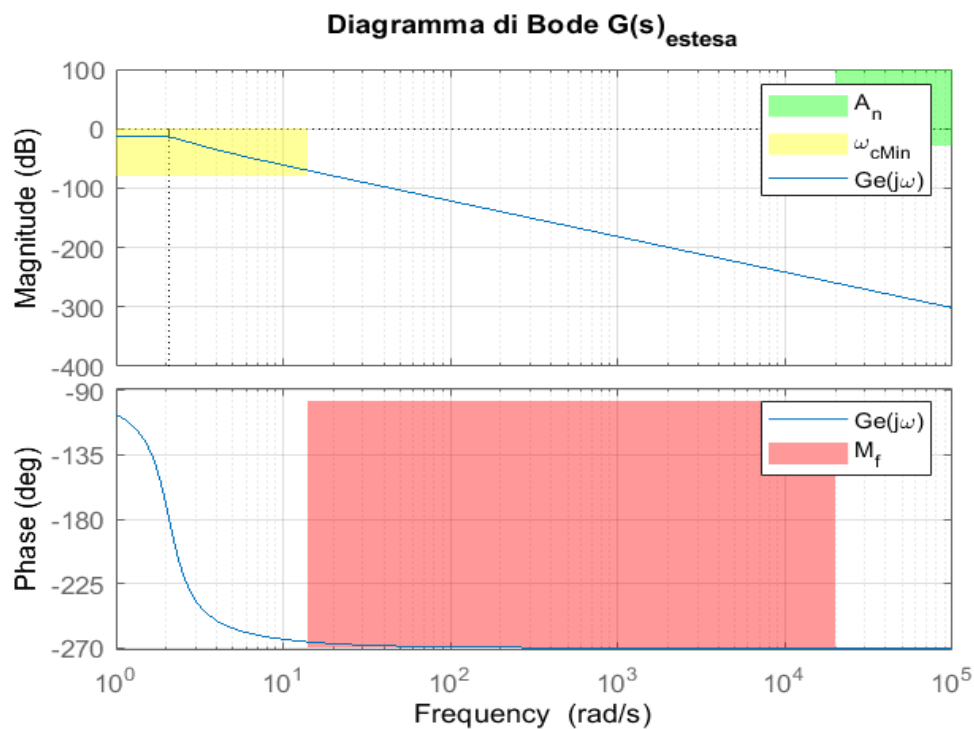
$$T_{a1\%} > \frac{4.6}{\xi^* * \omega_c^*}$$

quindi dovremo avere $\omega_c > 13.8554 \left[\text{rad/s} \right]$, oltre che $\omega_c < 2 * 10^4 \left[\text{rad/s} \right]$.

Calcolo della funzione di trasferimento estesa

Prima di progettare il regolatore dinamico, calcoliamo la $G(s)$ estesa e aggiungiamo i vincoli sulla pulsazione di attraversamento, di margine di fase e sull'abbattimento del disturbo di misura:

$$G_e(s) = R_s(s) * G(s)$$

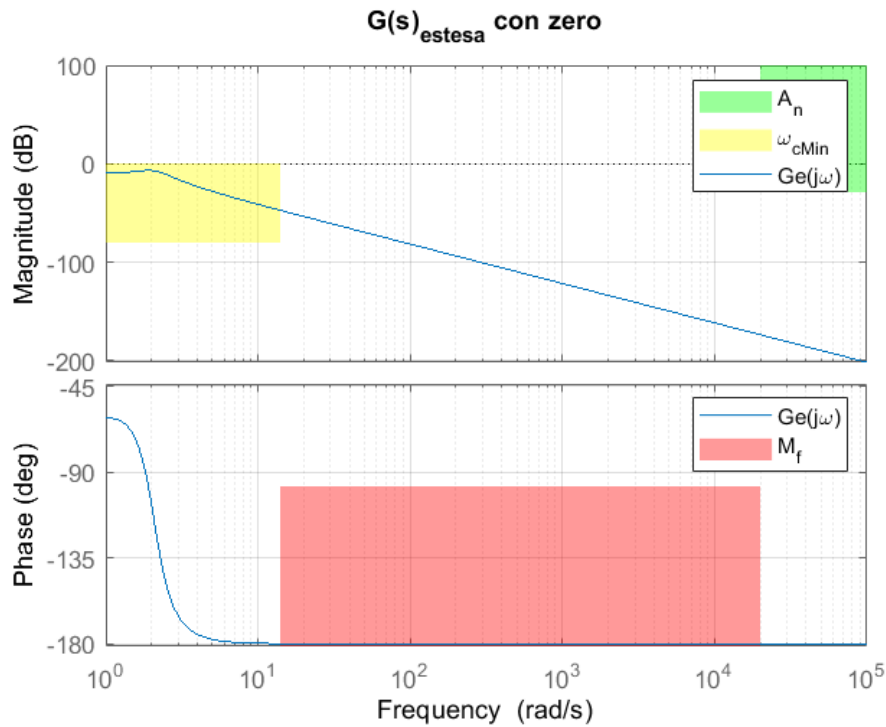


mappatura vincoli specifiche

Progettazione regolatore dinamico

Nel regolatore dinamico abbiamo aggiunto uno zero vicino l'origine per recuperare 90° di fase; il principio di casualità è rispettato grazie al polo presente nel regolatore statico:

$$R_d = 1 + s$$



Inizialmente abbiamo tentato di utilizzare due reti anticipatrici per recuperare più fase possibile, tuttavia scegliendo un a molto piccolo siamo riusciti ad ottenere un margine di fase pari a 88.9°.

$$R_{ant} = \frac{1+\tau*s}{1+a*\tau*s}$$

con:

$$\tau = 0.2$$

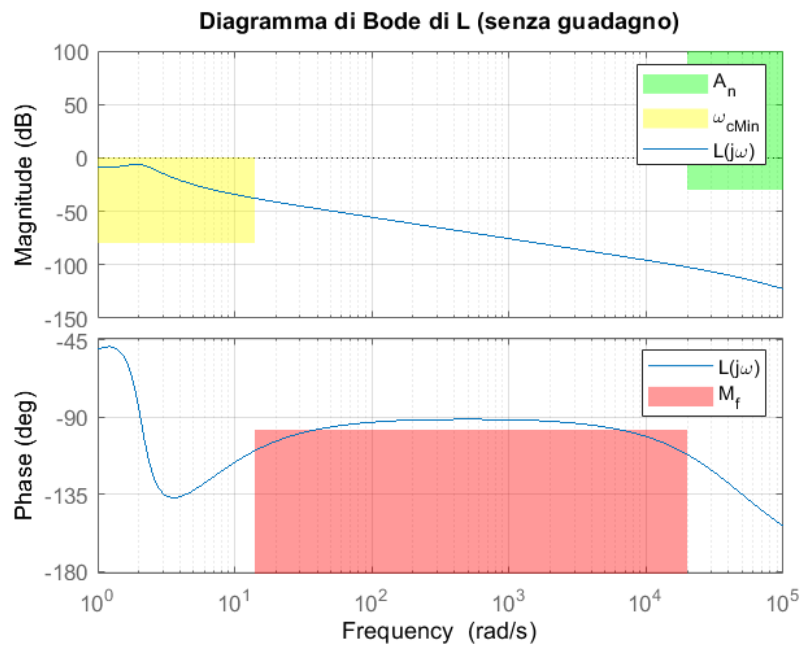
$$a = 0.0001$$

τ e a sono stati scelti per ricavare un aumento di fase massimo, rispettando le specifiche.

Sistema ad anello

Ora ricaviamo la funzione ad anello aperto senza guadagno:

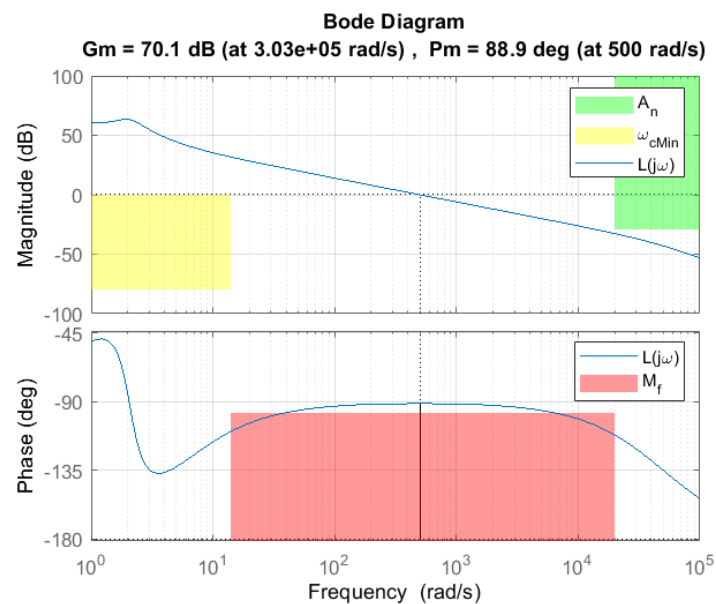
$$\bar{L}(s) = G_e * R_d * R_{ant}$$



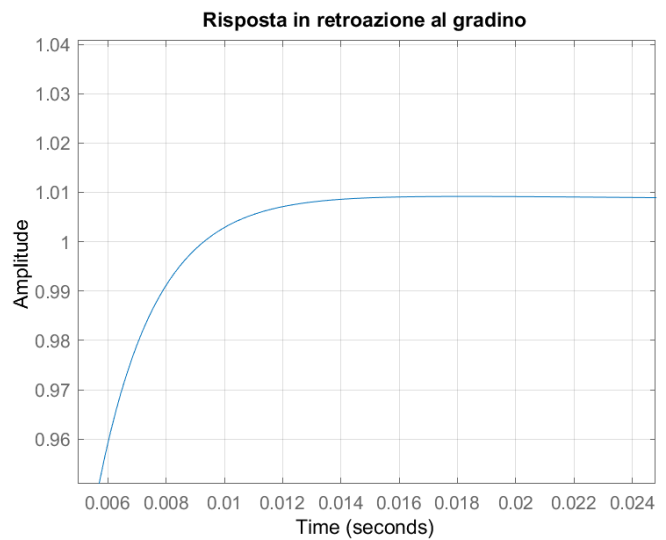
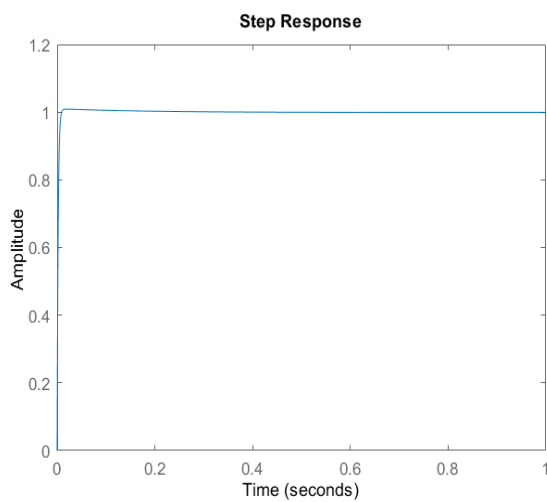
Avendo la possibilità di modificare il guadagno del regolatore e dunque la pulsazione di taglio, prendiamo essa al picco più alto di fase per avere il massimo margine di fase

$$L(s) = G_e * R_d * R_{ant} * gain = \frac{2.5e07(s+1)(s+5)}{s(s+5e04)(s^2+s+4.33)}$$

con $gain = 2.999e03$



$L(s)$ non ha poli a parte reale positiva e il diagramma di bode $L(j\omega)$ attraversa una sola volta l'asse a 0 dB , quindi possiamo applicare il criterio di Bode ed affermare che il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile, dato che $\mu > 0$ e $M_f > 0$.



I parametri della risposta sono:

RiseTime: 0.0043

SettlingTime: 0.0076

SettlingMin: 0.9080

SettlingMax: 1.0092

Overshoot: 0.1742

Undershoot: 0

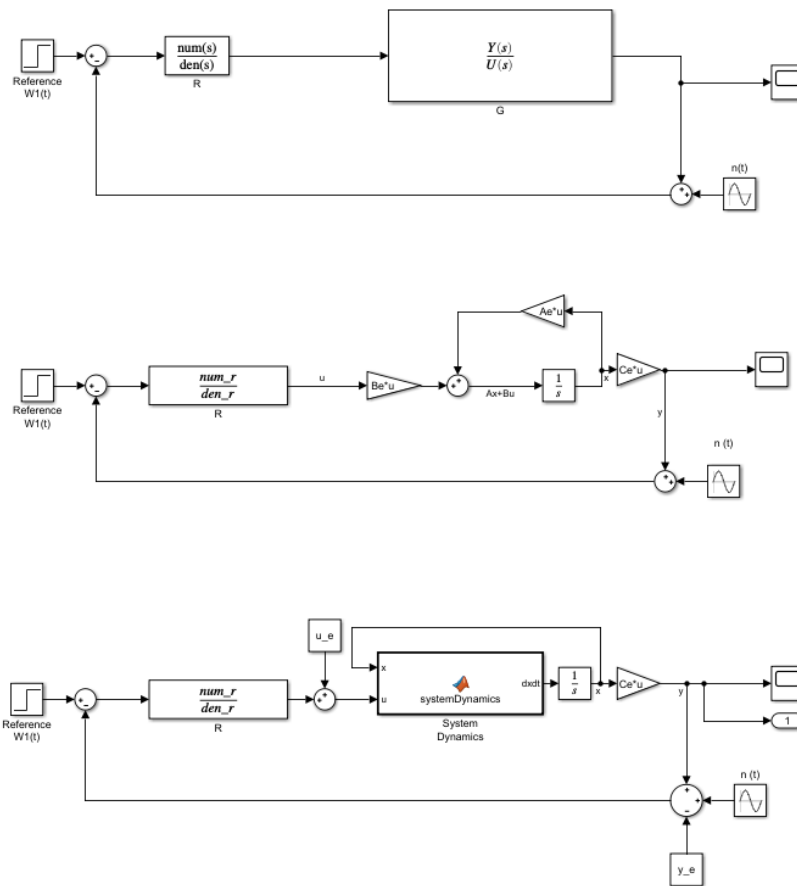
Peak: 1.0092

PeakTime:0.0182

Il sistema rispetta le specifiche.

Risposta del sistema nell'intorno del punto di equilibrio

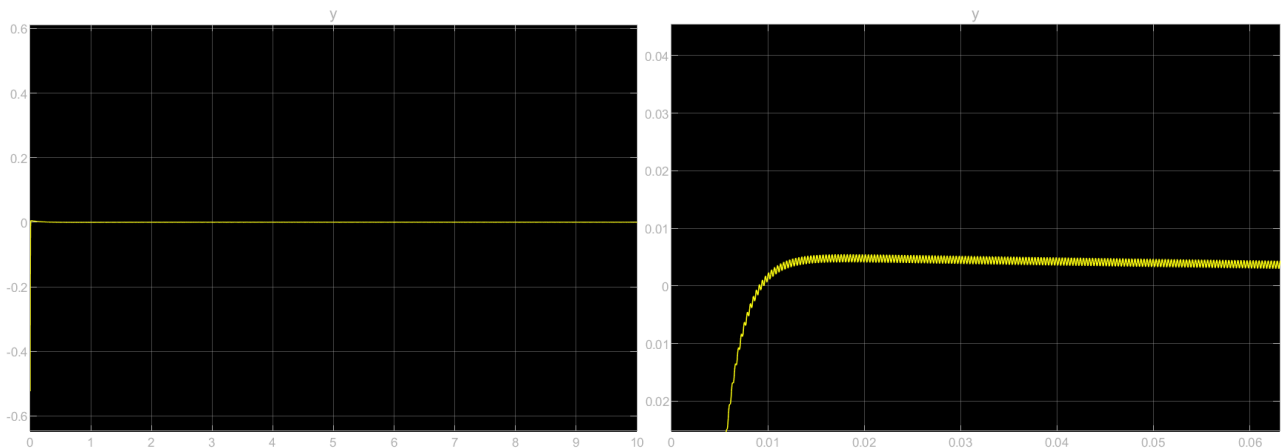
In figura sono rappresentati i sistemi realizzati in Simulink:



- 1) forma di Laplace
- 2) forma di stato linearizzata
- 3) forma non lineare

Simulando il sistema non lineare con il disturbo di misura e con le seguenti condizioni otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \theta_e \\ x_2(0) &= 0 \\ W &= -\theta_e \end{aligned}$$



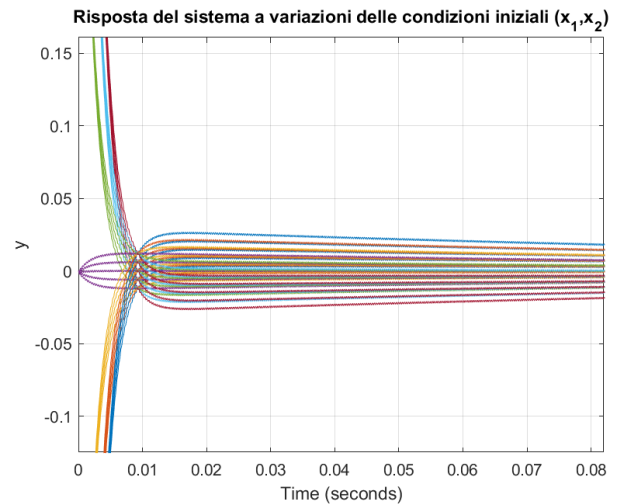
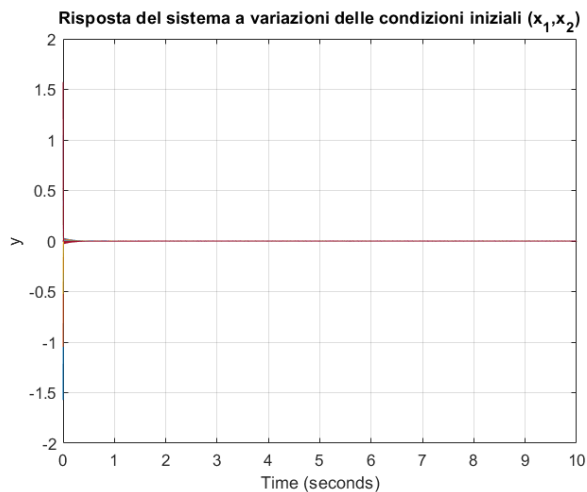
Di seguito è rappresentato il grafico dell'andamento del sistema non lineare controllato per variazioni delle condizioni iniziali di x_1 e x_2 nell'intorno del punto di equilibrio

con:

$$W = -\theta_e \text{ costante}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2} \text{ (con distanziamenti di } \frac{\pi}{6} \text{)}$$

$$-2\pi < x_2 < -2\pi \text{ (con distanziamenti di } \pi \text{)}$$



Possiamo notare che in tutte queste combinazioni di condizioni iniziali il sistema converge sempre a 0.

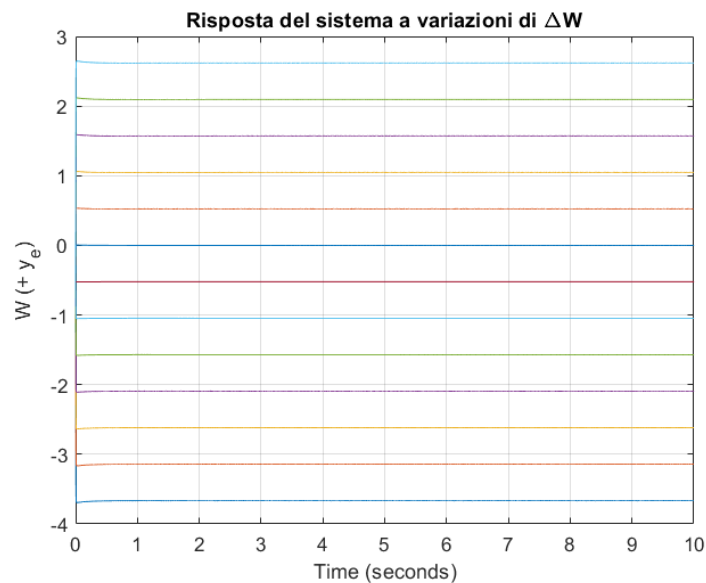
Risposta del sistema a variazioni di W

Il grafico seguente mostra invece la risposta del sistema al variare del riferimento W con:

$$x_1(0) = -\theta_e$$

$$x_2(0) = 0$$

$$-\pi < W < \pi \text{ (con distanziamenti di } \frac{\pi}{6} \text{)}$$



Si noti come il sistema non lineare in uscita segua sempre $W + y_e$.