DIFFERIENZAZIONE NUMERICA

La derivata di f in x_0 è:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Quindi per calcolare $f'(x_0)$ potremmo usare semplicemente la formula di sopra, purtroppo i calcolatori non possono effettuare dei passaggi al limite, quindi se pur è presente un ~~[illegible]~~ errore di approssimazione è un buon inizio per approcciarsi al problema.

Per approssimare $f'(x_0)$, supponiamo per primo che $x_0 \in (a,b)$, dove $f \in C^2[a,b]$ e che per $h \neq 0$ $x_1 = x_0 + h$, con h abbastanza piccolo t.c. $x_1 \in [a,b]$.
Costruiamo il polinomio di Lagrange determinato da x_0 e x_1 più il suo termine di errore:

$$f(x) = P_{0,1}(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\xi(x))$$

$$= \frac{f(x_0)(x-x_0-h)}{-h} + \frac{f(x_0+h)(x-x_0)}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} f''(\xi(x))$$

con $\xi(x) \in$ ~~[illegible]~~ $[x_0, x_1]$, differenziando otteniamo:

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + D_x\left[\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} f''(\xi(x))\right]$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{2(x-x_0)-h}{2} f''(\xi(x)) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} D_x(f''(\xi(x)))$$

Eliminando i termini che involgono $\xi(x)$ otteniamo:

$$f'(x) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

L'unica difficoltà con questa formula è che non abbiamo nessuna informazione su $D_x(f''(\xi(x)))$, quindi non possiamo stimare l'errore in alcun modo.

Quando x assume il valore di x_0 il coefficiente $D_x(f''(\xi(x)))$ è 0 e la formula si semplifica in:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

Per piccoli valori di h, la differenza:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

può essere usata per approssimare $f'(x_0)$ con un errore limitato con $M|h|/2$, dove M è un limite su $|f''(x)|$ per x compreso tra x_0 e x_0+h.

Questa formula è detta delle DIFFERENZE IN AVANTI se $h>0$, oppure DIFFERENZA ALL'INDIETRO se $h<0$.

Per ottenere la derivata "generale", o meglio l'approssimazione generale, supponiamo che $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sono n+1 punti distinti in un intervallo I e che $f \in C^{n+1}(I)$.

Per il polinomio di Lagrange possiamo dire che:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) + \frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

con $\xi(x) \in I$, dove $L_k(x)$ rappresenta il k-esimo polinomio fondamentale di Lagrange.

Proviamo ora a derivare il polinomio di Lagrange

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L'_k(x) + D_x\left[\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}\right] f^{(n+1)}(\xi(x)) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} D_x\left[f^{(n+1)}(\xi(x))\right]$$

Abbiamo ancora un problema su stimare l'errore di troncamento a meno che x non sia uno dei valori $\{x_0, \ldots, x_n\}$. In questo caso il termine $D_x[f^{(n+1)}(\xi(x))]$ diviene 0 e la formula diviene

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L'_k(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (x_j - x_k)$$

$j \in \{1, \ldots, n\}$

questa ~~formula~~ è detta "formula degli $(n+1)$-punti" per approssimare $f'(x_j)$.

In genere più punti si utilizzano e maggiore è l'approssimazione, ma ciò è da sconsigliare dato che il grande accumularsi degli errori di approssimazione porta, appunto, a un errore troppo grande.

Le formule più comuni involgono l'evaluazione della funzione in $\boxed{3}$ o $\boxed{5}$ punti.

Per prima cosa deriviamo alcune formule sui 3-punti utili e alcune considerazioni sugli errori.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \rightarrow L_0'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

Allo stesso modo:

$$L_1'(x) = \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad e \quad L_2'(x) = \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Quindi inserendo questi valori nella formula

$L_0'(x)$, $L_1'(x)$, $L_2'(x)$

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k'(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (x_j - x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x_j) = f(x_0)\left[\frac{2x_j - x_1 - x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right] + f(x_1)\left[\frac{2x_j - x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right] + \ldots$$

$$\ldots + f(x_2)\left[\frac{2x_j - x_0 - x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right] + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{2} (x_j - x_k)$$

per $j = 0, 1, 2$ dove ξ_j indica che ξ dipende da x_j.

FORMULA DEI 3 PUNTI

La formula precedente diviene utile specialmente quando si tratta / si usano nodi equidistanti, ovvero quando:

$$x_1 = x_0 + h \quad e \quad x_2 = x_0 + 2h \qquad per\ h \neq 0$$

Da ora in poi assumeremo che i punti che analizzeremo sono equidistanti.

Ora la precedente formula con $x_J = x_0$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ otteniamo:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2} f(x_0) + 2 f(x_1) - \frac{1}{2} f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_2)\right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2} f(x_0) - 2 f(x_1) + \frac{3}{2} f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_2)$$

Dato che $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h$, possiamo esprimere queste formule come:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2} f(x_0) + 2 f(x_0 + h) - \frac{1}{2} f(x_0 + 2h)\right] + \frac{h^2}{3} f^{3}(\xi_0)$$

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_0 + 2h)\right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

e

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2} f(x_0) - 2 f(x_0 + h) + \frac{3}{2} f(x_0 + 2h)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_2)$$

Ora effettuiamo una sostituzione, per merito di scrittura, su x_1 e x_2 con x_0

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3 f(x_0) + 4 f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[- f(x_0 - h) + f(x_0 + h)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_1)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0 - 2h) - 4 f(x_0 - h) + 3 f(x_0)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_2)$$

Infine osserviamo che 2 di queste formule sono praticamente identiche a meno di un fattore $-h$ o $+h$. Quindi ci occorrono solamente 2 equazioni.

THREE-POINT ENDPOINT FORMULA

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0-2h)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0)$$

dove ξ_0 appartiene all'intervallo (x_0, x_0+2h)

THREE-POINT MIDPOINT FORMULA

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

dove $\xi_1 \in [x_0-h, x_0+h]$

NB: l'errore è sempre "quadratico", $O(h^2)$

Formule a 5 punti:

Come dice il nome di queste formule, occorre valutare la funzione in 2 punti aggiuntivi, il termine di errore ha però una precisione maggiore, ovvero $O(h^4)$.

FIVE-POINT MIDPOINT FORMULA

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi_0)$$

dove $\xi \in (x_0-2h, x_0+2h)$.

FIVE POINT ENPOINT FORMULA

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - 3f(x_0+4h)\right] + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi)$$

dove $\xi \in (x_0, x_0+4h)$

five_point_endpoint.m five_point_midpoint.m three_point_endpoint.m three_point_midpoint.m

home > antonio > elaborati_matlab > differienziazione numerica > three_point_endpoint.m > function [f_prime_in_x0] = three_point_endpoint(f, x0, h)

```
function [f_prime_in_x0] = three_point_endpoint(f, x0, h)
    f_prime_in_x0 = (3*f(x0)+ 4*f(x0+h) + f(x0-2*h))/2*h;
end
```

0 0 Ln 1, Col 1 Spaces: 4 UTF-8 LF MATLAB

five_point_endpoint.m | five_point_midpoint.m | three_point_endpoint.m | three_point_midpoint.m

home > antonio > elaborati_matlab > differienziazione numerica > three_point_midpoint.m > function [f_prime_in_x0] = three_point_midpoint(f, x0, h)

```matlab
function [f_prime_in_x0] = three_point_midpoint(f, x0, h)
    f_prime_in_x0 = (f(x0+h)-f(x0-h))/2*h;
end
```

0 0 Ln 1, Col 1 Spaces: 4 UTF-8 LF MATLAB

five_point_endpoint.m | five_point_midpoint.m | three_point_endpoint.m | three_point_midpoint.m

home > antonio > elaborati_matlab > differienziazione numerica > five_point_endpoint.m > function [f_prime_in_x0] = five_point_endpoint(f, x0, h)

```
function [f_prime_in_x0] = five_point_endpoint(f, x0, h)
    f_prime_in_x0 = (-25*f(x0)+48*f(x0+h)-36*f(x0+2*h)+16*f(x0+3*h)-3*f(x0+4*h`))/12*h;
end
```

0 0 Ln 1, Col 1 Spaces: 4 UTF-8 LF MATLAB

five_point_endpoint.m five_point_midpoint.m three_point_endpoint.m three_point_midpoint.m

home > antonio > elaborati_matlab > differienziazione numerica > five_point_midpoint.m > function [f_prime_in_x0] = five_point_midpoint(f, x0, h)

```
function [f_prime_in_x0] = five_point_midpoint(f, x0, h)
    f_prime_in_x0 = (f(x0-2*h)-8*f(x0-h)+8*f(x0+h)-f(x0+2*h))/12*h;
end
```

0 0 Ln 1, Col 1 Spaces: 4 UTF-8 LF MATLAB