PROBLEMI AI VALORI INIZIALI : TEORIA

Le equazioni differenziali sono usate per modellare problemi di cui si conosce la velocità di variazione di una certa variabile rispetto ad altre.
La quasi totalità necessita di una quantità iniziale (initial value), risolvere un problema ai valori iniziali corrisponde a trovare una soluzione per una equazione ~~differen~~ differenziale che soddisfa alcune condizioni iniziali.
Solitamente risolvere una eq. diff. risulta troppo complicato quindi sfrutteremo dei metodi per approssimare la soluzione.
(Un approccio più analitico consiste nel modificare leggermente la funzione data)

Definizione di Lipschitzianità:

Una funzione $f(t,y)$ soddisfa la condizione di Lipschitzianità nella variabile y su $D \subseteq R^2$ se una L, $\exists L \in \mathbb{R}$, t.c.

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

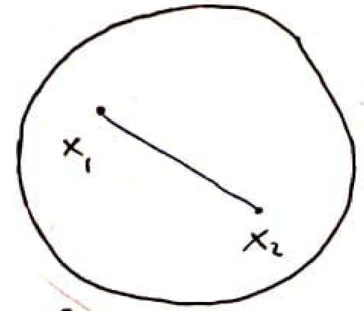
$\forall\, y_1, y_2$ t.c. $(t,y_2),(t,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

L è detta costante di Lipschitz.

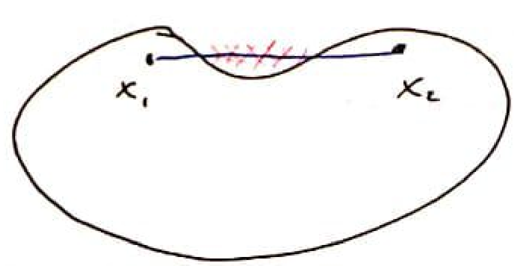
Definizione di insieme convesso:

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ è detto convesso se $\forall (t_1,y_1),(t_2,y_2) \in D$ si ha che:

$$((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2,\ (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \in D \quad \forall \lambda \in [0,1]$$



Convesso



Non convesso

Teorema

Supponiamo $f(t,y)$ sia definita su $D \subseteq \mathbb{R}^2$, con D insieme convesso.
Se esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c.:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right| \leq L \quad \forall (t,y) \in D$$

Allora f soddisfa la condizione di Lipschitz

Teorema: Esistenza ed unicità della soluzione

Supponiamo $D = \{(t,y) \mid a \leq t \leq b \text{ e } -\infty < y < \infty\}$ e che $f(t,y)$ è continua in D.
Se f soddisfa la condizione di Lipschitz su D nella variabile y allora il problema ai valori iniziali:

$$y'(t) = f(t,y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

ha una soluzione unica ~~ess~~ per $y(t)$ per $a \leq t \leq b$.

Problemi ben posti

I problemi ai valori iniziali ottenuti osservando dei fenomeni fisici, ma già questo tipo di problemi sono per loro natura ~~delle~~ delle approssimazioni, quindi è importante sapere quando ~~xxx~~ dei piccoli cambiamenti nella definizione introducono dei piccoli cambiamenti nella soluzione.
Ciò è molto utile per ottenere una funzione di errore.
Quindi la domanda importante ora è?
Come possiamo determinare quando una particolare problema ha la proprietà che piccoli cambiamenti, o perturbazioni, nella definizione corrispondono piccoli cambiamenti nella soluzione?

Definizione di problema ben posto

Il problema ai valori iniziali

$$\frac{dy}{dt} = f(t, z) + \delta(t), \quad a \leq t \leq b, \quad z(a) = \alpha + \delta_0$$

ha una soluzione unica ~~z(t)~~ che soddisfa:

$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon \quad \forall t \in [a, b]$$

Un problema del genere è detto: perturbed problem, "circa" problema disturbato, associato al problema originale.

Solitamente i metodi numerici riguardano sempre i "problemi perturbati" perché ogni operazione di arrotondamento rappresenta una perturbazione.

Teorema

Supponiamo $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b \text{ e } -\infty < y < \infty\}$.

Se f è continua su D e soddisfa la cond. di Lipschitz in y su D allora il problema ai valori iniziali

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

è ben posto.

Metodo di Eulero

E' il metodo più elementare per approssimare un problema ai valori iniziali. Nella pratica va usato con una certa cautela, ma la semplicità della sua derivazione può essere usata per illustrare la costruzione di metodi più avanzati senza dover scomodare eccessivamente l'algebra.
L'obiettivo del metodo di Eulero è ottenere l'approssimazione ad un problema ai valori iniziali ben posto del tipo.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

Non viene generata una approssimazione per valori continui, ma bensì si approssima la funzione in alcuni punti discreti, detti MESH POINT (punti di meglio / punti di rete), sull'intervallo $[a, b]$.
Una volta ottenuta la soluzione nei punti di rete possiamo interpolare la soluzione tra 2 punti interpolando la funzione in quei punti (con Lagrange, Newton o Spline).

Prima di tutto supponiamo che i punti siano equidistanti su $[a,b]$, quindi scegliamo un $N \in \mathbb{N}$ e selezioniamo, creiamo i punti di mesh:

$$t_i = a + ih \qquad \forall i = 0, \dots, N$$

$$h = \frac{b-a}{N} = t_{i+1} - t_i \quad \text{(è anche detto Step-size).}$$

Useremo il teorema di Taylor per derivare il metodo di Newton.

$\downarrow$

Supponiamo che $y(t)$ sia la soluzione unica ad un problema ai valori iniziali, ovviamente ben posto, e supponiamo che $y(t)$ ha derivata, prima e seconda, continua su $[a, b]$, quindi per $i = 0, \dots, N-1$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\, y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} y''(\xi_i)$$

con $\xi_i \in (t_{i+1}, t_i)$. Dato che $h = t_{i+1} - t_i$ abbiamo che:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

e, dato che $y(t)$ soddisfa l'eq. diff., abbiamo che:

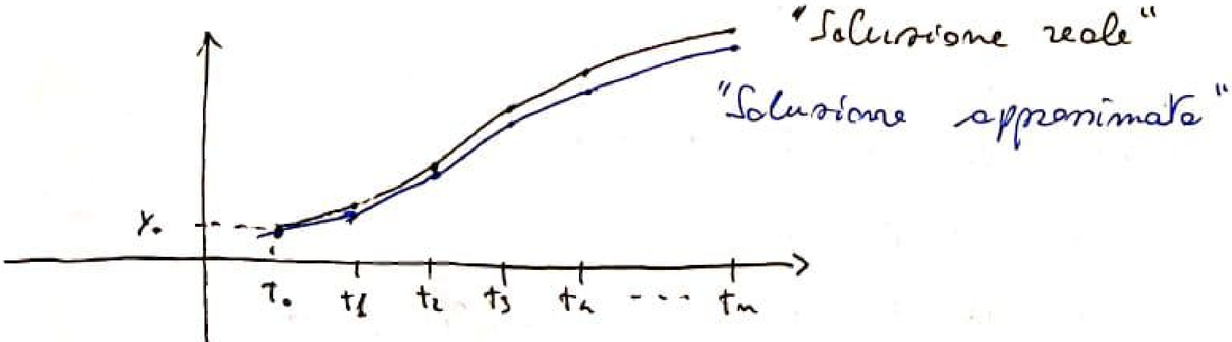
$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

Il metodo di Eulero costruisce $w_i \simeq y_i(t_i)$ $\forall i = 1, \dots, N$ eliminando il resto, quindi il metodo diviene

(Come detto è molto semplice)

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i) \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

graficamente:



Semplificando molto possiamo dire che partendo dal primo punto interpoliamo il successivo prendendo il punto sulla retta tangente alla soluzione e così via fino all'ultimo, da qui si capisce l'importanza dell'ipotesi che $f(t, y(t))$ ~~sia un problema ben posto~~

Sia un problema ben posto.
Come possiamo analizzare l'errore?

$y_n \simeq y(t_n) \quad , n = 0, ..., N$

$\downarrow$

$e_n = |y(t_n) - y_n|$

$\downarrow$

$e_n = ch^2 + e_{n-1}$

il metodo è lineare

Nell'analisi numerica se l'errore locale ha potenza $(p+1)$ allora l'errore globale ha potenza p

Un calcolo con h troppo piccolo comporta un accumulo di errori, ed anche un costo computazionale, molto elevato
Analisi di un problema test

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (\text{Sol}: y(t) = e^{t})$$

Se $\lambda < 0$, $y(t) \to 0$ per $t \to \infty$

$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$

$y_{n+1} = y_n + h y_n = (1 + h\lambda) y_n = (1 + hy)^2 \cdot y_{n-1} =$

$= ... = (1+h\lambda)^n$, vogliamo che $y_n \to 0$ per $n \to \infty$

quindi $\lim_n a_n = 0$, $\lim_n |1 + h\lambda|^n = 0$

ciò accade sse:

$$|1 + h\lambda| < 1 \iff -2 < h\lambda < 0$$

Abbiamo un'altra restrizione su h.
Se λ è grande h deve essere molto piccolo.
Ad esempio se $\lambda = -50 \to h < \frac{2}{50}$

euler_method.m

home > antonio > elaborati_matlab > equazioni_differenziali > euler_method.m > function [t, y] = euler_method(fun, y0, t0, T, N)

```matlab
function [t, y] = euler_method(fun, y0, t0, T, N)
    h = (T-t0)/N; % ampiezza degli intervalli
    t = zeros(N+1, 1);
    y = zeros(N+1, 1);
    for i=1:N+1 % preparo i punti che descrivono l'insieme di rete
        t(i) = t0 + h*i;
    end
    y(1) = y0;
    for i=2:N+1
        y(i) = y(i-1) + h*fun(t(i-1), y(i-1));
    end
end
```

Could not find path to the mlint executable in the configuration file.

0 0 Ln 1, Col 1 Spaces: 4 UTF-8 LF MATLAB 1