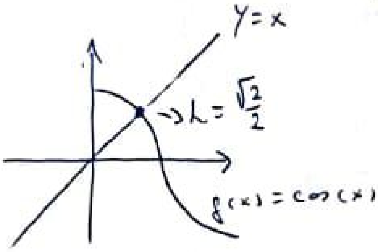
ITERAZIONI A P.TO FISSO

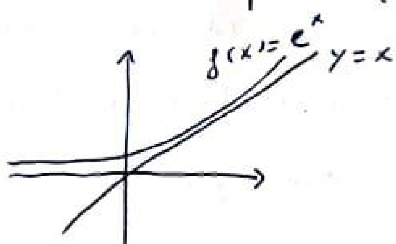
Partiamo con la definizione di p.to fisso

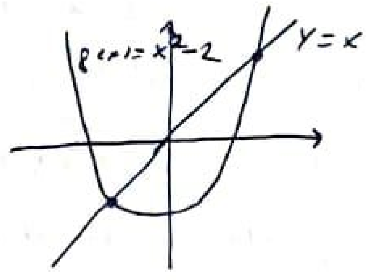
Def. $g(x) \in C[a,b]$, α p.to fisso di g sse $g(\alpha) = \alpha$.

NB: tutti i punti fissi possono essere visti come punti di intersezione tra la retta $y = x$ e la funzione analizzata.

NB: non sempre esistono dei punti fissi per una funzione







$\exists!\,\alpha$ $\qquad\qquad$ $\nexists\,\alpha$ $\qquad\qquad$ $\exists\,\alpha$

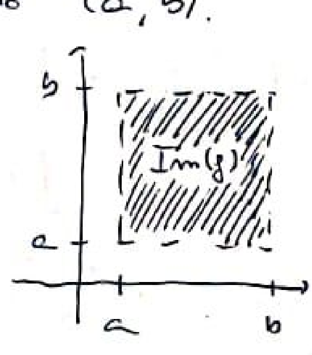
C'è un teorema molto interessante che ci garantisce l'esistenza di un p.to fisso sotto determinate Hp., ed addirittura l'unicità del p.to fisso se aggiungiamo un'ulteriore Hp.

Teorema di p.to fisso ($\exists$ p.to fisso) (vedi B.-F. pg. 57)

Ipotesi:
- $g(x) \in C[a,b]$
- $g(x) \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$

(Hp. aggiuntiva) • $g'(x)$, $\forall x \in [a,b]$, $\exists\, k$ $0<k<1$ $\quad |g'(x)| \leq k < 1$

La prima ipotesi ci dice solo che g deve essere continua.
La seconda ci dice che la funzione g è racchiusa nel "quadrato" (a,b).



La terza ipotesi ci dice semplicemente che la funzione, sempre in $[a,b]$ non cresce troppo velocemente.

Dim: Per Hp sappiamo che:

$g(a)$ e $g(b) \in [a,b]$, in questo caso se $g(a)=a$ o $g(b)=b$ abbiamo terminato, altrimenti procediamo.

Consideriamo $g(a)>a$ e $g(b)<b$ (dato che non valgono le condizioni di sopra questa assunzione è valida).

Definiamo $f := f(x) = x - g(x)$

Consideriamo $f(a) \to f(a) = a - g(a)$, assume valore <0 ed anche $f(b) \to f(b) = b - g(b)$, assume valore >0 possiamo quindi usare il teorema degli zeri.

NB: occorre considerare anche il caso speculare in cui $f(a)>0$ e $f(b)<0$, ma la dimostrazione procede nello stesso identico modo.

Per il Th. degli zeri $\exists \alpha \in [a,b]$ t.c. $f(\alpha)=0$, ma ciò equivale a $f(\alpha) = \alpha - g(\alpha) \to 0 = \alpha - g(\alpha)$ da cui infine ricaviamo $g(\alpha) = \alpha$. ■ (Esistenza)

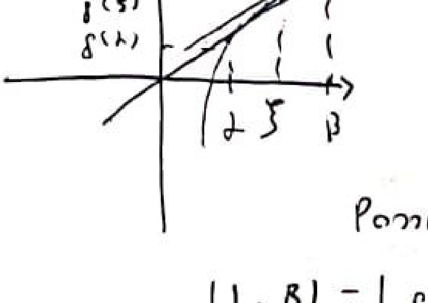
Dim. unicità: Sfruttiamo la nuova ipotesi.

Supponiamo per assurdo $\exists \alpha, \beta \in [a,b]$ t.c. $\alpha = g(\alpha)$ e $\beta = g(\beta)$

Consideriamo $g(\alpha) - g(\beta)$, ora usiamo il teorema di Lagrange:

$$\frac{g(\alpha)-g(\beta)}{\alpha-\beta} = \underbrace{g'(\xi)}_{\xi \in [a,b]}$$

coefficiente della retta tangente parallela alla secante per α e β



Consideriamo ora $|g(\alpha) - g(\beta)|$

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| = |g'(\xi)| \cdot |\alpha - \beta|$$

Possiamo maggiorare tutto con K:

$$|\alpha-\beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| = |g'(\xi)||\alpha-\beta| \leq K|\alpha-\beta|$$

$|\alpha - \beta| \leq K|\alpha - \beta|$ assurdo perchè $K<1$, quindi il p.to fisso deve essere unico. ■

OSSERVAZIONI SUI METODI A P.TO FISSO

In alcuni casi può capitare che non valga l'ipotesi: $g'(x)$, $\forall x \in [a,b]$, $\exists k>0$ t.c. $|g'(x)| \leq K < 1$ ma che comunque il p.to fisso sia unico.

Come possiamo usare le iterazioni a p.to fisso?

Esempio:

Supponiamo di voler trovare lo zero (oppure gli zeri) di una funzione f, ovvero $x \in Dom(f)$ t.c. $f(c) = 0$.

Partendo da questo punto possiamo considerare la funzione g così definita:

$$g(x) = x - f(x)$$

Se α è p.to fisso di g si ha che

$$g(\alpha) = \alpha$$, il che implica $f(\alpha) = 0$, ma quindi α è radice di f.

Come possiamo costruire una formula iterativa?

Cerchiamo di costruire una successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ che tende a p.to fisso di una funzione.

Teorema di convergenza:

Hp:
- $g(x) \in C[a,b]$
- $\forall x \in [a,b]$, $g(x) \in [a,b]$
- $|g'(x)| \leq K < 1$

Tesi:
- $\lim_n x_n = \alpha$ $\quad \forall x_0 \in [a,b]$, con α p.to fisso.

Dim: Per il teorema visto precedentemente possiamo già affermare che il punto fisso esiste ed è unico in $[a,b]$, quindi t.c. $g(p) = p$.

Dato che g mappa $[a,b]$ in $[a,b]$, allora la sequenza

$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ è definita $\forall n \geq 0$, e $p_n \in [a,b]$ $\forall n$.

Sfruttando il fatto che $|g'(x)| \leq K$ in combinazione con il teorema di Lagrange, otteniamo, $\forall n$, che:

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)||p_{n-1} - p| \leq K|p_{n-1} - p|$$

dove $\xi_n \in (a,b)$, applicando questa disuguaglianza otteniamo

$$|p_n - p| \leq K|p_{n-1} - p| \leq K^2|p_{n-2} - p| \leq \dots \leq K^n|p_0 - p|$$

Dato che $0 < K < 1$, il $\lim_n K^n$ diviene 0 e quindi

$$\lim_n |p_n - p| \leq \lim_n \underbrace{K^n}_{\to 0}|p_0 - p| = 0$$

Quindi $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow p$ ■

Corollario:

Se g soddisfa il teorema di convergenza di cui sopra allora l'errore nell'approssimare p con p_n è:

$$|p_n - p| \leq K^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

e

$$|p_n - p| \leq \frac{K^n}{1-K}|p_1 - p_0| \quad \forall n \geq 1$$

Dim:

Dato che $p \in [a,b]$, allora

$$|p_n - p| \leq K^n|p_0 - p| \leq K^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

$\forall n \geq 1$ la procedura usata nella dimostrazione del teorema di convergenza implica che:

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq K|p_n - p_{n-1}| \leq \dots \leq K^n|p_1 - p_0|$$

Così per $m > n \geq 1$

$$|p_m - p_n| = |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - \dots + p_{n+1} - p_n|$$

$$|p_m - p_n| \leq \dots$$
$$\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \dots + |p_{n+1} - p_n|$$
$$\leq k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \dots + k^n |p_1 - p_0|$$
$$= k^n |p_1 - p_0| (1 + k + k^2 + \dots + k^{m-n-1})$$

Ricordiamo che:

$$|p - p_n| = \lim_m |p_m - p_n| \leq \lim_m k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \leq k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

ma $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ è una serie geometrica e noi abbiamo una forma chiusa $S_n = \frac{1}{1-q}$, con q ragione della serie.

Infine otteniamo:

$$|p - p_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$$

$\blacksquare$

La velocità di convergenza dipende da k, più k è vicino a 0 come valore e più la convergenza avviene rapidamente.

Viceversa più k tende a 1 più la convergenza avviene lentamente.

OSS: non solo la ricerca di uno zero può essere trasformata in una iterazione a p.to fisso, ~~ma~~ in genere qualunque problema possiamo esprimere come la f di solito può essere risolto come un p.to fisso.

$$g(x) = x - \Phi(x) f(x)$$

è problema originale

funz. continua qualsiasi

fixed_point_iter.m

home > antonio > elaborati_matlab > iterazioni al punto fisso > fixed_point_iter.m > ...

```matlab
function [x, iter_err] = fixed_point_iter(fun, x0, tol, iter_max)
    iter_err = 0;
    x = fun(x0);
    x_prev = x0;
    %in pratica durante le varie iterazioni troviamo lo zero della funzione
    %"di iterazione" che equivale al risolvere il problema "originale"
    %NB: per poter utilizzare questo metodo occorre fare attenzione a
    %    cosa vogliamo ottenere e quindi elaborare una funzione da passare
    %    adeguata
    while abs(x - x_prev) > tol && iter_err < iter_max
        iter_err = iter_err + 1;
        x_prev = x;
        x = fun(x);
    end
    if iter_err >= iter_max
        iter_err = 1;
    else
        iter_err = 0;
    end
end
```

ⓧ 0 ⚠ 0   Ln 11, Col 33   Spaces: 4   UTF-8   LF   MATLAB