ORDINE DI CONVERGENZA

$\{x_n\}_n$ successione convergente ad α.
L'ordine di convergenza è per definizione è $p>0$ t.c.

$$\exists c>0 \ (c<+\infty) \text{ t.c. } \lim_n \frac{|x^{n+1}-\alpha|}{|x^n-\alpha|^p} = c$$

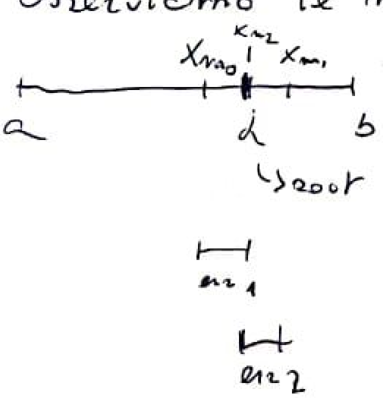
c è detta costante asintotica di errore.

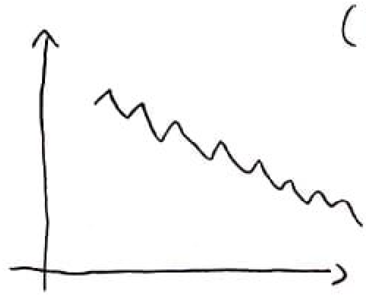
I.P.P.: $|x^{n+1}-\alpha| \simeq |x^n-\alpha|^p c$ (trascuriamo il $\lim_n$, un po' come quando si esegue l'analisi asintotica di un algoritmo)

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a x
con ordine p ed "errore asintotico" c.

Se $p=1$ si ha una convergenza lineare.
Se $1<p<2$ si ha una convergenza superlineare.
Se $p=2$ la convergenza è di tipo quadratico.
Se $p<1$ la convergenza è detta sublineare.

Osserviamo il metodo di bisezione.





(Comportamento della successione degli zeri)

NB: err1 < err2, ma err2 è ad una iterazione successiva.
(Già graficamente si può vedere che non ~~sempre~~ migliora sempre l'approssimazione ad ogni iterazione)

$|x-\alpha|$
↗ p.to medio ↳ root

TIPS: Il metodo di bisezione è spesso utilizzato per "ricadere" nel dominio di attrazione del metodo di Newton!

Confrontiamo ora 2 metodi, con ordine di convergenza rispettivamente $p=1$ e $p=2$.
Supponiamo $c = 0{,}5$ e supponiamo $\underbrace{e_{n+1}}_{\text{successione degli errori.}} = c e_n^p$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &\simeq c e_0 = 0{,}5 e_0 \\ e_2 &\simeq c e_1 = c^2 e_0 = 0{,}25\, e_0 \\ &\vdots \\ e_p &\simeq c e_{p-1} = c^p e_0 = (0{,}5)^p e_0 \end{aligned}\right\} p = 1$$

Osserviamo che se la costante asintotica di errore deve essere < 1 altrimenti la successione degli errori non tende a 0!

$$e_{n+1} = c e_n^2 \qquad c = 0.5$$

$$e_1 = c e_0^2 = (0{,}5) e_0^2$$
$$e_2 = c e_1^2 = (0{,}5)(e_0 - c)^2 = (0{,}5)\, c^{2^2-1}\, e_0^{2^2}$$
$$\vdots$$
$$e_n = c^{2^n-1} \cdot e^{2^n}$$

(Attenzione occorre ricordare che non abbiamo considerato il limite, quindi questa successione potrebbe essere imprecisa).

Come possiamo capire l'ordine di un metodo?

Teorema (per $p = 1$)

Hp: • $g \in C^1[a,b]$, g rispetta le Hp. del teorema per la convergenza del punto fisso:

$\forall x \in [a,b]$, $g(x) \in [a,b]$, $|g'(x)| \leq K < 1$

• $g(\alpha) = \alpha$ e $g'(\alpha) \neq 0$

Tesi: $p = 1$

Dim: Consideriamo la successione degli errori:

$$\underbrace{x_{n+1}}_{\text{"def." p.to fisso e iterazione}} - \overbrace{\alpha}^{\text{p.to fisso}} = g(x_n) - g(\alpha)$$

per il teorema del punto fisso possiamo affermare che $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \to \alpha$.

Dato che g' esiste in (a,b) possiamo usare il teorema di Lagrange su g per far vedere che $\forall n$:

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g'(\xi_n)(x_{n+1} - \alpha)$$

Dato che $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \to \alpha$ si ha che anche $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty} \to \alpha$

Dato che g' è continua su (a,b), abbiamo che:

$$\lim_n g'(\xi_n) = g'(p)$$

Ho quindi:

$$\lim_n \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \lim_n g'(\xi_n) = g'(p) \quad \text{e} \quad \lim_n \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = |g'(p)|$$

Quindi dato che $g'(p) \neq 0$, possiamo prendere $c = g'(p)$ come costante asintotica di errore, inoltre la potenza al denominatore è 1, quindi il metodo ha ordine di convergenza 1

In generale ovviamente

Corollario: Se utilizziamo una iterazione a p.to fisso possiamo avere un ordine di convergenza > 1 solo se $g'(\alpha) = 0$

Dim: conseguenza diretta del precedente teorema. ■

Quale è l'ordine di convergenza del metodo di Newton?

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \cancel{1} \cancel{-1} + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Se:

$\underbrace{g'(\alpha) = 0}_{\alpha \text{ è radice di } f \text{, quindi si ha } 0 \text{ al numeratore}}$ => Newton può avere ordine 2.

deve essere continua

$$f(x) = 0 \rightarrow x = g(x) \quad \text{con } g(x) = x - \Phi(x) f(x)$$

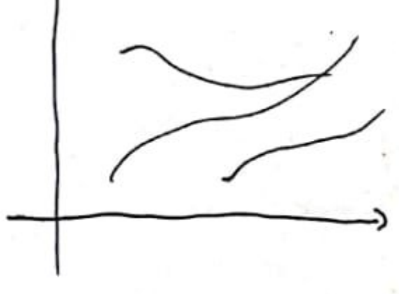
Per Newton: $\Phi(x) = \frac{1}{f(x)}$

Quanto vale $g'(x)$?

$$g'(x) = 1 - \underbrace{\Phi'(\alpha)}_{?}\underbrace{f(\alpha)}_{0} - \Phi(\alpha) f'(\alpha)$$

Se $g'(\alpha) = 1 - \Phi(\alpha) \cdot f'(\alpha)$

se $\Phi(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}$, allora

"  "

Tutte queste funzioni hanno ordine di convergenza $\neq 1$, dimostriamo che è almeno 2.

Teorema: L'ordine di convergenza del metodo di Newton è almeno 2

Dim: caso $f'(\alpha) = 0$ e $f \in C^2[a,b]$

$$x_{n+1} - \alpha = f(x_n) - f(\alpha)$$

sostituiamo a f il suo polinomio di Taylor di grado 1 usando come punto iniziale α.

$$x_{n+1} - \alpha = f(x_n) - f(\alpha) = f(\alpha) - f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \dots$$
$$\dots + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x_n - \alpha)^2 - f(\alpha), \quad \exists\, \xi_n \in (x_n, \alpha)$$

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(\xi_n)}{2}(x_n - \alpha)^2$$

Osserviamo che questa è la definizione di ordine di convergenza di ordine 2, $p = 2$.

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{f''(\xi_n)}{2}$$

Effettuiamo il passaggio al limite

$$\lim_n \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{|f''(\xi_n)|}{2}$$

Quindi p è almeno 2 ∎

In realtà è proprio 2 ma la dimostrazione risulta troppo complicata per gli scopi di questo corso

Cosa succede se una radice α ha molteplicità $\neq 1$?

Supponiamo α abbia molteplicità m, se

$$f(x) = (x-\alpha)^m \cdot q(x) \quad , \quad q(\alpha) \neq 0$$

se $f \in C^n[a,b]$

$$\Updownarrow$$

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{m-1}(\alpha) = 0 \quad f^{m}(\alpha) \neq 0$$

Quindi

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x)}{f'(x)}$$

In pratica se conosciamo la molteplicità di x

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow = \frac{(x-\alpha)^m q(x)}{m(x-1)^{m-1} q(x) + (x-\alpha)^m \cdot q'(x)} =$$

$$= \frac{(x-\alpha) q(x)}{m\, q(x) + (x-\alpha) q'(x)}$$

$$x_{n+1} = x_m - \frac{\mu(x_n)}{\mu'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n) f'(x_n)}{\underbrace{(f'(x_n))^2 - f(x_n) f''(x_n)}_{\text{Attenzione in questo caso il denominatore può divenire 0}}}$$