ELEMENTI DI INTEGRAZIONE NUMERICA

A volte non è possibile calcolare, oppure può essere molto complicato, una primitiva di una funzione e di conseguenza non possiamo calcolarne ~~la~~ l'integrale.
Per risolvere questo problema vedremo alcune tecniche dell'analisi numerica le quali sfruttano una somma per approssimare gli integrali.

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

Queste tecniche sono chiamate FORMULE DI QUADRATURA NUMERICA.
L'idea di base è partire dal polinomio di Lagrange che interpola f ~~ed~~ successivamente integrare il polinomio che, proprio ~~per~~ perchè è un polinomio, ~~sarà~~ risulterà molto più semplice.

Polinomio di Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x)$$

Errore del pol. di Lagrange

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

Da cui:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)\, f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$$

dove $\xi(x) \in [a,b]$, $\forall x$.

Ed inoltre

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \qquad \text{per } i=0,\dots,n$$

La formula di quadratura diviene:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

Con un errore dato da:

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_j) f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$$

Possiamo considerare questo come un punto di partenza da cui ricavare diverse formule in base al numero di "n" ovvero quanti pol. fond. di Lagrange occorrano ecc...

Per questo corso abbiamo considerato solo il primo ed il secondo polinomio (al massimo usiamo L_0 e L_1) ~~[illegible]~~ da cui abbiamo ottenuto 2 metodi per la quadratura:

- Il metodo dei trapezi
- La regola Simpson

La regola dei trapezi

$\int_a^b f(x)\,dx$, con $x_0 = a$, $x_1 = b$, $h = b - a$

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) \right] dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x)) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

$$\ldots \cdot dx$$

Osserviamo che $(x - x_0)(x - x_1)$ non cambia segno su $[x_0, x_1]$, si può quindi usare il teorema della media pesata sulla funzione dell'errore

Teorema della media integrale pesata

Siano f e g 2 funzioni continue in un intervallo $[a,b]$ e sia $g(x)$ di segno costante in $[a,b]$ (sempre positiva o sempre negativa su $[a,b]$).

Allora $\exists\, c \in [a,b]$ t.c. $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$

Su $E(f)$ otteniamo: $\exists\, \xi \in (a,b)$ t.c.

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)\,dx = f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

$$= f''(\xi)\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1+x_0)}{2}x^2 + x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1+x_0)}{\cancel{3}2}x^2 + x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$\downarrow$$

$$x\left(\frac{x^2}{3} - \frac{(x_1+x_0)}{2}x + x_0x_1\right)$$

$$x_1\left(\frac{x_1^2}{3} - \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_0x_1}{2} + x_0x_1\right) - x_0\left(\frac{x_0^2}{3} - \frac{(x_1+x_0)}{2}x_0 + x_0x_1\right)$$

$$x_1\left(\frac{2x_1^2-3x_1^2}{6} + \frac{x_0x_1}{2}\right) - x_0\left(\frac{2x_0^2-3x_0^2}{6} + \frac{x_0x_1}{2}\right)$$

$$\frac{2x_1^3-2x_0^3-3x_1^3+3x_0^3}{6} + \frac{x_0x_1^2-x_0^2x_1}{2}$$

$$\frac{-x_1^3+x_0}{6} + \frac{x_0x_1(x_1-x_0)}{2}$$

$$\frac{x_0^3-x_1^3+3x_0x_1(x_1-x_0)}{6}$$

$$\frac{x_0^3+3x_0x_1^2-3x_0^2x_1-x_1^3}{6}$$

$$\frac{(x_0-x_1)^3}{6} \to -\frac{(x_1-x_0)^3}{6} \to -\frac{h^3}{6} \to -\frac{h^3}{6}f''(\xi)$$

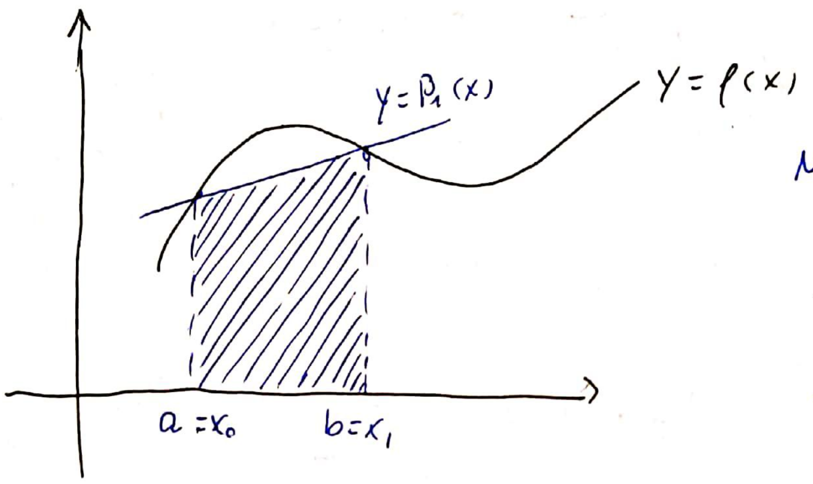
Di conseguenza:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$= \frac{(x_1-x_0)}{2} \left[f(x_0) + f(x_1) \right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

Abbiamo così ottenuto la <u>REGOLA DEI TRAPEZI</u>.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_1) \right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$



NB: per aumentare la precisione occorre suddividere la funzione in intervalli più piccoli

L'area del trapezio si calcola con

$$A = \frac{(b+B)\,h}{2}$$

b = base maggiore = $\max(f(x_0), f(x_1))$

B = base minore = $\min(f(x_0), f(x_1))$

$\downarrow$

$$A = (f(x_0) + f(x_1)) \cdot \frac{h}{2} \quad !$$

Regole di Simpson

Seguendo lo stesso procedimento che abbiamo seguito per estrapolare la regola dei trapezi, con l'unica differenza che usiamo un polinomio interpolante di Lagrange di 2° grado "ovvero con L_0, L_1, L_2", possiamo ottenere la regola di Simpson.

Questo metodo invece che sfruttare i trapezi utilizza delle parabole per approssimare l'area!

FORMULA DI SIMPSON

$$I_2(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

$$E_2(f) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Nel caso in cui si è a conoscenza del fatto che $f \in C^4[a,b]$ otteniamo che:

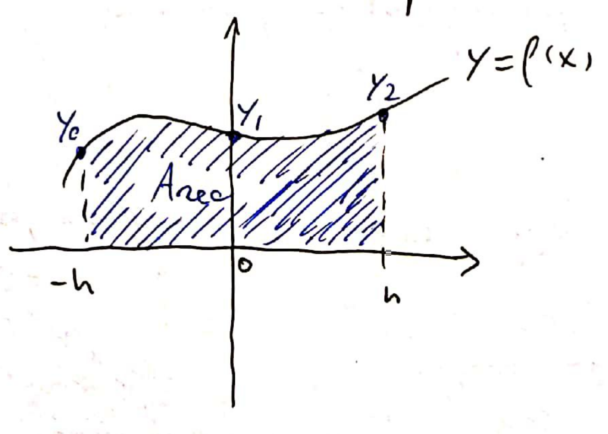
$$\exists\, \xi \in [a,b] \text{ t.c. } R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f''(\xi)$$

Derivazione alternativa della regola di Simpson

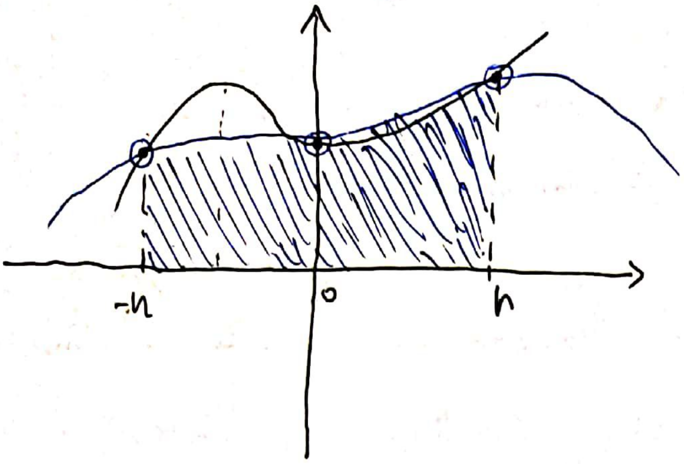
Come detto sopra la formula di Simpson è

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

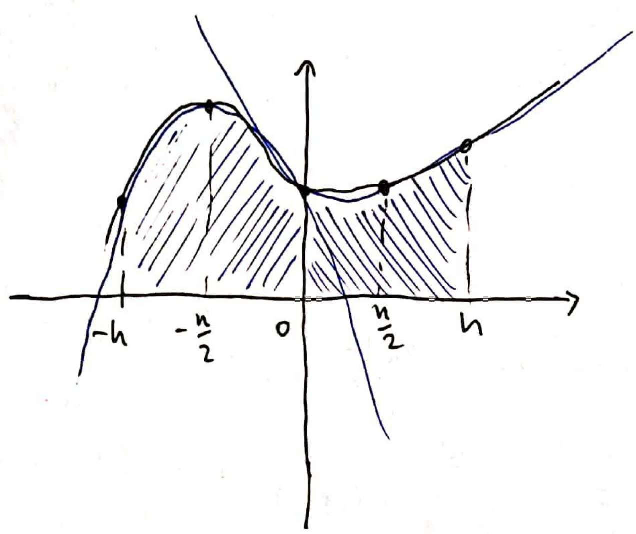
Cerchiamo di capire il perché di questa formula



L'idea di base è quella di approssimare $f(x)$ con un polinomio di 2° grado e successivamente calcolare l'area sottesa al grafico del polinomio



Inizialmente l'approssimazione può sembrare molto grossolana, ma basta dividere i sottointervalli $[-h,0]$, $[0,h]$ in ulteriori sottointervalli, ciò comporta un miglioramento dell'approssimazione, inoltre è possibile ripetere il procedimento fino a quando non si ottiene la precisione voluta, più tardi ~~ci~~ riaffronteremo questo argomento parlando di integratori automatici.



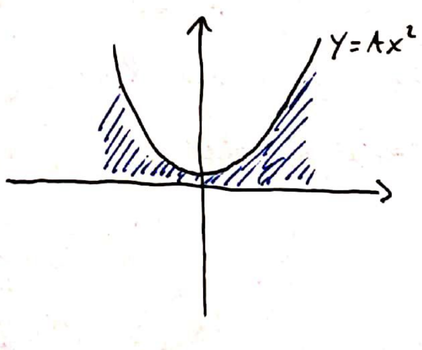
L'obiettivo ora è far vedere che

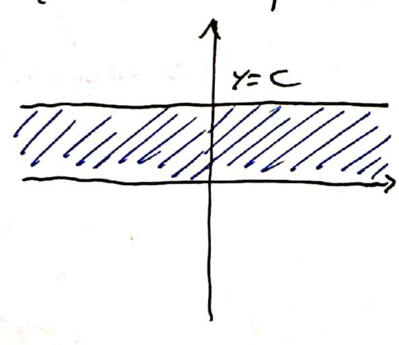
$$\int_{-h}^{h} P(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

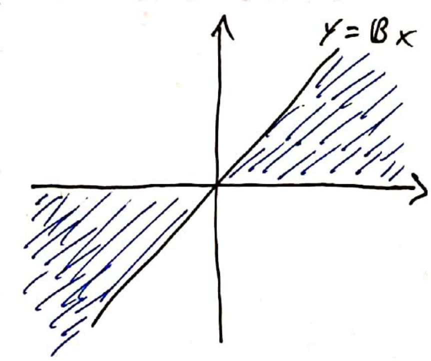
Con $P(x) \in \mathbb{P}^2$, prendiamo un polinomio generico di grado 2:

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C$$

NB: Ax^2 e C sono funzioni pari, viceversa Bx è dispari







Dai grafici "pseudo-generici" possiamo intuire che nel calcolo dell'integrale su $-h, h$ il termine quadratico ed il termine noto contribuiscono per il doppio del valore dell'integrale (sempre di Ax^2 e C) su $0, h$ (o ~~su~~ $-h, 0$ è indifferente)

$$\int_{-h}^{h} P(x)\,dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + C\right]_{-h}^{h}$$

NB: $[-h, h]$ è un intervallo simmetrico!

Contrariamente ad Ax^2 e C il termine Bx contribuisce per 0 al valore dell'integrale su $-h, h$ (questo perché, come si può vedere anche dal grafico, le 2 parti si elidono a vicenda.

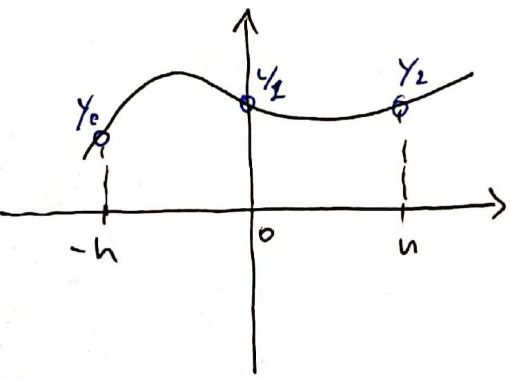
$$\left[\frac{Ax^3}{3} + \cancel{\frac{Bx^2}{2}} + Cx\right]_{-h}^{h} = \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch$$

(Considerando l'integrale tra 0 e h è immediato questo risultato)

$$\frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$$

↳ Abbiamo già trovato un primo pezzo della formula.

Ora mancano da individuare i coefficienti:



Valutiamo $P(x)$ in $-h$, 0 e h:

- $P(0) = A\cdot 0^2 + B\cdot 0^2 + C = Y_1 \Rightarrow C = Y_1$
- $P(-h) = A\cdot h^2 - Bh + C = Y_0$
- $P(h) = Ah^2 + Bh + C = Y_1$

Sommiamo membro a membro $P(-h)$ e $P(h)$

$$P(h) + P(-h) = 2Ah^2 + \cancel{Bh} - \cancel{Bh} + 2C = y_2 + y_0$$

da cui ricaviamo:

$$2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2C \quad , \text{ ma } C = y_1$$

$$\Downarrow$$

$$2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1$$

Sostituiamo questi valori nella formula prima ricavata:

$$\frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{h}{3}(y_0 + y_2 - 2y_1 + 6C) \quad , \quad C = y_1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{h}{3}(y_0 + y_2 - 2y_1 + 6y_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Ecco un modo per ricavare la formula di Simpson. $\blacksquare$

ERRORE PREVISTO

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)\,dx \qquad x = x_0 + sh$$

$$\int_0^1 sh(s-1)h\cdot h\,ds = \underbrace{h^3 \int_0^1 (s-s)\,ds}_{\left[-\frac{h^3}{6}\right]}$$

Errore per trapezi $\Rightarrow -\frac{h^3}{12}\cdot f''(\xi)$

Errore per la regola di Simpson

$$R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi)$$

NB: implica che l'approssimazione è corretta su tutti i polinomi di grado ≤ 3 (non vale per i polinomi di grado 4)

Grado di precisione (per una formula di quadratura)

Si dice che un metodo ha grado di precisione d se è esatto su tutti i polinomi di grado $\leq d$ ed esiste almeno un polinomio di grado $d+1$ su cui non è esatto
(Esatto := errore = 0)

$R_n(p_k) = 0$ per $k \leq d$

e

$R_n(p_k) \neq 0$ per $k > d$

Simpson ha grado di precisione 3.
Trapezi ha grado di precisione 1.

Aumentando di grado, l'ordine di precisione aumenta di 2.

Le formule di Newton-Cotes su n nodi:

- con n dispari hanno grado di precisione n
- con n pari hanno grado di precisione $n+1$

Queste formule inoltre sono basate su nodi equidistanti i quali tendono ad amplificare gli errori sui pesi e di conseguenza ~~sul~~ su tutti i calcoli.

Esempio

$$I(f) = \int_0^{100} \sin x \, dx$$

$$I(f) = \frac{100}{2} (\sin(0) + \sin(100))$$

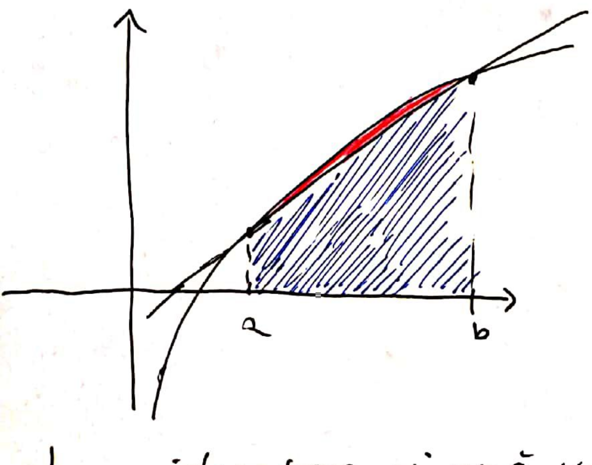
↳ ci interessa di più l'errore in questo momento:

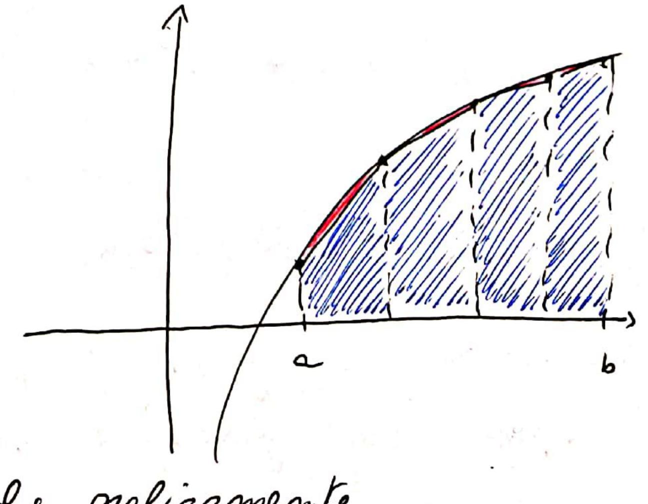
$$|R_1(f)| = \left| -\frac{h^3}{12} \cdot \underbrace{f''(\xi)}_{} \right|$$

al massimo può essere 1 in questo caso

$$|R_1(f)| = \frac{100^3}{12}$$ è un errore troppo grande

Per ovviare a questo problema sfruttiamo la linearità dell'integrale e "spezziamo" la nostra stima attuale su intervalli più piccoli e poi sommiamo i vari risultati. (NB: occorre sommare anche gli errori per vedere se c'è una reale riduzione)





La riduzione si può vedere anche graficamente.

Vediamo un esempio:

$$\int_0^4 e^x dx = e^4 - e^0 \simeq 53,59815$$

Consideriamo la formula di Simpson:

$h=2$, $I_2(f) = \frac{2}{3}(e^0 + 4e^2 + e^4) \simeq 56,76958$.

$R_2(f) = -3,17143$ errore troppo grande.

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^2 e^x dx + \int_2^4 e^x dx$$

Riutilizziamo Simpson:

$h = 1 \to (I_2^{[0,2]}, I_2^{[2,4]})$

$$\simeq \frac{1}{3}(e^0 + 4e^1 + e^2) + \frac{1}{3}(e^2 + 4e^3 + e^4)$$

$$\simeq 53,86385$$

$E_2(f) = -0,26...$ molto più preciso

usiamo 2 intervalli

$I_2^{(2)}(f)$, possiamo risuddividere gli intervalli in 2, ecc...

in questo modo riduciamo ad ogni iterazione l'errore.

Per Simpson:

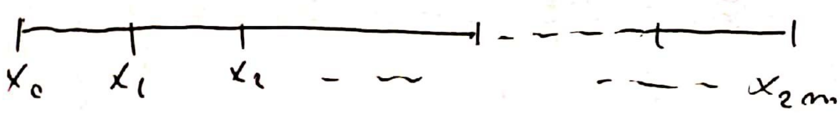
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx$$

$n = 2m$

Siamo costretti ad usare un numero pari di intervalli:

$\hookrightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$

Questa è l'unica supposizione che occorre fare / imporre in questo caso.



$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\sum_{k=0}^{m-1} \left(f(x_{2k}) + 4 f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}) \right)$$

$\hookrightarrow I_2^m(f) :=$ formula di Simpson composita.

Osserviamo che i nodi di peso dispari sono pesati per 4 mentre quelli pari pesano per 2.

$$\frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_m) \right) = I_2^m(f)$$

Formula composta per trapezi

$$I_1^n(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n) \right)$$

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

tutti i nodi interni compaiono 2 volte.

$$I_1^n(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + \left(2\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)\right) + f(x_n) \right)$$

PASSIAMO ORA ALLE SOMME DEGLI ERRORI

L'errore delle formule composite è la somma dei singoli errori sui singoli sottointervalli.

Analizziamo cosa succede per il metodo di Simpson.

$$R_2^{2m}(f) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \left(-\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi_{2i}) \right) \right) \qquad \xi_{2i} \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$$

$$= -\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{m-1} f^{IV}(\xi_{2i})$$

$\hookrightarrow$ ciò è possibile perché $f \in C^4[a,b]$

Sappiamo che:

$$\min_{x\in[a,b]} f^{IV}(x) \le f^{IV}(\xi_{2i}) \le \max_{x\in[a,b]} f^{IV}(x)$$

$$m \cdot \min_{x \in [a,b]} f^{IV}(x) \le \sum_{i=0}^{m-1} f^{IV}(\xi_{2i}) \le m \cdot \max_{x \in [a,b]} f^{IV}(x)$$

$$\downarrow$$

$$\min_{x \in [a,b]} f^{IV}(x) \le \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f^{IV}(\xi_{2i}) \le \max_{x \in [a,b]} f^{IV}(x)$$

f è continua quindi assume tutti i valori tra minimo e massimo.

$$\exists\, \bar{\xi} \in [a,b] : f^{IV}(\bar{\xi}) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f^{IV}(\xi_{2i})$$

$$\downarrow$$

$$R_2^{2m}(f) = -\frac{h^5}{90} m\, f^{IV}(\bar{\xi})$$

$$= -\frac{h^4}{90} \cdot \frac{b-a}{2\cancel{m}} \cdot \cancel{m} \cdot f^{IV}(\bar{\xi})$$

Riscriviamo una h come $\frac{b-a}{2}$

$$= -\frac{h^4 (b-a)}{90 \cdot 2} f^{IV}(\bar{\xi}) \quad (\underline{\text{Errore voluto}})$$

Aumentando il numero di intervalli aumenta la precisione e riduzze h.

Di quanto si riduce / di quanto migliora l'approssimazione?

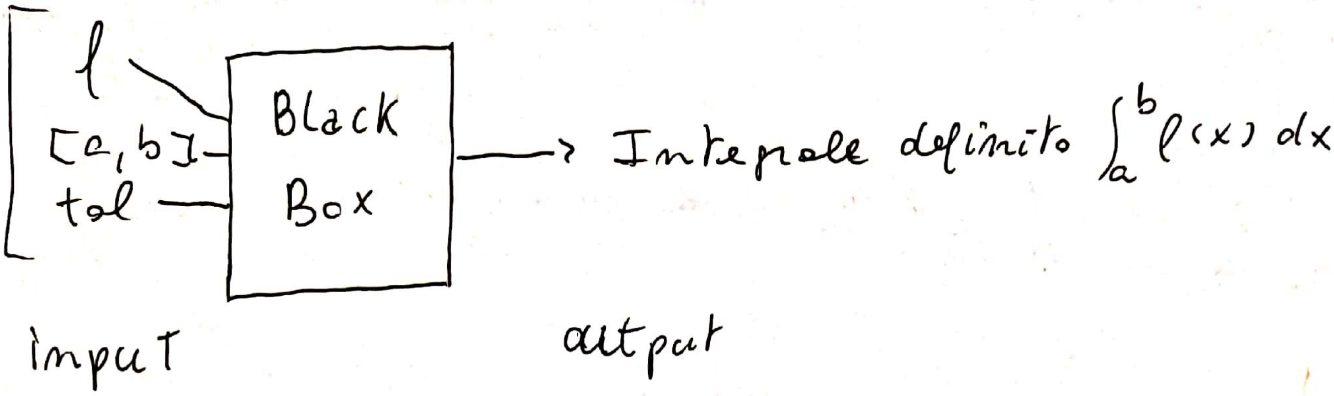
Consideriamo h e $\frac{h}{2}$

$$-\left(\frac{h}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{180} (b-a) f^{IV}(\xi)$$

Dimezzando, l'errore si riduce di circa $1/16$.

(Nel metodo dei trapezi tramite un ragionamento pressocchè identico si trova che l'errore si riduce di $1/4$ circa)

INTEGRATORI AUTOMATICI



Consideriamo:

- $I - I^{2m} = R^{2m} \quad (h)$
- $I - I^{4m} = R^{4m} \quad (h/2) \simeq \frac{1}{16} R^{2m}$

$$\left.\begin{aligned} I - I^{2m} &\simeq 16 R^{4m} \\ I - I^{4m} &\simeq R^{4m} \end{aligned}\right\} \quad \text{Sottraiamo membro a membro}$$

$$/ \; (I^{4m} - I^{2m}) \simeq 15 R^{4m}$$

- $R^{4m} \simeq \frac{1}{15} (I^{4m} - I^{2m})$

Queste informazioni ci dicono che passando da $2m$ intervalli di ampiezza h a $4m$ intervalli di ampiezza $\frac{h}{2}$ l'errore si riduce per: "la differenza tra le 2 formule moltiplicate per $1/15$".

Inoltre dato che per $h \to 0$ l'errore tende a 0, possiamo dire che il metodo converge al risultato voluto.

(Anche se per un calcolatore è impossibile eseguire un passaggio al limite)

Partiamo da:

- I^2
- I^4

Controlliamo che:

$$|I^2 - I^4| < 15 \cdot tol \quad (\text{Stop condition})$$

- Ora se la tolleranza è rispettata ritorniamo I^4.
- Reiteriamo il procedimento da capo, considerando I^4 e I^8

TIPS: possiamo irrobustire il criterio di arresto aggiungendo un limite al numero di iterazioni.

Osserviamo che questo procedimento ricalcola più volte gli stessi valori!

$$I_2^{2m}(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1}(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{m-1}(x_{2i+1}) + f(x_m)\right)$$

Durante la prima iterazione si ha che:

$$h \begin{cases} S_2 = S_4 \\ 0 \end{cases} \rightarrow \frac{h}{2}\begin{cases} S_2 = S_{4,old} \\ S_4 = \text{va ricalcolata} \end{cases} \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$\dots \rightarrow \frac{h}{4}\begin{cases} S_2 = S_4 + S_2 \\ S_4 = \text{va ricalcolata} \end{cases} \rightarrow \dots$$

In questo modo possiamo risparmiare molti calcoli computazionali.

integratore_automatico.m simpson.m trapezi.m

home > antonio > elaborati_matlab > formule di quadratura > trapezi.m > function [Tn] = trapezi(fun, a, b, n)

```
function [Tn] = trapezi(fun, a, b, n)
    h = (b-a)/n;
    s = 0;
    for i=1:n-1
        s = s + fun(a+i*h);
    end
    Tn = (2*s + fun(a) + fun(b))*(h/2);
end
```

Ln 1, Col 1 Spaces: 4 UTF-8 LF MATLAB

integratore_automatico.m   simpson.m

home > antonio > elaborati_matlab > formule di quadratura > simpson.m > function [Sn] = simpson(fun, a, b, n)

```matlab
function [Sn] = simpson(fun, a, b, n)
    h = (b-a)/n;
    s4 = 0;
    s2 = 0;
    m = n/2;
    for i=0:m-1
        s4 = s4 + fun(a + (2*i+1)*h) ;
    end
    for i=1:m-1
        s2 = s2 + fun(a+(2*i)*h);
    end
    Sn = (fun(a) + fun(b)+ 4*s4 + 2*s2 )*(h/3);
end
```

0 0   Ln 1, Col 1   Spaces: 4   UTF-8   LF   MATLAB   1

integratore_automatico.m

home > antonio > elaborati_matlab > formule di quadratura > integratore_automatico.m > function [S, ierr] = integratore_automatico(fun, a, b, tol, iter_max)

```matlab
function [S, ierr] = integratore_automatico(fun, a, b, tol, iter_max)
    niter = 0;
    h = a + (b-a)/2;
    ya = fun(a);
    yb = fun(b);
    S2 = fun(a+h);
    S4 = fun(a+h/2) + fun(a+3*h/2);
    I2 = h*(ya + 4*S2 + yb)/3;
    h = h/2;
    I4 = h*(ya + 2*(2*S2) +4*S4 + yb)/3;
    while abs(I2-I4) > 15*tol && niter <= iter_max
        niter = niter + 1;
        h = h/2;
        S4 = fun(a+h);
        for i=3:2:2^(niter+2)-1
            S4 = S4 + fun(a+i*h);
        end
        S2 = S4;
        I2 = I4;
        I4 = h*(ya + 2*S2 + 4*S4 + yb)/3;
    end
    if niter > iter_max
        ierr = -1;
    else
        ierr = 0;
    end
    S = I4;
end
```

Ln 1, Col 1   Spaces: 4   UTF-8   LF   MATLAB