METODO DI NEWTON

Sostanzialmente è un tipo particolare di iterazione a p.to fisso.
Abbiamo visto che una forma più generale di iteraz. a p.to fisso è dato dalla funzione:

$$g(x) = x - \Phi(x) f(x)$$

Cercando il p.to in cui $g(x) = x$ necessariamente abbiamo trovato un punto in cui $\Phi(x) f(x) = 0$, per poter scegliere correttamente $\Phi(x) f(x)$ osserviamo innanzitutto il polinomio di Taylor di una funz. generica.

Supponiamo $f \in C^2[a,b]$, sia $p_0 \in [a,b]$ una approssimazione di p. t.c. $\underbrace{f'(p_0) \neq 0}_{p_0 \text{ è uno zero semplice}}$ e $|p - p_0| < \varepsilon$ con ε infinitesimo

radice di f

Consideriamo il polinomio di Taylor in un intorno di p_0 e valutato in $x = p$

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

Dato che assumiamo $|p - p_0|$ infinitesimo possiamo ignorare $(p-p_0)^2$, così rimane solamente

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$$

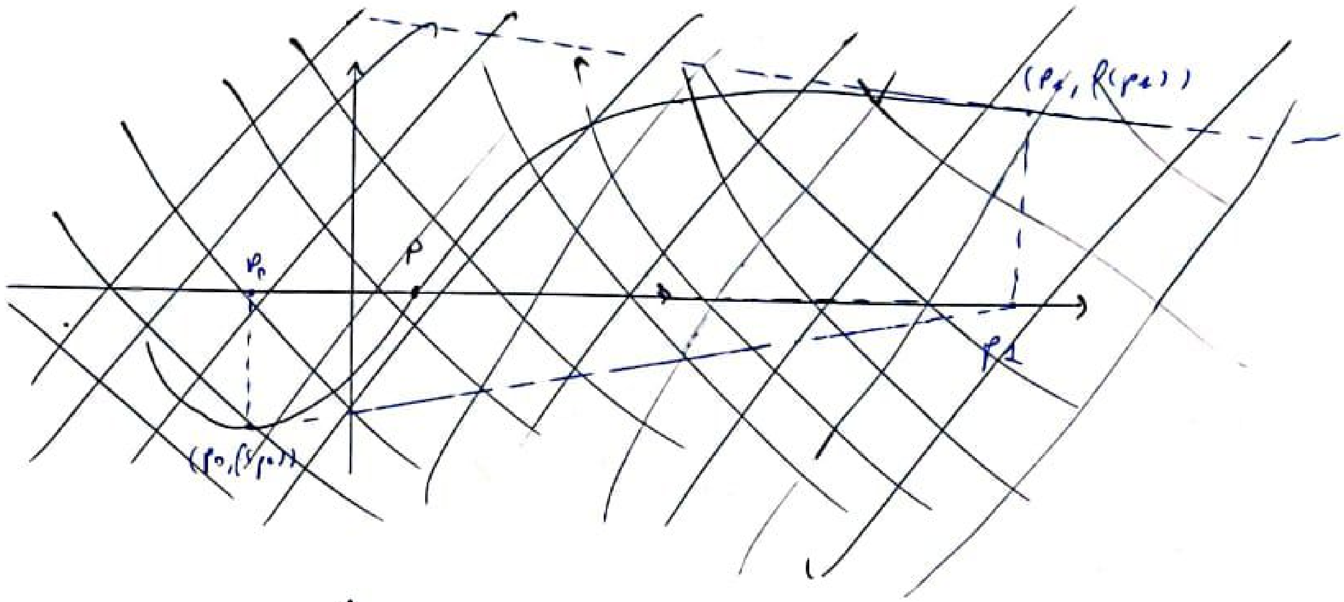
Risolvendo rispetto a p otteniamo

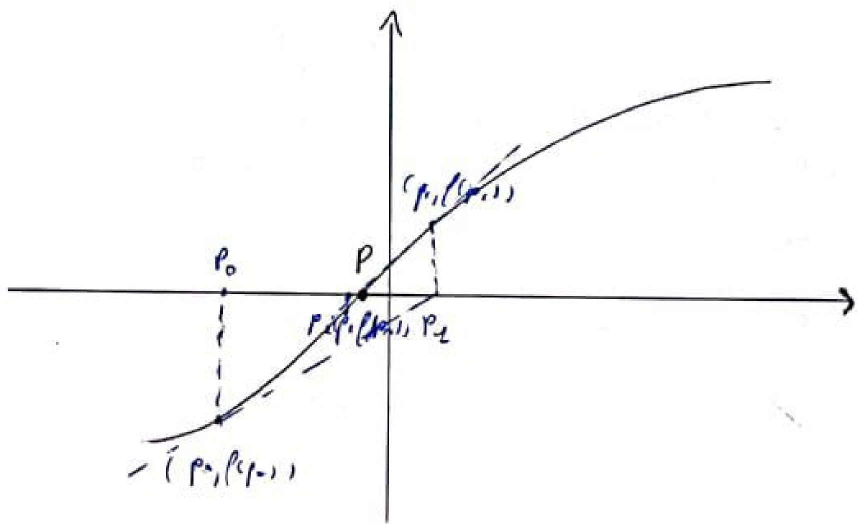
$$p \approx \underbrace{p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}}_{\Phi(x) f(x)} \equiv p_1$$

NB: serve una approssimazione iniziale p_0

$$\{p_n\}_{n=1}^{\infty} = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \forall n \geq 1$$

Il metodo di Newton è anche conosciuto come metodo delle tangenti, il disegno di sotto ne rende il motivo





I criteri di arresto per il metodo di Newton possono essere uguali a quelli del metodo di bisezione.

Guardando la funzione di iterazione si capisce subito che se $f'(p_{n-1}) = 0$ la funzione non è continua

CONVERGENZA DEL METODO DI NEWTON

Teorema di convergenza

Sia $f \in C^2[a,b]$, se $p \in (a,b)$ e $f(p)=0$ e $f'(p) \neq 0$, ovvero p è uno 0 semplice, allora $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$\lim_{n} \underbrace{x_n}_{\substack{\text{generata dal}\\ \text{metodo di}\\ \text{Newton}}} \longrightarrow p \quad \forall x_0 \in \underbrace{[p-\delta, p+\delta]}_{\text{Dominio di attrazione}}$$

NB: si intende una convergenza locale, non totale.

Dim: $p_n = g(p_{n-1})$, $\forall n \geq 1$ con

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Sia $k \in (0,1)$, prima di tutto troviamo un intervallo $[p-\delta, p+\delta]$ t.c. g mappa in se stessa e che $|g'(x)| \leq k$, $\forall x \in (p-\delta, p+\delta)$.

Dato che f' è continua e $f'(p) \neq 0$, prendiamo $\delta_1 > 0$ t.c. $f'(x) \neq 0$ per $x \in [p-\delta_1, p+\delta_1] \subseteq [a,b]$.

Dato che g è definita e continua in $[p-\delta_1, p+\delta_1]$.

Inoltre:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

per $x \in [p-\delta_1, p+\delta_1]$, e, dato che $f \in C^2[a,b]$, abbiamo che $g \in C^1[p-\delta_1, p+\delta_1]$.

Per assunzione $f(p)=0$, quindi

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{(f'(p))^2} = 0$$

Dato che g' è continua e $0<K<1$, abbiamo che esiste δ t.c. $0<\delta<\delta_1$, e

$$|g'(x)| \leq K \quad \forall x \in [p-\delta, p+\delta]$$

Occorre mostrare che g mappa $[p-\delta, p+\delta]$ in $[p-\delta, p+\delta]$.

Ora per il teorema di Lagrange si ha che per un valore ξ tra x e p:

$$|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x-p|, \text{ quindi}$$

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x-p| \leq K|x-p| < |x-p|$$

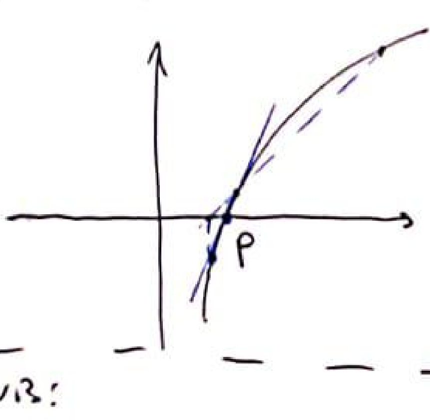
Dato che $x \in [p-\delta, p+\delta]$, ne segue che $|x-p|<\delta$ e che $|g(x) - p| < \delta$, ma allora g mappa $[p-\delta, p+\delta]$ in se stesso.

Ora abbiamo soddisfatto tutte le ipotesi del teorema di convergenza per le iterazioni a p.to fisso. (NB: il metodo di Newton come già detto è una iter. a p.to fisso) e quindi $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p $\forall p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$. ■

Metodo delle secanti (variante del metodo di Newton)

Dato che la valutazione di una funzione e delle sue derivate è molto costoso, a volte è preferibile il metodo delle secanti nel quale ad ogni iter occorre valutare una sola funzione.

Per "ottenere" questo metodo basta cambiare la funzione di iterazione.



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$\downarrow$$

$$\cancel{x_{n+1} = x_n - f(x_n)(x_n - x_{n-1})}$$

NB:

$$\lim_{x_{n-1} \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f'(x)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Teorema per la convergenza totale di Newton

Ipotesi: ① $f \in C^2[a,b]$, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$

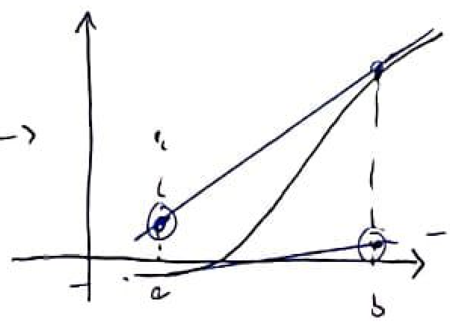
② $f(a)\cdot f(b)<0$

③ $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in[a,b]$

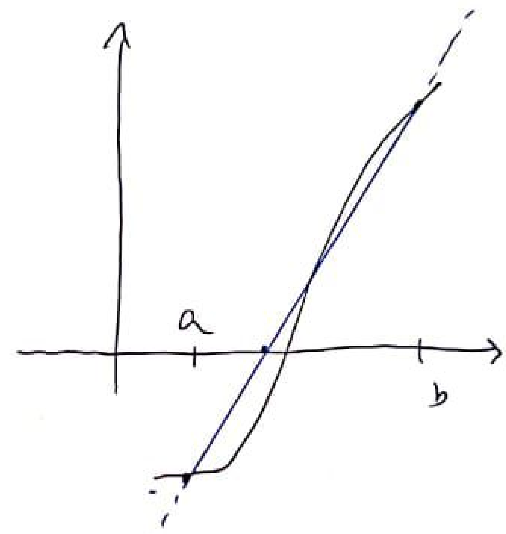
④ $f''(x)\geq 0$ (oppure ≤ 0) $\forall x \in [a,b]$

⑤ $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq b-a$ e $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| \leq b-a$

Tesi: il metodo di Newton converge totalmente $\forall x_0\in[a,b]$



intersezione
fuori dall'intervallo
non vale ⑤



Intersezione nell'intervallo
vale ⑤

newton_method.m × secant_method.m

home > antonio > elaborati_matlab > newton&secanti > newton_method.m > function [root, iter_err] = newton_method(fun, fun_d, x0, tol,max_iter)

```
function [root, iter_err] = newton_method(fun, fun_d, x0, tol,max_iter)
    g = @(x) x -fun(x)/fun_d(x);
    iter_err = 0;
    root = g(x0);
    while iter_err < max_iter && abs(root-x0)>tol
        x0 = root;
        root = g(root);
        iter_err = iter_err + 1;
    end
    if iter_err >= max_iter
        iter_err = 1;
    else
        iter_err = 0;
    end
end
```

ⓧ 0 ⚠ 0 Ln 1, Col 1 Spaces: 4 UTF-8 LF MATLAB newton_method.m | secant_method.m

home > antonio > elaborati_matlab > newton&secanti > secant_method.m > function [root, iter_err] = secant_method(fun, x0, x1, tol, max_iter)

```
function [root, iter_err] = secant_method(fun, x0, x1, tol, max_iter)
    iter_err = 0;
    fn = fun(x1);
    fp = fun(x0);
    while iter_err < max_iter && abs(x1 - x0)>tol
        iter_err = iter_err + 1;
        tmp = x1 - (fn*(x1-x0)/(fn-fp));
        x0 = x1;
        x1 = tmp;
        fp = fn;
        fn = fun(x1);
    end
    root = x1;
    if iter_err >= max_iter
        iter_err = 1;
    else
        iter_err = 0;
    end
end

```

⊗ 0 ⚠ 0 Ln 1, Col 1 Spaces: 4 UTF-8 LF MATLAB