

Улучшения алгоритма Форда-Беллмана

Shortest Path Faster Algorithm (SPFA)

E.W.Moore, 1959

Проблема:

Мы делаем слишком много неуспешных релаксаций. Зачем релаксировать ребро, которое исходит из вершины, расстояние до которой не изменилось?

Идея:

Давайте релаксировать только те ребра, которые ведут из вершин с обновившимся значением *dist*.

Shortest Path Faster Algorithm (SPFA)

Напоминает BFS

```
def SPFA(G, s):  
    dist = [inf, ..., s: 0, ..., inf]  
    prev = [None, ..., None]  
    queue = {s}  
    while queue is not empty:  
        v = queue.pop()  
        for u in G.neighbors(v):  
            if Relax(v, u) and u not in queue:  
                queue.push(u)
```

В худшем случае асимптотика остается $O(VE)$.

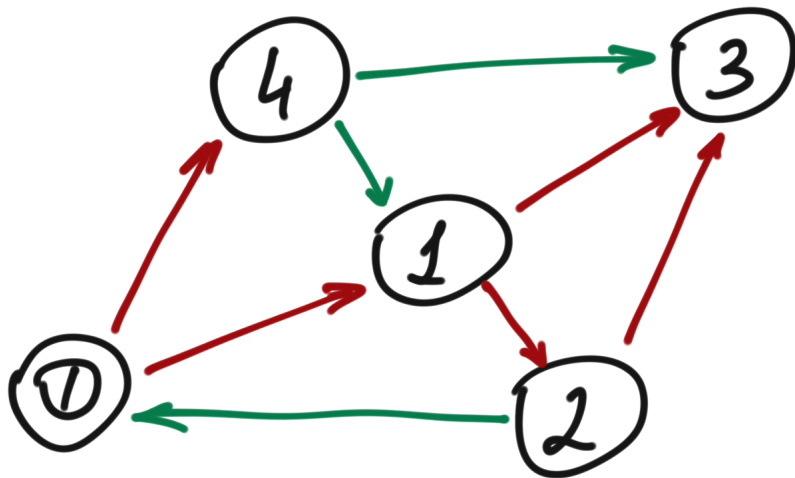
На практике, как правило, работает быстрее ($O(E)$ на случайных графах).

Улучшение Йена (J.Y. Yen, 1970)

Разобьем ребра графа на два множества: ребра ведущие из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером, и наоборот.

Релаксировать ребра будем упорядоченно: сначала релаксируем первое множество, затем - второе, и т.д.

В свою очередь, внутри каждого множества ребра дополнительно упорядочены по номеру стартовой вершины (в одном по возрастанию, во втором по убыванию).

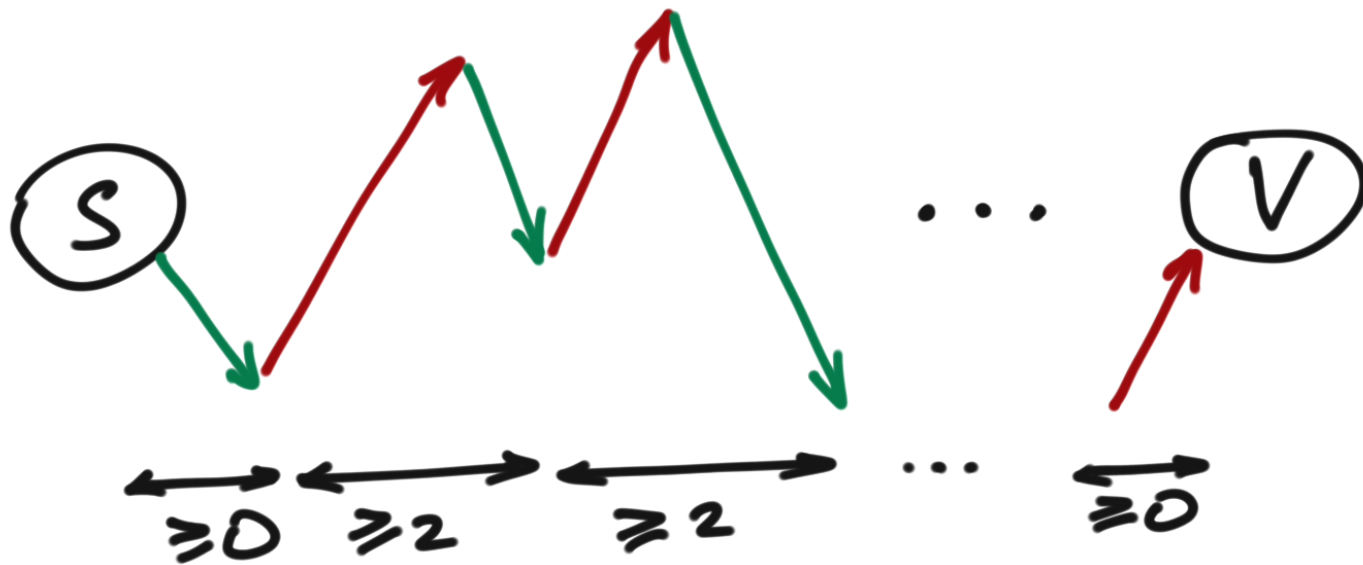


Улучшение Йена

Любой путь в графе представляет собой последовательность "горок".

В каждой "горке" минимум по 2 ребра. Следовательно, за одну итерацию алгоритма Форда-Беллмана успешно релаксируется хотя бы 2 ребра (за исключением, может быть, первой и последней итерации).

То есть время работы уменьшается в 2 раза.



Улучшение Баннистера-Эппштейна

M.J. Bannister, D. Eppstein, 2012

Используем улучшение Йена, но на каждой итерации используем случайную перестановку индексов вершин. Это позволяет провести анализ для среднего количества итераций алгоритма, которое составляет $V/3$.

Кстати, если в исходном алгоритме Форда-Беллмана на каждой итерации перебирать ребра в случайном порядке, то среднее количество итераций составит $V/(e - 1)$.

чего только люди не придумают