Recurso educativo

Editor: Antonio Merino

Email: antonio23merino@hotmail.com

Variables aleatorias continuas

Probabilidad y estadística

Nota: Lo siguiente, es un extracto del libro de probabilidad y estadística del Dr. Menthor Urvina

Intuitivamente podemos definir una variable aleatoria continua X sobre un espacio probabilístico Ω como función

$$\begin{aligned} X: \quad & \Omega \to R \quad \text{tal que:} \\ & P(\omega / X(\omega) = x) = 0, \quad -\infty < x < \infty \\ & P(X = x) = 0 \end{aligned}$$

Definición. Una variable aleatoria continua X sobre un espacio probabilístico Ω, es una función de valores reales tal que $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega / X(\omega) = x\}$ es vacío.

Definición. La función de distribución F de una variable aleatoria continua X es la función definida por:

$F(x) = P(X \leq x)$

Proposición. Si X es una variable aleatoria continua, con F su función de distribución, se tiene:

$F(-\infty) = 0; \quad F(\infty) = 1; \quad 0 \leq F(x) \leq 1$
F es contínua y no decreciente.

Definición. Un función de densidad es una función no negativa, tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Nota. si f es una función de densidad, entonces F definidad por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

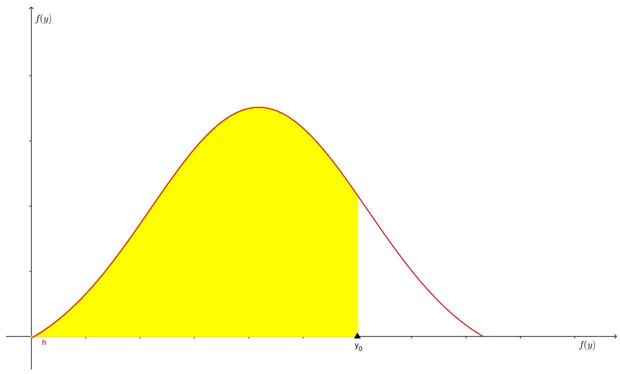
Se llama la función de distribución.

Si X es una variable aleatoria continua que tiene a F como función de distribución, entonces:

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

En general: $P(X \in A) = \int_A f(x)\, dx$

Así, $P(X \in A)$ puede ser interpretado como el área bajo la curva de f cuando x toma valores en A



Observación. En muchas aplicaciones el camino más fácil para hallar densidades de variables aleatorias es:

Si se conoce la función de distribución

$$F(x) = P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

por el teorema fundamental del Cálculo se tiene: $f(x) = F'(x)$

lo cual se cumple $\forall x$ donde f es continua

Ejemplo. La función de densidad de una variable aleatoria Z tiene la forma

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z < 1 \\ z-1, & 1 \leq z \leq 2 \\ 3-z, & 2 \leq z \leq 3 \\ 0, & z > 3 \end{cases}$$

(i) Hallar $P(Z \leq \frac{3}{2})$; $P(\frac{3}{2} \leq Z \leq \frac{5}{2})$; $P(Z > \frac{5}{2})$

(ii) Hallar la función de distribución de Z

$$P(Z \leq 3/2) = \int_{-\infty}^{3/2} f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{3/2} (z-1)\, dz = 1/8$$

$$P(3/2 \leq Z \leq 5/2) = \int_{3/2}^{2} (z-1)\, dz + \int_{2}^{5/2} (3-z)\, dz = 3/4$$

$$P(Z > 5/2) = \int_{5/2}^{3} (3-z)\, dz = 1/8$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(y)\, dy$$

$$\text{si } z<1: \quad F(z)=\int_{-\infty}^{z} f(y)\,dy=0$$

$$1\le z<2: \quad F(z)=\int_{-\infty}^{z} f(y)\,dy=\int_{1}^{z} f(y)\,dy=\int_{1}^{z}(y-1)\,dy=\frac{z^2}{2}-z+\frac{1}{2}$$

$$2\le z<3: \quad F(z)=\int_{-\infty}^{z} f(y)\,dy=\int_{1}^{2} f(y)\,dy+\int_{2}^{z}(y-1)\,dy$$

$$=\int_{1}^{2}(y-1)\,dy+\int_{2}^{z}(3-y)\,dy= \quad 3z-\frac{z^2}{2}-\frac{7}{2}$$

Definición. Sea X una variable aleatoria con función de densidad f, se define la meadia o valor esperado de X, que se denota por μ_x o $E[X]$, como

$$\mu_x=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

La viarianza de una variable aleatoria continua X, que se denota por σ_x^2 o $Var[X]$, se define por:

$$\sigma_x^2 = E\Big[(X-\mu_x)^2\Big]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 f(x)\,dx$$

$$\sigma_x^2 = E[(X)^2]-\big(E[X]\big)^2$$

Observación. Si C es una constante, $Y = X + C$

entonces: $\sigma_Y^2=\sigma_X^2$; si $Y = CX \Rightarrow \quad \sigma_Y^2=C^2\sigma_X^2$

Ejemplo. Para $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2e^{-2x}, & x>0\end{cases}$

hallar la media y la varianza

$$\mu=\int xf(x)\,dx=\int_0^{\infty} x.2e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}; \quad \sigma^2=\int_0^{\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$$