

# **POLIMI GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT**

**Politecnico di Milano**

Graduate School of Management

---

## **Valutazione dei Prodotti Finanziari**

**Master Specialistico in Finanza Quantitativa**

---

### **Gruppo 1**

Barbagiovanni Lorenzo

Cavanna Federico Maria

Levato Antonio

Rossetti Andrea

## Esercizio 1 - Bianchetti/Terraneo

I primi due punti dell'esercizio richiedono il pricing di bond rispettivamente a tasso fisso e a tasso variabile su base EURIBOR 6M. I dati di riferimento saranno un nominale di 100EUR scelto per agevolare il calcolo percentuale e per allinearsi alle consuetudini di mercato, un tasso cedolare annualizzato  $R_n$ ,  $t$  il tempo di riferimento,  $T_n$  la maturity del bond inizializzata a 5 anni e 4 mesi ed infine l'issuer credit z-spread di 200 basis points. Inoltre, per garantire una maggiore accuratezza, è necessario fare una considerazione essenziale. Nel calcolo dei due bond, consideriamo che lo stacco della prima cedola venga corrisposto dopo 4 mesi anziché 6, poiché per convenzioni di pagamento delle cedole di un FiRB e FRB assumiamo un primo periodo più corto, succeduto da scadenze semestrali fisse a febbraio e ad agosto di ogni anno.

### 1.1 Punto A

La valutazione di un Fixed Rate Bond (FiRB) si effettua applicando la seguente formula ai dati forniti:

$$V(t, T_n) = NR_n A_{x,n}^I(t) + NP_x^I(t, T_n) \quad (1)$$

Dove si osserva che  $A_{x,n}^I(t)$  rappresenta un annuity defaultable dipendente dall'emittente, definita come segue:

$$A_{x,n}^I(t) = \sum_{i=i_o(t)}^n P_x^I(t, T_n) \tau_i \quad (2)$$

Tale quantità dipende da due variabili: la prima è  $P_x^I(t, T_n)$ , che rappresenta il Zero-Coupon Bond (ZC) rischioso dell'emittente, mentre la seconda è  $\tau_i$ , ovvero la frazione di anno corrispondente all'intervallo temporale di riferimento. È quindi necessario calcolare tale frazione temporale in relazione alla data di pagamento della cedola, in modo da estrarre i valori di ciascuna cedola semestrale mediante l'applicazione della seguente formula chiusa, valida per ogni  $i \in [1, \dots, n]$ :

$$C_i = R_i \tau_i \quad (3)$$

Successivamente, è fondamentale interpolare la curva EURIBOR a 6 mesi per estrapolarne i valori ai tempi di riferimento e determinare il tasso di sconto necessario per il calcolo del prezzo del bond. Questo processo viene effettuato tramite una funzione implementata in Visual Basic (InterpolValore), il cui codice è visualizzabile all'interno del file Excel. Una volta determinati tali valori, si procede alla valutazione del clean price del bond FiRB nei corrispondenti tempi di riferimento, calcolando il Net Present Value (NPV) come somma dei contributi  $NPV_i$  per ciascun periodo di pagamento della cedola. Il risultato ottenuto è pari a 106,2957€. Sommando al clean price la cedola semestrale ponderata per il tempo, si ottiene il dirty price del bond FiRB, pari a 107,3539€. La relazione tra clean price e dirty price è così espressa:

$$V_{dirty}(t, T_n) = V_A(t, T_{i_0(t)}, I) + V_{clean}(t, T_n, I) \quad (4)$$

Dove  $V_A(t, T_{i_0(t)}, I)$  rappresenta l'interesse maturato (accrued interest).

## 1.2 Punto B

Nel caso di un Floating Rate Bond (FRB), la funzione di determinazione del prezzo deve tenere conto della variabilità del tasso di interesse. La formula viene quindi modificata come segue:

$$\begin{aligned} V(t, T_n) = & NP_x^I(t, T_{i_0(t)}) \left[ L_y(T_{i_0(t)-1}, T_{i_0(t)}) + \Delta_n \right] \tau_{i_0(t)} \\ & + N \sum_{i=i_0(t)+1}^n P_x^I(t, T_i) [F_{y,i}(t) + \Delta_n] \tau_i \\ & + NP_x^I(t, T_n) \end{aligned} \quad (5)$$

Dove  $L_y(T_{i_0(t)-1}, T_{i_0(t)})$  rappresenta il *floating rate*, solitamente determinato come  $T_{i-1}^F$ . In alcuni casi, come in questo esercizio, la formula viene integrata da un coupon margin  $\Delta_n$  tale che per ogni  $i \in [1, \dots, n]$

$$C_i = \left[ L_y(T_{i_0(t)-1}, T_{i_0(t)}) + \Delta_n \right] \tau_i$$

Di conseguenza, la cedola incorpora sia il coupon margin sia il floating rate. Inoltre, il termine

$$[F_{y,i}(t) + \Delta_n] \tau_i$$

può essere approssimato al valore atteso sotto la misura  $\mathbb{Q}$ , ossia  $E_t^{\mathbb{Q}}[C_i]$ .

Ne consegue che il calcolo di  $\Delta_n$  risulta essenziale per la risoluzione numerica dell'esercizio. Si rientra, quindi, in una dinamica di tipo Cap & Floor, in cui il Floor è fissato a zero (dato che un bond con cedole negative non avrebbe senso). In particolare, se le cedole risultassero negative (con l'eccezione dell'ultima) sarebbe necessario aggiungere, per ciascuna di esse, il prezzo del floorlet corrispondente. Tale prezzo viene determinato a partire dalla volatilità interpolata tra il quinto e il sesto anno, utilizzando i dati tabulati e facendo riferimento a un modello di tipo Bachelier (si veda l'esercizio 2 per un'analisi più rigorosa di questa dinamica). L'effetto di tali floorlet è quello di impedire che la cedola assuma valori negativi. Tuttavia, nel caso specifico, una maggiorazione di 50 basis points (bps) risulta sufficiente per garantire cedole positive, determinando un clean price pari a 92,3435€ e un dirty price di 92,4025€.

## 1.3 Punto C

La terza sezione prevede l'impiego di un'ottimizzazione numerica finalizzata all'equivalenza dei prezzi tra i due bond considerati al punto A e B. Tale procedura viene implementata mediante la funzione di ricerca obiettivo disponibile in Excel, che consente di determinare iterativamente il valore ottimale di  $\Delta$  necessario per l'allineamento dei prezzi. Come evidenziato nel terzo foglio di calcolo del file di riferimento, un valore di  $\Delta = 325$  basis points (bps) rappresenta la soluzione che consente di soddisfare le condizioni richieste dall'esercizio.

## 1.4 Punto D

Le analisi condotte nelle sezioni A, B e C vengono replicate dopo aver interpolato la curva EUR OIS all'interno del foglio di calcolo dedicato. I risultati ottenuti sono sintetizzati come segue:

- Per il Fixed Rate Bond (FiRB), il clean price risulta pari a 107,2223€, mentre il dirty price è 108,2805€.
- Per il Floating Rate Bond (FRB), il clean price è pari a 92,3161€, mentre il dirty price ammonta a 92,3278€.
- Il valore di  $\Delta$  che consente di equilibrare i prezzi dei due strumenti è pari a 342 basis points (bps). Tale risultato è coerente, in quanto la differenza tra i rispettivi prezzi risulta sostanzialmente comparabile con quella osservata nel caso dell'EURIBOR 6M.

Si osserva, infine, che la divergenza nei tassi di interesse è imputabile alla differente natura dei due strumenti finanziari analizzati.

## Esercizio 2 - Marena

Il modello di Merton rappresenta un'estensione del modello di Black-Scholes, progettata per includere salti discontinui nel prezzo del sottostante. Questa aggiunta consente di modellare più realisticamente le dinamiche dei mercati finanziari, che spesso presentano variazioni improvvise non spiegabili dalla sola diffusione browniana.

Nel modello di Merton, il prezzo dell'attività sottostante  $S_t$  segue il seguente processo stocastico:

$$dS_t = S_t \left( (r - q)dt + \sigma dW_t + (e^J - 1)dN_t \right) \quad (6)$$

dove:

- $W_t$  è un moto browniano standard che rappresenta la componente di diffusione continua.
- $N_t$  è un processo di Poisson con intensità  $\xi_p$ , che descrive il numero medio di salti per unità di tempo.
- $J$  è una variabile aleatoria normalmente distribuita con media  $\mu_J$  e varianza  $\sigma_J^2$ , rappresentando la grandezza del salto nel log-prezzo.

L'introduzione del termine di salto permette di catturare eventi di mercato imprevedibili, come crisi economiche, annunci societari o shock geopolitici, migliorando la capacità predittiva del modello rispetto a Black-Scholes.

### 2.1 Interpretazione Economica

L'ipotesi alla base del modello di Merton è che il prezzo dell'attività sottostante possa subire variazioni improvvise dovute a eventi esogeni non modellabili con la sola volatilità continua.

Nei mercati reali, i rendimenti finanziari mostrano code pesanti rispetto alla distribuzione normale, suggerendo che eventi estremi come crash o rally di mercato si verificano più frequentemente rispetto alle previsioni del modello di Black-Scholes. Il modello di Merton incorpora questa caratteristica grazie alla sua struttura con componenti di salto.

Ad esempio, per un'azienda quotata in borsa, eventi come acquisizioni, crisi finanziarie o decisioni regolatorie possono generare variazioni improvvise nel prezzo delle sue azioni. Il modello di Merton cattura queste discontinuità, rendendolo particolarmente utile per la valutazione di opzioni su asset soggetti a forti fluttuazioni.

In tal senso, un elemento chiave del modello di Merton è la sua funzione caratteristica, utilizzata nel **metodo COS** per la valutazione delle opzioni. Sotto la

misura di rischio neutrale, la funzione caratteristica del log-prezzo  $X_T = \log(S_T)$  è data da:

$$\varphi_M(u) = \exp \left( iu \left( r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 T + \xi_p T \left( e^{iu\mu_J - \frac{1}{2}u^2\sigma_J^2} - 1 \right) \right) \quad (7)$$

dove il termine esponenziale combina tre componenti:

- La componente deterministica legata al drift  $(r - q - 0.5\sigma^2)T$ .
- La componente diffusiva di Black-Scholes  $-0.5\sigma^2 u^2 T$ .
- Il contributo dei salti, modellato dal termine  $\xi_p T \left( e^{iu\mu_J - \frac{1}{2}u^2\sigma_J^2} - 1 \right)$ .

Questa funzione caratteristica sarà il punto di partenza per la valutazione numerica delle opzioni europee con il metodo COS.

Dunque, nelle sezioni successive, esamineremo come il metodo COS utilizza questa funzione caratteristica per calcolare il prezzo delle opzioni europee e ne analizzeremo la convergenza con l'aumento del numero di termini dell'espansione in serie di coseni.

## 2.2 Il Metodo COS Per la Valutazione delle Opzioni

Il metodo COS è un algoritmo numerico altamente efficiente per la valutazione delle opzioni europee. Esso sfrutta la trasformata di **Fourier** e l'espansione in serie di coseni per calcolare rapidamente i prezzi delle opzioni, riducendo il numero di operazioni rispetto ai metodi di integrazione diretta.

Sotto la misura di rischio neutrale, il valore attuale di un'opzione europea con payoff  $g(X_T)$  è dato dalla seguente aspettativa:

$$V(S_0) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[g(X_T)], \quad (8)$$

dove  $X_T = \log(S_T)$  rappresenta il log-prezzo alla scadenza.

Il metodo COS ci permette di approssimare questa aspettativa mediante un'espansione in serie di coseni:

$$V(S_0) \approx e^{-rT} \sum_{k=0}^{N-1} H_k \varphi_X \left( \frac{k\pi}{b-a} \right), \quad (9)$$

con  $H_k$  che sono coefficienti che dipendono dal payoff dell'opzione, mentre  $\varphi_X(u)$  è la funzione caratteristica del log-prezzo.

Affinché il metodo COS garantisca un'ottima precisione, è fondamentale selezionare un intervallo di integrazione  $[a, b]$  appropriato. Questo intervallo viene determinato in base ai cumulanti della distribuzione del log-prezzo:

$$c_1 = (r - 0.5\sigma^2)T + \xi_p T \mu_J, \quad (10)$$

$$c_2 = (\sigma^2 + \xi_p(\sigma_J^2 + \mu_J^2))T, \quad (11)$$

$$c_4 = \xi_p T (3\sigma_J^4 + 6\mu_J^2 \sigma_J^2 + \mu_J^4). \quad (12)$$

L'intervallo ottimale viene scelto come:

$$a = c_1 - L\sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}}, \quad b = c_1 + L\sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}}, \quad (13)$$

dove  $L$  è un parametro empirico, solitamente compreso tra 8 e 10.  
Per opzioni europee, i coefficienti  $H_k$  della serie COS sono calcolati come:

$$H_k = \frac{2}{b-a} (\chi_k - \psi_k), \quad (14)$$

con  $\chi_k$  e  $\psi_k$  che indicano funzioni che dipendono dal payoff dell'opzione:

$$\chi_k = \frac{e^d \cos(k\pi \frac{d-a}{b-a}) - e^c \cos(k\pi \frac{c-a}{b-a})}{1 + (k\pi/(b-a))^2} \quad (15)$$

$$+ \frac{k\pi}{b-a} \frac{e^d \sin(k\pi \frac{d-a}{b-a}) - e^c \sin(k\pi \frac{c-a}{b-a})}{1 + (k\pi/(b-a))^2}, \quad (16)$$

$$\psi_k = \frac{\sin(k\pi \frac{d-a}{b-a}) - \sin(k\pi \frac{c-a}{b-a})}{k\pi/(b-a)}. \quad (17)$$

Dunque, questi coefficienti rappresentano la proiezione del payoff dell'opzione nella base di funzioni coseno, garantendo un'elevata precisione nella ricostruzione del prezzo dell'opzione.

### 2.2.1 Implementazione del Metodo COS

Il metodo COS viene implementato in Python seguendo i seguenti passi:

- a) Calcolo dei cumulanti  $c_1, c_2, c_4$  per determinare l'intervallo di integrazione  $[a, b]$ .
- b) Costruzione degli indici della serie  $k$  e dei coefficienti  $H_k$ .
- c) Valutazione della funzione caratteristica del log-prezzo nei punti opportuni.
- d) Somma della serie COS per ottenere il prezzo dell'opzione.

Questo metodo si distingue per la sua efficienza computazionale, poiché richiede solo una somma pesata della funzione caratteristica valutata in un insieme discreto di punti. In questo senso, rispetto ad altri metodi di pricing basati sulla trasformata di Fourier, come quello FFT, il metodo COS presenta una convergenza rapida e un minor costo computazionale.

### 2.2.2 Studio della Convergenza

Uno degli aspetti più importanti nella valutazione di metodi numerici è la loro convergenza, ovvero la capacità di avvicinarsi al valore corretto aumentando la precisione della discretizzazione. Nel caso del metodo COS, l'accuratezza dipende dal

numero di termini  $N$  utilizzati nella serie. In questa sezione analizziamo la velocità di convergenza e determiniamo il valore minimo di  $N$  per ottenere risultati stabili.

Come precedentemente affermato, il metodo COS permette di approssimare il valore dell'opzione mediante la somma un numero finito di termini  $N$  della serie di coseni. Dunque, all'aumentare di  $N$ , il valore calcolato dovrebbe stabilizzarsi e avvicinarsi al valore teorico corretto. L'obiettivo è studiare la sensibilità della soluzione rispetto a  $N$  e verificare per quale valore il metodo raggiunge la convergenza.

Per testare la convergenza, calcoliamo il prezzo di un'opzione put con diversi numeri di termini  $N$ . I parametri utilizzati sono:

- Prezzo iniziale:  $S_0 = 100$
- Strike:  $K = \{50, 100, 150\}$
- Tasso di interesse:  $r = 0.03$
- Tempo alla scadenza:  $T = 0.5$
- Parametri di Merton:  $\sigma = 0.2353, \xi_p = 0.2017, \mu_J = -0.2837, \sigma_J = 0.1867$
- Valori testati per  $N$ :  $\{8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$

I risultati ottenuti sono riportati nella seguente **Tabella 1**, dove mostriamo il prezzo dell'opzione per diversi valori di  $N$ :

Table 1: Risultati Analisi di convergenza del Metodo COS

N	K = 50	K = 100	K = 150
8	0.108700	0.268066	0.374107
16	-0.010499	0.162815	0.323006
32	-0.013302	0.101947	0.317604
64	0.002627	0.079887	0.332893
128	0.000763	0.076565	0.334406
256	0.000737	0.076526	0.334388
512	0.000737	0.076526	0.334388
1024	0.000737	0.076526	0.334388

Dal confronto dei valori ottenuti, è possibile notare che per  $N \geq 256$  il prezzo dell'opzione non cambia più in maniera significativa. Questo indica che il metodo COS è stabile e fornisce risultati affidabili già con un numero relativamente ridotto di termini della serie.

Inoltre, è interessante guardare la **Figura 1** per visualizzare meglio il comportamento del metodo al convergere di  $N$



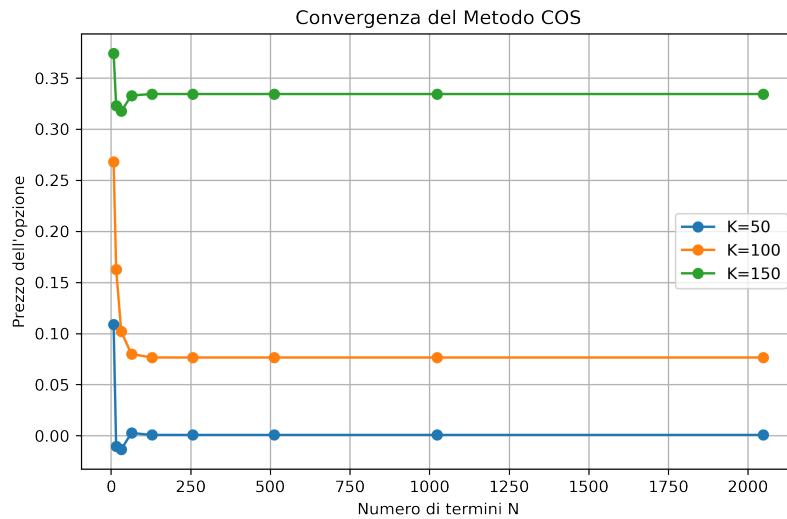


Figure 1: Analisi di Convergenza

Possiamo concludere andando a recapitolare brevemente i risultati numerici che si evincono dal grafico e dalla tabella soprariportati:

- Per  $N < 64$ , i prezzi delle opzioni sono instabili e presentano errori significativi.
- La convergenza è quasi raggiunta per  $N = 128$ , mentre diventa completa per  $N \geq 256$ .
- A partire da  $N = 512$ , i prezzi non cambiano più, indicando che il metodo ha raggiunto un'accuratezza ottimale.
- La scelta di un valore eccessivo di  $N$  non porta vantaggi significativi in termini di precisione, ma aumenta il costo computazionale.

Lo studio della convergenza ha dimostrato che il metodo COS è altamente efficiente e raggiunge stabilità con un numero ridotto di termini. L'analisi suggerisce che un valore ottimale di  $N$  sia compreso tra 128 e 256, permettendo di ottenere risultati accurati con un buon compromesso tra precisione e costo computazionale.

### Esercizio 3 - Marazzina

Questo esercizio si pone l'obiettivo di effettuare il pricing di un'opzione europea di tipo digitale, vale a dire un derivato finanziario il cui payoff alla scadenza è definito dalla seguente funzione indicatrice:

$$F(S(T)) = \mathbf{1}_{S(T) > K} = \begin{cases} 1, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases} \quad (18)$$

dove  $S_T$  rappresenta il prezzo del sottostante alla scadenza e  $K$  il prezzo di esercizio (strike price).

Tuttavia, prima di procedere con l'analisi dei risultati, è di fondamentale importanza delianre il quadro teorico nel quale stiamo operando. In tal proposito, si introduce il modello CEV (**Constant Elasticity of Variance**), il quale descrive l'evoluzione stocastica del prezzo del sottostante attraverso la seguente equazione differenziale:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)^\beta dW(t) \quad (19)$$

Questa equazione governa la dinamica del prezzo  $S(t)$ , evidenziando come la volatilità del processo dipenda direttamente dal livello del sottostante.

In particolare, per valori di  $S \geq 1$ , la componente stocastica è amplificata se  $\beta > 1$ , mentre risulta attenuata per  $\beta < 1$ . Chiaramente, si ha il caso contrario per i valori di  $S < 1$ , dove le relazioni si invertono, mostrando un comportamento del tutto speculare a quanto precedentemente osservato.

A partire da questa formulazione, è possibile costruire l'equazione alle derivate parziali (**PDE**) che descrive l'andamento del valore dell'opzione rispetto al tempo ed al sottostante  $V(t, S(t))$ . Il problema di Cauchy associato alla valutazione dell'opzione digitale si esprime come:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^{2\beta} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \\ V(T, S(T)) = \mathbf{1}_{S(T) > K} \end{cases} \quad (20)$$

L'obiettivo è dunque quello di trovare la soluzione della PDE che fornisce il valore equo dell'opzione digitale al tempo iniziale  $V(0)$ .

Poichè non è disponibile una soluzione analitica in forma chiusa per il modello CEV, si preferisce adottare una soluzione numerica basata sul metodo delle differenze finite di Crank-Nicholson. Questo schema, noto per la sua stabilità e accuratezza, permette una discretizzazione efficiente della PDE, rendendolo particolarmente adatto alla valutazione di strumenti derivati.

## 3.1 Discretizzazione del Dominio e Formulazione Numerica

### 3.1.1 Discretizzazione del Dominio

Poichè il prezzo del sottostante  $S$  è una variabile continua che, teoricamente, può assumere valori arbitrariamente grandi o tendere a zero, è fondamentale introdurre un troncamento del dominio per garantire stabilità numerica e su cui effettuare la discretizzazione della PDE associata al modello CEV.

Definiamo un intervallo  $[S_{min}, S_{max}]$  che rappresenta la regione in cui viene approssimata la soluzione numerica della PDE. Il valore inferiore del dominio  $S_{min}$  è stato scelto in modo da evitare valori negativi del sottostante, mentre il valore superiore  $S_{max}$  è stato selezionato sufficientemente grande, in maniera tale da includere con alta probabilità i valori futuri del sottostante. Rispettivamente:

$$S_{min} = S(0) \cdot 0.2 \quad S_{max} = S(0) \cdot 5.$$

Una volta definito il dominio, è necessario stabilire le condizioni al contorno.

$$\begin{cases} V(t, S_{min}) = 0 \\ V(T, S_{max}) = e^{-r(T-t)} P(S_{max} > K) \end{cases} \quad (21)$$

Le condizioni sono giustificate dal significato finanziario dell'opzione digitale stessa. Infatti per il valore inferiore  $S_{min}$  si assume che  $V(t, S_{min}) = 0$  poichè la probabilità che l'opzione venga esercitata quando il sottostante assume valori molto bassi è pressochè trascurabile.

Definiti i limiti del dominio, si procede con la sua discretizzazione per ottenere una griglia computazionale adatta alla risoluzione numerica della PDE.

Il dominio spaziale viene così suddiviso in  $N$  intervalli di ampiezza uniforme:

$$S_i = S_{min} + i\Delta S, \quad \text{con} \quad \Delta S = \frac{S_{max} - S_{min}}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Allo stesso modo, il dominio temporale  $[0, T]$  viene discretizzato in  $M$  passi temporali equidistanti:

$$t_j = j\Delta t, \quad \text{con} \quad \Delta t = \frac{T}{M}, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

### 3.1.2 Formulazione Numerica

Una volta definita la discretizzazione del dominio, si applica il metodo delle differenze finite di **Crank-Nicholson** per la risoluzione dell PDE.

La PDE di partenza è la seguente:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^{2\beta} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (22)$$

Per discretizzare questa equazione, si utilizza il  $\theta$  – **metodo**, che introduce un parametro  $\theta$  per regolare il peso della componente implicita ed esplicita nel metodo numerico.

### Derivazione $\theta$ -metodo

Le derivate parziali vengono discretizzate con le differenze finite:

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{j,i+1} - V_{j,i-1}}{2\Delta S}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{j,i+1} - 2V_{j,i} + V_{j,i-1}}{\Delta S^2}.$$

Si procede sostituendo queste espressioni nella PDE (5):

$$\begin{aligned} 0 = & \theta \left( \frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} + rS_i \frac{V_{j,i+1} - V_{j,i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} S_i^{2\beta} \frac{V_{j,i+1} - 2V_{j,i} + V_{j,i-1}}{\Delta S^2} - rV_{j,i} \right) \\ & + (1 - \theta) \left( \left( \frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} + rS_i \frac{V_{j-1,i+1} - V_{j-1,i-1}}{2\Delta S} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{\sigma^2}{2} S_i^{2\beta} \frac{V_{j-1,i+1} - 2V_{j-1,i} + V_{j-1,i-1}}{\Delta S^2} - rV_{j-1,i} \right) \right) \end{aligned}$$

È possibile osservare che:

$$0 = \theta \left( \frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} \right) + (1 - \theta) \left( \frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} \right) = \frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t}$$

e posto che:

$$\begin{aligned} J &= rS_i \frac{V_{j,i+1} - V_{j,i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} S_i^{2\beta} \frac{V_{j,i+1} - 2V_{j,i} + V_{j,i-1}}{\Delta S^2} - rV_{j,i}, \\ \tilde{J} &= rS_i \frac{V_{j-1,i+1} - V_{j-1,i-1}}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} S_i^{2\beta} \frac{V_{j-1,i+1} - 2V_{j-1,i} + V_{j-1,i-1}}{\Delta S^2} - rV_{j-1,i}. \end{aligned}$$

dove  $J$  e  $\tilde{J}$  rappresentano le espressioni discretizzate dei termini differenziali.

Dunque, concludiamo che:

$$\frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} + \theta J + (1 - \theta)\tilde{J} = 0$$

vale a dire:

$$(1 - \theta)\tilde{J} = - \left( \frac{V_{j,i} - V_{j-1,i}}{\Delta t} + \theta J \right).$$

Dopo aver discretizzato la PDE, la soluzione numerica del problema richiede la costruzione di un sistema lineare che rappresenti l'evoluzione della funzione  $V$  nel tempo.

In tal senso, definiamo le matrici ed i coefficienti che permettono di scrivere il problema nella seguente forma matriciale:

$$(1 - \theta) \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{j-1,i-1} \\ V_{j-1,i} \\ V_{j-1,i+1} \end{bmatrix} = -\theta \begin{bmatrix} D & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{j,i-1} \\ V_{j,i} \\ V_{j,i+1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

La seguente equazione esprime la relazione tra i valori della funzione incognita  $V$  ai passi temporali  $j$  e  $j - 1$ .

In questo contesto, i coefficienti  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  e  $F_i$  regolano il peso dei termini nella matrice tridiagonale. Essi derivano direttamente dalla formulazione alle differenze finite e sono definiti come segue:

$$A_i = (1 - \theta) \left( -r \frac{S_i}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right) \quad (24)$$

$$B_i = -\frac{1}{\Delta t} (1 - \theta) \left( -r + \sigma^2 \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right) \quad (25)$$

$$C_i = (1 - \theta) \left( r \frac{S_i}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right) \quad (26)$$

$$D_i = -\theta \left( -r \frac{S_i}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right) \quad (27)$$

$$E_i = -\frac{1}{\Delta t} + (-\theta) \left( -r + \sigma^2 \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right) \quad (28)$$

$$F_i = -\theta \left( r \frac{S_i}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{S_i^{2\beta}}{\Delta S^2} \right) \quad (29)$$

Per risolvere il sistema numerico si costruiscono le matrici  $L$  e  $R$  che rappresentano i coefficienti della soluzione al passo temporale  $j - 1$  e  $j$ .

Tali matrici assumono una struttura tridiagonale, caratterizzata dalla presenza di elementi non nulli sulla diagonale principale e sulle due diagonali adiacenti.

La matrice  $L$  è definita come:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Analogamente, la matrice  $R$  è definita come:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & E_1 & F_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & E_2 & F_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & D_{N-1} & E_{N-1} & F_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

É interessante notare come le prime e le ultime righe di entrambe le matrici siano costruite in modo tale da soddisfare le condizioni al bordo.

Una volta definite le matrici tridiagonali  $L$  e  $R$ , possiamo procedere con la risoluzione numerica del sistema.

La formulazione del problema viene completata con l'introduzione di un termine noto  $b_0$ , il quale gioca un ruolo essenziale nel trattamento delle condizioni al contorno. Questo è definito come:

$$b_0 = \begin{bmatrix} b(1) \\ 0 \\ \vdots \\ b(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{-rT} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Una volta definito il problema in forma matriciale, la valutazione del prezzo dell'opzione digitale per ogni valore del sottostante avviene attraverso la risoluzione iterativa del seguente sistema lineare:

$$L \begin{bmatrix} V_{j-1,0} \\ \vdots \\ V_{j-1,N} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} V_{j,0} \\ \vdots \\ V_{j,N} \end{bmatrix} + b_0 \quad (33)$$

Dal punto di vista numerico, il sistema viene risolto con il metodo della Backward Induction, partendo dalla scadenza  $T$  e risalendo fino all'istante iniziale  $t = 0$ .

Infine, per verificare la correttezza della soluzione ottenuta, è utile effettuare un confronto con il modello di **Balck and Scholes** nel caso in cui il parametro  $\beta$  sia uguale ad 1.

Infatti, in questa particolare configurazione, il modello CEV si riduce all'equazione classica di Black-Scholes e la valutazione dell'opzione digitale può essere ottenuta tramite la seguente formula chiusa:

$$V = e^{-rT} \cdot \phi(d_2) \quad (34)$$

dove  $\phi(d_2)$  è la probabilità cumulativa della distribuzione normale standard, e  $d_2$  è definito come:

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (35)$$

## 3.2 Risultati di Pricing e Analisi di Convergenza

### 3.2.1 Risultati di Pricing

L'obiettivo di questa sezione è analizzare il valore dell'opzione call digitale calcolato numericamente attraverso lo schema alle differenze finite di Crank-Nicholson.

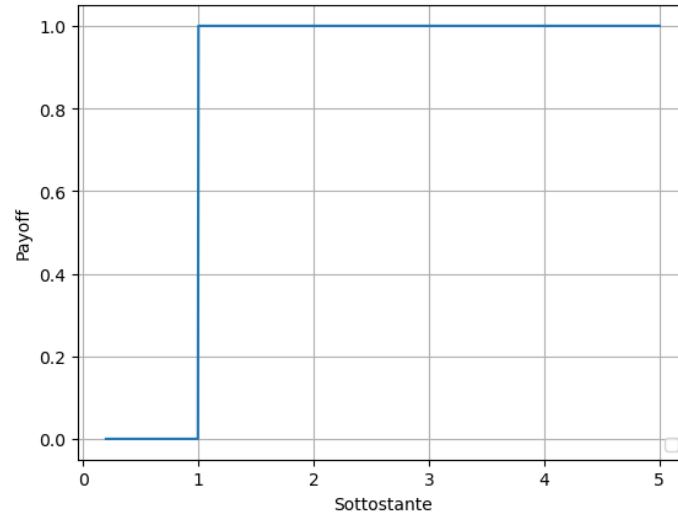


Figure 2: Payoff Opzione Call Digitale

Come rappresentato nella **Figura 1**, il payoff dell'opzione call digitale si comporta in modo discontinuo: assume il valore 1 quando il prezzo del sottostante alla scadenza  $S(T)$  supera lo strike  $K$ , mentre è 0 in caso contrario. Questa caratteristica riflette la natura binaria dell'opzione, rendendone il valore particolarmente sensibile alla probabilità che il sottostante superi la soglia prefissata.

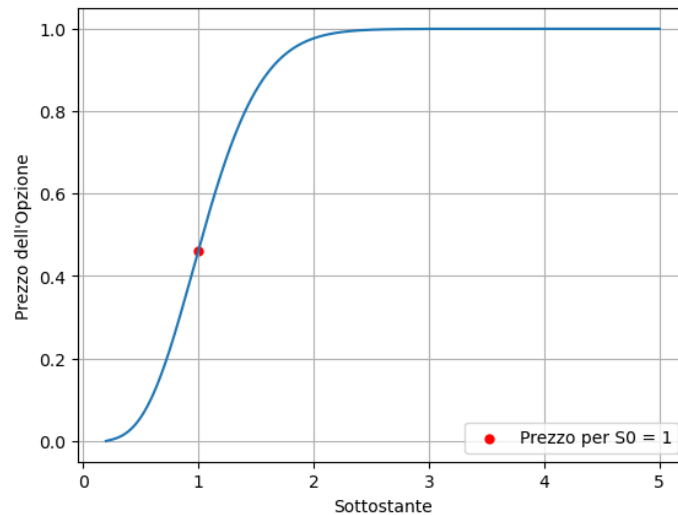


Figure 3: Prezzo dell'Opzione Rispetto al Sottostante

La **Figura 2** rappresenta invece l'andamento del prezzo dell'opzione digitale rispetto al valore del sottostante  $S$ .

L'analisi del grafico permette di individuare tre regioni distinte.

- Out-of-the-Money ( $S_0 \ll K$ ): il prezzo dell'opzione è vicino a zero, poiché la probabilità che il sottostante superi lo strike è molto bassa.
- Near-the-Money ( $S_0 \approx K$ ): il prezzo cresce rapidamente al variare di  $S$ , riflettendo un cambiamento significativo nella probabilità che l'opzione venga esercitata.
- In-the-Money ( $S_0 \gg K$ ): il prezzo dell'opzione tende progressivamente a 1, segnalando che il suo esercizio diventa altamente probabile.

Inoltre, è possibile osservare il valore specifico dell'opzione digitale calcolato numericamente rispetto ad un valore del sottostante  $S$  pari ad 1.

Dunque, per  $S(t) = 1$ , il valore dell'opzione call digitale è pari a:

$$V(0, S) = 0.4612179$$

Infine, per verificare la validità del metodo numerico, è stato effettuato un confronto con due riferimenti:

- I Modello di Black & Scholes: che rappresenta il caso particolare del CEV con  $\beta = 1$ .
- II Modello CEV con  $\beta = 1$ : per verificare che il metodo implementato restituisca una valore coerente con Black-Scholes in questa configurazione.

In questi termini il valore ottenuto con la formula analitica di Black & Scholes risulta:

$$V^{BS}(0, S) = 0.421296$$

Mentre il prezzo calcolato con il modello CEV per  $\beta = 1$  è rispettivamente:

$$V_{\beta=1}^{CEV}(0, S) = 0.422077$$

In tal senso, si guardi la **Tabella 1** per avere una rappresentazione più schematica dei risultati ottenuti utilizzando le diverse metodologie di calcolo.

Table 2: Prezzo dell'Opzione Call Digitale con Diversi Modelli

TIPO	BETA	PREZZO
Modello CEV	0.5	0.461217
Modello B&S	1	0.421296
Modello CEV	1	0.422077



### 3.2.2 Analisi di Convergenza

Per valutare la precisione e l'affidabilità della soluzione numerica ottenuta, è stata condotta un'analisi di convergenza.

Nello specifico, tale analisi consente di verificare se l'errore numerico decresce all'aumentare della discretizzazione spaziale e temporale, confermando così la coerenza e la stabilità del metodo utilizzato.

In tal senso, l'approccio seguito prevede il confronto tra la soluzione numerica ottenuta su griglie computazionali di risoluzione crescente e una soluzione di riferimento calcolata su una griglia estremamente fine ( $N^{ref} = 2000, M^{ref} = 3000$ ). Per valutare il comportamento dell'errore, sono stati considerati due indicatori fondamentali:

- Errore  $L^2$ : definito come la norma quadratica della differenza tra la soluzione numerica e quella di riferimento.

$$EL^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N (V_i^{num} - V_i^{ref})^2} \quad (36)$$

- Errore  $L^\infty$ : il quale misura l'errore massimo tra la soluzione numerica e quella di riferimento.

$$EL^\infty = \max_i |V_i^{num} - V_i^{ref}| \quad (37)$$

I valori numerici dell'errore per diverse dimensioni della griglia sono riportati nella **Tabella 2**. È possibile osservare come, al crescere del numero di punti N ed M, entrambi gli errori ( $L^2$  e  $L^\infty$ ), diminuiscano progressivamente, confermando la convergenza della soluzione numerica verso il rispettivo valore di riferimento.

Table 3: Errori  $L^2$  e  $L^\infty$  per Diverse Griglie (M x N)

(M, N)	$L^2$ Error	$L^\infty$ Error
(100, 50)	0.006999	0.000569
(500, 250)	0.000280	0.000023
(1000, 500)	0.000070	0.000006
(1500, 750)	0.000031	0.000003
(2000, 1000)	0.000017	0.000001

La **Figura 3** fornisce una rappresentazione visiva di quanto riportato nella precedente tabella. In particolare, utilizzando una scala logaritmica per entrambi gli assi, sono riportate le due tipologie di errore:  $L^2$ , (indicato con i punti blu) e l'errore  $L^\infty$  (indicato con quadrati arancioni). Entrambi i valori mostrano una chiara tendenza alla riduzione con l'aumento di  $N$ , coerentemente con quanto affermato in precedenza.

Inoltre, un aspetto interessante del grafico è la posizione della curva dell'errore  $L^\infty$ , sistematicamente più in basso rispetto a quella di  $L^2$ . Questo comportamento è una diretta conseguenza delle diverse modalità di calcolo dei due errori. Mentre  $L^2$  rappresenta una misura globale della discrepanza tra la soluzione numerica e quella di riferimento,  $L^\infty$  misura unicamente il massimo errore in un singolo punto; risultando generalmente inferiore poichè meno influenzato dalla distribuzione complessiva degli errori.

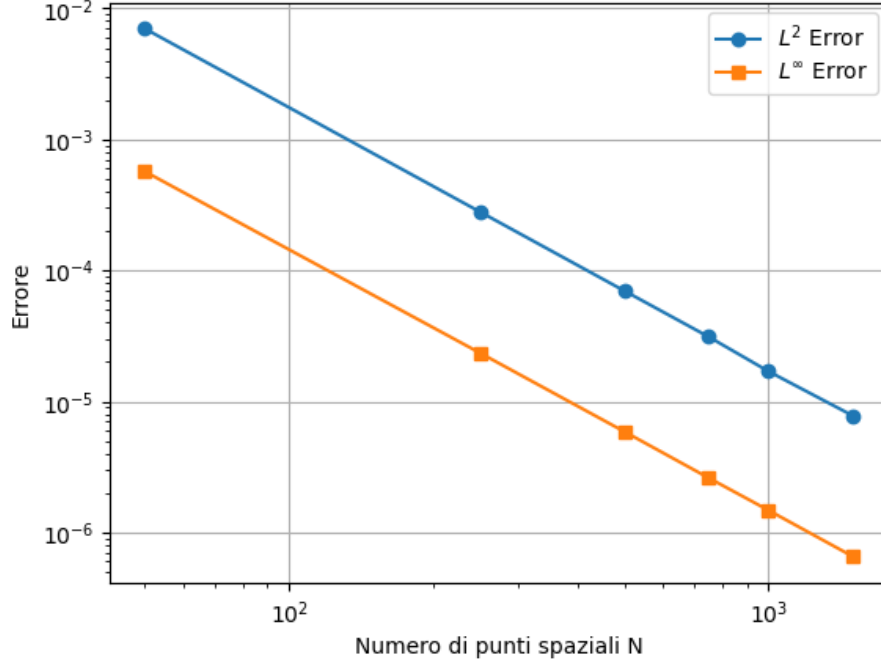


Figure 4: Convergenza dell'Errore Rispetto alla Dimensione della Griglia

Per valutare con maggiore precisione la velocità con cui la soluzione numerica converge alla soluzione di riferimento, è utile stimare l'ordine di convergenza del metodo.

L'ordine di convergenza rappresenta un indicatore fondamentale nell'analisi numerica, in quanto quantifica il tasso di riduzione dell'errore al variare della discretizzazione spaziale. Per metodi a differenze finite, ci si attende un valore teorico di  $p = 2$ , indicando che l'errore numerico diminuisce proporzionalmente a  $\Delta S^2$ . Per verificare empiricamente tale proprietà, è stata condotta un'analisi basata sul confronto dell'errore tra griglie successive, utilizzando la seguente relazione:

$$p = \frac{\log \left( \frac{\text{Errore a } \Delta S_1}{\text{Errore a } \Delta S_2} \right)}{\log \left( \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} \right)} \quad (38)$$

dove  $\Delta S_1$  e  $\Delta S_2$  sono i passi spaziali di due griglie consecutive, e l'errore è misurato sia in norma  $L^2$  che in norma  $L^\infty$ .

Come è possibile osservare dalla **Tabella 3**, dai risultati numerici emerge che l'ordine di convergenza stimato è generalmente vicino al valore teorico atteso di  $p = 2$ , indicando che il metodo mantiene la sua accuratezza per diverse risoluzioni della griglia.

Table 4: Ordine di Convergenza per Diversi Intervalli di N

$\Delta N$	$p L^2$	$p L^\infty$
50 – 250	2.000	1.981
250 – 500	2.003	1.995
500 – 750	1.995	2.009
750 – 1000	2.112	1.980
1000 – 1500	1.925	2.005

Tuttavia, l'osservazione numerica dei valori non è sempre immediata, rendendo utile un'analisi grafica dell'andamento della convergenza. Per questa ragione, nella **Figura 4** viene riportata la rappresentazione grafica dell'ordine di convergenza stimato per ogni coppia di griglie successive.

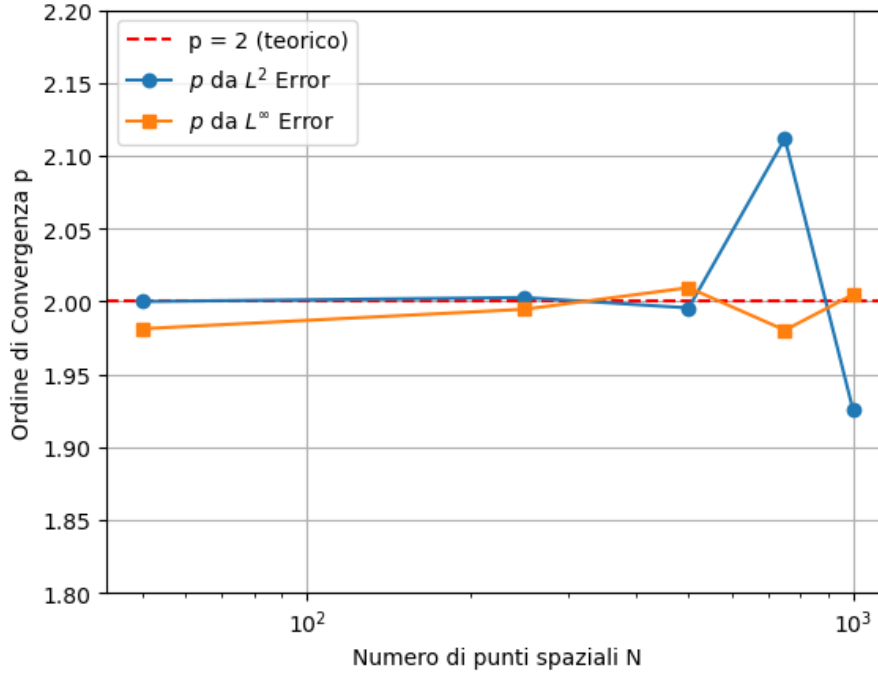


Figure 5: Plot Ordine di Convergenza Stimato

Un'osservazione chiave riguarda il comportamento delle due curve: mentre l'errore  $L^\infty$  segue una traiettoria più stabile e vicina al valore teorico atteso, l'errore  $L^2$  presenta oscillazioni più marcate. Nonostante queste fluttuazioni, entrambi gli indicatori di errore confermano complessivamente la validità del metodo numerico, con un ordine di convergenza che si mantiene in prossimità del valore teorico atteso.