Numeričko rješavanje PDJ

Zimski semestar

20.2.2017.

Antonio Tolić

Zadatak

1. Implementirati upwind metodu za jednadžbu transporta-reakcije u jednoj prostornoj dimenziji:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + q\frac{\partial u}{\partial x} + au \ = 0 \ , \ \ x \in \Omega = (0, L), \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, L), \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega^{in}. \tag{2}$$

$\partial\Omega^{in}$ je ulazna granica, q je zadana brzina i a ≥ 0 predstavlja konstantan koeficijent reakcije. Shema mora raditi za q proizvoljnog predznaka.

2. Numerički implementirati egzaktno rješenje zadaće (1), (2) te u svakom trenutku iscrtavati egzaktno i numeričko rješenje.

3. Testirati kod na odabranim početnim uvjetima te parametrima q i a.

4. Napisati izvještaj o rezultatima simulacija koristeći LaTeX .

   Izvještaj treba sadržavati:
   a) Opis problema.
   b) Opis diskretizacije zadaće.
   c) Opis numeričke metode za nalaženje egzaktnog riješenja.
   d) Ilustraciju simulacija (prikaz numeričkog i egzaktnog rješenja u nekim trenutcima).
   e) Zaključak.

Rješenje

Promatramo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda s dvije nezavisne varijable :

$$q(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)u \ = f(x,t) \tag{3}$$

gdje su $q(x,t), b(x,t), a(x,t)$ i $f(x,t)$ neprekidne funkcije na nekom području.

Konkretizirano, numerički rješavamo jednadžbu (3) pri čemu je zadan homogen slučaj, te varijabilnost funkcijskih vrijednosti je zamijenjena konstantama po potrebi zadatka. Dakle jednadžba je zadana u (1).
Precizirajući terminologiju, rješavamo problem jednadžbe transporta - reakcije u jednoj dimenziji gdje koeficijent q proizvoljnog predznaka predstavlja brzinu, dok konstanta $a \geq 0$ predstavlja reaktivni koeficijent. Uz jednadžbu su zadani dodatni uvjeti, te konkretnost domene a posebno i uvjetno jedan od njenih rubova. Stoga, kompletirajući prethodno, problem je postavljen u (1) i (2). Oznaka $\partial\Omega^{in}$ predstavlja ulaz u domenu koji ovisi o predznaku zadane brzine. Preciznije, točka $x = 0$ je ulazna granica domene u trenutku t ako je $q > 0$, dok točka $x = L$ predstavlja ulaznu granicu u trenutku t ako je $q < 0$.
Napomena : nije nužno da lijevi rub domene bude u točki $x = 0$! Programski dio zadatka radi i u slučaju da je lijevi rub $\neq 0$.

Cilj numeričkog rješavanja našeg problema, a i općenito, je pokušati aproksimacijama konačnog niza točaka približiti se egzaktnom rješenju. Numerička metoda korištena za diskretizaciju zadane jednadžbe poznata je kao upwind metoda. Metodu možemo koristiti eksplicitno i implicitno. U ovom radu biti će implementirana eksplicitna upwind metoda.
Za početak aproksimaciju prvog reda u vremenu i prostoru, jednostavno zapišimo kao :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) \approx \frac{u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x} \quad . \tag{5}$$

Uvodimo oznaku u_i^n koja predstavlja aproksimaciju rješenja u prostornoj točki x_i i vremenu t_n. Uvrštavanjem prethodnog u jednadžbu (1) dobivamo

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + q\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + au_i^n = 0 \tag{6}$$

odnosno njen eksplicitni oblik

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{q\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) - a\Delta t u_i^n \ . \tag{7}$$

Jednadžba je zadovoljena u svakoj točki domene $x_i \in (0, L)$ uključujući i rubne. Na ulaznoj granici vrijednost u_i^{n+1} je poznata, odnosno zadana je rubnim uvjetom. Primjetimo da se u pozadini odvijanja procesa opisanog jednadžbom implicitno podrazumijevalo da je brzina pozitivna što bi značilo da je smjer kretanja informacije s lijeva na desno. U slučaju negativne brzine, procedura je analogna uz korekcije. Uz male modifikacije prethodnoga, metoda se može zapisati kao

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + q\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + au_i^n = 0 \tag{8}$$

odnosno njen eksplicitni oblik

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{q\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) - a\Delta t u_i^n \ . \tag{9}$$

Definirajući

$$\begin{aligned} u^- &= \frac{(u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta x}, \qquad & q^+ &= max(q, 0) \\ u^+ &= \frac{(u_{i+1}^n - u_i^n)}{\Delta x}, \qquad & q^- &= min(q, 0) \end{aligned} \tag{10}$$

kombinacijom prethodnih rezultata upwind metodu možemo zapisati i u kompaktnoj formi, odnosno

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t(q^+u^- + q^-u^+) - \Delta t a u_i^n \ . \tag{11}$$

Testiranja pokazuju da iako ne direktno prostorni korak i vremenski korak moraju biti u relaciji. Povećavanjem vremenskog koraka pri čemu prostorni

ostane fiksiran, ili obratno, rezultati mogu pokazivati drastična odstupanja, drugim riječima rečeno metoda može postati nestabilna. Prirodno se postavlja pitanje do koje mjere smijemo vršiti korekcije prostornog i vremenskog koraka da bi metoda ostala u granicama stabilnost?
Odgovor proizlazi iz $Courant - Friedrichs - Lewy$ uvjeta (CFL). Dakle, upwind shema je stabilna ukoliko je CFL zadovoljen ili $|q|\Delta t \leq \Delta x$ odnosno $|q|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Slijedi grafički prikaz nekih rezultata...

Numeričko rješavanje

Numerički rješavam dvije zadaće sa pretpostavkama da je vrijeme odvijanja simulacija $T = 1$ i domena $(0, 10.0)$ koju ćemo diskretizirati s $N = 10$, $N = 50$ i $N = 150$ dužina, pri čemu će vremenski korak iznositi $\Delta t = 0.01$. Prethodne vrijednosti se mogu korigirati.

Grafički prikazujem egzaktno rješenje, aproksimirano rješenje i njihovu razliku. Točkovna razlika egzaktnog i aproksimiranog rješenja, očekivano mora biti što bliže nuli, štoviše uvjetnim profinjavanjem mreže teži k nuli. Dakle, graf razlike rješenja mora biti, i intuitivno gledano, sličan grafu konstantne funkcije vrijednosti ≈ 0.

Nadalje, primjeri će prikazivati grafove u dva vremenska trenutka. U svakom od ta dva vremenska trenutka uočavaju se promijene povećanjem broja N, što je i za očekivati! Uz navedeno biti će prikazane vrijednosti CFL uvjeta te greške u L^2 normi. Prikazati ću kratak rezultat o grešci istih zadaća, no suprotnog predznaka brzine. Zatim ću prikazati primjer varijacije reaktivnog koeficijenta te primjer što se događa ukoliko CFL uvjet nije zadovoljen, odnosno kako to grafički izgleda povećavajući brzinu a zatim smanjivajući prostorni korak.

Zaključak, stabilizacija metode ovisi o CFL uvjetu, posljedično profinjavanje mreže je ograničeno, dakle kao što je prije navedeno, profinjavanjem vremenskog koraka ili prostornog koraka greška aproksimacije teži k nuli, no ujedno CFL uvjet kontrolira raspon profinjavanja.

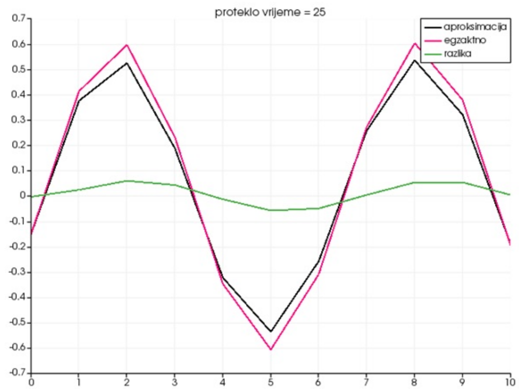
Primjer 1.

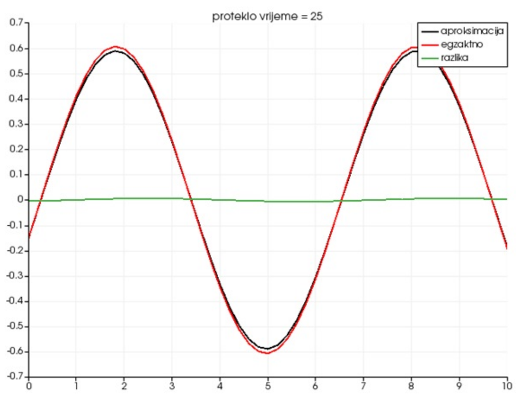
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \ = 0$$
$$u(x,0) = sin(x)$$

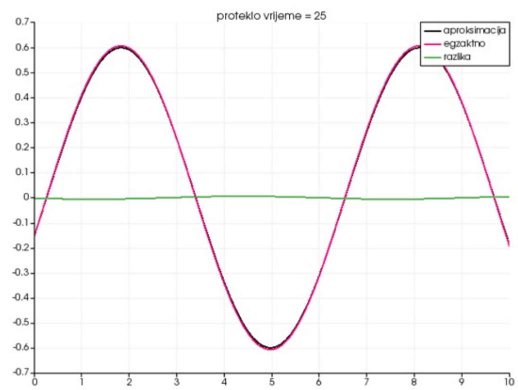
egzaktno rješenje glasi:

$$u(x,t) = sin(x-t)e^{-2t} \ .$$

Slika 1: $N = 10$





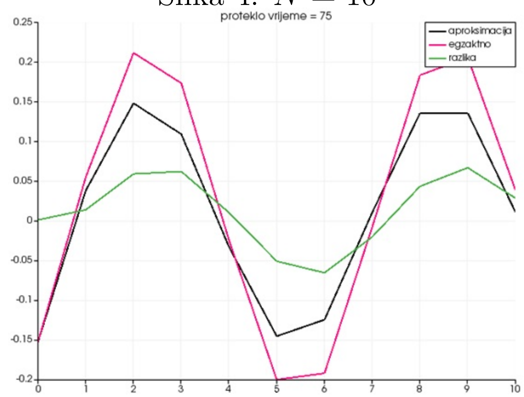


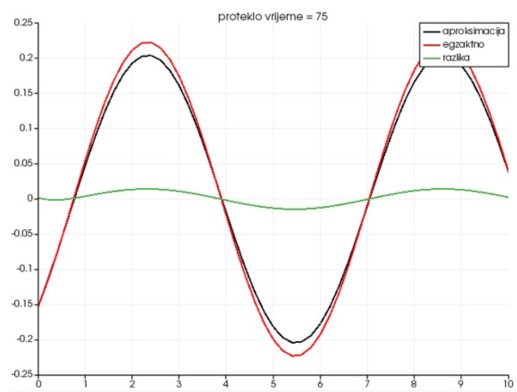
Slika 2: $N = 50$

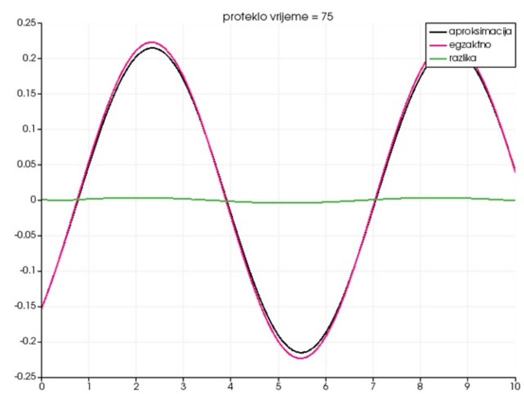
Slika 3: $N = 150$

Grafovi prikazuju rezultat nakon 25 vremenskih trenutaka. Jasno se očituje bolja aproksimacija egzaktnog rješenja u slučaju većeg N.

Slika 4: $N = 10$







Slika 5: $N = 50$

Slika 6: $N = 150$

Grafovi prikazuju rezultat nakon 75 vremenskih trenutaka. Također je jasno očitovanje bolje aproksimacije egzaktnog rješenja u slučaju većeg N.

Generalizirajući situaciju, greška u L^2 normi za pojedini N iznosi:

```
0.01 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.137445 !
```

```
0.05 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.0276576 !
```

```
0.15 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.0167066 !
```

Slika 7: CFL *and* L^2 *norm*

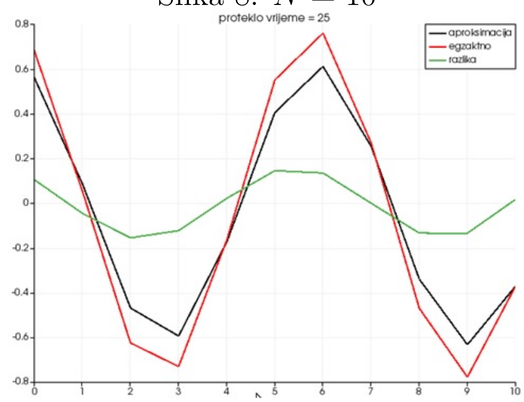
Primjer 2.

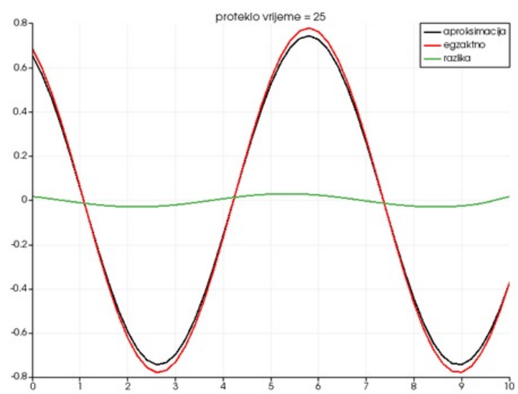
$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + u \ = 0$$
$$u(x,0) = cos(x)$$

egzaktno rješenje glasi:

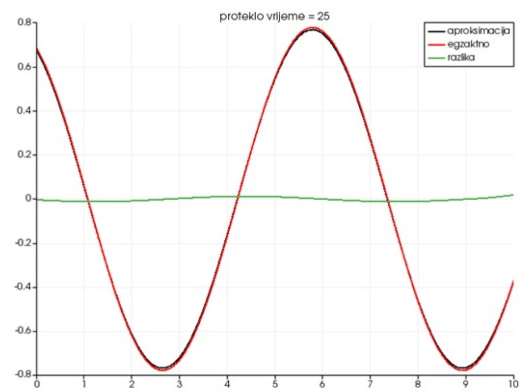
$$u(x,t) = cos(x+2t)e^{-t} \ .$$

Slika 8: $N = 10$





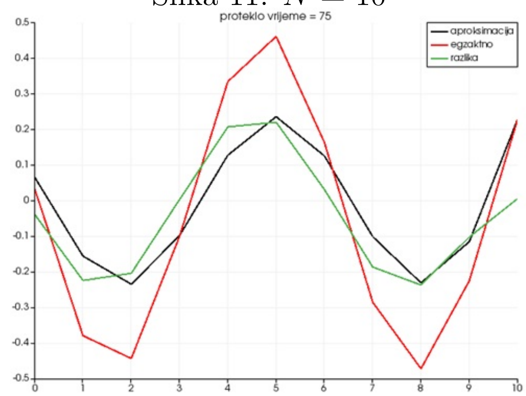
Slika 9: $N = 50$

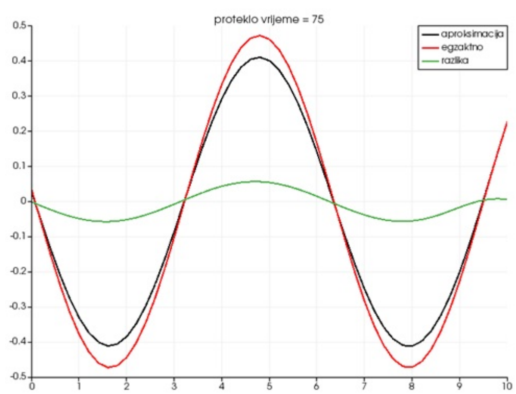


Slika 10: $N = 150$

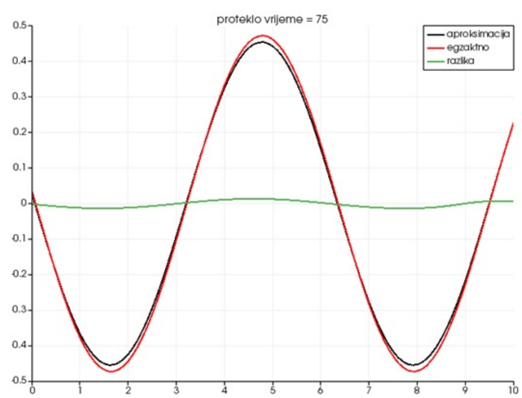
Grafovi prikazuju rezultat nakon 25 vremenskih trenutaka. Jasno se očituje bolja aproksimacija egzaktnog rješenja u slučaju većeg N.

Slika 11: $N = 10$





Slika 12: $N = 50$



Slika 13: $N = 150$

Grafovi prikazuju rezultat nakon 75 vremenskih trenutaka. Također je jasno očitovanje bolje aproksimacije egzaktnog rješenja u slučaju većeg N.

Generalizirajući situaciju, greška u L^2 normi za pojedini N iznosi:

```
0.02 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.449228 !
0.1 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.0988177 !
0.3 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.0307668 !
```

Slika 14: CFL *and* L^2 *norm*

Primjer 3.

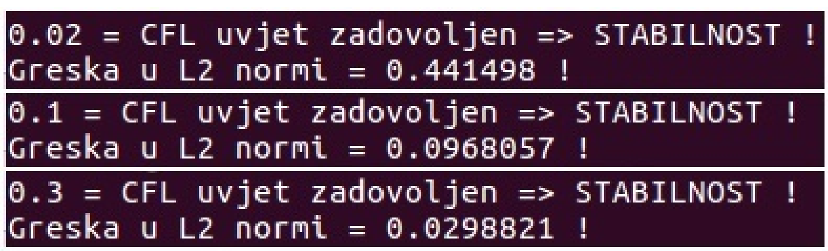
Zadana je zadaća kao u primjeru 2 uz pozitivan predznak brzine:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + u \ = 0$$
$$u(x,0) = cos(x)$$

egzaktno rješenje glasi:

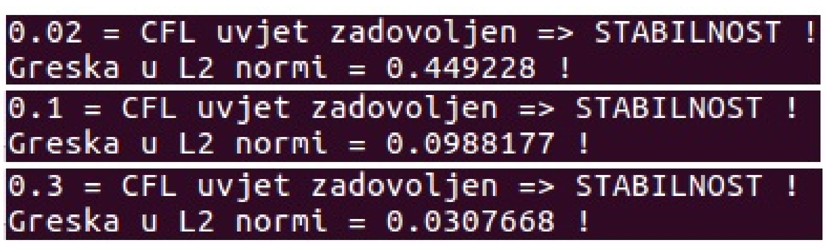
$$u(x,t) = cos(x-2t)e^{-t} \ .$$

Usporedba rezultata za $N = 10$, $N = 50$ i $N = 150$.



```
0.02 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.441498 !
0.1 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.0968057 !
0.3 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.0298821 !
```

Slika 15: *Primjer* 3.



```
0.02 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.449228 !
0.1 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.0988177 !
0.3 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.0307668 !
```

Slika 16: *Primjer* 2.

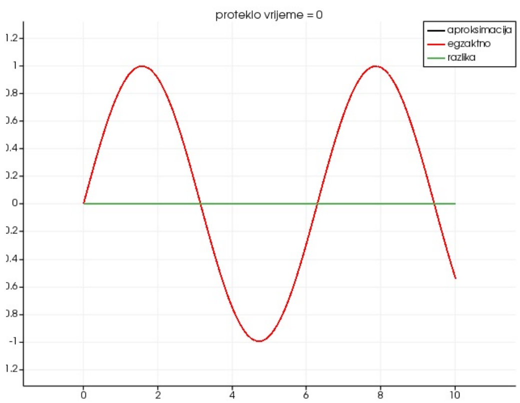
Primjer 4.

Zadana je zadaća kao u primjeru 1 uz koeficijente reakcije u iznosu 0.01 i 10, $N = 50$:

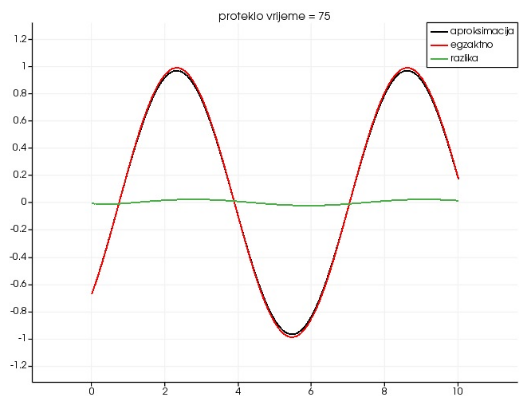
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + au \ = 0$$
$$u(x,0) = sin(x)$$

egzaktno rješenje glasi:

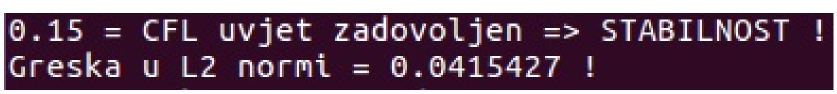
$$u(x,t) = sin(x-t)e^{-at} \ .$$



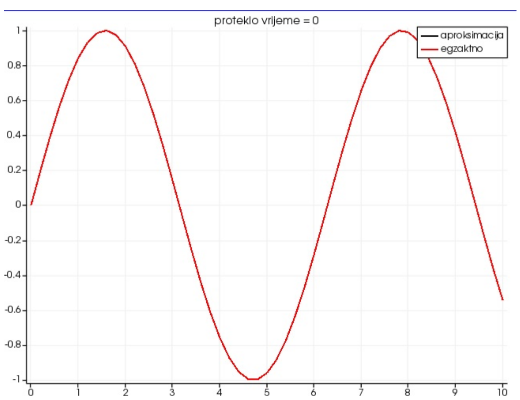
Slika 17: $a = 0.01$, $trenutak = 0$



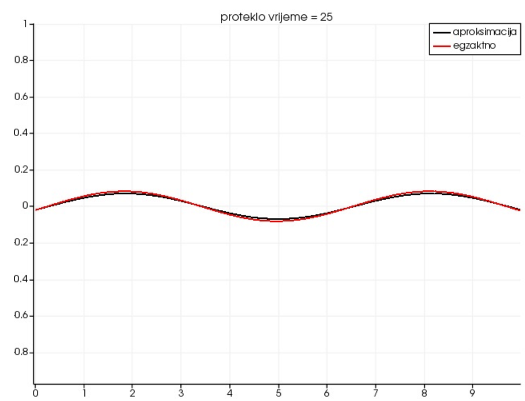
Slika 18: $a = 0.01$, $trenutak = 75$



Slika 19: $a = 0.01$



Slika 20: $a = 10$, $trenutak = 0$



Slika 21: $a = 10$, $trenutak = 25$

```
0.05 = CFL uvjet zadovoljen => STABILNOST !
Greska u L2 normi = 0.0381542 !
```

Slika 22: $a = 10$

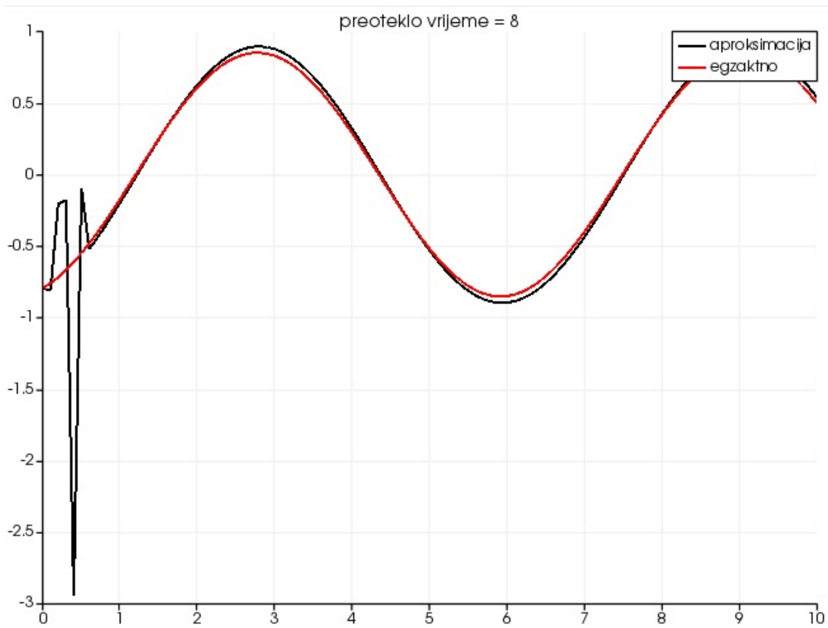
Primjer 5.

Za kraj, također promatramo zadaću iz primjera 1. Pokazujem primjer nestabilnosti metode. Uzimam primjer prevelike brzine kretanja informacije, a zatim primjer premaloga prostornog koraka. Primijenom prethodnih faktora grafički prikaz oscilacija grafa je očit. Nestabilnost može proizaći i iz neregularnosti vremenskog koraka, naravno u ovisnosti o ostalim parametrima. Napomena, programski dio zadatka je podešen tako da korigira eventualnu nestabilnost, stoga daljni rezultati su iznimka!

$$\frac{\partial u}{\partial t} + q\frac{\partial u}{\partial x} + 2u \ = 0$$
$$u(x,0) = sin(x)$$

egzaktno rješenje glasi:

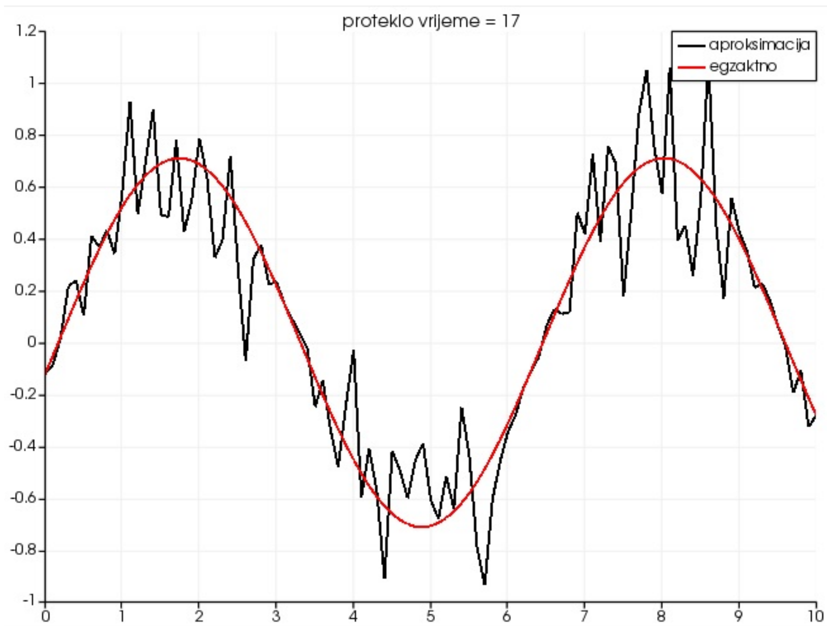
$$u(x,t) = sin(x - qt)e^{-2t} \ .$$



Slika 23: $N = 150$

```
CFL = 2.25 => CFL uvjet nije zadovoljen => NESTABILNOST !
q = 15
```

Slika 24: $q = 15$



Slika 25: $N = 5000$

```
CFL = 5 => CFL uvjet nije zadovoljen => NESTABILNOST !
dx = 0.002
```

Slika 26: dx=0.002