Numeričko rješavanje PDJ 2

Ljetni semestar

Srpanj

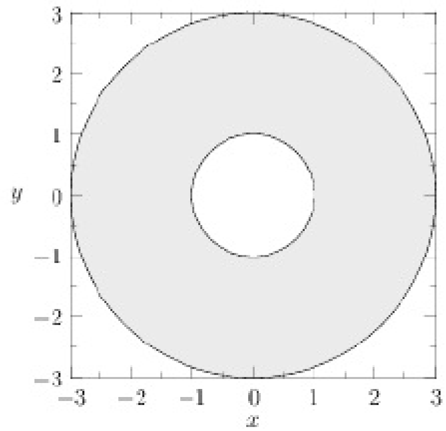
Antonio Tolić

Zadatak ES-5

1. Treba riješiti zadaću provođenja topline

$$\text{-div}(k(x)\nabla T) = 0 \quad u \quad \Omega$$

   u domeni na slici:



   Koeficijent $k(x)$ prima četiri različite vrijednosti u četiri kvadranta:

$$k(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{u 1. kvadrant} \\ 1 & \text{u 2. kvadrantu} \\ 0.01 & \text{u 3. kvadrantu} \\ 10 & \text{u 4. kvadrantu} \end{cases}$$

   Na unutarnjem krugu zadana je temperatura -70 C, a na vanjskom 120 C. Naći razdiobu temperature. Zadaću treba riješiti metodom konačnih elemenata, sa P1 i P2 elementima.

2. Verificirati kod na artificijelnom rješenju u slučaju konstantnog koefcijenta k.

3. Napisati izvještaj o rezultatima simulacija u pdf formatu koristeči LaTeX.

Izvještaj treba sadržavati:

1. Opis problema.
2. Opis diskretizacije zadaće.
3. Diskusiju rezultata testova. Kako diskontinuiteti koeficijenta k utječu na rješenje.
4. Grafičku ilustraciju rješenja.

Opis problema

Pretpostavimo da je $T(x, y, t)$ temperatura homogenog toplinski vodljivog tijela koji **nema** izvor topline. Tada temperatura zadovoljava jednadžbu provođenja topline

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T \tag{1}$$

gdje veličina t predstavlja vremensku varijablu, veličine x i y predstavljaju prostorne varijable, a u ovom slučaju koeficijent toplinske vodljivosti materijala k je konstantan, dakle vrijedi

$$\mathrm{div}(k\nabla T) = k\mathrm{div}(\nabla T) = k\nabla^2 T.$$

Jednadžbu (1) nazivamo i difuzijska jednadžba jer opisuje difuzijske procese u tvarima. U zadatku koji riješavamo zadano je stacionarno vođenje topline, što znači da je unutarnja energija tijela konstantna, odnosno nema promijene temperature s vremenom, pa je

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$

te je eventualno koeficijent k varijabilan. Problem vođenja topline možemo riješiti uz poznavanje odgovarajućih graničnih uvjeta. Budući da je područje s kojim ćemo raditi ograničeno koncentričnim kružnicama, na svakoj od njih biti će poznata temperatura.

Numerički rješavamo zadani problem!

Diskretizacija jednadžbe

Da bi uspješno numerički riješili jednadžbu provođenja topline započetak moramo obaviti diskretizaciju problema. Dakle, uvodna faza je izvođenje varijacijske formulacije problema

$$
\begin{aligned}
\text{-div}(k(x)\nabla T) = 0 \quad \text{u} \quad \Omega \\
\text{T} = -70 \quad \text{na} \quad \partial\Omega_1 = \{(x,y)|x^2+y^2=1\} \\
\text{T} = 120 \quad \text{na} \quad \partial\Omega_2 = \{(x,y)|x^2+y^2=9\}
\end{aligned}
$$

Pri čemu je $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$.

Dakle, klasično rješenje navedenog problema je funkcija

$$T \in C^2(\Omega) \cup C(\overline{\Omega}).$$

Izvod varijacijske formulacije u našem slučaju ne ovisi o nehomogenosti Dirichletovog rubnog uvjeta jer test funkciju koju uzimamo jednaka je nuli na rubu. Jednadžbu -div$(k(x)\nabla T) = 0$ množimo s test funkcijom $v \in C_0^\infty(\Omega)$ i integriramo po domeni Ω. Situacija je sljedeća:

$$-\int_\Omega \text{div}(k\nabla T)vdx = 0.$$

Iz generalnog identiteta $\text{div}(uv) = \nabla u \nabla v + v\text{div}(u)$ dobivamo

$$-\int_\Omega \text{div}(k\nabla T)vdx = -\int_\Omega \text{div}(k\nabla Tv) + \int_\Omega k\nabla T\nabla v.$$

Iz teorema o divergenciji ili njemu ekvivalentnog u dvije dimenzije, Greenovog teorema vrijedi relacija

$$\int_\Omega \text{div}(k\nabla Tv) = \int_{\partial\Omega} (k\nabla Tv) \cdot ndS$$

gdje je n jedinična normala na $\partial\Omega$. Budući da je vrijednost test funkcije v na rubu jednaka nula, integral po $\partial\Omega$ se poništava, pa na kraju dobivamo

$$-\int_\Omega \text{div}(k\nabla T)vdx = \int_\Omega k\nabla T\nabla v.$$

Nadalje, prostor $C_0^\infty(\Omega)$ je gust u $H_0^1(\Omega)$, pa test funkcije možemo birati tako da je $v \in H_0^1(\Omega)$. Zaključno, varijacijska formulacija sada izgleda

$$\text{Naći } T \in H^1(\Omega), \mathrm{T} = -70 \; u \; \partial\Omega_1, \; \mathrm{T} = 120 \; u \; \partial\Omega_2 \text{ t.d. je}$$

$$\int_\Omega k \nabla T \nabla v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Konkretno, dio koda koji integrira ”prethodno” vidimo na slici 1.

Slika 1.

```
RF f =0.0;
// integriramo :  k * grad u * grad phi_i
RF factor = it->weight()*eg.geometry().integrationElement(it->position());

for (size_type i=0; i<lfsu.size(); ++i)
  r.accumulate(lfsu, i, (k1(x_1)*(gradu*gradphi[i]) - f*phi[i]) * factor);
```

U principu za desnu stranu naše jednadžbe uzimamo funkciju $f = 0$. Ukoliko je funkcija $f \neq 0$ (neprekidna) varijacijska formulacija bi izgledala

$$\text{Naći } T \in H^1(\Omega), \mathrm{T} = -70 \; u \; \partial\Omega_1, \; \mathrm{T} = 120 \; u \; \partial\Omega_2 \text{ t.d. je}$$

$$\int_\Omega k \nabla T \nabla v = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Verifikacija koda

Korektnost programa testiramo na artificijelnom rješenju. Odabrati ćemo dvije funkcije $T(x, y)$, a zatim ćemo navedene funkcije uvrstiti u -div$(k\nabla T)$. Primjeri funkcija pomoću kojih testiramo točnost su

$$T(x, y) = x^2 - y^2$$

$$T(x, y) = x^3 - y^3.$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\text{-div}(k\nabla T) &= \text{-div}(k\nabla(x^2 - y^2)) \\
&= \text{-div}(k(2x, -2x)) \\
&= -k(2 - 2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dakle, desna strana jednadžbe iznosi 0, odnosno $f = 0$. Sada tu funkciju uvrstimo u dio koda kao gore na slici 1, pri čemu za rubni uvijet uzimamo točno rješenje. U ovom slučaju možemo mjeriti razliku točnog rješenja i aproksimativnog rješenja. Za koeficijent k smo stavili vrijednost 1 i u prvom i u drugom slučaju. Rezultati su navedeni malo kasnije. Sličnu stvar radimo i s drugim primjerom.

Računamo:

$$\begin{aligned}
\text{-div}(k\nabla T) &= \text{-div}(k\nabla(x^3 - y^3)) \\
&= \text{-div}(k(3x^2, -3y^2) \\
&= -k(6x - 6y) \\
&= -6x + 6y.
\end{aligned}$$

Desna strana jednadžbe iznosi $-6x + 6y$, tj. $f = -6x + 6y$. Sada tu funkciju uvrstimo u dio koda, kao na slici 2 ispod, pri čemu za rubni uvijet također uzimamo točno rješenje. Odnosno rješavamo problem

$$\text{-div}(k(x)\nabla T(x, y)) = -6x + 6y.$$

Kao i u prethodnom slučaju mjerimo razliku između točnog i aproksimativnog rješenja. Rezultati su navedeni malo kasnije.

Slika 2.

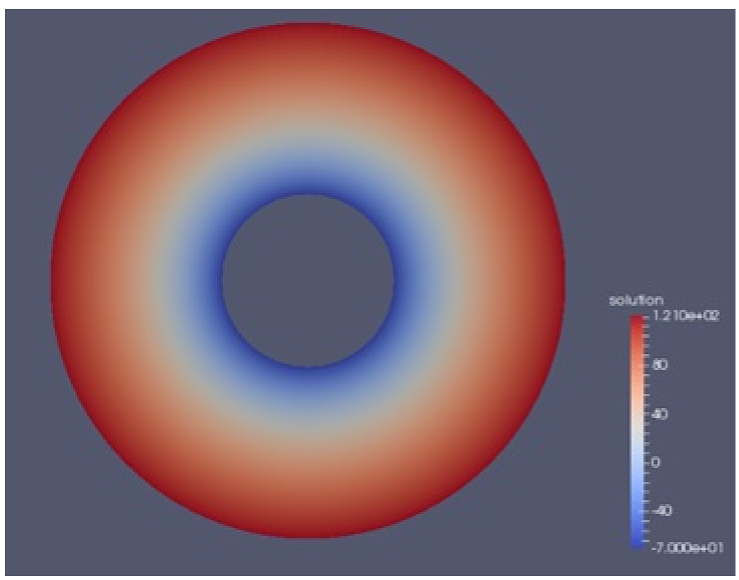
```
RF f= -6*(x_1[0]-x_1[1]);
// integriramo :  k * grad u * grad phi_i
RF factor = it->weight()*eg.geometry().integrationElement(it->position());

for (size_type i=0; i<lfsu.size(); ++i)
  r.accumulate(lfsu, i, (k1(x_1)*(gradu*gradphi[i]) - f*phi[i]) * factor);
```

Rezultati

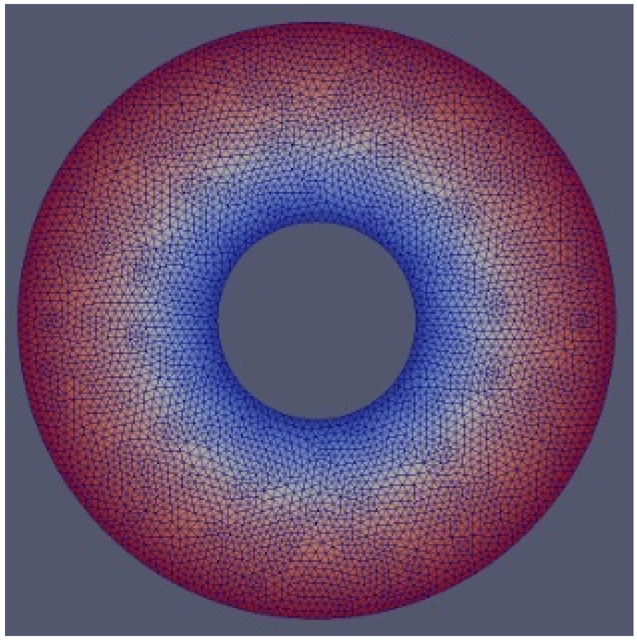
Problem -div$(k\nabla T) = 0$ pri čemu zadana temperatura na unutarnjem krugu iznosi -70 C, a na vanjskom 120 C, rješavamo pomoću P1 i P2 elemenata. Što se tiče početnih rezultata, budući je Dirichletov rubni uvijet nekako simetrično postavljen na problem rezultat ne ovisi o varijabilnosti koeficijenta k. Štoviše rezultat je vizualno fiksiran i za profinjavanje mreže i za promjenu elemenata.

Slika 3.

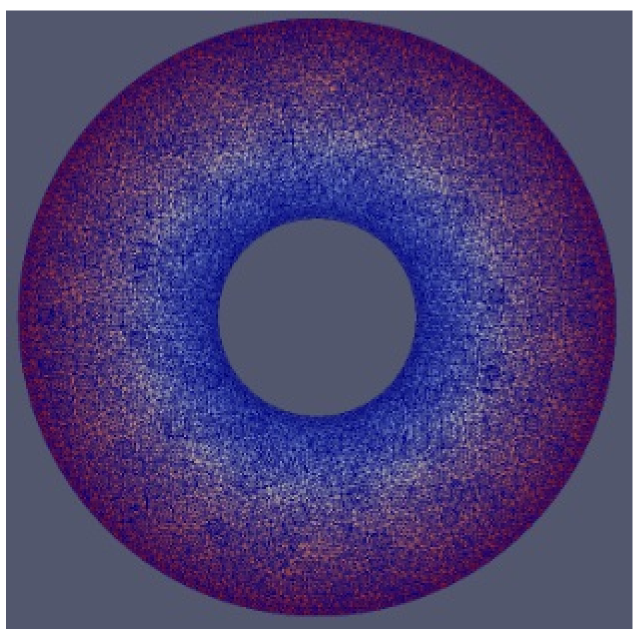


Sljedeće slike prikazuju kako izgleda profinjenje mreže.

Slika 4.



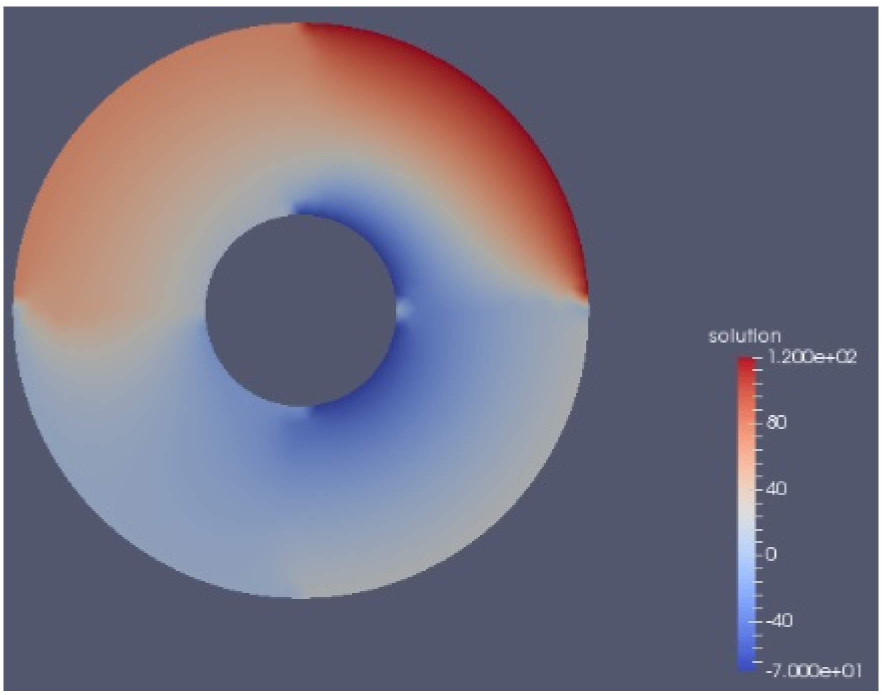
Slika 5.



Ostali rezultati

Nadalje, navodim neka rješenja koja direktno nisu vezana za zadatk. Prvo rješenje je grafički prikaz provođenja topline za različite poznate vrijednosti na rubovima po kvadrantima na unutarnjem krugu i na vanjskom krugu (pogledati kod).

Slika 6.

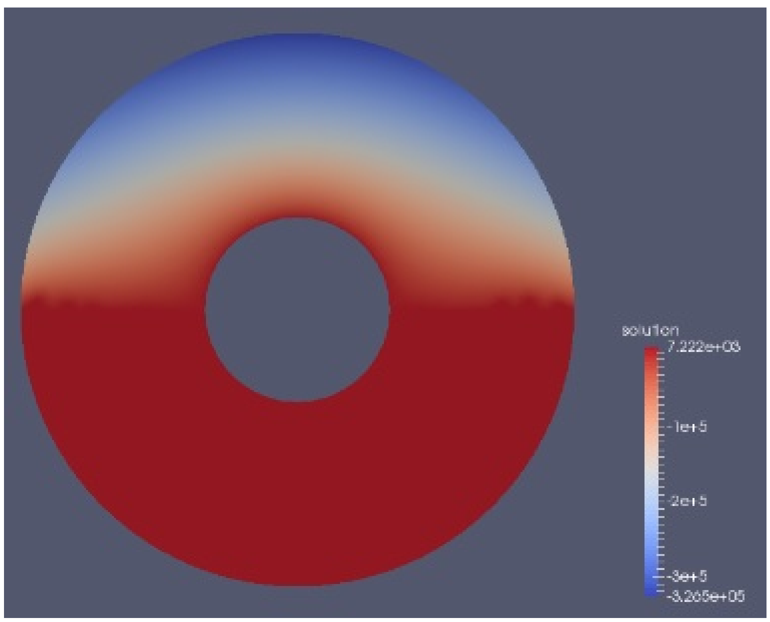


Ukoliko promatramo problem s Neumannovim rubnim uvijetom (pogledati kod) pri čemu koeficijet $k(x)$ poprima četiri različite vrijednosti u četiri kvadranta na sljedeći način

$$k(x) = \begin{cases} 0.001 & \text{u 1. kvadrant} \\ 0.001 & \text{u 2. kvadrantu} \\ 10 & \text{u 3. kvadrantu} \\ 10 & \text{u 4. kvadrantu} \end{cases}$$

rezultat koji dobivamo je

Slika 7.

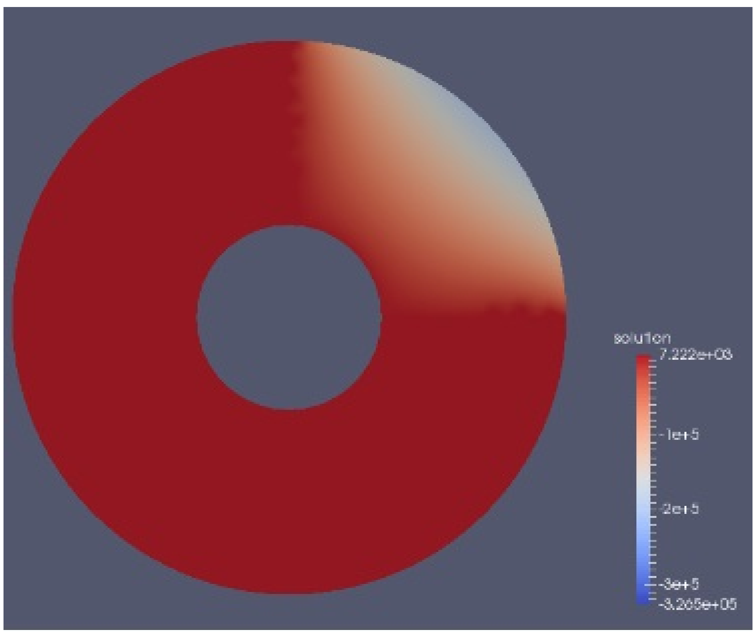


Za koeficijet $k(x)$ definiran kao

$$k(x) = \begin{cases} 0.001 & \text{u 1. kvadrant} \\ 10 & \text{u 2. kvadrantu} \\ 10 & \text{u 3. kvadrantu} \\ 10 & \text{u 4. kvadrantu} \end{cases}$$

rezultat je

Slika 8.

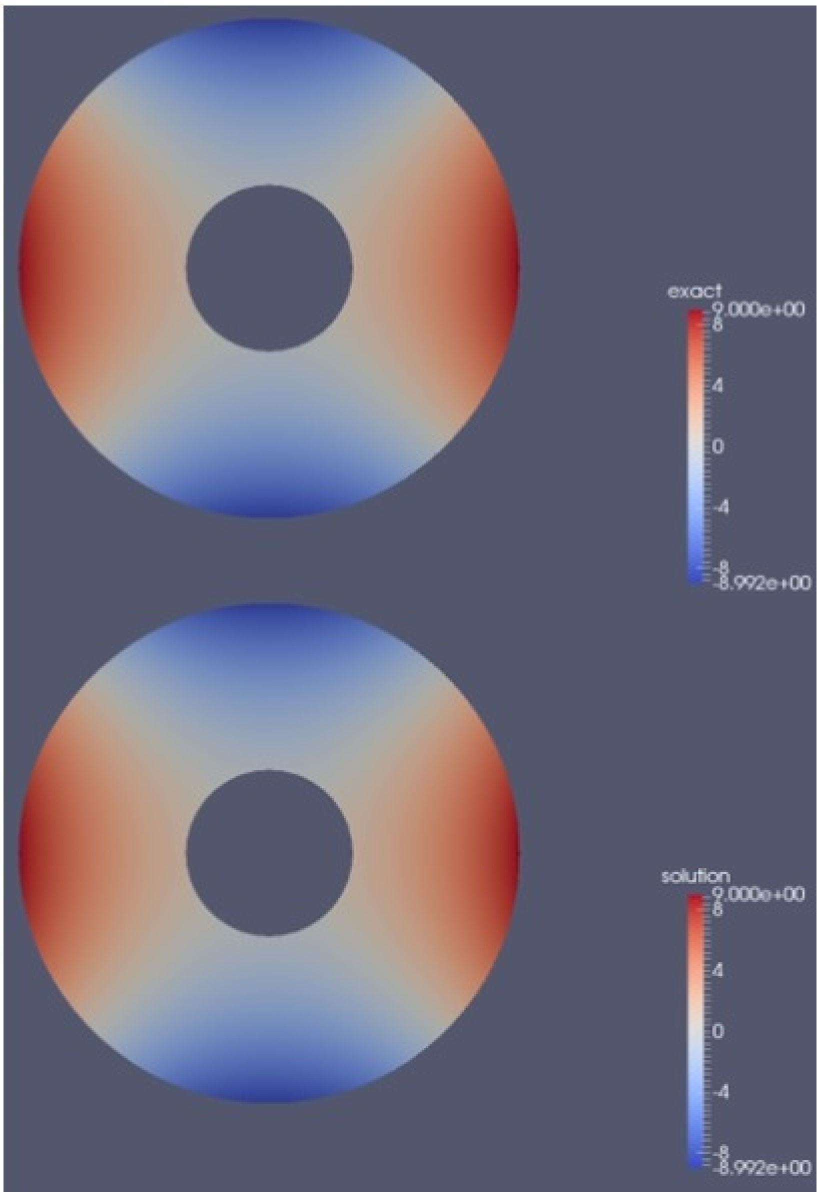


Vizualna verifikacija

Egzaktno i numeričko rješenje, primjer

$$T(x, y) = x^2 - y^2$$

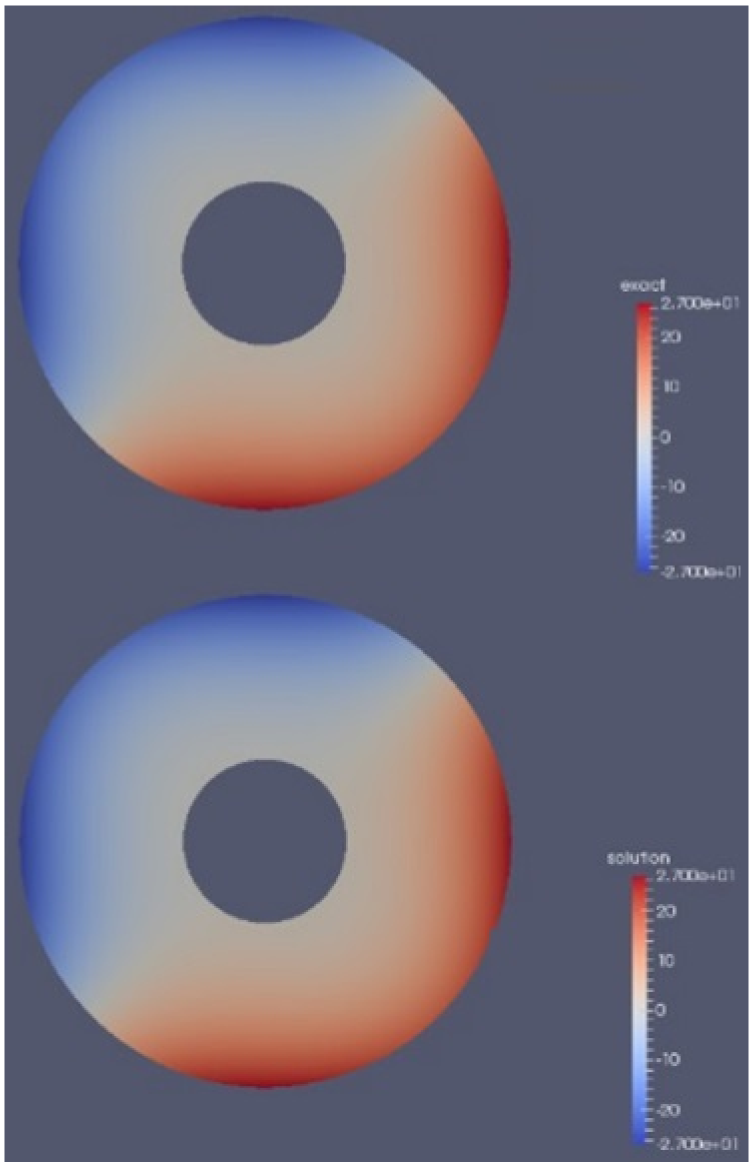
Slika 9.



Egzaktno i numeričko rješenje, primjer

$$T(x,y) = x^3 - y^3$$

Slika 10.



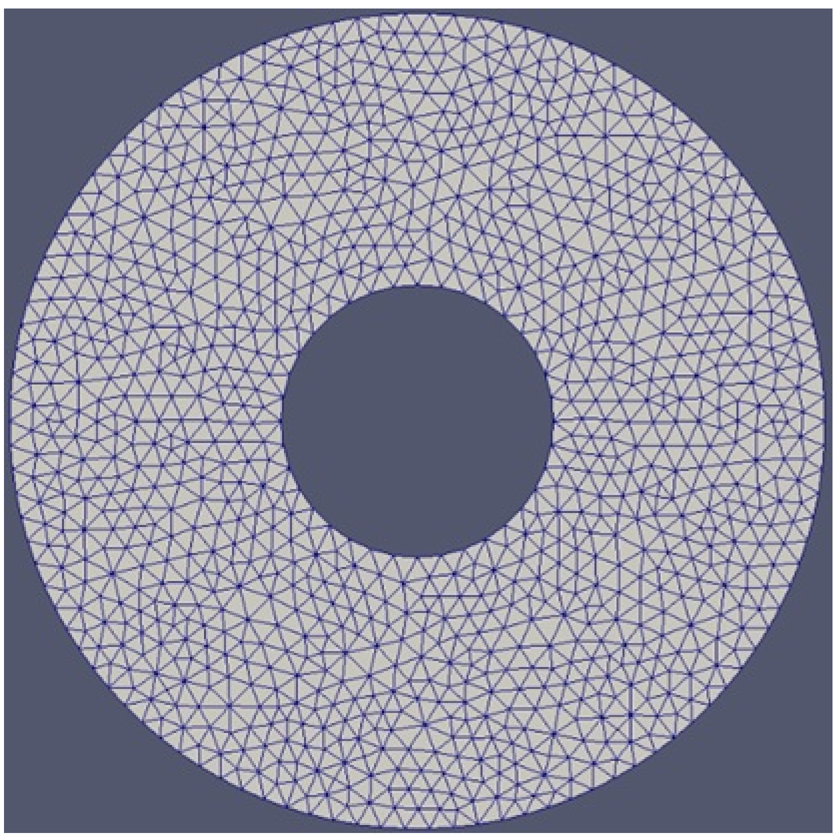
Konvergencija

Zanima nas da li razlika aproksimativnog rjesešnja i egzaktnog rješenja opada s profinjenjem mreže. Dakle, ono što ćemo ispitivati je da li

$$||\text{aproksimacija - egzaktno}||_2 \to 0, \text{ kada profinjenje raste.}$$

Promatrati ćemo konvergenciju za **oba** primjera redom. Konvergenciju gledamo posebno za P1 elemente, te posebno za P2 elemente. Mreža s kojom radimo početno izgleda ovako

Slika 11.



.

Rezultati konvergencije vezani za prvi primjer, odnosno

$$||T(x,y) - (x^2 - y^2)||_2$$

navedeni su ispod. Profinjujemo mrežu tri puta, radimo s P1 elementima.

```
antonio@pr3-02 /tmp/pdelab_ss/simulations $ ./pdelab_ss 1
L2 norma greske =0.0119538
```

```
antonio@pr3-02 /tmp/pdelab_ss/simulations $ ./pdelab_ss 2
L2 norma greske =0.004381
```

```
antonio@pr3-02 /tmp/pdelab_ss/simulations $ ./pdelab_ss 3
L2 norma greske =0.00227035
```

Profinjujemo mrežu tri puta, radimo s P2 elementima. Dobili smo egzaktno rješenje, do na greške zaokruživanja.

```
antonio@pr3-02 /tmp/pdelab_ss/simulations $ ./pdelab_ss 1
L2 norma greske =6.08313e-07
```

```
antonio@pr3-02 /tmp/pdelab_ss/simulations $ ./pdelab_ss 2
L2 norma greske =4.01236e-07
```

```
antonio@pr3-02 /tmp/pdelab_ss/simulations $ ./pdelab_ss 3
L2 norma greske =1.25268e-06
```

Rezultati konvergencije vezani za drugi primjer, odnosno

$$||T(x, y) - (x^3 - y^3)||_2$$

navedeni su ispod. Profinjujemo mrežu dva puta, radimo s P1 elementima.

```
antonio@pr2-16 /tmp/pdelab_ss/build-cmake/src $ ./pdelab_ss 0
L2 norma greske =0.136916
```

```
antonio@pr2-16 /tmp/pdelab_ss/build-cmake/src $ ./pdelab_ss 1
L2 norma greske =0.0842338
```

```
antonio@pr2-16 /tmp/pdelab_ss/build-cmake/src $ ./pdelab_ss 2
L2 norma greske =0.033132
```

Profinjujemo mrežu dva puta, radimo s P2 elementima.

```
antonio@pr2-16 /tmp/pdelab_ss/build-cmake/src $ ./pdelab_ss 0
L2 norma greske =0.000774198
```

```
antonio@pr2-16 /tmp/pdelab_ss/build-cmake/src $ ./pdelab_ss 1
L2 norma greske =0.00048784
```

```
antonio@pr2-16 /tmp/pdelab_ss/build-cmake/src $ ./pdelab_ss 2
L2 norma greske =0.000120376
```