

Máster en Física Avanzada

Curso: *Métodos Númericos Avanzados*

Tarea 1: Problemas de condición de contorno para ecuaciones diferencias ordinarias

Antonio Ramón Vázquez Ramírez.

1. Introducción

Prefieren para la exposición: 7 de noviembre en horario de mañana (entre las 10:00 y las 14:00).

La tarea consiste en la resolución del problema con condiciones de contorno

$$\frac{d^2M}{d\xi^2} + \frac{P}{J(\xi)}M = -p(\xi), \quad \text{con } M(l) = M(-l) = 0 \quad (1)$$

que modela el momento flector $M(\xi)$ de una barra de rigidez $J(\xi)$ variable, sujetada por bisagras en sus extremos $\xi = \pm l$.

El problema se simplifica bajo la suposición de una carga vertical constante, $p(\xi) = p_0$, y una rigidez que varía según la expresión $J(\xi) = \frac{Pl^2}{1+(\xi/l)^2}$.

El objetivo principal de esta Tarea es primero, resolver este problema en los puntos $\xi = i \pm \frac{l}{N}$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ mediante los siguientes métodos numéricos:

1. **Método de Diferencias Finitas:** técnica que discretiza el dominio y transforma la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que se pueden resolver con cualquier método de resolución de matrices.
2. **Método del Disparo Lineal:** técnica que reformula el problema de condiciones de contorno como la solución de dos problemas de valor inicial (PVI), los cuales se resuelven numéricamente mediante el método de Runge-Kutta de orden 4.

Tras la resolución, se debe realizar un análisis de convergencia detallado para cada método. Este análisis consistirá en estudiar cómo varía el error de la solución en función del tamaño del paso de discretización, h . El objetivo es verificar experimentalmente los órdenes de convergencia teóricos de cada algoritmo ($O(h^2)$ para diferencias finitas y $O(h^4)$ para el disparo con RK4').

Por motivos de concisión y enfoque práctico en la tarea. Las bases teóricas y demostraciones en las que se fundamentan los cálculos, serán dadas por supuestas. En todo caso se realizará una referencia apartado, teorema, algoritmo, entre otros, de la bibliografía fundamental de la asignatura, si se considera necesario.

2. La tarea

Como primer paso para facilitar el análisis numérico, se procede a adimensionalizar la Ecuación (1). Introduciendo las variables adimensionales $x = \xi/l$ para la posición y $m(x) = M(xl)/(p_0 l^2)$ para el momento flector, tenemos:

$$\frac{dM}{d\xi} = \frac{dM}{dx} \frac{1}{l} \quad \frac{d^2M}{d^2\xi} = \frac{d^2M}{dx^2} \frac{1}{l^2} \quad (2)$$

y definimos $M(xl) = m(x)p_0 l^2$ sabiendo que nuestros intervalos tambien cambian a $[x = -1, x = 1]$, la ecuación diferencial se transforma en:

$$\frac{d^2m}{dx^2} + (1 + x^2)m = -1 \quad (3)$$

Esta EDO debe resolverse en el dominio normalizado $x \in [-1, 1]$, sujeta a las condiciones de contorno homogéneas $m(-1) = m(1) = 0$.

La Tarea 1 plantea la resolución de la Ecuación (3) mediante dos enfoques numéricos distintos. En esta sección se detalla el fundamento teórico y la implementación de cada uno de los métodos empleados siguiendo como referencia, los procedimientos explicados en el capítulo 11 del libro [Burden & Faires, Numerical Analysis].

Método de Diferencias Finitas

El primer método aborda el problema discretizando el dominio $x \in [-1, 1]$ en una malla de puntos y aproximando las derivadas por diferencias finitas.

Según las condiciones del problema, tenemos que definir $2N + 1$ puntos para incluir el punto en $x = 0$ y los puntos al otro lado del eje de abscisas, por lo que por aclaracion podemos decir que tenemos un total de $N^* = 2N + 1$ puntos. comenzando en $x_0 = -1$ y terminando en $x_N = 1$. Esto crea $2N$ intervalos de igual tamaño, h , donde:

$$h = \frac{1 - (-1)}{2N} = \frac{2}{2N} = \frac{1}{N} \quad (4)$$

Donde los puntos interiores de la malla, $x_i = -1 + i \cdot h$ para $i = 1, \dots, N$, son aquellos donde el valor del momento flector $m(x_i) \equiv m_i$ es desconocido. Mientras que los valores en los extremos son conocidos por las condiciones de contorno: $m_0 = m(-1) = 0$ y $m_{N+1} = m(1) = 0$.

Aproximación de la EDO

El núcleo del método consiste en reemplazar la segunda derivada en la Ecuación (3) por su aproximación en diferencias finitas centradas:

$$\frac{d^2m}{dx^2} \approx \frac{m(x_{i+1}) - 2m(x_i) + m(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2 y^4(\xi)}{12} \quad (5)$$

siendo el ultimo termino, el asociado al error. Por lo que si este termino es anulado, y sustituyendo esta aproximación en nuestra EDO $m'' + (1 + x_i^2)m = -1$, se obtiene una ecuación algebraica para cada nodo i :

$$\frac{m_{i+1} - 2m_i + m_{i-1}}{h^2} + (1 + x_i^2)m_i = -1$$

Reordenando los términos para agrupar las incógnitas (m_{i-1}, m_i, m_{i+1}) , llegamos a la ecuación lineal:

$$m_{i-1} + (h^2(1 + x_i^2) - 2)m_i + m_{i+1} = -h^2 \quad (6)$$

Sistema de Ecuaciones Lineales

Al escribir la Ecuación (6) para cada i , se genera un sistema de $2N - 1$ ecuaciones lineales con $2N - 1$ incógnitas, de la forma $A\mathbf{m} = \mathbf{b}$.

- $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_N]^T$ es el vector de soluciones desconocidas.
- $\mathbf{b} = [-h^2, -h^2, \dots, -h^2]^T$ es el vector de términos independientes. Los términos representando los puntos en los extremos, que aparecen en la primera y última ecuación, respectivamente, se trasladan al lado derecho. Al ser ambos nulos por las condiciones de contorno, no alteran el vector \mathbf{b} .
- A es una matriz $2N - 1 \times 2N - 1$ donde los vecinos adyacentes son 1 y los elementos de la diagonal principal d_i :

$$d_i = h^2(1 + x_i^2) - 2, \quad \text{con } h = 1/N \text{ y } x_i = -1 + i \cdot h, \quad \text{para } i = 1, \dots, 2N - 1.$$

Los resultados de la resolución de este sistema se podrán observar en la sección correspondiente. Para la resolución, se ha optado por utilizar el método de Crout [algoritmo 6.7 Numerical Analysis Burden] por su alta aplicabilidad a nuestro problema, ya que se utiliza para resolver matrices tridiagonales como la de este problema.

En concreto, se ha utilizado $N=7$ teniendo un total de puntos $N^* = 15$ que nos proporciona los resultados mostrados en la sección correspondiente

Método del Disparo

Para la segunda parte, se resuelve utilizando el Método del Disparo Lineal [Burden & Faires 11.1]. Esta técnica transforma el problema de valor en la frontera en dos problemas de valor inicial, los cuales se resuelven usando el método de Runge-Kutta de orden 4

Dado que la EDO (3) es lineal, su solución $m(x)$ puede expresarse como la superposición de una solución homogénea y una no homogénea. Así se realizará la resolución de ambas ecuaciones.

$$m(x) = m_1(x) + C \cdot m_2(x) \tag{7}$$

1. **Problema no homogéneo:** Se resuelve la ecuación suponiendo las condiciones iniciales más simples.

$$m_1'' + (1 + x^2)m_1 = -1, \quad \text{con } m_1(-1) = 0, \quad m_1'(-1) = 0 \tag{8}$$

2. **Problema Homogéneo:** Se pretende utilizar esta ecuación para corregir los resultados de la anterior. Se supone una pequeña pendiente básica inicial.

$$m_2'' + (1 + x^2)m_2 = 0, \quad \text{con } m_2(-1) = 0, \quad m_2'(-1) = 1 \tag{9}$$

La constante C se determina forzando el cumplimiento de la segunda condición de contorno en $x = 1$ que implica $m(1) = 0$:

$$m(1) = m_1(1) + C \cdot m_2(1) = 0$$

$$C = -\frac{m_1(1)}{m_2(1)} \tag{10}$$

La existencia de una solución única requiere que $m_2(1) \neq 0$ [Burden & Faires 5.17 y corolario 11.2].

Para resolver estos sistemas. Se utilizará el método numérico de Runge-Kutta de orden 4 a continuación.

Implementación con Runge-Kutta de Orden 4

Para implementar el método de Runge-Kutta, se deben realizar transformaciones para convertir nuestro sistema en dos ecuaciones de primer orden. Para ello, se define el vector $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T = [m, m']^T$, cuya derivada es $\mathbf{y}' = [y_2, -(1 + x^2)y_1]^T$.

- **PVI 1:** $\mathbf{y}' = f_1(x, \mathbf{y}) = [y_2, -(1 + x^2)y_1 - 1]^T$, con $\mathbf{y}_0 = [0, 0]^T$.
- **PVI 2:** $\mathbf{y}' = f_2(x, \mathbf{y}) = [y_2, -(1 + x^2)y_1]^T$, con $\mathbf{y}_0 = [0, 1]^T$.

Ambos sistemas se resuelven numéricamente desde $x = -1$ hasta $x = 1$ usando nuevamente un total de $N* = 15$ puntos, para facilitar las comparaciones entre métodos posteriormente.

Análisis de convergencia

Para ambos métodos implementados, la tarea solicita un estudio de la convergencia y el orden de aproximación. Esta sección describe la metodología común utilizada para verificar experimentalmente dicho orden de convergencia, basado en [Burden & Faires, Numerical Analysis, Capítulo 1]

De la teoría, se espera que el error, E , en la solución numérica es proporcional al tamaño del paso, h elevado a la potencia del error:

$$E(h) \approx C \cdot h^p \quad (11)$$

donde C es una constante y p es el orden de convergencia del método. Nuestro objetivo es verificar experimentalmente el valor de p para cada método. Para ello, se emplean dos técnicas complementarias: el análisis de ratios y la visualización gráfica.

Medición del Error

Dado que no se dispone de una solución analítica exacta $m(x)$, se genera una solución de referencia, que denominaremos como *exacta* m_{ref} , calculando la solución con un número de puntos extremadamente grande (ej. $N* = 3001$). El error de una solución m_N (calculada con N puntos) se mide entonces en un punto fijo, el centro $x = 0$:

$$E_N = |m_N(0) - m_{\text{ref}}(0)| \quad (12)$$

Análisis de Ratios

Esta técnica se basa en la Ecuación (11). Si calculamos el error para un paso h_1 y luego para un paso $h_2 = h_1/2$ (es decir, reducimos el paso a la mitad):

$$\begin{aligned} E_1 &\approx C \cdot h_1^p \\ E_2 &\approx C \cdot (h_1/2)^p = C \cdot \frac{h_1^p}{2^p} = \frac{E_1}{2^p} \end{aligned}$$

Al reordenar, obtenemos el ratio de los errores:

$$\text{Ratio} = \frac{E_1}{E_2} \approx 2^p \quad (13)$$

Este resultado es la clave para interpretar las tablas de convergencia:

- Para el **Método de Diferencias Finitas**, la teoría predice $p = 2$. Por lo tanto, esperamos que el ratio de errores tienda a $2^2 = 4$.
- Para el **Método del Disparo con RK4**, la teoría predice $p = 4$. Por lo tanto, esperamos que el ratio de errores tienda a $2^4 = 16$.

Método Gráfico

Este método no depende de que el paso se divida exactamente a la mitad. Se basa en la obtención de la pendiente de los errores y con el objetivo de hallar su evolución. Aplicando logaritmos a la ecuación 11

$$\log(E) \approx \log(C) + p \cdot \log(h) \quad (14)$$

Esta es la ecuación de una recta ($y = b + p \cdot x$) en una gráfica de $\log(E)$ frente a $\log(h)$. La pendiente p de esta recta es el orden de convergencia del método. Por lo tanto, al representar gráficamente nuestros resultados en escala logarítmica, la pendiente obtenida deberá verificar el orden p del método.

3. Resultados

Con el objetivo de facilitar la comparación entre los resultados de ambos métodos, los parámetros elegidos han sido de tal manera, que el número de puntos interiores sea similar. Concretamente se ha realizado un estudio para 15 puntos totales, y una comparación para una solución hipotéticamente exacta de 3001 puntos, con soluciones de 5, 11, 21, 41, 81, 161, 321, 641, 1281 puntos. Elegidos de esta manera para garantizar incluir el punto 0 en nuestras tablas de datos, que se ha determinado como el punto de comparación de resultados

Resultados Método de Diferencias Finitas

x	$m(x)$	x	$m(x)$	x	$m(x)$
-1.00000	0.00000000	-0.28571	0.85621742	0.42857	0.75769043
-0.85714	0.23741078	-0.14286	0.91543598	0.57143	0.62045205
-0.71429	0.44600860	0.00000	0.93518274	0.71429	0.44600860
-0.57143	0.62045205	0.14286	0.91543598	0.85714	0.23741078
-0.42857	0.75769043	0.28571	0.85621742	1.00000	0.00000000

Cuadro 1: Tabla de resultados del Método de Diferencias Finitas

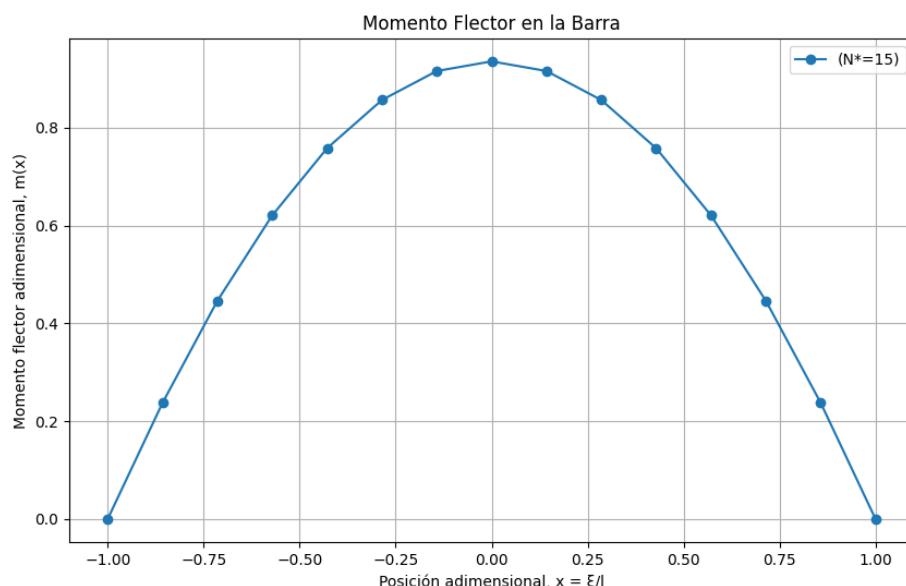


Figura 1: Representación gráfica de la solución

Análisis de Convergencia

Para verificar la convergencia del método de diferencias finitas, se calcula la solución para un número elevado de puntos, con el objetivo de simular la solución exacta, la cual no se dispone. Una vez se conoce esta solución, para diferentes valores de N , se compara la diferencia entre la solución exacta y la obtenida por el método, para evaluar como varia el error con el aumento de precisión. Por simplicidad, para este ejercicio se ha decidido medir el error en el punto central $x = 0$ con un número de puntos interiores $N = 3001$, obteniendo un valor en el centro de $m(0) \approx 0,93205379$.

Al duplicar el número de intervalos (y, por tanto, reducir h aproximadamente a la mitad), el error debería dividirse por un factor de $2^2 = 4$, probando el grado del error. Esto puede comprobarse en la tabla 2, que muestra el cociente entre el error del paso anterior y el error del paso actual (E_{i-1}/E_i).

N (puntos int.)	h	Error en x=0	Ratio (E_{i-1}/E_i)
5	0.33333	$1,655656 \times 10^{-2}$	-
11	0.16667	$4,250061 \times 10^{-3}$	3.90
21	0.09091	$1,271281 \times 10^{-3}$	3.34
41	0.04762	$3,493193 \times 10^{-4}$	3.64
81	0.02439	$9,163183 \times 10^{-5}$	3.81
161	0.01235	$2,342892 \times 10^{-5}$	3.91
321	0.00621	$5,879283 \times 10^{-6}$	3.98
641	0.00312	$1,427786 \times 10^{-6}$	4.12
1281	0.00156	$3,067902 \times 10^{-7}$	4.65

Cuadro 2: Análisis de convergencia del Método de Diferencias Finitas. El error se mide en $x = 0$ contra una solución de referencia de 3001 puntos.

Como se observa en la Tabla 2, a medida que N aumenta, el ratio se aproxima a 4. Esto confirma experimentalmente que el método implementado es de orden 2. Sin embargo, se puede observar cierta cantidad de ruido al aumentar la cantidad de puntos

esto puede representarse además en la Figura 2. En esta gráfica se representa el logaritmo del error frente al logaritmo del paso h , donde podemos ver la pendiente. De la relación $E \approx C \cdot h^p$, se deduce que $\log(E) \approx \log(C) + p \cdot \log(h)$. Tal como se ha explicado anteriormente

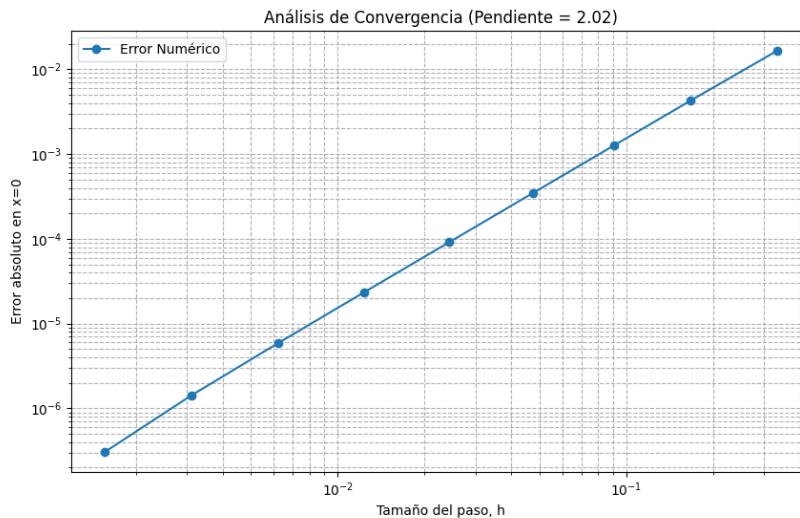


Figura 2: Gráfica del logaritmo del error en $x = 0$ frente al paso h . La pendiente se aproxima a 2, lo que confirma el orden del método.

Adicionalmente, se invita a comprobar el resultado de escalar el numero de pasos de la solución

no exacta y a comparar con la solución exacta. cuando los pasos se acercan a la solución exacta, se introduce un error computacional y se pierde el orden 2. Esto puede comprobarse modificando los parámetros en el código propuesto. Para recuperar el orden de error adecuado, basta con aumentar el grado de precisión de la solución exacta.

Resultados Método del disparo

x	m(x)	x	m(x)	x	m(x)
-1.00000	0.00000000	-0.28571	0.85322238	0.42857	0.75490608
-0.85714	0.23632179	-0.14286	0.91233179	0.57143	0.61802066
-0.71429	0.44412420	0.00000	0.93204511	0.71429	0.44412405
-0.57143	0.61802072	0.14286	0.91233182	0.85714	0.23632162
-0.42857	0.75490607	0.28571	0.85322241	1.00000	0.00000000

Cuadro 3: Tabla de resultados del Método del Disparo para 15 puntos

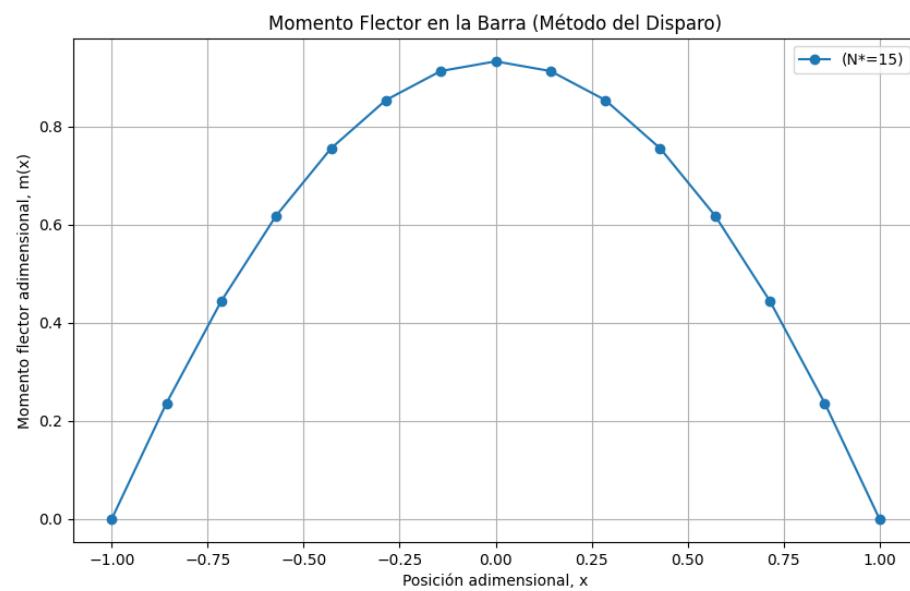


Figura 3: Representación gráfica de la solución $m(x)$ para $N = 7$ mediante el Método del Disparo Lineal.

Visualmente, la solución es muy similar a la obtenida por diferencias finitas, presentando la simetría esperada. Una comparación más detallada revela pequeñas diferencias en los valores numéricos, lo cual es esperado dado el diferente orden de error de cada método.

Análisis de Convergencia

Respecto al análisis de convergencia, teóricamente se espera un orden de convergencia mucho mayor. Al estar basado en runge kutta de orden 4, el error global E debe ser proporcional a la cuarta potencia del paso, $E \approx C \cdot h^4$.

Esto implica que si el paso h se reduce a la mitad, el error debería disminuir en un factor de $2^4 = 16$.

La Tabla 4 muestra el estudio experimental de este comportamiento.

N (enunciado)	h	Error en x=0	Ratio (E_{i-1}/E_i)
5	0.20000	$3,154475 \times 10^{-5}$	-
11	0.09091	$1,452470 \times 10^{-6}$	21.72
21	0.04762	$1,108767 \times 10^{-7}$	13.10
41	0.02439	$7,660505 \times 10^{-9}$	14.47
81	0.01235	$5,033749 \times 10^{-10}$	15.22
161	0.00621	$3,225442 \times 10^{-11}$	15.61
321	0.00312	$2,037037 \times 10^{-12}$	15.83
641	0.00156	$1,286748 \times 10^{-13}$	15.83
1281	0.00078	$3,996803 \times 10^{-15}$	32.19

Cuadro 4: Análisis de convergencia del Método del Disparo (RK4). El error se mide en $x = 0$.

Una vez más, puesto que se ha decidido utilizar series de puntos impares que incluyan el punto 0 para facilitar la comparación, el tamaño del paso no se divide exactamente a la mitad, lo que aporta cierto grado de imprecisión. Aun así, podemos comprobar que prácticamente los resultados se aproximan al ratio de 16. Esto confirma experimentalmente que el método del disparo implementado con RK4 es de orden 4. Los últimos valores, al igual que sucedía con en el método de diferencias finitas, estamos alcanzando el límite de la precisión de la medición, donde el error medido se ve afectado por el ruido.

Estos resultados, se pueden apreciar, además, en la figura 4 . Un ajuste lineal de los datos en la gráfica representando los logaritmos de los pasos y el error nos proporciona una pendiente de $p \approx 4,0$, verificando el orden $O(h^4)$.

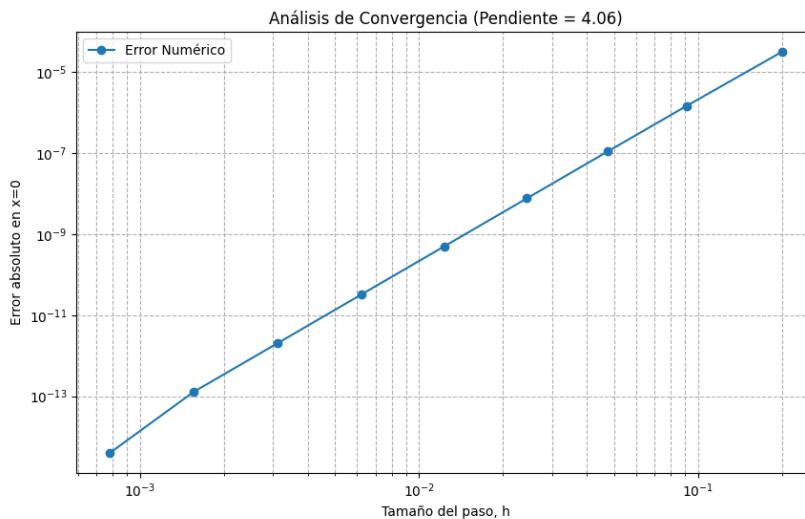


Figura 4: Gráfica log-log del error en $x = 0$ para el método del disparo. La pendiente de la recta ajustada ($p \approx 4,0$) confirma el orden 4 del método.

4. Conclusiones

En esta Tarea 1 se ha abordado la resolución de un problema de valor en la frontera para una EDO lineal, modelando el momento flector de una viga. El objetivo se ha cumplido implementando y comparando dos métodos numéricos: el Método de Diferencias Finitas y el Método del Disparo Lineal.

Los puntos clave y hallazgos extraídos de este trabajo son los siguientes:

1. **Implementación:** Ambos métodos se implementaron, generando soluciones numéricas coherentes y simétricas, tal como se esperaba de la física del problema. Para el método de diferencias finitas, en el que se contaba con libertad de implementación se implementó el Algoritmo 6.7 de Burden y Faires (Factorización de Crou), para la resolución del sistema matricial. Por otro lado, para la resolución del método del disparo, se ha utilizado la resolución de Runge Kutta.
2. **Verificación de la Convergencia:** en este punto, los resultados experimentales confirmaron las predicciones teóricas:
 - El **Método de Diferencias Finitas** demostró ser de orden 2 ($O(h^2)$). Esto se verificó tanto en la tabla de ratio, donde el cociente de errores sucesivos convergió a 4, como gráficamente, observando una pendiente $p \approx 2,0$.
 - El **Método del Disparo Lineal**, al utilizar Runge-Kutta de 4º orden (RK4), demostró ser de orden 4 ($O(h^4)$). Nuevamente, los ratios del error convergieron al valor teórico de 16 y la pendiente de la gráfica fue de $p \approx 4,0$.
3. **Comparación de Métodos:** La diferencia en el orden de convergencia es la conclusión más significativa. El método del disparo (con RK4) es computacionalmente superior en términos de precisión. Para alcanzar un nivel de error dado, el método de disparo requiere un paso h mucho mayor (y, por tanto, menos puntos y menos cómputo) que el método de diferencias finitas.
4. **Límites de la Precisión Numérica:** Un hallazgo importante del análisis de convergencia fue la observación de ruido. Se demostró que cuando el error del método se vuelve extremadamente pequeño, basada en una solución de referencia de $N* = 3001$ se ve contaminada por el ruido. Esto causa que los ratios de convergencia diverjan de sus valores teóricos, subrayando la importancia de la precisión de la máquina y la calidad de la solución de referencia en estos estudios. Siendo el comportamiento esperado, ver como se reduce este ruido conforme la precisión de la solución de referencia aumenta

Como posible **trabajo futuro**, sería interesante realizar los siguientes estudios.

- Se podría comparar el rendimiento en la aproximación de diferencias finitas de orden con el rendimiento en el método de disparo para distintos valores de N.
- Asimismo, se podría explorar la resolución de un problema no lineal mediante el método de disparo, lo que requeriría la implementación adicional de un algoritmo buscador de raíces, como el método de Newton.
- se podría comparar los resultados para diferentes valores de la solución exacta.
- aplicar la resolución de este problema a un caso práctico real y verificar experimentalmente en laboratorio