

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA



**TRABAJO DE FIN DE MÁSTER**

El problema de Parker en Magnetohidrodinámica y aplicaciones de transición  
para campos force-free

Director: Alberto Enciso Carrasco

Supervisor en la UCM: José María Arrieta Algarra

**Antonio Álvarez López**

Máster en Matemáticas Avanzadas

Curso académico 2021-2022

Convocatoria Julio

## **Resumen:**

El presente trabajo está dedicado a un área de la Física Matemática conocida como Magnetohidrodinámica (MHD). Comienza con una introducción en la que se presentan sus particularidades, objetos de estudio (usualmente plasmas ideales), aplicaciones y motivaciones principales, además de una pequeña reseña histórica. Posteriormente, y dado que en ella confluyen dos extensas disciplinas de gran relevancia científica e histórica como son la Dinámica de Fluidos y el Electromagnetismo, las presentaremos tratando de clarificar los conceptos y propiedades que serán necesarias en el estudio de la MHD. Asumimos en nuestros desarrollos que el lector carece de un conocimiento profundo sobre la materia, por lo que introducimos ambas teorías con detalle desde sus principios. A continuación, presentamos el modelo matemático de la MHD mediante el acoplamiento de las ecuaciones de fluidos con las de la electrodinámica y llevamos a cabo las simplificaciones pertinentes permitidas por las hipótesis del régimen de los plasmas ideales. Particularizaremos nuestro estudio a la Física Solar, que es una de las ramas en las que la MHD tiene un mayor peso, y esto servirá para dar paso al planteamiento de una de las cuestiones matemáticas más importantes que permanecen abiertas hoy en día en este contexto: el Problema de Parker. Discutiremos y analizaremos varios enfoques del problema, y nos servirá como motivación para presentar un importante resultado recientemente publicado con el que guarda una estrecha relación. Además, llevaremos a cabo una revisión minuciosa de su demostración, que emplea interesantes y muy variadas herramientas matemáticas.

## **Abstract:**

This work is devoted to an area of Mathematical Physics known as Magnetohydrodynamics (MHD). It begins with the introduction of its particularities, objects of study (usually ideal plasmas), applications and main motivations, as well as a brief historical review. Subsequently, and given the confluence of two broad disciplines of great scientific and historical relevance such as Fluid Dynamics and Electromagnetism, we will present both of them trying to clarify the concepts and properties that will be necessary in the study of MHD. We assume in our developments that the reader lacks a deep knowledge of the subject, so we introduce both theories in detail from their principles. Then, we present the mathematical model of MHD by coupling the fluid equations with those of electrodynamics and we carry out the relevant simplifications allowed by the hypotheses of the regime of ideal plasmas. We will particularize our study to Solar Physics, which is one of the branches where MHD has a greater weight, and this will serve to give way to the posing of one of the most important mathematical questions that remain open today in this context: Parker's Problem. We will discuss and analyze several approaches to the problem, and it will serve as motivation to present an important recently published result with which it is closely related. In addition, we will carry out a thorough review of its proof, which employs interesting and very varied mathematical tools.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. El papel de las matemáticas en el estudio de la realidad . . . . .	1
1.2. La magnetohidrodinámica . . . . .	2
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Notación . . . . .	7
2.2. Identidades y resultados básicos del cálculo vectorial . . . . .	8
2.3. Resultados básicos de Análisis Funcional . . . . .	10
2.4. Espacios de Sobolev . . . . .	11
<b>3. Dinámica de fluidos</b>	<b>15</b>
3.1. Hipótesis básicas . . . . .	16
3.2. Planteamiento . . . . .	17
3.3. Derivación de las ecuaciones . . . . .	19
3.3.1. Conservación de la masa . . . . .	21
3.3.2. Conservación del momento . . . . .	23
3.4. Formulación de las ecuaciones . . . . .	26
3.5. Formulación de Bernoulli . . . . .	28
3.6. Análisis local del campo de velocidades . . . . .	30
3.7. El campo de vorticidad . . . . .	33
3.7.1. Motivación . . . . .	33

3.7.2.	Ecuaciones de la vorticidad . . . . .	36
3.7.3.	Formulación corriente-vorticidad . . . . .	37
<b>4.</b>	<b>Electromagnetismo</b>	<b>41</b>
4.1.	Ecuaciones de Maxwell . . . . .	41
4.1.1.	Conceptos básicos . . . . .	41
4.1.2.	Derivación . . . . .	42
4.2.	Fuerza de Lorentz . . . . .	46
4.3.	Ley de Ohm . . . . .	47
<b>5.</b>	<b>Las ecuaciones de la MHD</b>	<b>49</b>
5.1.	Consideraciones previas . . . . .	49
5.2.	Reducción de las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz . . . . .	50
5.2.1.	Simplificaciones generales . . . . .	50
5.2.2.	Simplificaciones en la MHD ideal . . . . .	54
5.3.	Ecuaciones de la MHD ideal . . . . .	55
5.4.	Equilibrio estático . . . . .	56
5.5.	La ecuación de inducción . . . . .	57
5.5.1.	La reconexión magnética . . . . .	58
5.6.	MHD y la física solar . . . . .	59
<b>6.</b>	<b>El Problema de Parker</b>	<b>63</b>
6.1.	Introducción al problema . . . . .	63
6.2.	Planteamiento . . . . .	65
6.3.	Teorema de Magnetostática . . . . .	67
6.4.	Aplicaciones de transición . . . . .	68
<b>7.</b>	<b>Estudio de los flujos estacionarios rotacionales por medio de dos funciones de corriente y un argumento iterativo de Nash-Moser</b>	<b>71</b>

7.1.	Introducción . . . . .	71
7.1.1.	Notación . . . . .	73
7.1.2.	Resultado principal . . . . .	74
7.2.	Planteamiento . . . . .	76
7.2.1.	Caracterización de las funciones admisibles . . . . .	76
7.2.2.	Formulación variacional del problema . . . . .	77
7.2.3.	Pasos . . . . .	79
7.3.	Estudio del operador cuadrático . . . . .	81
7.3.1.	Planteamiento y cálculo . . . . .	81
7.3.2.	Comprobación de la no coercitividad . . . . .	84
7.3.3.	Acotación inferior de la parte cuadrática . . . . .	86
7.4.	Regularización elíptica y linealización . . . . .	97
7.4.1.	Visión general . . . . .	97
7.4.2.	Existencia y unicidad de soluciones en la ecuación linealizada . . . . .	100
7.4.3.	Estimaciones de regularidad . . . . .	102
7.5.	Uso del método iterativo de Nash-Moser . . . . .	117
7.5.1.	Introducción . . . . .	117
7.5.2.	Planteamiento . . . . .	120
7.5.3.	Aplicación . . . . .	122
<b>A.</b>		<b>127</b>
A.1.	Representación de un campo vectorial de divergencia nula a partir de dos funciones de corriente . . . . .	127
<b>Bibliografía</b>		<b>133</b>



# Capítulo 1

## Introducción

“La filosofía está escrita en ese grandilocuente libro, que está continuamente abierto a nuestros ojos (lo llamo universo). Pero no se puede descifrar si antes no se comprende el lenguaje y se conocen los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas ... sin las cuales andamos a tientas en un oscuro laberinto.”

*Galileo Galilei (Il Saggiatore, 1618).*

### 1.1. El papel de las matemáticas en el estudio de la realidad

Las matemáticas tienen múltiples facetas, y están constantemente sometidas a una tensión entre el arte y la aplicabilidad. Por una parte, la mente ordenada de un matemático disfruta con la creación y exploración de teorías matemáticas abstractas, aunque también con el hallazgo de conexiones ocultas entre los distintos conceptos existentes. Por otro lado, el matemático, como todo ser humano, está atado a un mundo físico, y siente la necesidad de entender sus infinitas particularidades para poder manipular las leyes que lo rigen en su beneficio personal y en el de la civilización.

Tras muchos siglos de conocimiento acumulado por mentes brillantes, la ciencia ha avanzado hasta el punto de ser capaz hoy en día de dar explicación a la estructura fundamental del Universo y a las interacciones que tienen lugar entre sus componentes. La mejor prueba de ello es la capacidad que ha desarrollado el ser humano para predecir acciones que ocurrirán en el futuro a partir de la información disponible en el presente, desde el simple lanzamiento de una pelota hasta el movimiento de los gigantescos astros, pasando por el extraño comportamiento cuántico de un minúsculo electrón.

La intuición que hace esta “magia” posible procede de las múltiples simetrías y leyes de conservación que la naturaleza presenta. La herramienta de trabajo son las matemáticas. Más allá de permitir la construcción de reglas abstractas a partir de conceptos idealizados por medio de pasos

lógicos, las matemáticas poseen la capacidad de modelar los fenómenos que ocurren en el universo, especialmente a través del lenguaje simbólico que aportan y que permite expresar ideas extremadamente complejas de manera sencilla. El porqué de esta conexión entre la realidad y las matemáticas es algo que pertenece al terreno de la filosofía. A nivel matemático, para que un modelo sea bueno, debe cumplir una serie de condiciones:

- Exactitud: El modelo debe reproducir con fidelidad las características esenciales del funcionamiento del sistema, en la medida de lo posible.
- Modestia: El modelo debe aspirar a unos objetivos asequibles. Podríamos compararlo con un plano: su objetivo no es representar el mundo real con todo lujo de detalles, sino solamente los aspectos de interés para los que fue construido.
- Sencillez: El modelo no mejora al incrementar su complejidad. A veces pesa más la “manipulabilidad” que proporciona un modelo simple.
- Verificabilidad: El modelo debe proporcionar resultados que se puedan comparar con datos reales para su validación.

## 1.2. La magnetohidrodinámica

La *magnetohidrodinámica* (MHD) es una rama de la física matemática que estudia el comportamiento a escalas macroscópicas de los fluidos que son buenos conductores de la electricidad cuando se encuentran en presencia de un campo magnético. La idea principal es que, debido a la ley de Faraday, los campos magnéticos pueden inducir corrientes en un fluido conductor en movimiento, que a su vez generan fuerzas en el fluido que interactúan con el propio campo magnético. Las propiedades requeridas para que se produzcan estos efectos suponen la restricción de los medios fluidos que las cumplen a metales líquidos, electrolitos fuertes, o un tipo de gases ionizados calientes denominados *plasmas*. Estos últimos, que presentaremos con detalle en esta introducción siguiendo la referencia [7], son el ejemplo canónico, y en ellos vamos a centrar nuestro estudio. Su comportamiento se describe a través del acoplamiento del electromagnetismo con la mecánica de fluidos, dos de las teorías más estudiadas en la física clásica, obteniendo un conjunto de ecuaciones que conforman la base del estudio analítico de la MHD.

Históricamente, la dinámica de fluidos y la teoría electromagnética siempre fueron dos ramas separadas, pero en 1942 el físico sueco Hannes Alfvén publica un artículo en el que introduce el término “magnetohidrodinámica”, uniéndolas y dando origen a la investigación en una nueva rama. En esta publicación, que le llevó a obtener el premio Nobel de Física en 1970, Alfvén desarrolla una teoría sobre la existencia de un tipo de ondas magnetohidrodinámicas, que hoy en día se conocen como ondas Alfvén, mediante la combinación de las ecuaciones de Navier-Stokes, que rigen



la dinámica de fluidos, con las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo (ver [1]). Sin embargo, no fue hasta 1958 cuando por primera vez se pudo comprobar experimentalmente la existencia de dichas ondas, y la teoría magnetohidrodinámica comenzó así a gozar de popularidad y a ser objeto de un estudio exhaustivo en el mundo científico.

En la actualidad, la MHD juega un papel crucial en diversas ramas de la ciencia y la ingeniería, ya que todos los cuerpos y medios en el Universo están de alguna forma afectados por un campo magnético. Por ejemplo, tiene un gran peso en la geofísica. El núcleo externo de la Tierra, en estado líquido, presenta enormes concentraciones de hierro y níquel que lo convierten en un excelente conductor eléctrico. Además, las temperaturas y presiones extremas a las que este medio se ve sometido provocan que las partículas cargadas se muevan con energías muy grandes en corrientes convectivas térmicas, generando así un enorme campo magnético, que a su vez ejerce una fuerza sobre dichas partículas (estos fenómenos serán comprendidos en el Capítulo 4). Por último, el continuo movimiento de rotación terrestre estabiliza el campo a través del efecto Coriolis, dando lugar así al campo magnético terrestre que conocemos. Al proceso descrito se le conoce como la dinamo geomagnética, y los efectos y características particulares que presenta se derivan directamente desde la MHD.

En la industria, la teoría de la MHD se utiliza en problemas relacionados con el calentamiento y enfriamiento de metales líquidos, con el moldeado electromagnético, o con el control y el confinamiento del plasma en la fusión nuclear.

Pese a todo, es en la Astrofísica donde mayor peso tiene la MHD, pues de toda la materia bariónica que conforma el Universo, la amplia mayoría está en estado de plasma: las estrellas, el medio interplanetario e interestelar, las nebulas, etc. En particular, la disciplina es fundamental en la física solar, pues la mayoría de los fenómenos observados en el Sol, como las manchas solares, las erupciones o el viento solar, son causados directamente por el campo magnético solar y su interacción con el plasma que compone la estrella. Algunos de estos efectos serán explicados con más detalle al final del Capítulo 5.

Además de sus múltiples aplicaciones físicas, las ecuaciones de la MHD exhiben una bella estructura matemática, mostrando conexiones con la geometría y la topología que nos permiten entender algunas de las dinámicas de los campos magnéticos en términos de ideas topológicas. Desde la perspectiva de los sistemas dinámicos, la MHD se puede entender como un sistema Hamiltoniano de dimensión infinita. Sin embargo, esta es una idea en la que no profundizaremos; se recomienda la referencia [3] para conocer más detalles.

Introducidas las ecuaciones, su historia y su utilidad, veamos cuál es exactamente el medio sobre el que se aplican. El término “plasma” fue introducido por el fisiólogo checo Jan Evangelista Purkinje a mediados del siglo XIX para denominar el fluido remanente de la sangre tras dejarla desprovista de todas las células. Medio siglo más tarde, el físico estadounidense Irving Langmuir propuso en 1922 que las partículas cargadas (electrones e iones) y las neutras en un gas ionizado también se

podían considerar material corpuscular disperso en un fluido, y reutilizó la palabra “plasma” para denominar a este medio, debido a las analogías con el anterior.

Hoy en día, se usa *plasma* para designar a una extensa variedad de sustancias macroscópicas que contienen una enorme cantidad de electrones libres y átomos y moléculas ionizadas, los cuales interactúan entre sí y responden fuertemente ante las fuerzas electromagnéticas de largo alcance, que dominan su comportamiento. El plasma está ampliamente considerado como el cuarto estado de agregación de la materia, junto al estado gaseoso, el líquido y el sólido. Sin embargo, esta categorización no es muy precisa para describir sus atributos físicos, ya que un plasma puede mostrar el comportamiento habitual de cualquiera de los otros tres estados al variar su densidad, presión y temperatura.

No cualquier medio que contenga partículas cargadas se puede considerar un plasma, sino que debe cumplir ciertas condiciones. Una definición simple de libro (ver [10]) sería: “un plasma es un gas cuasineutro de partículas cargadas que muestran un comportamiento colectivo”. La condición de cuasineutralidad significa que, aunque esté compuesto de electrones e iones, sus densidades de carga globales se cancelan en el equilibrio, por lo que la carga total del plasma es aproximadamente nula. La segunda propiedad, el comportamiento colectivo, describe el hecho de que el alto rango del potencial coulombiano (de orden  $1/r$ , siendo  $r$  distancia respecto de la fuente) provoca que las perturbaciones locales del equilibrio puedan tener una fuerte influencia en regiones alejadas del plasma. Esto significa que, aunque las partículas no estén cerca, pueden interactuar entre sí por medio de campos electromagnéticos. Las partículas cargadas en movimiento generan corrientes eléctricas y concentraciones locales de carga positiva o negativa. Debido a la ley de Faraday y a la ley de Gauss, respectivamente, las primeras crean campos magnéticos y las segundas campos eléctricos. Así pues, cualquier movimiento de una partícula de plasma afecta y se ve afectado por los campos creados por las demás partículas, aunque sean lejanas, y es este comportamiento el que se entiende como colectivo.

Debido a las características mencionadas, un plasma se distingue de los demás estados de la materia. En particular, hablar de un plasma de baja densidad como un simple “gas ionizado” es erróneo y engañoso, a pesar de que en ciertos regímenes un plasma es similar a la fase gaseosa en el sentido de que ambos no tienen una forma o volumen definidos.

Hemos introducido la disciplina de la MHD junto con su objeto de estudio, los plasmas, y algunas de sus aplicaciones más importantes. Ahora bien, la presentación detallada del modelo matemático necesariamente requiere la comprensión previa de los fundamentos de la teoría de la dinámica de fluidos y de la teoría del electromagnetismo. Esto se hace a través de las ecuaciones de Navier-Stokes y de Euler para fluidos, y de las de Maxwell para campos electromagnéticos. Es por ello que los Capítulos 3 y 4 serán un repaso completo de las ecuaciones fundamentales y de los conceptos básicos subyacentes a ambas disciplinas de estudio.

Posteriormente, en el Capítulo 5 explicaremos el sistema de ecuaciones que describe la dinámica

de los plasmas ideales en MHD, que es en particular uno de los pilares centrales de la física solar y de la astrofísica en general. Es por ello que se acude a este modelo ante la necesidad de dar explicación a muchas de las cuestiones y debates que pueden surgir por discordancias entre las observaciones del mundo real y las predicciones esperadas. El contenido matemático de las ecuaciones es profundo y complejo, pero la motivación para abordar una problemática en particular proviene en última instancia de inconsistencias detectadas entre el modelo y la realidad que percibimos. Será uno de estos problemas matemáticos, planteado gracias a una conjetura que formuló en 1972 el físico solar Eugene Parker (recientemente fallecido), el que presentaremos en el Capítulo 6. La formalización matemática de su enunciado involucra interesantes herramientas analíticas y topológicas, y el problema permanece abierto a día de hoy.

El problema de Parker ocupa un papel central en nuestro trabajo, ya que supone la culminación de los desarrollos contruidos desde los cimientos de la MHD y nos servirá para dar paso al Capítulo 7, en el que llevamos a cabo el estudio y demostración de un interesante resultado matemático con el que el problema guarda una estrecha relación. En este capítulo final se concentra la mayor parte del contenido matemático presente en este trabajo, lo que se ve compensado con el detalle argumental y con el extenso y variado conjunto de técnicas y métodos matemáticos utilizados. Estas herramientas abarcan desde el planteamiento variacional del problema hasta un argumento iterativo de Nash-Moser para construir soluciones, pasando por estimaciones de regularidad en ecuaciones elípticas y la aplicación de resultados de análisis funcional (por ejemplo, interpolación en espacios de Sobolev) como parte de los desarrollos.



## Capítulo 2

# Preliminares

### 2.1. Notación

Comenzamos mostrando algunas observaciones sobre el lenguaje y la notación matemática que serán utilizados en el presente trabajo.

- Para denotar campos vectoriales vamos a utilizar letras minúsculas en negrita; para denotar campos tensoriales usaremos letras mayúsculas en negrita.
- En ciertos desarrollos emplearemos la notación de Einstein para el cálculo vectorial con el fin de facilitar la lectura. Se trata de un convenio para operaciones vectoriales que consisten en suprimir los símbolos de sumatorio y entender que se suma sobre los índices repetidos.
- Cuando digamos que una función o campo vectorial es suave, se entenderá que presenta un orden de regularidad lo suficientemente alto como para que las operaciones de diferenciación que se apliquen sobre dicha función estén bien definidas. Si no se especifica ninguna operación, se asumirá que la función es diferenciable  $C^\infty$ .
- Usaremos la notación  $u = O(v)$  para indicar que la norma (o el valor absoluto) de  $u$  es menor o igual que una constante por la norma (o valor absoluto) de  $v$  en el dominio de trabajo. Cuando  $u, v \geq 0$ , escribiremos  $u \lesssim v$  para indicar que existe una constante  $C > 0$  independiente de  $u$  y de  $v$  tal que  $u \leq Cv$ .
- En varios desarrollos matemáticos que presentan una cierta extensión, simplificaremos el lenguaje empleando la notación  $\partial_t f$  y  $\partial_{x_i} f$  para referirnos, respectivamente, a las derivadas parciales de una función  $f$  respecto de la variable temporal  $t$  y respecto de cada coordenada espacial  $x_i$ .

## 2.2. Identidades y resultados básicos del cálculo vectorial

Sean  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  campos vectoriales y  $f, g : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  campos escalares, todos ellos lo suficientemente regulares y definidos en la coordenada temporal hasta un cierto  $T \in (0, \infty]$ . Escribiremos  $f\mathbf{a}$  para denotar el producto entre escalares y vectores,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  para denotar el producto escalar de dos vectores y  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  para denotar su producto vectorial. Además, usaremos la siguiente notación para los operadores diferenciales:

- $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$  el vector gradiente del campo  $f$ ,
- $\nabla \mathbf{a} = \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,2,3}$  la matriz jacobiana del campo  $\mathbf{a}$ ,
- $\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$  la divergencia del campo  $\mathbf{a}$ ,
- $\nabla \times \mathbf{a} = \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2}, \frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right)$  el rotacional del campo  $\mathbf{a}$ .
- $\Delta \mathbf{a} = \nabla^2 \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x_3^2}$  el laplaciano del campo  $\mathbf{a}$ .

Nótese que los operadores diferenciales involucran solamente a las derivadas respecto de las coordenadas espaciales, pero no de la temporal.

Además de los operadores diferenciales, encontraremos las siguientes extensiones del concepto de integral, especialmente en las secciones dedicadas a introducir la dinámica de fluidos y el electromagnetismo.

**Definición 2.2.1.** Sea  $\mathbf{a} : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial lo suficientemente regular. Definimos la *integral de línea* de  $\mathbf{a}$  en una curva regular a trozos  $C \subset \mathbb{R}^3$  como

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} := \int_I \mathbf{a}(t, \phi(\tau)) \cdot \phi'(\tau) d\tau,$$

siendo  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de la curva  $C$  e  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ .

Además, se define la *integral de superficie* en una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  como

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A} := \int_K \mathbf{a}(t, \psi(\sigma, \tau)) \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \times \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) d(\sigma, \tau),$$

donde  $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización de la superficie  $S$  y  $K \subset \mathbb{R}^2$  es un dominio de referencia.

Finalmente, se define la *integral de volumen* en un volumen  $V \subset \mathbb{R}^3$  como

$$\int_V \mathbf{a} d\mathbf{x} := \int \int \int_V \mathbf{a}(t, x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3).$$

Con estas definiciones, se pueden formular dos importantes teoremas que relacionan los diferentes tipos de integrales entre sí.

**Teorema 2.2.2** (Teorema de Stokes). *Sea  $S$  una superficie regular orientada en  $\mathbb{R}^3$  con frontera  $\partial S$ , parametrizada por  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Sea  $\mathbf{a} \in C^1(\phi(M), \mathbb{R}^3)$ . Entonces se verifica que*

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.1)$$

**Teorema 2.2.3** (Teorema de la Divergencia). *Sea  $V \subset \mathbb{R}^3$  un dominio cuya frontera  $\partial V$  es una superficie cerrada regular de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $\mathbf{a} \in C^1(M, \mathbb{R}^3)$ , con  $M \supset V$ . Entonces se verifica que*

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.2)$$

Para finalizar, escribimos un conjunto de identidades vectoriales que serán utilizadas repetidamente a lo largo del trabajo, en especial en el Capítulo 7.

### 1. Productos triples y productos mixtos:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (2.4)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad (2.5)$$

y, en particular,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2. \quad (2.6)$$

### 2. Derivadas del producto:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f, \quad (2.7)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{a}) = f\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla f, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}), \quad (2.10)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{a}) = f\nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla f, \quad (2.11)$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}\nabla \cdot \mathbf{a}. \quad (2.12)$$

### 3. Derivadas segundas:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0, \quad (2.13)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}. \quad (2.15)$$

## 2.3. Resultados básicos de Análisis Funcional

**Teorema 2.3.1** (Desigualdad de Young). Sean  $p, q > 1$  verificando la relación de conjugación  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces, para cualesquiera  $A, B \geq 0$ , se cumple que

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

En particular, si  $p = q = 2$  se tiene que

$$AB \leq \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}.$$

**Teorema 2.3.2** (Desigualdad de Hölder). Sea  $\Omega$  un dominio y sean  $p, q \in [1, \infty]$  verificando la relación de conjugación  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces, para cualesquiera  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $g \in L^q(\Omega)$ , se tiene que  $fg \in L^1(\Omega)$  y su norma verifica

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

En particular, el caso  $p = q = 2$  se conoce como la Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

para  $f, g \in L^2(\Omega)$ .

**Teorema 2.3.3** (Teorema de Lax-Milgram). Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Supongamos que

$$B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

es una forma bilineal continua, es decir, existe una constante  $C > 0$  tal que

$$|B(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad \text{para todo } u, v \in H,$$

y además es coercitiva, es decir, existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$|B(u, u)| \geq \alpha \|u\|^2, \quad \text{para todo } u \in H.$$

Sea  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal y acotado sobre  $H$ . Entonces existe un único elemento  $u \in H$  tal que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in H.$$

El Teorema de Lax-Milgram es una herramienta fundamental para demostrar la existencia y regularidad de soluciones para ecuaciones en derivadas parciales, especialmente en las de tipo elíptico. En este trabajo solo aplicaremos el Teorema de Lax-Milgram sobre ecuaciones diferenciales elípticas de segundo orden. En ellas, la forma bilineal asociada a la ecuación es siempre continua, aunque no necesariamente coercitiva.



## 2.4. Espacios de Sobolev

Para finalizar, recordamos algunos de los conceptos y resultados matemáticos fundamentales relativos a la teoría de espacios de Sobolev, que serán nuestro principal marco de trabajo.

Tomamos  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$  y un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se define el *espacio de Sobolev*  $W^{m,p}(\Omega)$  como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\},$$

donde  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  y  $D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$  es la notación multi-índice para las derivadas parciales en sentido débil, definidas como:

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Este concepto generaliza la idea clásica de derivada, y es aplicable a cualquier función localmente integrable. De esta forma, un espacio  $W^{m,p}(\Omega)$  es más grande que el correspondiente espacio  $C^m(\Omega)$ . Si la función es lo suficientemente regular, su derivada clásica y la derivada débil coincidirían, ya que la integración por partes llevaría a esta relación en el sentido usual.

La importancia que poseen los espacios de Sobolev en el análisis matemático radica en que presentan condiciones apropiadas para el estudio de la existencia y regularidad en las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs). Son espacios de Banach con la norma

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Nótese que si  $m = 0$  entonces  $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ . Además, para todo  $m \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq p \leq +\infty$  se tienen las inclusiones continuas

$$W^{m+1,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

En el caso  $p = 2$ , los espacios de Sobolev se denotan por  $H^m(\Omega) \equiv W^{m,2}(\Omega)$ . Estos espacios serán nuestro marco habitual de trabajo. Su enorme interés radica en que en ellos se puede definir un producto interno a partir del producto de  $L^2(\Omega)$  como

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)},$$

por lo que poseen de manera natural una estructura de espacio de Hilbert. Además, los espacios de Sobolev  $H^m$  están embebidos en espacios de funciones  $C^k$ , como muestra el siguiente resultado:

**Teorema 2.4.1.** *Si  $m, k > 0$  cumplen que*

$$m - \frac{n}{2} > k,$$

*entonces se tiene la inclusión continua  $H^m(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ . Esta inclusión debe entenderse en el sentido de que cualquier clase de equivalencia de  $H^m(\Omega)$  tiene un representante en  $C^k(\Omega)$ .*

Este resultado forma parte del Teorema del Embebimiento de Sobolev, un enunciado más general que incluye a los espacios de Sobolev  $W^{m,p}$  con  $p \neq 2$ . Sin embargo, este caso particular es suficiente para nuestros intereses.

Supongamos ahora que  $\Omega$  está acotado y tiene borde suave. Definimos el *operador traza* como la aplicación lineal continua

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

que es una extensión de la aplicación

$$u \in C^1(\bar{\Omega}) \mapsto u|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega).$$

Así pues, la traza de una función nos permite trabajar con su restricción al borde del dominio aunque esta no esté totalmente definida en el mismo. El núcleo de  $T$  es

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : Tu = 0\},$$

que es un subespacio cerrado de  $W^{1,p}(\Omega)$ , y por tanto también es un espacio de Banach. Además, se puede demostrar que se puede caracterizar como el espacio de las funciones de  $W^{1,p}(\Omega)$  que pueden ser aproximadas por funciones  $C_c^\infty(\Omega)$ , esto es,

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{W^{1,p}(\Omega) \cap C_c^\infty(\Omega)}.$$

Si  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , diremos que  $u = 0$  en  $\partial\Omega$  *en sentido de trazas*.

Por último, enunciamos dos resultados clásicos en la teoría de los espacios de Sobolev:

**Teorema 2.4.2** (Desigualdad de Poincaré). *Sea  $p \in [1, \infty)$  y  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto acotado en al menos una dirección. Entonces existe una constante  $C = C(p, \Omega)$  tal que para cada  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  se tiene:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.16)$$

*En el caso particular en que  $\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$  y  $p = 2$ , se sabe que la menor constante que verifica (2.16), conocida como constante óptima, es  $C = \frac{L}{\pi}$ .*

Considerando funciones constantes se ve fácilmente que esta desigualdad no se cumple en  $W^{1,p}(\Omega)$ . Este teorema afirma que, para  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , la norma  $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$  es equivalente a la usual de este espacio. Su importancia radica en que permite obtener límites en una función a partir de límites en sus derivadas y de la geometría de su dominio de definición. Estas herramientas son importantes en el cálculo de variaciones, un área en el que profundizaremos en el Capítulo 7 de este trabajo.

Además de relacionar la norma  $L^p$  de una función y su derivada, a menudo interesa también relacionar entre sí las distintas normas de Sobolev de una función dada, lo que se denomina interpolación en espacios de Sobolev. Para ello, usaremos la desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg, que es de gran utilidad en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales elípticas (ver [33]).

**Teorema 2.4.3** (Desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg. Formulación general para dominios acotados). Sean  $n, j, m \in \mathbb{Z}^+$  con  $j < m$ , y sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio acotado y de frontera regular. Consideremos  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  y  $\theta \in [0, 1]$  tales que

$$\frac{n}{p} = j + \left(\frac{n}{r} - m\right)\theta + \frac{n}{q}(1 - \theta),$$

y con

$$\frac{j}{m} \leq \theta \leq 1.$$

Entonces, dado  $s > 0$  arbitrario, existe una constante  $C = C(m, j, q, r, s, \theta, \Omega)$  tal que

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|D^m u\|_{L^r(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} + C \|u\|_{L^s(\Omega)},$$

para cualquier función  $u \in L^q(\Omega) \cap L^s(\Omega) \cap W^{m,r}(\Omega)$ .

En el caso excepcional en el que  $1 < r < \infty$  y  $m - j - \frac{n}{r} \in \mathbb{Z}^+$ , entonces debe tomarse  $\frac{j}{k} \leq \theta < 1$ .

La formulación escrita para el resultado es muy general y permite la deducción de varios casos particulares de gran utilidad. En particular, el caso especial que más utilizaremos en nuestros desarrollos matemáticos del Capítulo 7 será el siguiente:

**Corolario 2.4.4.** En el marco de los espacios de Sobolev  $H^s$ , dados  $0 \leq s_1 < s < s_2 < \infty$ , a partir de la igualdad

$$s = \frac{s_2 - s}{s_2 - s_1} \cdot s_1 + \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} \cdot s_2,$$

por la desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg se sigue que existe una constante  $C = C(s, s_1, s_2, \Omega)$  tal que

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{s_1}(\Omega)}^{\frac{s_2 - s}{s_2 - s_1}} \|u\|_{H^{s_2}(\Omega)}^{\frac{s - s_1}{s_2 - s_1}}, \quad (2.17)$$

para cualquier  $u \in H^{s_2}(\Omega)$ ,



## Capítulo 3

# Dinámica de fluidos

“Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.”

(*Clay Mathematics Institute*)

La dinámica de fluidos es el campo de la física-matemática que estudia el movimiento de los fluidos. Constituye una de las disciplinas más estudiadas a lo largo de la historia en la ciencia aplicada, y, a pesar de todo, todavía oculta numerosos misterios en la actualidad, lo que se debe a que la matemática involucrada puede alcanzar una elevada complejidad. Por ejemplo, el fenómeno de la turbulencia aún no dispone de una teoría matemática rigurosa, y el problema de existencia, regularidad y unicidad en las soluciones suaves de las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos en tres dimensiones permanece a día de hoy abierto y forma parte de la lista de los famosos problemas del Milenio del Instituto Clay. Debido a estas dificultades, se considera un área en la que los avances proporcionan una manera de medir el éxito real de la matemática en cada momento histórico. Muchos de los logros importantes en este campo se basan en profundas teorías hidrodinámicas más que en experimentos, y, a su vez, estas teorías estimulan el desarrollo de numerosos dominios de las matemáticas como la topología, el análisis complejo, la teoría de bifurcaciones, los sistemas dinámicos, y, por supuesto, las ecuaciones en derivadas parciales no lineales.

El modelo matemático que conforma los pilares de la dinámica de fluidos está basado en la teoría de los medios continuos, y las leyes de su movimiento vienen dadas por un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales a las que se denomina las *ecuaciones de Navier-Stokes* (aunque para ser precisos, solo describen el movimiento de una extensa familia de fluidos que introduciremos más adelante).

También ocupa un lugar central la versión simplificada de las anteriores ecuaciones conocida como las *ecuaciones de Euler*. Vamos a recordar los elementos básicos y las hipótesis centrales de la teoría, y a derivar las ecuaciones desde cero de forma sintética con el fin de comprender el origen y los efectos de cada uno de sus términos. Además, explicaremos y demostraremos algunas de las propiedades matemáticas del modelo. Serán en particular las ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles, obtenidas de las otras como el caso límite no viscoso, las que nos interesarán a la larga para el estudio que llevaremos a cabo en este trabajo. Las referencias principales que seguiremos en esta sección son [11], [29], [36] y [38].

### 3.1. Hipótesis básicas

La base para el estudio de la dinámica de fluidos es la teoría de los medios continuos. En este marco, se le denomina *fluido* a una distribución continua de partículas puntuales cuya posición en el espacio evoluciona de manera continua conforme avanza el tiempo  $t$ , sin que aparezcan fuerzas internas que intenten recuperar su forma original. Esta propiedad hace que un fluido carezca de una forma definida y se adapte a la del recipiente que lo contiene, si lo hay. Gracias a esta aproximación, podemos trabajar matemáticamente con la sustancia como un *dominio*  $\Omega$  en el espacio euclideo, es decir, como un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^n$  (usualmente con  $n = 2, 3$ ), en lugar de considerar el conglomerado real de moléculas discretas que la componen y cuyo tratamiento matemático sería mucho más complejo. Consideraremos que el dominio  $\Omega$  permanece fijo en el tiempo (esto es, su frontera es inmóvil) y representa el recipiente que contiene al fluido, que puede ser  $\mathbb{R}^n$ . Supondremos también que, si  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ , entonces  $\Omega$  tiene frontera regular, lo que simplifica el planteamiento de las ecuaciones del movimiento. Mientras no se especifique lo contrario, consideraremos que el espacio de trabajo es  $\mathbb{R}^3$ .

La aproximación del medio continuo simplifica enormemente el estudio de un fluido. Su validez requiere que el recorrido libre medio entre colisiones de las partículas del fluido sea mucho menor que las longitudes características mínimas (las distancias más pequeñas a las que las propiedades macroscópicas pueden variar de manera apreciable), que suelen ser del orden de  $10^{-5}$  cm. La aplicabilidad de la teoría se pierde en medios que presentan un recorrido libre medio mayor, como los gases interestelares enrarecidos. En ellos, la acción individual de cada molécula tiene un peso significativo en el movimiento del conjunto, y se debe recurrir a otras teorías de índole estadística.

No basta con el tratamiento del fluido como un continuo de partículas puntuales, el análisis matemático también requiere considerar que los campos que lo caracterizan varían en el medio de forma continua. Esto requiere considerar, a escalas mucho mayores que el recorrido libre medio y mucho menores que la escala de trabajo, un volumen infinitesimal de fluido centrado en cada punto espacial  $\mathbf{x}$  al que se conoce como *elemento de fluido*. Esta región elemental se representa matemáticamente por la medida de Lebesgue  $d\mathbf{x}$  en  $\Omega$  y se trata de un medio continuo y homogéneo

en el que está bien definida la velocidad media, que haremos corresponder con el vector *velocidad* del fluido en dicho elemento. De forma similar, podemos definir una densidad elemental, que es la masa contenida por unidad de volumen; o una presión elemental, entendida como el valor absoluto de la fuerza por unidad de superficie a través de una superficie infinitesimal que contiene a la partícula. Esta última variable se asume que es la misma en toda las direcciones, por lo que se caracteriza como un campo escalar.

Resumidamente, en un medio continuo se ignora por completo la estructura molecular y se trabaja con partículas puntuales ideales y con los promedios de las propiedades del fluido de cada elemento de volumen, que pasan a ser los valores puntuales. Al conjunto de todas estas hipótesis se le denomina la *Hipótesis del continuo*.

### 3.2. Planteamiento

La caracterización completa de la distribución y el movimiento del fluido requiere fundamentalmente el conocimiento de tres campos que dependen del tiempo y de la posición espacial: el campo escalar no negativo de *densidad de masa*  $\rho(t, \mathbf{x})$ ; el campo escalar de *presión del fluido*  $p(t, \mathbf{x})$ ; y el campo vectorial de *velocidad del fluido*  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ , los tres definidos en  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Además, supondremos que  $\rho(t, \cdot) \in L^1(\Omega)$ . Si nos interesara realizar un estudio energético, tendríamos que introducir también el campo escalar definido positivo de *temperatura del fluido*. En la física de plasmas, la densidad de masa se reemplaza frecuentemente por otro campo escalar no negativo equivalente al que se denomina *densidad de número de partículas*, y que se define en términos de la densidad de masa por

$$n(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x})/m,$$

considerando que todas las partículas tienen la misma masa  $m$ . Dado un volumen arbitrario  $W \subset \Omega$  abierto, acotado y con frontera regular, que denominamos *volumen de control*, la masa de fluido contenida en  $W$  en un instante  $t$  está dada por

$$M(t) = \int_W \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

mientras que el número de partículas encerradas en  $W$  en el instante  $t$  será

$$N(t) = \int_W n(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Existen dos enfoques complementarios para describir estos campos. El *enfoque euleriano* centra su estudio analítico en un punto determinado del espacio, y no tiene interés en la partícula específica que ocupa dichas coordenadas en cada instante, sino en el valor que toman los campos en dicho punto particular a lo largo del tiempo. Por otro lado, el *enfoque lagrangiano* se centra en la variación del valor de las propiedades del fluido sobre una partícula concreta a lo largo de su recorrido. Ambos puntos de vista son equivalentes.

En la descripción lagrangiana, a cada partícula se le hacen corresponder sus coordenadas espaciales  $\alpha = (x_0, y_0, z_0)$  en un instante inicial  $t_0$ , y se estudia la evolución temporal de su posición a través de la función que describe su trayectoria: la *curva característica* o *aplicación de trayectoria* asociada a la partícula  $\alpha$ . Esta aplicación se define como la curva  $\mathbf{X}(t; t_0, \alpha)$  que cumple

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}(t)), \quad \mathbf{X}(t_0; t_0, \alpha) = \alpha, \quad (3.1)$$

para  $t \geq t_0$ . Así pues,  $\mathbf{X}(\cdot, t_0, \alpha)$  es una aplicación diferenciable que nos proporciona la posición en el instante  $t$  de la partícula que ocupaba la posición  $\alpha$  en el instante inicial  $t_0$ , ya que  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  es el vector cuya dirección y magnitud son las de la velocidad de la partícula del fluido que está en el punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  en el instante  $t$ . Resultados básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias garantizan la existencia y unicidad local de soluciones del problema de Cauchy (3.1). Una recopilación compacta de resultados sobre EDOs para campos vectoriales se puede encontrar en [30].

Conocido el concepto de curva característica, se puede introducir el *flujo* del campo  $\mathbf{u}$  como la aplicación

$$\begin{aligned} F_{t_0 \rightarrow t}: \quad \Omega &\longrightarrow \Omega \\ \alpha &\longmapsto \mathbf{X}(t; t_0, \alpha), \end{aligned}$$

siendo  $t_0, t \in \mathbb{R}$  dos instantes prefijados con  $t \geq t_0$ . El flujo  $F_{t_0 \rightarrow t}$  lleva cada punto espacial  $\alpha$  a la posición que ocupa en el instante  $t$  la partícula del fluido que estaba en  $\alpha$  en un instante inicial  $t_0$ .

Esta herramienta proporciona una definición equivalente del movimiento del fluido, es decir, el campo  $\mathbf{u}$  y  $F_{t_0 \rightarrow t}$  contienen la misma información. Nótese que  $F_{t_0 \rightarrow t}$  está bien definida debido a la unicidad de la solución del problema de Cauchy para las trayectorias. Desde un punto de vista físico, el flujo describe el desplazamiento del fluido: dado un volumen de control  $W \subset \Omega$ , entonces  $F_{t_0 \rightarrow t}(W)$  es el volumen ocupado en el instante  $t$  por los elementos del fluido que estaban inicialmente en  $W$ .

De forma complementaria a las curvas de trayectorias, se define también una *línea de corriente* del fluido en un instante  $t$  fijado como una línea del campo  $\mathbf{u}(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es decir, una curva cuyo vector tangente en cada punto viene dado por el correspondiente vector del campo de velocidades evaluado en el tiempo  $t$ . Si  $\mathbf{X}(s)$  es la curva parametrizada de una línea de corriente en el instante  $t$  fijado, entonces satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}(s)). \quad (3.2)$$

Cuando  $\mathbf{u}$  es independiente de  $t$  (esto es, si  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ ), entonces las trayectorias y las líneas de corriente coinciden. En este caso, se dice que el flujo es *estacionario*.

En la misma línea de los dos enfoques complementarios para analizar los campos, podemos definir la *derivada euleriana* como el operador que al aplicarse sobre un campo  $f$  nos proporciona su derivada temporal manteniendo fija la posición en la que está evaluado. En otras palabras, la derivada euleriana de  $f$  es su derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial t}$ . Análogamente, la *derivada material*, o *derivada*



de *Lagrange*, es el operador  $D/Dt$  que proporciona la variación temporal del campo  $f$  evaluado en una partícula determinada, por lo que también describe la evolución del valor de  $f$  debida al movimiento de la partícula a lo largo de su trayectoria. Para su cálculo, hay que derivar la expresión del campo  $f$  como función de las curvas características  $\mathbf{X}(t)$ , por lo que la derivada material de  $f$  se calcula como

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{f(t, \mathbf{X}(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (3.3)$$

Si  $f$  es un campo escalar, el término

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

es el producto escalar de  $\mathbf{u}$  y el vector gradiente de  $f$ . Si, por el contrario,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$  es un campo vectorial, entonces  $\nabla \mathbf{f} \equiv \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,2,3}$  es su matriz jacobiana, y

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{f} \equiv (\nabla \mathbf{f}) \cdot \mathbf{u} \equiv D_{\mathbf{u}} \mathbf{f}$$

se refiere a la derivada direccional del campo  $\mathbf{f}$  en la dirección del vector  $\mathbf{u}$ , dada por la multiplicación usual de una matriz y un vector:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{f})_i = u_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j},$$

En la expresión (3.3) de la derivada material, el primer sumando es la derivada euleriana, mientras que el segundo describe la variación que experimenta el campo  $f$  como consecuencia de su transporte por el flujo. A este efecto se le conoce como *advección*, o *convección*. La derivada material posee las propiedades más importantes de la derivada usual:

- La derivada de la suma y del producto

$$\frac{D}{Dt}(f + g) = \frac{Df}{Dt} + \frac{Dg}{Dt}, \quad \frac{D}{Dt}(f \cdot g) = g \frac{Df}{Dt} + f \frac{Dg}{Dt}.$$

- La regla de la cadena

$$\frac{D(g \circ f)}{Dt} = \left( \frac{Dg}{Dt} \circ f \right) \cdot \frac{Df}{Dt}.$$

### 3.3. Derivación de las ecuaciones

Las EDPs que rigen la dinámica de fluidos son las ecuaciones de Navier-Stokes. Para derivarlas, se parte de tres principios básicos de la Física Clásica:

- La masa no se crea ni se destruye. Se le denomina la *ley de conservación de la masa*.
- La variación temporal del momento lineal (o cantidad de movimiento) de una porción del fluido es igual a la fuerza neta que se ejerce sobre ella. Se le denomina la *segunda ley de Newton* o *ley de conservación del momento lineal*.

- La energía no se crea ni se destruye. Se le denomina la *ley de conservación de la energía*. Este principio no es necesario para nuestros objetivos, por lo que no lo tendremos en cuenta.

Además del acoplamiento de estas leyes con las herramientas de la teoría de medios continuos, se utilizan también una serie de suposiciones que simplifican razonablemente el análisis matemático.

Desde el enfoque lagrangiano, en dinámica de fluidos se estudia la variación de las propiedades en un volumen arbitrario del fluido en movimiento. Si consideramos un volumen de control  $W \subset \Omega$  en un tiempo inicial  $t_0$  fijado, su evolución temporal está dada para cada instante  $t \geq t_0$  en términos del flujo de  $\mathbf{u}$  como

$$W_t = F_{t_0 \rightarrow t}(W) = \mathbf{X}(t; t_0, W).$$

Para calcular la variación temporal de una función  $f(t, \mathbf{x})$  en  $W_t$ , utilizamos el siguiente teorema:

**Teorema 3.3.1** (Teorema del Transporte). *Sea  $W \subset \Omega$  un dominio abierto, acotado y con frontera regular, y sea  $\mathbf{X}$  la aplicación de trayectoria asociada a un campo de velocidad suave  $\mathbf{u}$ . Entonces, para toda función suave  $f(t, \mathbf{x})$  definida en  $\Omega$ ,*

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{W_t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} = \int_{W_t} \left( \frac{Df}{Dt} + f \nabla \cdot \mathbf{u} \right) d\mathbf{x}. \quad (3.4)$$

Para demostrar este teorema, necesitamos primero introducir el jacobiano del flujo  $F_{t_0 \rightarrow t}$  como

$$J = J(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}) = \det \left( \frac{\partial X_i(t; t_0, \boldsymbol{\alpha})}{\partial x_j} \right) = \det \nabla F_{t_0 \rightarrow t}.$$

El siguiente lema describe la evolución de este parámetro:

**Lema 3.3.2.** *Sea  $\mathbf{X}(t; t_0, \cdot)$  la aplicación de trayectoria asociada a un campo de velocidad suave  $\mathbf{u}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}) = (\nabla \cdot \mathbf{u})(t, \mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha})) J(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}). \quad (3.5)$$

*Demostración.* Por ser el determinante multilineal en columnas (y filas), calculamos la derivada temporal como:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \det \left[ \frac{\partial X^i}{\partial \alpha_j}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}) \right] = \sum_{i,j} A_i^j \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial X^i}{\partial \alpha_j}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}),$$

donde  $A_i^j$  es el menor del elemento  $\frac{\partial X^i}{\partial \alpha_j}$  de la matriz  $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{X}$ . Los menores verifican la conocida identidad

$$\sum_j \frac{\partial X^k}{\partial \alpha_j} A_i^j = \delta_i^k J,$$

donde introducimos la delta de Kronecker. Entonces, usando la definición de la aplicación de trayectorias (3.1), tenemos

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i,j,k} A_i^j \frac{\partial X^k}{\partial \alpha_j} \frac{\partial u^i}{\partial x_k} = \sum_{i,k} \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \delta_i^k J = J \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

□

Nótese que el jacobiano  $J(t; t_0, \boldsymbol{\alpha})$  no depende de la posición actual  $\mathbf{x}$ , sólo de las coordenadas iniciales  $\boldsymbol{\alpha}$ . Por lo tanto, podríamos reescribir (3.5) empleando la notación de la derivada temporal total  $\frac{dJ}{dt}$ , pero no lo haremos para no sobrecargar la notación. Ahora, demostramos el teorema:

*Demostración del Teorema de Transporte.* Mediante un cambio de variables  $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha})$ , reducimos la integración sobre el dominio móvil  $W_t = \mathbf{X}(t; t_0, W)$  a la integración sobre el dominio fijo  $W$ :

$$\int_{W_t} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_W f(t, \mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha})) J(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}) \, d\boldsymbol{\alpha}.$$

Entonces, la definición (3.1) implica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{W_t} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_W \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \nabla f \right) J + f \frac{\partial J}{\partial t} \right] d\boldsymbol{\alpha} \\ &= \int_W \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{u} \right) J \, d\boldsymbol{\alpha} \\ &= \int_{W_t} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{u}) \right] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

□

### 3.3.1. Conservación de la masa

La ley de conservación de la masa establece que la masa contenida en un volumen del fluido arbitrario permanece constante en su evolución. Sea  $W_t$  un volumen de control abierto, acotado y con frontera regular. La masa que contiene el volumen en el instante  $t$  es  $M(t) = \int_{W_t} \rho(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ . Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} M(t) = 0, \quad \text{para todo } t,$$

y, aplicando (3.4) del Teorema de Transporte, tenemos

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{W_t} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})(t, \mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}. \quad (3.6)$$

Puesto que esta ecuación se satisface para cualquier dominio  $W_t$  cumpliendo las condiciones del Teorema de Transporte, podemos escribir, finalmente, la ecuación de conservación de la masa de la dinámica de fluidos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.7)$$

Una sencilla interpretación de esta ecuación se obtiene aplicando en (3.6) el Teorema de la Divergencia. Se sigue que

$$- \int_{W_t} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial W_t} \rho \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Así pues, se trata de una *ecuación de continuidad*. Esto significa que en cada instante de tiempo se expresa como una igualdad entre la velocidad de cambio de una magnitud definida en un volumen

de control  $W_t$  y la cantidad que atraviesa su frontera, a la que se añade la que se crea o consume en las fuentes y sumideros del campo. Sin embargo, este último término no existe en el caso de la función densidad, debido a la ley de la conservación de la masa.

La ecuación de conservación de la masa tiene otra formulación más geométrica, que vamos a derivar. Por la definición de derivada material (3.3), la ecuación (3.7) equivale a:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.8)$$

Para  $t$  y  $t_0$  fijados (con  $t \geq t_0$ ), consideramos de nuevo el jacobiano  $J = J(t; t_0, \boldsymbol{\alpha})$  del flujo  $F_{t_0 \rightarrow t}$ , que describe la medida de expansión o compresión local de un volumen de fluido a lo largo de su trayectoria. Por ser  $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha})$  un difeomorfismo, entonces debe ser  $J \neq 0$ . En consecuencia, (3.8) equivale a

$$0 = \frac{D\rho}{Dt} J + \rho J (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{D\rho}{Dt} J + \rho \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{D}{Dt}(\rho J),$$

y, por tanto, la ecuación de conservación de la masa (3.7) es equivalente a

$$\frac{D}{Dt}(\rho J) = 0. \quad (3.9)$$

Esta fórmula es útil para comprender el concepto de la incompresibilidad. Se denominan *fluidos incompresibles* a aquellos para los que la medida de cualquier volumen del fluido permanece constante a lo largo de su trayectoria, sin sufrir compresiones ni expansiones. Esta condición posee varias formulaciones equivalentes, que mostramos en el siguiente resultado:

**Proposición 3.3.3.** *Sea  $W_t$  un volumen de control tal que  $W_{t_0} = W$ . Las propiedades siguientes son equivalentes:*

1. *El flujo de  $\mathbf{u}$  es incompresible, esto es,  $\text{Vol}(W_t) = \text{Vol}(W)$ , para todo  $t \geq t_0$ .*
2.  *$J(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}) = 1$ , para todo  $t \geq t_0$ ,*
3.  *$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .*

*Demostración.* Si consideramos un volumen  $W$  del fluido en un instante  $t_0$ , el volumen  $W_t$  que ocupará en  $t \geq t_0$  verifica la igualdad

$$\text{Vol}(W_t) = \int_{W_t} d\mathbf{x} = \int_W J(t) d\boldsymbol{\alpha} = \int_W d\boldsymbol{\alpha} = \text{Vol}(W),$$

si y solo si  $J(t) = 1$ , para todo  $t \geq t_0$ . Además, en este caso, la ley de conservación de la masa (3.9) toma la forma

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (3.10)$$

lo que significa que la densidad de cualquier partícula fluida permanece constante a lo largo de su trayectoria. Entonces, de (3.8) se deduce que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.11)$$

Recíprocamente, suponiendo que se cumple (3.11), podemos aplicar el Teorema del Transporte a la función  $f = 1$ , cuya integral en un volumen de control  $W_t$  proporciona la medida de su volumen. Entonces,

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(W_t) = \frac{d}{dt} \int_{W_t} 1 \, d\mathbf{x} = \int_{W_t} \left( \frac{\partial 1}{\partial t} + \nabla \cdot (1 \cdot \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} = \int_{W_t} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0,$$

por lo que  $\text{Vol}(W_t) = \text{Vol}(W)$ , para todo  $t \geq t_0$ , y el fluido es incompresible.  $\square$

Podemos dar una idea intuitiva de la interpretación física de la ecuación (3.11) usando el Teorema de la Divergencia. Integrando en una superficie cerrada regular arbitrario, el flujo neto de  $\mathbf{u}$  a través de esta será nulo, por lo que la superficie no podrá variar el volumen que encierra por compresiones o expansiones. Desde la perspectiva del mundo físico real, normalmente son fluidos incompresibles los líquidos y compresibles los gases, aunque en muchas ocasiones estos también se comportan aproximadamente como fluidos incompresibles.

Desde este momento, limitaremos nuestro análisis a los fluidos incompresibles, por lo que podemos añadir la ecuación (3.11) a nuestra construcción. Además, haremos otra restricción incorporando la hipótesis de homogeneidad a la clase de fluidos que estamos estudiando. Un fluido *homogéneo* es aquel se cumple que la densidad es constante en el espacio:  $\rho = \rho(t)$ . En este caso, se verifica que

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

por lo que

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

es decir, un fluido homogéneo es incompresible si y solo si la densidad es independiente del tiempo y es, por tanto, un campo constante.

### 3.3.2. Conservación del momento

La ley de conservación del momento lineal describe la dinámica de cualquier cuerpo en la física clásica. La versión más básica de esta ecuación es la que describe la dinámica de una partícula puntual de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}),$$

donde  $\mathbf{F}$  es la resultante de las fuerzas ejercidas sobre dicha partícula. La versión de esta ley para medios continuos requiere considerar un volumen de control  $W_t$ , de forma que

$$\frac{d}{dt} I(W_t) = \mathbf{F}(W_t), \tag{3.12}$$

donde

$$I(W_t) = \int_{W_t} \mathbf{u} \, dm = \int_{W_t} \mathbf{u} \rho \, d\mathbf{x}$$

es el impulso del fluido en  $W_t$ , y

$$\mathbf{F}(W_t) = \mathbf{F}_e(W_t) + \mathbf{F}_c(W_t) = \int_{W_t} \mathbf{f}_e(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{W_t} \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

es la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre el fluido. El término  $\mathbf{f}_e$  hace referencia a las fuerzas debidas a campos externos o *fuerzas de volumen*. Generalmente se trata del campo gravitatorio, por lo que se suele escribir  $\mathbf{f}_e \equiv \rho \mathbf{g}$ , aunque podría ser un campo electromagnético, como ocurre en la teoría de la MHD, o de origen químico. Por otro lado,  $\mathbf{f}_c$  representa las *fuerzas de contacto* o internas en el medio continuo, y que tienen su origen en el movimiento relativo de las capas de fluido contiguas.

Podemos utilizar el Teorema de Transporte para escribir

$$\frac{d}{dt}I(W_t) = \int_{W_t} \frac{D}{Dt}(\mathbf{u}\rho) \, d\mathbf{x} = \int_{W_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, d\mathbf{x},$$

donde usamos la condición de incompresibilidad (3.10). Como la igualdad (3.12) se cumple para cualquier volumen de control, la ley de conservación del momento para dinámica de fluidos se formula como

$$\rho(t, \mathbf{x}) \frac{D\mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{Dt} = \mathbf{f}_e(t, \mathbf{x}) + \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}). \quad (3.13)$$

Esta igualdad establece que la variación temporal (lagrangiana) del *momento lineal*  $\rho\mathbf{u}$  en una partícula fluida es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella, asumiendo que  $\rho$  es constante.

El término de contacto  $\mathbf{f}_c$  surge de forma natural debido a la Hipótesis del continuo, por lo que es característico para esta disciplina. Para describir su estructura se introdujo el concepto del *tensor de esfuerzos*  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t, \mathbf{x})$ , un campo tensorial simétrico de segundo orden y dimensión 3. Cada elemento  $T_{ij}$  de este campo, con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , representa la fuerza por unidad de superficie que actúa sobre la partícula fluida en la dirección  $i$  sobre la cara perpendicular al eje  $j$ . De esta forma, los elementos de su diagonal describen las componentes de la tensión normal, que incluye la presión ejercida por el fluido que rodea al elemento de volumen considerado, y los demás elementos son las componentes de la tensión de arrastre.

El tensor de esfuerzos se relaciona con la fuerza de contacto  $\mathbf{f}_c$  a través de la expresión

$$\mathbf{f}_c = \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (3.14)$$

Su deducción y propiedades detalladas se pueden encontrar en la referencia [13]. La expresión resultante al sustituir (3.14) en la ecuación del momento (3.13) se denomina la *ecuación de momentum de Cauchy*:

$$\rho(t, \mathbf{x}) \frac{D\mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{Dt} = \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{T}(t, \mathbf{x}),$$

o, alternativamente,

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \rho g_j + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}. \quad (3.15)$$

El objetivo ahora es calcular una expresión analítica del campo  $\mathbf{T}$  para seguir desarrollando la ecuación. Para ello, se realiza la suposición de que para cada punto e instante temporal, el tensor  $\mathbf{T}$  solamente depende de  $\mathbf{u}$  a través del gradiente de la velocidad  $\nabla \mathbf{u}$  evaluado en dichas coordenadas.

Introducimos el *campo tensorial de deformación*  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t, \mathbf{x})$ , como la parte simétrica de  $\nabla \mathbf{u}$ . Así pues, sus componentes  $S_{ij}$  son

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (3.16)$$

para  $i, j = 1, 2, 3$ . Por construcción, el tensor  $\mathbf{S}$  es simétrico y, a grandes rasgos, describe el ritmo de deformación al que se ve sometido cada punto del fluido. Ahora bien, asumiendo que se verifica la condición de incompresibilidad (3.11), se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{tr } \mathbf{S} = 0, \quad (3.17)$$

para todo  $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega$ . Se le denomina *ecuación constitutiva* a la relación funcional entre el campo tensorial  $\mathbf{T}$  y el tensor de deformación  $\mathbf{S}$ , y es una propiedad característica del fluido y determina sus propiedades.

Ahora, realizaremos una nueva restricción en nuestros fluidos de estudio introduciendo la clase de fluidos *Newtonianos* como aquellos para los que la ecuación constitutiva es una relación afín<sup>1</sup>. Supondremos también que la presión sobre un elemento de fluido es isótropa, es decir, presenta el mismo comportamiento en todas las direcciones. Entonces, podemos introducir el campo de presión  $p = p(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ , el coeficiente de *viscosidad volumétrica*  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y el coeficiente de *viscosidad dinámica*<sup>2</sup>  $\mu \in [0, \infty)$ , que a priori consideraremos constante (en realidad varía con la temperatura), como aquellos para los que la ecuación constitutiva se expresa como

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}_3 + 2\mu\mathbf{S} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}_3, \quad (3.18)$$

donde  $\mathbf{I}_3$  denota la matriz identidad  $3 \times 3$ . Se recomienda la referencia [38] para ver la demostración rigurosa de este desarrollo. La hipótesis de incompresibilidad (3.17) hace nulo el último término de la ecuación. Se llaman *fluidos viscosos* aquellos para los que la viscosidad dinámica es positiva, y *fluidos no viscosos* o *fluidos perfectos* los que verifican que  $\mu = 0$ .

Introduciendo la expresión explícita (3.16) del campo de deformación  $\mathbf{S}$  en la ecuación constitutiva (3.18), obtendremos que las componentes del tensor de esfuerzos en un fluido incompresible, Newtoniano y con presión isótropa vienen dadas por

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (3.19)$$

---

<sup>1</sup>Aunque parezca una restricción considerable, la mayoría de líquidos en el mundo real son Newtonianos. Algunos ejemplos de los que pertenecen a la clase de fluidos no-Newtonianos son la sangre y las pinturas.

<sup>2</sup>Se puede deducir de forma cualitativa la no negatividad del coeficiente mediante sencillos modelos físicos (véase la referencia [18]).

para cada  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . En esta expresión hemos usado la delta de Kronecker  $\delta_{ij}$ . Si derivamos la expresión (3.19) respecto de  $x_i$ , obtenemos

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i}, \quad (3.20)$$

donde aplicamos de nuevo la condición de incompresibilidad para hacer  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ .

### 3.4. Formulación de las ecuaciones

Sustituyendo la igualdad (3.20) en la ecuación del momentum (3.15), alcanzamos finalmente las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles y Newtonianos

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

en  $\Omega$ . Suponiendo que la densidad es no nula en todo punto de  $\Omega$  y todo instante de tiempo, podemos dividir entre la densidad. Entonces, introduciendo el parámetro de *viscosidad cinemática* (o, simplemente, *viscosidad*) como  $\nu = \frac{\mu}{\rho} \geq 0$ , reescribimos las ecuaciones como

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Constituyen un sistema de EDPs de segundo orden, debido a la presencia del laplaciano  $\Delta$ , con una no linealidad cuadrática originada en el producto  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ . En su formulación para  $\mathbb{R}^3$ , el sistema está formado por cinco ecuaciones y posee cinco incógnitas: el campo de velocidades  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ , con 3 componentes, el campo de densidad  $\rho$  y el campo de presiones  $p(t, \mathbf{x})$ . Así pues, el sistema está cerrado. Nótese que esto no ocurriría si considerásemos fluidos compresibles, en cuyo caso necesitaríamos algunas hipótesis adicionales. Analicemos término a término las ecuaciones:

- El lado izquierdo de la igualdad,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ , es la derivada material del campo de velocidades, que describe la aceleración que una partícula determinada experimenta en su trayectoria.
- El primer término del lado derecho de la ecuación (3.22),  $-\frac{1}{\rho} \nabla p$  constituye una aceleración que está dirigida desde las partes del medio sometidas a una mayor presión interna hacia las de menor presión. Además, el peso de este término en la ecuación es inversamente proporcional a la densidad del fluido. En muchas ocasiones se trabaja con una función  $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  llamada *entalpía* que cumple que  $\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla p$ . Los fluidos en los que existe tal función se denominan *isentrópicos*.



- El término  $\mathbf{g}$  es la resultante de las aceleraciones externas por unidad de volumen ejercidas sobre el fluido. Para un campo *conservativo*, existe una función potencial  $U$  que cumple que  $\mathbf{g} = -\nabla U$ . Así pues, en este caso se puede incluir  $\mathbf{g}$  en el término de presión y escribir  $-\nabla\pi$ , siendo  $\pi = p + \rho U$  la *presión no hidrostática*. Para la teoría de la MHD, habrá que considerar como campo externo la fuerza de Lorentz ejercida sobre el fluido debido a su condición de conductor eléctrico. Estudiaremos este campo en el siguiente capítulo.
- El término  $\nu\Delta\mathbf{u}$  expresa el efecto de *difusión* en el fluido a través de las fuerzas viscosas de rozamiento interno entre las partículas que lo componen.

Para tener un problema matemáticamente bien propuesto en el sentido matemático, se requieren datos adicionales. Por una parte, se imponen unas condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (3.23)$$

para algún campo  $\mathbf{u}_0$  prefijado y definido en  $\Omega$ . Si ocurriera que  $\partial\Omega \neq \emptyset$ , se suelen imponer condiciones del tipo Dirichlet, que usualmente toman la forma

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Esta condición refleja la existencia de una pared impermeable que encierra al fluido. Si las paredes fueran permeables podríamos pedir que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g(x), \quad \text{en } \partial\Omega,$$

y en este caso la condición de incompresibilidad requeriría que se diera la igualdad

$$\int_{\partial\Omega} g(x) \, d\mathbf{A} = 0,$$

es decir, debería salir de  $\Omega$  tanto fluido como el que entra.

Introducidas las ecuaciones de Navier-Stokes, ahora presentamos la versión no viscosa. Se denomina *fluidos ideales* a aquellos que son perfectos (no viscosos), incompresibles y homogéneos (es por ello que supondremos  $\rho = 1$  sin pérdida de generalidad). La dinámica de esta clase de fluidos está descrita por un sistema de EDPs no lineales conocido como las *ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles*, que se obtiene a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (3.22) tomando el límite  $\nu \rightarrow 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.24)$$

Nótese que, por ser  $\rho$  constante, la ecuación de conservación de la masa se verifica trivialmente en los fluidos ideales. Si aplicamos el operador divergencia a ambos lados de la primera ecuación del sistema (3.24), se obtiene la ecuación de Poisson

$$-\Delta p(t, \mathbf{x}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))^2.$$

Entonces, asumiendo ciertas condiciones de regularidad y decaimiento en el infinito, podemos expresar (ver [37]) el gradiente de la presión como

$$\nabla p(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))^2 d\mathbf{y}. \quad (3.25)$$

De esta forma, la presión queda determinada a partir de la velocidad salvo un término que solo depende del tiempo y no de la posición.

Eliminar la viscosidad es normalmente una simplificación muy grande para cualquier tipo de fluidos, ya que la fricción existe en el mundo real y su omisión podría dar lugar a paradojas y fenómenos sin sentido físico. Sin embargo, en una cantidad de situaciones prácticas esta aproximación funciona bien, como para la teoría estándar de la MHD ideal, que trabajaremos posteriormente.

A nivel matemático, la atención que se les da a estas ecuaciones se debe a su complejidad y a la vasta cantidad de cuestiones y problemas interesantes que se derivan de las mismas. Respecto al estudio de las soluciones del sistema definido en  $\mathbb{R}^3$ , a día de hoy únicamente solo se ha logrado demostrar para condiciones iniciales regulares la existencia de una única solución regular de manera local en el tiempo, esto es, definida en un intervalo de tiempo finito (ver [37]).

### 3.5. Formulación de Bernoulli

En los fluidos ideales, cuando la fuerza exterior es conservativa ( $\mathbf{g} = -\nabla U$ ) se puede derivar fácilmente una cantidad que actúa como integral primera del movimiento en algunos casos simplificados. Para obtenerla, necesitamos hacer ciertas transformaciones en las Ecuaciones de Euler (3.24). Utilizando la identidad vectorial (2.8), podemos escribir

$$\frac{1}{2} \nabla (\|\mathbf{u}\|^2) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}).$$

Con esta transformación, la ecuación del movimiento del sistema de ecuaciones de Euler queda

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla H, \quad (3.26)$$

siendo

$$H = \frac{\mathbf{u}^2}{2} + p + U \quad (3.27)$$

la *función de Bernoulli*. Este término se trata de una función potencial que actúa como una energía total del sistema pues está compuesta de tres energías distintas: la energía cinética  $\mathbf{u}^2/2$ , la energía de presión  $p$  (en caso de considerar una  $\rho$  constante arbitraria, habría que escribir  $p/\rho$ ) y un término de energía potencial  $U$ .

Para estudiar los casos en los que se conserva la función de Bernoulli, consideremos el *problema estacionario* asociado al sistema de Euler (3.24), en el que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$ . En el problema estacionario

se suprimen de (3.24) las derivadas temporales y se eliminan las condiciones iniciales, quedando

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

o, si usamos la formulación equivalente que acabamos de deducir:

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla H, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

La relevancia de las soluciones estacionarias en la Dinámica de Fluidos es el hecho comprobado de que la evolución del sistema partiendo de muy diversas condiciones tiende, tras una etapa transitoria, hacia el estado estable que describe en forma estacionaria. Si consideramos una solución de (3.29) y suponemos que el fluido es irrotacional ( $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ) rápidamente deducimos el siguiente resultado:

**Teorema 3.5.1** (Ley de Bernoulli). *En un fluido ideal, estacionario e irrotacional, la función de Bernoulli  $H$  es constante en el dominio (conexo) de definición del flujo,*

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + p + U = \text{cte.}$$

Si el fluido no sólo fuera estacionario, si no que fuera *estático*, lo que ocurre cuando no hay ningún movimiento en el mismo ( $\mathbf{u} = 0$ ), entonces la ecuación de Euler se reduciría a

$$-\nabla H = 0,$$

con  $H = p + U$ , que de nuevo sería constante en las componentes conexas del dominio  $\Omega$ . Lo mismo ocurriría si el movimiento del fluido fuese uniforme (con velocidad constante). El Teorema 3.5.1 tiene una versión generalizada para flujos rotacionales:

**Teorema 3.5.2** (Ley de Bernoulli (versión general)). *En un fluido ideal y estacionario sometido a un campo de fuerzas externas conservativo, la función de Bernoulli  $H$  es constante a lo largo de las trayectorias de las partículas del fluido (que coinciden con las líneas de corriente).*

*Demostración.* Sea  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha})$  la trayectoria de la partícula del fluido que ocupa la posición  $\boldsymbol{\alpha}$  en el instante  $t_0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\|\mathbf{u}\|^2 + p + U) \Big|_{\mathbf{X}(t_0)}^{\mathbf{X}(t_1)} &= \int_{\mathbf{X}(t_0)}^{\mathbf{X}(t_1)} \nabla \left( \frac{1}{2} (\|\mathbf{u}\|^2 + p + U) \right) \cdot \mathbf{X}'(t) dt \\ &= \int_{\mathbf{X}(t_0)}^{\mathbf{X}(t_1)} (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \cdot \mathbf{X}'(t) dt = 0, \end{aligned}$$

ya que  $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t))$  es ortogonal a  $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ . □

De esta forma, en un fluido estacionario sometido a fuerzas conservativas la función de Bernoulli  $H$  toma un valor característico en cada trayectoria o línea de corriente, que recordemos que son las curvas integrales del campo  $\mathbf{u}(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Así pues,  $H$  es una integral primera del movimiento y  $H = H(\boldsymbol{\alpha})$ . Esta propiedad de  $H$  permite además determinar en una trayectoria cualquiera de los tres campos que la componen ( $\mathbf{u}$ ,  $p$  ó  $U$ ) conocidos los otros dos y el valor que toma  $H$  en esa curva.

En el caso en el que  $H$  es constante, el campo  $\mathbf{u}$  verifica

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = 0, \quad (3.30)$$

por lo que  $\mathbf{u}$  y  $\nabla \times \mathbf{u}$  son paralelos en todo punto. A los campos que verifican esta condición se les denomina en general *campos de Beltrami*, aunque en el área de la MHD se les suele llamar *campos force-free*.

### 3.6. Análisis local del campo de velocidades

El campo de velocidades  $\mathbf{u}$  de un fluido ideal ocupa un lugar central en nuestro trabajo, ya que, al igual que en las ecuaciones de Euler, también juega un papel importante en las ecuaciones de la MHD, y el resultado que probaremos en el Capítulo 7 está formulado para este mismo campo. Es por ello que realizaremos ahora un pequeño estudio para adquirir una buena intuición de la manera en la que este campo se comporta localmente. El método seguido para esta descripción local, extraído de la referencia [29], consiste en descomponer  $\mathbf{u}$  como suma de varios campos más sencillos, y nos servirá para introducir el campo de vorticidad  $\boldsymbol{\omega}$ .

Vamos a considerar un fluido ideal en  $\mathbb{R}^3$  cuyo movimiento está determinado por un campo de velocidades  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x}), u_3(t, \mathbf{x}))$  suave y definido para  $(t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ . Fijemos un instante de tiempo y punto espacial  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ . Con el objetivo de conocer el  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  en un entorno del punto  $\mathbf{x}_0$ , realizamos una expansión de Taylor de primer orden del campo  $\mathbf{u}$  respecto de  $\mathbf{x}$  en torno al punto  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ :

$$\mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0) + \nabla \mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}^2\|),$$

para  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ . La matriz jacobiana de  $\mathbf{u}$  en el punto  $(t_0, \mathbf{x}_0)$

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij}(t_0, \mathbf{x}_0) \equiv (\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \partial_{x_j} u_i,$$

con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , admite una descomposición única como

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{S} + \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.31)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{S}(t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \\ \mathbf{\Omega} &= \mathbf{\Omega}(t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T),\end{aligned}$$

son, respectivamente, la parte simétrica y antisimétrica de  $\nabla \mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0)$ . La matriz  $\mathbf{S} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  se conoce como *matriz de deformación*<sup>3</sup>, y la matriz  $\mathbf{\Omega} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  es la *matriz de rotación*. Nótese que, en términos de  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{\Omega}$ , la condición de incompresibilidad  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  es equivalente a  $\text{tr } \nabla \mathbf{u} = \text{tr } \mathbf{S} = 0$ , ya que la antisimetría de  $\mathbf{\Omega}$  implica que su diagonal es nula.

Definimos el *campo de vorticidad*  $\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x})$  del fluido como el rotacional del campo de velocidad, es decir,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = (\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2, \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1), \quad (3.32)$$

para cada  $(t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ . Este campo verifica la relación

$$\mathbf{\Omega}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{h}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3, \quad (3.33)$$

lo que explica el nombre que se le ha dado a la matriz  $\mathbf{\Omega}$ . Comprobemos la veracidad de esta ecuación. Empleando el convenio de notación de Einstein, podemos desarrollar cada componente del lado derecho de (3.33) para  $i \in \{1, 2, 3\}$  como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h})_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_j h_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jab} \partial_{x_a} u_b h_k \\ &= -\frac{1}{2} (\delta_{ia} \delta_{kb} - \delta_{ib} \delta_{ka}) \partial_{x_a} u_b h_k = \frac{1}{2} (\partial_{x_k} u_i - \partial_{x_i} u_k) h_k = \Omega_{ik} h_k,\end{aligned}$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor de Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{si } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}, \\ -1, & \text{si } (i, j, k) \in \{(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)\}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que permite escribir cada componente de un producto vectorial como  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ , y verifica la propiedad de que  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{iab} = \delta_{ja} \delta_{kb} - \delta_{jb} \delta_{ka}$ . Llegados a este punto, hemos probado el siguiente resultado:

**Lema 3.6.1** (Caracterización local del campo de velocidades). *Fijado cualquier  $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ , existe un entorno espacial dentro del cual el campo de velocidades viene dado por:*

$$\mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t_0, \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{S}(t_0, \mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2). \quad (3.34)$$

Pretendemos ilustrar el tipo de movimiento que provoca cada término. Para ello, a partir de la ecuación (3.1) estudiamos las trayectorias de las partículas del fluido cuando su velocidad está dada exclusivamente por cada uno de los términos de (3.34). Consideremos la partícula que se encuentra en la posición  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$  en el tiempo inicial  $t_0$ .

---

<sup>3</sup>Nótese que coincide con (3.16),

- Para  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0)$ , la ecuación (3.1) es

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t) = \mathbf{u}_0(t, \mathbf{x}_0) \implies \mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{u}_0(t_0, \mathbf{x}_0)(t - t_0).$$

Por lo tanto, el movimiento que genera este término sobre la partícula es una traslación en la dirección  $\mathbf{u}_0(t_0, \mathbf{x}_0)$ .

- Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)^T$  (basta con efectuar una rotación de los ejes cartesianos), y que  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T \equiv \mathbf{0}$ ,  $t_0 = 0$ . Para

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(t_0, \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(0, \mathbf{0}) \times \mathbf{x},$$

la ecuación (3.1) es

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t}(t) = -\frac{\omega}{2}X_2, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t}(t) = \frac{\omega}{2}X_1, \\ \frac{\partial X_3}{\partial t}(t) = 0. \end{cases}$$

La solución de este sistema para las condiciones iniciales consideradas es

$$\begin{cases} X_1(t; 0, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) - \alpha_2 \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right), \\ X_2(t; 0, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_2 \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + \alpha_1 \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right), \\ X_3(t; 0, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_3. \end{cases}$$

Por lo tanto, la trayectoria que describe la partícula  $\boldsymbol{\alpha}$  es una circunferencia sobre el plano  $X_3 = \alpha_3$  con centro  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , radio  $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$  y velocidad angular  $\frac{\omega}{2}$ .

- Por último, supongamos que  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{S}(t_0, \mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ . La matriz  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t_0, \mathbf{x}_0)$  es diagonalizable, por ser simétrica. Por lo tanto, existe una matriz ortogonal  $\mathbf{O} = \mathbf{O}(t_0, \mathbf{x}_0)$  para la cual

$$\mathbf{O}\mathbf{S}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}\mathbf{S}\mathbf{O}^T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

con  $\lambda_i = \lambda_i(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Por otra parte, la condición de incompresibilidad supone que la traza de  $\mathbf{S}$ , y, como la aplicación traza es invariante bajo transformaciones de semejanza, deducimos que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \iff \lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2).$$

En el nuevo sistema de coordenadas tras la transformación ortogonal, cuyos ejes son los dados por las direcciones de los autovectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  de  $\mathbf{O}\mathbf{S}\mathbf{O}^{-1}$ , la ecuación de las trayectorias pasa a ser

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t}(t) = \lambda_1 X_1, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t}(t) = \lambda_2 X_2, \\ \frac{\partial X_3}{\partial t}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)X_3. \end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$\mathbf{X}(t; \boldsymbol{\alpha}, 0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}.$$

Si  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , entonces las coordenadas  $X_1, X_2$  de la trayectoria decrecen exponencialmente hacia 0, mientras que la tercera coordenada  $X_3$  aumenta igualmente de manera exponencial. En el sistema de coordenadas inicial, antes del cambio de base, esto se interpreta en términos de la teoría de los medios continuos como que el fluido se está comprimiendo en las dos direcciones de un eje, formando un chorro. Así pues, el efecto del término  $\mathbf{S}(t_0, \mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  sobre el fluido es su deformación en el espacio, lo que explica su denominación.

En resumen, el campo  $\mathbf{u}$  se puede descomponer como la superposición de una traslación rígida, una rotación infinitesimal cuyas características están determinadas por el campo  $\boldsymbol{\omega}$  y un efecto de deformación dado por  $\mathbf{S}$ , como explica el Lema 3.6.1.

## 3.7. El campo de vorticidad

### 3.7.1. Motivación

El problema de la pérdida de regularidad en las soluciones de las ecuaciones de Euler tridimensionales con condiciones iniciales diferenciables cobró una gran importancia desde su planteamiento. Tanto los experimentos numéricos como los estudios cualitativos mostraban evidencias de una conexión entre la formación de singularidades y la acumulación de vorticidad en regiones cada vez más pequeñas. Esta relación fue rigurosamente analizada por J.T. Beale, T. Kato y A. Majda, quienes, en 1984, demuestran que la pérdida repentina de regularidad en una solución implica que el campo de vorticidad sea no acotado en ese instante (lo que se conoce como blow-up de tiempo finito). El enunciado es el siguiente, y su prueba se puede encontrar con detalle en [6].

**Teorema 3.7.1** (Criterio de Beale-Kato-Majda). *Sea  $\mathbf{u} \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3))$ , para  $s \geq 3$ , una solución de las ecuaciones de Euler, y supongamos que existe un tiempo  $T_0 > 0$  para el que la solución  $\mathbf{u}(t, \cdot)$  no puede extenderse permaneciendo en la clase anterior. Asumimos que  $T_0$  es el primer instante en el que esto ocurre. Entonces el campo de vorticidades  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  verifica que*

$$\int_0^{T_0} \|\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x})\|_{L^\infty} dt = \infty,$$

y, en particular,

$$\lim_{t \rightarrow T_0} \sup \|\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x})\|_{L^\infty} = \infty.$$

De esta forma, la norma infinito de la vorticidad controla el colapso de las soluciones regulares de las ecuaciones de Euler tridimensionales, como expone el contrarrecíproco del anterior teorema, que dice que mientras dicha norma esté acotada, existirá una solución global regular en el sentido descrito definida en el intervalo temporal considerado.

Por otro lado, frente a las dificultades que pueden surgir en el estudio de los fluidos rotacionales, hay una serie de leyes de conservación que estos verifican. Vamos a presentar algunas de las más importantes y con mayor peso en la MHD, pero previamente introducimos la manera de estudiar la evolución de curvas y superficies que se mueven con el fluido. Sea  $S$  una superficie regular, abierta y acotada con una frontera  $C$  regular y orientada. Entonces  $S$  y  $C$  evolucionan con el fluido siguiendo las trayectorias de las partículas  $\mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha})$  como  $S(t) = \{\mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}) : \boldsymbol{\alpha} \in S\}$  y  $C(t) = \{\mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}) : \boldsymbol{\alpha} \in C\}$ , respectivamente.

El siguiente resultado, obtenido por Lord Kelvin, establece la conservación de la *circulación* del campo de velocidades en curvas cerradas que se mueven con el fluido.

**Teorema 3.7.2** (Teorema de Kelvin de conservación de la circulación). *Sea  $\mathbf{u}$  una solución regular de la ecuación de Euler (3.24). Suponiendo que la fuerza externa es conservativa, la circulación  $\Gamma_{C(t)}$  alrededor de una curva cerrada, simple y regular  $C(t)$  que se mueve con el fluido,*

$$\Gamma_{C(t)} = \oint_{C(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.35)$$

*es constante en el tiempo.*

Como consecuencia directa, usando que  $\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$ , el teorema de Stokes (2.1) inmediatamente proporciona el siguiente corolario:

**Corolario 3.7.3.** *Sea  $\mathbf{u}$  una solución regular de la ecuación de Euler (3.24). Suponiendo que la fuerza externa es conservativa, el flujo de vorticidad  $F_{S(t)}$  a través de una superficie regular, acotada y abierta  $S(t)$  que se mueve con el fluido,*

$$F_{S(t)} = \int_{S(t)} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{A}, \quad (3.36)$$

*es constante en el tiempo.*

Para demostrar el Teorema de Kelvin, se usa el siguiente resultado que es un análogo de la Fórmula de Transporte para curvas cerradas, y cuya demostración se puede encontrar en [11].

**Proposición 3.7.4.** *En las condiciones del Teorema de Kelvin, se verifica:*

$$\frac{d}{dt} \Gamma_{C(t)} = \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.37)$$



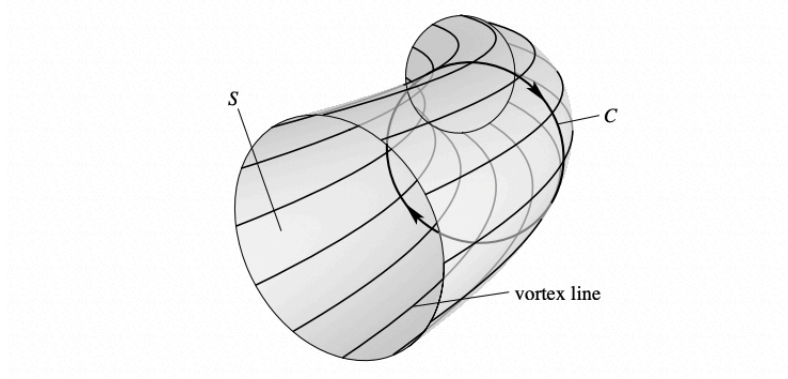


Figura 3.1: Tubo de vórtice. Imagen extraída de [11].

La demostración del Teorema 3.7.2 es inmediata usando esta proposición, junto con el hecho de que, por ser solución de la ecuación de Euler (3.24),  $\mathbf{u}$  cumple que

$$\oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{C(t)} \nabla p \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

donde la anulación de la integral se debe a que la integral de línea del gradiente es 0 en curvas cerradas.

Antes de continuar, introducimos las *líneas de vórtice* como las curvas integrales del campo de vórtices, cuyo vector tangente en cada punto de las mismas viene dado por el correspondiente vector de vórtice (de forma similar a cuando definimos las líneas de corriente en (3.2)). También definimos un *tubo de vórtice* como la región del espacio delimitada por la unión de las líneas de vórtice que pasan por una misma curva cerrada  $C$  (ver la figura 3.1).

Otro importante resultado en la teoría de vórtices, que describe el comportamiento del fluido en la vecindad de una línea de vórtice, es el siguiente:

**Teorema 3.7.5** (Teorema de Helmholtz). *Sea  $\mathbf{u}$  una solución regular de la ecuación de Euler (3.24). Suponiendo que la fuerza externa es conservativa, se verifica:*

1. *Los elementos de fluido que están en una línea de vórtice en un instante de tiempo  $t_0$  permanecen en dicha línea de vórtice para todo tiempo, es decir, las líneas de vórtice son líneas materiales, se mueven con el fluido.*
2. *La circulación del fluido alrededor de una línea de vórtice cerrada (o, equivalentemente, el flujo de vorticidad a través de la superficie que encierra) es constante en el tiempo y a lo largo del tubo de vórtice que la curva delimita. Se le llama a dicha constante la fuerza del tubo.*

Las dos afirmaciones se demuestran empleando el Teorema de Kelvin. Además, para la segunda afirmación se utiliza la condición de divergencia nula del campo de vorticidad (por ser un rotacional).

Sin embargo, no escribiremos ambas pruebas pues exceden los objetivos de este trabajo. Para más información, revisar [14] o [29].

### 3.7.2. Ecuaciones de la vorticidad

El criterio de Beale-Kato-Majda desvela una profunda conexión entre la formación de singularidades en el fluido y su campo de vorticidades, que expresa el giro local que existe en cada punto del campo de velocidades. De ahí viene la motivación para introducirlo en la ecuación del movimiento de Euler (3.26) que incorpora la función de Bernoulli, y suponemos que la fuerza externa es conservativa:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla H$$

Para introducir el campo de vorticidad, comenzamos sustituyendo  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  y aplicamos el operador rotacional en los dos miembros de la ecuación. Como el rotacional del gradiente de un campo escalar es nulo, se anula el término de Bernoulli. Al aplicar el rotacional en el lado izquierdo de dicha ecuación, tenemos por una parte que

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t},$$

resultando en la ecuación de evolución de la vorticidad

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0. \quad (3.38)$$

Podemos seguir transformando la ecuación. Utilizamos la identidad vectorial (2.12) para escribir

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Dado que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  por ser el fluido incompresible, y  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ , se tiene que

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Queda pues la ecuación

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (3.39)$$

Para que el sistema sea cerrado, se suele añadir la ecuación que pone  $\mathbf{u}$  en función de  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} &\implies \nabla \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} = -\Delta \mathbf{u} \\ &\implies \mathbf{u} = \nabla \times (-\Delta)^{-1} \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Esta fórmula es la versión vectorial de la llamada Ley de Biot-Savart, de gran importancia en la teoría electromagnética y que veremos en el siguiente capítulo. Por último, las condiciones iniciales pasarán a estar formuladas para el campo de vorticidad. El sistema de EDPs resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} = \nabla \times (-\Delta)^{-1} \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\omega}(0, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.40)$$

En el caso de que el fluido fuera viscoso, se le añadiría a la primera ecuación un término de difusión  $\nu \Delta \boldsymbol{\omega}$  (ver [29]). El campo  $\mathbf{u}$  se puede calcular mediante la segunda ecuación verificando  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  trivialmente, y, resuelto este sistema, la presión se puede calcular a partir de (3.25). En consecuencia, se tiene una equivalencia entre este sistema de ecuaciones y las de Euler.

La primera igualdad se denomina la *ecuación de la vorticidad*, y describe la evolución temporal de este campo. Al igual que en la ecuación del movimiento de Euler y de Navier-Stokes, en la ecuación de la vorticidad el lado izquierdo es una derivada material, en este caso la del campo de vorticidad. En el lado derecho, el término  $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$  es la derivada direccional de la velocidad  $\mathbf{u}$  en la dirección de la vorticidad  $\boldsymbol{\omega}$ . Teniendo en cuenta la descomposición (3.31) de  $\nabla \mathbf{u}$  y la expresión (3.33), que implica que  $\boldsymbol{\omega} \in \text{Ker } \boldsymbol{\Omega}$  en todo punto e instante de tiempo, se tiene que:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mathbf{S} \boldsymbol{\omega}.$$

Así pues, cuando  $\boldsymbol{\omega}$  se alinea con alguno de los autovectores  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de la matriz simétrica  $\mathbf{S}$ , la vorticidad  $\boldsymbol{\omega}$  crece o decrece en magnitud de manera exponencial en función del signo del autovalor correspondiente. A este efecto se le conoce como el *estiramiento de vórtices*, y constituye la principal fuente de singularidades en un fluido.

### 3.7.3. Formulación corriente-vorticidad

Para finalizar este capítulo, vamos a desarrollar otro concepto que será muy importante para nuestro trabajo posterior: el de las funciones de corriente. Consideramos un dominio plano  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que tiene una frontera fija en la cual el campo de velocidad  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  satisface la condición

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega,$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $\partial\Omega$ . Además, supondremos que  $\Omega$  es simplemente conexo (es decir, que no tiene “agujeros”) y que el campo de fuerzas externo es conservativo. La ecuación de la vorticidad (3.39) en estas condiciones es

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Vamos a ver que podemos eliminar la velocidad de esta ecuación para obtener una ecuación que sólo depende de la vorticidad. Por ser  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , se tiene que  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ , y la teoría de cálculo vectorial establece que existe una única (salvo una constante aditiva que sólo depende del tiempo) función  $\psi(t, x, y)$  tal que

$$\mathbf{u} = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^T \equiv \nabla^\perp \psi. \quad (3.41)$$

Se le denomina a  $\psi$  la *función de corriente* del campo de velocidades  $\mathbf{u}$ , y verifica que, para cada  $t$  fijado, las líneas de corriente  $(x(s), y(s))$  coinciden con las curvas de nivel de  $\psi$ :

$$\frac{d}{ds} \psi(t, x(s), y(s)) = \frac{\partial \psi}{\partial x} x' + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' = -u_y u_x + u_x u_y = 0.$$

En particular, por la condición de frontera,  $\partial\Omega$  permanece en una o varias curvas de nivel de  $\psi$ , y podemos ajustar la constante indeterminada de la definición de  $\psi$  para que

$$\psi(t, x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \partial\Omega.$$

Esta condición, junto con (3.41), determina de forma unívoca la función de corriente  $\psi$ . Por otro lado, al ponerla en función de la vorticidad  $\omega = (0, 0, \omega)$ , la función  $\psi$  debe resolver la ecuación de Poisson

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Delta\psi.$$

Así, llegamos al siguiente sistema que tiene por incógnitas  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ ,  $\omega$  y  $\psi$ :

$$\begin{cases} \frac{D\omega}{Dt} = 0, \\ \Delta\psi = -\omega, \\ \nabla^\perp \psi = \mathbf{u}, \\ \psi = 0, \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.42)$$

Este sistema permite determinar por completo el movimiento. Nótese que además en el caso bidimensional se tiene que

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{bmatrix},$$

que es el Jacobiano de  $(\omega, \psi)$ . Por tanto, el fluido será estacionario si y solo si  $\omega$  y  $\psi$  son dependientes funcionalmente, es decir, si  $\Delta\psi = F(\psi)$  para alguna función  $F$ . Además, esto significa que si la dependencia funcional se verifica en un instante entonces lo hará en cualquier instante.

En  $\mathbb{R}^3$  se puede construir un potencial análogo. La condición de incompresibilidad  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en un abierto simplemente conexo implica (puede verse la demostración en [38]) la existencia de un potencial vectorial  $\boldsymbol{\psi}$  tal que

$$\nabla \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{u}. \quad (3.43)$$

Sin embargo, este potencial puede ser tomado de distintas formas. En el caso plano con  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)^T$  y  $\boldsymbol{\psi} = (0, 0, \psi)^T$ , recuperamos fácilmente la fórmula (3.41). En el caso general, si asumimos el “gauge de Coulomb”  $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ , el potencial  $\boldsymbol{\psi}$  debe resolver la ecuación

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = -\Delta\boldsymbol{\psi}.$$

Entonces, el sistema queda

$$\begin{cases} \frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}, \\ \Delta\boldsymbol{\psi} = -\omega, \\ \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Ahora bien, en el potencial  $\boldsymbol{\psi}$  en  $\mathbb{R}^3$  no determina con sus componentes las líneas de corriente, tangentes al campo  $\mathbf{u}$  para cada instante de tiempo, como sí lo hacen las curvas de nivel del

potencial vectorial en el caso de  $\mathbb{R}^2$ , por lo que esta formulación no es tan útil. Si se pretende representar las líneas de corriente en  $\mathbb{R}^3$  por medio de funciones, se deberán emplear dos campos escalares distintos que determinen dichas curvas por medio de sus superficies de nivel, y teniendo en cuenta las condiciones de frontera correspondientes. Esta idea la desarrollaremos en el Capítulo 7, ya que será el planteamiento que utilizaremos para el problema trabajado.



## Capítulo 4

# Electromagnetismo

“Contemplado desde muy lejos en la historia de la humanidad -digamos, que desde diez mil años a partir de ahora- debe haber poca duda de que se considerará que el hecho más significativo del siglo XIX es el descubrimiento realizado por Maxwell de las leyes de la electrodinámica.”

*Richard Feynman (The Feynman Lectures on Physics, vol I, 1964).*

Dedicaremos este capítulo a introducir los conceptos básicos de esta disciplina y a conocer y comprender el significado de las ecuaciones de Maxwell, la ley de Ohm y la fuerza de Lorentz, que son los tres ingredientes que necesitaremos para desarrollar la teoría de la MHD. Haremos deducciones a partir de las ecuaciones como hicimos en la dinámica de fluidos, pero en esta ocasión serán mucho más sintéticas pues consideramos que, por densidad y contenido matemático, no aportan gran cosa con respecto a los objetivos de este trabajo. Al contrario que las ecuaciones de Navier-Stokes, deducidas de forma constructiva a partir de los axiomas de la teoría de medios continuos, las ecuaciones de Maxwell son en última instancia de origen empírico. Tampoco introduciremos los potenciales escalares y vectoriales de los campos eléctrico y magnético, respectivamente, pese a jugar un papel muy importante dentro de la teoría electromagnética. Dos referencias estándar para conocer con mayor profundidad los fundamentos de esta disciplina son los libros [20] y [23].

### 4.1. Ecuaciones de Maxwell

#### 4.1.1. Conceptos básicos

Las ecuaciones de Maxwell son un sistema de cuatro ecuaciones en derivadas parciales que describen el comportamiento y la evolución del campo electromagnético  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , donde

$$\mathbf{E} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{y} \quad \mathbf{B} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

son el *campo eléctrico* y el *campo magnético*, respectivamente, definidos para cada tiempo  $t$  en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  y cada posición  $\mathbf{x}$  en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Al igual que con los campos de velocidad y de vorticidad de un fluido, introducimos las *líneas de campo eléctrico* y las *líneas de campo magnético* como aquellas que resuelven (3.2), sustituyendo  $\mathbf{u}$  por  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , respectivamente. Las líneas de campo magnético serán especialmente importantes para nuestro estudio posterior.

El campo electromagnético se origina gracias a dos tipos de fuentes: las densidades de carga eléctrica y las densidades de corriente eléctrica. Además de la masa, las partículas elementales pueden transportar una carga eléctrica intrínseca de signo positivo o negativo. De forma análoga a la hipótesis del continuo de la dinámica de fluidos, a nivel macroscópico se pueden modelar las cargas como un continuo con una *densidad de carga eléctrica asociada*  $\rho_e : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Sin embargo, esta función se diferencia de la densidad de masa de los fluidos en que puede tomar valores positivos y negativos. Además, se refiere a la densidad de carga total, que incluye por una parte las cargas eléctricas libres, que se pueden mover libremente por el medio conductor, y, por otra, las cargas ligadas, cuyas posiciones están fijas en el medio. Al igual que sucede con la masa, en la física clásica existe el principio básico de que la carga eléctrica no se crea ni se destruye, y esto se expresa matemáticamente a través de una ecuación de continuidad análoga a (3.7):

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (4.1)$$

El flujo de carga eléctrica  $\mathbf{J} = \rho_e \mathbf{u}$  se denomina *densidad de corriente eléctrica*, y determina la dirección del movimiento de las cargas.

#### 4.1.2. Derivación

Usaremos algunas leyes y fenómenos físicos bien conocidos. Sean  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica en el vacío y  $\mu_0$  la permeabilidad magnética en el vacío, que se relacionan a través de la expresión

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2, \quad (4.2)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Consideraremos materiales que no sean ni dieléctricos ni magnéticos, con una permitividad eléctrica y permeabilidad magnética iguales a las del vacío. Esta suposición es típica en el estudio de la MHD y simplifica los desarrollos. Para conocer un estudio más general remitimos de nuevo a la referencia [23].

- La ley de Coulomb establece que el campo eléctrico generado por una carga puntual  $q$  situada en el origen sobre un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  viene dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}.$$

A este campo se le conoce como *campo electrostático*. Es un campo conservativo y, por tanto, irrotacional (por la identidad vectorial (2.14)). Si consideramos una distribución de carga



estática en un dominio  $\Omega$  con una densidad de carga  $\rho_e$ , el campo eléctrico total que esta genera en un punto  $\mathbf{x}$  se obtendría integrando en  $\Omega$  la contribución de cada carga infinitesimal:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho_e(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\mathbf{y}. \quad (4.3)$$

Queremos calcular la divergencia (respecto de  $\mathbf{x}$ ) del campo  $\mathbf{E}$ . Aplicando este operador en ambos lados de la ecuación (4.3) y usando la fórmula

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.4)$$

donde  $\delta(\cdot)$  es la distribución delta de Dirac (ver la referencia [20, p. 45]), se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho_e(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{\rho_e(\mathbf{x})}{\epsilon_0},$$

donde hemos utilizado en la segunda igualdad la propiedad de la delta de Dirac para la integración de su producto por otra función. Así, finalmente llegamos a la igualdad

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0},$$

que es la forma diferencial de la *Ley de Gauss del campo eléctrico*, la primera de las ecuaciones de Maxwell. Usando el Teorema de la Divergencia de Gauss, se puede escribir en forma integral como:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

siendo  $S$  una superficie cerrada regular y  $Q$  la carga neta encerrada en  $S$ . Nótese que, por ser  $\mathbf{E}$  conservativo, existe una función potencial  $V$  tal que  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , a la que se conoce como potencial electrostático. Con este enfoque, los campos electrostáticos están determinados por la ecuación de Poisson  $\Delta V = -\rho_e/\epsilon_0$ .

- Experimentalmente se sabe que el campo magnético tiene un comportamiento similar al campo eléctrico, pero con la peculiaridad de que las fuentes escalares vienen en parejas formando dipolos, es decir, no existen las cargas magnéticas individuales, conocidas teóricamente como monopolos. Por lo tanto, la carga magnética neta encerrada en cualquier superficie  $S$  es siempre 0, lo que significa que, por analogía con el campo eléctrico,

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

o, en forma diferencial,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

A esta ecuación se le conoce como *Ley de Gauss del campo magnético*. También se puede deducir a partir de la ley de Biot-Savart, que rige la magnetostática de forma similar a la ley de Coulomb con la electrostática. La ley de Biot-Savart establece que una corriente eléctrica

estacionaria distribuida en un volumen  $V$  de densidad  $\mathbf{J}$  crea un campo magnético  $\mathbf{B}$  que, evaluado en un punto  $\mathbf{x}$ , viene dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\mathbf{y}. \quad (4.5)$$

Entonces, aplicando el operador divergencia (derivando, de nuevo, respecto de la variable  $\mathbf{x}$ ), tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left( \mathbf{J}(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) d\mathbf{y},$$

y, usando la identidad vectorial (2.10),

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J}(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{y})) - \mathbf{J}(\mathbf{y}) \cdot \left( \nabla \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right).$$

Ahora bien,  $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{y}) = 0$ , pues el rotacional actúa derivando respecto de la variable  $\mathbf{x}$ , y además

$$\nabla \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} = \nabla \times \nabla \left( \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) = 0,$$

por la identidad vectorial (2.14). Así se obtiene de nuevo la Ley de Gauss del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

- Consideremos ahora una espira conductora  $C$  ubicada en el seno de un campo magnético  $\mathbf{B}$ , posiblemente variable con el tiempo. El flujo del campo magnético a través de una superficie  $\Sigma$  cumpliendo que  $\partial\Sigma = C$  se define como

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A},$$

donde  $d\mathbf{A}$  es un vector diferencial de la superficie  $\Sigma$ . Experimentalmente se sabe que, en estas condiciones, el campo magnético puede inducir una fuerza electromotriz  $\epsilon$  en la espira si el flujo a través de la misma varía con el tiempo, y además el sentido de la corriente inducida es tal que el campo magnético que esta genera (por la ley de Biot-Savart) se opone a la variación de flujo. Esta última afirmación se conoce como ley de Lenz.

La fuerza electromotriz inducida viene dada por la integral de línea de un campo eléctrico no conservativo  $\mathbf{E}$  a lo largo de  $C$ . Si la espira está fija en el seno de  $\mathbf{B}$ , entonces este fenómeno sigue la ley matemática

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}.$$

Esta es la forma integral de la llamada *ley de Faraday*. La forma diferencial se obtiene aplicando el teorema de Stokes en el lado izquierdo de la ecuación:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Nótese que este campo electromagnético es distinto del campo electrostático, que era irrotacional. Mientras que el campo electrostático es generado por cargas eléctricas (fuentes escalares), este campo se crea sin necesidad de cargas, únicamente debido a la existencia de un campo magnético que varía en el tiempo (fuente vectorial).

- La *ley de Ampère-Maxwell* es la última de las cuatro ecuaciones de Maxwell. Originalmente, el resultado de Ampère consistía en la relación de un campo magnético estático con su origen, una corriente eléctrica estacionaria. Concretamente, establecía que “la circulación del campo magnético creado por una corriente eléctrica estacionaria es proporcional a su intensidad”. Posteriormente, Maxwell observó una inconsistencia y realizó una corrección, dándole su nombre actual.

Sabiendo que el campo magnético estático  $\mathbf{B}$  no tiene fuentes escalares, se buscan las fuentes vectoriales aplicando el rotacional en ambos lados de la ley de Biot-Savart (4.5):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left( \mathbf{J}(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) d\mathbf{y}.$$

De nuevo, expandimos el integrando utilizando ahora la identidad vectorial (2.12):

$$\nabla \times \left( \mathbf{J}(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) = \mathbf{J} \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3}.$$

Se han eliminado los términos que incluyen derivadas de  $\mathbf{J}$  pues se anulan ya que  $\mathbf{J}$  no depende de  $\mathbf{x}$ . Ahora, usando (4.4), el primer término es igual a  $4\pi\mathbf{J}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Por otra parte, el segundo término se anula, como se puede ver en [20, p. 232] (no haremos aquí los desarrollos por su longitud y escasa aportación de cara a nuestros objetivos). Entonces, se tiene que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V 4\pi\mathbf{J}(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \mu_0\mathbf{J}(\mathbf{x}).$$

Así, finalmente llegamos a la *ley de Ampère*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}, \quad (4.6)$$

en forma diferencial. Dada una curva cerrada simple  $C$ , una superficie  $\Sigma$  tal que  $C = \partial\Sigma$ , y usando el Teorema de Stokes, la forma integral del resultado es:

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_\Sigma \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I_{enc},$$

donde  $I_{enc}$  es la intensidad de corriente total que atraviesa el interior de  $C$ .

Sin embargo, Maxwell observó que esta ley contradecía el principio de conservación de la carga (4.1), ya que al aplicar el operador divergencia a ambos lados de (4.6), y utilizando la identidad vectorial (2.13) y la ecuación de conservación (4.1), se tiene:

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = -\mu_0 \frac{\partial \rho_e}{\partial t}.$$

Por tanto, la corriente debería ser estacionaria, o, equivalentemente, la densidad de carga sería constante en el tiempo. Esto significaría restringirse a la *magnetostática*, y se sabe que existen corrientes no estacionarias. Para solucionar este problema de consistencia con la conservación

de la carga, Maxwell añadió al lado derecho de la ecuación (4.6) el término de la *corriente de desplazamiento*  $\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ , estableciendo la ecuación

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Esto soluciona el problema, ya que, usando la ley de Gauss del campo eléctrico,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\frac{\partial(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = -\nabla \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right),$$

por lo que al tomar la divergencia en (4.7) se anulan los dos miembros de la ecuación.

De esta forma, la variación temporal de un campo eléctrico también induce un campo magnético, estableciendo así una cierta simetría entre ambos campos. Pese a la inconsistencia mencionada, la ley de Ampère original sigue teniendo una gran importancia ya que el término de desplazamiento es muy difícil de detectar en experimentos electromagnéticos ordinarios. Esto se debe a que tiene un peso mucho menor que el de la densidad de corriente, por lo que en muchas ocasiones se desprecian sus efectos (por ejemplo, en la MHD ideal).

Como resumen, en materiales que no son ni dieléctricos ni magnéticos, las ecuaciones de Maxwell son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad \text{Ley de Gauss para el campo eléctrico}, \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{Ley de Gauss para el campo magnético}, \quad (4.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{Ley de Faraday}, \quad (4.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell}. \quad (4.11)$$

Este conjunto de ecuaciones describe por completo los fenómenos electromagnéticos, y su publicación marca la unificación de una teoría que previamente describía de forma separada los fenómenos del magnetismo, la electricidad y la luz.

## 4.2. Fuerza de Lorentz

Una partícula que se mueve con una velocidad  $\mathbf{u}$  y transporta una carga  $q$  está sometida, en general, a tres fuerzas de origen electromagnético:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_s + q\mathbf{E}_i + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (4.12)$$

La primera es la fuerza electrostática o de Coulomb, que tiene su origen en la atracción o repulsión entre cargas eléctricas ( $\mathbf{E}_s$  es el campo electrostático). La segunda es la fuerza que la carga experimenta en presencia de un campo magnético que varía en el tiempo, siendo  $\mathbf{E}_i$  el campo eléctrico

inducido. La tercera contribución es una fuerza que actúa sobre toda carga que se mueve en el seno de un campo magnético (si el movimiento no es paralelo a las líneas del campo  $\mathbf{B}$ ).

El campo electrostático  $\mathbf{E}_s$  es irrotacional (por la ley de Coulomb, que damos por conocida) y su divergencia viene dada por la ley de Gauss (4.8). Por otra parte, el campo inducido  $\mathbf{E}_i$  es solenoidal ( $\nabla \cdot \mathbf{E}_i = 0$ ) y tiene fuentes vectoriales dadas por la ley de Faraday (4.10). Si definimos el campo eléctrico total como  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i$ , tendremos la expresión habitual de la que se conoce como *fuerza de Lorentz* que se ejerce sobre una carga  $q$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{u}$  en el seno de un campo electromagnético

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (4.13)$$

con  $\mathbf{E}$  cumpliendo (4.8) y (4.10). Es importante tener en cuenta el sistema de referencia empleado, ya que si consideramos uno que se mueva con la carga a la misma velocidad, entonces la carga está en reposo con respecto a dicho sistema y la fuerza sobre la carga tendrá únicamente la contribución de un campo eléctrico  $\mathbf{E}_r$ :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_r.$$

Sin embargo, la relatividad Newtoniana establece que la fuerza sobre la carga será la misma en el sistema de referencia del laboratorio, donde se usa (4.13), y en el que viaja con la carga. En consecuencia, se sigue que el campo eléctrico en ambos sistemas se relacionan por:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (4.14)$$

La MHD se centra en la fuerza neta que actúa sobre el medio conductor más que en las que se ejercen sobre las cargas individuales, por lo que si sumamos (4.13) sobre una unidad de volumen, la suma de cargas  $\sum q$  se convierte en la densidad de carga  $\rho_e$  y  $\sum q\mathbf{u}$  se transforma en la densidad de corriente eléctrica  $\mathbf{J}$ . Así, obtenemos la versión volumétrica de la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (4.15)$$

donde  $\mathbf{f}$  es la fuerza por unidad de volumen que actúa sobre el conductor.

### 4.3. Ley de Ohm

La *ley de Ohm* establece que la densidad de corriente en un medio conductor es proporcional al campo eléctrico que se ejerce sobre las cargas libres. El parámetro  $\sigma$  que relaciona ambas magnitudes depende del material y se conoce como la *conductividad* del medio. Por lo tanto, la expresión matemática de la ley de Ohm toma la forma

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (4.16)$$

Equivalentemente, se puede definir la *resistividad* del medio como el parámetro  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  y formular la ley de Ohm como

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}. \quad (4.17)$$

Intuitivamente, las cargas libres del medio tienen más facilidad para desplazarse cuanto mayor sea la conductividad o cuanto más pequeña sea la resistividad. Se dice que el medio es un *conductor perfecto* si  $\sigma = \infty$  o, equivalentemente, si  $\rho = 0$ .

Es importante señalar que la ley de Ohm (4.16) está formulada para un sistema de referencia que se encuentra en reposo respecto del medio conductor. La ley sigue teniendo validez si el medio se mueve a través de un campo de velocidad  $\mathbf{u}$ , pero entonces se debe usar el campo eléctrico medido en un sistema de referencia que se desplaza con la velocidad local del conductor, y que está dado por (4.14):

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_r = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (4.18)$$

## Capítulo 5

# Las ecuaciones de la MHD

### 5.1. Consideraciones previas

En la Magnetohidrodinámica se estudia el comportamiento a gran escala y dinámica lenta, en comparación con la escala de tiempo de los procesos microscópicos, de fluidos altamente conductores mediante el acoplamiento de las ecuaciones de la dinámica de fluidos y las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo. Para que el modelo funcione correctamente, deben cumplirse ciertas condiciones que simplifican el estudio:

1. Medios conductores no polarizados ni magnetizados<sup>1</sup>, con constantes de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética iguales a sus valores en el vacío.
2. Velocidades  $u$  lo suficientemente bajas en relación a la velocidad de la luz en el vacío  $c$  como para ignorar los efectos relativistas:

$$u \ll c.$$

Esto es equivalente a suponer que las frecuencias de los campos electromagnéticos son lo suficientemente bajas. En la corona solar, por ejemplo, las velocidades suelen ser del orden de mil kilómetros por segundo, un valor alto pero mucho menor que el de la velocidad de la luz ( $c \approx 3 \cdot 10^5$  km/s).

3. Escalas de tiempo altas, mucho mayores que el tiempo de relajación de las cargas del fluido conductor y que el tiempo medio entre colisiones de las partículas del plasma.
4. Escalas de longitud mayores que el recorrido libre medio y que el giroradio de los electrones e iones. Esta condición permite ignorar los efectos cuánticos, y junto con la anterior hacen que tenga validez la hipótesis del continuo y se pueda aplicar la teoría de la Dinámica de

---

<sup>1</sup>El estudio de fluidos conductores magnéticamente polarizados, comúnmente llamados fluidos magnéticos, se denomina la ferrohídrodinámica.

Fluidos, ya que permite ignorar las colisiones entre las partículas del plasma y considerar su movimiento como suave y de evolución lenta.

5. Se suele suponer también que el fluido conductor es Newtoniano, incompresible y con viscosidad constante, para poder modelizar su movimiento empleando las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma habitual.

Las anteriores condiciones son necesarias para poder aplicar la teoría de la MHD al plasma considerado. Sin embargo, existe un conjunto de suposiciones más restrictivas que dan lugar al área de la *Magnetohidrodinámica ideal*, que es probablemente la de mayor interés matemático. Estas hipótesis consisten básicamente en suponer que el fluido conductor con el que se está trabajando es un *plasma ideal*, esto es, que presenta simultáneamente un comportamiento de fluido ideal y de conductor perfecto. Como sabemos, esto significa que se cumplen las condiciones:

- La viscosidad es nula  $\nu = 0$  y el fluido tiene densidad  $\rho$  constante, por lo que se puede modelizar su movimiento empleando las ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles (3.24).
- La conductividad es  $\sigma = \infty$  o, equivalentemente, la resistividad es nula.

## 5.2. Reducción de las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz

### 5.2.1. Simplificaciones generales

Las ecuaciones de la MHD no consisten simplemente en la unión de las ecuaciones de la dinámica de fluidos con las del electromagnetismo. Gracias a las características del régimen de fluidos conductores con los que se trabaja en la MHD, se pueden simplificar notablemente las ecuaciones electromagnéticas, como veremos a continuación.

Para comenzar, el hecho de considerar medios conductores sin polarización eléctrica ni magnetización y con  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  (condición 1) significa que podemos partir de las ecuaciones de Maxwell planteadas en el vacío, con las constantes  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ , como hicimos en el capítulo anterior.

Vamos a estudiar en escala de magnitud las ecuaciones de Maxwell mediante su adimensionalización (ver en [27] los detalles del método). Esta técnica permite obtener una mayor comprensión del tamaño relativo de los diversos términos presentes en la ecuación e identificar los términos de peso pequeño y posiblemente despreciable. Sean  $U$ ,  $L$ ,  $B$ ,  $J$  y  $E$  una velocidad característica, escala de longitud característica, magnitud de campo magnético característico, densidad de corriente eléctrica característica y magnitud de campo eléctrico característico, respectivamente. También podemos derivar una escala de tiempo característica como  $T = U/L$ . Estos parámetros definen el orden de cada una de las magnitudes asociadas. Entonces, las magnitudes y operadores diferenciales de trabajo se



pueden escribir como el producto de su escala y la variable adimensional asociada:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= U \mathbf{u}^*, & \mathbf{x} &= L \mathbf{x}^*, & \mathbf{E} &= E \mathbf{E}^*, & \mathbf{J} &= J \mathbf{J}^*, \\ t &= T t^*, & \mathbf{B} &= B \mathbf{B}^*, & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t^*}, & \nabla &= \frac{1}{L} \nabla^*. \end{aligned}$$

Comenzamos adimensionalizando la ley de Faraday (4.10). Esta ecuación se transforma como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{E}{L} \nabla^* \times \mathbf{E}^* = -\frac{B}{T} \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t^*},$$

de manera que las escalas se relacionan como

$$\frac{E}{L} \sim \frac{B}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{E}{B} \sim \frac{L}{T} = U.$$

A continuación, consideramos la ley de Ampère-Maxwell (4.11), que se transforma como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B}{L} \nabla \times \mathbf{B}^* = \mu_0 J \mathbf{J}^* + \mu_0 \epsilon_0 \frac{E}{T} \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t^*}.$$

La contribución de la corriente de desplazamiento  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  al rotacional de  $\mathbf{B}$  es del orden de

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{E/T}{B/L} \sim \frac{U^2}{c^2},$$

donde usamos la relación (4.2),  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ , y la equivalencia en escalas obtenida a partir de la ley de Faraday. Ahora bien, debido a la condición 2 del régimen de estudio en la MHD, solo se consideran velocidades no relativistas  $u^2 \ll c^2$ , lo que significa que la contribución de la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère-Maxwell es muy pequeña (de hecho, significa que esta contribución es un efecto puramente relativista).

Por otra parte, si comparamos las magnitudes de la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  y el término de desplazamiento  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ , obtenemos:

$$\frac{\mu_0 J}{\mu_0 \epsilon_0 E/T} \sim \frac{\sigma(E + UB)T}{\epsilon_0 E} = \frac{\sigma T}{\epsilon_0} + \frac{\sigma LB}{\epsilon_0 E},$$

donde usamos la ley de Ohm (4.18). La constante  $\epsilon_0$  es del orden de  $10^{-12}$ , y en los medios conductores la conductividad  $\sigma$  suele ser de un orden de  $10^6$  (todo esto en unidades del Sistema Internacional). Teniendo en cuenta además que la escala de tiempo es alta (por la condición 3), deducimos que el primer sumando es de una gran magnitud, por lo que podemos despreciar el efecto de la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère-Maxwell y usar su formulación original

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Entonces, se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \tag{5.1}$$

o, usando la ley de conservación de la carga (4.1), que

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0, \tag{5.2}$$

lo que significa que la densidad de carga del fluido conductor se puede considerar estacionaria, pese al constante movimiento de las partículas fluidas. Ignoremos por ahora esta deducción.

Consideramos ahora la fuerza de Lorentz (4.15) que viene dada por

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

Vamos a estudiar las contribuciones en magnitud a esta fuerza siguiendo el procedimiento que se propone en [14]. Para empezar, recordamos la expresión de la ley de Ohm para fluidos conductores (4.18)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_r = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico que se ejerce sobre las cargas libres del medio medido en un sistema de referencia en reposo respecto del medio conductor.

Aplicamos el operador de divergencia sobre ambos lados de la ecuación y usamos la ley de conservación de la carga (4.1) y la ley de Gauss (4.8) para obtener

$$0 = -\nabla \cdot \mathbf{J} + \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho_e + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (5.3)$$

Se denomina el *tiempo de relajación* de la carga al parámetro  $\tau_e = \epsilon_0/\sigma$ , que para un fluido conductor suele tomar valores extremadamente pequeños, del orden de  $10^{-18}$  segundos. Este parámetro estima el orden del tiempo que tardan las cargas en redistribuirse por el conductor hacia su superficie. Para comprender de dónde viene, consideremos la situación en la que el fluido conductor está en reposo ( $\mathbf{u} = 0$ ). Entonces, (5.3) se resuelve como

$$\rho_e = \rho_e(0) \exp[-t/\tau_e],$$

de manera que la densidad de carga disminuirá en un factor  $\frac{1}{e}$  pasado un tiempo  $\tau_e$ . Se sigue además que en un conductor inmóvil, la densidad de carga es prácticamente nula (se distribuye en su superficie).

En la MHD se consideran grandes escalas de tiempo (condición 3), por lo que podemos despreciar la contribución de  $\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$  en comparación con  $\rho_e/\tau_e$ . Para ver esto, hacemos una adimensionalización y la ecuación (5.3) queda como

$$0 = \frac{\rho_e}{T} \frac{\partial \rho_e^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_e}{\tau_e} \rho_e^* + \sigma \frac{UB}{L} \nabla^* \cdot (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}^*).$$

Vemos que la magnitud del primer término en relación a la del segundo es  $\tau_e/T \ll 1$ , por lo que, efectivamente, podemos suponer que la densidad es constante en el tiempo, como habíamos deducido previamente. En consecuencia, podemos despejar  $\rho_e$  y escribir

$$\rho_e = -\epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (5.4)$$

lo que significa que cuando hay movimiento en el fluido conductor ( $\mathbf{u} \neq 0$ ), este puede mantener una densidad de carga en su interior. De todas formas, esta densidad es muy pequeña, demasiado

como para producir una fuerza eléctrica  $\rho_e \mathbf{E}$  significativa. Para comprobar esto, hacemos un análisis de escalas en (5.4), obteniendo

$$\rho_e = -\epsilon_0 \frac{U}{L} B \nabla^* \cdot (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}^*) \quad \text{o} \quad \rho_e \sim \epsilon_0 \frac{UB}{L} = \tau_e \sigma \frac{UB}{L}.$$

De la ley de Ohm se sigue que  $E \sim J/\sigma$  y, por tanto, al multiplicar la anterior igualdad por el campo eléctrico, obtenemos que  $\rho_e \mathbf{E}$  es de magnitud

$$\rho_e E \sim \tau_e \frac{UJB}{L} \sim \frac{\tau_e}{T} JB.$$

Entonces, debido a que  $\tau_e$  es muy pequeño en relación a  $T$ , la contribución de la fuerza eléctrica a la fuerza de Lorentz (4.15) es muy pequeña, y esta se reduce a

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (5.5)$$

Esta forma reducida de la fuerza volumétrica de Lorentz se denomina también la *fuerza de Laplace*, y resulta ser la única fuerza significativa que se ejerce sobre un fluido conductor en presencia de un campo magnético, creada por la interacción de este con las corrientes eléctricas inducidas.

En resumen, las consideraciones de la MHD permiten:

- despreciar los efectos de la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère-Maxwell, recuperando su formulación original.
- despreciar la contribución de  $\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$  a la ecuación de conservación de la carga, que por tanto se reduce a que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ .
- despreciar la contribución de la fuerza eléctrica  $\rho_e \mathbf{E}$  a la fuerza volumétrica de Lorentz, que entonces se expresa como  $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ .

Además, la densidad de carga  $\rho_e$  es muy pequeña, por lo que podemos aproximarla por 0 y eliminar la ley de Gauss del campo eléctrico (y, por tanto, el campo electrostático). Esto significa que el fluido es eléctricamente cuasineutro, una condición que es necesaria para considerarlo un plasma, como vimos en la introducción del trabajo.

Así pues, las ecuaciones de Maxwell simplificadas con las hipótesis de la MHD son:

- La ley de Ampère y la conservación de la carga (consecuencia de la primera, por la identidad (2.13))

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (5.6)$$

- La ley de Faraday y la ley de Gauss del campo magnético (consecuencia de la primera, por la identidad (2.13))

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.7)$$

- La ley de Ohm y la fuerza volumétrica de Lorentz

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (5.8)$$

La interacción entre el campo de velocidad y el campo magnético del plasma se puede dividir en tres partes:

1. El movimiento del fluido conductor relativo al campo magnético existente genera por la ley de Ohm una corriente eléctrica de orden  $\sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ .
2. Por la ley de Ampère, estas corrientes inducidas dan lugar a un segundo campo magnético, inducido, que se añade al campo magnético original, y el cambio normalmente es tal que el fluido parece “arrastrar” con él las líneas de campo magnético.
3. El campo magnético combinado interacciona con la densidad de corriente inducida  $\mathbf{J}$  y da lugar a una fuerza volumétrica de Lorentz que actúa sobre el conductor y generalmente tiende a inhibir el movimiento relativo del campo magnético y del fluido paralelizando los vectores, lo que significa que el campo magnético también “tira” del fluido.

Nótese que los dos últimos efectos tienen consecuencias similares, en ambos casos el movimiento relativo del fluido y el campo tiende a reducirse.

### 5.2.2. Simplificaciones en la MHD ideal

Supongamos que se verifican las condiciones de la MHD ideal. Entonces, la ecuación de conservación de la masa procedente de la dinámica de fluidos se verifica trivialmente, ya que  $\rho$  es constante por ser el fluido homogéneo e incompresible (en caso de no homogeneidad, habría que incluir dicha ecuación en el modelo). Además, por ser el coeficiente de viscosidad nulo sabemos que las ecuaciones del movimiento del fluido serán las de Euler, en vez de las de Navier-Stokes.

Por otro lado, la condición de conductor perfecto tiene una importante consecuencia en las ecuaciones del electromagnetismo: podemos eliminar  $\mathbf{E}$  de las ecuaciones y relacionar  $\mathbf{B}$  directamente con  $\mathbf{u}$ . Partimos de la ley de Faraday (4.10) e insertamos la ley de Ohm (4.18):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left( \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) = -\frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Ahora, usando la ley de Ampère (4.6) se sigue que

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Aplicamos la identidad vectorial (2.15)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}$  y la ley de Gauss del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , y obtenemos la *ecuación de inducción (forma no ideal)*

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \lambda \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (5.9)$$

siendo  $\lambda = (\sigma\mu_0)^{-1}$  la *difusividad magnética*. Esta ecuación de convección-difusión es una de las más importantes en la MHD. Se trata de una ecuación de transporte para  $\mathbf{B}$  en el sentido de que, si se conoce el campo  $\mathbf{u}$ , este dicta la evolución espacial y temporal del campo  $\mathbf{B}$  a partir de una condición inicial prefijada.

Ahora bien, la condición de conductor perfecto significa que la conductividad es  $\sigma = \infty$  o, equivalentemente, que la difusividad magnética es  $\lambda = 0$ . Entonces, la ecuación (5.9) toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

conocida como la *ecuación de inducción*.

La expresión de la ley de Ohm para plasmas ideales se obtiene haciendo el límite  $\sigma \rightarrow \infty$  en su formulación

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{J} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}.$$

Así, tenemos que las contribuciones a la fuerza de Lorentz del campo eléctrico sobre las cargas libres y del movimiento del fluido en el seno del campo magnético se deben cancelar entre sí:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (5.10)$$

### 5.3. Ecuaciones de la MHD ideal

Realizadas las simplificaciones que las condiciones enunciadas permiten hacer sobre las ecuaciones de Maxwell, estamos en condiciones de plantear las ecuaciones de la MHD ideal. La restricción de los medios a plasmas ideales puede parecer una reducción considerable en la aplicabilidad del modelo, pero el sistema de ecuaciones obtenido es el que más se estudia en el mundo científico, especialmente por su interés matemático. Además, al igual que en las introducciones a la Dinámica de Fluidos y al Electromagnetismo que hemos llevado a cabo, ignoraremos las ecuaciones relativas a la conservación de la energía, ya que no son de interés para nuestros objetivos.

El sistema ecuaciones de la MHD ideal tiene como variables la *densidad de masa del plasma*  $\rho$ , la *velocidad del plasma*  $\mathbf{u}$ , la *presión termodinámica*  $p$  y el *campo magnético del plasma*  $\mathbf{B}$ . La lista de ecuaciones es la siguiente:

1. La *ecuación del movimiento del plasma*, que es en la que se produce la unión entre las dos teorías que estamos considerando. Concretamente, el acoplamiento ocurre al considerar en la ecuación de Euler (3.24) que la fuerza externa ejercida sobre el fluido es la fuerza de Lorentz volumétrica, dada por (5.5). Para reducir el número de variables en las ecuaciones, aplicamos la ley de Ampère  $\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0. \quad (5.11)$$

2. La *ecuación de inducción*, obtenida a partir de la ley de Faraday (4.10) juntándola con la ley de Ohm (5.10)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (5.12)$$

3. La *ley de Gauss del campo magnético* en su forma habitual (4.9)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.13)$$

que, como sabemos, niega la existencia de monopolos magnéticos.

## 5.4. Equilibrio estático

Nos interesa ahora conocer las ecuaciones de la MHD ideal en el caso más sencillo, aunque de gran interés matemático: el equilibrio estático magnetohidrodinámico. La condición para que el plasma se encuentre en este estado es que el fluido esté (aproximadamente) inmóvil:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = 0,$$

para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$  y para todo  $t \in I$ , siendo  $I$  el intervalo maximal de definición de las soluciones. Al sustituir esta condición en la ecuación de inducción (5.12), obtenemos que, en el equilibrio estático, el campo magnético es estacionario:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

Sin embargo, el mayor interés de la teoría de los fluidos en equilibrio estático radica en la ecuación del movimiento (5.11). Esta igualdad se transforma en

$$-\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (5.14)$$

a la que se le denomina la *ecuación de la magnetostática*, y determina las líneas del campo magnético en un plasma inmóvil. Con las mismas transformaciones vectoriales que utilizamos con la ecuación de Euler (concretamente, en la Sección 3.5), podemos reformular esta ecuación como

$$-\nabla \left( p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = 0. \quad (5.15)$$

El primer término es el opuesto del gradiente de la *presión total*, que está compuesta de dos términos: la *presión de fluido* (o termodinámica)  $p$ , y la *presión magnética*  $\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}$ . El segundo término es la *tensión magnética*. La fuerza está dirigida de forma anti-paralela en la dirección del radio de curvatura de la línea de campo magnético.

La ecuación de la magnetostática (en cualquiera de sus formulaciones) se complementa con la ley de Gauss del campo magnético

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

para dar lugar a un sistema que es completamente análogo al de las ecuaciones de Euler estacionarias para un fluido ideal de densidad constante  $\rho = 1$  y en ausencia de campos externos:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

La equivalencia entre ambos sistemas se consigue haciendo la transformación de variables

$$\mathbf{u} \mapsto \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu_0}}, \quad -p \mapsto p' + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}.$$

## 5.5. La ecuación de inducción

Consideremos la ecuación de inducción para plasmas ideales (5.12),

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Esta ecuación es muy similar a la ecuación de la vorticidad para un fluido ideal (3.38)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}).$$

El motivo por el que la analogía no es absoluta es que el campo  $\mathbf{B}$  no está relacionado funcionalmente con  $\mathbf{u}$  como  $\boldsymbol{\omega}$ , que es su rotacional. Sin embargo, muchos de los resultados clásicos que se conocen para el campo de vorticidad se pueden reformular y reinterpretar en términos del campo magnético. Por ejemplo, podemos hablar de tubos de campo magnético, que describen la dirección y magnitud de  $\mathbf{B}$  en el espacio.

Dos importantes resultados de la teoría vorticial como son el Teorema de Kelvin 3.7.2 y el Teorema de Helmholtz 3.7.5 tienen sus versiones análogas en MHD, donde se combinan en un solo enunciado conocido como el *Teorema de Alfvén*.

**Teorema 5.5.1** (Teorema de Alfvén). *En un plasma ideal, se verifica:*

1. *Los elementos de fluido que están en una línea de campo magnético en algún instante inicial permanecen en dicha línea de campo para todo tiempo.*
2. *El flujo magnético a través de cualquier curva cerrada que se mueve con el fluido es constante en el tiempo, es decir,*

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A},$$

*siendo  $S(t)$  una superficie limitada por la curva cerrada  $C(t)$ .*

Al fenómeno que describe la aserción 1 del Teorema de Alfvén se le suele referir diciendo que las líneas de campo magnético están *congeladas en el plasma*. Esta expresión describe la situación en la que las partículas del fluido se pueden mover con libertad a lo largo de dichas líneas, pero

cualquier movimiento perpendicular a las mismas las arrastra consigo al mismo tiempo que el campo magnético empuja a las partículas en su propia dirección y sentido. De esta forma, las líneas del campo magnético se mueven exactamente con el fluido, en vez de difundirse como ocurre cuando  $\lambda > 0$ . Este efecto tiene un peso importante en la astrofísica, donde, dadas las condiciones extremas de presión y temperatura, la conductividad del plasma suele ser muy alta haciéndolo prácticamente ideal.

La conexión entre las líneas de campo magnético y el fluido en la MHD ideal descrita por el Teorema de Alfvén fija la topología del campo magnético en el plasma. Por ejemplo, si un conjunto de líneas de campo magnético están entrelazadas formando un nudo, permanecerán así mientras el plasma tenga una resistividad prácticamente nula. Esta dificultad para reconectar las líneas de campo magnético permite almacenar energía moviendo el fluido o la fuente del campo magnético. Si se rompen las condiciones del MHD ideal, se podría permitir la reconexión magnética que liberaría la energía almacenada del campo magnético.

De esta manera, el Teorema de Alfvén prohíbe la reconexión de las líneas del campo magnético, un concepto que desarrollaremos a continuación.

### 5.5.1. La reconexión magnética

La *reconexión de las líneas del campo magnético* es un fenómeno físico que puede tener lugar en plasmas de alta conductividad, y hace referencia a la rotura de líneas de campo que están dirigidas en sentidos contrarios y la reorganización de sus patrones de conectividad. Cuando se juntan plasmas que llevan líneas de campo magnético dirigidas de forma opuesta, se establece una fuerte lámina de corriente, en presencia de la cual incluso una cantidad insignificante de resistividad en un pequeño volumen puede llegar a ser importante, permitiendo que se produzca la difusión del plasma y, por tanto, la reconexión magnética.

Como hemos visto, el Teorema de Alfvén asegura que en los plasmas ideales las líneas de campo magnético están congeladas en el fluido, debido a la ecuación de inducción. La ley de Ampère establece que las partículas de plasma cargadas están confinadas en órbitas circulares alrededor de las líneas de campo magnético y no pueden moverse a lo largo de las mismas. Por lo tanto, esto significa que estos plasmas no se difundirán a través de las líneas ni se mezclarán las partículas asociadas a distintas líneas de campo entre sí. De igual forma, dos líneas de campo distintas permanecerán separadas en todo momento, pues no podrán penetrar el plasma intermedio entre ambas.

Este efecto conlleva, por tanto, un cambio de topología en la configuración de las líneas, y así la energía magnética contenida en las mismas se transforma parcialmente en energía térmica en forma de calor o en energía cinética que impulsa la eyección de partículas cargadas. La cuestión del ritmo de reconexión de líneas y la cantidad de energía magnética liberada es un importante tema de estudio en la física solar actual, como veremos. Además, la reconexión magnética está entre las



principales causas de varios de los fenómenos solares más importantes.

## 5.6. MHD y la física solar

Como dejamos entrever en la introducción del presente trabajo, la MHD juega un papel central en la física solar. Esto es porque el Sol está compuesto de gases conductores que se encuentran a temperaturas y presiones extremas, lo que provoca que la energía cinética de sus átomos sea enorme y estos se desprendan de sus electrones. Así, el medio entra por ionización en un estado plasma.

La caracterización del Sol como una esfera de plasma hace que la dinámica del fluido que lo compone esté gobernada por campos magnéticos que interactúan con las cargas del medio a través de las ecuaciones de la MHD. El campo magnético se origina por medio de procesos de inducción impulsados por los movimientos convectivos que transportan la energía generada por la fusión nuclear desde el núcleo hacia la superficie solar visible, que conocemos como la *fotosfera*. También es de gran interés la actividad magnética del plasma en la atmósfera solar, formada por una primera capa delgada, la *cromosfera*, y por la *corona solar*, que es la parte del Sol más externa y se extiende hasta casi un millón de kilómetros desde su origen. Esta última capa es la más cercana a nosotros, lo que nos permite conocer bien su estructura, fuertemente no homogénea y formada por pequeñas atmósferas aisladas como consecuencia de la intensa actividad magnética en las capas inferiores.

Además, el campo magnético es causa de varios fenómenos físicos, tanto en la superficie solar (las manchas solares) como en la atmósfera: prominencias solares, eyecciones de masa coronal, erupciones solares o flujos de plasma ascendentes, que pueden ser abiertos o regresar a la atmósfera (“coronal loops”). Se pueden ver representadas en la Figura 5.1 varias de estas muestras de la actividad magnética solar, y explicaremos a continuación el funcionamiento de algunas de ellas, para comprender mejor el comportamiento del campo magnético solar y su interacción con el plasma.

Las manchas solares son regiones de la superficie solar aparentemente oscuras y que pueden llegar a ser del tamaño de la Tierra. Tienen su origen en los grandes tubos de flujo magnético que se forman por debajo de la superficie solar y presentan una presión y densidad menores que las de esta, lo que provoca que los tubos se eleven a la superficie y se enfríen. El motivo por el cual las manchas parecen oscuras es el simple efecto del contraste de temperatura con la fotosfera, que tiene casi el doble de grados Kelvin.

Por otra parte, las intensas liberaciones localizadas de radiación electromagnética conocidas como erupciones solares tienen su origen en la interacción de la atmósfera solar con el complejo entrelazado de líneas de campo magnético originadas debajo de la superficie solar. Estas líneas se ven constantemente afectadas por el movimiento turbulento de la fotosfera, la parte baja de la atmósfera, que las estira y retuerce, y ocasionalmente la tensión puede ser tan grande que provoque que las líneas se rompan y reconecten. El proceso de reconexión magnética libera repentinamente una

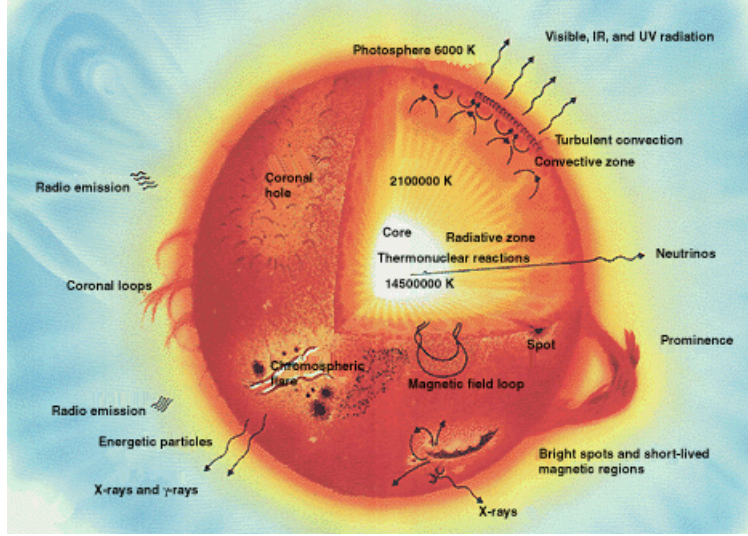


Figura 5.1: Diagrama de las capas y fenómenos solares. Imagen extraída de [9].

enorme cantidad de energía que provoca la aceleración de partículas. La línea de campo magnético inconexa y el plasma que fluye se pueden expandir violentamente hacia el exterior, formando una eyección de masa coronal. Este mecanismo también da explicación al hecho observado de que las erupciones solares tiendan a surgir de las regiones más activas del Sol, donde los campos magnéticos son mucho más fuertes. Aunque existe un acuerdo general sobre el origen de la energía que interviene en una erupción solar, todavía no se comprenden del todo bien los mecanismos implicados. No está claro cómo se transforma la energía magnética en energía cinética de las partículas, ni cómo pueden alcanzar algunas partículas aceleraciones en el rango de los GeV.

Además de explicar estos fenómenos observables, la MHD es capaz de resolver importantes cuestiones como el hecho de que el Sol posea el 99 % de la masa del Sistema Solar pero solo el 1 % del momento angular total, lo que se explica con efectos magnetohidrodinámicos que transferirían el momento angular del Sol al exterior del sistema solar, frenando su rotación.

Se puede intuir así la importancia del campo magnético como causa principal de toda la actividad solar. Sin embargo, su comportamiento varía en función de las características particulares del medio plasma con el que interactúa. Se suele utilizar un parámetro que mide la forma de esta interacción, para lo cual suponemos un campo magnético que se encuentra en estado de equilibrio en un plasma ideal y comparamos los términos de la ecuación de la magnetostática (5.14)

$$-\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0.$$

Un análisis adimensional proporciona

$$\nabla p \approx \frac{P}{L} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \approx \frac{B^2}{\mu_0 L},$$

siendo  $L$  una escala de longitud característica del problema y  $P$  una escala de presión característica. Se denomina el *parámetro  $\beta$  del plasma* a la razón entre el término característico del gradiente de

presión de fluido y el término característico de la presión magnética generada por la fuerza de Lorentz,

$$\beta := \frac{P}{B^2/2\mu_0}. \quad (5.16)$$

El parámetro  $\beta$  se puede estimar, usando relaciones termodinámicas, como

$$\beta = 3,5 \cdot 10^{-21} n T B^{-2},$$

donde  $n$  es la densidad de partículas (en  $m^{-3}$ ),  $T$  es la temperatura (en K) y  $B$  es la intensidad de campo magnético (en G). Así pues, podemos aproximar el parámetro  $\beta$  en algunos de los medios plasmas de la física solar más importantes:

- En la corona solar,  $T \approx 10^6$  K,  $n \approx 10^{14} m^{-3}$  y  $B \approx 10$  G dan lugar a  $\beta \approx 3,5 \cdot 10^{-3}$ . Este pequeño valor del parámetro significa que un enfoque físicamente bien motivado del campo magnético en este medio sea el de los campos force-free, en los cuales el gradiente de presión se anula, y consecuentemente, también el término de Lorentz  $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ .
- En los tubos de flujo magnético fotosféricos,  $T \approx 6 \cdot 10^3$  K,  $n \approx 10^{23} m^{-3}$  y  $B \approx 1000$  G dan lugar a  $\beta \approx 2$ .
- En el viento solar cercano a la órbita terrestre,  $T \approx 2 \cdot 10^5$  K,  $n \approx 10^7 m^{-3}$  y  $B \approx 6 \cdot 10^{-5}$  G dan lugar a  $\beta \approx 2$ .



## Capítulo 6

# El Problema de Parker

### 6.1. Introducción al problema

Recientemente fallecido, Eugene Parker (10 de junio de 1927 – 15 de marzo de 2022) fue un físico solar estadounidense mundialmente reconocido por proponer la existencia de las corrientes de partículas cargadas liberadas desde la corona que se conocen como viento solar, y también por predecir la forma espiral del campo magnético del Sol en la parte externa del Sistema Solar. Estas dos afirmaciones fueron posteriormente comprobadas experimentalmente pese al escepticismo inicial de una buena parte de la comunidad científica.

Además de estas grandes contribuciones, en 1972 Parker abordó, con el trabajo [34], otro de los grandes problemas de la física solar: el calentamiento de la corona solar. Se trata de buscar una explicación razonada y consistente con los modelos para el hecho de que esta capa atmosférica, la más externa del Sol, esté a una temperatura de casi dos millones de grados Kelvin frente a la temperatura superficial que es de solo unos seis mil Kelvin. Parker intentó justificar este fenómeno describiendo un mecanismo de liberación de calor basado en el argumento matemático de una hipotética formación genérica de singularidades motivada por la topología de las líneas de campo. De esta forma, su hipótesis trata la naturaleza fundamental de los estados de equilibrio en los plasmas ideales estudiados en la astrofísica.

No es fácil encontrar una formulación rigurosa y precisa para ciertas cuestiones o planteamientos de la física, como es el caso. Los desarrollos e ideas expuestos a lo largo de este capítulo están principalmente basadas en las referencias [28] y [35].

Sea un campo magnético en equilibrio e inmerso en un plasma ideal, de forma que no puede tener lugar una reconexión magnética (como vimos en la Sección 5.6). Parker conjeturó que si sometemos el flujo magnético a una pequeña perturbación arbitraria, suponiendo que no hay perturbaciones adicionales y la presencia de algún mecanismo de amortiguación, en general el campo magnético

resultante no se relajará hacia un equilibrio suave. Por el contrario, el campo se relajará hacia un estado en el que presenta discontinuidades tangenciales que dan lugar a rápidas reconexiones magnéticas y a una disipación de energía.

La afirmación anterior se conoce como la *Hipótesis de Parker*. El proceso de liberación de energía que describe fue denominado por Parker como *disipación topológica*, y es un ingrediente clave en las teorías actuales que tratan de explicar el calentamiento de la corona solar por medio del mecanismo de las *nanoflames* (ver [5]). Las primeras observaciones que dieron pie a la cuestión de la diferencia de temperaturas en la atmósfera solar datan de comienzos de los 1940s, y a día de hoy es un problema que sigue abierto pues, pese a la existencia de numerosas teorías que le tratan de dar explicación, es todavía difícil determinar cuál es la correcta. Pese a todo, quedan ya pocas dudas de que el sobrecalentamiento tiene su origen en los movimientos turbulentos de la zona de convección solar, y que esta energía se transmite a la corona por medio de efectos del campo magnético antes de disiparse.

Eugene Parker argumentó que los flujos fotosféricos que delimitan la corona solar tienden a ser lentos (1-10 km/s) en comparación con la velocidad de propagación a lo largo de las líneas del campo magnético coronal (1000 km/s), lo que permite aproximar la evolución de este último como una secuencia de estados de equilibrio y estudiarlo desde la magnetostática. Además, la presión del plasma es lo suficientemente baja como para aproximar  $\nabla p \approx 0$ . Esto lo vimos en la Sección 5.6, donde estimamos el parámetro  $\beta$  correspondiente a la corona solar, resultando ser del orden de  $10^{-3}$ . En el marco de la magnetostática, cuya ecuación viene dada por (5.14)

$$-\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0,$$

los campos magnéticos pasan a ser aproximadamente force-free, es decir, cumplen que  $\mathbf{B}$  y su rotacional son casi paralelos en todo punto:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \approx \mathbf{0}.$$

Al juntarla con la condición  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , obtenemos el sistema de ecuaciones que describe el equilibrio estático en el que se encuentra el plasma ideal de la corona solar. Nótese que la ley de Ampère (4.6) implica entonces que la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  es también paralela al campo magnético  $\mathbf{B}$  en todo punto e instante de tiempo, por lo que las líneas de  $\mathbf{B}$  coinciden con las trayectorias de las cargas.

Según la conjetura, a medida que las trayectorias son entremezcladas por los flujos fotosféricos en las fronteras, la topología del campo varía hasta alcanzar un estado tal que no existe un equilibrio suave hacia el que el sistema se podría relajar conservando sus propiedades topológicas. Esta transformación se entiende como una variación continua del campo magnético hacia un estado de menor energía. Debido a la ausencia de dicho estado, durante el proceso de relajación se forman espontáneamente discontinuidades tangenciales en las líneas de campo, lo que lleva a la aparición de términos disipativos y la consecuente pérdida de energía (para más detalles, ver [14] o [35]). Cada

uno de estos eventos de disipación de energía se denomina *nanoflama*, y serían la principal causa del sobrecalentamiento de la corona solar, según la teoría iniciada por E. Parker.

En el artículo de Pontin-Hornig [35] se discuten los diferentes enfoques sobre el mecanismo de disipación topológica desde que fue propuesto por Parker, así como el estado actual de nuestra comprensión. Cabe señalar que el problema de la existencia de campos suaves force-free es tratado también en otros campos de la física matemática como la dinámica de fluidos, y los campos vectoriales que satisfacen la condición  $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  se conocen en ese ámbito como campos de Beltrami.

## 6.2. Planteamiento

La idea que originó el “Problema de Parker” es una conjetura que él mismo enunció y que vamos a presentar con detalle. Consideremos un plasma ideal en estado de equilibrio entre las fuerzas de presión y las tensiones magnéticas. La ecuación que modela el comportamiento del campo magnético es la ecuación de la magnetostática

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (6.1)$$

En la geometría habitual del problema, considerada originalmente por Parker, se toma como dominio de trabajo un volumen infinito  $D \subset \mathbb{R}^3$  delimitado por dos planos paralelos perfectamente conductores. Se considera un estado inicial de equilibrio en el plasma que está dado por una solución  $\mathbf{B}$  de la ecuación (6.1) definida en  $D$ , de tal forma que cada una de las líneas del campo  $\mathbf{B}$  conecta un par de puntos de cada plano, a los que se denomina los *footpoints* de dicha línea. Esta condición implica que la componente normal de  $\mathbf{B}$  es definida positiva en ambos planos y que no existen líneas de campo cerradas en  $D$ . Se dice que un campo que presenta estas características es “braided”. Se suele tomar como estado inicial de equilibrio el campo horizontal constante  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$ , que resuelve trivialmente la ecuación (6.1) al tomar también un campo de presión constante (o, al menos, homogéneo). Los bordes perfectamente conductores de  $D$  son planos paralelos de ecuación  $x = \text{cte}$ , de forma que  $D = [0, L] \times \mathbb{R}^2$ .

Consideramos una perturbación de este estado de equilibrio provocada por flujos tangenciales del plasma en una o ambas fronteras. Estos movimientos se consideran suaves y representan, por ejemplo, los flujos existentes en la fotosfera solar. Dado que los planos son perfectamente conductores, el teorema de Alfvén establece que los footpoints de las líneas de campo magnético están “congelados” a las partículas de plasma que circulan por dichos planos. Por lo tanto, si los movimientos perturbativos en las fronteras son aleatorios, los footpoints se moverán desordenadamente y las líneas de campo magnético en  $D$  se enredarán entre sí (ver Fig. 6.1).

Supongamos que pasado un cierto tiempo, los flujos en las fronteras se detienen. El campo magnético  $\mathbf{B}$  encerrado en  $D$  está entonces desplazado de su estado de equilibrio  $\mathbf{B}_0$ , aunque suponemos

que sigue siendo “braided”.

Ahora dejamos que el campo  $\mathbf{B}$  se relaje hacia un nuevo estado de equilibrio estático transformándose de forma continua, mientras mantenemos fijas las posiciones de los footpoints de las líneas de campo en la frontera de  $D$ . Como el plasma es perfectamente conductor, no puede tener lugar a priori el fenómeno de reconexión magnética en  $D$ . Por lo tanto, la topología del campo  $\mathbf{B}$  tiene que seguir siendo la misma durante este proceso, es decir, deben conservarse las distintas conexiones de las líneas de campo entre cada par de footpoints, al igual que el entrelazado relativo de cualquier par de líneas de campo.

El *Teorema de Parker de Magnetostática* es la afirmación de que el campo magnético “braided” no puede conectarse genéricamente mediante transformaciones que preservan la topología del campo con un estado de equilibrio suave. Como consecuencia, el proceso de relajación llevará a algún tipo de singularidad, y es este mecanismo (heurístico, no tiene una forma matemáticamente rigurosa) el que definimos previamente como disipación topológica.

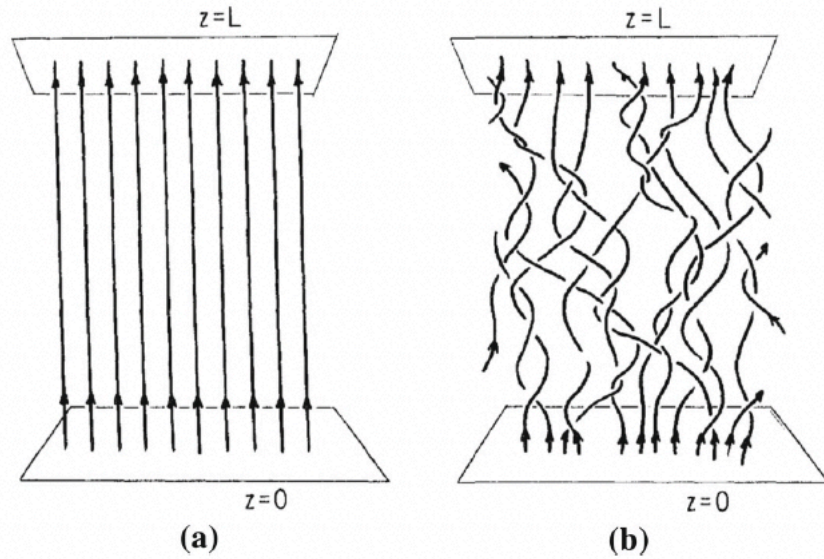


Figura 6.1: Diagrama realizado por E. Parker en el que se muestra el entrelazamiento de las líneas de campo en la geometría del problema. En este boceto, se considera que es  $z$  la coordenada que solo está definida entre 0 y  $L$ .

Habitualmente, una singularidad de estas características en un plasma se corresponde con una *discontinuidad tangencial*, es decir, un salto finito en la componente tangencial de  $\mathbf{B}$  con respecto a una superficie. Esta discontinuidad magnética provoca en el plasma la aparición de una corriente superficial singular estrecha y muy intensa, y de ahí que se describa también este fenómeno como la creación de una *hoja de corriente*. Sin embargo, esta es una terminología delicada, pues para muchos autores una hoja de corriente podría poseer también un espesor finito (en tal caso, nosotros



usaríamos el término de *capa de corriente*). Este efecto genera una disipación de energía que podría permitir la reconexión magnética entre las líneas del campo magnético en las que tiene lugar la discontinuidad tangencial, al dejar de ser el fluido momentáneamente un conductor perfecto.

### 6.3. Teorema de Magnetostática

Estamos ahora en condiciones de enunciar el teorema:

**Teorema de Parker de Magnetostática** (Caso general). *En las condiciones anteriores, para casi todas las perturbaciones de un campo magnético  $\mathbf{B}$  “braided” provocadas por flujos perturbativos en la frontera, no existe un estado de equilibrio estático suave hacia el cual el campo  $\mathbf{B}$  se pueda relajar manteniendo la misma topología.*

Como en la MHD se preserva la topología del campo magnético  $\mathbf{B}$  en ausencia de singularidades, el enunciado anterior sugiere directamente la formación de una de estas en el proceso de relajación.

En el contexto particular de la corona solar, el valor típicamente pequeño del parámetro  $\beta$  que presenta su medio plasma significa que el término del gradiente de presión se puede omitir de (6.1), dando lugar en el estado de equilibrio estático a un campo magnético  $\mathbf{B}$  que es force-free. Esto motiva la formulación de una versión más fuerte de la anterior conjetura.

**Teorema de Parker de Magnetostática** (Caso force-free). *En las condiciones anteriores, para casi todas las perturbaciones de un campo magnético  $\mathbf{B}$  “braided” provocadas por flujos perturbativos en la frontera, no existe un estado de equilibrio estático suave de tipo force-free hacia el cual el campo  $\mathbf{B}$  se pueda relajar manteniendo la misma topología.*

Cabe destacar que la geometría del problema desarrollada es de gran utilidad para modelar la situación en las extensas capas de la atmósfera solar, pero presenta simplifica mucho el comportamiento de  $\mathbf{B}$  al excluir situaciones como posibles ceros del campo o líneas de campo cerradas.

La conjetura de Parker todavía no ha sido demostrada ni refutada, lo que ha dado lugar a su designación como el “Problema de Parker”. Una de las principales dificultades matemáticas que plantea surge de la necesidad de especificar con precisión la topología del campo  $\mathbf{B}$ , que debe describir el entrelazado de sus líneas de campo. Para abordar esto, se pueden utilizar ciertos enfoques, como el que presentamos en la siguiente sección.

## 6.4. Aplicaciones de transición

Como antes, partimos de la ecuación (6.1), que describe el estado de equilibrio para un campo magnético suave en un plasma ideal,

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} &= \nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{6.2}$$

tomando como dominio el cilindro  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq L, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ . Como sabemos, si  $p$  es constante entonces tenemos

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{6.3}$$

y las soluciones de (6.2) son campos force-free (o, en terminología de fluidos, campos de Beltrami). Consideraremos campos magnéticos  $\mathbf{B}$  transversales en todo punto a los planos  $x = c$ , con  $c \in [0, L]$ , que son paralelos a los bordes de  $D$ . De esta forma, las líneas magnéticas están entrelazadas entre sí y presentan una estructura en forma de trenzas. En este contexto, los campos force-free están caracterizados también por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \lambda(x, y, z)\mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{6.4}$$

para alguna función escalar  $\lambda(x, y, z)$ , y si  $\lambda$  es constante entonces  $\mathbf{B}$  es un autocampo del operador rotacional, y se le llama *campo force-free lineal*. La función  $\lambda(x, y, z)$  es una integral primera del campo  $\mathbf{B}$ , ya que

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\lambda \mathbf{B}) = \nabla \lambda \cdot \mathbf{B},$$

y así, cuando  $\nabla \lambda \neq 0$ , las líneas de campo permanecen en superficies de  $\lambda = \text{cte}$ . Nótese que los dos sistemas (6.3) y (6.4) no son estrictamente equivalentes, pues el primero admite soluciones cumpliendo que  $\nabla \times \mathbf{B}$  no se anula en puntos donde  $\mathbf{B}$  sí se puede anular, y para estos campos en el sistema (6.4) la función  $\lambda$  no estaría definida. Sin embargo, el interés de este estudio está en el caso en el que  $\mathbf{B}$  no se anula en ningún punto (no hay ceros del campo), por lo que sí que se cumple la equivalencia entre ambos sistemas.

Para describir la topología de una configuración, podemos apoyarnos en la *aplicación de transición* (también llamada *aplicación de flujo* o *aplicación de footpoints de las líneas del campo magnético*)

$$\begin{aligned}\Pi: \{0\} \times \mathbb{R}^2 &\equiv \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \equiv \{L\} \times \mathbb{R}^2 \\ (0, y, z) &\equiv (y, z) \longmapsto \Pi(y, z) \equiv \{L\} \times \Pi(y, z),\end{aligned}$$

donde  $\Pi(y, z)$  denota la imagen del punto  $(0, y, z)$  en el otro borde  $\{L\} \times \mathbb{R}^2$  del cilindro debida al flujo del campo. Esta aplicación está bien definida por ser  $B_1 > 0$  en todo punto, y es un difeomorfismo debido a la suavidad del campo  $\mathbf{B}$ . Denotaremos por  $\Pi_{\mathbf{B}}$  a la aplicación de transición particular que se corresponda con el flujo proporcionado por  $\mathbf{B}$ . Con la terminología introducida, la

aplicación de transición  $\Pi_{\mathbf{B}}$  define la correspondencia entre los pares de footpoints que el campo  $\mathbf{B}$  conecta. En términos de esta aplicación, el teorema se enuncia como:

**Teorema de Parker de Magnetostática** (Forma para aplicaciones de transición). *En las condiciones anteriores, para casi todas las aplicaciones de transición  $\Pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  no existe un estado de equilibrio estático que tenga los mismos valores de  $B_1$  en el borde y mantenga el entrelazado de las líneas del campo  $\mathbf{B}$ . Además, si nos restringimos a campos force-free (soluciones de (6.4)), no hay ninguno que se corresponda con la aplicación de transición  $\Pi$ .*

Así pues, el planteamiento del problema en términos de  $\Pi$  dice que el estado inicial de equilibrio  $\mathbf{B}_0$  se ve perturbado a través de una variación en su aplicación de transición  $\Pi_{\mathbf{B}_0}$ . Aplicada la perturbación, en la posterior evolución por MHD el campo se anula en las tapas, por lo que los difeomorfismos asociados al flujo de MHD no pueden cambiar la aplicación de transición  $\Pi$ . La conjetura establece que, en estas condiciones, no se puede alcanzar otro estado de equilibrio suave.

Frente a la conjetura de Parker, podemos enunciar el siguiente resultado, cuya demostración no incluimos por su extensión y por emplear herramientas matemáticas que no están relacionadas con el ámbito en el que se está trabajando. Nótese que está planteado para condiciones de contorno periódicas en  $\mathbb{R}^2$  de manera que se pasa a trabajar en el toro  $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ .

**Teorema 6.4.1** (Enciso–Peralta). *Se pueden tomar  $\epsilon_0 > 0$  y  $k_0 \in \mathbb{N}$  tales que, si*

$$\|\Pi - \text{Id}\|_{C^{k_0}(\mathbb{T}^2)} < \epsilon_0,$$

*entonces existe un campo force-free  $\mathbf{B}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  periódico en  $(y, z)$  cuya aplicación de transición correspondiente es  $\Pi_{\mathbf{B}} = \Pi$ .*

El Teorema 6.4.1 implica que no hay ningún impedimento para que un difeomorfismo  $\Pi: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  sea la aplicación de transición de un campo force-free  $\mathbf{B}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  periódico en  $(y, z)$  mientras  $\Pi$  sea cercana a la identidad  $\text{Id}$  en la topología usual de  $C^{k_0}(\mathbb{T}^2) \equiv C^{k_0}(\mathbb{T}^2; \mathbb{T}^2)$ , que está definida por la norma

$$\|f\|_{C^{k_0}(\mathbb{T}^2)} = \sum_{i=0}^{k_0} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^2} \|f^{(i)}(\mathbf{x})\|_2.$$

El campo  $\mathbf{B}$  representa una  $\epsilon_0$ -perturbación del campo horizontal constante  $\mathbf{B}_0$ . Es inmediato ver que este campo da lugar a la aplicación de transición  $\Pi_{\mathbf{B}_0} = \text{Id}$ , aunque no es el único que lo hace. Por lo tanto, este resultado niega el Teorema de Magnetostática de Parker en las condiciones particulares para las que está planteado.

La demostración del teorema hace uso del resultado probado en el artículo [8] de Buffoni-Wahlén, que vamos a revisar y analizar en el siguiente capítulo. En dicho trabajo, los autores aseguran que su prueba es sólo válida para perturbaciones pequeñas del campo horizontal  $\mathbf{B}_0$ , y es natural preguntarse si se podría extender su resultado a perturbaciones de otros estados de equilibrio estático más generales. Esta cuestión tiene respuesta negativa, al menos utilizando el método de trabajo que los autores toman para dicha demostración.



## Capítulo 7

# Estudio de los flujos estacionarios rotacionales por medio de dos funciones de corriente y un argumento iterativo de Nash-Moser

### 7.1. Introducción

A pesar de estar trabajando en el marco de la magnetostática de un plasma ideal en equilibrio, existen numerosas conexiones y analogías entre esta teoría y la que describe el movimiento de un fluido ideal estacionario. En particular, si se hace el cambio de variables adecuado, hemos visto en la Sección 5.4 que los dos sistemas de ecuaciones son idénticos, por lo que cualquiera de los dos marcos de trabajo es indiferente y los resultados obtenidos en uno se pueden reformular para el otro.

En este capítulo trabajaremos entonces en el marco de las ecuaciones de Euler estacionaria para un fluido ideal de densidad constante  $\rho = 1$  y en ausencia de campos de fuerzas externos, que vienen dadas por

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (7.1)$$

En la Sección 3.5 vimos que la función de Bernoulli, definida como

$$H := \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + p, \quad (7.2)$$

es constante a lo largo de las líneas de corriente, lo que significa que el valor que toma cada una es identificativo para la misma. Además, también vimos en la Sección 3.5 (ecuación (3.29)) que el par  $(\mathbf{u}, p)$  es una solución para (7.1) si y solo si

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla H, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (7.3)$$

por lo que, en particular,  $\nabla H = 0$  (ó  $H$  constante) es equivalente a que el campo de velocidades  $\mathbf{u}$  que resuelve la ecuación sea un campo de Beltrami. Debido a la relación entre la caracterización del campo  $\mathbf{u}$  y la función de Bernoulli  $H$  asociada, en general utilizaremos esta última variable en lugar de la presión  $p$ . Así pues, el movimiento de un fluido estará determinado por el par  $(\mathbf{u}, H)$ .

Vamos a trabajar en un dominio  $D = (0, L) \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , que dividiremos en celdas periódicas de igual tamaño

$$\mathcal{P} = (0, L) \times (0, P_1) \times (0, P_2),$$

con  $P_1$  y  $P_2$  dados. En estas condiciones, cualquier campo constante  $\mathbf{u}_c$  junto con una función de presión constante  $p_c$  es una solución en  $D$  para la ecuación (7.1). Además, un campo de esta forma siempre se puede escribir en la forma

$$\mathbf{u}_c = \nabla f_c \times \nabla g_c, \quad (7.4)$$

para ciertas funciones lineales  $f_c, g_c : D \rightarrow \mathbb{R}$  que no son únicas. La función de Bernoulli asociada a este campo inicial constante será  $H_c = \frac{1}{2}|\mathbf{u}_c|^2 + p_c = \text{cte}$ , pero no tendrá importancia en nuestro trabajo.

Consideramos una perturbación de las condiciones de frontera determinadas por las funciones  $f_c$  y  $g_c$  en  $\partial D = \{0, L\} \times \mathbb{R}^2$ . Esta perturbación vendrá dada por la suma de  $f_c$  y  $g_c$  con otras dos funciones  $f_p$  y  $g_p$  que toman valores cercanos a 0, son  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ , y además no se pueden anular en  $\partial D$ , ya que si lo hicieran no se ganaría nada con respecto al caso  $f_p = g_p = 0$  (no habría ninguna perturbación en la frontera).

El objetivo principal del estudio que realizaremos será probar la existencia, bajo las condiciones adecuadas, de un par de funciones  $(f_s, g_s)$  definidas en  $D$  que sean  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ , que se anulen en las fronteras  $x = 0, L$  y que nos proporcionen de nuevo una solución de la ecuación (7.1) de la forma

$$\mathbf{u}_s = \nabla(f_c + f_p + f_s) \times \nabla(g_c + g_p + g_s), \quad (7.5)$$

que mantenga los valores de frontera fijados por la perturbación. Además, probaremos también la unicidad local (en un sentido particular) de dicho par “solución”  $(f_s, g_s)$ .

Es razonable preguntarse el porqué del uso de funciones periódicas en  $(y, z)$ , es decir, definidas en el toro  $\mathbb{T}^2$  para estas dos variables. La principal motivación para este planteamiento es que el cálculo integral en las celdas periódicas nos permite la eliminación de todos los términos de frontera definidos en los lados de  $\partial \mathcal{P}$  con  $y \in \{0, P_1\}$  ó  $z \in \{0, P_2\}$ , es decir, en la práctica no hay frontera lateral. Esto supone una ayuda muy importante de cara a simplificar los desarrollos de cálculos, como veremos.

La formulación de  $\mathbf{u}$  como  $\nabla f \times \nabla g$  generaliza la representación de los campos de velocidad de divergencia nula en  $\mathbb{R}^2$  por medio de una función de corriente  $\psi$ , introducida en la ecuación (3.41)

del Capítulo 3:

$$\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^T.$$

Si recordamos, las curvas de nivel de  $\psi$  coincidían con las líneas de corriente de  $\mathbf{u}$ , y si  $\mathbf{u}$  es estacionario representarán también las trayectorias de las partículas.

Para extender el concepto a  $\mathbb{R}^3$ ,  $\psi$  se ve sustituida por un par de funciones  $(f, g)$ , conocidas como *potenciales de Euler*, que son constantes en las líneas de corriente. El motivo es que el campo  $\mathbf{u}$  es, por construcción, perpendicular a los vectores gradientes  $\nabla f$  y  $\nabla g$  en todo punto, que son a su vez perpendiculares a las superficies de nivel de  $f$  y  $g$ . Por lo tanto, estas superficies equipotenciales, continuas debido a la regularidad de  $f$  y  $g$ , son paralelas a  $\mathbf{u} = \nabla f \times \nabla g$  en todo punto, y se conocen como *superficies magnéticas*. Si  $\nabla f$  y  $\nabla g$  no son paralelos en ningún punto, la intersección de cada par de superficies determinará una línea de corriente, que se puede identificar con el valor que en ella tomen  $f$  y  $g$ .

Con esta formulación, la ecuación vectorial (6.3) de un campo force-free, se reduce a dos ecuaciones diferenciales no lineales acopladas:

$$[\nabla \times (\nabla f \times \nabla g)] \cdot \nabla f = 0,$$

$$[\nabla \times (\nabla f \times \nabla g)] \cdot \nabla g = 0.$$

La gran ventaja del uso de los potenciales de Euler es que permite determinar los pares de puntos de  $\{0, L\} \times \mathbb{R}^2$  que están conectados entre sí por el campo  $\mathbf{u}$  simplemente especificando los valores de  $f$  y  $g$  en la frontera. De esta forma, el problema force-free se puede expresar como un problema de Dirichlet estándar. Además, si  $f$  y  $g$  son lo suficientemente regulares, la divergencia de  $\mathbf{u} = \nabla f \times \nabla g$  es automáticamente nula en todo punto, debido a la identidad (2.10). Se pueden encontrar más detalles sobre las propiedades de esta representación particular en [4] y [17].

En general, expresaremos la función de Bernoulli en términos de  $(f, g)$ . Sustituyendo esta formulación de  $\mathbf{u}$  en (7.2), tenemos que  $H$  se escribe como

$$H = \frac{1}{2} [|\nabla f|^2 |\nabla g|^2 - (\nabla f \cdot \nabla g)^2] + p.$$

Se probará en el Apéndice A.1 del presente trabajo que cualquier campo  $\mathbf{u} \in C^2(D)$  periódico en  $(y, z)$  y con  $u_1 \neq 0$  en todo punto se puede representar como  $\mathbf{u} = \nabla f \times \nabla g$  para un cierto par de funciones  $f$  y  $g$  que además se pueden tomar de la forma “lineal+periódica”.

### 7.1.1. Notación

- Denotamos por  $W_{\text{loc}}^{m,p}(D)$  y  $H_{\text{loc}}^m(D)$  los espacios de Sobolev que están formados por las funciones definidas en  $D$  que pertenecen respectivamente a  $W^{m,p}(D_b)$  y  $H^m(D_b)$  cuando se les restringe a cualquier subconjunto abierto y acotado  $D_b \subset D$ . En particular,  $W^{m,p}(\mathcal{P}) \subset W_{\text{loc}}^{m,p}(D)$  y  $H^m(\mathcal{P}) \subset H_{\text{loc}}^m(D)$ .

- Por simplicidad, usaremos a menudo la notación  $L^2(\mathcal{P})$ ,  $H^m(\mathcal{P})$  o  $W^{m,p}(\mathcal{P})$  en vez de  $L^2(\mathcal{P}, \mathbb{R}^n)$ ,  $H^m(\mathcal{P}, \mathbb{R}^n)$  y  $W^{m,p}(\mathcal{P}, \mathbb{R}^n)$ , respectivamente, para cualquier  $m, n, p \in \mathbb{N}$ .
- Sean las funciones lineales  $f_c(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ ,  $g_c(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$ . Entonces

$$\mathbf{u}_c = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)^T,$$

y denotamos

$$R = D_{(2,3)}(f_c, g_c) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_c & \partial_3 f_c \\ \partial_2 g_c & \partial_3 g_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

y  $RP_1e_1 = P_1(a_2, b_2)^T$ ,  $RP_2e_2 = P_1(a_3, b_3)^T$ . Además,  $\mathcal{Q}$  denota al paralelogramo en  $\mathbb{R}^2$  generado por estos dos vectores.

### 7.1.2. Resultado principal

**Teorema 7.1.1** (Buffoni–Wahlén). *Sea  $j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $\mathbf{u}_c$  un campo de velocidades constante cuya primera componente no se anula en ningún punto e instante de tiempo, es decir,*

$$u_{c,1}(t, \mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times D, \quad \text{ó, equivalentemente,} \quad \frac{a_2}{a_3} \neq \frac{b_2}{b_3}.$$

**Existencia:**

Entonces, se puede tomar  $\epsilon = \epsilon(j) > 0$  tal que si se verifica que

- $H_p \in C^{11+j}(\mathbb{R}^2)$  es periódica con respecto a la red en  $\mathbb{R}^2$  generada por los vectores  $RP_1e_1$  y  $RP_2e_2$ , donde  $P_1$  y  $P_2$  no son necesariamente los períodos fundamentales,
- $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,
- $f_p, g_p \in H_{\text{loc}}^{13+j}(D)$  son  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ ,
- $\|(f_p, g_p)\|_{H^{13+j}(\mathcal{P})}^2 + \|H_p\|_{C^{11+j}(\bar{\mathcal{Q}})}^2 + \|c\|^2 < \epsilon^2$ ,

entonces existe un par  $(f_s, g_s) \in H_{\text{loc}}^{6+j}(D)$  cumpliendo:

- $f_s$  y  $g_s$  son  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ ,
- $f_s$  y  $g_s$  se anulan cuando  $x \in \{0, L\}$ ,
- $\mathbf{u}_s = \nabla(f_c + f_p + f_s) \times \nabla(g_c + g_p + g_s)$  es una solución de la ecuación de Euler estacionaria (7.1) con

$$p_s = -\frac{1}{2}|\mathbf{u}_s|^2 + H(f_c + f_p + f_s, g_c + g_p + g_s),$$

y

$$H(f, g) = c_1 f + c_2 g + H_p(f, g),$$



para todo  $f, g \in \mathbb{R}$ , por lo que, en particular, se tiene que

$$\begin{aligned} H(f_c + f_p + f_s, g_c + g_p + g_s) &= c_1(f_c + f_p + f_s) + c_2(g_c + g_p + g_s) \\ &\quad + H_p(f_c + f_p + f_s, g_c + g_p + g_s). \end{aligned}$$

Además, existe una constante  $C > 0$  independiente de  $(f_p, g_p)$ ,  $H_p$  y  $c$  tal que

$$\|(f_s, g_s)\|_{H^{6+j}(\mathcal{P})} \leq C\epsilon.$$

### Unicidad:

La solución será localmente única en el siguiente sentido. Sea  $H$  definida como antes, pero ahora  $H_p$  puede ser solo de clase  $C^2$ , y sean  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^3(\bar{D})$  cuyas partes no lineales  $(f_1 - f_c, g_1 - g_c)$  y  $(f_2 - f_c, g_2 - g_c)$  son  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ , y verifican que

$$(f_1(x, y, z), g_1(x, y, z)) = (f_2(x, y, z), g_2(x, y, z)), \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \{0, L\} \times \mathbb{R}^2.$$

Supongamos que  $\mathbf{u}_1 = \nabla f_1 \times \nabla g_1$  y  $\mathbf{u}_2 = \nabla f_2 \times \nabla g_2$  son dos soluciones de las ecuaciones de Euler estacionarias (7.1) con campos de presiones asociados  $-\frac{1}{2}|\mathbf{u}_1|^2 + H(f_1, g_1)$  y  $-\frac{1}{2}|\mathbf{u}_2|^2 + H(f_2, g_2)$ , respectivamente. Si  $(\nabla f_1, \nabla g_1)$  y  $(\nabla f_2, \nabla g_2)$  están en un entorno abierto convexo lo suficientemente pequeño de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\mathcal{P})$ , y  $\|H_p\|_{C^2(\bar{\mathcal{Q}})}$  es lo suficientemente pequeña, entonces se tiene que  $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$  en  $\bar{D} = [0, L] \times \mathbb{R}^2$ .

Algunas observaciones sobre el planteamiento y las implicaciones del resultado:

- Observar que

$$\begin{aligned} \nabla_{(f,g)} H(f_c + f_p + f_s, g_c + g_p + g_s) \\ = (c_1 + \partial_f H_p(f_c + f_p + f_s, g_c + g_p + g_s), c_2 + \partial_g H_p(f_c + f_p + f_s, g_c + g_p + g_s))^T \end{aligned}$$

es  $(P_1, P_2)$ -periódica en  $(y, z)$

- La elección  $(f_s, g_s) = -(f_p, g_p)$  no es válida, ya que  $(f_s, g_s)$  está obligada a anularse en  $\partial D$ , mientras que  $(f_p, g_p)$  no puede estarlo porque se trata precisamente de una perturbación en la frontera. Incluso suponiendo que  $(f_p, g_p)$  se anula en  $\partial D$ , esta elección daría lugar, por (7.5), a la solución  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_c$ , y la ecuación (7.1) proporcionaría un campo de presiones asociado también constante. Si  $H$  es constante, esta solución es válida, pero si  $H$  no fuese constante entonces, por (7.2), tendríamos una contradicción.
- Si  $H_p, f_p, g_p$  son diferenciables  $C^\infty$  (esto es, cuando  $j \rightarrow \infty$ ), entonces el teorema dice que las soluciones que obtenemos son de una regularidad arbitrariamente alta. De todas formas, no se obtienen necesariamente soluciones  $C^\infty$  ya que  $\epsilon$  depende de  $j$ .

- Si  $H_p, f_p, g_p$  son analíticas, las soluciones también lo son (usando normas analíticas en la demostración).
- La tesis de unicidad implica que la solución  $(f_c + f_p + f_s, g_c + g_p + g_s)$  solo depende de la perturbación  $(f_p, g_p)$  a través de sus valores en la frontera. Por otra parte, sería posible que dos diferentes conjuntos de datos dieran lugar al mismo campo de velocidad  $\mathbf{u}_s$ .

El resto de este capítulo está dedicado a la demostración del Teorema 7.1.1. Para ello, comenzaremos reformulando la ecuación de Euler (7.3) a partir de la estructura variacional que posee (ver [25]). Posteriormente se fijará el camino a seguir, y se enunciarán y demostrarán algunos resultados necesarios que nos aportarán las herramientas necesarias para la prueba.

## 7.2. Planteamiento

### 7.2.1. Caracterización de las funciones admisibles

Definimos el conjunto  $\mathcal{A}_0$  de *funciones admisibles cumpliendo la condición de borde* como aquellos pares  $(f, g)$  que cumplen

1.  $f, g \in C^2(\bar{D})$ ,
2.  $\nabla f$  y  $\nabla g$  son  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ ,
3.  $(f(x, y, z), g(x, y, z)) = (f_0(x, y, z), g_0(x, y, z))$  para todo  $(x, y, z) \in \{0, L\} \times \mathbb{R}^2$ , donde  $f_0$  y  $g_0$  son dos funciones fijas de clase  $C^2(\bar{D})$  tales que  $\nabla f_0$  y  $\nabla g_0$  son  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ .

Nótese que la condición 3, que fija los valores de frontera, evita la caracterización de  $\mathcal{A}_0$  como un espacio vectorial, pero sí que es un espacio convexo: para cada  $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in \mathcal{A}_0$  y  $t \in [0, 1]$ , se tiene que  $t(f_1, g_1) + (1 - t)(f_2, g_2) \in \mathcal{A}_0$ ; esto es,  $\mathcal{A}_0$  contiene todos los segmentos de línea entre cualesquiera dos de sus elementos.

Si  $(f, g) \in \mathcal{A}_0$ , entonces  $\mathbf{u} = \nabla f \times \nabla g$  es de divergencia nula, y su primera componente,

$$u_1 = (\nabla f \times \nabla g) \cdot (1, 0, 0)^T = \partial_2 f \partial_3 g - \partial_2 g \partial_3 f = \partial_2 f_0 \partial_3 g_0 - \partial_2 g_0 \partial_3 f_0,$$

está prefijada en el borde  $\{0, L\} \times \mathbb{R}^2$ . Por otra parte, la condición 2 es equivalente a pedir que las funciones  $f$  y  $g$  sean cada una la suma de una función lineal en  $(y, z)$  más una función  $(P_1, P_2)$ -periódica en  $(y, z)$ . Esto significa que existen constantes  $a_2, a_3, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$  tales que

$$f(x, y, z) - a_2 y - a_3 z \quad \text{y} \quad g(x, y, z) - b_2 y - b_3 z$$

son  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ . Esta condición también implica que el campo de velocidad definido como  $\mathbf{u} = \nabla f \times \nabla g$  será  $(P_1, P_2)$ -periódico en  $(y, z)$ . Por último, la condición de frontera 3 fija los

valores de estas constantes, que por tanto no dependen del par  $(f, g)$  considerado. Esto lo hace igualándolas en la frontera a otras dos funciones  $f_0$  y  $g_0$ , cada una compuesta también por la suma de una función lineal y una función periódica. En nuestro caso de interés, estas dos componentes son  $(f_c, g_c)$  y  $(f_p, g_p)$ , respectivamente.

También asumimos que la función  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ , y que si  $(f, g) \in \mathcal{A}_0$  entonces el gradiente  $\nabla H(f, g)$  es  $(P_1, P_2)$ -periódico en  $(y, z)$ . Esto último es equivalente a pedir que  $\nabla_{(f, g)} H$  sea periódico con respecto a la red generada por  $P_1(a_2, b_2)$  y  $P_2(a_3, b_3)$ , es decir, la que está formada por celdas de la forma  $\mathcal{Q}$  que definimos previamente. Comprobemos esta equivalencia:

Por la condición 2 de las funciones admisibles, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x, y + kP_1, z + lP_2) - a_2(y + kP_1) - a_3(z + lP_2) &= f(x, y, z) - a_2y - a_3z, \\ g(x, y + kP_1, z + lP_2) - b_2(y + kP_1) - b_3(z + lP_2) &= g(x, y, z) - b_2y - b_3z, \end{aligned}$$

para  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Despejando el primer sumando en cada ecuación y aplicando  $\partial_f H(\cdot, \cdot)$  sobre el par que forman,

$$\begin{aligned} \partial_f H(f(x, y + kP_1, z + lP_2), g(x, y + kP_1, z + lP_2)) \\ = \partial_f H(f(x, y, z) + a_2kP_1 + a_3lP_2, g(x, y, z) + b_2kP_1 + b_3lP_2). \end{aligned}$$

Por una parte, supongamos que, para cualquier par admisible  $(f, g)$ , la derivada  $\partial_f H(f, g)$  es  $(P_1, P_2)$ -periódica en  $(y, z)$ . Entonces

$$\partial_f H(f(x, y + kP_1, z + lP_2), g(x, y + kP_1, z + lP_2)) = \partial_f H(f(x, y, z), g(x, y, z)),$$

y, usando la igualdad obtenida de la condición 2, se tiene que

$$\partial_f H(f(x, y, z) + a_2kP_1 + a_3lP_2, g(x, y, z) + b_2kP_1 + b_3lP_2) = \partial_f H(f(x, y, z), g(x, y, z)).$$

Lo mismo se deduce para  $\partial_g H$ , y por tanto se demuestra que  $\nabla_{(f, g)} H$  es periódica con respecto a la red generada por  $P_1(a_2, b_2)$  y  $P_2(a_3, b_3)$ . La otra implicación se demuestra de forma completamente análoga, usando de nuevo la condición 2 de las funciones admisibles.

### 7.2.2. Formulación variacional del problema

Tomemos un par de funciones admisibles  $(\bar{f}, \bar{g}) \in \mathcal{A}_0$  y supongamos que se trata de un punto crítico del funcional integral

$$(f, g) \in \mathcal{A}_0 \mapsto I(f, g) := \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla f \times \nabla g|^2 + H(f, g) \right\} d\mathbf{x} \in \mathbb{R}. \quad (7.7)$$

Consideramos *variaciones admisibles*  $(f_s, g_s) \in \mathcal{A}_0$  en torno a  $(\bar{f}, \bar{g})$ , es decir, aplicaciones

$$(s, \mathbf{x}) \in [0, 1] \times \bar{D} \mapsto (f_s(\mathbf{x}), g_s(\mathbf{x})) := ((1 - s)f_0 + sf_1, (1 - s)g_0 + sg_1)$$

de clase  $C^2([0, 1] \times \bar{D})$ , tales que  $(f_0, g_0) = (\bar{f}, \bar{g})$  y con  $(f_1, g_1) \in \mathcal{A}_0$  fijada. Por la propiedad de convexidad,  $(f_s, g_s) \in \mathcal{A}_0$  para todo  $s \in [0, 1]$ .

La caracterización de  $(f_0, g_0)$  como punto crítico del funcional  $I$  significa que su derivada respecto de  $s$  evaluada en  $s = 0$  se anula para cualquier variación admisible  $(f_s, g_s)$ . Suponiendo además que  $(f_1 - f_0, g_1 - g_0)$  tiene soporte compacto en  $\mathcal{P}$ , el punto crítico  $(\bar{f}, \bar{g})$  resuelve las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nabla \bar{g} \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})) + \partial_f H(\bar{f}, \bar{g}) = 0, \\ \nabla \cdot (\nabla \bar{f} \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})) + \partial_g H(\bar{f}, \bar{g}) = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Comprobamos esto calculando la derivada. Notemos que  $\partial_s f_s = f_1 - f_0$  y  $\partial_s g_s = g_1 - g_0$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial I}{\partial s}(f_s, g_s) \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla f_s \times \nabla g_s|^2 + H(f_s, g_s) \right\} \mathbf{dx} \Big|_{s=0} \\ &= \int_{\mathcal{P}} \left\{ [\nabla(f_1 - f_0) \times \nabla g_0 + \nabla f_0 \times \nabla(g_1 - g_0)] \cdot (\nabla f_0 \times \nabla g_0) \right. \\ &\quad \left. + \partial_f H(f_0, g_0)(f_1 - f_0) + \partial_g H(f_0, g_0)(g_1 - g_0) \right\} \mathbf{dx} \\ &= \int_{\mathcal{P}} \left\{ [\nabla(f_1 - \bar{f}) \times \nabla \bar{g} + \nabla \bar{f} \times \nabla(g_1 - \bar{g})] \cdot (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g}) \right. \\ &\quad \left. + \partial_f H(\bar{f}, \bar{g})(f_1 - \bar{f}) + \partial_g H(\bar{f}, \bar{g})(g_1 - \bar{g}) \right\} \mathbf{dx}. \end{aligned}$$

Desarrollamos el primer sumando del integrando:

$$\begin{aligned} [\nabla(f_1 - \bar{f}) \times \nabla \bar{g}] \cdot (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g}) &= [\nabla \times ((f_1 - \bar{f}) \cdot \nabla \bar{g})] \cdot (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g}) \\ &= \nabla \cdot [(f_1 - \bar{f}) \nabla \bar{g} \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})] + (f_1 - \bar{f}) \nabla \bar{g} \cdot (\nabla \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})), \end{aligned} \quad (7.9)$$

donde usamos en la primera igualdad que  $\nabla \times \nabla \bar{g} = 0$ , y en la segunda la identidad vectorial (2.10).

La integral del primer término de (7.9) es

$$\int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot [(f_1 - \bar{f}) \nabla \bar{g} \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})] \mathbf{dx} = \oint_{\partial \mathcal{P}} [(f_1 - \bar{f}) \nabla \bar{g} \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})] \cdot \mathbf{dA} = 0,$$

ya que, por hipótesis,  $f_1 - \bar{f}$  tiene soporte compacto en  $\mathcal{P}$ , y entonces también lo tiene el término que va entre corchetes. Luego,

$$\int_{\mathcal{P}} [\nabla(f_1 - \bar{f}) \times \nabla \bar{g}] \cdot (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g}) \mathbf{dx} = \int_{\mathcal{P}} (f_1 - \bar{f}) \nabla \bar{g} \cdot (\nabla \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})) \mathbf{dx},$$

y, de forma similar, se tiene que

$$\int_{\mathcal{P}} [\nabla \bar{f} \times \nabla(g_1 - \bar{g})] \cdot (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g}) \mathbf{dx} = - \int_{\mathcal{P}} (g_1 - \bar{g}) \nabla \bar{f} \cdot (\nabla \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})) \mathbf{dx}.$$

Usando de nuevo la identidad vectorial (2.10), podemos desarrollar en los integrandos

$$\begin{cases} \nabla \bar{g} \cdot (\nabla \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})) = -\nabla \cdot (\nabla \bar{g} \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})) + \underbrace{(\nabla \times \nabla \bar{g}) \cdot (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})}_{=0}, \\ -\nabla \bar{f} \cdot (\nabla \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})) = \nabla \cdot (\nabla \bar{f} \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})) - \underbrace{(\nabla \times \nabla \bar{f}) \cdot (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})}_{=0}. \end{cases} \quad (7.10)$$

En consecuencia, la derivada del funcional  $I$  será

$$0 = \int_{\mathcal{P}} (f_1 - \bar{f}) \cdot \{ -\nabla \cdot (\nabla \bar{g} \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})) + \partial_{\bar{f}} H(\bar{f}, \bar{g}) \} \, \mathbf{dx} \\ + \int_{\mathcal{P}} (g_1 - \bar{g}) \cdot \{ \nabla \cdot (\nabla \bar{f} \times (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g})) + \partial_{\bar{g}} H(\bar{f}, \bar{g}) \} \, \mathbf{dx}.$$

Esta igualdad es válida para cualquier par de funciones admisibles  $(f_1, g_1)$  tal que  $f_1 - \bar{f}$  y  $g_1 - \bar{g}$  tienen soporte compacto en  $\mathcal{P}$ , por lo que, igualando ambos integrandos a 0, obtenemos finalmente las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.8).

Por la periodicidad de  $\nabla \bar{f}$  y  $\nabla \bar{g}$ , las variaciones admisibles  $(f_s, g_s)$  más generales no aportarán ninguna condición adicional. Además, la condición de periodicidad en  $\partial_{\bar{f}} H(\bar{f}, \bar{g})$  y  $\partial_{\bar{g}} H(\bar{f}, \bar{g})$  permite extender el conjunto de puntos que resuelven el sistema (7.8) en la celda  $\mathcal{P}$  a todo el dominio  $D$ .

Usando (7.10), el sistema (7.8) también se puede escribir como

$$\begin{cases} \nabla \bar{g} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}) + \partial_{\bar{f}} H(\bar{f}, \bar{g}) = 0, \\ -\nabla \bar{f} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}) + \partial_{\bar{g}} H(\bar{f}, \bar{g}) = 0, \end{cases}$$

con  $\bar{\mathbf{u}} := \nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g}$ . Con la identidad vectorial (2.3), se sigue que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}) &= (\nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g}) \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}) = (\nabla \bar{f} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{u}})) \nabla \bar{g} - (\nabla \bar{g} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{u}})) \nabla \bar{f} \\ &= \partial_{\bar{f}} H(\bar{f}, \bar{g}) \nabla \bar{f} + \partial_{\bar{g}} H(\bar{f}, \bar{g}) \nabla \bar{g} = \nabla_{(x,y,z)} H(\bar{f}, \bar{g}), \end{aligned}$$

que, junto con la condición de divergencia nula automáticamente verificada al emplear esta representación de  $\bar{\mathbf{u}}$ , es exactamente (7.3), la formulación equivalente de las ecuaciones de Euler estacionarias empleando la función de Bernoulli  $H(\bar{f}, \bar{g})$ .

Así pues, cualquier punto crítico  $(\bar{f}, \bar{g})$  del funcional integral  $I(f, g)$  se corresponde con una solución estacionaria de las ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles de la forma  $\bar{\mathbf{u}} = \nabla \bar{f} \times \nabla \bar{g}$  y con presión asociada  $\bar{p} = -\frac{1}{2}|\bar{\mathbf{u}}|^2 + H(\bar{f}, \bar{g})$ . Como hemos visto, estas ecuaciones coinciden para esta representación de  $\mathbf{u}$  con las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema variacional, que son las que consideraremos durante el resto del capítulo.

### 7.2.3. Pasos

El objetivo del capítulo es el desarrollo de una teoría de existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange, a las que nos referiremos en esta subsección como  $\mathcal{F}(f, g) = 0$ . Esta solución debe ser próxima a un punto crítico  $(f_c, g_c)$  compuesto por dos funciones lineales y que se ha visto sometido a una pequeña perturbación periódica que ha alterado sus valores en la frontera. Trataremos de probar que se puede obtener una nueva solución periódica de las ecuaciones (7.8) con la misma forma de antes y verificando las nuevas condiciones de frontera.

Trabajaremos con una forma bilineal  $B_{(f,g)}(\cdot, \cdot)$  determinada por la derivada segunda del funcional integral en  $(f, g)$ , así como con la correspondiente forma cuadrática. Comenzaremos comprobando que  $B_{(f,g)}$  no es coercitiva y llevaremos a cabo unas sucesivas acotaciones superiores que nos permitirá deducir que la forma cuadrática es definida positiva en  $(f, g) \in \mathcal{A}_f$  si  $(\nabla f, \nabla g)$  y  $H''(f, g)$  satisfacen ciertas condiciones de proximidad. A modo de corolario, concluiremos esta primera parte con la demostración de la unicidad local de soluciones que establece el resultado principal.

Para la segunda parte de la prueba de 7.1.1, relativa a la existencia de soluciones, utilizaremos el método iterativo de Nash-Moser. Esta técnica requiere un estudio previo de la existencia y regularidad con respecto a los datos iniciales en las soluciones de una EDP lineal de la forma

$$\mathcal{F}'(f, g) \cdot (F, G) = (\mu, \nu),$$

siendo  $\mathcal{F}(f, g) = 0$  las ecuaciones de Euler-Lagrange y  $\mathcal{F}'$  la derivada de  $\mathcal{F}$  en el sentido de Fréchet. Su aplicación es adecuada cuando el método iterativo de Newton clásico no converge debido a que hay una pérdida de derivadas en las soluciones, pero dicha pérdida debe ser constante con respecto al orden de derivación.

Para realizar este estudio, buscaremos un par de funciones  $(F, G)$  en un cierto espacio vectorial  $\mathcal{A}' \subset L^2(\mathcal{P})$  tangente al espacio de funciones admisibles  $(f, g)$  y determinado por las condiciones de frontera, que resuelva la formulación débil de la EDP lineal

$$B_{(f,g)}((F, G), (P, Q)) = \langle (\mu, \nu), (P, Q) \rangle_{L^2(\mathcal{P})}, \quad \text{para todo } (P, Q) \in \mathcal{A}',$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{P})}$  denota el producto escalar usual en  $L^2(\mathcal{P})$ , y  $(\mu, \nu)$  es una función dada.

Para asegurar la existencia y unicidad del par  $(F, G)$  que permita esta transformación, seguiremos la técnica de *regularización elíptica* desarrollada por Kohn y Nirenberg en [26]. Este método de trabajo consiste en regularizar la forma cuadrática añadiendo un operador elíptico multiplicado por un factor  $\epsilon$ , para así hacerla elíptica y coercitiva para  $\epsilon > 0$  y bajo las condiciones de frontera dadas, que en nuestro caso son periódicas en los lados de la celda  $\mathcal{P}$  correspondientes a  $y, z$  constantes, y de Dirichlet en  $x \in \{0, L\}$ . Así, se busca la aplicabilidad de un teorema clásico para EDPs elípticas como es el Teorema de Lax-Milgram, que proporciona la existencia y unicidad de soluciones bajo las hipótesis comprobadas y si las condiciones de frontera son apropiadas.

En nuestro caso, incorporamos como términos perturbativos de segundo orden a las ecuaciones de Euler-Lagrange los laplacianos de las funciones  $f$  y  $g$ , multiplicados por un factor  $\epsilon > 0$ :

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta f - \nabla \cdot (\nabla g \times (\nabla f \times \nabla g)) + \partial_f H(f, g) = 0 \\ -\epsilon \Delta g + \nabla \cdot (\nabla f \times (\nabla f \times \nabla g)) + \partial_g H(f, g) = 0, \end{cases}$$

Al calcular la diferencial de las expresiones de la izquierda para linealizar las ecuaciones, se obtiene una forma cuadrática regularizada que, gracias a sus propiedades particulares, es coercitiva si  $\epsilon > 0$ .

Analizaremos las condiciones necesarias para que la nueva ecuación tenga una solución  $(F, G)$  suave y, a partir de ciertas propiedades de conmutatividad en derivadas que tiene la forma cuadrática, obtendremos “estimaciones tame” para las normas de Sobolev de la solución. Estas expresiones relacionan el orden de regularidad de Sobolev de la solución con los órdenes de los demás términos de tal forma que se produce una pérdida de regularidad fija que no depende del orden de regularidad (o número de derivadas) involucrado. Para ello, seguiremos de nuevo la referencia [26], que es un trabajo clásico en el ámbito de problemas de frontera no coercitivos. Las estimaciones obtenidas no dependen de  $\epsilon$ , por lo que sirven también para la ecuación original sin perturbar. Además, tomando una sucesión  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , se tiene que una subsucesión de las soluciones de los problemas correspondientes a cada  $\epsilon_n$ , junto con sus derivadas, converge a una solución suave del problema original.

En la última parte de la prueba, se aplica el método de iteración de Nash-Moser para establecer la existencia de soluciones siguiendo el procedimiento descrito en el Capítulo 6 de la referencia [22]. El teorema de Nash-Moser permite demostrar la existencia de una solución para una ecuación en situaciones en las que el teorema de inversión local entre espacios de Banach no puede aplicarse debido a que la inversa de su diferencial induce la mencionada “pérdida de derivadas” en las soluciones. Este fenómeno es el que describen las estimaciones “tame”, y lo explicaremos con detalle en la sección correspondiente a esta parte.

En resumen, las tres secciones que conforman el resto de este capítulo están estructuradas siguiendo las tres etapas del procedimiento que hemos descrito para la prueba del Teorema 7.1.1:

1. un primer estudio del operador cuadrático que incluye su acotación superior,
2. la linealización y un análisis de la existencia y regularidad de soluciones de la ecuación obtenida,
3. la aplicación del Teorema de Nash-Moser.

## 7.3. Estudio del operador cuadrático

### 7.3.1. Planteamiento y cálculo

La estructura variacional de (7.8) permite estudiar su linealización con la ayuda de la parte cuadrática del funcional (7.7) alrededor de un par de funciones admisibles  $(f, g)$ . Para este propósito, modificamos la definición previa de funciones admisibles a aquellos pares  $(f, g)$  que verifican

1.  $f, g \in C^3(\bar{D})$ ,
2.  $\nabla f$  y  $\nabla g$  son  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ ,

y denotamos por  $\mathcal{A}_f$  a este conjunto de pares de funciones. Podemos ver que la diferencia de  $\mathcal{A}_f$  con el conjunto  $\mathcal{A}_0$  que empleamos en la obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange está en que ahora se elimina la condición de frontera y se exige un grado más de regularidad en las funciones. El conjunto  $\mathcal{A}_f$  está formado por los posibles pares de funciones que proporcionan cualquiera de los campos perturbados válidos. Dado un par admisible  $(f, g)$ , diremos que la función  $H$  es *admisibile*, y lo denotamos por  $H \in \mathcal{A}_H$ , si

1.  $H \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,
2.  $H''(f, g)$  es  $(P_1, P_2)$ -periódica en  $(y, z)$ .

La parte cuadrática del funcional es su matriz hessiana, formada por sus derivadas segundas, pensada como una forma cuadrática en el tangente al espacio de funciones  $\mathcal{A}_f$  que se considera. Para obtenerla, primero debemos definir el espacio de *direcciones admisibles*  $\mathcal{A}_d$ , que está formado por aquellos pares de funciones  $(F, G)$  tales que

1.  $F, G \in H_{\text{loc}}^1(D)$ ,
2.  $F$  y  $G$  son  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ ,
3.  $(F, G) = 0$  en  $\partial D$  en el sentido de trazas.

La condición 1 posibilita la posterior definición y análisis del funcional  $(s, t) \mapsto I(f + sF, g + tG)$ . La condición 3 se introduce porque más tarde asumiremos que la restricción de  $(f, g)$  a  $\partial D$  está prefijada, y los pares  $(F, G)$  son variaciones infinitesimales de  $(f, g)$  que respetan las condiciones de borde fijadas por estas funciones.

Debido a la combinación de las tres condiciones, la integral en la frontera de  $\mathcal{P}$  de una función apropiada que contenga a  $F$  o a  $G$  será siempre nula: la condición 1 asegura la integrabilidad, la condición 3 implica que la integral en  $\{0, L\} \times [0, P_1] \times [0, P_2]$  es cero, y la condición 2 implica que las contribuciones de  $F$  y  $G$  a la integral en los bordes

$$[0, L] \times [0, P_1] \times \{0\} \quad \text{y} \quad [0, L] \times [0, P_1] \times \{P_2\}$$

se cancelan mutuamente, y lo mismo ocurre con los bordes

$$[0, L] \times \{0\} \times [0, P_2] \quad \text{y} \quad [0, L] \times \{P_1\} \times [0, P_2].$$

Por el Teorema de la Divergencia, esto significará la anulación de cualquier integral en  $\mathcal{P}$  de un término que sea la divergencia de una función que contenga a  $F$  o a  $G$ . Usaremos frecuentemente esta herramienta en nuestros cálculos, y al aplicarla nos referiremos a ella como la propiedad (A) de  $(F, G)$ , para simplificar el lenguaje.



Para calcular la parte cuadrática de  $I$  en un par  $(f, g) \in \mathcal{A}_f$ , tomamos un par de direcciones admisibles  $(F, G)$  y calculamos la derivada direccional segunda en la dirección dada por  $(F, G)$ , esto es, consideramos la aplicación  $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto I(f + sF, g + tG)$  y calculamos sus derivadas segundas en  $s = t = 0$ :

$$\begin{aligned}
I(f + sF, g + tG) &= \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla(f + sF) \times \nabla(g + tG)|^2 + H(f + sF, g + tG) \right\} \mathbf{dx}, \\
\frac{\partial I}{\partial s}(f + sF, g + tG) &= \int_{\mathcal{P}} \left\{ [\nabla(f + sF) \times \nabla(g + tG)] \cdot [\nabla F \times \nabla(g + tG)] + \partial_f H(f + sF, g + tG) F \right\} \mathbf{dx}, \\
\frac{\partial I}{\partial t}(f + sF, g + tG) &= \int_{\mathcal{P}} \left\{ [\nabla(f + sF) \times \nabla(g + tG)] \cdot [\nabla(f + sF) \times \nabla G] + \partial_g H(f + sF, g + tG) G \right\} \mathbf{dx}, \\
B_{11}((F, G), (F, G)) &= \frac{\partial^2 I}{\partial s^2}(f + sF, g + tG) \Big|_{s=t=0} = \int_{\mathcal{P}} \left\{ [\nabla F \times \nabla g]^2 + \partial_f^2 H(f, g) F^2 \right\} \mathbf{dx}, \\
B_{22}((F, G), (F, G)) &= \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}(f + sF, g + tG) \Big|_{s=t=0} = \int_{\mathcal{P}} \left\{ [\nabla f \times \nabla G]^2 + \partial_g^2 H(f, g) G^2 \right\} \mathbf{dx}, \\
B_{12}((F, G), (F, G)) &= \frac{\partial^2 I}{\partial s \partial t}(f + sF, g + tG) \Big|_{s=t=0} = \int_{\mathcal{P}} \left\{ [\nabla f \times \nabla G] \cdot [\nabla F \times \nabla g] \right. \\
&\quad \left. + [\nabla f \times \nabla g] \cdot [\nabla F \times \nabla G] + \partial_f \partial_g H(f, g) FG \right\} \mathbf{dx}.
\end{aligned}$$

Entonces, definimos la *parte cuadrática* asociada al operador  $I$  como la forma cuadrática que a cada  $(F, G) \in \mathcal{A}_d$  le hace corresponder

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} B_{(f,g)}((F, G), (F, G)) &= \frac{1}{2} \left\{ B_{11}((F, G), (F, G)) + 2B_{12}((F, G), (F, G)) + B_{22}((F, G), (F, G)) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \left\{ |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 + 2(\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla G) \right. \\
&\quad \left. + \partial_f^2 H(f, g) F^2 + 2\partial_f \partial_g H(f, g) FG + \partial_g^2 H(f, g) G^2 \right\} \mathbf{dx}. \tag{7.11}
\end{aligned}$$

Este operador se corresponde con una forma bilineal simétrica definida, para cada  $(F, G), (P, Q) \in \mathcal{A}_d$ , como

$$\begin{aligned}
B_{(f,g)}((F, G), (P, Q)) &= \frac{1}{2} \left\{ B_{(f,g)}((F, G) + (P, Q), (F, G) + (P, Q)) \right. \\
&\quad \left. - B_{(f,g)}((F, G), (F, G)) - B_{(f,g)}((P, Q), (P, Q)) \right\} \\
&= \int_{\mathcal{P}} \left\{ (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) \cdot (\nabla P \times \nabla g + \nabla f \times \nabla Q) \right. \\
&\quad \left. + (\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla Q) + (\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla P \times \nabla G) \right. \\
&\quad \left. + \partial_f^2 H(f, g) FP + \partial_f \partial_g H(f, g)(FQ + GP) + \partial_g^2 H(f, g) GQ \right\} \mathbf{dx}. \tag{7.12}
\end{aligned}$$

La parte cuadrática es definida positiva en  $(f, g)$  cuando

$$\frac{1}{2} B_{(f,g)}((F, G), (F, G)) \geq 0,$$

para toda dirección  $(F, G) \in \mathcal{A}_d$ .

### 7.3.2. Comprobación de la no coercitividad

El operador cuadrático  $\frac{1}{2}B_{(f,g)}$  se dice *coercitivo* en  $(f, g)$  si se cumple que

$$\frac{1}{2}B_{(f,g)}((F, G), (F, G)) \geq \alpha \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2,$$

para alguna constante positiva  $\alpha$ . Vamos a comprobar que no se verifica esta condición, y, de hecho, podemos ver que ni siquiera satisface una versión más débil, ya que no existe ningún  $\alpha > 0$  tal que, para todo par de direcciones admisibles  $(F, G)$ , se tenga que

$$\frac{1}{2}B_{(f,g)}((F, G), (F, G)) \geq \alpha \|\nabla F, \nabla G\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 - \frac{1}{\alpha} \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \quad (7.13)$$

$$= \int_{\mathcal{P}} \left\{ \alpha (|\nabla F|^2 + |\nabla G|^2) - \frac{1}{\alpha} (F^2 + G^2) \right\} \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (7.14)$$

Esto permite intuir que es la norma  $L^2$  de las derivadas de  $F$  y  $G$  la que evita por su tamaño que el funcional sea coercitivo. Para comprobar el incumplimiento de (7.13) para cualquier  $\alpha$ , consideramos  $G = 0$ , de forma que la parte cuadrática es

$$F \mapsto \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \{ |\nabla F \times \nabla g|^2 + \partial_f^2 H(f, g) F^2 \} \mathbf{d}\mathbf{x}.$$

En el caso particular de  $f(x, y, z) = y$ ,  $g(x, y, z) = z$  (ambas funciones admisibles),  $H = 0$  (también admisible) y  $P_1 = P_2 = 1$ , la integral de la parte cuadrática se reduce a

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \{ (\partial_1 F)^2 + (\partial_2 F)^2 \} \mathbf{d}\mathbf{x}.$$

Consideremos una sucesión

$$F_n(x, y, z) = \phi(x) \cos(2\pi n z),$$

donde  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  es una función meseta con soporte compacto en  $(0, 1)$ . Es trivial ver que  $F_n \in \mathcal{A}_d$ , para todo  $n$ , y resulta que

$$\|(F_n, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 = \int_{\mathcal{P}} \phi(x)^2 \cos(2\pi n z)^2 \mathbf{d}\mathbf{x} \leq \int_{\mathcal{P}} \phi(x)^2 \mathbf{d}\mathbf{x}$$

y la parte cuadrática

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \phi''(x)^2 \cos(2\pi n z)^2 \mathbf{d}\mathbf{x} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \phi''(x)^2 \mathbf{d}\mathbf{x}$$

están acotadas a lo largo de toda la sucesión. Sin embargo,

$$\|(\nabla F_n, \nabla G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 = \int_{\mathcal{P}} \{ \phi'(x)^2 \cos(2\pi n z)^2 + 4\pi^2 n^2 \phi(x)^2 \sin(2\pi n z)^2 \} \mathbf{d}\mathbf{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

y por tanto no puede existir la constante  $\alpha$  que buscamos.

Basándonos en este caso particular, podemos encontrar un contraejemplo para un par  $(f, g) \in \mathcal{A}_f$  arbitrario. Fijamos un punto  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}$  tal que  $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  y consideramos una sucesión de funciones  $F_n$  que sean  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$  y cuyas restricciones a  $\mathcal{P}$  vengan dadas por

$$F_n(x, y, z) = \phi(x, y, z) \cos(n g(x, y, z)),$$

donde  $\phi \in C^\infty(\bar{\mathcal{P}}, [0, 1])$  es una función meseta de soporte compacto en  $\mathcal{P}$ , con  $\phi(x_0, y_0, z_0) = 1$ . Así definidas, para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $F_n \in \mathcal{A}_d$  y  $|F_n| \leq 1$ . Entonces, por ser  $G = 0$ ,

$$\|(F_n, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 = \|F_n\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \leq \text{Vol}(\mathcal{P}) = P_1 P_2 L.$$

Por otro lado,  $\|\nabla F_n\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$  diverge a  $+\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , ya que

$$\nabla F_n = \nabla \phi(x, y, z) \cos(ng(x, y, z)) - n\phi(x, y, z) \sin(ng(x, y, z)) \nabla g(x, y, z).$$

Finalmente, la parte cuadrática es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} B_{(f,g)}((F_n, G), (F_n, G)) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \{ |\nabla F_n \times \nabla g|^2 + \partial_f^2 H(f, g) F_n^2 \} \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \{ |\nabla \phi(x, y, z) \cos(ng(x, y, z)) \times \nabla g(x, y, z)|^2 + \partial_f^2 H(f, g) F_n^2 \} \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \left[ |\nabla \phi(x, y, z) \cos(ng(x, y, z))|^2 |\nabla g(x, y, z)|^2 - (\nabla \phi(x, y, z) \cos(ng(x, y, z))) \cdot \nabla g(x, y, z) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \partial_f^2 H(f, g) F_n^2 \right\} \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \left[ |\nabla \phi(x, y, z)|^2 |\nabla g(x, y, z)|^2 + (\nabla \phi(x, y, z) \cdot \nabla g(x, y, z))^2 \right] + \partial_f^2 H(f, g)^2 \right\} \mathbf{d}\mathbf{x}, \end{aligned}$$

donde usamos la identidad (2.6) en la tercera igualdad. Por tanto, la forma cuadrática está acotada por un valor constante, pues  $\mathcal{P}$  es compacto y las funciones del integrando son continuas debido a las condiciones de admisibilidad de  $g$  y  $H$ .

Así pues, tomando un índice  $n$  lo suficientemente grande, obtenemos de nuevo que no puede existir un  $\alpha$  que satisfaga (7.13). De hecho, hemos deducido una propiedad todavía más fuerte: para todo  $\alpha > 0$ , existe una sucesión  $\{(F_n, G_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de direcciones admisibles tales que

$$\frac{1}{2} B_{(f,g)}((F_n, G_n), (F_n, G_n)) + \frac{1}{\alpha} \|(F_n, G_n)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$$

permanece acotada, mientras que  $\{(\nabla F_n, \nabla G_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  no tiene ninguna subsucesión convergente en  $L^2(\mathcal{P})$  pues su norma diverge a  $+\infty$  en este espacio.

El hecho de que  $B_{(f,g)}$  no sea coercitiva en  $(f_c, g_c)$  supone una gran dificultad para conseguir buenos límites *a priori* para las sucesiones minimizantes. Uno puede esperar que estas converjan en sentido débil a algún tipo de solución débil, o que algún tipo de regularización del funcional integral seguido de un proceso de paso al límite podría llevar a la obtención de soluciones regulares. Si esto fuera factible, es probable que se basase en un análisis de regularidad similar al que sigue.

### 7.3.3. Acotación inferior de la parte cuadrática

#### Pasos

Reescribamos la parte cuadrática del funcional:

$$(F, G) \mapsto \frac{1}{2} B_{(f,g)}((F, G), (F, G)) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \left\{ |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 + 2(\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla G) \right. \\ \left. + \partial_f^2 H(f, g) F^2 + 2\partial_f \partial_g H(f, g) FG + \partial_g^2 H(f, g) G^2 \right\} \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (7.15)$$

Como veremos en el Teorema 7.3.1, el primer sumando se comporta bien pues se puede acotar inferiormente por

$$\int_{\mathcal{P}} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + (\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2\} \mathbf{d}\mathbf{x},$$

asumiendo una cierta condición (de otra forma existiría un factor adicional). A su vez, esta expresión se puede acotar inferiormente por  $\alpha \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$  empleando la desigualdad de Poincaré en dimensión 1, la condición de periodicidad en las variables  $y, z$  y la condición de frontera de Dirichlet en  $x = 0, L$ .

A continuación, acotamos inferiormente el segundo sumando de la integral. Usando la identidad vectorial (2.11) aplicada a un campo gradiente,

$$\nabla \times (f \nabla \psi) = f \nabla \times \nabla \psi - \nabla f \times \nabla \psi = \nabla \psi \times \nabla f, \quad (7.16)$$

podemos escribir

$$\nabla F \times \nabla G = \frac{1}{2} (\nabla F \times \nabla G - \nabla G \times \nabla F) = \frac{1}{2} \nabla \times (F \nabla G - G \nabla F). \quad (7.17)$$

Además,

$$0 = \int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times (F \nabla G - G \nabla F)) \mathbf{d}\mathbf{x} \\ = \int_{\mathcal{P}} \{ \nabla \times \mathbf{u} \cdot (F \nabla G - G \nabla F) - \mathbf{u} \cdot \nabla \times (F \nabla G - G \nabla F) \} \mathbf{d}\mathbf{x},$$

donde la anulación de la primera integral se debe a la propiedad (A) de las direcciones admisibles  $(F, G)$ , y la segunda igualdad se debe a la identidad vectorial (2.10). Por tanto, el segundo término es

$$\int_{\mathcal{P}} 2(\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla G) \mathbf{d}\mathbf{x} = \int_{\mathcal{P}} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (F \nabla G - G \nabla F) \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (7.18)$$

Estamos considerando velocidades  $\mathbf{u}$  ligeramente desplazadas respecto del campo constante  $\mathbf{u}_c$  y, por tanto, ligeramente rotacionales, por lo que este término requiere cuidadosas estimaciones y la idea es comprobar que no es “muy negativo” respecto del primer término. El último término de (7.15) es fácilmente controlable pues podemos tomar  $H''$  lo suficientemente pequeña.

## Teorema de acotación

Queremos encontrar condiciones que aseguren que la parte cuadrática  $\frac{1}{2}B_{(f,g)}(\cdot, \cdot)$  sea definida positiva cuando el par  $(f, g)$  resuelve las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.8). Sin embargo, en la prueba del teorema, utilizaremos la desigualdad de Poincaré para obtener el resultado más fuerte de que es definida positiva para cualquier par  $(f, g)$  admisible y que esté lo suficientemente próximo a  $(f_c, g_c)$  en  $C^3(\bar{\mathcal{P}})$ , aunque no resuelva (7.8). Además, también se pide que  $\|H''(f, g)\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}$  sea lo suficientemente pequeña.

Por simplicidad, consideraremos que se verifica la condición

$$|\nabla f_c|^2 + |\nabla g_c|^2 + \sqrt{(|\nabla f_c|^2 + |\nabla g_c|^2)^2 - 4|\mathbf{u}_c|^2} < 2, \quad (7.19)$$

que es válida si  $\nabla f_c$  y  $\nabla g_c$  son lo suficientemente pequeños, ya que el radicando es

$$\begin{aligned} (|\nabla f_c|^2 + |\nabla g_c|^2)^2 - 4|\mathbf{u}_c|^2 &= |\nabla f_c|^4 + |\nabla g_c|^4 + 2|\nabla f_c|^2|\nabla g_c|^2 - 4[|\nabla f_c|^2|\nabla g_c|^2 - (\nabla f_c \cdot \nabla g_c)^2] \\ &= (|\nabla f_c|^2 - |\nabla g_c|^2)^2 + 4(\nabla f_c \cdot \nabla g_c)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

No hay pérdida de generalidad en realizar esta suposición puesto que la ecuación de Euler-Lagrange (7.8) permanece invariante bajo la transformación

$$(\bar{f}, \bar{g}) \mapsto (\lambda \bar{f}, \lambda \bar{g}), \quad H(\cdot, \cdot) \mapsto \lambda^4 H(\lambda^{-1} \cdot, \lambda^{-1} \cdot).$$

Por lo tanto, dada una solución, podemos trabajar con otra solución cuyo par de vectores gradientes sean arbitrariamente pequeños con tal de tomar el parámetro  $\lambda$  adecuado. Posteriormente, se podría recuperar la solución inicial sin más que hacer la transformación inversa.

**Teorema 7.3.1.** *Supongamos que  $\nabla f_c$  y  $\nabla g_c$  son constantes, que la primera componente de  $\mathbf{u}_c$  no se anula en ningún punto y que se verifica la condición (7.19). Entonces, para dos pares de funciones  $(f, g) \in \mathcal{A}_f$  y  $(F, G) \in \mathcal{A}_d$  tales que  $(\nabla f, \nabla g)$  está en un entorno lo suficientemente pequeño de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\bar{\mathcal{P}})$  (independientemente del  $H$  admisible), se tiene que la parte cuadrática en  $(f, g)$  verifica*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}B_{(f,g)}((F, G), (F, G)) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \{ |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 + 2(\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla G) \\ &\quad + \partial_f^2 H(f, g) F^2 + 2\partial_f \partial_g H(f, g) FG + \partial_g^2 H(f, g) G^2 \} \, d\mathbf{x} \\ &\geq \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{32}(\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + \frac{1}{32}(\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2 + (1 - O(\|\mathbf{u}'\|_{C(\bar{\mathcal{P}})})) \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{32L^2} (F^2 + G^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ \partial_f^2 H(f, g) F^2 + 2\partial_f \partial_g H(f, g) FG + \partial_g^2 H(f, g) G^2 \right] \right\} \, d\mathbf{x} \quad (7.20) \end{aligned}$$

Nótese que, pese a que la definición de la notación  $O$  ya implicaría el uso de la norma de  $\mathbf{u}'$ , se deja explícito que se considera la norma del supremo en  $\bar{\mathcal{P}}$ . Se puede observar también que, según  $\mathbf{u}$  se aproxima a  $\mathbf{u}_c$ , la norma  $\|\mathbf{u}'\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}$  se aproxima a 0, ya que  $\mathbf{u}_c$  es constante.

*Observación 7.3.2.* No es estrictamente necesario que  $\nabla f_c$  y  $\nabla g_c$  sean constantes para que este resultado se cumpla. Se podría relajar la condición a que  $\mathbf{u}_c$  sea irrotacional (manteniendo las otras hipótesis) y reemplazar el coeficiente  $1 - O\left(\|\mathbf{u}'\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}\right)$  por  $\exp\left\{-4L\left\|(\mathbf{u}/u_1)'\right\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}\right\}$ .

*Demostración.* Bajo las hipótesis del teorema, podemos suponer que  $u_1(t, \mathbf{x}) \neq 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x} \in D$ . Esto es porque la primera componente de  $\mathbf{u}_c$  cumple esta condición, que es abierta, y en consecuencia basta con tomar  $(\nabla f, \nabla g)$  lo suficientemente cerca de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\bar{\mathcal{P}})$ .

Vamos a acotar de forma individual los distintos términos de la forma cuadrática como explicamos previamente. Como aparecen en la propia cota inferior que pide el teorema, no es necesario trabajar con los términos que dependen de la función de Bernoulli  $H$ . Dividiremos la demostración en 4 partes.

**1. Acotación de  $\int_{\mathcal{P}} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 \mathbf{d}\mathbf{x}$ :**

Vamos a demostrar que si  $(\nabla f, \nabla g)$  está lo suficientemente cerca de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\bar{\mathcal{P}})$  entonces se verifica que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 \mathbf{d}\mathbf{x} &\geq \int_{\mathcal{P}} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + (\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2\} \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &\geq \left(1 - O\left(\|\mathbf{u}'\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}\right)\right) \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{L^2} \int_{\mathcal{P}} (F^2 + G^2) \mathbf{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Para ello, escribimos

$$\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G = a\nabla f + b\nabla g + c\nabla f \times \nabla g.$$

Nótese que  $\nabla f$ ,  $\nabla g$  y  $\nabla f \times \nabla g$  forman en cada punto una base de  $\mathbb{R}^3$  si  $\mathbf{u}$  está lo suficientemente cerca de  $\mathbf{u}_c$ . Esto es porque  $\nabla f$  y  $\nabla g$  son linealmente independientes pues  $u_1 \neq 0$  si  $\mathbf{u}$  está lo suficientemente cerca de  $\mathbf{u}_c$ , al ser  $u_{c,1} \neq 0$ .

Para determinar las expresiones de los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$ , hacemos en ambos lados de la igualdad el producto escalar por  $\nabla f$ ,  $\nabla g$  y  $\nabla f \times \nabla g$  sucesivamente. Tras eliminar los términos que se anulan por ortogonalidad, obtenemos

$$\begin{cases} (\nabla g \times \nabla f) \cdot \nabla F = a|\nabla f|^2 + b\nabla f \cdot \nabla g \\ (\nabla g \times \nabla f) \cdot \nabla G = a\nabla f \cdot \nabla g + b|\nabla g|^2 \\ (\nabla g \times (\nabla f \times \nabla g)) \cdot \nabla F + ((\nabla f \times \nabla g) \times \nabla f) \cdot \nabla G = c|\nabla f \times \nabla g|^2, \end{cases}$$

donde se ha aplicado la regla de conmutatividad del producto mixto (2.4). Se trata de un sistema

compatible con  $(a, b, c)^T$  como vector de incógnitas y que podemos resolver, obteniendo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-|\nabla g|^2(\mathbf{u} \cdot \nabla F) + (\nabla f \cdot \nabla g)(\mathbf{u} \cdot \nabla G)}{|\nabla f|^2|\nabla g|^2 - (\nabla f \cdot \nabla g)^2} = \frac{-|\nabla g|^2(\mathbf{u} \cdot \nabla F) + (\nabla f \cdot \nabla g)(\mathbf{u} \cdot \nabla G)}{|\mathbf{u}|^2}, \\ b &= \frac{-|\nabla f|^2(\mathbf{u} \cdot \nabla G) + (\nabla f \cdot \nabla g)(\mathbf{u} \cdot \nabla F)}{|\mathbf{u}|^2}, \\ c &= \frac{(\mathbf{u} \times \nabla f) \cdot \nabla G + (\nabla g \times \mathbf{u}) \cdot \nabla F}{|\mathbf{u}|^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 d\mathbf{x} \\ & \geq \int_{\mathcal{P}} |a\nabla f + b\nabla g|^2 d\mathbf{x} \\ & = \int_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nabla f|^2 & \nabla f \cdot \nabla g \\ \nabla f \cdot \nabla g & |\nabla g|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} d\mathbf{x} \\ & = \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{|\mathbf{u}|^4} (\mathbf{u} \cdot \nabla F \quad \mathbf{u} \cdot \nabla G) \\ & \quad \times \begin{pmatrix} -|\nabla g|^2 & \nabla f \cdot \nabla g \\ \nabla f \cdot \nabla g & -|\nabla f|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nabla f|^2 & \nabla f \cdot \nabla g \\ \nabla f \cdot \nabla g & |\nabla g|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -|\nabla g|^2 & \nabla f \cdot \nabla g \\ \nabla f \cdot \nabla g & -|\nabla f|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla F \\ \mathbf{u} \cdot \nabla G \end{pmatrix} d\mathbf{x} \\ & = \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{|\mathbf{u}|^4} (\mathbf{u} \cdot \nabla F \quad \mathbf{u} \cdot \nabla G) \begin{pmatrix} -|\nabla g|^2 & \nabla f \cdot \nabla g \\ \nabla f \cdot \nabla g & -|\nabla f|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -|\mathbf{u}|^2 & 0 \\ 0 & -|\mathbf{u}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla F \\ \mathbf{u} \cdot \nabla G \end{pmatrix} d\mathbf{x} \\ & = \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla F \quad \mathbf{u} \cdot \nabla G) \begin{pmatrix} |\nabla g|^2 & -\nabla f \cdot \nabla g \\ -\nabla f \cdot \nabla g & |\nabla f|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla F \\ \mathbf{u} \cdot \nabla G \end{pmatrix} d\mathbf{x} \\ & \geq \int_{\mathcal{P}} \frac{|\nabla f|^2 + |\nabla g|^2 - \sqrt{(|\nabla f|^2 + |\nabla g|^2)^2 - 4|\mathbf{u}|^2}}{2|\mathbf{u}|^2} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + (\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2\} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En la última desigualdad se ha utilizado que los autovalores de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} |\nabla g|^2 & -\nabla f \cdot \nabla g \\ -\nabla f \cdot \nabla g & |\nabla f|^2 \end{pmatrix}$$

son

$$\lambda_{\pm} = \frac{|\nabla f|^2 + |\nabla g|^2 \pm \sqrt{(|\nabla f|^2 + |\nabla g|^2)^2 - 4|\mathbf{u}|^2}}{2}.$$

Como es bien sabido, dada una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$ ,  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq \lambda_- |\mathbf{x}|^2$ , para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\lambda_-$  es el autovalor más pequeño de  $A$ .

Para demostrar la primera desigualdad de (7.21), basta con probar que

$$\frac{|\nabla f|^2 + |\nabla g|^2 - \sqrt{(|\nabla f|^2 + |\nabla g|^2)^2 - 4|\mathbf{u}|^2}}{2|\mathbf{u}|^2} \geq 1,$$

si  $(\nabla f, \nabla g)$  está lo suficientemente cerca de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C(\bar{\mathcal{P}})$ . Esto equivale a ver que

$$2\lambda_- = |\nabla f|^2 + |\nabla g|^2 - \sqrt{(|\nabla f|^2 + |\nabla g|^2)^2 - 4|\mathbf{u}|^2} \geq 2|\mathbf{u}|^2.$$

Como el determinante de una matriz viene dado por el producto de sus autovalores, se tendrá que

$$\lambda_+ \lambda_- = \det M = |\nabla f|^2 |\nabla g|^2 - (\nabla f \cdot \nabla g)^2 = |\mathbf{u}|^2$$

Por la hipótesis (7.19), podemos suponer que existe un  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño tal que el mayor autovalor  $\lambda_+$  cumple

$$2\lambda_+ = |\nabla f|^2 + |\nabla g|^2 + \sqrt{(|\nabla f|^2 + |\nabla g|^2)^2 - 4|\mathbf{u}|^2} \leq 2 - \epsilon,$$

si  $(\nabla f, \nabla g)$  está lo suficientemente cerca de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C(\overline{\mathcal{P}})$ , de donde

$$|\mathbf{u}|^2 \leq \frac{2 - \epsilon}{2} \lambda_-.$$

En consecuencia,

$$2\lambda_- = \frac{2|\mathbf{u}|^2}{\lambda_+} \geq \frac{4|\mathbf{u}|^2}{2 - \epsilon} > 2|\mathbf{u}|^2,$$

como queríamos ver. Nótese que sin la hipótesis (7.19), tendríamos que trabajar en lo que sigue con el autovalor  $\lambda_- = \lambda_-(\nabla f, \nabla g)$  como un factor adicional del integrando.

Para probar la segunda desigualdad de (7.21), emplearemos la desigualdad de Poincaré en la dimensión dada por la coordenada  $x$ , cuya aplicación es válida ya que  $F$  y  $G$  se anulan en  $\{0, L\} \times (0, P_1) \times (0, P_2)$  por hipótesis. Después integraremos con respecto a las dos variables restantes.

Sea  $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^2$  fijado y consideremos la función  $\Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  que resuelve la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \Gamma'_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}, \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\tilde{x})) = (u_1(\tilde{x}, \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\tilde{x})))^{-1} \left( u_2(\tilde{x}, \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\tilde{x})), u_3(\tilde{x}, \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\tilde{x})) \right), \\ \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(0) = (\tilde{y}, \tilde{z}), \end{cases} \quad (7.22)$$

que está bien definida ya que  $u_1 \neq 0$  en todo punto, si  $\mathbf{u}$  es lo suficientemente próxima a  $\mathbf{u}_c$ . El flujo definido por (7.22) es la aplicación

$$\phi : (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\tilde{x}),$$

que es de clase  $C^2$  en  $\overline{\mathcal{P}}$  ya que  $f, g \in C^3(\tilde{\mathcal{D}})$  por ser admisibles, luego  $\mathbf{u}$  es  $C^2(\tilde{\mathcal{D}})$  y  $\Gamma$  es  $C^2$  por el teorema de existencia y regularidad de soluciones de EDO.

Fijado  $\tilde{x} \in [0, L]$ , la restricción del flujo  $\phi$  a  $(\tilde{y}, \tilde{z})$  permite estudiar la dependencia de la solución de la ecuación (7.22) con las condiciones iniciales  $(\tilde{y}, \tilde{z})$ . El Teorema 7.2 en [12, p. 25] establece que el determinante jacobiano de esta aplicación vendrá dado por

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &:= \det D_{(\tilde{y}, \tilde{z})} \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ &= \exp \int_0^{\tilde{x}} \text{tr } D_{\tilde{x}} f(s, \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(s)) \, ds = \exp \int_0^{\tilde{x}} \nabla_{(2,3)} \cdot \left( \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1} \right) \Big|_{(s, \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(s))} \, ds. \end{aligned}$$



Entonces, si  $\mathbf{u}$  está lo suficientemente próxima a  $\mathbf{u}_c$  en  $C^1(\tilde{\mathcal{P}})$ , tendremos que

$$J(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 1 + O\left(\|\mathbf{u}'\|_{C(\mathcal{P})}\right), \quad (7.23)$$

uniformemente en  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \tilde{\mathcal{P}}$ .

Dado  $\tilde{x} \in (0, L)$ , consideremos la transformación

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto (x, y, z) = (\tilde{x}, \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\tilde{x})).$$

Esta transformación fija la coordenada  $\tilde{x} = x$  y hace que la segunda y tercera coordenadas evolucionen con respecto a la primera verificando la ecuación diferencial (7.22). Definiendo  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{G}$  y  $\tilde{u}_1$  como

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = F(x, y, z), \quad \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = G(x, y, z), \quad \tilde{u}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = u_1(x, y, z),$$

tenemos que

$$\partial_1 \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{d}{d\tilde{x}} F(\tilde{x}, \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\tilde{x})) = \nabla F \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u_2/u_1(\tilde{x}, \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\tilde{x})) \\ u_3/u_1(\tilde{x}, \Gamma_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\tilde{x})) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\tilde{u}_1 \partial_1 \tilde{F} = \mathbf{u} \cdot \nabla F,$$

y, análogamente,

$$\tilde{u}_1 \partial_1 \tilde{G} = \mathbf{u} \cdot \nabla G.$$

De esta forma, la ventaja que ofrece el cambio de variables (y la ecuación diferencial que definimos) está en hacer que la única coordenada que contribuya a los productos escalares  $\mathbf{u} \cdot \nabla F$  y  $\mathbf{u} \cdot \nabla G$  sea la primera. Ahora podemos trabajar solamente con la derivada parcial respecto de la primera coordenada, que varía en  $[0, L]$ , pero, además,  $\tilde{F}$  y  $\tilde{G}$  se anulan en los bordes de dicho intervalo, lo que permite utilizar la desigualdad de Poincaré (2.16) en una dimensión espacial. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \{(\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + (\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2\} d\mathbf{x} &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \left( \tilde{u}_1 \partial_1 \tilde{F} \right)^2 + \left( \tilde{u}_1 \partial_1 \tilde{G} \right)^2 \right\} J(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} \\ &\geq \min_{\tilde{\mathcal{P}}} (\tilde{u}_1^2 J) \int_{(0, P_1) \times (0, P_2)} \left\{ \int_0^L \left\{ \left( \partial_1 \tilde{F} \right)^2 + \left( \partial_1 \tilde{G} \right)^2 \right\} d\tilde{x} \right\} d\tilde{y} d\tilde{z} \\ &\stackrel{(2)}{\geq} \frac{\pi^2 \min_{\tilde{\mathcal{P}}} (\tilde{u}_1^2 J)}{L^2} \int_{(0, P_1) \times (0, P_2)} \left\{ \int_0^L \left( \tilde{F}^2 + \tilde{G}^2 \right) d\tilde{x} \right\} d\tilde{y} d\tilde{z} \\ &\stackrel{(3)}{\geq} \frac{\pi^2 \min_{\tilde{\mathcal{P}}} (\tilde{u}_1^2 J)}{L^2 \max_{\tilde{\mathcal{P}}} J} \int_{\mathcal{P}} (F^2 + G^2) d\mathbf{x} \\ &\stackrel{(4)}{\geq} \left( 1 - O\left(\|\mathbf{u}'\|_{C(\tilde{\mathcal{P}})}\right) \right) \frac{\pi^2 \min_{\tilde{\mathcal{P}}} u_1^2}{L^2} \int_{\mathcal{P}} (F^2 + G^2) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En (1), efectuamos el cambio de variables  $(x, y, z) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ . En (2), se aplica la desigualdad de Poincaré para el caso del espacio  $L^2$  en el intervalo real  $[0, L]$ , cuya constante de Poincaré es

$L/\pi$ , como vimos en el Teorema 2.4.2. En (3), deshacemos el cambio de variables y usamos que el jacobiano de la transformación inversa cumple  $J^{-1} \geq (\max_{\tilde{\mathcal{P}}} J)^{-1}$ . En (4), usamos que  $\mathbf{u}$  está en un entorno lo suficientemente pequeño de  $\mathbf{u}_c$  en  $C^1(\tilde{\mathcal{P}})$  para aplicar (7.23).

## 2. Acotación de $\int_{\mathcal{P}} (\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla G) \, d\mathbf{x}$ :

Como probamos en (7.18), este término es igual a  $\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (F \nabla G - G \nabla F) \, d\mathbf{x}$ . En este paso vamos a expresar la vorticidad  $\nabla \times \mathbf{u}$  como combinación lineal de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \times \nabla f$  y  $\mathbf{u} \times \nabla g$ , obteniendo

$$\nabla \times \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u} \times \nabla f + \gamma \mathbf{u} \times \nabla g.$$

El primer coeficiente se obtiene multiplicando escalarmente por  $\mathbf{u}$  en ambos lados de la igualdad. Para el segundo y el tercero hacemos el producto escalar por  $\nabla g$  y  $\nabla f$  respectivamente y usamos la propiedad (2.4) del producto mixto:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \nabla g &= \beta (\mathbf{u} \times \nabla f) \cdot \nabla g = \beta (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{u} = \beta |\mathbf{u}|^2, \\ (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \nabla f &= \gamma (\mathbf{u} \times \nabla g) \cdot \nabla f = -\gamma (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{u} = -\gamma |\mathbf{u}|^2. \end{aligned}$$

Así pues, tenemos

$$\alpha = \frac{(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}, \quad \beta = \frac{(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \nabla g}{|\mathbf{u}|^2}, \quad \gamma = -\frac{(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \nabla f}{|\mathbf{u}|^2}, \quad (7.24)$$

e

$$\int_{\mathcal{P}} (\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla G) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u} \times \nabla f + \gamma \mathbf{u} \times \nabla g) \cdot (F \nabla G - G \nabla F) \, d\mathbf{x}.$$

El primer sumando del integrando se transforma (usando de nuevo la propiedad (2.4)) en

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (F \nabla G - G \nabla F) &= (\nabla f \times \nabla g) \cdot (F \nabla G - G \nabla F) \\ &= -(\nabla f \times \nabla G) \cdot F \nabla g + (\nabla F \times \nabla g) \cdot G \nabla f = (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) \cdot (G \nabla f - F \nabla g). \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young (Teorema 2.3.1), se tiene que, para  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$  formando un ángulo  $\theta$ ,

$$\frac{1}{2} \alpha \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \alpha |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \geq -\frac{1}{2} \alpha |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \geq -\frac{1}{4} \left[ \left( \frac{|\mathbf{A}|}{2} \right)^2 + (2\alpha |\mathbf{B}|)^2 \right] = -\frac{|\mathbf{A}|^2}{16} - \alpha^2 |\mathbf{B}|^2. \quad (7.25)$$

Tomando  $\mathbf{A} = \nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G$  y  $\mathbf{B} = G \nabla f - F \nabla g$ , llegamos finalmente a la estimación

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} (\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla G) \, d\mathbf{x} &\geq \int_{\mathcal{P}} \left\{ -\frac{1}{16} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 - \alpha^2 (G^2 |\nabla f|^2 + F^2 |\nabla g|^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\beta \mathbf{u} \times \nabla f + \gamma \mathbf{u} \times \nabla g) \cdot (F \nabla G - G \nabla F) \right\} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

El primer sumando de esta integral se puede controlar con la  $16^a$  parte del término estudiado en la primera parte de la demostración, por lo que no da problemas a la hora de hallar la cota inferior buscada. El segundo sumando tampoco supone un problema. Al ser cuadrático en  $(F, G)$  y teniendo

en cuenta que  $|\alpha|$  se puede tomar tan pequeña como se quiera si  $\nabla \times \mathbf{u}$  está lo suficientemente próxima a  $\nabla \times \mathbf{u}_c$ , entonces también se podrá controlar con una fracción del término estudiado en el primer paso, tomando  $(\nabla f, \nabla g)$  suficientemente próximos a  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  y usando la desigualdad (7.21). Así pues, queda comprobar la controlabilidad del último término, que se lleva a cabo en el siguiente paso de la demostración.

### 3. Acotación de $\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} (\beta \mathbf{u} \times \nabla f + \gamma \mathbf{u} \times \nabla g) \cdot (F \nabla G - G \nabla F) \, d\mathbf{x}$ :

La integral está compuesta por dos términos análogos, el que va con  $\beta$  y el que va con  $\gamma$ . Comenzaremos trabajando con el primero, y debido a la similitud, los resultados obtenidos serán fácilmente extendidos para el segundo término. Por (2.7),  $\nabla(FG) = G \nabla F + F \nabla G$ , y entonces escribimos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} (\beta \mathbf{u} \times \nabla f) \cdot (F \nabla G - G \nabla F) \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} (\beta \mathbf{u} \times \nabla f) \cdot \nabla(FG) \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{P}} (\beta \mathbf{u} \times \nabla f) \cdot (G \nabla F) \, d\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} FG [\nabla \times (\beta \mathbf{u})] \cdot \nabla f \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{P}} (\beta \mathbf{u} \times \nabla f) \cdot (G \nabla F) \, d\mathbf{x} \\ &\stackrel{(2.11)}{=} -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} FG [\beta \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \beta \times \mathbf{u}] \cdot \nabla f \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{P}} (\beta \mathbf{u} \times \nabla f) \cdot (G \nabla F) \, d\mathbf{x}. \quad (7.26) \end{aligned}$$

La segunda igualdad se debe a que, por las identidades (2.10), (2.11) y (2.14),

$$\begin{aligned} & (\beta \mathbf{u} \times \nabla f) \cdot \nabla(FG) + FG \nabla \times (\beta \mathbf{u}) \cdot \nabla f \stackrel{(2.10)}{=} \nabla \cdot (FG \beta \mathbf{u} \times \nabla f) - FG \nabla \cdot (\beta \mathbf{u} \times \nabla f) + FG (\nabla \times \beta \mathbf{u}) \cdot \nabla f \\ &\stackrel{(2.11)}{=} \nabla \cdot (FG \beta \mathbf{u} \times \nabla f) - FG (\nabla \times (\beta \mathbf{u})) \cdot \nabla f + FG \beta \mathbf{u} \cdot \underbrace{(\nabla \times \nabla f)}_{=0} + FG (\nabla \times (\beta \mathbf{u})) \cdot \nabla f \\ &= \nabla \cdot (FG \beta \mathbf{u} \times \nabla f). \end{aligned}$$

La integral en  $\mathcal{P}$  de este último término, que es una divergencia, se anula por la propiedad (A), y así se igualan los dos sumandos del primer miembro y se demuestra la segunda igualdad de (7.26).

Usando la desigualdad de Young similarmente a como hicimos en (7.25), se tiene que

$$\begin{aligned} -\beta F \mathbf{u} \cdot (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) &\leq \left| \sqrt{2} \beta F \mathbf{u} \right|^2 + \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) \right|^2 \\ &\leq 2\beta^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{8} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2. \quad (7.27) \end{aligned}$$

Por otro lado, la propiedad (A) y (2.10) permiten escribir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot \left( \mathbf{u} \times \left( -\frac{1}{2} \beta F^2 \nabla g + \beta FG \nabla f \right) \right) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{P}} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \left( -\frac{1}{2} \beta F^2 \nabla g + \beta FG \nabla f \right) \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{P}} \mathbf{u} \cdot \nabla \times \left( -\frac{1}{2} \beta F^2 \nabla g + \beta FG \nabla f \right) \, d\mathbf{x}. \quad (7.28) \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{8} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 \mathbf{dx} \stackrel{(7.27)}{\geq} \int_{\mathcal{P}} \left\{ -\beta F \mathbf{u} \cdot (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) - 2\beta^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx} \\
& \stackrel{(2.11)}{=} \int_{\mathcal{P}} \left\{ -\frac{1}{2} \beta F \mathbf{u} \cdot (\nabla F \times \nabla g) - \beta F \mathbf{u} \cdot \left[ \frac{1}{2} \nabla \times (F \nabla g) - \frac{1}{2} F \underbrace{\nabla \times \nabla g}_{=0} - \nabla \times (G \nabla f) + G \underbrace{\nabla \times \nabla f}_{=0} \right] \right. \\
& \quad \left. - 2\beta^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx} \\
& \stackrel{(2.11)}{=} \int_{\mathcal{P}} \left\{ -\frac{1}{2} \beta F \mathbf{u} \cdot (\nabla F \times \nabla g) + \mathbf{u} \left[ \nabla \times \left( -\frac{1}{2} \beta F^2 \nabla g + \beta F G \nabla f \right) - \nabla(\beta F) \times \left( G \nabla f - \frac{1}{2} F \nabla g \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - 2\beta^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx} \\
& \stackrel{(2.11)}{=} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \mathbf{u} \cdot \left[ \nabla \times \left( -\frac{1}{2} \beta F^2 \nabla g + \beta F G \nabla f \right) + \frac{1}{2} F^2 \nabla \beta \times \nabla g - F G \nabla \beta \times \nabla f - \beta G \nabla F \times \nabla f \right] \right. \\
& \quad \left. - 2\beta^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx} \\
& = \int_{\mathcal{P}} \left\{ (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \left( -\frac{1}{2} \beta F^2 \nabla g + \beta F G \nabla f \right) + \frac{1}{2} F^2 \mathbf{u} \cdot (\nabla \beta \times \nabla g) - F G \mathbf{u} \cdot (\nabla \beta \times \nabla f) \right. \\
& \quad \left. - \beta G \mathbf{u} \cdot (\nabla F \times \nabla f) - 2\beta^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx}.
\end{aligned} \tag{7.29}$$

En consecuencia, podemos acotar el segundo término de (7.26) como

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathcal{P}} (\beta \mathbf{u} \times \nabla f) \cdot (G \nabla F) \mathbf{dx} \stackrel{(2.4)}{=} \int_{\mathcal{P}} (\beta G \mathbf{u} \cdot (\nabla F \times \nabla f)) \mathbf{dx} \\
& \stackrel{(7.29)}{\geq} - \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{8} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 \mathbf{dx} + \int_{\mathcal{P}} \left\{ (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \left( \beta F G \nabla f - \frac{\beta}{2} F^2 \nabla g \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} F^2 \mathbf{u} \cdot (\nabla \beta \times \nabla g) - F G \mathbf{u} \cdot (\nabla \beta \times \nabla f) - 2\beta^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx}. \tag{7.30}
\end{aligned}$$

Haciendo desarrollos análogos para el término de  $\gamma$ , podemos escribir

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} (\gamma \mathbf{u} \times \nabla g) \cdot (F \nabla G - G \nabla F) \mathbf{dx} \\
& = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} F G [\gamma \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \gamma \times \mathbf{u}] \cdot \nabla g \mathbf{dx} + \int_{\mathcal{P}} (\gamma \mathbf{u} \times \nabla g) \cdot (F \nabla G) \mathbf{dx}, \tag{7.31}
\end{aligned}$$

y, como antes, acotar la segunda integral haciendo

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{P}} (\gamma \mathbf{u} \times \nabla g) \cdot (F \nabla G) \mathbf{dx} \geq - \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{8} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 \mathbf{dx} \\
& + \int_{\mathcal{P}} \left\{ \nabla \times \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\gamma}{2} G^2 \nabla f - \gamma F G \nabla g \right) - \frac{1}{2} G^2 \mathbf{u} \cdot (\nabla \gamma \times \nabla f) - F G \mathbf{u} \cdot (\nabla \gamma \times \nabla f) - 2\gamma^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx}.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Sumando las distintas contribuciones, tenemos que la integral de partida se acota como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} (\beta \mathbf{u} \times \nabla f + \gamma \mathbf{u} \times \nabla g) \cdot (F \nabla G - G \nabla F) \mathbf{dx} \geq - \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{4} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 \mathbf{dx} \\ & + \int_{\mathcal{P}} \left\{ \nabla \times \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\beta}{2} F G \nabla f - \frac{\beta}{2} F^2 \nabla g \right) + \frac{1}{2} F^2 \mathbf{u} \cdot (\nabla \beta \times \nabla g) - \frac{1}{2} F G \mathbf{u} \cdot (\nabla \beta \times \nabla f) - 2\beta^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx} \\ & + \int_{\mathcal{P}} \left\{ \nabla \times \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\gamma}{2} G^2 \nabla f - \frac{\gamma}{2} F G \nabla g \right) - \frac{1}{2} G^2 \mathbf{u} \cdot (\nabla \gamma \times \nabla f) - \frac{1}{2} F G \mathbf{u} \cdot (\nabla \gamma \times \nabla g) - 2\gamma^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad (2.4) del producto mixto para transformar la primera integral de (7.28) y de (7.31), y así poder simplificarla con otros términos.

Todos los valores absolutos de estos términos están controlados por múltiplos de los términos de las estimaciones que se estudiaron en la primera parte de la demostración, en (7.21). Esto es porque los términos que involucran derivadas parciales de  $f, g$  o de las componentes de  $\mathbf{u}$ , se estiman tomando  $(\nabla f, \nabla g)$  suficientemente próximo a  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\mathcal{P})$ . Así, todo se reduce a estimaciones de las integrales de las normas puntuales al cuadrado de  $F, G, \nabla F$  y  $\nabla G$ , que están controladas por los términos de la primera parte. Además,  $\nabla \beta$  y  $\nabla \gamma$  son tan pequeños como se quiera bajo la misma condición de proximidad.

#### 4. Final

Juntemos ahora las distintas estimaciones que hemos calculado para acotar la parte cuadrática (exceptuando los términos en  $H$ ) como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \left\{ |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 + 2(\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla G) \right\} \mathbf{dx} \\ & \stackrel{\text{Parte 2}}{\geq} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{7}{16} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 - \alpha (G^2 |\nabla f|^2 + F^2 |\nabla g|^2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (\beta \mathbf{u} \times \nabla f + \gamma \nabla g \times \mathbf{u}) \cdot (F \nabla G - G \nabla F) \right\} \mathbf{dx} \\ & \stackrel{\text{Parte 3}}{\geq} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{3}{16} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 - \alpha (G^2 |\nabla f|^2 + F^2 |\nabla g|^2) \right\} \mathbf{dx} \\ & \quad + \int_{\mathcal{P}} \left\{ \nabla \times \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\beta}{2} F G \nabla f - \frac{\beta}{2} F^2 \nabla g \right) + \frac{1}{2} F^2 \mathbf{u} \cdot (\nabla \beta \times \nabla g) - \frac{1}{2} F G \mathbf{u} \cdot (\nabla \beta \times \nabla f) - 2\beta^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx} \\ & \quad + \int_{\mathcal{P}} \left\{ \nabla \times \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\gamma}{2} G^2 \nabla f - \frac{\gamma}{2} F G \nabla g \right) - \frac{1}{2} G^2 \mathbf{u} \cdot (\nabla \gamma \times \nabla f) - \frac{1}{2} F G \mathbf{u} \cdot (\nabla \gamma \times \nabla g) - 2\gamma^2 F^2 |\mathbf{u}|^2 \right\} \mathbf{dx} \\ & \stackrel{\text{Parte 1}}{\geq} \int_{\mathcal{P}} \frac{3}{32} |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 \mathbf{dx} \\ & \stackrel{\text{Parte 1}}{\geq} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{32} (\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + \frac{1}{32} (\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2 + (1 - O(\|\mathbf{u}'\|_{C(\bar{\mathcal{P}})})) \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{32L^2} (F^2 + G^2) \right\} \mathbf{dx}, \end{aligned}$$

si  $(\nabla f, \nabla g)$  está en un entorno lo suficientemente pequeño de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\mathcal{P})$ . La penúltima desigualdad es porque:

- $\alpha$  se puede hacer tan pequeño como se quiera, y multiplica a una función cuya integral se estima con el término de la 1ª parte,
- Las otras dos últimas integrales de la expresión anterior se estiman por los términos de las estimaciones de la 1ª parte, según comentamos antes, y pudiendo hacer las funciones  $\alpha, \beta, \gamma$  tan pequeñas como se quiera.

En la última desigualdad, se aplican las dos estimaciones sucesivas de (7.21).  $\square$

## Unicidad de soluciones

El Teorema 7.3.1 asegura que si el término en  $H''$  es lo suficientemente pequeño, el funcional integral es estrictamente convexo en un entorno del par de funciones lineales  $(f_c, g_c)$ , lo que nos asegura la unicidad local de las soluciones para las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.8) en torno a  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$ :

**Corolario 7.3.3** (Unicidad local). *Asumamos que  $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in \mathcal{A}_f$  son soluciones de (7.8) tales que*

$$(f_1(x, y, z), g_1(x, y, z)) = (f_2(x, y, z), g_2(x, y, z)), \quad \text{para todo } (x, y, z) \in \{0, L\} \times \mathbb{R}^2.$$

*Sea  $(f_c, g_c)$  un par de funciones tales que  $\nabla f_c$  y  $\nabla g_c$  son constantes, la primera coordenada de  $\mathbf{u}_c = \nabla f_c \times \nabla g_c$  no se anula en ningún punto de  $\mathcal{P}$ , y se verifica la condición (7.19). Sea también  $H$  cumpliendo las hipótesis del Teorema 7.1.1 (pero  $H_p$  se puede asumir solo de clase  $C^2$ ).*

*Si  $(\nabla f_1, \nabla g_1)$  y  $(\nabla f_2, \nabla g_2)$  están en un entorno convexo lo suficientemente pequeño de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\mathcal{P})$  y  $\|H_p''\|_{C(\mathcal{Q})}$  es lo suficientemente pequeño, entonces  $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$  en  $D = [0, L] \times \mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que  $(f_1, g_1) \neq (f_2, g_2)$ . Sea

$$(f_\theta, g_\theta) = \theta(f_2, g_2) + (1 - \theta)(f_1, g_1),$$

para  $\theta \in [-\epsilon, 1 + \epsilon]$ , con  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño. La aplicación

$$h : \theta \mapsto I(f_\theta, g_\theta) = \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla f_\theta \times \nabla g_\theta|^2 + H(f_\theta, g_\theta) \right\} d\mathbf{x}$$

cumple las propiedades:

1. Es de clase  $C^2$ , ya que es la derivada direccional segunda del funcional  $I$  en la dirección dada por  $(f_2 - f_1, g_2 - g_1)$  en cada punto del segmento que une  $(f_1, g_1)$  y  $(f_2, g_2)$ . En el cálculo de la forma cuadrática asociada al funcional se puede deducir que esta función será de clase  $C^2$ .
2. Tiene derivada que se anula en  $\theta = 0$  y en  $\theta = 1$ , por ser  $(f_1, g_1)$  y  $(f_2, g_2)$  soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.8) y, por tanto, puntos críticos de  $I(f, g)$ .

3. Tiene derivada segunda estrictamente positiva en  $[0, 1]$ , ya que  $B_{(f,g)}$  es definida positiva si  $(\nabla f, \nabla g)$  está lo suficientemente próxima a  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\mathcal{P})$  independientemente de  $H$  mientras  $\|H''(f, g)\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}$  sea lo suficientemente pequeña, como acabamos de ver en el Teorema 7.3.1.

El punto 3 contradice al punto 2, por lo que deben ser  $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$ , como queríamos probar.  $\square$

## 7.4. Regularización elíptica y linealización

### 7.4.1. Visión general

Siguiendo el método descrito en [26], consideramos, para cada  $\epsilon \in [0, 1]$ , la *forma bilineal simétrica regularizada* en  $(f, g)$ , que para cada  $(F, G), (P, Q) \in \mathcal{A}_d$  se define como

$$\begin{aligned} B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (P, Q)) &= \int_{\mathcal{P}} \left\{ (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) \cdot (\nabla P \times \nabla g + \nabla f \times \nabla Q) \right. \\ &\quad + (\nabla f \times \nabla g) \cdot [(\nabla F \times \nabla Q) + (\nabla P \times \nabla G)] + \epsilon(\nabla F \cdot \nabla P + \nabla G \cdot \nabla Q) \\ &\quad \left. + \partial_f^2 H(f, g)FP + \partial_f \partial_g H(f, g)(FQ + GP) + \partial_g^2 H(f, g)GQ \right\} \mathbf{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Esta aplicación da lugar, para cada  $\epsilon \in [0, 1]$ , a la *parte cuadrática regularizada* en  $(f, g)$ , que a cada  $(F, G) \in \mathcal{A}_d$  le hace corresponder

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (F, G)) &:= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \left\{ |\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G|^2 + 2(\nabla f \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla G) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon(|\nabla F|^2 + |\nabla G|^2) + \partial_f^2 H(f, g)F^2 + 2\partial_f \partial_g H(f, g)FG + \partial_g^2 H(f, g)G^2 \right\} \mathbf{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Por lo demostrado, este operador es definido positivo si  $(\nabla f, \nabla g)$  está en un entorno suficientemente pequeño de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\mathcal{P})$  y  $\|H''(f, g)\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}$  es lo suficientemente pequeño. Las estimaciones que obtendremos serán uniformes en  $\epsilon \in [0, 1]$ , lo que asegura un buen comportamiento de los resultados al tomar el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , y se gana con respecto al caso  $\epsilon = 0$  que ahora será también coercitivo para cualquier  $\epsilon \in (0, 1]$  fijado, como veremos.

Sean  $(f, g) \in \mathcal{A}_f$  y  $H \in \mathcal{A}_H$  fijadas y tomamos  $(F, G) \in \mathcal{A}_d \cap H_{\text{loc}}^2(D)$  arbitrarias. Linealizar la forma bilineal (7.33) requiere estudiar, para cada  $(\mu, \nu) \in L_{\text{loc}}^2(D)$  fijado, la existencia, unicidad y regularidad de un par  $(P, Q)$  que resuelva la igualdad

$$B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (P, Q)) = \langle (\mu, \nu), (P, Q) \rangle_{L^2(\mathcal{P})} = \langle \mu, P \rangle_{L^2(\mathcal{P})} + \langle \nu, Q \rangle_{L^2(\mathcal{P})}, \quad (7.35)$$

para todo  $(P, Q) \in \mathcal{A}_d$ . Comenzamos expresando los primeros dos términos del integrando de (7.33) como productos por gradientes de  $P$  y  $Q$  empleando sucesivamente la propiedad (2.4) del producto

mixto:

$$\begin{aligned}
(\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) \cdot (\nabla P \times \nabla g + \nabla f \times \nabla Q) &= (\nabla P \times \nabla g) \cdot (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) \\
&\quad + (\nabla f \times \nabla Q) \cdot (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) \\
&= \nabla P \cdot [\nabla g \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G)] \\
&\quad + \nabla Q \cdot [\nabla f \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G)], \\
(\nabla f \times \nabla g) \cdot [(\nabla F \times \nabla Q) + (\nabla P \times \nabla G)] &= -\nabla Q \cdot [\nabla F \times (\nabla f \times \nabla g)] + \nabla P \cdot [\nabla G \times (\nabla f \times \nabla g)].
\end{aligned}$$

Ahora, reescribimos la forma bilineal (7.33) excluyendo los términos de la función de Bernoulli  $H$ , y aplicamos integración por partes:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{P}} \left\{ (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) \cdot (\nabla P \times \nabla g + \nabla f \times \nabla Q) \right. \\
&\quad \left. + (\nabla f \times \nabla g) \cdot [(\nabla F \times \nabla Q) + (\nabla P \times \nabla G)] + \epsilon(\nabla F \cdot \nabla P + \nabla G \cdot \nabla Q) \right\} \mathbf{d}\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathcal{P}} \left\{ \nabla P \cdot [\nabla g \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) + \nabla G \times (\nabla f \times \nabla g)] \right. \\
&\quad \left. + \nabla Q \cdot [\nabla f \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) - \nabla F \times (\nabla f \times \nabla g)] + \epsilon(\nabla F \cdot \nabla P + \nabla G \cdot \nabla Q) \right\} \mathbf{d}\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathcal{P}} \left\{ -P \nabla \cdot [\nabla g \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) + \nabla G \times (\nabla f \times \nabla g)] - \epsilon P \Delta F \right. \\
&\quad \left. - Q \nabla \cdot [\nabla f \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) - \nabla F \times (\nabla f \times \nabla g)] - \epsilon Q \Delta G \right\} \mathbf{d}\mathbf{x},
\end{aligned}$$

donde los términos de frontera se anulan debido a la propiedad (A) de  $(F, G)$ . En consecuencia, la forma bilineal regularizada se expresa como (7.35) para un par  $(\mu, \nu)$  prefijado si y solo si las funciones  $F$  y  $Q$  resuelven el sistema

$$\begin{aligned}
\mu &= -\nabla \cdot [\nabla g \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) + \nabla G \times (\nabla f \times \nabla g)] - \epsilon \Delta F \\
&\quad + \partial_f^2 H(f, g) F + \partial_f \partial_g H(f, g) G, \\
\nu &= \nabla \cdot [\nabla f \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) + \nabla F \times (\nabla f \times \nabla g)] - \epsilon \Delta G \\
&\quad + \partial_g^2 H(f, g) G + \partial_f \partial_g H(f, g) F.
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Estas igualdades conforman el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de la forma

$$(\mu, \nu) = L(F, G)$$

correspondiente a la igualdad (7.35), que es su formulación débil. Las dos expresiones del lado derecho del sistema (7.36) conforman el operador lineal  $L$  asociado a la forma bilineal regularizada. Nótese que la forma débil de este operador, dada por (7.35), también está bien definida si relajamos la condición  $(F, G) \in H_{\text{loc}}^2(D)$  a  $(F, G) \in H_{\text{loc}}^1(D)$ , es decir, si solo pedimos que  $(F, G) \in \mathcal{A}_d$ .



Dado un par  $(\mu, \nu)$  en un espacio de Sobolev de orden lo suficientemente alto, la existencia y unicidad de una solución para la linealización (7.35) si  $\epsilon \in (0, 1]$  se seguirá de la aplicación del Teorema de Lax-Milgram 2.3.3. Teniendo en cuenta que la ecuación regularizada es elíptica, bastará con comprobar que el operador es coercitivo para  $\epsilon > 0$ . También estudiaremos la dependencia del orden de regularidad de la solución  $(F, G)$  con el de los demás términos de (7.36), lo que se hará estimando uniformemente en  $\epsilon \in [0, 1]$  las correspondientes normas de Sobolev.

## Resultados

El objetivo principal de esta sección es obtener estimaciones “tame” para las normas  $L^2$  de las derivadas de  $(F, G)$ . Estimaremos primero las derivadas en la dirección  $x$ , que son las que más problemas pueden dar en los lados de la frontera de  $\mathcal{P}$  con  $y \in \{0, P_1\}$  o  $z \in \{0, P_2\}$ . Esto es porque las demás derivadas en estos lados cancelan sus contribuciones debido a la condición de periodicidad, mientras que en los lados con  $x \in \{0, L\}$  las condiciones de Dirichlet aseguran un buen comportamiento.

En la Proposición 7.4.2 se explica cómo la estructura del sistema permite expresar las derivadas parciales  $\partial_1^2 F$  y  $\partial_1^2 G$  con respecto a las otras derivadas parciales de segundo orden de  $F$  y de  $G$ , a los demás términos de órdenes inferiores, y a  $\mu$  y  $\nu$ . Tras varias derivaciones iterativas, esta igualdad también proporciona expresiones para derivadas de órdenes altos que contengan al menos dos derivadas parciales con respecto a  $x$ . En un contexto más general, este método se ha desarrollado en la referencia [26].

Para  $i \in \{2, 3\}$  y  $r \in \mathbb{N}$ , multiplicamos los dos lados de cada una de las dos ecuaciones del sistema (7.36) por  $(-1)^r \partial_i^{2r} F$  y  $(-1)^r \partial_i^{2r} G$ , respectivamente, las sumamos y después integramos por partes varias veces. Aparecerá el término  $B_{(f,g)}(\partial_i^r F, \partial_i^r F)$  con otros términos adicionales en  $(F, G)$  que contienen como mucho  $r$  derivadas parciales de  $F$  y de  $G$  para cada una de las dos componentes de cada término. Podemos hacer que algunos de estos términos adicionales sean pequeños si  $\mathbf{u}$  está cerca de  $\mathbf{u}_c$ , y aquí sí que usamos la hipótesis de que  $\mathbf{u}_c$  es constante, y no valen otros campos irrotacionales para el argumento empleado, como veremos. Esto lo desarrollamos en el Lema 7.4.4.

La parte cuadrática proporciona el control sobre las normas  $L^2(\mathcal{P})$  de  $\partial_i^r F$  y  $\partial_i^r G$ , pero también sobre las normas de las derivadas primeras  $\partial_1 \partial_i^r F$  y  $\partial_1 \partial_i^r G$  de estos términos. Por lo tanto, las normas  $L^2(\mathcal{P})$  de todos estos términos están controladas por las normas  $L^2(\mathcal{P})$  de  $\partial_i^r \mu$  y  $\partial_i^r \nu$ , y por las normas  $H^r(\mathcal{P})$  de  $F$  y  $G$  multiplicadas por un pequeño factor.

Con todas estas herramientas, podemos obtener la estimación del Teorema 7.4.9, en la cual aparece también la norma del par  $(f, g)$  en un espacio de Sobolev, cuyo orden se puede controlar lo suficientemente bien. Estas estimaciones permiten tener resultados de regularidad explícita para las soluciones que obtengamos por el procedimiento iterativo de Nash-Moser. Se espera que estas estimaciones puedan ser mejoradas y por tanto también las afirmaciones sobre la regularidad, pero

el artículo [8], que estamos revisando, no busca ser óptimo en este sentido.

#### 7.4.2. Existencia y unicidad de soluciones en la ecuación linealizada

Dado un par  $(f, g) \in \mathcal{A}_f$ , estamos interesados en estudiar la aplicación  $(\mu, \nu) \mapsto (F, G)$  tal que

- $(F, G) \in \mathcal{A}_d$ ,
- $(\mu, \nu) \in L^2_{\text{loc}}(D)$  es  $(P_1, P_2)$ -periódico en  $(y, z)$ .
- Para todo  $(P, Q) \in \mathcal{A}_d$ , la forma bilineal simétrica regularizada se puede linealizar como

$$B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (P, Q)) = \int_{\mathcal{P}} (\mu P + \nu Q) \, d\mathbf{x}, \quad (7.37)$$

condición que, por estar  $(F, G)$  y  $(\mu, \nu)$  en los espacios adecuados, equivale a que  $(F, G)$  resuelva el sistema de EDPs lineales

$$\begin{aligned} \mu &= -\nabla \cdot [\nabla g \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) + \nabla G \times (\nabla f \times \nabla g)] - \epsilon \Delta F \\ &\quad + \partial_f^2 H(f, g) F + \partial_f \partial_g H(f, g) G, \\ \nu &= \nabla \cdot [\nabla f \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) + \nabla F \times (\nabla f \times \nabla g)] - \epsilon \Delta G \\ &\quad + \partial_g^2 H(f, g) G + \partial_f \partial_g H(f, g) F. \end{aligned} \quad (7.38)$$

En particular, si  $\epsilon = 0$  entonces el operador lineal asociado a  $B_{(f,g)}^\epsilon$  es la linealización de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.8) en torno al par  $(f, g)$ .

Vamos a demostrar la existencia y unicidad de un par  $(F, G) \in \mathcal{A}_d$  que resuelva (7.37). Para ello, utilizaremos la descomposición de la forma bilineal regularizada  $B_{(f,g)}^\epsilon$  como

$$B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (F, G)) = B_{(f,g)}((F, G), (F, G)) + \epsilon \|(\nabla F, \nabla G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2. \quad (7.39)$$

Por otro lado, nos apoyaremos en el resultado que hemos probado en el Teorema 7.3.1, que implica que la forma cuadrática no regularizada  $B_{(f,g)}$  es definida positiva si  $(\nabla f, \nabla g)$  está lo suficientemente próxima a  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^3(\mathcal{P})$  y  $\|H''(f, g)\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}$  es lo suficientemente pequeña.

Comenzamos comprobando la elipticidad del problema para  $\epsilon > 0$ . En las expresiones de  $(\mu, \nu)$  vamos a aislar los términos de segundo orden en  $(F, G)$ . Para ello, reescribimos (7.38) usando la identidad (2.10) como

$$\begin{aligned} \mu &= \nabla g \cdot \nabla \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) - \epsilon \Delta F + \dots, \\ \nu &= -\nabla f \cdot \nabla \times (\nabla F \times \nabla g + \nabla f \times \nabla G) - \epsilon \Delta G + \dots, \end{aligned}$$

donde “...” denota los términos de orden menor que dos. Además, por la identidad (2.12),

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla F \times \nabla g) &= \nabla F(\nabla \cdot \nabla g) - \nabla g(\nabla \cdot \nabla F) + (\nabla g \cdot \nabla) \nabla F - (\nabla F \cdot \nabla) \nabla g \\ &= \Delta g \nabla F - \Delta F \nabla g + F'' \nabla g - g'' \nabla F,\end{aligned}$$

y de forma similar

$$\nabla \times (\nabla f \times \nabla G) = \Delta G \nabla f - \Delta f \nabla G + f'' \nabla G - G'' \nabla f,$$

donde hemos denotado por  $F''$ ,  $G''$ ,  $f''$  y  $g''$  las matrices de derivadas segundas de las respectivas funciones. Entonces, podemos expresar el sistema de EDPs (7.38) como

$$\begin{aligned}\mu &= \nabla g \cdot ((F'' - \Delta F I) \nabla g) - \nabla g \cdot ((G'' - \Delta G I) \nabla f) - \epsilon \Delta F + \dots, \\ \nu &= -\nabla f \cdot ((F'' - \Delta F I) \nabla g) + \nabla f \cdot ((G'' - \Delta G I) \nabla f) - \epsilon \Delta G + \dots,\end{aligned}\tag{7.40}$$

donde  $I$  denota la matriz identidad de orden 3. Esta formulación del sistema es más canónica en el sentido de que se presentan explícitamente los términos de segundo orden en  $F$  y  $G$ , y también se ve más fácilmente la linealidad del sistema respecto de  $F$  y  $G$ .

Es bien conocida la definición de elipticidad para una EDP lineal de segundo orden (ver [15], por ejemplo), pero en nuestro problema tenemos un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales acopladas, por lo que debemos usar una definición más general.

Sean  $N \times N$  matrices  $\mathbf{A}^{\alpha\beta}$  de orden  $n \times n$ , con  $1 \leq \alpha, \beta \leq N$ . Denotemos por  $A_{ij}^{\alpha\beta}$  el elemento de  $\mathbf{A}^{\alpha\beta}$  en la posición  $(i, j)$  y supongamos que  $A_{ij}^{\alpha\beta} = A_{ij}^{\beta\alpha} = A_{ji}^{\alpha\beta}$ . Consideremos el operador diferencial  $P$  que hace corresponder cada función  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  a la función

$$(A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_i \partial_j u_\beta)_{1 \leq \alpha \leq N} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N,\tag{7.41}$$

donde usamos la notación de Einstein (se suman los índices repetidos). Nótese que el subíndice  $\alpha$  varía sobre las ecuaciones del sistema mientras que el subíndice  $\beta$  lo hace sobre las incógnitas, y ambas tienen el mismo número de elementos para que el sistema esté bien determinado.

Dado un sistema de  $N$  ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden definidas en  $\mathbb{R}^n$  cuyos  $N$  términos de segundo orden vienen dados por (7.41), se dice que este sistema es *fuertemente (uniformemente) elíptico* si existe  $C > 0$  tal que para todo  $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}^n$  se cumple que

$$A_{ij}^{\alpha\beta} \xi_\alpha^i \xi_\beta^j > C |\xi|^2 = C \sum_{\gamma, k} |\xi_\gamma^k|^2,\tag{7.42}$$

donde  $\xi_\gamma^k$  denota la  $k$ -ésima entrada del  $n$ -ésimo vector  $\xi_\gamma$ . En nuestro caso,  $n = 3$ ,  $N = 2$ ,  $u_1 = F$ ,  $u_2 = G$  y los elementos matriciales están dados en función de las derivadas de  $f$  y  $g$ , además del factor  $\epsilon$ .

La demostración de que un sistema de EDPs como el nuestro verifica la definición de elipticidad se puede encontrar en la referencia [26], en la que se introduce el método general de regularización elíptica.

Por la elipticidad del operador lineal asociado a  $B_{(f,g)}^\epsilon$ , se tiene la continuidad de la forma bilineal regularizada (ver [15]), esto es,

$$B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (P, Q)) \leq \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})} \|(P, Q)\|_{H^1(\mathcal{P})},$$

para todos  $(F, G), (P, Q) \in \mathcal{A}_d$ . Para comprobar la coercitividad, usaremos de nuevo que  $B_{(f,g)}$  es definida positiva bajo ciertas condiciones de proximidad. Entonces, de (7.39) se tiene que

$$B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (F, G)) \geq \epsilon \|\nabla F, \nabla G\|_{L^2(\mathcal{P})}^2.$$

Ahora bien, por ser las condiciones de frontera periódicas en  $(y, z)$  y de Dirichlet con  $F = G = 0$  en  $x = 0, L$ , se puede aplicar en  $\mathcal{P}$  la desigualdad de Poincaré y, consecuentemente, las normas  $\|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}$  y  $\|\nabla F, \nabla G\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$  son equivalentes. Así pues, queda demostrado que  $B_{(f,g)}^\epsilon$  es coercitiva.

En consecuencia, el Teorema de Lax-Milgram 2.3.3 asegura la existencia y unicidad de un par  $(F, G) \in \mathcal{A}_d$  que resuelve la ecuación (7.37).

### 7.4.3. Estimaciones de regularidad

**Proposición 7.4.1.** *Supongamos que  $\nabla f_c$  y  $\nabla g_c$  son constantes, que la primera componente de  $\mathbf{u}_c = \nabla f_c \times \nabla g_c$  no se anula en  $\mathcal{P}$  y que se verifica la condición (7.19). Si  $(f, g) \in \mathcal{A}_f$  es un par de funciones de clase  $C^3(\bar{D})$ ,  $H \in \mathcal{A}_H$  es de clase  $C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $(\nabla f, \nabla g)$  está en un entorno lo suficientemente pequeño de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\mathcal{P})$  y  $\|H''(f, g)\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}$  es lo suficientemente pequeño, entonces*

$$\frac{1}{2} B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (F, G)) \geq \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{32} (\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + \frac{1}{32} (\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{64L^2} (F^2 + G^2) \right\} d\mathbf{x}. \quad (7.43)$$

Además,

$$\|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})} \leq \frac{32L^2}{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2} \|(\mu, \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})}, \quad (7.44)$$

y

$$\int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2 \right\} d\mathbf{x} \leq \frac{32L^2}{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2} \|(\mu, \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2, \quad (7.45)$$

para todo par  $(\mu, \nu) \in L_{\text{loc}}^2(D)$  y todo  $(F, G) \in \mathcal{A}_d$  cumpliendo (7.37). Estas desigualdades se cumplen de forma uniforme en  $\epsilon \in [0, 1]$ .

*Demostración.* Supongamos que  $|\mathbf{u}'|$  y  $|H''(f, g)|$  son lo suficientemente pequeños. Entonces se tiene la estimación inferior

$$(1 - O(\|\mathbf{u}'\|_{C(\bar{\mathcal{P}})})) \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{32L^2} (F^2 + G^2) + \frac{1}{2} [\partial_f^2 H(f, g) F^2 + 2\partial_f \partial_g H(f, g) FG + \partial_g^2 H(f, g) G^2] \\ \geq \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{64L^2} (F^2 + G^2),$$

y al aplicarla en la cota (7.20) que demostramos en el Teorema 7.3.1, obtenemos directamente (7.43). Nótese que si considerásemos un campo inicial de velocidades  $\mathbf{u}_c$  irrotacional no necesariamente constante (ver Observación 7.3.2), tendríamos que sustituir el factor  $(1 - O(\|\mathbf{u}'\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}))$  por  $\exp \left\{ -4L \|(\mathbf{u}/u_1)'\|_{C(\bar{\mathcal{P}})} \right\}$ , esto es, pediríamos  $\|(\mathbf{u}/u_1)'\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}$  fuera próximo a 0.

Para demostrar las otras dos desigualdades, basta con tener en cuenta que, por la desigualdad de Hölder 2.3.2, se verifica que

$$\|(\mu, \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})} \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})} \geq \langle (\mu, \nu), (F, G) \rangle_{L^2(\mathcal{P})} = B_{(f, g)}^\epsilon((F, G), (F, G)),$$

de manera que, al aplicarlo en (7.43), tenemos

$$\|(\mu, \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})} \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})} \geq \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{32L^2} (F^2 + G^2) \right\} d\mathbf{x} \\ \geq \int_{\mathcal{P}} \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{32L^2} (F^2 + G^2) d\mathbf{x} = \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{32L^2} \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2.$$

Dividiendo ambos miembros entre  $\|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}$ , obtenemos (7.44). La desigualdad (7.45) se obtiene de manera similar, haciendo

$$\|(\mu, \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})} \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})} \geq \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{32L^2} (F^2 + G^2) \right\} d\mathbf{x} \\ \geq \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla G)^2 \right\} d\mathbf{x},$$

y sustituyendo (7.44) en el primer miembro.  $\square$

Nótese que la segunda desigualdad (7.44) de la proposición establece la continuidad de la aplicación  $(\mu, \nu) \mapsto (F, G)$  cuando se considera como un endomorfismo de  $L^2(\mathcal{P})$ , y por tanto la existencia de soluciones en este espacio.

**Proposición 7.4.2.** *Supongamos que la primera componente de  $\mathbf{u}_c$  no se anula en  $\mathcal{P}$  y que  $(\nabla f, \nabla g)$  está lo suficientemente próxima a  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\mathcal{P})$ .*

*Entonces, el sistema (7.38) permite expresar las derivadas parciales  $\partial_1^2 F$  y  $\partial_1^2 G$  como una combinación lineal a partir de  $\mu, \nu$ , las otras derivadas parciales de segundo orden de  $F$  y  $G$ , las derivadas parciales de primer orden de  $F$  y  $G$ , y  $F$  y  $G$ . Además, los coeficientes de estas dos combinaciones*

lineales son funciones racionales de  $f', g', f'', g'', H''(f, g)$  y  $\epsilon$ . Más concretamente,

$$\begin{aligned}\partial_1^2 F &= a_1 \mu + a_2 \nu + a_3 \partial_{12} F + a_3 \partial_{12} F + a_4 \partial_{13} F + a_5 \partial_2^2 F + a_6 \partial_{23} F + a_7 \partial_3^2 F \\ &\quad + a_8 \partial_{12} G + a_9 \partial_{13} G + a_{10} \partial_2^2 G + a_{11} \partial_{23} G + a_{12} \partial_3^2 G + a_{13} \partial_1 F + a_{14} \partial_2 F \\ &\quad + a_{15} \partial_3 F + a_{16} \partial_1 G + a_{17} \partial_2 G + a_{18} \partial_3 G + a_{19} F + a_{20} G, \quad (7.46)\end{aligned}$$

donde para cada  $1 \leq i \leq 20$ , el coeficiente  $a_i$  es de la forma

$$a_i = \frac{Q_i}{u_1^2 + \epsilon |(\partial_2 f, \partial_3 f, \partial_2 g, \partial_3 g)|^2 + \epsilon^2}, \quad (7.47)$$

para algún polinomio

$$Q_i = \begin{cases} Q_i(f', g', \epsilon), & \text{si } 1 \leq i \leq 12, \\ Q_i(f'', g''), & \text{si } 12 \leq i \leq 18, \\ Q_i(H''(f, g)), & \text{si } 19 \leq i \leq 20. \end{cases}$$

Además, para todo  $l \geq 0$  se tiene que

$$\|a_i\|_{C^l(\bar{\mathcal{P}})} = \begin{cases} O\left(\|(f, g)\|_{C^{l+1}(\bar{\mathcal{P}})} + 1\right), & \text{si } 1 \leq i \leq 12, \\ O\left(\|(f, g)\|_{C^{l+2}(\bar{\mathcal{P}})} + 1\right), & \text{si } 13 \leq i \leq 18, \\ O\left(\|H''(f, g)\|_{C^l(\bar{\mathcal{P}})} + \|(f, g)\|_{C^{l+1}(\bar{\mathcal{P}})} + 1\right), & \text{si } 19 \leq i \leq 20, \end{cases} \quad (7.48)$$

mientras las normas correspondientes estén bien definidas. Se tienen resultados análogos para la derivada segunda  $\partial_1^2 G$ , y todas las estimaciones son uniformes en  $\epsilon \in [0, 1]$ .

*Observación 7.4.3.* El denominador de los coeficientes  $a_i$  no se anula en ningún punto de  $\bar{\mathcal{D}}$  porque  $\epsilon \in [0, 1]$  y, además, el par  $(\nabla f, \nabla g)$  es lo suficientemente cercano a  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$ , y por hipótesis la primera componente de  $\mathbf{u}_c$  no se anula en ningún punto.

*Demostración.* A partir de la formulación (7.40) del sistema de EDPs, vamos a expresar las derivadas segundas  $\partial_1^2 F$  y  $\partial_1^2 G$  con respecto a  $\mu, \nu$ , las otras derivadas parciales de segundo orden de  $F$  y  $G$ , las derivadas parciales de primer orden de  $F$  y  $G$ , y  $F$  y  $G$ . Para ello, basta con estudiar

$$\begin{aligned}\mu &= -\partial_1^2 F \nabla g \cdot (J \nabla g) + \partial_1^2 G \nabla f \cdot (J \nabla g) - \epsilon \partial_1^2 F + \dots, \\ \nu &= \partial_1^2 F \nabla f \cdot (J \nabla g) - \partial_1^2 G \nabla f \cdot (J \nabla f) - \epsilon \partial_1^2 G + \dots,\end{aligned}$$

donde  $J$  denota la matriz diagonal con componentes  $(0, 1, 1)$  en la diagonal. Los términos restantes de las dos expresiones contienen también las demás derivadas parciales de segundo orden de  $F$  y  $G$ . El discriminante de este sistema para  $(\partial_1^2 F, \partial_1^2 G)$  es

$$\begin{aligned}(|J \nabla g|^2 + \epsilon)(|J \nabla f|^2 + \epsilon) - ((J \nabla f) \cdot (J \nabla g))^2 &= |(J \nabla f) \times (J \nabla g)|^2 + \epsilon |J \nabla f|^2 + \epsilon |J \nabla g|^2 + \epsilon^2 \\ &= u_1^2 + \epsilon |J \nabla f|^2 + \epsilon |J \nabla g|^2 + \epsilon^2 \\ &= u_1^2 + \epsilon |(\partial_2 f, \partial_3 f, \partial_2 g, \partial_3 g)|^2 + \epsilon^2,\end{aligned}$$

donde usamos que  $|(J\nabla f) \times (J\nabla g)|^2 = |J\nabla f|^2 |J\nabla g|^2 - (J\nabla f \cdot J\nabla g)^2$ .

Para deducir las expresiones (7.47) de los coeficientes  $a_i$ , el denominador aparece porque al despejar hay que dividir entre el discriminante anterior. Los  $Q_i$  del numerador vienen de los términos a los que se refieren los puntos suspensivos de las expresiones de  $\mu, \nu$  anteriores, que incluyen los  $Q_i$  del enunciado por otras derivadas parciales de  $F, G$  de orden menor o igual que dos.

Ahora, estimamos  $\|a_i\|_{C^i(\bar{\mathcal{P}})}$ , para  $1 \leq i \leq 20$ . Emplearemos la desigualdad

$$\|\xi(u_1, \dots, u_N)\|_{C^k(\bar{\mathcal{P}})} \leq C \|\xi\|_{C^k} \left(1 + \|u_1\|_{C^k(\bar{\mathcal{P}})} + \dots + \|u_N\|_{C^k(\bar{\mathcal{P}})}\right), \quad (7.49)$$

para  $\xi \in C^k([-M, M]^N)$  y  $u_j \in C^k(\bar{\mathcal{P}})$  con  $\|u_j\|_{C(\bar{\mathcal{P}})} \leq M$ , para  $1 \leq j \leq N$ . Esta desigualdad se sigue por interpolación en espacios  $C^k$  (ver Teorema 2.2.1 en [21, p. 143], junto con la fórmula de Faà di Bruno). Con este resultado, y a partir de las expresiones (7.47), se prueba directamente (7.48), teniendo en cuenta que las normas  $C^k$  de los polinomios  $Q_i$  se consideran como constantes. Para  $19 \leq i \leq 20$ , se aplica (7.49) dos veces.  $\square$

De cara a la demostración de los resultados en el resto del trabajo, necesitaremos conocer ciertas propiedades de la forma cuadrática regularizada. Concretamente, vamos a estudiar hasta qué punto conmuta  $B_{(f,g)}^\epsilon$  con derivadas de orden arbitrario respecto de las coordenadas  $y$  y  $z$ .

**Lema 7.4.4** (Regla de conmutación de derivadas en  $(y, z)$  en el operador cuadrático regularizado). *Sea  $r \in \mathbb{Z}^+$ ,  $(f, g) \in \mathcal{A}_f \cap C^{r+2}(\bar{D})$ ,  $H \in \mathcal{A}_H \cap C^{r+2}(\mathbb{R}^2)$  y  $(F, G) \in \mathcal{A}_d \cap H_{\text{loc}}^{2r+1}(D)$ . Supongamos que  $(\nabla f, \nabla g)$  pertenece a algún subconjunto acotado de  $C^1(\mathcal{P})$ . Entonces, para  $j \in \{2, 3\}$ , se verifica la regla de conmutación*

$$\begin{aligned} B_{(f,g)}^\epsilon((\partial_j^r F, \partial_j^r G), (\partial_j^r F, \partial_j^r G)) - B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (-1)^r (\partial_j^{2r} F, \partial_j^{2r} G)) \\ = \sum_{p \in \mathcal{S}} \int_{\mathcal{P}} \partial_j^{2r-s_p-t_p} L_p \partial_j^{s_p} u_p \partial_j^{t_p} v_p \, d\mathbf{x} + \sum_{p \in \tilde{\mathcal{S}}} \int_{\mathcal{P}} \partial_j^{r-\tilde{s}_p} \tilde{L}_p \partial_j^{\tilde{s}_p} \tilde{u}_p \partial_k^r \tilde{v}_p \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (7.50)$$

donde, para cada  $p$  en dos subconjuntos finitos de índices  $\mathcal{S}$  y  $\tilde{\mathcal{S}}$ ,

$$0 \leq s_p \leq t_p \leq r-1, \quad 2 \leq 2r-s_p-t_p \leq r+1, \quad 0 \leq \tilde{s}_p \leq r-1,$$

y

$$\{u_p, v_p\} \subset \{\partial_1 F, \partial_2 F, \partial_3 F, \partial_1 G, \partial_2 G, \partial_3 G\}, \quad \{\tilde{u}_p, \tilde{v}_p\} \subset \{F, G\}.$$

Para cada  $p$ , el coeficiente  $L_p(x, y, z)$  es un polinomio en todas las derivadas parciales de  $f$  y  $g$  de primer orden, mientras que  $\tilde{L}_p$  es una derivada parcial de segundo orden de  $H$  con respecto a  $f$  y  $g$ . Además, se tiene la estimación

$$\left\| \sum_{\substack{p \in \mathcal{S}: \\ s_p=t_p=r-1}} \partial_j^{2r-s_p-t_p} L_p \right\|_{C(\bar{\mathcal{P}})} = \left\| \sum_{\substack{p \in \mathcal{S}: \\ s_p=t_p=r-1}} \partial_j^2 L_p \right\|_{C(\bar{\mathcal{P}})} = O(r^2) \|(\partial_j \nabla f, \partial_j \nabla g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})}, \quad (7.51)$$

en la cual la dependencia con  $r$  es más explícita. La función  $O(r^2)$  es independiente de  $f, g, F, G, H''(f, g)$  y  $\epsilon$ . Finalmente, para el resto de índices  $p$  se verifica

$$\begin{aligned} \left\| \partial_j^{2r-s_p-t_p} L_p \right\|_{C(\bar{\mathcal{P}})} &= O(\|(\nabla f, \nabla g)\|_{C^{2r-s_p-t_p}(\bar{\mathcal{P}})} + 1), \quad \text{si } p \in \mathcal{S}, \\ \left\| \partial_j^{r-\tilde{s}_p} \tilde{L}_p \right\|_{C(\bar{\mathcal{P}})} &= O(\|H''(f, g)\|_{C^{r-\tilde{s}_p}(\bar{\mathcal{P}})} + 1), \quad \text{si } p \in \tilde{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

La prueba de este resultado es larga y no aporta demasiado con respecto al objetivo de este trabajo. El método seguido es el descrito en la referencia [26], cuya idea principal es la de mover  $r$  derivadas aplicando sucesivamente integración por partes para permutar términos. Para ver la demostración desarrollada, ver el Teorema 2.5 de la referencia [8].

*Observación 7.4.5.*    ■ Si la expresión

$$B_{(f,g)}^\epsilon \left( (\partial_j^r F, \partial_j^r G) (\partial_j^r F, \partial_j^r G) \right) - B_{(f,g)}^\epsilon \left( (F, G), (-1)^r (\partial_j^{2r} F, \partial_j^{2r} G) \right) \quad (7.52)$$

se anula, esto significa que el operador cuadrático regularizado verifica una regla perfecta de conmutación o anticonmutación (dependiendo de la paridad del orden  $r$  de derivación). Esto ocurre si  $(\nabla f, \nabla g)$  y  $H''(f, g)$  son independientes de las coordenadas  $(y, z)$ . En otro caso, el teorema permite estimar el tamaño de (7.52).

- Si relajásemos el resultado a  $0 \leq s_p \leq t_p \leq r$ , sería mucho más fácil de probar (la prueba consistiría únicamente en sucesivas integraciones por partes). Al tomar  $r - 1$ , ganamos un orden de regularidad crucial (ver [26]).

Con el Lema 7.4.4, podemos probar los siguientes dos resultados, que garantizan la existencia de un par  $(F, G)$  que resuelve el problema elíptico regularizado. Además, las estimaciones que los resultados proporcionan son uniformes en  $\epsilon \in [0, 1]$ .

**Proposición 7.4.6.** *Sea  $(f, g, H) \in C^3(\bar{D}) \times C^3(\bar{D}) \times C^3(\mathbb{R}^2)$  tal que  $(f, g) \in \mathcal{A}_f$ ,  $H \in \mathcal{A}_H$ ,  $(\nabla f, \nabla g)$  está en un entorno lo suficientemente pequeño de  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\bar{\mathcal{P}})$  y  $\|H''(f, g)\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}$  es lo suficientemente pequeña. Entonces,*

$$\|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})} = O\left(\|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} + 1\right) \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}, \quad (7.53)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \{2,3\}} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j G)^2 \right\} d\mathbf{x} \\ = O(\|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} + 1)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2, \end{aligned} \quad (7.54)$$

para todo par  $(\mu, \nu) \in H_{\text{loc}}^1(D)$  periódico y todo  $(F, G) \in \mathcal{A}_d \cap H_{\text{loc}}^3(D)$  que verifican (7.37).



*Demostración.* Consideremos para  $j \in \{2, 3\}$ ,

$$B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), -(\partial_j^2 F, \partial_j^2 G)) = - \int_{\mathcal{P}} \{\mu \partial_j^2 F + \nu \partial_j^2 G\} \mathbf{dx} = \int_{\mathcal{P}} \{\partial_j \mu \partial_j F + \partial_j \nu \partial_j G\} \mathbf{dx},$$

donde en la segunda igualdad integramos por partes y usamos la condición (A) para deshacernos del término de frontera. Aplicando la Proposición 7.4.1 para este caso, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{P}} u_1^2}{32L^2} ((\partial_j F)^2 + (\partial_j G)^2) \right\} \mathbf{dx} \\ & \leq B_{(f,g)}^\epsilon((\partial_j F, \partial_j G), (\partial_j F, \partial_j G)) \\ & = B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), -(\partial_j^2 F, \partial_j^2 G)) + \left\{ B_{(f,g)}^\epsilon((\partial_j F, \partial_j G), (\partial_j F, \partial_j G)) - B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), -(\partial_j^2 F, \partial_j^2 G)) \right\} \\ & = \int_{\mathcal{P}} \{\partial_j \mu \partial_j F + \partial_j \nu \partial_j G\} \mathbf{dx} + \left\{ B_{(f,g)}^\epsilon((\partial_j F, \partial_j G), (\partial_j F, \partial_j G)) - B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), -(\partial_j^2 F, \partial_j^2 G)) \right\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, la desigualdad de Hölder permite acotar la integral como

$$\int_{\mathcal{P}} \{\partial_j \mu \partial_j F + \partial_j \nu \partial_j G\} \mathbf{dx} \leq \|(\partial_j \mu, \partial_j \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})} \|(\partial_j F, \partial_j G)\|_{L^2(\mathcal{P})}.$$

Por otro lado, si consideramos el caso  $r = 1$  en el Lema 7.4.4 y con la notación usada en dicho resultado, tenemos, para  $j \in \{2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned} & B_{(f,g)}^\epsilon((\partial_j F, \partial_j G), (\partial_j F, \partial_j G)) - B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), -(\partial_j^2 F, \partial_j^2 G)) \\ & = \sum_{p \in \mathcal{S}} \int_{\mathcal{P}} (\partial_j^2 L_p) u_p v_p \mathbf{dx} + \sum_{p \in \tilde{\mathcal{S}}} \int_{\mathcal{P}} (\partial_j \tilde{L}_p) \tilde{u}_p \partial_k \tilde{v}_p \mathbf{dx}, \end{aligned}$$

con

$$\left\| \sum_{p \in \mathcal{S}} \partial_j^2 L_p \right\|_{C(\bar{\mathcal{P}})} = O(r^2) \|(\partial_j \nabla f, \partial_j \nabla g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})},$$

y

$$\|\partial_j^2 L_p\|_{C(\bar{\mathcal{P}})} = O(\|(\nabla f, \nabla g)\|_{C^2(\bar{\mathcal{P}})} + 1), \quad \text{si } p \in \mathcal{S},$$

$$\|\partial_j \tilde{L}_p\|_{C(\bar{\mathcal{P}})} = O(\|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} + 1), \quad \text{si } p \in \tilde{\mathcal{S}}.$$

Con todo esto, podemos escribir

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{P}} u_1^2}{32L^2} ((\partial_j F)^2 + (\partial_j G)^2) \right\} \mathbf{dx} \\ & \leq \|(\partial_j \mu, \partial_j \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})} \|(\partial_j F, \partial_j G)\|_{L^2(\mathcal{P})} + O\left(\|(\partial_j \nabla f, \partial_j \nabla g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})}\right) \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 \\ & \quad + O\left(\|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})}\right) \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})} \|(\partial_j F, \partial_j G)\|_{L^2(\mathcal{P})} \\ & \leq \delta^{-1} \|(\partial_j \mu, \partial_j \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(\partial_j F, \partial_j G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + O\left(\|(\partial_j \nabla f, \partial_j \nabla g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})}\right) \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 \\ & \quad + \delta^{-1} O\left(\|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})}\right)^2 \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(\partial_j F, \partial_j G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \end{aligned} \tag{7.55}$$

donde el parámetro  $\delta > 0$  es arbitrario y viene dado por la desigualdad de Young, que se ha aplicado en el primer y último sumandos. Si  $(\nabla f, \nabla g)$  es lo suficientemente próximo a  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^2(\bar{\mathcal{P}})$ , entonces se verifica que

$$(\partial_2 \nabla f, \partial_3 \nabla f, \partial_2 \nabla g, \partial_3 \nabla g) \|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} < \delta.$$

Además, si  $\delta$  es lo suficientemente pequeño, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \{2,3\}} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{64L^2} ((\partial_j F)^2 + (\partial_j G)^2) \right\} d\mathbf{x} \\ & \lesssim \delta^{-1} \|(\partial_j \mu, \partial_j \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \left( 2\delta - \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{64L^2} \right) \sum_{j \in \{2,3\}} \|(\partial_j F, \partial_j G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 \\ & \quad + \delta^{-1} \left( \|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} + 1 \right)^2 \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \\ & \lesssim \delta^{-1} \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 + \left( 3\delta - \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{64L^2} \right) \sum_{j \in \{2,3\}} \|(\partial_j F, \partial_j G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \\ & \quad + \delta \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta^{-1} \left( \|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} + 1 \right)^2 \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \\ & \lesssim \delta^{-1} \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta^{-1} \left( \|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} + 1 \right)^2 \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \\ & \stackrel{(7.44)}{\lesssim} \delta^{-1} \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta^{-1} \left( \|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} + 1 \right)^2 \|(\mu, \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \end{aligned}$$

donde hemos pasado la notación  $O$  a  $\lesssim$  por comodidad. El truco efectuado consiste en emplear la mitad del término en  $\sum_{j \in \{2,3\}} \|(\partial_j F, \partial_j G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$  del primer miembro de (7.55) para controlar, si  $\delta$  es lo suficientemente pequeño, todos los términos que contienen normas en  $L^2(\mathcal{P})$  de las derivadas parciales de  $(F, G)$  respecto de las coordenadas  $(y, z)$  en el último miembro de la cadena de desigualdades.

Ahora, estimamos  $\|\partial_1 F\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$  y  $\|\partial_1 G\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$  usando (7.45). El primer miembro de esta desigualdad se puede acotar inferiormente por

$$\frac{1}{16} \left( \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2 \right) \|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \frac{1}{16} \int_{\mathcal{P}} \{ (u_2 \partial_2 F)^2 + (u_3 \partial_3 F)^2 + (u_2 \partial_2 G)^2 + (u_3 \partial_3 G)^2 \} d\mathbf{x}.$$

Entonces podemos escribir

$$\frac{1}{16} \left( \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2 \right) \|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \leq \frac{32L^2}{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2} \|(\mu, \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 - \frac{1}{16} \sum_{j \in \{2,3\}} \int_{\mathcal{P}} \{ (u_j \partial_j F)^2 + (u_j \partial_j G)^2 \} d\mathbf{x}$$

Como  $\min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2 > 0$  si  $(\nabla f, \nabla g)$  está lo suficientemente próximo a  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$ , podemos despejar  $\|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$ , obteniendo

$$\|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 = O(\|(\mu, \nu, \partial_2 F, \partial_2 G, \partial_3 F, \partial_3 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2).$$

Combinando esta desigualdad con la anterior, conseguimos

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \{2,3\}} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j G)^2 \right\} d\mathbf{x} + \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{128 L^2} \|(\nabla F, \nabla G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \\ = O(\|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} + 1)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2. \end{aligned}$$

Aquí también se mantiene la desigualdad porque quitamos en el primer miembro algo mayor que lo que quitamos en el segundo miembro, cambiamos el denominador 64 por 128 y tomamos  $\delta > 0$  lo suficientemente pequeño. Esta igualdad demuestra (7.54), y combinándola con (7.44) obtenemos (7.53).  $\square$

En el siguiente resultado generalizamos las estimaciones obtenidas en el anterior resultado a un orden de derivación arbitrario  $r \in \mathbb{Z}^+$ . Lo demostraremos por inducción, siendo el resultado dado por la Proposición 7.4.6 la base de inducción.

**Teorema 7.4.7.** *Sea  $r \in \mathbb{Z}^+$ ,  $(f, g) \in \mathcal{A}_f \cap H_{loc}^{r+4}(D)$  en un entorno lo suficientemente pequeño de  $(f_c, g_c)$  en  $H^5(\mathcal{P})$ ,  $H \in \mathcal{A}_H$  con  $H''(f, g) \in C^r(\bar{\mathcal{P}})$  y  $H''(f, g)$  lo suficientemente pequeña en  $C(\bar{\mathcal{P}})$ . Existe una constante  $C_r > 0$  tal que si*

$$\|(\partial_2 \nabla f, \partial_3 \nabla f, \partial_2 \nabla g, \partial_3 \nabla g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} < C_r^{-1}, \quad (7.56)$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \{2,3\}} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r G)^2 \right\} d\mathbf{x} + \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 \\ \leq C_r \|(\mu, \nu)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 + C_r (\|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})} + 1)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2, \end{aligned} \quad (7.57)$$

para todo par  $(\mu, \nu) \in H^r(\mathcal{P})$  periódico y todo par  $(F, G) \in \mathcal{A}_d \cap H_{loc}^{2r+1}(D)$  que resuelve (7.37).

**Observación 7.4.8.** ■ Obsérvese que el entorno pequeño de  $(f_c, g_c)$  y la pequeña cota de  $H''$  en  $C(\bar{\mathcal{P}})$  son independientes de  $r \in \mathbb{Z}^+$ . La constante  $C_r$  puede depender de ambos, así como de  $r$ ,  $f_c$  y  $g_c$ , pero es independiente de  $H$ ,  $f$  y  $g$ .

- Nótese que ahora el entorno de  $(f_c, g_c)$  es en  $H^5(\mathcal{P})$ , cuando antes estábamos trabajando en  $C^3(\bar{\mathcal{P}})$ . La nueva condición es ligeramente más restrictiva, ya que por el teorema de inclusiones de Sobolev 2.4.1 tomando  $m = 5$  y  $n = k = 3$ , se tiene que  $H^5(\mathcal{P}) \subset C^3(\bar{\mathcal{P}})$ , y la inclusión es continua.
- La dependencia de  $r$  en (7.56) es debida a la aparición de  $r$  en la estimación (7.51) del Lema 7.4.4.
- En este resultado es inevitablemente necesaria la condición de que  $\mathbf{u}_c$  sea constante, al contrario de lo que sucedía en el Teorema 7.3.1.

*Demostración.* El caso  $r = 1$  viene dado por la Proposición 7.4.6, que acabamos de demostrar. Consideremos pues  $r \geq 2$  y supongamos que se verifica la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \{2,3\}} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^{r-1} F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^{r-1} G)^2 \right\} d\mathbf{x} + \|(F, G)\|_{H^{r-1}(\mathcal{P})}^2 \\ & \leq C_{r-1} \|(\mu, \nu)\|_{H^{r-1}(\mathcal{P})}^2 + C_{r-1} (\|(f, g)\|_{H^{r+3}(\mathcal{P})} + \|H''(f, g)\|_{C^{r-1}(\bar{\mathcal{P}})} + 1)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Como en la demostración del Teorema 7.3.1, vamos a dividir esta prueba en varios pasos.

### 1. Acotación superior de

$$\sum_{j \in \{2,3\}} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{32L^2} ((\partial_j^r F)^2 + (\partial_j^r G)^2) \right\} d\mathbf{x},$$

para  $j \in \{2, 3\}$ . Comenzaremos repitiendo el procedimiento seguido en la prueba de la Proposición 7.4.6, pero ahora para un orden de derivación  $r \geq 2$ :

Consideramos, para  $j \in \{2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned} B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (-1)^r (\partial_j^{2r} F, \partial_j^{2r} G)) &= (-1)^r \int_{\mathcal{P}} \{ \mu \partial_j^{2r} F + \nu \partial_j^{2r} G \} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{P}} \{ \partial_j^r \mu \partial_j^r F + \partial_j^r \nu \partial_j^r G \} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 7.4.1, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{32L^2} ((\partial_j^r F)^2 + (\partial_j^r G)^2) \right\} d\mathbf{x} \\ & \leq B_{(f,g)}^\epsilon((\partial_j^r F, \partial_j^r G), (\partial_j^r F, \partial_j^r G)) \\ & = B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (-1)^r (\partial_j^{2r} F, \partial_j^{2r} G)) \\ & \quad + B_{(f,g)}^\epsilon((\partial_j^r F, \partial_j^r G), (\partial_j^r F, \partial_j^r G)) - B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (-1)^{2r} (\partial_j^{2r} F, \partial_j^{2r} G)) \\ & = \int_{\mathcal{P}} \{ \partial_j^r \mu \partial_j^r F + \partial_j^r \nu \partial_j^r G \} d\mathbf{x} \\ & \quad + B_{(f,g)}^\epsilon((\partial_j^r F, \partial_j^r G), (\partial_j^r F, \partial_j^r G)) - B_{(f,g)}^\epsilon((F, G), (-1)^r (\partial_j^{2r} F, \partial_j^{2r} G)). \end{aligned}$$

Con la desigualdad de Hölder acotamos la integral como

$$\int_{\mathcal{P}} \{ \partial_j^r \mu \partial_j^r F + \partial_j^r \nu \partial_j^r G \} d\mathbf{x} \leq \|(\partial_j^r \mu, \partial_j^r \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})} \|(\partial_j^r F, \partial_j^r G)\|_{L^2(\mathcal{P})},$$

Aplicando también las tres estimaciones dadas por el Lema 7.4.4 para el índice  $r$  elegido, tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{\mathcal{P}}} u_1^2}{32L^2} ((\partial_j^r F)^2 + (\partial_j^r G)^2) \right\} d\mathbf{x} \\
& \leq \|(\partial_j^r \mu, \partial_j^r \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})} \|(\partial_j^r F, \partial_j^r G)\|_{L^2(\mathcal{P})} + O(r^2) \|(\partial_j \nabla f, \partial_j \nabla g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 \\
& \quad + \sum O\left(\|(f, g)\|_{H^{k_1+3}(\mathcal{P})} + 1\right) \|(F, G)\|_{H^{k_2+1}(\mathcal{P})} \|(F, G)\|_{H^{k_3+1}(\mathcal{P})} \\
& \quad + \sum O\left(\|H''(f, g)\|_{C^{r-k_4}(\bar{\mathcal{P}})}\right) \|(F, G)\|_{H^{k_4}(\mathcal{P})} \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}, \quad (7.59)
\end{aligned}$$

donde la primera suma es sobre todas las posibles combinaciones de enteros  $k_1, k_2, k_3 \geq 0$  tales que

$$k_1 + k_2 + k_3 = 2r, \quad k_1 \leq r+1, \quad k_2 \leq k_3 \leq r-1, \quad k_2 + k_3 < 2r-2$$

(lo que implica en particular que  $k_1 > 2$  y, por ser  $r \geq 2$ , que  $k_2 + k_3 > 0$ ), y la segunda suma es para  $0 \leq k_4 \leq r-1$ .

Usando la desigualdad (2.17) de interpolación en espacios de Sobolev con  $s = k_j + 1$ ,  $s_1 = 1$  y  $s_2 = r$ , para  $j = 2, 3$ , se tiene que

$$\|(F, G)\|_{H^{k_j+1}(\mathcal{P})} = \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^{\frac{r-1-k_j}{r-1}} \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^{\frac{k_j}{r-1}}.$$

Entonces, multiplicando las normas para  $j = 2, 3$ , y simplificando los exponentes con la igualdad  $k_1 + k_2 + k_3 = 2r$ , podemos estimar la primera suma de (7.59) como

$$\begin{aligned}
& \sum O\left(\|(f, g)\|_{H^{k_1+3}(\mathcal{P})} + 1\right) \|(F, G)\|_{H^{k_2+1}(\mathcal{P})} \|(F, G)\|_{H^{k_3+1}(\mathcal{P})} \\
& \lesssim \sum O\left(\|(f, g)\|_{H^{k_1+3}(\mathcal{P})} + 1\right) \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^{\frac{k_1-2}{r-1}} \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^{\frac{2r-k_1}{r-1}} \\
& = \sum \left\{ \delta^{-\frac{2r-k_1}{k_1-2}} O\left(\|(f, g)\|_{H^{k_1+3}(\mathcal{P})} + 1\right)^{\frac{2r-2}{k_1-2}} \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 \right\}^{\frac{k_1-2}{2r-2}} \cdot \left\{ \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 \right\}^{\frac{2r-k_1}{2r-2}}. \quad (7.60)
\end{aligned}$$

En la igualdad se ha introducido un parámetro  $\delta > 0$  que es tan pequeño como se quiera y puede depender de  $r$ ,  $f_c$  y  $g_c$ , pero no de  $(F, G)$ ,  $(\mu, \nu)$ ,  $H$ ,  $f$  y  $g$ . En lo que sigue, escribiremos explícitamente algunas potencias negativas de  $\delta$ , incluso aunque se puedan simplificar con otros factores positivos como los que se incluyen en la notación “ $\lesssim$ ”, que dependen de  $r$ ,  $f_c$  y  $g_c$ .

Usamos la desigualdad de Young  $xy \leq p^{-1}x^p + q^{-1}y^q$  en cada elemento de la suma de (7.60) tomando como  $x$  e  $y$  cada uno de los dos factores y como exponentes conjugados  $p = \frac{2r-2}{k_1-2}$  y  $q = \frac{2r-2}{2r-k_1}$ . Entonces, incluyendo las constantes  $p^{-1}$ ,  $q^{-1}$  y la constante que contabiliza el número de elementos que se suman (la cual aparece acompañando al término en  $\delta$ ) en la notación  $\lesssim$ , podemos estimar (7.60) por

$$\sum \delta^{-\frac{2r-k_1}{k_1-2}} O\left(\|(f, g)\|_{H^{k_1+3}(\mathcal{P})} + 1\right)^{\frac{2r-2}{k_1-2}} \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2. \quad (7.61)$$

Ahora, usamos que  $O(x) \lesssim x$  y aplicamos de nuevo la desigualdad (2.17) de interpolación de espacios de Sobolev, ahora con  $s = k_1 + 3$ ,  $s_1 = 5$  y  $s_2 = r + 4$ , para estimar (7.61) por

$$\begin{aligned} & \sum \delta^{-\frac{2r-k_1}{k_1-2}} \left( \|(f, g)\|_{H^{k_1+3}(\mathcal{P})} + 1 \right)^{\frac{2r-2}{k_1-2}} \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 \\ & \lesssim \sum \delta^{-\frac{2r-k_1}{k_1-2}} \left( \|(f, g)\|_{H^5(\mathcal{P})}^{\frac{r+1-k_1}{r-1}} \|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})}^{\frac{k_1-2}{r-1}} + 1 \right)^{\frac{2r-2}{k_1-2}} \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 \\ & \lesssim \sum \delta^{-\frac{2r-k_1}{k_1-2}} \left( \|(f, g)\|_{H^5(\mathcal{P})} + 1 \right)^{\frac{2(r+1-k_1)}{k_1-2}} \left( \|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + 1 \right)^2 \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2, \end{aligned}$$

A continuación, usando el resultado (7.53) de la Proposición 7.4.6, podemos estimar

$$\begin{aligned} & \sum \delta^{-\frac{2r-k_1}{k_1-2}} \left( \|(f, g)\|_{H^5(\mathcal{P})} + 1 \right)^{\frac{2(r+1-k_1)}{k_1-2}} \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 \\ & \stackrel{(7.53)}{\lesssim} \sum \delta^{-\frac{2r-k_1}{k_1-2}} \left( \|(f, g)\|_{H^5(\mathcal{P})} + 1 \right)^{\frac{2(r+1-k_1)}{k_1-2}} \left( \|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} + 1 \right) \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 \\ & \lesssim \delta^{-2r} \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2, \end{aligned}$$

donde para la segunda desigualdad tomamos  $0 < \delta < 1$  y  $\|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})}$  lo suficientemente pequeños, además de tener en cuenta que por ser  $k_1 \geq 2$  y  $r \geq 2$ , se tiene

$$\frac{2r - k_1}{k_1 - 2} < \frac{2(r + 1 - k_1)}{k_1 - 2} < 2r.$$

Por último, el término  $\|(f, g)\|_{H^5(\mathcal{P})}$  se puede acotar por una constante por estar  $(f, g)$  en un entorno lo suficientemente pequeño de  $(f_c, g_c)$  en  $H^5(\mathcal{P})$ .

Juntándolo todo, la estimación de la primera suma de (7.59) es

$$\begin{aligned} & \sum \left( \|(f, g)\|_{H^{k_1+3}(\mathcal{P})} + 1 \right) \|(F, G)\|_{H^{k_2+1}(\mathcal{P})} \|(F, G)\|_{H^{k_3+1}(\mathcal{P})} \\ & \lesssim \delta^{-2r} \left( \|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + 1 \right)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Siguiendo un procedimiento similar, la segunda suma de (7.59) se puede estimar como

$$\begin{aligned} & \sum \|H''(f, g)\|_{C^{r-k_4}(\bar{\mathcal{P}})} \|(F, G)\|_{H^{k_4}(\mathcal{P})} \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})} \\ & \lesssim \sum \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})}^{\frac{k_4}{r}} \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})}^{\frac{r-k_4}{r}} \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^{\frac{r-k_4}{r}} \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^{\frac{r+k_4}{r}} \\ & \lesssim \delta^{-2r} \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})}^2 \|(\mu, \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Ahora, tomemos  $(f, g)$  tales que

$$\|(\partial_2 \nabla f, \partial_3 \nabla f, \partial_2 \nabla g, \partial_3 \nabla g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} < r^{-2} \delta. \quad (7.64)$$

Nótese que  $r$  es el orden de Sobolev, por lo esta condición para órdenes lo suficientemente altos funciona para cualquier  $\delta$  arbitrario. Utilizando las dos estimaciones (7.62) y (7.63) que acabamos

de deducir, podemos acotar (7.59) como

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{P}} u_1^2}{32L^2} ((\partial_j^r F)^2 + (\partial_j^r G)^2) \right\} d\mathbf{x} \\
& \lesssim \|(\partial_j^r \mu, \partial_j^r \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})} \|(\partial_j^r F, \partial_j^r G)\|_{L^2(\mathcal{P})} + \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 \\
& \quad + \delta^{-2r} (\|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + 1)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 \\
& \quad + \delta^{-2r} \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})}^2 \|(\mu, \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 \\
& \lesssim \delta^{-1} \|(\partial_j^r \mu, \partial_j^r \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(\partial_j^r F, \partial_j^r G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 \\
& \quad + \delta^{-2r} (\|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})} + 1)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2.
\end{aligned}$$

En el último paso, utilizamos la desigualdad de Young 2.3.1 con  $p = q = 2$ ,  $A = \delta^{-1} \|(\partial_j^r \mu, \partial_j^r \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$  y  $B = \delta \|(\partial_j^r F, \partial_j^r G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$ . Entonces, si  $\delta$  es lo suficientemente pequeña, podemos escribir

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in \{2,3\}} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{P}} u_1^2}{64L^2} ((\partial_j^r F)^2 + (\partial_j^r G)^2) \right\} d\mathbf{x} + \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \\
& \lesssim \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \delta^{-1} \|(\mu, \nu)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(F, G, \partial_1 F, \partial_1 G)\|_{H^{r-1}(\mathcal{P})}^2 \\
& \quad + \delta^{-2r} (\|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})} + 1)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2.
\end{aligned}$$

El truco utilizado es similar al empleado en la anterior demostración, tomando la mitad de la integral del término en  $\sum_{j \in \{2,3\}} \|(\partial_j^r F, \partial_j^r G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$  y la norma  $\|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$  para compensar los términos pertinentes de la cota. Para esto usamos también que

$$\sum_{|\alpha_2| + |\alpha_3| \leq r} \|(\partial^\alpha F, \partial^\alpha G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \lesssim \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \sum_{j \in \{2,3\}} \|(\partial_j^r F, \partial_j^r G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2, \quad (7.65)$$

donde la suma es sobre todos los multi-índices  $\alpha = (\alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  verificando  $|\alpha_2| + |\alpha_3| \leq r$ , y  $\partial^\alpha$  se refiere a la correspondiente derivada parcial con respecto a las variables  $(y, z)$ .

Ahora, utilizamos la hipótesis de inducción (7.58) para estimar los términos con derivadas de orden menor o igual que  $r - 1$ , y escribimos

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in \{2,3\}} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^r G)^2 + \frac{\pi^2 \min_{\bar{P}} u_1^2}{64L^2} ((\partial_j^r F)^2 + (\partial_j^r G)^2) \right\} d\mathbf{x} + \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \\
& \lesssim \delta^{-1} \|(\mu, \nu)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{H^{r-1}(\mathcal{P})}^2 \\
& \quad + \delta^{-2r} (\|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})} + 1)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2. \quad (7.66)
\end{aligned}$$

## 2. Acotación de términos en $(F, G)$ de orden de derivación $r$ con una sola derivada parcial respecto de $x$

Usando la hipótesis de inducción (7.58) y que  $u_1 \neq 0$  en todo punto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \{2,3\}} \|(\partial_1 \partial_j^{r-1} F, \partial_1 \partial_j^{r-1} G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 &\lesssim \sum_{j \in \{2,3\}} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^{r-1} F)^2 + \frac{1}{16} (\mathbf{u} \cdot \nabla \partial_j^{r-1} G)^2 \right\} d\mathbf{x} \\ &\lesssim \sum_{j \in \{2,3\}} \|(\partial_2 \partial_j^{r-1} F, \partial_2 \partial_j^{r-1} G, \partial_3 \partial_j^{r-1} F, \partial_3 \partial_j^{r-1} G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \\ &\quad + \|(\mu, \nu)\|_{H^{r-1}(\mathcal{P})}^2 + \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})} (\|(f, g)\|_{H^{r+3}(\mathcal{P})} + \|H''(f, g)\|_{C^{r-1}(\bar{\mathcal{P}})} + 1)^2. \end{aligned}$$

Juntamos esto con la desigualdad (7.66) obtenida en la primera parte, y aplicamos (7.65) para estimar la norma  $L^2(\mathcal{P})$  de derivadas cruzadas de  $F$  y  $G$  usando solo la norma  $L^2(\mathcal{P})$  de derivadas  $\partial_j^r F$  y  $\partial_j^r G$  (con  $j \in \{2, 3\}$ ) y la norma  $L^2(\mathcal{P})$  de  $F$  y  $G$ . Así, deducimos que

$$\begin{aligned} \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \sum_{j \in \{2,3\}} \|(\partial_1 \partial_j^{r-1} F, \partial_1 \partial_j^{r-1} G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \\ \lesssim \delta^{-1} \|(\mu, \nu)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{H^{r-1}(\mathcal{P})}^2 \\ + \delta^{-2r} (\|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})} + 1)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2. \end{aligned}$$

Ahora, extraemos de  $\|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{H^{r-1}(\mathcal{P})}^2$  los términos con derivadas parciales de orden  $r$  que solo tienen una derivada respecto de  $x$  y les aplicamos (7.65) con  $r-1$  en lugar de  $r$  y  $(\partial_1 F, \partial_1 G)$  en lugar de  $(F, G)$ :

$$\sum_{|\alpha_2|+|\alpha_3| \leq r-1} \|(\partial^\alpha \partial_1 F, \partial^\alpha \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \lesssim \|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \sum_{j \in \{2,3\}} \|(\partial_j^{r-1} \partial_1 F, \partial_j^{r-1} \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2,$$

A continuación, los compensamos, para  $\delta$  lo suficientemente pequeño, con los términos  $\|(F, G)\|_{H^{r-1}(\mathcal{P})}^2$  y  $\|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2$ . Así, obtenemos:

$$\begin{aligned} \|(F, G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \|(\partial_1 F, \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \sum_{j \in \{2,3\}} \|(\partial_j^{r-1} \partial_1 F, \partial_j^{r-1} \partial_1 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 \\ \lesssim \delta^{-1} \|(\mu, \nu)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 + \delta \|(\partial_1^2 F, \partial_1^2 G)\|_{H^{r-2}(\mathcal{P})}^2 \\ + \delta^{-2r} \left( \|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})} + 1 \right)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2 \quad (7.67) \end{aligned}$$

## 3. Acotación de términos en $(F, G)$ de orden de derivación $r$ con al menos dos derivadas parciales respecto de $x$ .

Utilizaremos un argumento de inducción sobre el número de derivadas parciales con respecto a la coordenada  $x$  para un orden  $r$  fijado. Denotaremos por  $s$  a este número de derivaciones. En el



caso  $r = 2$  la única derivada parcial de segundo orden para estimar es  $(\partial_1^2 F, \partial_1^2 G)$ . Partiendo de la Proposición 7.4.2, el desarrollo (7.46) y su análogo para  $\partial_1^2 G$  nos permiten deducir la estimación

$$\|(\partial_1^2 F, \partial_1^2 G)\|_{L^2(\mathcal{P})} \lesssim \|(\mu, \nu)\|_{L^2(\mathcal{P})} + \|(\partial_2 \nabla F, \partial_2 \nabla G, \partial_3 \nabla F, \partial_3 \nabla G)\|_{L^2(\mathcal{P})} + \|(F, G)\|_{H^1(\mathcal{P})}.$$

Entonces, aplicando la Proposición 7.4.6, obtenemos que

$$\|(\partial_1^2 F, \partial_1^2 G)\|_{L^2(\mathcal{P})} \lesssim (\|H''(f, g)\|_{C^1(\bar{\mathcal{P}})} + 1) \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})} + \|(\partial_2 \nabla F, \partial_2 \nabla G, \partial_3 \nabla F, \partial_3 \nabla G)\|_{L^2(\mathcal{P})}.$$

Sea ahora  $r > 2$  y consideremos un operador diferencial  $B_s$  de orden  $r - 2$  en  $(x, y, z)$  que realiza  $r - 2$  derivadas parciales de tal forma que exactamente  $s$  de ellas, con  $0 \leq s \leq r - 2$ , son respecto a  $x$ . Aplicando este operador sobre  $\partial_1^2 F$  y  $\partial_1^2 G$  en los desarrollos (7.46) de la Proposición 7.4.2 junto con las estimaciones (7.48) de los coeficientes, se tiene

$$\begin{aligned} \|(B_s \partial_1^2 F, B_s \partial_1^2 G)\|_{L^2(\mathcal{P})} &\lesssim \sum_{k=0}^{r-2} (\|(f, g)\|_{H^{r+1-k}(\mathcal{P})} + 1) \|(\mu, \nu)\|_{H^k(\mathcal{P})} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{r-2} (\|(f, g)\|_{H^{r+3-k}(\mathcal{P})} + 1) \|(F, G)\|_{H^k(\mathcal{P})} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{r-2} \|H''\|_{C^{r-2-k}(\bar{\mathcal{P}})} \|(F, G)\|_{H^k(\mathcal{P})} \\ &\quad + (\|(f, g)\|_{H^3(\mathcal{P})} + 1) (\|D_s(\partial_2 F, \partial_2 G)\|_{L^2(\mathcal{P})} + \|E_s(\partial_3 F, \partial_3 G)\|_{L^2(\mathcal{P})}). \end{aligned}$$

En esta expresión hemos introducido los operadores diferenciales matriciales con coeficientes constantes  $D_s$  y  $E_s$ , que son de orden  $r - 1$  en  $(x, y, z)$ , pero de orden menor o igual que  $s + 1$  en la coordenada  $x$ . Los términos que involucran a los operadores  $E_s$  y  $D_s$  surgen de aplicar  $B_s$  a las derivadas de segundo orden del lado derecho de (7.46).

La desigualdad que hemos obtenido nos permitirá estimar expresiones diferenciales de orden  $s + 2$  con respecto a  $x$  empleando expresiones de orden menor o igual que  $s + 1$  con respecto a  $x$ , lo que servirá para aplicar la hipótesis de inducción en  $s$ . Aplicamos en esta expresión la desigualdad (2.17)

de interpolación de espacios de Sobolev y la desigualdad de Young 2.3.1 para obtener:

$$\begin{aligned}
& \| (B_s \partial_1^2 F, B_s \partial_1^2 G) \|_{L^2(\mathcal{P})} \\
& \lesssim (\| (f, g) \|_{H^{r+1}(\mathcal{P})} + 1) \| (\mu, \nu) \|_{L^2(\mathcal{P})} + (\| (f, g) \|_{H^3(\mathcal{P})} + 1) \| (\mu, \nu) \|_{H^{r-2}(\mathcal{P})} \\
& \quad + (\| (f, g) \|_{H^{r+3}(\mathcal{P})} + 1) \| (F, G) \|_{L^2(\mathcal{P})} + (\| (f, g) \|_{H^4(\mathcal{P})} + 1) \| (F, G) \|_{H^{r-1}(\mathcal{P})} \\
& \quad + \| H''(f, g) \|_{C^{r-2}(\bar{\mathcal{P}})} \| (F, G) \|_{L^2(\mathcal{P})} + \| H''(f, g) \|_{C(\bar{\mathcal{P}})} \| (F, G) \|_{H^{r-2}(\mathcal{P})} \\
& \quad + (\| (f, g) \|_{H^3(\mathcal{P})} + 1) (\| D_s(\partial_2 F, \partial_2 G) \|_{L^2(\mathcal{P})} + \| E_s(\partial_3 F, \partial_3 G) \|_{L^2(\mathcal{P})}) \\
& \stackrel{(1)}{\lesssim} (\| (f, g) \|_{H^{r+3}(\mathcal{P})} + \| H''(f, g) \|_{C^{r-2}(\bar{\mathcal{P}})} + 1) \| (\mu, \nu) \|_{L^2(\mathcal{P})} \\
& \quad + \| (\mu, \nu) \|_{H^{r-2}(\mathcal{P})} + \| (F, G) \|_{H^{r-1}(\mathcal{P})} + \| D_s(\partial_2 F, \partial_2 G) \|_{L^2(\mathcal{P})} + \| E_s(\partial_3 F, \partial_3 G) \|_{L^2(\mathcal{P})} \\
& \stackrel{(2)}{\lesssim} (\| (f, g) \|_{H^{r+3}(\mathcal{P})} + \| H''(f, g) \|_{C^{r-1}(\bar{\mathcal{P}})} + 1) \| (\mu, \nu) \|_{H^1(\mathcal{P})} \\
& \quad + \| (\mu, \nu) \|_{H^{r-1}(\mathcal{P})} + \| D_s(\partial_2 F, \partial_2 G) \|_{L^2(\mathcal{P})} + \| E_s(\partial_3 F, \partial_3 G) \|_{L^2(\mathcal{P})}.
\end{aligned}$$

En (1) hemos utilizado que  $(f, g)$  está lo suficientemente próxima a  $(f_c, g_c)$  en  $H^5(\mathcal{P})$  y que  $H''$  es lo suficientemente pequeña en  $C(\bar{\mathcal{P}})$  para acotar los factores  $(\| (f, g) \|_{H^l(\mathcal{P})} + 1)$  con  $l \in \{3, 4\}$  y el factor  $\| H''(f, g) \|_{C(\bar{\mathcal{P}})}$ , respectivamente. Además, utilizamos (7.44) para acotar  $\| (F, G) \|_{L^2(\mathcal{P})}$  por  $\| (\mu, \nu) \|_{L^2(\mathcal{P})}$ . En (2) empleamos la hipótesis de inducción (7.58) para estimar el término  $\| (F, G) \|_{H^{r-1}(\mathcal{P})}$ .

Ahora, por inducción en el orden  $s$  de los operadores diferenciales, estimamos los términos en  $D_s$  y  $E_s$  y podemos escribir

$$\begin{aligned}
& \| (B_s \partial_1^2 F, B_s \partial_1^2 G) \|_{L^2(\mathcal{P})} \lesssim (\| (f, g) \|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + \| H''(f, g) \|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})} + 1) \| (\mu, \nu) \|_{H^1(\mathcal{P})} \\
& \quad + \| (\mu, \nu) \|_{H^r(\mathcal{P})} + \sum_{j \in \{2, 3\}} \| (\partial_j^{r-1} \partial_1 F, \partial_j^{r-1} \partial_1 G) \|_{L^2(\mathcal{P})} + \delta \| (\partial_1^2 F, \partial_1^2 G) \|_{H^{r-2}(\mathcal{P})}.
\end{aligned}$$

En esta acotación hemos empleado la desigualdad (7.65) aplicada a  $(F, G)$  y a  $(\partial_1 F, \partial_1 G)$  y también usamos la estimación (7.66) deducida en la primera parte de la demostración. Si unimos las desigualdades para todas las posibles derivaciones y para  $0 \leq s \leq r-2$ , el lado de la izquierda se convierte en  $\| (\partial_1^2 F, \partial_1^2 G) \|_{H^{r-2}(\mathcal{P})}$ . Entonces, si tomamos un  $\delta > 0$  lo suficientemente pequeño, podemos controlar el último sumando y escribir

$$\begin{aligned}
& \| (\partial_1^2 F, \partial_1^2 G) \|_{H^{r-2}(\mathcal{P})} \lesssim (\| (f, g) \|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + \| H''(f, g) \|_{C^r(\bar{\mathcal{P}})} + 1) \| (\mu, \nu) \|_{H^1(\mathcal{P})} \\
& \quad + \| (\mu, \nu) \|_{H^r(\mathcal{P})} + \sum_{j \in \{2, 3\}} \| (\partial_j^{r-1} \partial_1 F, \partial_j^{r-1} \partial_1 G) \|_{L^2(\mathcal{P})}. \quad (7.68)
\end{aligned}$$

Juntando (7.68) con la desigualdad (7.67) obtenida al final de la parte 2 de la demostración, y tomando  $\delta > 0$  lo suficientemente pequeño, podemos estimar todas las derivadas parciales de orden

$r$  con una única derivada con respecto a  $x$ . Al sustituir la estimación resultante en (7.68), obtenemos el control de todos los términos con al menos dos derivadas con respecto a  $x$ .

La prueba del paso inductivo se sigue de las desigualdades probadas en las tres etapas, en las que cubrimos todos los casos posibles.  $\square$

En esta sección, hemos llevado a cabo un estudio de la ecuación lineal asociada a la forma bilineal regularizada siguiendo los pasos detallados en la referencia [26, p. 449]. Para  $(\nabla f, \nabla g)$  lo suficientemente próxima a  $(\nabla f_c, \nabla g_c)$  en  $C^3(\mathcal{P})$  y  $\|H''(f, g)\|_{C(\bar{\mathcal{P}})}$  lo suficientemente pequeña, hemos comprobado que la elipticidad y coercitividad del problema regularizado aseguran la existencia y unicidad de una solución  $(F, G)$  para el problema linealizado. Además, si  $(f, g)$  y  $H''$  son lo suficientemente regulares, existe una solución  $(F, G) \in \mathcal{A}_d \cap H^r(\mathcal{P})$  para cualquier  $(\mu, \nu) \in H^r(\mathcal{P})$ .

Ahora, debido a que las estimaciones se cumplen uniformemente en  $\epsilon \in (0, 1]$ , se comportan bien y la existencia permanece cuando se toma el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . De esta forma, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 7.4.9.** *Sea  $\epsilon = 0$ ,  $r \in \mathbb{Z}^+$ ,  $(f, g) \in \mathcal{A}_f \cap H_{\text{loc}}^{r+4}(D)$  en un entorno lo suficientemente pequeño de  $(f_c, g_c)$  en  $H^5(\mathcal{P})$ ,  $H \in \mathcal{A}_H$  con  $H''(f, g) \in C^r(\bar{D})$  y  $H''(f, g)$  lo suficientemente pequeña en  $C(\bar{P})$ . Existe una constante  $C_r > 0$  tal que, si*

$$\|(\partial_2 \nabla f, \partial_3 \nabla f, \partial_2 \nabla g, \partial_3 \nabla g)\|_{C^1(\bar{P})} < C_r^{-1},$$

*entonces, para cualquier par  $(\mu, \nu) \in H_{\text{loc}}^r(D)$  periódico, existe un par  $(F, G) \in \mathcal{A}_d \cap H_{\text{loc}}^r(D)$  que verifica (7.37) con  $\epsilon = 0$  y*

$$\|(F, G)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 \leq C_r \|(\mu, \nu)\|_{H^r(\mathcal{P})}^2 + C_r (\|(f, g)\|_{H^{r+4}(\mathcal{P})} + \|H''(f, g)\|_{C^r(\bar{P})} + 1)^2 \|(\mu, \nu)\|_{H^1(\mathcal{P})}^2.$$

Este resultado sigue siendo válido aunque no consideremos la condición simplificadora (7.19). Podemos ver que existe una pérdida de regularidad constante en la estimación, ya que al pasar de  $\|(f, g)\|$  a  $\|(F, G)\|$  se disminuye en cuatro unidades el orden de derivación. Es por ello que se trata de una estimación “tame”, lo que nos permite utilizar el método de Nash-Moser para buscar soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange.

## 7.5. Uso del método iterativo de Nash-Moser

### 7.5.1. Introducción

El método de iteración de Nash-Moser es una técnica diseñada para la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales en las que las ecuaciones obtenidas en la linealización del sistema admiten estimaciones que sufren una pérdida de regularidad con respecto a los datos iniciales. Este método

fue introducido por Nash para resolver el problema del embebimiento isométrico de cualquier variedad de Riemann en un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Posteriormente, Moser simplificó el método y mostró como aplicarlo en un planteamiento más general. Desde este momento, esta técnica iterativa se conoce como el *método de Nash-Moser*.

La técnica tiene numerosas formulaciones distintas dependiendo del autor (véase [2] o [21]). El procedimiento que seguiremos en esta última sección está basado en el que se utiliza en el Capítulo 6 de la referencia [22], donde se discute el embebimiento isométrico local en  $\mathbb{R}^3$  de las superficies con curvatura de Gauss no negativa. Antes de la aplicación concreta a nuestro problema, vamos a dar una idea intuitiva del método.

Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Banach. Consideremos un operador diferencial no lineal de orden  $m$   $\mathcal{F} : X \rightarrow Y$  con  $\mathcal{F}(0) = 0$ , definido como

$$\mathcal{F}(w) = F(\mathbf{x}, w, Dw, \dots, D^m w),$$

para una cierta función  $F$ . Supongamos que queremos resolver la ecuación no lineal

$$\mathcal{F}(w) = f, \tag{7.69}$$

donde  $f$  es una pequeña perturbación de 0 dada. El objetivo es encontrar una solución  $w$  cercana a 0 y lo suficientemente regular en  $X$ . Asumimos que  $\mathcal{F}$  es continuamente diferenciable y que la aplicación diferencial  $\mathcal{F}'$  (en el sentido de Fréchet) es localmente invertible en  $w = 0$ . Uno de los métodos clásicos para resolver esta ecuación no lineal es el método iterativo de Newton, que trata de aproximar la solución por medio de una sucesión definida como

$$\begin{cases} w_0 = 0, \\ w_{k+1} = w_k + (\mathcal{F}'(w_k))^{-1}(f - \mathcal{F}(w_k)), \quad \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

El método de Newton tiene un alto orden de convergencia, pero requiere el uso de la aplicación inversa  $(\mathcal{F}'(w))^{-1}$ , por lo que nos interesa conocer sus condiciones de existencia y propiedades. La linealización del problema (7.69) nos proporciona la ecuación

$$\mathcal{F}'(w)v = g, \tag{7.70}$$

donde en el caso de Newton se tomaría  $g = f - \mathcal{F}(w_k)$ , pero esta igualdad puede ser imposible de resolver para  $v \in X$ . Esta limitación explica la necesidad de disponer de otros métodos iterativos de convergencia con órdenes lo suficientemente altos.

Para introducir el método de Nash-Moser, cambiaremos la formulación del problema. Ahora supondremos que tenemos dos sucesiones decrecientes de espacios de Banach de la forma

$$\begin{aligned} X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_k \supset \dots, \\ Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_k \supset \dots, \end{aligned}$$

con respectivas sucesiones crecientes de normas  $\|\cdot\|_{X_m}$  y  $\|\cdot\|_{Y_m}$ , para  $m \geq 0$ . Los ejemplos más usuales son sucesiones de espacios de Sobolev  $X_m = H^m$  o de espacios de Hölder  $X_s = C^s$ . Supongamos que el conjunto de índices es discreto.

Como antes, queremos resolver la ecuación (7.69) considerando ahora  $\mathcal{F} : X_m \rightarrow Y_m$ , para cada  $m \geq 0$ . Supongamos que  $\mathcal{F}'(\cdot)$  es solo invertible entre  $Y_m$  y  $X_{m-s}$  para un  $s$  fijado, es decir, que presenta una pérdida de regularidad de orden  $s$ . Entonces, fijado un elemento  $w \in X_m$ , cualquier solución  $v$  de la ecuación  $\mathcal{F}'(w)v = g$  verificará una estimación de la forma

$$\|v\|_{X_m} \leq C\|g\|_{Y_{m+s}},$$

para todo  $m$  (en un intervalo finito) y con  $s$  fijo. Se dice en este caso que la ecuación se resuelve con una *pérdida de derivadas*. En realidad, dada la existencia de métodos para resolver la ecuación (7.69), no se está perdiendo regularidad con este procedimiento sino información sobre la misma. Si intentásemos aplicar en este caso el método de Newton, tendríamos que, para cualquier  $k \geq 0$ , si  $w_k \in X_m$  entonces  $f - \mathcal{F}(w_k) \in Y_m$ , y la iteración nos daría

$$w_{k+1} = w_k + (\mathcal{F}'(w_k))^{-1}(f - \mathcal{F}(w_k)) \in X_{m-s}.$$

De esta forma, en cada paso de iteración tendría lugar una pérdida finita de regularidad en el término correspondiente, lo que imposibilitaría la convergencia del método.

Además de la pérdida de  $s$  derivadas, frecuentemente se da el caso de que haya una pérdida adicional de  $s'$  derivadas debida al coste de resolución de la ecuación (7.70) en términos de información sobre los coeficientes de la misma, que están determinados por  $w$ . Esto ocurre, por ejemplo, si la estimación que verifica la solución  $v$  es de la forma

$$\|v\|_{X_m} \leq C(\|g\|_{Y_{m+s}} + \|g\|_{Y_{m_0}}\|w\|_{X_{m+s'}}), \quad (7.71)$$

para todo  $m$  y con los parámetros  $m_0$ ,  $s$  y  $s'$  fijados. La naturaleza de esta doble pérdida de regularidad determina la aplicabilidad del método de Nash-Moser, que es válido si los órdenes  $s$  y  $s'$  son constantes, como en el ejemplo. En este caso particular, se dice que la estimación (7.71) es “tame”.

La idea que tuvo John Nash para solventar este problema fue modificar el método de Newton incorporando un operador regularizante que compensase en cada iteración la pérdida de derivadas. La idea es cambiar la elección del paso  $w_{k+1} - w_k$  suavizando tanto la función  $w_k$  en la que se calcula el operador lineal  $\mathcal{F}'(\cdot)$  como el término no homogéneo  $g_k$ . Reescribamos el esquema de iteración como

$$w_{k+1} = w_k + \delta w_k,$$

con

$$\delta u_k = (\mathcal{F}'(w_k))^{-1}g_k \quad \text{y} \quad g_k = f - \mathcal{F}(w_k). \quad (7.72)$$

Supongamos que disponemos de dos familias paramétricas de operadores regularizantes  $\{S_X(\theta)\}_{\theta \geq 1}$  y  $\{S_Y(\theta)\}_{\theta \geq 1}$  tales que

$$S_X(\theta) : X_0 \rightarrow X_\infty := \bigcap_{m \geq 0} X_m, \quad S_Y(\theta) : Y_0 \rightarrow Y_\infty := \bigcap_{m \geq 0} Y_m$$

y verificando una serie de hipótesis, como la existencia de límites del tipo

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} S_X(\theta) = \text{Id}, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} S_Y(\theta) = \text{Id}. \quad (7.73)$$

Modificamos el esquema (7.72) a

$$\delta w_k = (\mathcal{F}'(S_X(\theta_k)))^{-1} S_Y(\theta_k) g_k,$$

donde  $\{\theta_k\}_{k \geq 1}$  es una sucesión creciente tal que  $\theta_k \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Debido a la propiedad (7.73) de las sucesiones regularizantes, el esquema iterativo es semejante al método clásico de Newton cuando  $k$  toma valores altos, por lo que es natural esperar que converja bajo las condiciones apropiadas. La clave sería equilibrar adecuadamente el alto orden de convergencia del método de Newton con la constante pérdida de regularidad.

Generalmente, la regularidad de la solución obtenida es muy inferior a la de los datos iniciales dados por  $f$ , por lo que se pueden introducir otras modificaciones en el esquema para reducir esta diferencia. Para más información, se puede consultar el Capítulo 3.C de la referencia [2], en el cual se muestra de hecho el ejemplo de aplicación del método a la perturbación de un campo constante en el toro  $\mathbb{T}^n$ , un planteamiento que guarda ciertas similitudes con nuestro problema.

### 7.5.2. Planteamiento

Sea  $(f_c, g_c)$  un par de funciones lineales prefijadas y consideremos la matriz jacobiana con respecto a las coordenadas  $(y, z)$ , que definimos al comienzo del capítulo en (7.6) y denotamos por  $R$ . Además, recordemos la definición del espacio de direcciones admisibles  $\mathcal{A}_d$  como aquel formado por los pares de funciones  $(F, G)$  tales que

1.  $F, G \in H_{\text{loc}}^1(D)$ ,
2.  $F$  y  $G$  son  $(P_1, P_2)$ -periódicas en  $(y, z)$ ,
3.  $(F, G) = 0$  en  $\partial D$  en el sentido de trazas.

Vamos a definir tres espacios de Banach de sucesiones decrecientes:

**Definición 7.5.1** (Espacios de Banach  $\mathcal{U}_k$ ). Para cada entero  $k \geq 2$ , sea  $\mathcal{U}_k$  el espacio vectorial real formado por los pares  $(F, G) \in \mathcal{A}_d \cap H_{\text{loc}}^k(D)$ .  $(\mathcal{U}_k, \|\cdot\|_k)$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|(F, G)\|_k^2 = \|F\|_{H^k(\mathcal{P})}^2 + \|G\|_{H^k(\mathcal{P})}^2.$$

**Definición 7.5.2** (Espacios de Banach  $\mathcal{V}_k$ ). Para cada entero  $k \geq 0$ , sea  $\mathcal{V}_k$  el espacio vectorial real formado por los pares  $(\mu, \nu) \in H_{\text{loc}}^k(D)$  que cumplen la condición de periodicidad 2 anterior en casi todo punto.  $(\mathcal{V}_k, \|\cdot\|_k)$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|(\mu, \nu)\|_k^2 = \|\mu\|_{H^k(\mathcal{P})}^2 + \|\nu\|_{H^k(\mathcal{P})}^2.$$

**Definición 7.5.3** (Espacios de Banach  $\mathcal{W}_k$ ). Para cada entero  $k \geq 4$ , sea  $\mathcal{W}_k$  el espacio vectorial real formado por las 4-tuplas  $(f_p, g_p, H_p, c)$  tales que

1.  $f_p, g_p \in H_{\text{loc}}^k(D)$  verifican la condición de periodicidad 2 anterior,
2.  $H_p \in C^{k-2}(\mathbb{R}^2)$  es periódico con respecto a la red en  $\mathbb{R}^2$  generada por los vectores  $RP_1e_1$  y  $RP_2e_2$ , donde  $P_1$  y  $P_2$  no son necesariamente los periodos fundamentales,
3.  $c \in \mathbb{R}^2$ .

Nótese que la segunda condición asegura que la función  $H_p(f_c + f_p + F, g_c + g_p + G) \in \mathcal{A}_H$ , para todo  $(F, G) \in \mathcal{U}_k$ .

$(\mathcal{W}_k, \|\cdot\|_k)$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|(f_p, g_p, H_p, c)\|_k^2 = \|f_p\|_{H^k(\mathcal{P})}^2 + \|g_p\|_{H^k(\mathcal{P})}^2 + \|H_p\|_{C^{k-1}(\bar{\mathcal{Q}})}^2 + |c|^2.$$

Tanto  $\mathcal{U}_k$  como  $\mathcal{V}_k$  son espacios de Banach para todo  $k \geq 2$  y  $k \geq 0$ , respectivamente, porque las condiciones 2 y 3 son cerradas, por lo que ambos son subespacios cerrados del espacio de Banach  $H_{\text{loc}}^k(D) \times H_{\text{loc}}^k(D)$  con su norma habitual inducida. Por otro lado,  $\mathcal{W}_k$  es espacio de Banach para todo  $k \geq 4$  por ser subespacio cerrado del espacio de Banach  $H_{\text{loc}}^k(D) \times H_{\text{loc}}^k(D) \times C^{k-2}(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ .

Nótese que, por similitud con el enunciado del Teorema 7.1.1, el espacio de Banach  $\mathcal{W}_k$  está formado por los datos iniciales del problema, esto es, son los posibles pares de funciones  $(f_p, g_p)$  que perturban los valores en la frontera de las funciones lineales prefijadas  $(f_c, g_c)$ , la función de Bernoulli asociada al flujo perturbativo  $H_p$  y la constante  $c$ . Por otro lado, el espacio de Banach  $\mathcal{U}_k$  está formado por los pares de funciones  $(F, G)$  que cumplen los requisitos para ser aquel que resuelve el problema, esto es, el par  $(f_s, g_s)$  que tras la perturbación del campo constante da lugar a un nuevo campo de velocidades de la forma  $\mathbf{u}_s = \nabla(f_c + f_p + F) \times \nabla(f_c + f_p + F)$  que es solución de la ecuación de Euler estacionaria. Finalmente, el espacio  $\mathcal{V}_k$  está formado por los posibles pares  $(\mu, \nu)$  que permiten la linealización de la forma cuadrática.

Dado  $(f_p, g_p, H_p, c) \in \mathcal{W}_4$  con  $H_p \in C^3(\mathbb{R}^2)$ , definimos la aplicación  $\mathcal{F} : \mathcal{U}_4 \rightarrow \mathcal{V}_2$  por

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}^T \mapsto \mathcal{F} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot (\nabla g \times (\nabla f \times \nabla g)) + \partial_f H(f, g) \\ \nabla \cdot (\nabla f \times (\nabla f \times \nabla g)) + \partial_g H(f, g) \end{pmatrix}^T, \quad (7.74)$$

con  $f = f_c + f_p + F$ ,  $g = g_c + g_p + G$  y  $H(f, g) = c_1 f + c_2 g + H_p(f, g)$ . Esta aplicación hace corresponder a cada par de direcciones admisibles  $(F, G) \in \mathcal{U}_4$  la evaluación de su suma con las

funciones lineales prefijadas  $(f_c, g_c)$  y las perturbaciones  $(f_p, g_p)$  en las expresiones que definen las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.8). Si  $\mathcal{F}(F, G) = 0$ , tendremos que  $(f, g)$  resuelven las ecuaciones de Euler-Lagrange y, por tanto, definen una solución de las ecuaciones de Euler estacionarias de la forma  $\mathbf{u} = \nabla f \times \nabla g$ . Nótese que ahora  $\mathcal{F}$  está definido sobre los pares de variaciones  $(F, G)$  y no sobre sus sumas con las condiciones iniciales  $(f, g) = (f_c + f_p + F, g_c + g_p + G)$ , como lo definimos al comienzo del capítulo. Esencialmente es lo mismo ya que las condiciones iniciales están prefijadas, por lo que conocer  $(F, G)$  equivale a conocer  $(f, g)$  y además la derivada de  $(f, g)$  respecto de  $(F, G)$  es la identidad, por lo que al aplicar la regla de la cadena tenemos que es lo mismo derivar  $\mathcal{F}$  respecto de  $(F, G)$  o de  $(f, g)$ .

Siguiendo las ideas desarrolladas en la introducción al método de Nash-Moser, su aplicación requiere conocer la invertibilidad del funcional lineal  $\mathcal{F}'(w)(\cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$  y el carácter de la posible pérdida de regularidad que sufren las soluciones de  $\mathcal{F}'(w)v = g$ , para un cierto  $g$ . En nuestro problema, el funcional se obtiene a partir de (7.37), que es la linealización de la forma cuadrática que hemos estudiado en la sección anterior, tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

### 7.5.3. Aplicación

A partir del Teorema 7.4.9 (con  $r = k$ ) y la desigualdad (7.49) tomando  $\xi = H$ , se tiene directamente el siguiente resultado, análogo hasta cierto punto, pero enunciado en términos de las sucesiones de espacios de Banach que acabamos de definir:

**Teorema 7.5.4.** *Sea  $k \in \mathbb{Z}^+$  un entero y sean  $(f_p, g_p, H_p, c) \in \mathcal{W}_{k+4}$ ,  $(f_1, g_1) \in \mathcal{U}_{k+4}$ . Supongamos que  $\|H_p''\|_{C(\bar{\mathcal{Q}})}$  es lo suficientemente pequeño, y que  $(f, g)$  está en un entorno lo suficientemente pequeño de  $(f_c, g_c)$  en  $H^5(\mathcal{P})$ , siendo*

$$f = f_c + f_p + f_1, \quad g = g_c + g_p + g_1.$$

*Definimos también*

$$H(f, g) = c_1 f + c_2 g + H_0(f, g).$$

*Existe una constante  $M_k > 0$ , que puede depender de  $(f_p, g_p, H_p, c)$  y  $(f_c, g_c)$ , tal que si*

$$\|(\partial_2 \nabla f, \partial_3 \nabla f, \partial_2 \nabla g, \partial_3 \nabla g)\|_{C^2(\mathcal{P})} < M_k^{-1},$$

*entonces para cualquier par  $(\mu, \nu) \in \mathcal{V}_k$  existe un único par  $(F, G) \in \mathcal{U}_k$  que verifica (7.37) con  $\epsilon = 0$ . Además, se tiene que*

$$\|(F, G)\|_k \leq M_k \|(\mu, \nu)\|_k + M_k \|(\mu, \nu)\|_1 (\|(f, g)\|_{H^{k+4}(\mathcal{P})} + 1),$$

*y*

$$\|(F, G)\|_0 \leq M_0 \|(\mu, \nu)\|_0,$$

*para alguna constante  $M_0 > 0$  independiente de  $k$ .*



Vamos a enunciar ahora el Teorema 6.3.1 de la referencia [22], en la cual el lector puede encontrar su demostración. Este resultado describe la aplicación del método de Nash-Moser para un caso análogo al nuestro, pero más general. En él consideran un dominio regular  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  que consiste en un rectángulo con los lados paralelos a los ejes de coordenadas, y las funciones satisfacen condiciones de frontera periódicas con respecto a  $n - 1$  coordenadas prefijadas.

**Teorema 7.5.5** (Han, Hong). *Sea  $\mathcal{F}(w)$  un operador diferencial no lineal de orden  $m$  en el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de la forma*

$$\mathcal{F}(w) = \Gamma(\mathbf{x}, w, Dw, \dots, D^m w),$$

*donde  $\Gamma$  es un función suave en  $\mathbf{x}$  y  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función lo suficientemente regular. Sean además  $d_0, d_1, d_2, d_3, s_0$  y  $\tilde{s}$  enteros no negativos que verifican las condiciones*

$$d_0 \geq m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

y

$$\tilde{s} \geq \max \left\{ 3m + 2d_* + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2, m + d_* + d_0 + 1, m + d_2 + d_3 + 1 \right\},$$

*siendo  $d_* = \max\{d_1, d_3 - s_0 - 1\}$ . Supongamos que para cualquier  $h \in H^{\tilde{s}+d_1}(\Omega)$  y  $w \in H^{\tilde{s}+d_2}(\Omega)$  cumpliendo*

$$\|w\|_{H^{d_0}(\Omega)} \leq r_0 := 1,$$

*se verifica que la ecuación linealizada de  $\mathcal{F}$  en  $w$ ,*

$$\mathcal{F}'(w)\rho = h, \tag{7.75}$$

*admite una solución  $\rho \in H^{\tilde{s}}(\Omega)$  que, para cualquier  $s = 0, 1, \dots, \tilde{s}$ , satisface la condición de regularidad*

$$\|\rho\|_{H^s(\Omega)} \leq c_s \left( \|h\|_{H^{s+d_1}(\Omega)} + (s - s_0)^+ (\|w\|_{H^{s+d_2}(\Omega)} + 1) \|h\|_{H^{d_3}(\Omega)} \right),$$

*donde  $c_s$  es una constante positiva independiente de  $h, w$  y  $\rho$ . En tal caso, existe una constante positiva  $\mu_* = \mu_*(\Omega, c_s, m, d_0, d_1, d_2, d_3, s_0, \tilde{s})$  tal que si se cumple la condición*

$$\|\mathcal{F}(0)\|_{H^{\tilde{s}-m}(\Omega)} \leq \mu_*^2, \tag{7.76}$$

*entonces la ecuación  $\mathcal{F}(w) = 0$  admite una solución  $w \in H^{\tilde{s}-m-d_*-1}(\Omega)$ .*

**Observación 7.5.6.** ■ Analizando la demostración de la referencia dada se puede ver que el resultado también se cumple para sistemas de  $N \geq 1$  ecuaciones diferenciales. Además, la constante  $r_0$  podría tomar cualquier valor positivo sin más que multiplicar las funciones apropiadas por factores constantes.

- La solución  $w$  es el límite en  $H^{\tilde{s}-m-d_*-1}(\Omega)$  de sumas de soluciones en  $H^{\tilde{s}}(\Omega)$  a ecuaciones lineales del tipo (7.75).
- Se puede relajar la condición de que  $\Gamma$  sea suave a que sea de clase  $C^{\tilde{s}-m+2}$  (ver [8]).

- De [22] se sigue que existe una constante  $C > 0$  tal que  $\|w\|_{H^{\tilde{s}-m-d_*-1}(\Omega)} \leq C\mu_*^2$ .

Para aplicar este resultado a nuestro problema, tenemos que comprobar que se verifica la condición (7.76) para nuestra aplicación  $\mathcal{F}$ . Para ello, consideramos una solución  $(F_1, G_1) = (0, 0)$  a un problema no perturbado con  $(f_p, g_p) = (0, 0)$  y  $H = 0$ , y comprobaremos que se verifica (7.76) y que las constantes necesarias (y, en particular,  $\mu_*$ ) se pueden tomar iguales a las del problema no perturbado si consideramos una perturbación lo suficientemente pequeña.

**Teorema 7.5.7.** *Sean  $j \geq 0$  un entero,  $R > 0$  arbitrario y  $\delta > 0$  lo suficientemente pequeño. Supongamos que  $(f_p, g_p, H_p, c) \in \mathcal{W}_{13+j}$  verifica  $\|(f_p, g_p, H_p, c)\|_{13+j} < R$  y  $\|(f_p, g_p, H_p, 0)\|_5 < \delta$ . Entonces, se puede tomar  $\epsilon < 0$  independiente de  $(f_p, g_p, H_p, c)$  tal que si  $\|\mathcal{F}(0, 0)\|_{7+j} < \epsilon$  existirá  $(f_s, g_s) \in \mathcal{U}_{6+j}$  cumpliendo  $\mathcal{F}(f_s, g_s) = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $r_0 > 0$  lo suficientemente pequeño para que el Teorema 7.5.4 tomando  $k = 9 + j$  pueda ser aplicado a todo par  $(F, G) \in \mathcal{U}_5$  en la bola cerrada  $B$  de radio  $r_0$  centrada en el origen. Sea  $\bar{c} > 0$  tal que

$$\|(F, G)\|_{C^2(\bar{\mathcal{P}})} \leq \bar{c},$$

para todo par  $(F, G) \in \mathcal{U}_5 \cap B$ , y definimos  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2+6+18}$  como la bola de radio  $\bar{c}$  centrada en el origen.

Aplicamos el Teorema 7.5.5 tomando los parámetros

$$\begin{aligned} m = 2, \quad \Omega = \mathcal{P}, \quad n = 3, \quad d_0 = 5, \quad d_1 = 0, \\ d_2 = 4, \quad d_3 = 1, \quad s_0 = 1, \quad d_* = 1, \quad \tilde{s} = 9 + j. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Entonces, obtenemos

$$\tilde{s} + d_1 = 9 + j, \quad \tilde{s} + d_2 = 13 + j, \quad \tilde{s} - m = 7 + j, \quad \tilde{s} - m - d_* - 1 = 6 + j$$

y una solución  $(f_s, g_s) \in H^{6+j}(\mathcal{P})$ . Sea la aplicación  $\Gamma : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^{1+1+3+3+9+9} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\mathcal{F}(F, G) = \Gamma(\mathbf{x}, F, G, F', G', F'', G'').$$

Esta aplicación aparece en las estimaciones via “constantes” que dependen de  $\|\partial_\alpha \partial_\beta \Gamma\|_{C^{\tilde{s}-m}(\bar{\mathcal{P}} \times \bar{\Sigma})}$ , donde  $\partial_\alpha$  y  $\partial_\beta$  son todas las derivadas parciales respecto de las variables  $F, G, F', G', F'', G''$ . Además,  $(f_p, g_p, H_p, c) \in C^{\tilde{s}+2}(\bar{\mathcal{P}}) \times C^{\tilde{s}+2}(\bar{\mathcal{P}}) \times C^{\tilde{s}+2}(\bar{\mathcal{Q}}) \times \mathbb{R}^2$  y  $\partial_\alpha \partial_\beta \Gamma \in C^{\tilde{s}-m}(\bar{\mathcal{P}} \times \bar{\Sigma})$ , lo que se deduce aplicando embebimientos de Sobolev de la forma del Teorema 2.4.1.

Como  $(f_s, g_s)$  es el límite en  $H^{6+j}(\mathcal{P})$  de sumas de soluciones en  $\mathcal{U}_{9+j}$  a ecuaciones del tipo (7.37) (con  $\epsilon = 0$ ), entonces verifica la condición 3 de  $\mathcal{A}_d$  y por tanto pertenece a  $\mathcal{U}_{6+j}$ .  $\square$

Como corolario simplificado, obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 7.5.8** (Existencia de soluciones). *Supongamos que  $H_p \in C^{11+j}(\mathbb{R}^2)$  y  $f_p, g_p \in H^{13+j}(D)$ . Se puede tomar  $\epsilon = \epsilon(j) > 0$  tal que si  $\|(f_p, g_p, H_p, c)\|_{13+j} < \epsilon$ , entonces existe un par  $(f_s, g_s) \in \mathcal{U}_{6+j}$  que verifica  $\mathcal{F}(f_s, g_s) = 0$ .*

El Teorema 7.1.1 se sigue de la combinación de este corolario (existencia de soluciones) y el Teorema 7.3.3 (unicidad local).



# Apéndice A

## A.1. Representación de un campo vectorial de divergencia nula a partir de dos funciones de corriente

Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{R}^3$ . Vamos a demostrar el siguiente resultado:

**Proposición A.1.1.** *Si un campo vectorial  $\mathbf{u} \in C^2(\bar{D})$  de divergencia nula es  $P_1$ -periódico en la coordenada  $y$  y  $P_2$ -periódico en la coordenada  $z$  y cumple que  $u_1 \neq 0$  en  $\bar{D}$ , entonces el campo se puede expresar globalmente como*

$$\mathbf{u} = \nabla f \times \nabla g, \quad (\text{A.1})$$

*para dos funciones escalares  $f, g \in C^2(\bar{D})$ , y además estas se pueden tomar de forma que cada una sea la suma de una función lineal y una función periódica.*

En [19] se puede ver una demostración de este resultado para el caso más sencillo en el que no se pide la última condición sobre  $f$  y  $g$ ,  $\mathbf{u}$  es un campo arbitrario y  $\bar{D}$  es un volumen pequeño ocupado por líneas del campo que son transversales a una superficie  $S$ .

El argumento que emplearemos es una versión simplificada de una prueba de equivalencia global por difeomorfismos entre formas de volumen con el mismo volumen total en variedades compactas conexas que se encuentra en [32]. Antes de comenzar la demostración, podemos observar fácilmente que el campo vectorial dado por  $\nabla f \times \nabla g$  tiene divergencia nula si  $f$  y  $g$  son de clase  $C^2$  debido a la identidad vectorial (2.10):

$$\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot (\nabla \times \nabla f) - \nabla f \cdot (\nabla \times \nabla g) = 0.$$

*Demostración.* Para cada  $(x, y, z) \in \bar{D}$ , consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por

$$\begin{aligned} \phi' &= \mathbf{u}(\phi), \\ \phi(0) &= (x, y, z). \end{aligned}$$

Por hipótesis,  $u_1 \neq 0$  en  $\bar{D}$  y  $\mathbf{u} \in C^2(\bar{D})$ , de donde se deduce que  $\inf_{\bar{D}} |u_1| > 0$  y  $\sup_{\bar{D}} |\mathbf{u}| < \infty$  por ser  $\bar{D}$  compacto. Por tanto, la derivada  $\phi'_1 = u_1$  está contenida en un intervalo compacto  $I \subset (0, \infty)$  o bien  $I \subset (-\infty, 0)$ , y, en particular, tiene signo constante. Así pues,  $\phi_1$  es estrictamente monótona y toma valores en todo  $\mathbb{R}$ , por lo que existe un único instante de tiempo  $T = T(x, y, z) \in \mathbb{R}$  en el que se cumple  $\phi_1(-T; x, y, z) = 0$ . A continuación, definimos las funciones escalares de clase  $C^2(\bar{D})$

$$Y : (x, y, z) \mapsto \phi_2(-T; x, y, z) \quad \text{y} \quad Z : (x, y, z) \mapsto \phi_3(-T; x, y, z).$$

Estas dos funciones asignan a cada punto  $(x, y, z)$  las coordenadas  $(Y, Z)$  de la intersección del plano  $x = 0$  con la línea de campo que pasa por dicho punto, por lo que sus valores serán constantes en todos los puntos que pertenezcan a una misma línea. Así pues,  $Y$  y  $Z$  son invariantes por el campo  $\mathbf{u}$ .

De esta propiedad se deduce que  $\nabla Y$  y  $\nabla Z$  son perpendiculares a  $\mathbf{u}$  en todo punto y, por tanto,  $\nabla Y \times \nabla Z = \lambda \mathbf{u}$  para alguna función escalar  $\lambda(x, y, z)$ . Ahora, por ser  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , calculando la divergencia en ambos lados de la integral se sigue que  $\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda = 0$ , por lo que  $\mathbf{u}$  es tangente a las superficies de nivel de  $\lambda$  en todo punto y  $\lambda$  es también invariante por  $\mathbf{u}$ .

Claramente  $T(0, y, z) = 0$ , luego  $Y(0, y, z) = y$ ,  $Z(0, y, z) = z$ , y se sigue que  $\nabla Y(0, y, z) = (*, 1, 0)$  y  $\nabla Z(0, y, z) = (*, 0, 1)$ . Entonces

$$(\nabla Y \times \nabla Z)(0, y, z) = (1, *, *),$$

pero

$$(\nabla Y \times \nabla Z)(0, y, z) = \lambda(0, y, z) \mathbf{u}(0, y, z).$$

Por tanto  $1 = \lambda(0, y, z) u_1(0, y, z)$  y se sigue que  $\lambda(0, y, z) = 1/u_1(0, y, z)$ . Como  $\lambda$  es invariante por  $\mathbf{u}$ , y  $(x, y, z) = \phi(T; 0, Y, Z)$ , se tiene

$$\lambda(x, y, z) = \lambda(0, Y, Z) = \frac{1}{u_1(0, Y, Z)}.$$

Por tanto, podemos escribir

$$\nabla Y \times \nabla Z = \frac{1}{u_1(0, Y, Z)} \mathbf{u}.$$

Consideremos la expresión de dos funciones dadas  $f$  y  $g$  como la composición

$$f(x, y, z) = F(Y(x, y, z), Z(x, y, z)), \quad g(x, y, z) = G(Y(x, y, z), Z(x, y, z)),$$

siendo  $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces, si desarrollamos las cuentas con la regla de la cadena, tenemos

$$\nabla f \times \nabla g = (\partial_1 F \partial_2 G - \partial_2 F \partial_1 G) \nabla Y \times \nabla Z = \frac{\partial_1 F \partial_2 G - \partial_2 F \partial_1 G}{u_1(0, Y, Z)} \mathbf{u}, \quad (\text{A.2})$$

por lo que para que se verifique (A.1) debemos encontrar un par  $(F, G)$  que cumpla la igualdad

$$\partial_1 F(Y, Z) \partial_2 G(Y, Z) - \partial_2 F(Y, Z) \partial_1 G(Y, Z) = u_1(0, Y, Z). \quad (\text{A.3})$$

La dificultad está en que el par respete las condiciones de periodicidad de  $\mathbf{u}$  (en caso contrario, la búsqueda sería trivial). En particular,  $u_1(0, Y, Z)$  debe ser  $P_1$ -periódico en  $Y$  y  $P_2$ -periódico en  $Z$ . Sea

$$\alpha = \frac{1}{P_1 P_2} \int_0^{P_1} \int_0^{P_2} u_1(0, Y, Z) dY dZ$$

el valor medio de  $u_1$  en la celda  $[0, P_1] \times [0, P_2]$ , y descomponemos  $u_1(0, Y, Z) = a(Y)b(Y, Z)$ , donde

$$a(Y) = \frac{1}{P_2} \int_0^{P_2} u_1(0, Y, Z) dZ \neq 0 \quad y \quad b(Y, Z) = \frac{u_1(0, Y, Z)}{a(Y)}.$$

Así,

$$\frac{1}{P_1} \int_0^{P_1} a(Y) dY = \alpha \quad y \quad \frac{1}{P_2} \int_0^{P_2} b(Y, Z) dZ = 1,$$

y definimos el par que buscamos como

$$F(Y) = \int_0^Y a(s) ds \quad y \quad G(Y, Z) = \int_0^Z b(Y, s) ds.$$

Así definidas,  $F$  y  $G$  (y, por tanto  $f$  y  $g$ ) son de clase  $C^2$ , y la aplicación

$$\Psi : (Y, Z) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (F(Y), G(Y, Z)) \in \mathbb{R}^2$$

es biyectiva:

Supongamos que  $\Psi(Y, Z) = \Psi(Y', Z')$ . Entonces

$$0 = F(Y') - F(Y) = \int_Y^{Y'} a(s) ds,$$

lo que implica que  $Y = Y'$  porque  $a(s) \neq 0$ ,  $\forall s$ . Entonces también se tiene

$$0 = G(Y, Z') - G(Y, Z) = \int_Z^{Z'} b(Y, s) ds,$$

que implica que  $Z = Z'$  porque  $b(Y, s) \neq 0$ . Por tanto,  $\Psi$  es inyectiva.

La sobreyectividad de  $\Psi$  se deduce de que  $u_1$  toma valores en un intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , por lo que lo mismo ocurre con  $a$  y con  $b$  y, en consecuencia, las funciones integrales  $F$  y  $G$  recorren todo  $\mathbb{R}$ .

Hemos visto que  $\Psi = (F, G)$  es biyectiva. Además, este par verifica (A.3) pues por construcción

$$\partial_1 F(Y) \partial_2 G(Y, Z) = a(Y) b(Y, Z) = u_1(0, Y, Z).$$

También cumple que

$$F(Y) - \alpha Y = \int_0^Y (a(s) - \alpha) ds$$

es  $P_1$ -periódica y que

$$G(Y, Z) - Z = \int_0^Z (b(Y, s) - 1) ds$$

es  $(P_1, P_2)$ -periódica (en ambos casos, por serlo  $u_1$ ). Por último, la periodicidad de  $\mathbf{u}$  y la existencia y unicidad de soluciones permiten deducir que  $(Y(x, y, z), Z(x, y, z)) - (y, z)$  es  $(P_1, P_2)$ -periódico en  $(y, z)$ , y por lo tanto también lo es  $(f(x, y, z), g(x, y, z)) - (\alpha y, z)$ . Esto implica la  $(P_1, P_2)$ -periodicidad de  $\nabla f$  y  $\nabla g$ , ya que los gradientes de  $\alpha y$  y  $z$  son constantes, y por tanto implica la  $(P_1, P_2)$ -periodicidad de  $\mathbf{u}$ . Así concluye la prueba de la existencia de un par  $(f, g)$  verificando (A.1). Queda ahora comprobar que  $f$  y  $g$  pueden ser tomadas de la forma “lineal más periódica”.

La no unicidad del par  $(f, g)$  se pone de manifiesto en que si tomamos  $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  tal que

$$\det \Phi' = \partial_1 \Phi_1 \partial_2 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1 \partial_1 \Phi_2 = 1, \quad (\text{A.4})$$

entonces  $(\tilde{f}, \tilde{g}) = \Phi(f, g)$  también cumple (A.1). Esto es porque si hacemos un desarrollo con la regla de la cadena análogo al de (A.2), tenemos

$$\nabla \tilde{f} \times \nabla \tilde{g} = \nabla \Phi_1(f, g) \times \nabla \Phi_2(f, g) = (\partial_1 \Phi_1 \partial_2 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1 \partial_1 \Phi_2) \nabla f \times \nabla g = \mathbf{u}.$$

Además,  $(\tilde{f}, \tilde{g})$  será “lineal más  $(P_1, P_2)$ -periódica en  $(y, z)$ ” si  $\Phi(f, g) = T(f, g) + \Phi_0(f, g)$ , donde  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es lineal y  $\Phi_0$  es  $(\alpha P_1, P_2)$ -periódica. Comprobemos esta implicación:

Sea  $k \in \mathbb{Z}$ . Hemos visto que  $(f(x, y, z), g(x, y, z)) - (\alpha y, z)$  es  $(P_1, P_2)$ -periódica en  $(y, z)$ . Entonces

$$f(x, y + kP_1, z) = f(x, y, z) + \alpha(y + kP_1) - \alpha y = f(x, y, z) + \alpha kP_1,$$

$$g(x, y + kP_1, z) = g(x, y, z).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Phi(f(x, y + kP_1, z), g(x, y + kP_1, z)) \\ &= T(f(x, y, z) + \alpha kP_1, g(x, y, z)) + \Phi_0(f(x, y, z) + \alpha kP_1, g(x, y, z)) \\ &= T(f(x, y, z), g(x, y, z)) + \alpha kP_1 T(0, 0) + \Phi_0(f(x, y, z), g(x, y, z)) \\ &= \Phi(f(x, y, z), g(x, y, z)) + \alpha kP_1 T(0, 0). \end{aligned}$$

De forma análoga, se puede comprobar la “linealidad más  $P_2$ -periodicidad” en la segunda variable.

La aplicación  $T$  es un isomorfismo lineal, ya que de lo contrario existiría un funcional lineal no nulo  $l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que se anularía en la imagen de  $T$ . Entonces  $l \circ \Phi$  sería periódica, y por lo tanto tendría un punto crítico en el cual se anularía  $\det \Phi'$ , lo que contradice (A.4). Por ser  $T$  biyectiva, entonces  $\Phi$  es propia y, por el teorema de inversión global (usando de nuevo  $\det \Phi' = 1$ ), también es biyectiva.

El teorema de la función inversa global de Hadamard dice que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función  $C^1$  propia cuyo jacobiano  $J(f) = \det f'$  no se anula en ningún punto, entonces  $f$  es un difeomorfismo. Que  $f$  sea propia significa que  $f^{-1}(K)$  es compacto para todo compacto  $K$  del espacio final. En el caso de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , eso significa que  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . También se cumple en variedades.



Si  $M, N$  son variedades  $C^1$  conexas y  $f : M \rightarrow N$  es una aplicación  $C^1$  propia cuyo Jacobiano nunca se anula, entonces  $f$  es sobre. Si además  $N$  es simplemente conexa, entonces  $f$  también es inyectiva.

Recíprocamente, si  $\mathbf{u} = \nabla \tilde{f} \times \nabla \tilde{g}$  para algún par  $(\tilde{f}, \tilde{g})$  de funciones  $C^2$ , entonces estas son constantes a lo largo de las líneas del campo, pues  $\mathbf{u}$  es ortogonal a los gradientes de  $f$  y  $g$ :

$$\nabla \tilde{f} \cdot \mathbf{u} = \nabla \tilde{f} \cdot (\nabla \tilde{f} \times \nabla \tilde{g}) = 0, \quad \text{y, análogamente,} \quad \nabla \tilde{g} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

En consecuencia,

$$(\tilde{f}(x, y, z), \tilde{g}(x, y, z)) = (\tilde{f}(0, Y, Z), \tilde{g}(0, Y, Z))$$

con  $(Y, Z) = (Y(x, y, z), Z(x, y, z))$  definidas como antes, y obtenemos que  $(\tilde{f}, \tilde{g}) = \Phi(f, g)$ , siendo  $\Phi = (\tilde{f}, \tilde{g}) \Big|_{x=0} \circ \Psi^{-1} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Además,  $\Phi$  es “lineal más  $(\alpha P_1, P_2)$ –periódica” y  $\det \Phi' = 1$ .  $\square$

Finalizamos esta sección observando que la función de Bernoulli  $H = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + P$  puede ser escrita como función del par  $(f, g)$  pues es constante en las líneas de corriente. Si la denotamos por  $H(f, g)$ , podemos ver que si  $(f, g)$  se transforma a  $(\tilde{f}, \tilde{g}) = \Phi(f, g)$  con  $\Phi$  definida como antes, entonces  $H$  se transformará por medio de la aplicación  $H \circ \Phi^{-1}$ . Esto es porque se sigue teniendo  $\mathbf{u} = \nabla \tilde{f} \times \nabla \tilde{g}$ , por lo que tiene que ser  $\tilde{H}(\tilde{f}, \tilde{g}) = H(f, g)x = H \circ \Phi^{-1}(\tilde{f}, \tilde{g})$ .



# Bibliografía

- [1] Alfvén, H. *Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves*. Nature, Vol. 150, p. 405, 1942.
- [2] Alinhac, S.; Gérard, P.; Wilson, S.S. *Pseudo-differential operators and the Nash-Moser theorem*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 82. American Mathematical Society, Providence, RI. 2007.
- [3] Andreussi, T.; Morrison, P.; Pegoraro, F. *Hamiltonian Magnetohydrodynamics: Lagrangian, Eulerian, and Dynamically Accessible Stability – Examples with Translation Symmetry*. Physics of Plasmas, **23**, 2016.
- [4] Antiochos, S.K. *The topology of force-free magnetic fields and its implications for coronal activity*. Astrophys J **312**, 886–894, 1987.
- [5] Aschwanden, M. *Physics of the Solar Corona An Introduction with Problems and Solutions*. Springer, Berlin, Heidelberg. 2005.
- [6] Beale, J.T.; Kato, T.; Majda, A. *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*, Comm. Math. Phys. **94**, 61–66, 1984.
- [7] Bellan, P.M. *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press, Cambridge. 2006.
- [8] Buffoni, B.; Wahlén, E. *Steady three-dimensional rotational flows: An approach via two stream functions and Nash-Moser iteration*. Analysis and PDE, **12**(5), 1225–1258, 2019.
- [9] Campos-Rozo, J. *Evolution and dynamic properties of photospheric plasma in solar active regions*. KFU Graz, Thesis, 2017.
- [10] Chen, F.F. *Plasma Physics and Controlled Fusion* (3rd ed). Physics and Astronomy. Springer, New York. 2006.
- [11] Chorin, A.J.; Marsden, J.E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer, New York. 1993.
- [12] Coddington, E.A.; Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, New York. 1955.

- [13] Currie, I.G. *Fundamental Mechanics of Fluids*, Fourth Edition, CRC Press, Hoboken. 2012.
- [14] Davidson, P. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge. 2001.
- [15] Evans, L.C. *Partial Differential Equations*. 2nd Edition, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, American Mathematical Society. 2010.
- [16] Freidberg, J.P. *Ideal MHD*. Cambridge University Press, Cambridge. 2014.
- [17] Frewer, M.; Oberlack, M.; Grebenev, V. *The Dual Stream Function Representation of an Ideal Steady Fluid Flow and its Local Geometric Structure*. Math. Phys. Anal. Geom. **17**(1-2), 3–25, 2014.
- [18] Galdi, G.P. *Navier–Stokes Equations: A Mathematical Analysis*. Meyers R. (eds). Mathematics of Complexity and Dynamical Systems. Springer, New York. 2012.
- [19] Grad, H.; Rubin, H. *Hydromagnetic equilibria and force-free fields* . Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. 31, Theoretical and Experimental Aspects of Controlled Nuclear Fusion. Geneve, pp. 190–197, 1958.
- [20] Griffiths, D.J. *Introduction to Electrodynamics* (4th ed). Prentice Hall. 2013.
- [21] Hamilton, R.S. *The inverse function theorem of Nash and Moser*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7**(1), 65–222, 1982.
- [22] Han, Q.; Hong, J.-X. *Isometric embedding of Riemannian manifolds in Euclidean spaces*, Mathematical Surveys and Monographs 130, American Mathematical Society, Providence, RI. 2006.
- [23] Jackson, J.D. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, NY. 1999.
- [24] Kato, T. *On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation*, Arch. Ration. Mech. Anal. **25**, 296–305, 1967.
- [25] Keller, J.J. *A pair of stream functions for three-dimensional vortex flows*. Z. Angew. Math. Phys. **47**, 821–836, 1996.
- [26] Kohn, J.J.; Nirenberg, L. *Non-coercive boundary value problems*. Comm. Pure Appl. Math., **18**, 443–492, 1965.
- [27] Langtangen, H.; Pedersen, G. *Scaling of Differential Equations*. Springer, Cham. 2016.
- [28] Low, B.C. *The Parker magnetostatic theorem*. Astrophys J, **718**(2), 717–723, 2010.
- [29] Majda, A.; Bertozzi, A. *Vorticity and Incompressible Flow*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge. 2001.

- [30] Marsden, J.E.; Ratiu, T.; Abraham, R. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications* (3rd ed). Springer, New York. 2001.
- [31] Moreau, R.J. *Magnetohydrodynamics*. Fluid mechanics and its applications, Vol. 3, Springer, Netherlands. 1990.
- [32] Moser, J. *On the volume elements on a manifold*. Trans. Amer. Math. Soc. **120**, 286–294, 1965.
- [33] Nirenberg, L. *On elliptic partial differential equations*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) **13**, 115–162, 1959.
- [34] Parker E. *Topological dissipation and the small-scale fields in turbulent gases*. Astrophys J, 174:499, 1972.
- [35] Pontin, D.I.; Hornig, G. *The Parker problem: existence of smooth force-free fields and coronal heating*. Living Reviews in Solar Physics **17**(1), [5], 2020.
- [36] Serrin, J. *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*. Fluid Dynamics I, Encyclopedia of Physics, Springer, pp. 125–263, 1959.
- [37] Sperone Martí, G.S. *Singularidades en tiempo finito de soluciones de la ecuación de Euler y de Navier-Stokes en tres dimensiones espaciales*. Memoria de ingeniería, Universidad de Chile. 2016.
- [38] Vázquez, J.L. *Fundamentos matemáticos de la Mecánica de Fluidos*, Notas Curso Doctorado, UAM. 2003.