DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Estrutura de Dados

Análise de Complexidade de Algoritmos

Professores: Luiz Chaimowicz e Raquel Prates

Projeto de Algoritmos

- Projeto de algoritmos
  - Análise do problema
  - Decisões de projeto, TADs por exemplo
  - Algoritmo a ser utilizado de acordo com seu comportamento
- Principais Perguntas:
  - O Algoritmo funciona?
  - **O Algoritmo é eficiente?**

Projeto de Algoritmos

- A eficiência de um algoritmo pode ser medida com várias métricas. Por exemplo:
  - tempo de execução
  - espaço ocupado

- Esse tipo de estudo é chamado: **Análise de Algoritmos**

Problemas na Análise de Algoritmos

- **Análise de um algoritmo particular**
- **Análise de uma classe de algoritmos.**

Problemas na Análise de Algoritmos

- **Análise de um algoritmo particular**
  - Qual é o custo de usar um dado algoritmo para resolver um problema específico?

  - Características que devem ser investigadas:
    - Análise do número de vezes que cada parte do algoritmo deve ser executada
    - Estudo da quantidade de memória necessária.

Problemas na Análise de Algoritmos

- **Análise de uma classe de algoritmos.**
  - Qual é o algoritmo de menor custo possível para resolver um problema particular?
  - Toda uma família de algoritmos é investigada.
  - Procura-se identificar um que seja o melhor possível.
  - Coloca-se **limites** para a complexidade computacional dos algoritmos pertencentes à classe.

Custo de um Algoritmo

- Podem existir vários algoritmos para resolver o mesmo problema.

- Se a mesma medida de custo é aplicada a diferentes algoritmos, então é possível compará-los e escolher o mais adequado.

Medida do Custo pela Execução do Programa

- Medidas que dependam da execução em um computador real (em geral) são inadequadas:
  - os resultados são dependentes do compilador;
  - os resultados dependem do *hardware*;
  - quando grandes quantidades de memória são utilizadas, as medidas de tempo podem depender deste aspecto.

Medida do Custo pela Execução do Programa

- Apesar disso, há argumentos a favor de se obterem medidas reais de tempo.
  - Ex.: quando há vários algoritmos distintos para resolver um mesmo tipo de problema, todos com um custo de execução dentro de uma mesma ordem de grandeza.
  - Nesse caso, tanto os custos reais das operações como os custos não aparentes, tais como alocação de memória, indexação, carga, são considerados.

Medida do Custo por meio de um Modelo Matemático

- Usa um modelo matemático baseado em um computador idealizado.
- *Computador idealizado: Modelo RAM – Random Access Machine*
  (Máquina de Acesso Aleatório)
  - Um processador que executa uma ação por vez
  - Memória que armazena os dados
  - Operações básicas de custo constante
    - Acesso a memória
    - Testes condicionais
    - Operações aritméticas
    - Etc...

Medida do Custo por meio de um Modelo Matemático

- Deve ser especificado o conjunto de operações e seus custos de execuções.
  - É mais usual ignorar o custo de algumas das operações e considerar apenas as operações mais significativas.
- Ex.: algoritmos de ordenação.
  - Consideramos o número de comparações entre os elementos do conjunto a ser ordenado e ignoramos as operações aritméticas, de atribuição e manipulações de índices, caso existam.

Custo de um Algoritmo

- Determinando o menor custo possível para resolver problemas de uma dada classe, temos a medida da dificuldade inerente para resolver o problema.

- **Algoritmo Ótimo:** Quando o custo de um algoritmo é igual ao menor custo possível, o algoritmo é **ótimo** para a medida de custo considerada.

Função de Complexidade

- O custo de execução de um algoritmo é dado por uma função de custo ou **função de complexidade *f***.

- *f(n)* é a medida do custo necessário para executar um algoritmo para um **problema de tamanho *n***.

Função de Complexidade

- Função de **complexidade de tempo**:
  - *f(n)* mede o custo em **número de operações** para executar um algoritmo em um problema de tamanho n

- Função de **complexidade de espaço:**
  - *f(n)* mede a **memória** necessária para executar um algoritmo em um problema de tamanho n

Função de Complexidade

- Em geral, ao longo do curso, f(n) será uma função de **complexidade de tempo**
  - Ela não representa tempo diretamente
  - Ela representa o **número de vezes** que determinada operação considerada relevante é executada

Custo para encontrar o maior elemento de um vetor

- Problema: Encontrar o maior elemento de um vetor de inteiros A[n]; n ≥ 1.

```
int Max(int *A, int n){
    int i, temp;

   temp = A[0];
   for (i = 1; i < n; i++)
      if (temp < A[i])
         temp = A[i];
    return Temp;
}
```

Custo para encontrar o maior elemento de um vetor

- Seja *f* uma função de complexidade tal que *f(n)* é o número de comparações entre os elementos de A.
- Qual a função f(n)?

```
int Max(int *A, int n) {
    int i, temp;

    temp = A[0];
    for (i = 1; i < n; i++)
      if (temp < A[i])
        temp = A[i];
     return Temp;
}
```

Custo para encontrar o maior elemento de um vetor

- Qual a função f(n)?
  - O loop é executado de 1 até n-1, ou seja, são realizadas n-1 iterações e em todas as iterações é feito uma comparação
  - Logo, **f(n) = n-1**

Custo para encontrar o maior elemento de um vetor

- **Teorema**: Qualquer algoritmo para encontrar o maior elemento de um conjunto com n elementos, $n \geq 1$, faz pelo menos n -1 comparações.

Custo para encontrar o maior elemento de um vetor

- **Prova**: O que determina que um elemento é o maior de uma lista qualquer? É todos os outros elementos serem menor do que ele. Cada um dos n - 1 elementos deve ser testado, por meio de comparações, se é menor do que algum outro elemento.

  - Logo, **n-1** comparações são necessárias

Custo para encontrar o maior elemento de um vetor

- O teorema nos diz que, se o número de comparações for utilizado como medida de custo, então a função Max do programa anterior é **ótima**.

Tamanho da Entrada de Dados

- A medida do custo de execução de um algoritmo depende principalmente do tamanho da entrada dos dados.

- Para alguns algoritmos, o custo de execução depende também da organização dos dados, não apenas do tamanho da entrada.

Tamanho da Entrada de Dados

- No caso da função Max do programa do exemplo, o custo é uniforme sobre todos os problemas de tamanho n.
- Para um algoritmo de ordenação isso pode não ocorrer
  - se os dados de entrada já estiverem quase ordenados, então o algoritmo pode ter que trabalhar menos.

Registros de um Arquivo

- Considere o problema de acessar os **registros** de um arquivo.
  - Cada registro contém uma **chave** única que é utilizada para recuperar registros do arquivo.

- Como, dada uma chave qualquer, localizar o registro que contenha esta chave?
  - O algoritmo de pesquisa mais simples é o que faz a **pesquisa sequencial**.

Registros de um Arquivo

- Pesquisa sequencial

```
// retorna a posição do registro ou
// n se a chave não estiver presente

int Pesquisa(TipoRegistro *A, int n, int chave) {
    int i;

    i = 0;
    while(i < n) {
        if (A[i].chave == chave) {
            break;
        }
        i++;
    }
    return i;
}
```

Seja *f* uma função de complexidade tal que *f(n)* é o número de comparações de chaves. Determine f(n).

Melhor e pior caso

- **Melhor caso**: menor tempo de execução sobre todas as entradas de tamanho n.

- **Pior caso**: maior tempo de execução sobre todas as entradas de tamanho n.
  - Se f é uma função de complexidade baseada na análise de pior caso, o custo de aplicar o algoritmo nunca é maior do que f(n).

Caso médio

- **Caso médio** (ou caso esperado): média dos tempos de execução de todas as entradas de tamanho n.
  - Na análise do caso médio esperado, supõe-se uma **distribuição de probabilidades** sobre o conjunto de entradas de tamanho n e o custo médio é obtido com base nessa distribuição.

Caso médio

- A análise do caso médio é geralmente muito mais difícil de obter do que as análises do melhor e do pior caso.

- É comum supor uma distribuição de probabilidades em que todas as entradas possíveis são igualmente prováveis.
  - Na prática isso nem sempre é verdade.

Registros de um Arquivo

- Pesquisa sequencial

```
// retorna a posição do registro ou
// n se a chave não estiver presente

int Pesquisa(TipoRegistro *A, int n, int chave) {
    int i;

    i = 0;
    while(i < n) {
        if (A[i].chave == chave) {
            break;
        }
        i++;
    }
    return i;
}
```

Qual seria o melhor caso?

A[0]. chave == chave →Verdadeiro

Registros de um Arquivo

- Seja f uma função de complexidade tal que *f(n)* é o número de registros consultados no arquivo (número de vezes que a chave de consulta é comparada com a chave de cada registro).
- **Melhor caso**:
  - Registro procurado é o primeiro consultado
  - $f(n) = 1$

Registros de um Arquivo

- Pesquisa sequencial

```
// retorna a posição do registro ou
// n se a chave não estiver presente

int Pesquisa(TipoRegistro *A, int n, int chave) {
    int i;

    i = 0;
    while(i < n) {
        if (A[i].chave == chave) {
            break;
        }
        i++;
    }
    return i;
}
```

Qual seria o pior caso?

A[n-1]. chave == chave →Verdadeiro

OU

chave ∉ A

Registros de um Arquivo

- **Pior caso**:
  - Registro procurado é o último consultado ou não está presente no arquivo;
  - $f(n) = n$

Registros de um Arquivo

- **Caso médio:**
  - No estudo do caso médio, vamos considerar que toda pesquisa recupera um registro.
  - Se p_i for a probabilidade de que o i-ésimo registro seja procurado, e considerando que para recuperar o i-ésimo registro são necessárias *i* comparações, então:

$$f(n) = 1 * p_1 + 2 * p_2 + 3 * p_3 + \ldots + n * p_n$$

Registros de um Arquivo

- **Caso médio:**
  - Para calcular f(n) temos que conhecer a distribuição de probabilidades p_i.
  - Se cada registro tiver a mesma probabilidade de ser acessado que todos os outros, então

$$p_i = 1/n,\ 1 \leq i \leq n$$

Registros de um Arquivo

- **Caso médio:**
  - Considerando que

$$p_i = 1/n, \; 1 \leq i \leq n$$

  - Temos:

$$f(n) = \frac{1}{n}\underbrace{(1+2+3+\cdots+n)}$$

Soma de uma PA finita: ***((a$_1$ + a$_n$) . n)/2***

Registros de um Arquivo

- **Caso médio**:
  - A análise do caso esperado revela que uma pesquisa com sucesso examina aproximadamente metade dos registros.
  - $f(n) = (n + 1)/2$.

Maior e Menor Elemento

- **Problema**: encontrar o maior e o menor elemento de um vetor de inteiros A[n]; $n \geq 1$.

```
void MaxMin1(int *A, int n, int *Max, int *Min){
    int i;

    *Max = A[0]; *Min = A[0];
    for (i = 1; i < n; i++) {
        if (A[i] > *Max) *Max = A[i];
        if (A[i] < *Min) *Min = A[i];
    }
}
```

Maior e Menor Elemento

- Seja *f(n)* o número de comparações entre os elementos de A, se A contiver *n* elementos.
  - Qual será o melhor, pior e caso médio?

Maior e Menor Elemento

- Qual é a função de complexidade f(n) considerando comparações?

```
void MaxMin1(int *A, int n, int *Max, int *Min){
    int i;

    *Max = A[0]; *Min = A[0];
    for (i = 1; i < n; i++) {
        if (A[i] > *Max) *Max = A[i];
        if (A[i] < *Min) *Min = A[i];
    }
}
```

2*(n-1)

Maior e Menor Elemento

- Seja *f(n)* o número de comparações entre os elementos de A, se A contiver *n* elementos.

  - Qual será o melhor, pior e caso médio?

    Todos serão f(n) = 2*(n-1)

Maior e Menor Elemento

- Como podemos diminuir a complexidade do algoritmo?

- A comparação A[i] < Min só é necessária quando a comparação A[i] > Max dá falso.

Maior e Menor Elemento

- Novo MaxMin

```
void MaxMin2(int *A, int n, int *Max, int *Min){
    int i;

    *Max = A[0]; *Min = A[0];
    for (i = 1; i < n; i++) {
        if (A[i] > *Max) *Max = A[i];
        else if (A[i] < *Min) *Min = A[i];
    }
}
```

Maior e Menor Elemento

- Quais são as funções de complexidade para o melhor, pior e caso médio?

Maior e Menor Elemento

- **Melhor caso**:
  - Quando os elementos estão em ordem crescente
  - **f(n) = n – 1**

```
void MaxMin2(int *A, int n, int *Max, int *Min){
    int i;

    *Max = A[0]; *Min = A[0];
    for (i = 1; i < n; i++) {
        if (A[i] > *Max) *Max = A[i]; (n-1)
        else if (A[i] < *Min) *Min = A[i];
    }
}
```

Maior e Menor Elemento

- **Pior caso**:
  - Quando o maior elemento é o primeiro elemento do vetor
  - **$f(n) = 2*(n - 1)$**

```
void MaxMin2(int *A, int n, int *Max, int *Min){
    int i;
    *Max = A[0]; *Min = A[0];
    for (i = 1; i < n; i++) {
        if (A[i] > *Max) *Max = A[i];           (n-1)
        else if (A[i] < *Min) *Min = A[i];      (n-1)
    }
}
```

Maior e Menor Elemento

- **Caso médio**:
  - No caso médio, **considerando que A[i] é maior do que Max a metade das vezes**
  - **f(n) = (n – 1) + (n-1)/2 = 3n/2 – 3/2**

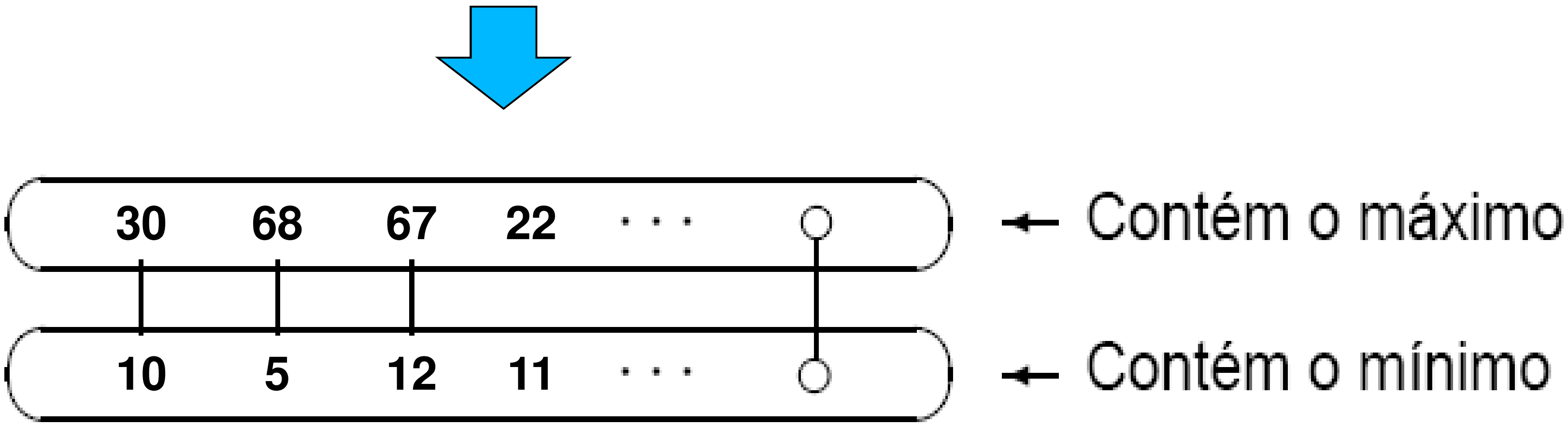
```
void MaxMin2(int *A, int n, int *Max, int *Min){
   int i;
   *Max = A[0]; *Min = A[0];
   for (i = 1; i < n; i++) {
      if (A[i] > *Max) *Max = A[i];                (n-1)
      else if (A[i] < *Min) *Min = A[i];           (n-1)/2
   }
}
```

Maior e Menor Elemento

- É possível diminuir ainda mais a complexidade?

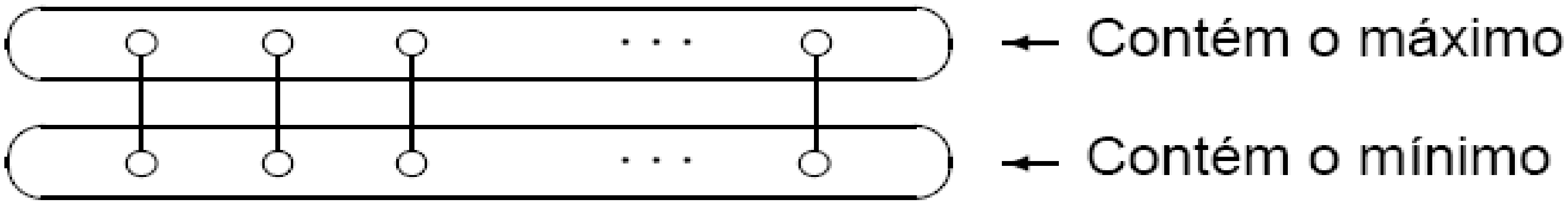
Maior e Menor Elemento

10	30	5	68	12	67	22	11	. . .



Maior e Menor Elemento

- Considerando o número de comparações realizadas, existe a possibilidade de obter um algoritmo mais eficiente:
  1. Compare os elementos de A aos pares, separando-os em dois subconjuntos (maiores em um e menores em outro), a um custo de $\lceil n/2 \rceil$ comparações.
  2. O máximo é obtido do subconjunto que contém os maiores elementos, a um custo de $\lceil n/2 \rceil -1$ comparações
  3. O mínimo é obtido do subconjunto que contém os menores elementos, a um custo de $\lceil n/2 \rceil -1$ comparações



Qual a função de complexidade para este novo algoritmo?

- Os elementos de A são comparados dois a dois. Os elementos maiores são comparados com *Max* e os elementos menores são comparados com *Min*.
- Quando n é ímpar, o elemento que está na posição A[n-1] é duplicado na posição A[n] para evitar um tratamento de exceção.
- Para esta implementação:

$$f(n) = \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} + \frac{n-2}{2} = \frac{3n}{2} - 2,$$

no pior caso, melhor caso e caso médio

Exemplo: Maior e Menor Elemento

```
void MaxMin3(int n, Vetor A, int *Max, int *Min) {
   int i, FimDoAnel;

   if ((n % 2) > 0) {
      A[n] = A[n - 1];
      FimDoAnel = n;
   }
   else FimDoAnel = n - 1;

   if (A[0] > A[1]) {
      *Max = A[0]; *Min = A[1];
   }
   else {
      *Max = A[1]; *Min = A[0];
   }
   i = 3;
   while (i <= FimDoAnel) {
      if (A[i - 1] > A[i]) {
         if (A[i - 1] > *Max) *Max = A[i - 1];
         if (A[i] < *Min) *Min = A[i];
      }
      else {
         if (A[i - 1] < *Min) *Min = A[i - 1];
         if (A[i] > *Max) *Max = A[i];
      }
      i += 2;
   }
}
```

Exemplo: Maior e Menor Elemento

```
void MaxMin3(int n, Vetor A, int *Max, int *Min) {
   int i, FimDoAnel;

   if ((n % 2) > 0) {
      A[n] = A[n - 1];
      FimDoAnel = n;
   }
   else FimDoAnel = n - 1;

   if (A[0] > A[1]) {                    → Comparação 1    1
      *Max = A[0]; *Min = A[1];
   }
   else {
      *Max = A[1]; *Min = A[0];
   }
   i = 3;
   while (i <= FimDoAnel) {
      if (A[i - 1] > A[i]) {             → Comparação 2  (n/2) - 1
         if (A[i - 1] > *Max) *Max = A[i - 1];   → Comparação 3
         if (A[i] < *Min) *Min = A[i];           → Comparação 4
      }
      else {
         if (A[i - 1] < *Min) *Min = A[i - 1];   → Comparação 3
         if (A[i] > *Max) *Max = A[i];           → Comparação 4
      }
      i += 2;
   }
}
```

10	30	5	68	12	67	...

(n/2) - 1
(n/2) - 1

Qual a função de complexidade para MaxMin3?

- Quantas comparações são feitas em MaxMin3?

Qual a função de complexidade para MaxMin3?

- Quantas comparações são feitas em MaxMin3?
  - 1ª. comparação feita 1 vez
  - 2ª. comparação feita n/2 - 1 vezes
  - 3ª. e 4ª. comparações feitas n/2 – 1 vezes

$$f(n) = 1 + n/2 - 1 + 2 * (n/2 - 1)$$

$$f(n) = (3n - 6)/2 + 1$$

$$f(n) = 3n/2 - 3 + 1 = 3n/2 - 2$$

Comparação entre os Algoritmos

- Comparação entre os algoritmos dos programas MaxMin1, MaxMin2 e MaxMin3, considerando o número de comparações como medida de complexidade.

Os três algoritmos	$f(n)$		
	Melhor caso	Pior caso	Caso médio
MaxMin1	$2(n-1)$	$2(n-1)$	$2(n-1)$

Comparação entre os Algoritmos

- Os algoritmos MaxMin2 e MaxMin3 são superiores ao algoritmo MaxMin1
- O algoritmo MaxMin3 é superior ao algoritmo MaxMin2 com relação ao pior caso e bastante próximo quanto ao caso médio.
- Existe possibilidade de obter um algoritmo MaxMin mais eficiente?
  - Qual é o **limite inferior** para essa classe de algoritmos?

Limite Inferior

- Existe possibilidade de obter um algoritmo MaxMin mais eficiente?
- Para responder temos de conhecer o **limite inferior** para essa classe de algoritmos.
  - Como? Uso de um oráculo.

Limite Inferior

- Dado um modelo de computação que expresse o comportamento do algoritmo, o oráculo informa o resultado de cada passo possível
- O oráculo procura sempre fazer com que o algoritmo trabalhe o máximo, escolhendo como resultado da próxima comparação aquele que cause o maior trabalho possível necessário para determinar a resposta final.

Exemplo de Uso de um Oráculo

- **Teorema:** Qualquer algoritmo para encontrar o maior e o menor elemento de um conjunto com n elementos não ordenados, n>1, faz pelo menos $3n/2 - 2$ comparações.

Exemplo de Uso de um Oráculo

- **Prova:** A técnica utilizada define um oráculo que descreve o comportamento do algoritmo utilizando:
  - um conjunto de n–tuplas (**estados**)
  - um conjunto de ***regras*** associadas que mostram as tuplas possíveis (***estados***) que um algoritmo pode assumir a partir de uma dada tupla e uma única comparação.

Exemplo de Uso de um Oráculo

- Vamos utilizar uma 4–tupla, representada por **(a; b; c; d)**, onde os elementos de:
  - a: número de elementos **nunca comparados**;
  - b: **foram vencedores e nunca perderam** em comparações realizadas (máximo);
  - c: **foram perdedores e nunca venceram** em comparações realizadas (mínimo);
  - d: **foram vencedores e perdedores** em comparações realizadas (elementos intermediários).

Exemplo de Uso de um Oráculo

- O algoritmo inicia no estado
  - **(n, 0, 0, 0):** nenhum dos n itens foram comparados

- E termina em
  - **(0, 1, 1, n - 2)**: um máximo, um mínimo, e todos os outros n-2 itens foram comparados

Exemplo de Uso de um Oráculo

- **Após cada comparação, (a; b; c; d) assume um dentre os 6 estados possíveis abaixo:**
  - **2 elementos de a são comparados**
    - **(a - 2, b + 1, c + 1, d)**
  - **1 elemento de a comparado com 1 de b ou 1 de c (se a ≥ 1)**
    - **(a - 1, b + 1, c, d) ou**
    - **(a - 1, b, c + 1, d) ou**
    - **(a - 1, b, c, d + 1)**
  - **2 elementos de b são comparados (se b ≥ 2)**
    - **(a, b - 1, c, d + 1)**
  - **2 elementos de c são comparados (se c ≥ 2)**
    - **(a, b, c - 1, d + 1)**

Exemplo de Uso de um Oráculo

(a, b, c, d)

(n, 0, 0, 0)

(0, 1, 1, n-2)

Exemplo de Uso de um Oráculo

(a, b, c, d)

(n, 0, 0, 0)

$\downarrow$ **comparação de 2 a 2 elementos de a (caminho mais rápido para zerar a).**

(0, n/2, n/2, 0)

(0, 1, 1, n-2)

Exemplo de Uso de um Oráculo

(a, b, c, d)

(n, 0, 0, 0)

$\downarrow$ comparação de 2 a 2 elementos de a (caminho mais rápido para zerar a).

(0, n/2, n/2, 0)

$\downarrow$ **comparação de elementos em b para encontrar o máximo**

(0, 1, n/2, n/2-1)

(0, 1, 1, n-2)

Exemplo de Uso de um Oráculo

(a, b, c, d)

(n, 0, 0, 0)

↓ comparação de 2 a 2 elementos de a (caminho mais rápido para zerar a).

(0, n/2, n/2, 0)

↓ comparação de elementos em b para encontrar o máximo

(0, 1, n/2, n/2-1)

↓ **comparação de elementos em c para encontrar o mínimo**

(0, 1, 1, n-2)

Exemplo de Uso de um Oráculo

(a, b, c, d)

(n, 0, 0, 0)

comparação de 2 a 2 elementos de a (caminho mais rápido para zerar a). — **n/2**

(0, n/2, n/2, 0)

comparação de elementos em b para encontrar o máximo — **n/2 - 1**

(0, 1, n/2, n/2-1)

comparação de elementos em c para encontrar o mínimo — **n/2 - 1**

(0, 1, 1, n-2)

Exemplo de Uso de um Oráculo

- O passo 1 requer necessariamente a manipulação do componente **a**.
  - O caminho mais rápido para levar **a** até zero requer n/2 mudanças de estado e termina com a tupla (0, n/2, n/2, 0) (por meio de comparação dos elementos de **a** dois a dois).

Exemplo de Uso de um Oráculo

- A seguir, para reduzir o componente **b** até um são necessárias n/2 - 1 e mudanças de estado (mínimo de comparações necessárias para obter o maior elemento de b).
- Idem para c, com n/2 - 1 mudanças de estado.

Exemplo de Uso de um Oráculo

- Para obter o estado (0, 1, 1, n - 2) a partir do estado (n, 0, 0, 0) são necessárias:
  - $n/2 + n/2 - 1 + n/2 - 1$ comparações.

Logo, $f(n) = 3n/2 – 2$.

Exemplo de Uso de um Oráculo

- Voltando aos algoritmos anteriores (note que a função de complexidade f(n) = 3n/2 – 2 não foi obtido analisando um **algoritmo**).
  - Qual é a informação que o teorema nos traz?
    - O algoritmo MaxMin3 é **ótimo**.

Os três algoritmos	$f(n)$		
	Melhor caso	Pior caso	Caso médio
MaxMin1	$2(n-1)$	$2(n-1)$	$2(n-1)$
MaxMin2	$n-1$	$2(n-1)$	$3n/2-3/2$
MaxMin3	$3n/2-2$	$3n/2-2$	$3n/2-2$

Referências

- Ziviani, N., **Projeto de Algoritmos com Implementações em Pascal e C**, 3ª Edição, Cengage Learning, 2011.
  - Capítulo 1 (até seção 1.3.1)

- Cormen , T., Leiserson, C, Rivest R., Stein, C. Algoritmos – Teoria e Prática, 3a. Edição, Elsevier, 2012.
  - Seção 2.2