Pesquisa Operacional - ELE082

Prof. Eduardo Gontijo Carrano

Nome: Antonio Carlos do Amaral 2018019443

Questão 1 ....0%

A Viação Aérea Brasileira está estudando a compra de três tipos de aviões: Boeing 717 para as pontes aéreas de curta distância, Boeing 737-500 para vôos domésticos e internacionais de média distância e MD-11 para vôos internacionais de longa distância. Em um estudo preliminar, considerou-se que a capacidade máxima dos aviões a serem comprados será sempre preenchida para efeito de planejamento. Os dados de planejamento constam na Tabela 1.

Tabela 1: Dados operacionais dos aviões

Tipo de aviões	Custo ($\times 10^6$ US$)	Receita ($\times 10^6$ US$)	Pilotos aptos
Boeing 717	5,1	330	30
Boeing 737-500	3,6	300	20
MD-11	6,8	420	10

A verba disponível para as compras é de US$ 220 milhões. Os pilotos de MD-11 podem pilotar todos os aviões da empresa, mas os demais pilotos só podem ser escalados às aeronaves a que foram habilitados. Cada aeronave necessita de dois pilotos para operar. As oficinas de manutenção têm capacidade equivalente à 40 Boeings 717. Em termos de esforço de manutenção, um Boeing 737-500 equivale a 3/4 de um Boeing 717 e um MD-11 equivale a 5/3 de um Boeing 717.

Escreva um modelo de programação linear inteira que maximiza o lucro obtido com os aviões adquiridos.

Resolva o problema resultante computacionalmente (Excel, OpenOffice, Matlab, Gurobi ou CPLEX).

Modelo:

$L(x) = \text{Receita} - \text{Custos} \Rightarrow L(x) = 324.9x_1 + 296.4x_2 + 413.2x_3$

Restrições:
$$\begin{cases} x_1 \geq 15 \\ x_2 \geq 10 \\ x_3 \geq 0 \\ 5.1x_1 + 3.6x_2 + 6.8x_3 \leq 220 \\ x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{5}x_3 \leq 40 \\ x_1 \leq 20 \\ x_2 \leq 15 \\ x_3 \leq 5 \end{cases}$$

Solução no Omeo, cplex-python

B717 = 20

→ B737 = 15 $\quad L = 13.01 \times 10^9$ US$

MD11 = 5

Questão 2 ....0%

Uma indústria produz 2 produtos, I e II, sendo que cada produto consome um certo número de horas em 3 máquinas, A, B e C, conforme a Tabela 2.

Tabela 2: Consumo de horas máquina por produto

Produto	Tempo de máquina A	Tempo de máquina B	Tempo de máquina C
I	2 horas	1 horas	4 horas
II	2 horas	2 horas	2 horas

O tempo máximo de funcionamento semanal da máquina A é 160 horas, da máquina B é 120 horas e da máquina C é 280 horas. O lucro obtido por cada unidade do produto I é de R$ 1,00 e do produto II é R$ 1,50.

Escreva um modelo de otimização linear inteira que maximize o lucro obtido por esta empresa.

Resolva o problema resultante computacionalmente (Excel, OpenOffice, Matlab, Gurobi ou CPLEX).

x_1: quantidade produto 1

x_2: quantidade produto 2

$L(x) \rightarrow$ função objetiva

$\rightarrow$ Problema: $\max L(x) = 1 \times x_1 + 1.5 \times x_2$

$\rightarrow$ Restrições
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 280 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solução cplex-python no anexo

$\rightarrow \max L(40,40) = 100$

Questão 3 .... 0%

Um agricultor está planejando a estratégia de plantio de sua terra para o próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, ele sabe que as culturas de trigo, arroz e milho serão as mais rentáveis na próxima safra. Por experiência, ele sabe que a produtividade de sua terra para estas culturas é a constante na Tabela 3.

Tabela 3: Dados de plantio

Cultura	Produtividade (em kg por m^2)	Lucro (por kg de produção)
Trigo	0,2	10,80 centavos
Arroz	0,3	04,20 centavos
Milho	0,4	02,03 centavos

Por falta de um local de armazenamento próprio, a produção máxima está limitada a 60 toneladas. A área cultivável do sítio é de 200.000 m^2. Para atender às demandas de seu próprio sítio, é imperativo que se plante ao menos 400 m^2 de trigo, 800 m^2 de arroz e 10.000 m^2 de milho.

Escreva um modelo de programação linear que tem por objetivo maximizar o lucro do agricultor.

Resolva o problema modelado utilizando o Algoritmo Simplex.

$t, a, m \rightarrow$ trigo, arroz e milho respectivamente [Kg]

função objetivo $L(t,a,m) = 10.8t + 4.20a + 2.03m$

achar: $\max L = 10.8t + 4.20a + 2.03m$

Restrições
$$\begin{cases} t/0.2 + a/0.3 + m/0.4 \leq 200000 \\ t + a + m \leq 60000 \\ t/0.2 \geq 400 \\ a/0.3 \geq 800 \\ m/0.4 \geq 10000 \end{cases}$$

Solução utilizando tabela-simplex no anexo (arquivo excel)

$\max[L(t,a,m)] = 417800$

$[t \quad a \quad m] = [37840 \quad 240 \quad 4000]$

Questão 4 .... 0%

Utilizando a versão adequada do método Simplex, resolva o problema de programação linear abaixo:

$$\max \quad 0,5x_1 + 2x_2 \tag{1}$$

$$\text{sujeito a:} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1 \leq 20 \\ x_2 \leq 45 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Forma padrão:

$$z - 0{,}5x_1 - 2x_2 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + F_1 = 50$$
$$x_1 + F_2 = 20$$
$$x_2 + F_3 = 45$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 20 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$x_1, x_2, F_i \geq 0$

Solução Simplex cplex python.

* notebook no anexo *

→ $z(x_1, x_2) = 91{,}250$

→ $(x_1, x_2) = (2.5, 45.0)$

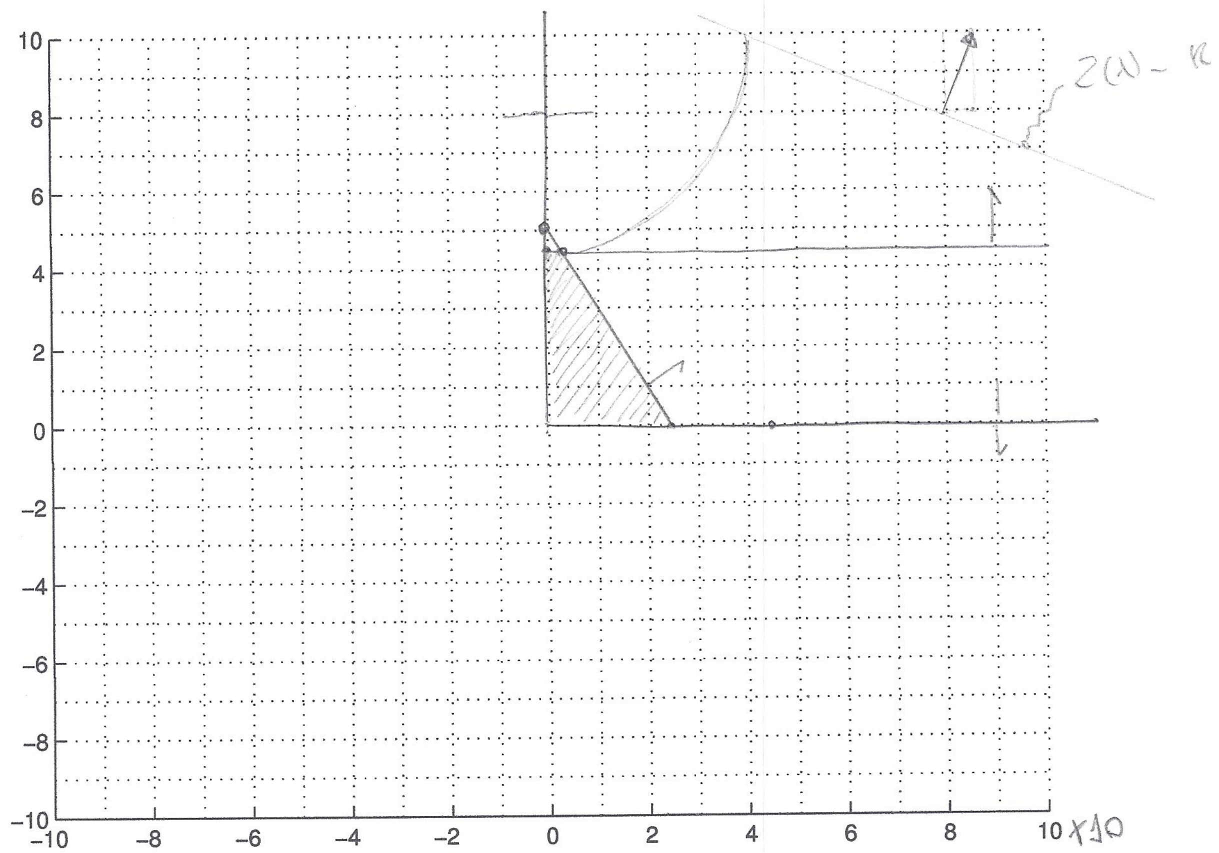
Questão 5 ....0%

Para o problema da questão 4:

(a) Resolva este problema graficamente.

(b) Encontre a solução ótima dual correspondente utilizando Teorema das Folgas Complementares.

(c) Determine o intervalo de relaxação da primeira restrição que garante a manutenção da base ótima.



a) $2x_1 + 45 \leq 50$ $\quad [x_1, x_2] = [2.5, 45]$

$x_1 \leq 5/2$

$x_1 \leq 2.5$

b) Formulação do Problema Dual.

$\min\ 50\lambda_1 + 20\lambda_2 + 45\lambda_3$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 1\lambda_2 + 0\lambda_3 \geq 0.5 \\ 1\lambda_1 + 0\lambda_2 + 1\lambda_3 \geq 2 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

$[\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3] = [0\ \ 0\ \ 2]$

$\min g(\lambda) = 90$

Questão 6 .... 0%

Utilizando a versão adequada do método Simplex, resolva o problema de programação linear abaixo:

$$\min \quad 4x_1 + x_2 \tag{3}$$

$$\text{sujeito a:} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Forma Padrão:

$\min f(x) = -\max(-f(x)) \rightarrow -f(x) = -4x_1 - x_2$

$$\begin{cases} -Z + 4x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + F_1 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + F_2 = 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Z	x_1	x_2	F_1	F_2	b
-1	4	1	0	0	0
0	3	1	0	0	3
0	4	3	-1	0	6
0	1	2	0	1	4

→

Z	x_1	x_2	F_1	F_2	b
-1	0	-1/3	0	0	-4
0	1	1/3	0	0	1
0	0	5/3	-1	0	2
0	0	5/3	0	1	3

P

↓

Z	x_1	x_2	F_1	F_2	b
-1	0	0	-1/5	0	-18/5
0	1	0	1/5	0	3/5
0	0	1	-3/5	0	6/5

$[Z, (x_1, x_2)] = [3.6, (0.6, 1.2)] \leftarrow$

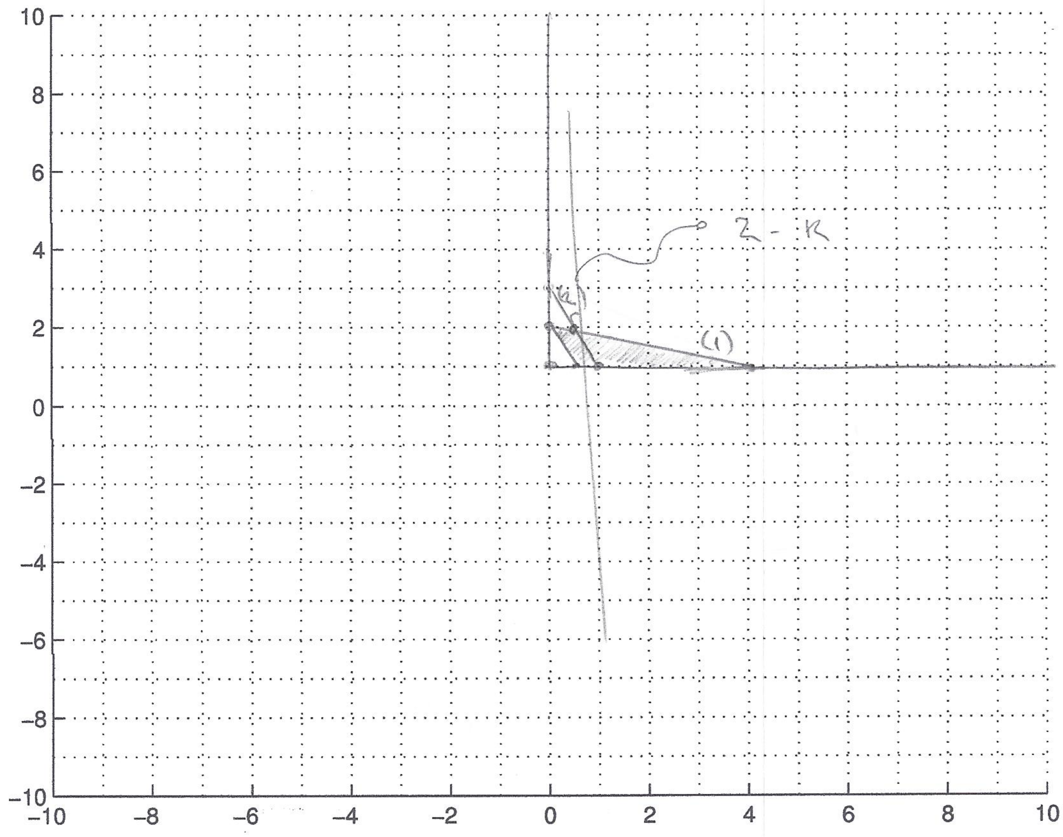
Questão 7 .... 0%

Para o problema da questão 6:

(a) Resolva este problema graficamente.

(b) Encontre a solução ótima dual correspondente utilizando Teorema das Folgas Complementares.

(c) Determine o intervalo de relaxação da terceira restrição que garante a manutenção da base ótima.



a)

$S = (1) \cap (2)$

$3x_1 + x_2 = 3 \quad (-2)$

$x_1 + 2x_2 = 4$

$-5x_1 = -2$

$x_1 = 2/5 \Rightarrow x_1 = 0.4$

$0.4 + 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 1.8$

$\min f(x_1, x_2) = 4 \cdot 0.4 + 1.8$

$\min f(x_1, x_2) = 3.4$

Questão 8 .... 0%

Para o seguinte problema de programação linear:

$$\min f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & \geq & 2 \\ x_1 & +x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

*Forma Padrão

$Z - 4X_1 - X_2 = 0$

$-X_1 + X_2 - F_1 = 2$

$X_1 + X_2 + F_2 = 8$

$X_1, X_2 \geq 0$

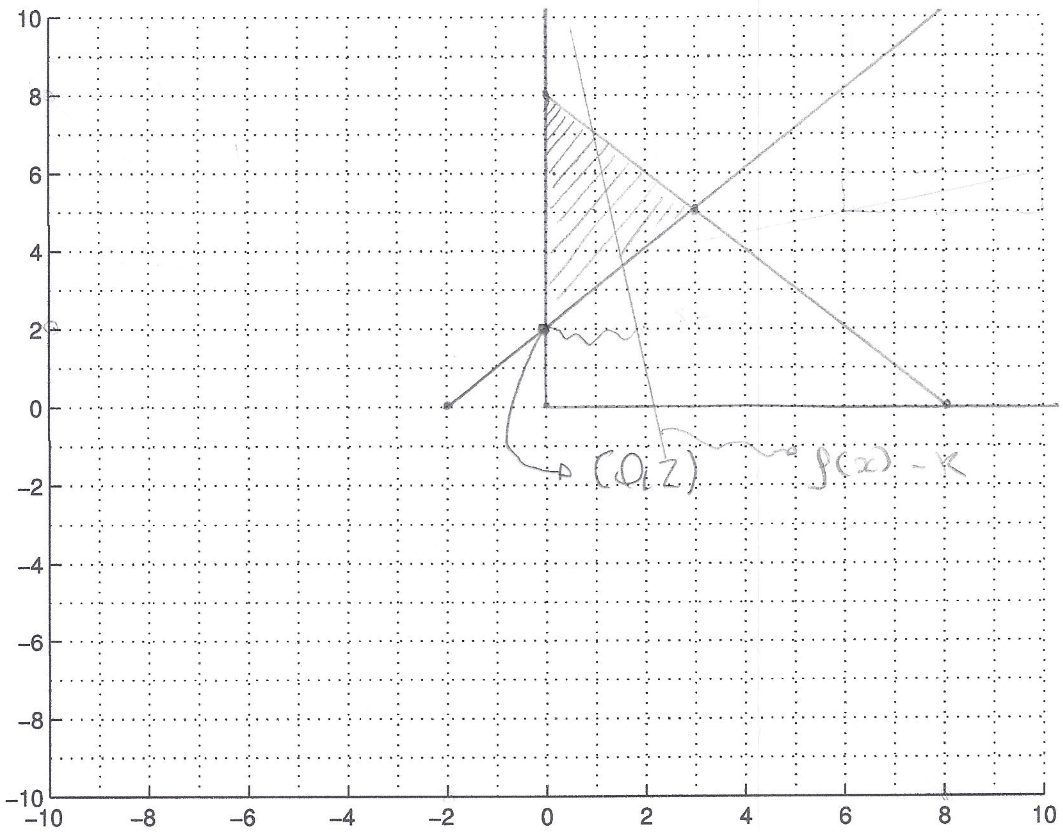
(a) Resolva este problema graficamente.

(b) Represente este problema na forma padrão. [(0,2), 2]

(c) Quais os vértices presentes na região factível deste problema (soluções encontráveis pelo Simplex)? Encontre as bases associadas a estes vértices. (0,8), (0,2), (3,5)

(d) Encontre o dual deste problema e a solução ótima dual correspondente utilizando as folgas complementares.

(e) Suponha que seja construído um problema modificado onde a segunda restrição seja relaxada na forma $x_1 + x_2 \leq 8 + \delta$. Encontre os valores mínimo e máximo de δ que garantem que a base da solução ótima para este problema modificado seja a mesma da solução ótima para o problema original.



Questão 9 .... 0%

Para o seguinte problema de programação linear:

$$\max f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \; , \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma Padrão

$Z - 5x_1 - 4x_2 = 0$

$6x_1 + 4x_2 + F_1 = 24$

$x_1 + 2x_2 + F_2 = 6$

$-x_1 + x_2 + F_3 = F$

$x_2 + F_4 = 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

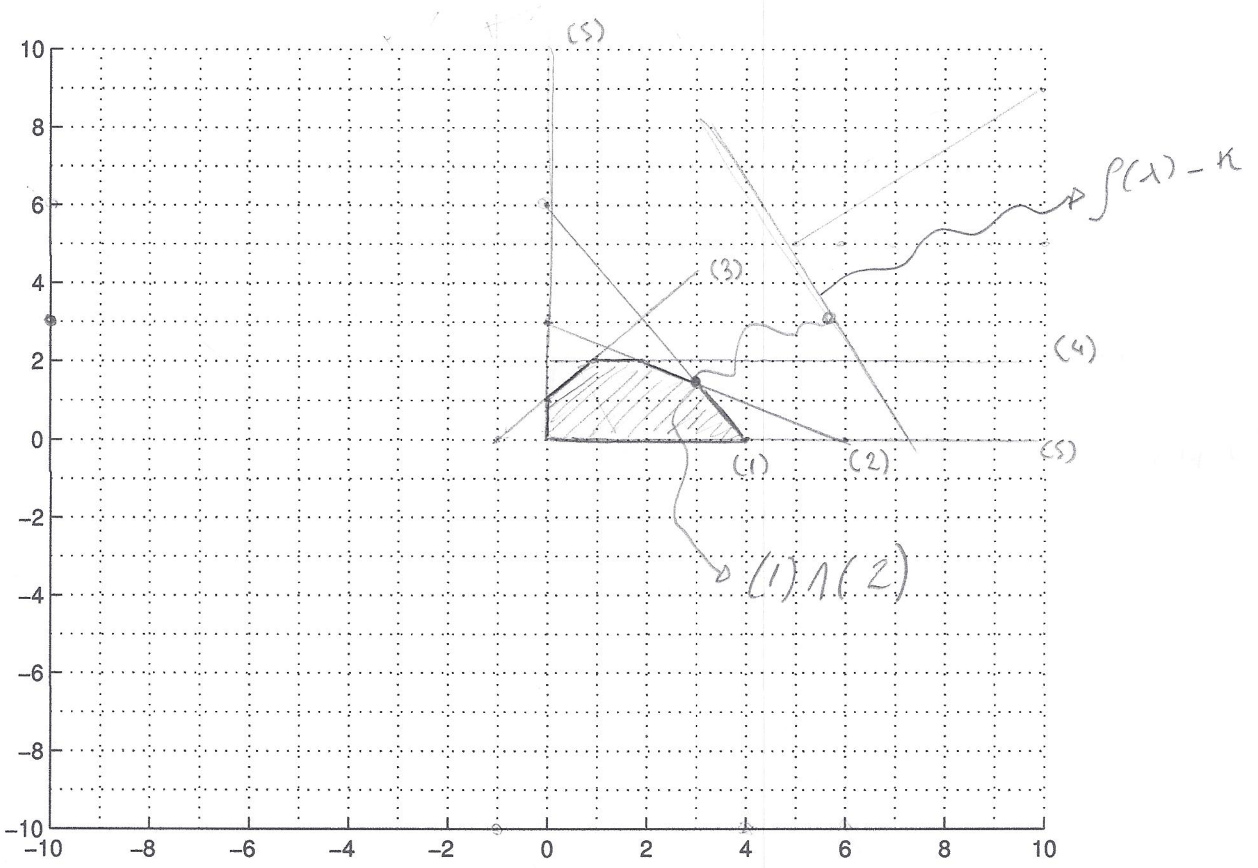
(a) Resolva este problema graficamente. [21, (3, 3/2)]

(b) Represente este problema na forma padrão.

(c) Quais os vértices factíveis para este problema? Encontre as bases associadas a estes vértices.

(d) Encontre o dual deste problema e a solução ótima dual correspondente.

(e) Suponha que seja construído um problema modificado onde a segunda restrição seja relaxada na forma $x_1 + 2x_2 \leq 6 + \delta$. Encontre os valores mínimo e máximo de δ que garantem que a base da solução ótima para este problema modificado seja a mesma da solução ótima para o problema original.



c) vértices factíveis, (0,0); (0,1); (4,0); (1,2)
(3, 3/2); (2,2)

Questão 10 .... 0%

A respeito das relações entre o Problema Primal e o Problema Dual, responda:

(a) Supondo que o Problema Dual seja factível e sua solução seja ilimitada, o que se pode afirmar sobre o Problema Primal?

(b) Supondo que o Problema Primal seja factível e tenha solução finita, o que se pode afirmar sobre o Problema Dual?

a) Significa que existe uma região de folga para a solução primal.

b) Podemos através da solução do problema dual verificar se de fato a solução do problema primal é a solução ótima