Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Computo

Ejercicio 08
"Recurrencias Lineales"

Mora Ayala José Antonio

Análisis de Algoritmos

INSTRUCCIONES

Para los siguientes 4 modelos recurrentes determine su modelo equivalente sin recurrencia mediante el método de sustitución.

*Incluir portada con los de datos del alumno, datos del trabajo y fotografía del alumno

*Recordar manejar encabezados y pies de página.

TABLA DE CONTENIDO

Ejercicio 1 3
Ejercicio 2 9
Ejercicio 3 11
Ejercicio 4 15
Procedimientos a mano 19

EJERCICIO 1

$$\mathrm{T}(n) = 4\mathrm{T}\,(n-2) - \mathrm{T}(n-1) + \mathrm{T}\,(n-3) - 3\mathrm{T}\,(n-4)$$

$$\text{con } \mathrm{T}(n) = 1 \text{ para}$$

$$\text{toda n} \leq 4$$

Como podemos observar en el procedimiento, para la resolución de este ejercicio nos proporcionan la información de que T(n)=1 y que cumple para toda la condición de n<=4, así que procedemos a realizar un acomode de los términos que tenemos inicialmente en la ecuación, colocando todos aquellos elementos involucrados con una n del lado izquierdo y en el derecho simplemente dejamos aquellos que tengan constante.

Podemos tener dos caminos, encontrarnos con la situación de tener una ecuación homogénea o que esta no se presente, como sabemos depende de que tipo sea el proceder para encontrar las constantes será diferente, así como sus respectivas raíces.

Esta ecuación que se nos presenta es de tipo **homogéneo** debido a que la igualdad queda en 0 desde un inicio y tenemos todas las n del lado izquierdo, así que el grado estará determinado por el mínimo valor de K (obsérvese que tratamos con números negativos, por lo cual el mínimo número puede verse como el mayor), en este caso es 3, por lo cual iremos disminuyendo este conforme aparezca la resta en cada una de las n y estas serán sustituidas por x, así, la ecuación queda de la siguiente forma $x^4 + x^3 - 4x^2 - \mathrm{x} + 3 = 0$

Para la solución de este sistema:

- Primero podemos realizar una factorización de la ecuación en general
- Posteriormente observamos que mediante la factorización obtenemos una termino que ya no puede factorizarse mediante una de las formas sencillas, por lo que hacemos uso de la formula general o la también conocida como "chicharronera", teniendo como resultado las raíces:

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = -1$$

$$r_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$r_4 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

Como podemos observar nos encontramos con raíces distintas (todas son de un valor diferente, aunque a primera vista parecen iguales, debemos tener cuidado con este aspecto para no realizar una confusión y llegar a un error), teniendo como ecuación T(n) el siguiente resultado

$$\mathrm{T}(n) = C_1(1^n) + C_2(-1)^n + C_3\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + C_4\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

Ahora procedemos a realizar la búsqueda de solución al sistema de ecuación que debemos encontrar para el valor de las constantes, y sabiendo que:

$$\mathrm{T}(0) = 1 \text{ para toda n} \leq 4$$

Podemos obtener las siguientes ecuaciones

$$\mathrm{T}(1) = 1$$

$$\mathrm{T}(2) = 1$$

$$\mathrm{T}(3) = 1$$

Ya que tenemos nuestras 4 funciones sustituimos en nuestra ecuación obtenida

Usando $T(0) = 1$

$$T(0) = C_1 + C_2(-1)^0 + C_3(1.3)^0 + C_4(-2.3)^0 = 1$$
$$T(0) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1$$

Usando $T(1) = 1$

$$T(1) = C_1 + C_2(-1)^1 + C_3(1.3)^1 + C_4(-2.3)^1 = 1$$
$$T(1) = C_1 - C_2 + 1.3C_3 - 2.3C_4 = 1$$

Usando $T(2) = 1$

$$T(2) = C_1 + C_2(-1)^2 + C_3(1.3)^2 + C_4(-2.3)^2 = 1$$
$$T(2) = C_1 + C_2 + 1.69C_3 + 5.29C_4 = 1$$

Usando $T(3) = 1$

$$T(3) = C_1 + C_2(-1)^3 + C_3(1.3)^3 + C_4(-2.3)^3 = 1$$
$$T(3) = C_1 - C_2 + 2.197C_3 - 12.167C_4 = 1$$

Ya que tenemos nuestro sistema de ecuaciones procedemos a obtener los valores de las constantes con el método de sustitución

$T(0) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1$

$T(1) = C_1 - C_2 + 1.3C_3 - 2.3C_4 = 1$
$T(2) = C_1 + C_2 + 1.69C_3 + 5.29C_4 = 1$
$T(3) = C_1 - C_2 + 2.197C_3 - 12.167C_4 = 1$

Obtenemos C_4 de $T(0)$

$C_4 = 1 - C_1 - C_2 - C_3$

Y sustituimos en las demás ecuaciones

$\mathrm{T}(1) \rightarrow C_1 - C_2 + 1.3C_3 - 2.3(1 - C_1 - C_2 - C_3) = 1$

Procedemos a multiplicar todo por una constante (10) para poder quitar los decimales del camino y poder trabajar únicamente con números enteros

$\mathrm{T}(1) \rightarrow 10C_1 - 10C_2 + 13C_3 - 23(1 - C_1 - C_2 - C_3) = 10$

$\mathrm{T}(1) \rightarrow 10C_1 - 10C_2 + 13C_3 - 23 + 23C_1 + 23C_2 + 23C_3 = 10$

$\mathrm{T}(1) \rightarrow 33C_1 + 13C_2 + 33C_3 = 33$

$\mathrm{T}(2) \rightarrow C_1 + C_2 + 1.69C_3 + 5.29(1 - C_1 - C_2 - C_3) = 1$

Multiplicamos por 100 para facilitar las operaciones

$\mathrm{T}(2) \rightarrow 100C_1 + 100C_2 + 169C_3 + 529(1 - C_1 - C_2 - C_3) = 100$

$\mathrm{T}(2) \rightarrow 100C_1 + 100C_2 + 169C_3 + 529 - 529C_1 - 529C_2 - 529C_3 = 100$

$\mathrm{T}(2) \rightarrow -429C_1 - 429C_2 - 360C_3 = -429$

$\mathrm{T}(3) = C_1 - C_2 + 2.197C_3 - 12.167(1 - C_1 - C_2 - C_3) = 1$

Multiplicamos por 100 para facilitar las operaciones

$\mathrm{T}(3) = 1000C_1 - 1000C_2 + 2197C_3 - 12167(1 - C_1 - C_2 - C_3) = 1000$

$$\mathrm{T}(3) = 1000C_1 - 1000C_2 + 2197C_3 - 12167 + 12167C_1 + 12167C_2 + 12167C_3 = 1000$$

$\mathrm{T}(3) = 13167C_1 + 11167C_2 + 14364C_3 = 13167$

Ya con las ecuaciones modificadas a nuestra conveniencia podemos recopilarlas y realizar la obtención de una de nuestras constantes para poder realizar la sustitución de esta en el resto

$$\mathrm{T}(1) \rightarrow 33C_1 + 13C_2 + 33C_3 = 33$$

$$\mathrm{T}(2) \rightarrow -429C_1 - 429C_2 - 360C_3 = -429$$

$$\mathrm{T}(3) = \ 13167C_1 + 11167C_2 + 14364C_3 = 13167$$

Obtenemos C_3 de $\mathrm{T}(1)$

$$C_3 = 1 - \frac{13}{33}C_2 - C_1$$

Sustituyendo C_3

$$\mathrm{T}(2) \rightarrow -429C_1 - 429C_2 - 360\left(1 - \frac{13}{33}C_2 - C_1\right) = -429$$

$$\mathrm{T}(2) \rightarrow -429C_1 - 429C_2 - 360 \ + \frac{4680}{33}C_2 + 360C_1 = -429$$

$$\mathrm{T}(2) \rightarrow -69C_1 \ + \frac{3159}{11}C_2 = -69$$

$$\mathrm{T}(3) = \ 13167C_1 + 11167C_2 + 14364\left(1 - \frac{13}{33}C_2 - C_1\right) = 13167$$

$$\mathrm{T}(3) = \ 13167C_1 + 11167C_2 + 14364 - \frac{186732}{33}C_2 - 14364C_1 = 13167$$

$$\mathrm{T}(3) = \ -1197C_1 - \frac{60593}{11}C_2 = -1197$$

Recopilando nuestro nuevo sistema de ecuaciones posterior a la sustitución de $C_3 \mathrm{en} \mathrm{T}(2) \mathrm{y} \mathrm{T}(3)$

$$\mathrm{T}(2) \rightarrow -69C_1 \ + \frac{3159}{11}C_2 = -69$$

$$\mathrm{T}(3) = \ -1197C_1 - \frac{60593}{11}C_2 = -1197$$

Multiplicamos por 11 para facilitar las operaciones

$$\mathrm{T}(2) \rightarrow -759C_1 \ + 3159C_2 = -759$$

$\mathrm{T}(3) = \ -13167C_1 - 60593C_2 = -13167$

Obtenemos C_2 de $\mathrm{T}(2)$

$$C_2 = -\frac{759}{3159} + \frac{759}{3159}C_1$$

Sustituimos en $\mathrm{T}(3)$

$$\mathrm{T}(3) = \ -13167C_1 - 60593\left(-\frac{759}{3159} + \frac{759}{3159}C_1\right) = -13167$$

$$\mathrm{T}(3) = \ -13167C_1 + \frac{45990087}{3159} - \frac{45990087}{3159}C_1 = -13167$$

Multiplicamos por 3159 para facilitar las operaciones

$$\mathrm{T}(3) = \ -41594553C_1 + 45990087 - 45990087C_1 = -41594553$$

$$\mathrm{T}(3) = \ -87584640C_1 = -87584640$$

Obtenemos a C_1

$\mathrm{T}(3) = \ C_1 = \frac{-87584640}{-87584640} = 1$Sustituimos en las otras ecuaciones donde despejamos las constantes

$$C_2 = -\frac{759}{3159} + \frac{759}{3159}(1) = 0$$

$$C_3 = 1 - \frac{13}{33}(0) - (1) = 0$$

$$C_4 = 1 - 0 - 0 - 1 = 0$$

Finalmente tenemos que nuestros coeficientes son los siguientes

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = 0, \qquad C_4 = 0$$

sustituimos en nuestra ecuación para finalmente obtener la función para el modelo sin recurrencia de este problema

$$\mathrm{T}(n) = C_1 + C_2(-1)^n + C_3(1.3)^n + C_4(-2.3)^n$$
$$= 1 + (0)(-1)^n + (0)(1.3)^n + (0)(-2.3)^n$$

$$\mathrm{T}(n) = 1 \rightarrow \in O(1)$$

Mediante una herramienta de solución de ecuaciones obtenemos como resultado las siguientes constantes:

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = 0$$

$$C_4 = 0$$

$$\boldsymbol{T(n) = 1}$$

OBSERVACIONES:

Es importante que se observe la forma en que son asignadas las raíces, pues colocar el resultado de la raíz en uno de los lugares equivocados provocara que el resultado se vea alterado

EJERCICIO 2

$$T(n) = T(n-1) + 3$$

$$T(0) = 4$$

$$T(n) - T(n-1) = 3$$

$$b^n * p(n)$$

$$b^n = 1^n, \qquad p(n) = 3, \qquad d = 0$$

$$x - 1 = 3$$

$$(x-1) = 3 \rightarrow (x-1)(x-b)^{d+1} = 0 \rightarrow (x-1)(x-1)^1 = 0$$

$$(x-1)(x-1) = 0$$

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 1$$

$$T(n) = C_1(n^{1-1})(1)^n + C_2(n^{2-1})(1)^n$$

$$\boldsymbol{T(n) = C_1 + C_2 n}$$

Solución

Para la solución de este ejercicio comenzamos realizando el despeje que debemos realizar inicialmente, teniendo como resultado una ecuación no homogéneas, pues podemos ver que la igualdad esta realizada hacía una constante y no a 0, por lo que procedemos a realizar la sustitución correspondiente para volverla homogénea, dando como resultado $(x-1)(x-1) = 0$, realizando el despeje correspondiente obtenemos una raíz de multiplicidad 2, por lo que la ecuación característica queda de la siguiente forma: $\mathrm{T}(n) = C_1 + C_2\mathrm{n}$, basándonos en el dato proporcionado inicialmente de T(0)=4 podemos realizar las sustituciones pertinentes e incluso sacar el valor para el valor de 1, teniendo así un sistema de ecuaciones que nos da como resultado las constantes mostradas al final del procedimiento

Para la obtención de cada una de las constantes se recurrió al método de sustitución tal como es indicado para la actividad, el cual se desarrolló de la siguiente forma

Obtenemos $\mathrm{T}(1)$ para poder tener nuestro sistema de ecuaciones

$$\mathrm{T}(1) = \mathrm{T}(n-1) + 3 = \mathrm{T}(0) + 3 = 4 + 3 = 7$$

Sustituyendo nuestras instancias obtenidas en nuestra función

Usando $\mathrm{T}(0)$

$$\mathrm{T}(0) = C_1 + C_2(0) = 3$$

$$\mathrm{T}(0) = C_1 = 3$$

Usando $\mathrm{T}(1)$

$\mathrm{T}(1) = C_1 + C_2(1) = 7$

$\mathrm{T}(1) = C_1 + C_2 = 7$

Aplicando el método de sustitución tenemos que

$\mathrm{T}(0) = C_1 = 3$	$\mathrm{T}(1) = C_1 + C_2 = 7$
$\mathrm{T}(1) = 3 + C_2 = 7$	$\mathrm{T}(1) = C_2 = 4$

Los coeficientes para nuestra función son

$C_1 = 3, \quad {}_2 = 4$Sustituyendo en nuestras funciones tenemos que

$$\boldsymbol{T(n) = 3 + 4n} \rightarrow \in \boldsymbol{O(n)}$$

EJERCICIO 3

$$T(n) = -5T(n-1) - 6T(n-2) + 42(4^n)$$

$$T(0) = 18 \text{ y } T(1) = 61$$

$T(n) = -5T(n-1) - 6T(n-2) + 42(4^n)$ con $T(0)=18$, $T(1)=61$

$T(n) + 5T(n-1) + 6T(n-2) = 42(4^n)$ · Ecuación no homogenea

$(x^2+5x+6)(x-1)=0$

$b^n p(n)$

$(x+3)(x+2)(x-4)=0$

$b=4$
$d=0$

$x_1=-3$ $x_3=4$ Raices distintas
$x_2=-2$

$T(n) = C_1(-3)^n + C_2(-2)^n + C_3(4)^n$

$T(0) = C_1+C_2+C_3 \therefore 18 = C_1+C_2+C_3$
$T(1) = -3C_1-2C_2+4C_3 \therefore 61 = -3C_1-2C_2+4C_3$
$T(2) = 9C_1+4C_2+16C_3 \therefore 259 = 9C_1+4C_2+16C_3$

Para realizar este ejercicio comenzamos realizando el despeje correspondiente y colocando los términos relacionados en el lado que les corresponde, mediante este despeje podemos observar que nos encontramos con una ecuación no homogénea, pues tenemos del lado derecho la siguiente expresión $42(4^n)$la cual corresponde con la estructura siguiente: $b^{n\mathrm{p}}(n)$, teniendo entonces que b=4 y d=0, por lo tanto realizaremos la sustitución de los términos de la forma que se puede mostrar, teniendo el grado del exponente el cual está determinado por el valor de b=4, entonces tendremos la ecuación que se muestra: $(x^2+5x+6)(x-4)=0$, ahora podemos proceder a la obtención de nuestras raíces, por lo cual primero realizamos una factorización, para posteriormente obtener como resultado que dos de las raíces pueden ser determinadas por el método más común con el cual nos podemos enfrentar, que sería la búsqueda de dos números que sumados den el termino lineal y a su vez cuando se busque el producto del el término independiente, dichos números son 2 y .3, por lo cual solo tendremos que igualar a 0 y realizar el despeje pertinente, teniendo como resultado otras dos raíces, por ultimo despejamos el número 4 y obtenemos la última raíz correspondiente a esta expresión.

Ya que hemos obtenido las raíces y todas corresponden a valores numéricos distintos nuestra ecuación característica de T(n) quedara de la siguiente forma:

$$T(n) = C_1 2^n + C_2 3^n + C_3 4^n$$

Teniendo en consideración que se nos está proporcionando el valor que obtenemos cuando se considera T(0), nosotros podemos determinar el de T(1) y posteriormente el de T(2) .

Procedimiento:

Tenemos las siguientes raíces

$r_1 = -2,\ r_2 = -3,\ r_3 = 4$Teniendo todas las raíces diferentes sustituyendo en nuestra función con coeficientes

$$T(n) = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n + C_3(4)^n$$

Obteniendo un tercer termino de T para tener nuestro sistema de ecuaciones

$$T(2) = -5T(1) - 6T(0) + (42)(4^2)$$

$$T(2) = -5(61) - 6(18) + (42)(16) = -305 - 108 + 672 = 259$$

Sustituyendo en nuestra función con coeficientes

Usando $T(0)$

$$T(0) = C_1(-2)^0 + C_2(-3)^0 + C_3(4)^0$$

$$T(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 18$$

Usando $T(1)$

$$T(1) = C_1(-2)^1 + C_2(-3)^1 + C_3(4)^1$$

$$T(1) = -2C_1 - 3C_2 + 4C_3 = 61$$

Usando $T(2)$

$$T(2) = C_1(-2)^2 + C_2(-3)^2 + C_3(4)^2$$

$$\mathrm{T}(2) = 4C_1 + 9C_2 + 16C_3 = 259$$

Teniendo nuestro sistema de ecuaciones siguiente procedemos a aplicar el método de sustitución

$\mathrm{T}(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 18$

$\mathrm{T}(1) = -2C_1 - 3C_2 + 4C_3 = 61$

$\mathrm{T}(2) = 4C_1 + 9C_2 + 16C_3 = 259$

Despejando C_3 de $\mathrm{T}(0)$

$C_3 = 18 - C_1 - C_2$

Sustituyendo en las demás ecuaciones

$\mathrm{T}(1) = -2C_1 - 3C_2 + 4(18 - C_1 - C_2) = 61$

$\mathrm{T}(1) = -2C_1 - 3C_2 + 72 - 4C_1 - 4C_2 = 61$

$\mathrm{T}(1) = -6C_1 - 7C_2 = -11$

$\mathrm{T}(2) = 4C_1 + 9C_2 + 16(18 - C_1 - C_2) = 259$

$\mathrm{T}(2) = 4C_1 + 9C_2 + 288 - 16C_1 - 16C_2 = 259$

$\mathrm{T}(2) = -12C_1 - 7C_2 = -29$

Teniendo el nuevo sistema de ecuaciones

$\mathrm{T}(1) = -6C_1 - 7C_2 = -11$

$\mathrm{T}(2) = -12C_1 - 7C_2 = -29$

Obtenemos C_2 de $\mathrm{T}(1)$

$C_2 = \frac{11}{7} - \frac{6}{7}C_1$

Sustituyendo en la ecuación de $\mathrm{T}(2)$

$$T(2) = -12C_1 - 7\left(\frac{11}{7} - \frac{6}{7}C_1\right) = -29$$

$$T(2) = -12C_1 - 11 + 6C_1 = -29$$

$$T(2) = -6C_1 = -18$$

Obteniendo C_1

$$C_1 = \frac{-18}{-6} = 3$$

Obteniendo C_2

$$C_2 = \frac{11}{7} - \frac{6}{7}(3) = \frac{11}{7} - \frac{18}{7} = -\frac{7}{7} = -1$$

Obteniendo C_3

$$C_3 = 18 - 3 - (-1) = 18 - 3 + 1 = 16$$

Sustituyendo en la función

$$\mathbf{T(n) = 3(-2)^n - (-3)^n + 16(4)^n}$$

EJERCICIO 4

$$\mathrm{T}(n) = 5\mathrm{T}(n-2) + 3\mathrm{T}(n-1)$$

$$\mathrm{T}(1) = 2 \text{ y } \mathrm{T}(2) = -3$$

Tal como en los ejercicios anteriores para encontrar la solución a este, debemos comenzar con el despeje, colocando los valores donde corresponden, dando como resultado una ecuación homogénea (ya está igualada a 0) por lo cual el grado de la ecuación esta dado por el mínimo valor que debe ser restado el cual es el número 2.

Tal que obtenemos una expresión cuadrática, la cual debe ser resuelta mediante la formula general o la también conocida como "chicharronera" , lo cual nos proporciona 2 raíces diferentes, por lo cual son de multiplicidad distinta y la ecuación característica de T(n) nos queda como:

$$\mathrm{T}(n) = C_1\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^n$$

Dado que se nos proporcionan los valores que resultan de T(1) y T(2) podemos generar 1 sistema de ecuaciones para poder obtener el valor de las constantes involucradas, mediante una herramienta matemática se han calculado y tenemos como resultado los siguientes valores:

$$\mathrm{C}_1 = \frac{-261-47\sqrt{29}}{290} \qquad \mathrm{C}_2 = \frac{-261+47\sqrt{29}}{290}$$

Tal que tenemos como ecuación característica final la siguiente expresión

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \left(\frac{-261-47\sqrt{29}}{290}\right)\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^n + \left(\frac{-261+47\sqrt{29}}{290}\right)\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^n$$

Procedimiento mediante sustitución

$$\frac{40\left(29-3\sqrt{29}\right)x}{40\left(29-3\sqrt{29}\right)} = -\frac{480}{40\left(29-3\sqrt{29}\right)} - \frac{80\sqrt{29}}{40\left(29-3\sqrt{29}\right)}$$

$$\left(\frac{-261+47\sqrt{29}}{290}\right)$$

$$\frac{\left(3-\sqrt{29}\right)\left(-\left(3-\sqrt{29}\right)x+4\right)}{20}$$

Comenzaremos realizando el despeje correspondiente de una de las 2 variables que tenemos, en este caso será de C_1

$$\text{Sustituir } C_1 = -\frac{(3-\sqrt{29})(4-(3-\sqrt{29})C_2)}{20}$$

Ahora procedemos a realizar dicha sustitución en la segunda ecuación

$$\left(-\frac{(3-\sqrt{29})(4-(3-\sqrt{29})C_2)}{20}\right)\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^2 = -3$$

Simplificando los términos de C_2 tenemos:

$$\frac{29C_2 - 3\sqrt{29}C_2 + 6 + 2\sqrt{29}}{2} = -3$$

Ahora procedemos a realizar el despeje correspondiente para poder obtener el valor numérico de C_2, ya que este se ve primeramente involucrado en una división procedemos a pasar el denominador multiplicando y posteriormente las sumas y restas o bien podríamos multiplicar ambos lados de la expresión por el número 2, ambos caminos proporcionarían el mismo resultado:

$$\frac{2(29C_2 - 3\sqrt{29}C_2 + 6 + 2\sqrt{29})}{2} = 2(-3)$$

Realizamos la simplificación de términos correspondiente:

$$29C_2 - 3\sqrt{29}C_2 + 6 + 2\sqrt{29} = -6$$

Agrupamos los términos donde les corresponde:

$$29C_2 - 3\sqrt{29}C_2 = -6 - 6 - 2\sqrt{29}$$

$$29C_2 - 3\sqrt{29}C_2 = -12 - 2\sqrt{29}$$

Como podemos observar es posible realizar una factorización, así que la realizamos y podremos despejar finalmente nuestra variable C_2:

$$(29 - 3\sqrt{29})C_2 = -12 - 2\sqrt{29}$$

Despejamos:

$$C_2 = \frac{-12 - 2\sqrt{29}}{29 - 3\sqrt{29}}$$

Simplificamos mediante la multiplicación del conjugado

$$=\frac{(-12-2\sqrt{29})(29+3\sqrt{29})}{(29-3\sqrt{29})(29+3\sqrt{29})}$$

Realizamos reducción de términos

$$=\frac{-522-94\sqrt{29}}{580}$$
$$=-\frac{2(261+47\sqrt{29})}{580}$$

Finalmente tendremos el siguiente resultado:

$C_2=-\frac{261+47\sqrt{29}}{290}$

Sustituyendo nuestro valor en la ecuación para poder obtener $C1$ tenemos:

$$C_1=-\frac{(3-\sqrt{29})\left(4-(3-\sqrt{29})\left(-\frac{261+47\sqrt{29}}{290}\right)\right)}{20}$$

Y procedemos a resolver

$$=-\frac{(3-\sqrt{29})\left(-\frac{2(29+6\sqrt{29})}{29}+4\right)}{20}$$

Primero realizaremos la operación que esta entre paréntesis, sumando el 4 a la fracción en cuestión:

$$=-\frac{58+12\sqrt{29}}{29}+4$$
$$=-\left(\frac{58}{29}\right)-\left(\frac{12\sqrt{29}}{29}\right)+4$$
$$=-2-\frac{12\sqrt{29}}{29}+4$$
$$=-\frac{12}{\sqrt{29}}+2\;=\;-\frac{58-12\sqrt{29}}{29}$$

Sustituyendo la suma tenemos:

$$= -\frac{\frac{58-12\sqrt{29}}{29}\left(3-\sqrt{29}\right)}{20}$$

$$= -\frac{\frac{522-94\sqrt{29}}{29}}{20}$$

$$= -\frac{522-94\sqrt{29}}{580}$$

Factorizamos la parte del numerador con un 2 y posteriormente realizamos la división de este con el denominador, obteniendo como resultado el valor de nuestra constante C_1

$$C_1 == -\frac{261-47\sqrt{29}}{290}$$

PROCEDIMIENTOS A MANO

$T(n) = 4T(n-2) - T(n-1) + T(n-3) - 3T(n-4)$ $T(n)=1$ $n \leq 4$

$3T(n-4) - T(n-3) - 4T(n-2) + T(n-1) + T(n) = 0$ Ecuacion Homogenea

$x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 3 = 0$

$(x-1)(x+1)(x^2 + x - 3)$ ax^2+bx+c

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raices diferentes

$\frac{-(1) \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$

$T(n) = C_1(1)^n + C_2(-1)^n + C_3\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + C_4\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$

$n=1$

$r_1 = 1$ $r_3 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$r_2 = -1$ $r_4 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$1 = C_1 - C_2 - C_3\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) - C_4\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$

$1 = C_1 + C_2 + C_3\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right) + C_4\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)$

$C_1 = 1$
$C_2 = 0$
$C_3 = 0$
$C_4 = 0$

$T(2) = -5(61) - 6(18) + 42(4^2)$
$= 259$

Ejercicio 3

$T(n) = 5T(n-2) + 3T(n-1)$ $\quad T(1)=2 \quad T(2)=-3 \quad T(3) = 10 + 9 = 1$

$T(n) - 5T(n-2) - 3T(n-1) = 0$ Ecuación homogenea

$x^2 - 3x - 5 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$

$r_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{2} \quad r_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{2}$ Raices Distintas

$$T(n) = C_1\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^n$$

$$2 = C_1\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right) + C_2\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right) \qquad C_1 = \frac{-261-47\sqrt{29}}{290}$$

$$-3 = C_1\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^2 \qquad C_2 = \frac{-261+47\sqrt{29}}{290}$$

$$C_1\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right) + C_2\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right) = 2 \qquad C_1 = \frac{2 - C_2\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)}{\frac{3+\sqrt{29}}{2}}$$

$$C_1\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^2 = -3$$

$$C_1 = \frac{(3-\sqrt{29})(-C_2(3-\sqrt{29})+4)}{20}$$

$$\left(\frac{(3-\sqrt{29})(-C_2(3-\sqrt{29})+4)}{20}\right)\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)^2 = -3$$

$$C_2 = \frac{-261+47\sqrt{29}}{290}$$

$$\left(\frac{(3-\sqrt{29})\left(\left[\frac{-261+47\sqrt{29}\,(3-\sqrt{29})}{290}\right]+4\right)}{20}\right) = C_1$$

$$-\frac{3(899-188\sqrt{29}}{725}\Bigg) = C_1$$