OPERACIONES CON LENGUAJES

Concatencacion de Lenguajes

El lenguaje que resulta de la concatenacion de A y B esta formado por la concatenacion de todas las cadenas de A con todas la cadenas de B.

$$A \cdot B = AB = \{a \cdot b \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplo:

$A = \{hola, adios\}$
$B = \{casa\}$

$A \cdot B = \{holacasa, adioscasa\}$

La concatenacion de lenguajes se puede realizar aun si los lenguajes no estan construidos sobre el mismo alfabeto, por lo tanto si A y B son lenguajes sobre Σ_1 y Σ_2, entonces el lenguaje resultante sera un lenguaje sobre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

La cadena vacia se comporta como la identidad en cuanto a la concatenacion de lenguajes.

$$A \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \cdot A$$

POTENCIA DE UN LENGUAJE

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & si\ n = 0 \\ A \cdot A^{n-1} & si\ n \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo:

Sea $A = \{ab\}$, obtener A^0, A^1, A^2, A^3

$A^0 = \{\varepsilon\}$
$A^1 = A \cdot A^0 = \{ab\}\{\varepsilon\} = \{ab\}$
$A^2 = A \cdot A^1 = \{ab\}\{ab\} = \{abab\}$
$A^3 = A \cdot A^2 = \{ab\}\{abab\} = \{ababab\}$

Como caso particular, para el lenguaje vacio :

$$\varnothing^n = \{\varepsilon\}$$

Ejercicio : Sea $A = \{ab, cd\}$ obtener A^0, A^1, A^2, A^3

$A^0 = \{\varepsilon\}$

UNION DE LENGUAJES

Sean A y B lenguajes sobre el alfabeto Σ, la union se denota por $A \cup B$ y quiere decir que el lenguaje resultante esta formado por todas las cadenas que se encuentran en al menos uno de los dos lenguajes.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

INTERSECCION DE LENGUAJES

Es el lenguaje formado por todas las cadenas que se encuentran tanto en A como en B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo: Sea el alfabeto $\Sigma = \{\varepsilon, a, b, c, d, e, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$A = \{\varepsilon, 0, a, b, c, d, e\}$
$B = \{\varepsilon, a, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cup B = \{\varepsilon, a, b, c, d, e, 0, 1, 2, 3, 4\}$
$A \cap B = \{\varepsilon, 0, a\}$

SUBLENGUAJE

Si A y B son lenguajes, entonces B es sublenguaje de A, si A contiene todas las cadenas de B y se denota como $B \subseteq A$ y se lee como "B es un sublenguaje de A".

TEOREMA 1. Sea L cualquier lenguaje sobre Σ, entonces $L \subseteq \Sigma^*$ ya que Σ^* contiene todas las cadenas posibles de generar con el alfabeto Σ.

TEOREMA 2. Dados los lenguajes A, B y C, sobre un alfabeto Σ, se cumple que :

1. $A \cdot (B \cup C) = (A \cdot B \cup A \cdot C)$
2. $(B \cup C) \cdot A = B \cdot A \cup C \cdot A$

CERRADURA DE KLEENE

La union de cero o mas potencias de un lenguaje A sobre un alfabeto Σ, es decir, realizar cero o mas concatenaciones del lenguaje A con el mismo.

$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

CERRADURA POSITIVA

La union de una o mas potencias de un lenguaje A sobre un alfabeto Σ, resultando un lenguaje que contiene a todas las cadenas excepto la cadena vacia.

$$A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$$

Ejemplo:

Sea Σ el alfabeto español y $A = \{a\}$ sobre Σ,

$A^* = \{\varepsilon, a, a^2, a^3, \ldots\}$

$A^+ = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$

DIFERENCIA ENTRE LENGUAJES

Si A y B son lenguajes sobre Σ, entonces $A - B$ resulta en un lenguaje de todas las cadenas de A que no estan en B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo:

$A = \{hola, que, hace\}$
$B = \{hola, aqui, nomas\}$

$A - B = \{que, hace\}$

COMPLEMENTO DE UN LENGUAJE

Sea A un lenguaje sobre Σ, su complemento es el conjunto de todas las cadenas de Σ^* que no estan en A.

$$\overline{A} = \Sigma^* - A$$

Ejemplo:

$\Sigma = \{0, 1\}$
$A = \{11, 000, 111\}$

$\overline{A} = \{\varepsilon, 0, 10, 1100, 0011, \ldots\}$

INVERSO DE UN LENGUAJE

Sea A un lenguaje sobre Σ, su inverso es el conjunto A^I en donde todas las cadenas de A se invierten.

$$A^I = \{x^I \mid x \in A\}$$

Ejemplo:

$A = \{hola, que, hace\}$

$A^I = \{aloh, euq, ecah\}$

PROPIEDADES DEL INVERSO DE UN LENGUAJE

$$(A^I)^I = A$$
$$(A \cdot B)^I = B^I \cdot A^I$$