

Tema 1.3 Axiomas de la probabilidad

1.3 Axiomas de la probabilidad

A menudo resulta más sencillo calcular la probabilidad de algún evento a partir de las probabilidades conocidas de otros eventos. Esto puede ser cierto si el evento en cuestión se puede representar como la unión de otros dos eventos o como el complemento de algún evento.

Axioma 1. Para cada suceso A en la clase \mathcal{C}

$$P(A) \geq 0 \quad (1)$$

Axioma 2. Para el suceso cierto o seguro \mathcal{C} en la clase \mathcal{C}

$$P(\mathcal{C}) = 1 \quad (2)$$

Axioma 3. Para cualquier número de sucesos mutuamente excluyentes A_1, A_2, \dots en la clase \mathcal{C}

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \quad (3)$$

En particular, para solo dos sucesos mutuamente excluyentes A_1, A_2 ,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad (4)$$

Teoremas

1) Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2) Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \emptyset$$

3) Si A_1, A_2, \dots, A_n son mutuamente excluyentes, entonces:

- $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

4) Si A_1, A_2, \dots, A_n son particiones del espacio muestral S

- $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(S) = 1$

5) Para 3 eventos cualesquiera: A, B y C

- $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

6) Si A y A' son eventos complementarios, entonces

- $$P(A) + P(A') = 1$$

Ejemplos

¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 u 11 cuando se lanza un par de dados?

Ejemplo 2

Las probabilidades de que un individuo que compra un automóvil nuevo elija uno de color verde, uno blanco, uno rojo o uno azul son 0.09, 0.15, 0.21 y 0.23, respectivamente, ¿cual es la probabilidad de que un comprador dado adquiriera un automóvil nuevo que tenga uno de esos colores?

Complemento de un evento

A menudo es más difícil calcular la probabilidad de que ocurra un evento que calcular la probabilidad de que el evento no ocurra. Si este es el caso para algún evento A , simplemente calculamos primero $P(A)'$ y, después calculamos $P(A)$ por sustracción.

Ejemplo:

Si las probabilidades de que un mecánico automotriz de servicio a 3, 4, 5, 6, 7, 8 o más vehículos en un día de trabajo dado son 0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10 y 0.07, respectivamente, ¿cual es la probabilidad de que de servicio al menos a 4 vehículos el siguiente día de trabajo?

¿Cuál es la probabilidad de obtener 2A y un sol, al lanzar una moneda tres veces?

- La probabilidad de que Juan apruebe el curso de probabilidad es $\frac{2}{3}$ y la probabilidad de que apruebe el curso de estadística es de $\frac{4}{9}$. Si la probabilidad de aprobar ambos cursos es de $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan:
 - a) Apruebe cuando menos uno de estos cursos?
 - b) Repruebe probabilidad?
 - c) Repruebe las dos materias?

- Se sacan 3 cartas de un mazo bien barajado de 52 naipes (baraja inglesa). Encuentre la probabilidad de sacar 3 ases.
- Se sacan 5 cartas de una baraja inglesa. Determine la probabilidad de que:
 - a) todas las cartas sean de un mismo palo,
 - b) se saquen exactamente 2 ases,
 - c) que no se saquen ases,
 - d) se saque al menos un as.

- Se está realizando la inspección final de aparatos de televisión después del ensamble. Se identifican tres tipos de defectos como críticos, mayores y menores y una empresa de envíos por correo los clasifica en C, M o m respectivamente. Se analizan los datos con los siguientes resultados:

- Aparatos que sólo tienen defectos críticos 2%.
- Aparatos que sólo tienen defectos mayores 5%.
- Aparatos que sólo tienen defectos menores 7%.
- Aparatos que sólo tienen defectos críticos y mayores 3%.
- Aparatos que sólo tienen defectos críticos y menores 4%.
- Aparatos que sólo tienen defectos mayores y menores 3%.
- Aparatos que tienen los tres tipos de defectos 1%.

a) ¿Qué porcentaje de los aparatos no tienen defectos?

b) Los aparatos con defectos críticos o mayores (o ambos) deben manufacturarse nuevamente. ¿Qué porcentaje corresponde a esta categoría?

- Un lote consta de 10 artículos sin defecto, 4 con pequeños defectos y 2 con defectos graves. Se elige un artículo al azar. Encontrar la probabilidad de que:
- *a*) no tenga defectos,
- *b*) no tenga defecto grave,
- *c*) que no tenga defecto o que tenga un defecto grave.

- Si del mismo lote de artículos descritos en el problema anterior se escogen dos artículos (sin sustitución), encontrar la probabilidad de que:
- *b*) ambos tengan defectos graves,
- *c*) al menos uno esté en buen estado,
- *d*) a lo más uno esté en buen estado ,
- *e*) exactamente uno esté en buen estado,
- *f*) ninguno tenga defectos graves,
- *g*) ninguno esté en buen estado.

Actividad 3

- 1. La probabilidad de que una industria estadounidense se ubique en Shanghai, China, es 0.7, la probabilidad de que se ubique en Beijing, China, es 0.4 y la probabilidad de que se ubique en Shanghai o Beijing, o en ambas ciudades, es 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que la industria se ubique...
 - *a)* en ambas ciudades?
 - *b)* en ninguna de esas ciudades?

- 2. La empresa Dom's Pizza utiliza pruebas de sabor y el análisis estadístico de los datos antes de comercializar cualquier producto nuevo. Considere un estudio que incluye tres tipos de pastas (delgada, delgada con ajo y orégano, y delgada con trozos de queso). Dom's también está estudiando tres salsas (estándar, una nueva salsa con más ajo y una nueva salsa con albahaca fresca).
- *a)* ¿Cuántas combinaciones de pasta y salsa se incluyen?
- *b)* ¿Cuál es la probabilidad de que un juez reciba una pasta delgada sencilla con salsa estándar en su primera prueba de sabor?

3. Si cada artículo codificado en un catálogo empieza con 3 letras distintas seguidas por 4 dígitos distintos de cero, calcule la probabilidad de seleccionar aleatoriamente uno de estos artículos codificados que tenga como primera letra una vocal y el último dígito sea par.

Un cargamento de 150 lavadoras contiene 10 defectuosas y 140 no defectuosas. Se eligen al azar 20 lavadoras (sin sustitución) y se clasifican.

- *a)* ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren exactamente 5 artículos defectuosos?
- *b)* ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren al menos 2 artículos defectuosos?