Unidad 3

Elena Fabiola Ruiz Ledesma

Unidad 3 Distribuciones de variables aleatorias discretas y continuas

3.1 Distribuciones de Bernoulli y Binomial

Con frecuencia un experimento consta de pruebas repetidas, cada una con dos resultados posibles que se pueden denominar **éxito** o **fracaso**. La aplicación mas evidente tiene que ver con la prueba de artículos a medida que salen de una línea de ensamble, donde cada prueba o experimento puede indicar si un articulo está o no defectuoso. Podemos elegir definir cualquiera de los resultados como éxito. El proceso se conoce como **proceso de Bernoulli** y cada ensayo se denomina **experimento de Bernoulli**.

En términos estrictos el proceso de Bernoulli se caracteriza por lo siguiente:

1. El experimento consta de ensayos repetidos.
2. Cada ensayo produce un resultado que se puede clasificar como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de un éxito, que se denota con *p*, permanece constante de un ensayo a otro.
4. Los ensayos repetidos son independientes.

Considere el conjunto de experimentos de Bernoulli en el que se seleccionan tres artículos al azar de un proceso de producción, luego se inspeccionan y se clasifican como defectuosos o no defectuosos. Un articulo defectuoso se designa como un éxito. El número de éxitos es una variable aleatoria *X* que toma valores enteros de cero a 3. Como los artículos se seleccionan de forma independiente y se asume que el proceso produce 25% de artículos defectuosos. Determine la distribución de probabilidad.

X	x	f(x)
NNN	0	f(0)=$\binom{3}{0}.25^0\,.75^3 = 0.4218$
NDN	1	f(1)=$\binom{3}{1}.25^1\,.75^2 = 0.4218$
NND	1	
DNN	1	
NDD	2	f(2)=$\binom{3}{2}.25^2\,.75^1$=0.14062
DND	2	
DDN	2	
DDD	3	f(3)=$\binom{3}{3}.25^3\,.75^0$=0.01562

$$\mathrm{f(x)} = \binom{3}{x}.25^x\,.75^{3-x}$$

Siendo p la probabilidad de éxito que en este caso es de 0.25 y q la probabildad de fracaso, es decir 1-0.25=0.75

Distribución binomial

Un experimento de Bernoulli puede tener como resultado un éxito con probabilidad *p* y un fracaso con probabilidad *q* = 1 – *p*. Entonces, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial *X*, considerando el número de éxitos en *n* ensayos independientes, es

$$b(x;n;p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

En donde n= total de ensayos

p= probabilidad de éxito, q=1-p

x= éxitos obtenidos

- La distribución binomial deriva su nombre del binomio de Newton:
- $(q+p)^2 =$ $q^2 + 2qp + p^2$
- 1
- 1 2 1
- 1 3 3 1
- 1 4 6 4 1
- $(q+p)^3 =$ $q^3p^0 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3$
- $(q+p)^4 =$ $q^4p + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4pq^3 + q^4$

La distribución binomial deriva su nombre del hecho de que los *n* + 1 términos en la expansión binomial de $(q+p)^n$ corresponden a los diversos valores de *b*(*x*; *n*, *p*) para *x* = 0, 1, 2, ... , *n*. Es decir,

$$(q+p)^n = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} pq^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} p^n$$

=*b*(0; *n*, *p*) + *b*(1; *n*, *p*) + *b*(2; *n*, *p*) + · · + *b*(*n*; *n*, *p*).

Dado que *p* + *q* = 1, vemos que

$$\sum_{n=0}^{n} b(x;n;p) = 1$$

una condición que se debe cumplir para cualquier distribución de probabilidad.

Con frecuencia nos interesamos en problemas donde se necesita obtener $P(X < r)$ o $P(a \leq X \leq b)$.

Las sumatorias binomiales:

$B(r; n, p) = \sum_{n=0}^{r} b(x; n; p)$

Se presentan en la tabla para $n = 1, 2, \ldots, 20$, para valores seleccionados de p entre 0.1 y 0.9.

Ejemplo 1

La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque es de 3/4. Calcule la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes que se prueben.

¿Cuántos componentes se toman en cuenta?, es decir n=4

¿Cuál es la probabilidad de éxito? p=0.75

¿Cuál es la probabilidad de fracaso? q=1-p=1-0.75=0.25

¿Cuál es el valor de x que se quiere obtener? X=2

Entonces ¿qué probabilidad debemos obtener? P(x= 2)=$\binom{4}{2}0.75^2 0.25^2$ =0.2109

También puedo usar la tabla: $b(2; 4{,}0.75) = \sum_{x=0}^{x=2} b(x; 4{,}0.70) - \sum_{x=0}^{x=1} b(x; 4{,}0.70) =$ .3487-.0837=.265

$\sum_{x=0}^{x=2} b(x; 4{,}0.80) - \sum_{x=0}^{x=1} b(x; 4{,}0.80)$ =.1808-.0272=.1536

Ejemplo 2

- La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es de 0.4. Si se sabe que 15 personas contrajeron la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que:
- *a*) sobrevivan exactamente 5?
- b) sobrevivan al menos 10,
- *c*) sobrevivan de 3 a 8,

Solución:

$$n = 15 \qquad p = 0.4 \qquad q = 0.6$$

- *a*) sobrevivan exactamente 5?
- $P(x = 5) = \binom{15}{5} 0.4^5 0.6^{10} = 0.1859$
- Usando las tablas b(5 ;15 ,0.4)=$\sum_{x=0}^{x=5} b(x; n, p) - \sum_{x=0}^{x=4} b(x; n, p) = .4032 - .2173$=.1859

- b) sobrevivan al menos 10,
- $P(x \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{x=9} b(x; n, p) = 1 - .9662 = 0.0338$

- c) sobrevivan entre 3 y 8
- $P(\ \ 3\ \leq x \leq 8\ \ ) = \sum_{x=0}^{x=8} b(x; 15, p) - \sum_{x=0}^{x=2} b(x; n, p) = 0.9050 - 0.0271 = 0.8779$

Ejemplo 3

Una cadena grande de tiendas al detalle le compra cierto tipo de dispositivo electrónico a un fabricante, el cual le indica que la tasa de dispositivos defectuosos es de 3%.

a) El inspector de la cadena elige 20 artículos al azar de un cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un artículo defectuoso entre estos 20? 45.6%

x

$P(x \geq 1)$ $\quad b(x; n, p)$

$P(x \geq 1) = b(1, 20, 0.03) + b(2, 20, 0.03) + \dots + b(20; 20, 0.03)$

$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \binom{20}{0}(0.03)^0 (0.97)^{20} = 1 - 0.5437 = 0.4562$

Solución:

$$n = 20 \qquad p = 0.03 \qquad q = 0.97$$

- *a*) El inspector de la cadena elige 20 artículos al azar de un cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un artículo defectuoso entre estos 20?
- $P(X \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left[\binom{20}{0} 0.03^0 (0.97)^{20}\right] = 1 - 0.5437 = (0.4563)$

b) Suponga que el detallista recibe 10 cargamentos en un mes y que el inspector prueba aleatoriamente 20 dispositivos por cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente tres cargamentos que contengan al menos un dispositivo defectuoso de entre los 20 seleccionados y probados?

$n = 10,\ p = 0.4563,\ y = 3$

$P(Y=3) = b(3; 10, 0.4563) = \binom{10}{3} (0.4563)^3 (.5437)^7$

$=$

- Y el número de cargamentos a elegir
- n=10
- p=0.4563
- P(Y=3)=$\binom{10}{3}(0.4563)^3(0.5437)^7$=.1601
- La probabilidad de que 3 cargamentos tengan al menos 1 dispositivo defectuoso de la muestra de 20, es del 16%

Áreas de aplicación de la distribución binomial

Un ingeniero industrial está muy interesado en "la proporción de artículos defectuosos" en cierto proceso industrial. A menudo las medidas de control de calidad y los esquemas de muestreo para procesos se basan en la distribución binomial, la cual se aplica en cualquier situación industrial donde el resultado de un proceso es dicotómico y los resultados del proceso son independientes, y además la probabilidad de éxito se mantiene constante de una prueba a otra. La distribución binomial también se utiliza mucho en aplicaciones médicas y militares. En ambos casos un resultado de éxito o de fracaso es importante. Por ejemplo, la importancia del trabajo farmacéutico radica en poder determinar si un fármaco específico "cura" o "no cura"; mientras que si se está probando la eficacia al lanzar un proyectil el resultado se interpretaría como "dar en el blanco" o "fallar".

La media y la varianza de la distribución binomial b (x; n, p) son

$$\mu = np \text{ y } \sigma^2 = npq.$$

Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria binomial del ejemplo de los pacientes
$\mu = 15(0.4)$ =6

$$\sigma^2 = 6(0.6) = 3.6$$

Problema de los neumáticos

- Al probar cierta clase de neumático para camión en un terreno accidentado, se encuentra que el 25% de los camiones no completan la prueba de recorrido sin ponchaduras. De los siguientes 15 camiones probados, calcule la probabilidad de que

a) de 3 a 6 tengan ponchaduras; $P(3 \le X \le 6) = \sum_{x=0}^{6} b(x, 15, 0.25) - \sum_{x=0}^{2} b(x; 15, 0.25) =$ 0.9434 − 0.2361

$P(3 \le x \le 6) = .7073$

b) menos de 4 tengan ponchaduras; $P(x<4) = \sum_{x=0}^{3} b(x; 15, 0.25) = 0.4613$

c) más de 5 tengan ponchaduras. $P(x>5) = 1 - P(x \le 5) = 1 - \sum_{x=0}^{5} b(x; 15, 0.25) = 0.8516$

$n=15$, $p=0.25$

Éxito: camión tiene ponchaduras

Problema de las preguntas

Un examen consta de 10 preguntas a las que hay que contestar Si o NO. Suponiendo que a las personas que se le aplica no saben contestar a ninguna de las preguntas y, en consecuencia, contestan al azar, hallar:

- a) Probabilidad de obtener cinco aciertos. $P(x=5)=\binom{10}{5}(.5)^5(.5)^5=0.2460$
  $P(x=5)=\sum_{x=0}^{5} b(x,10,.5)-\sum_{x=0}^{4} b(x,10,.5)=0.6230-0.3770=0.246$
- b) Probabilidad de obtener al menos un acierto acierto. $P(x\geq 1)=1-P(x<1)=1-P(x=0)$
  $P(x\geq 1)=1-0.0010=0.999$
- c) Probabilidad de obtener al menos cinco aciertos.

$n=10$ $p=0.5$ $P(x\geq 5)=1-P(x<5)=1-0.3770=0.623$

Problema de los pozos

- Se conjetura que hay impurezas en 30% del total de pozos de agua potable de cierta comunidad rural. Para obtener información sobre la verdadera magnitud del problema se determina que debe realizarse algún tipo de prueba. Como es muy costoso probar todos los pozos del área, se eligen 10 al azar para someterlos a la prueba.
- *a*) Si se utiliza la distribución binomial, .¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 pozos tengan impurezas, considerando que la conjetura es correcta? $P(X=3)=\binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7=0.2668$
- *b*) ¿Cual es la probabilidad de que más de 3 pozos tengan impurezas?

$n=10$ $p=0.3$ $P(x>3)=1-P(x\leq 3)=1-\sum_{x=0}^{3} b(x,10,0.3)=1-0.6493$

Éxito = encontrar impurezas $P(x>3)=.3507$

- *a*) Si se utiliza la distribución binomial, .¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 pozos tengan impurezas, considerando que la conjetura es correcta? $P(X=3)=\binom{10}{3}.3^3\,.7^7=.2668$
- *b*) ¿Cual es la probabilidad de que más de 3 pozos tengan impurezas?
- P(x> 3) $=1-P(x\leq 3)=1-\sum_{x=0}^{x=3} b(x;10,0.3)=1-.6496=0.3504$
  LA probabilidad de que más de 3 pozos tengan impurezas es de 35%

Distribución multinomial

- El experimento binomial se convierte en un **experimento multinomial** si cada prueba tiene más de dos resultados posibles. La clasificación de un producto fabricado como ligero, pesado o aceptable, y el registro de los accidentes en cierto crucero de acuerdo con el día de la semana, constituyen experimentos multinomiales. Extraer *con reemplazo* una carta de una baraja también es un experimento multinomial si los 4 tipos de cartas que hay, son los resultados de interés.

- La fórmula que se emplea es:
- b(x;n,p)

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k; p_1, p_2, p_3, \ldots p_k, n) =$$

$$\binom{n}{x_1, x_2, x_3, \ldots x_k} = \frac{n}{x_1! x_2! x_3!} (p_1)^{x_1} (p_2)^{x_2} (p_3)^{x_3} \ldots. (p_k)^{x_k}$$

-

Ejemplo

- La complejidad de las llegadas y las salidas de los aviones en un aeropuerto es tal que a menudo se utiliza la simulación por computadora para modelar las condiciones "ideales". Para un aeropuerto específico que tiene tres pistas se sabe que, en el escenario ideal, las probabilidades de que las pistas individuales sean utilizadas por un avión comercial que llega aleatoriamente son las siguientes:
- Pista 1: $p1$ = 2/9
- Pista 2: $p2$ = 1/6
- Pista 3: $p3$ = 11/18
- ¿Cuál es la probabilidad de que 6 aviones que llegan al azar se distribuyan de la siguiente manera? Pista 1: 2 aviones , pista 2: 1 avión, pista 3: 3 aviones
- Solución
- n=6, $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$
- $p_1 = \frac{2}{9}, p_2 = \frac{1}{6}, p_3 = \frac{11}{18}$

Solución

- $p_{1=\frac{2}{9}}, \quad p_{2=\frac{1}{6}}, \quad p_3 = \frac{11}{18}$
- n=$x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 1 + 3 = 6$

$$f\left(\underbrace{2, 1, 3}_{x_1, x_2, x_3}; \underbrace{\frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{11}{18}}_{p_1, p_2, p_3}, \underbrace{6}_{6}\right) = \binom{6}{2, 1, 3} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{11}{18}\right)^3$$

b(x,n,p)

$$= \frac{6!}{2!\,1!\,3!} \cdot \frac{2^2}{9^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{11^3}{18^3} = \underline{0.1127}.$$

- Un estudiante que conduce hacia su escuela encuentra un semáforo, el cual permanece verde por 35 segundos, amarillo cinco segundos y rojo 60 segundos. Suponga que toda la semana el estudiante recorre el camino a la escuela entre las 8:00 y las 8:30 a.m. Sea X_1 el número de veces que encuentra una luz verde, X_2 el número de veces que encuentra una luz amarilla y X_3 el número de veces que encuentra una luz roja. Calcule la distribución conjunta de $X1$, $X2$ y $X3$.
- n=x1+x2+x3
- x1 número de veces que encuentra la luz verde
- X2 número de veces que encuentra la luz amarilla
- X3 número de veces que encuentra una luz roja
- p1= 0.35 ,p2=.05 , p3= .60
- F(x1,x2,x3;p1,p2,p3,n)=$\frac{n!}{x1!x2!x3!}$ $.35^{x1}$ $.05^{x2}$ $.6^{x3}$

- Según el diario *USA Today* (18 de marzo de 1997), de 4 millones de integrantes de la fuerza laboral, 5.8% resulto positivo en una prueba de drogas. De los que dieron positivo, 22.5% consumían cocaína y 54.4% consumían marihuana.
- *a*) ¿Cual es la probabilidad de que de 10 trabajadores que dieron positivo, 2 sean usuarios de cocaína, 5 de marihuana y 3 de otras drogas? $0.074 \simeq 7\%$
- *b*) ¿Cual es la probabilidad de que de 10 trabajadores que dieron positivo, todos sean consumidores de marihuana? $n=10 \quad x_1=0 \quad x_2=10 \quad x_3=0 \quad m(0,10,0;.225,.544,.231,10)=\frac{10!}{0!10!0!}(.544)^{10}=2.26\times10^{-3}=.00226$ $.02\%$
- *c*) ¿Cual es la probabilidad de que de 10 trabajadores que dieron positivo, ninguno consuma cocaína? $1-P(x_1=10,x_2=0,x_3=0)=1-\left(\frac{10!}{10!0!0!}(.225)^{10}\right)=1-3.3252\times10^{-7}=0.9999$
- Solución:
- n=10, x1=2 x2=5 x3=3, p1=0.225 p2=0.544 p3=0.231
- f(x1,x2,x3;p1,p2,p3,10)=$\frac{10!}{2!5!3!}(.225)^2\,(.544)^5(.231)^3 = .074$

- *b*) ¿Cual es la probabilidad de que de 10 trabajadores que dieron positivo, todos sean consumidores de marihuana?
- n=10
- P(x2=10)=$\binom{10}{10}.\,(544)^{10}\,(0.456)^0 = 2.269(10^{-3})$=.2%
- c) ¿Cual es la probabilidad de que de 10 trabajadores que dieron positivo, ninguno consuma cocaína?
- P(x1=0)=$\binom{10}{0}(.225)^0.\,(.775)^{10}$=.078

- La superficie de un tablero circular para dardos tiene un pequeño circulo central llamado diana y 20 regiones en forma de rebanada de pastel numeradas del 1 al 20. Asimismo, cada una de estas regiones esta dividida en tres partes, de manera que una persona que lanza un dardo que cae en un numero específico obtiene una puntuación igual al valor del numero, el doble del numero o el triple de este, dependiendo de en cual de las tres partes caiga el dardo. Si una persona tiene una probabilidad de 0.01 de acertar a la diana, una probabilidad de 0.10 de acertar un doble, una probabilidad de 0.05 de acertar un triple y una probabilidad de 0.02 de no acertar al tablero, .cual es la probabilidad de que 7 lanzamientos den como resultado ninguna diana, **ningun triple**, **dos dobles** y **una vez fuera del tablero**?
- n= 7 X1= 0 , X2= 2 ,X3=0, x4=1
- p1= 0.01 p2=.10 p3=.05 p4=.02

- f(0,0,2,1;.01,.05,.10,.02,7)=$\frac{7!}{0!0!2!1!}(.01)^0(.05)^0(.10)^2\,(.02)^1 = .504$

Distribución hipergeométrica

- Si se sacan 5 cartas al azar, nos interesa la probabilidad de seleccionar 3 cartas rojas de las 26 disponibles y 2 de las 26 cartas negras de que dispone la baraja.

$P=\frac{\binom{26}{3}\binom{26}{2}}{\binom{52}{5}}$ $N=52$ $n=5$ 3Rojas 2Negro

- $P=\frac{\binom{26}{3}\binom{26}{2}}{\binom{52}{5}}=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
- Total de cartas=52 (N)
- Tamaño de la muestra=5 (n)
- Cartas rojas=26 (K- éxitos) Total de éxitos
- Cartas negras=26 (N-K) fracasos
- ¿Cuántas cartas rojas se desean elegir?3 (x - éxitos a obtener)
- ¿Cuántas cartas negras se desean elegir?2 (n-x) fracasos a obtener
- ¿Cuál es la probabilidad de éxito o el porcentaje de éxitos? $\frac{K}{N}$

- En general, nos interesa la probabilidad de seleccionar *x* éxitos de los *k* artículos considerados éxitos y *n* – *x* fracasos de los *N* – *k* artículos que se consideran fracasos cuando una muestra aleatoria de tamaño *n* se selecciona de *N* artículos. Esto se conoce como un **experimento hipergeométrico**; es decir, aquél que posee las siguientes dos propiedades:
  - De un lote de *N* artículos se selecciona una muestra aleatoria de tamaño *n* sin reemplazo (es decir, los eventos son dependientes)
  - *k* de los *N* artículos se pueden clasificar como éxitos y *N* – *k* se clasifican como fracasos.
  - Cuando hay remplazo son eventos de qué tipo? independientes
  - Cuando no hay remplazo son eventos de qué tipo? dependientes
  - ¿En la distribución binomial cómo son los eventos entre ellos? Son independientes
  - Si quisiéramos obtener la probabilidad de éxito cómo se obtendría con las variables de la distribución hipergeométrica? $p=\frac{k}{N}$

$h(x;N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

$b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$

- El número *X* de éxitos de un experimento hipergeométrico se denomina **variable aleatoria hipergeométrica**. En consecuencia, la distribución de probabilidad de la variable hipergeométrica se conoce como **distribución hipergeométrica**, y sus valores se denotan con *h*(*x*; *N*, *n*, *k*), ya que dependen del número de éxitos *k* en el conjunto *N* del que seleccionamos *n* artículos.

$$h(x;N,\,n,\,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

Ejemplo

- Lotes con 40 componentes cada uno que contengan 3 o más defectuosos se consideran inaceptables. El procedimiento para obtener muestras del lote consiste en seleccionar 5 componentes al azar y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de, que en la muestra, se encuentre exactamente un componente defectuoso, si en todo el lote hay 3 defectuosos?
- Solución:
- Se considera como éxito los artículos defectuosos
- 40= N
- 5=n
- 3=k
- 1=x
- $P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}$=0.3011

$h(1;40,5,3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}$

$x;N,n,k$

- El dueño de una casa planta 6 bulbos seleccionados al azar de una caja que contiene 5 bulbos de tulipán y 4 de narciso. ¿Cuál es la probabilidad de que plante 2 bulbos de narciso y 4 de tulipán?
- Solución
- Los éxitos están representados por los tulipanes
- h(x)=$\frac{\binom{5}{4}\binom{4}{2}}{\binom{9}{6}}$
- h(x;N,n,k)=$\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
- h(4;9,6,5)=$\frac{\binom{5}{4}\binom{9-5}{6-4}}{\binom{9}{6}}=0.3571$

$N=9$
$n=6$
$k=5$
$N-k=9-5=4$
$n-x=6-4=2$
$x=4$

$p=\frac{\binom{5}{4}\binom{4}{2}}{\binom{9}{6}}$

Media (μ) y varianza (σ^2) de la distribución hipergeométrica

- *En la distribución binomial a qué es igual la media?*
- *np*
- *En la distribución binomial a qué es igual la varianza? npq*
- *q=1-p*

- μ=n$\frac{k}{N} = \frac{nk}{N}$
- $\sigma^2 = (\frac{N-n}{N-1})\frac{nk}{N}(1-\frac{k}{N})$

La media y la varianza de la distribución hipergeométrica $h(x; N, n, k)$ son

$$\mu = \frac{nk}{N} \text{ y } \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right).$$

Existe una relación interesante entre las distribuciones hipergeométrica y binomial. Como se esperaría, si n es pequeña comparada con N, la naturaleza de los N artículos cambia muy poco en cada prueba. Así, cuando n es pequeña en comparación con N, se puede utilizar una distribución binomial para aproximar la distribución hipergeométrica. De hecho, por regla general la aproximación es buena cuando $n/N \leq 0.05$.

- Se estima que 4000 de los 10,000 residentes con derecho al voto de una ciudad están en contra de un nuevo impuesto sobre las ventas. Si se seleccionan al azar 15 votantes y se les pide su opinión, ¿cual es la probabilidad de que a lo sumo 7 estén a favor del nuevo impuesto?
- $P(X \leq 7) = \sum_{x=0}^{7} h(x, N, n, k) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \cdots \mathrm{P}(X=7)$
- P(X=0)=$\frac{\binom{6000}{0}\binom{4000}{15}}{\binom{10000}{15}}$ + P(X=1)=$\frac{\binom{6000}{1}\binom{4000}{14}}{\binom{10000}{15}}$+…….
- n/N=15/10,000=0.0015
- $P(X \leq 7) = \sum_{x=0}^{x=7} b(x, 15, 0{,}6) = 0.2131$
- ¿Cómo obtengo la probabilidad de éxito?k/N=6000/10000=3/5=0.6
- La probabilidad de que máximo 7 estén a favor del impuesto es del 21.31%

- De los 150 empleados de hacienda en una ciudad grande, solo 30 son mujeres. Suponga que se eligen al azar 10 de los empleados para que proporcionen asesoría gratuita sobre declaraciones de impuestos a los residentes de esta ciudad; calcular la probabilidad de que se seleccionen al menos 3 mujeres.

- $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \big(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\big) = 1 - \left(\frac{\binom{30}{0}\binom{120}{10}}{\binom{150}{10}} + \frac{\binom{30}{1}\binom{120}{9}}{\binom{150}{10}} + \frac{\binom{30}{2}\binom{120}{8}}{\binom{150}{10}}\right)$
- $1 - P(X < 3)$=$1 - \sum_{x=0}^{x=2} b(x; 10; 0.2) = 1 - .6778 = 0.3222$
- La probabilidad de que se seleccionen al menos 3 mujeres es de 32.22%

Tarea para exponer en una diapositiva

- Una ciudad vecina considera entablar una demanda de anexión en contra de una subdivisión del condado de 1200 residencias. Si los ocupantes de la mitad de las residencias objetan la anexión, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 10 residencias al menos 3 estén a favor de la anexión?
- Éxito estar a favor de la anexión
- N=1200 ,k=600, n=10, x=3,4,5,6,7,8,9,10
- Distribución: Hipergeométrica P(X$\geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1\{P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)\} =$
- h(x;N,n,k)=$\frac{\binom{600}{0}\binom{600}{10}}{\binom{1200}{10}}$ Observamos que son cantidades grandes. Cómo es n en comparación de N=10/1200=.0083, entonces podemos trabajar la distribución binomial.
- b(x;n,p)=$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$
- A qué es igual p=$\frac{K}{N} = \frac{600}{1200} = 0.5$
- P(X$\geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - \sum_{x=0}^{x=2} b(x, \overset{n}{10}; \overset{p}{0.5}) = 1 - 0.0547 = 0.9453$
- La probabilidad de que al menos 3 se incorporen a la demanda es de 95%

- Se selecciona al azar un comité de 3 personas a partir de 4 médicos y 2 enfermeras. Escriba una fórmula para la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X* que representa el número de médicos en el comité. Calcule *P*(2 ≤ *X* ≤ 3).
- N=6 personas
- n=3 personas
- K=4 médicos
- h(x;N,n,k)=$\frac{\binom{4}{x}\binom{2}{3-x}}{\binom{6}{3}}$ para x=1,2,3
- h(x;N,n,k)=$\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
- $P(2 \leq X \leq 3)$=$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}}+\frac{\binom{4}{3}\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 0.8$

Ejercicio

- Considere el uso de un medicamento que se sabe que es eficaz en el 60% de los casos en que se utiliza. El uso del medicamento se considerará un éxito si proporciona algún grado de alivio al paciente. Nos interesa calcular la probabilidad de que el quinto paciente que experimente alivio sea el séptimo paciente en recibir el medicamento en una semana determinada.

- Solución:
- _A__ __A__ __N__ _A___ _N___ _A___ __A__=$\binom{6}{4}$.6^5 .4^2=0.1866
- _N__ __A__ __A__ _A___ _N___ _A___ __A__
- _A__ __A__ __N__ _A___ _A___ _N___ __A__=

Distibución binomial negativa

- Si ensayos independientes repetidos pueden dar como resultado un éxito con probabilidad *p* y un fracaso con probabilidad *q* = 1 – *p*, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X*, en la que el número del ensayo en el que ocurre el *k*-ésimo éxito es:

$$b^*(x;k,p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad x = k, k+1, k+2, .$$

- En donde:
- x-ésimo ensayo
- K-ésimo éxito
- p=probabilidad de éxito
- q= probabilidad de fracaso

En el ejemplo anterior tendríamos:

$$b^*(7;5{,}0.6) = \binom{7-1}{5-1}(0.6)^5(0.4)^2 =$$

Ejemplo 1

- En la serie de campeonato de la NBA (National Basketball Association), el equipo que gane 4 de 7 juegos será el ganador. Suponga que los equipos *A* y *B* se enfrentan en los juegos de campeonato y que el equipo *A* tiene una probabilidad de 0.55 de ganarle al equipo *B.*
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo *A* gane la serie en 6 juegos?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo *A* gane la serie?
- c) Si ambos equipos se enfrentaran en la eliminatoria de una serie regional y el triunfador fuera el que ganara 3 de 5 juegos, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo *A* gane la serie?

Solución

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo *A* gane la serie en 6 juegos?
- __A__ _B___ __A__ ___A_ __B__ __A__= $\binom{5}{3}.55^4\,.45^2 = 0.1853$
- __A__ _A___ __A__ ___B_ __B__ __A__

- $b^*(6{,}4{,}0.55) = \binom{x-1}{k-1}.\,55^k.45^{x-k}$

- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo *A* gane la serie?0.606

- Caso 1 __A_ _A___ _A__ _A__= $\binom{3}{3}.55^4\,.45^0 = .091$
- ó
- Caso 2 _B__ _A__ _A__ __A_ _A__=$\binom{4}{3}.55^4\,.45^1 = .164$
- ó
- Caso 3 __A__ _B___ __A__ ___A_ __B__ __A__=$\binom{5}{3}.55^4\,.45^2 = 0.1853$
- Ó
- Caso 4 __A_ __A_ _B__ __A_ _B__ _B__ __A_=$\binom{6}{3}.55^4\,.45^3 = 0.166$

- c) Si ambos equipos se enfrentaran en la eliminatoria de una serie regional y el triunfador fuera el que ganara 3 de 5 juegos, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo *A* gane la serie?

- Caso 1__A_ _A__ _A__= $0.55^3.45^0$=0.1663
- Caso 2 _A__ __B_ _A__ __A_=$\binom{3}{2}.55^3\ .45^1$=0.224
- Caso 3 __A_ __B_ _A__ _B__ __A_= $\binom{4}{2}.55^3\ .45^2$=0.2021
- La probabilidad de que el equipo A gane la serie es de 59%

Ejemplo 2

- La probabilidad de que una persona que vive en cierta ciudad tenga un perro es de 0.3. Calcule la probabilidad de que la décima persona entrevistada al azar en esa ciudad sea la quinta que tiene un perro.

- $b^*(x;k;p) = b^*(10;5,.3) = \binom{x-1}{k-1}p^k q^{x-k}$

- _P__ __N_ __P_ __N_ __P_ _N__ _P__ _N__ _N__ _P__=$\binom{9}{4}.3^5\ (.7)^5 = 0.0514$
- La probabilidad de que la décima persona entrevistada sea la 5ª que tiene un perro es 5%

Ejemplo 3

- Calcule la probabilidad de que una persona que lanza una moneda obtenga
- *a*) la tercera cara en el séptimo lanzamiento;
- _C__ _x__ _x__ __C_ __x_ _x__ _C__=$\binom{6}{2}0.5^3.5^4 = .1171$

- *b*) la primera cara en el cuarto lanzamiento.
- _X__ _X__ __X_ _C__=$\binom{3}{0}0.5^1.5^3 = 0.0625$

Distribución geométrica

- Si pruebas independientes repetidas pueden tener como resultado un éxito con probabilidad *p* y un fracaso con probabilidad *q* = 1 – *p*, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X*, en la que el número de la prueba en el que ocurre el primer éxito, es decir, cuando el k-ésimo éxito tiene valor de 1, es:
- Si K=1
- $b^*(x,1,p) = \binom{x-1}{1-1}p^1q^{x-1}$= $g(x,p) = pq^{x-1}$

Ejemplo 1

- Se sabe que en cierto proceso de fabricación uno de cada 100 artículos, en promedio, resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto artículo que se inspecciona, en un grupo de 100, sea el primer defectuoso que se encuentra?
- x=5 __N_ _N__ _N__ __N_ _D__=$\binom{4}{0}0.01^1 0.99^4$
- k=1
- p=0.01
- G$(5,0.01)$=0.01$(0.99)^4$=0.009

Ejemplo 2

- En “momentos ajetreados” un conmutador telefónico está muy cerca de su limite de capacidad, por lo que los usuarios tienen dificultad para hacer sus llamadas. Seria interesante saber cuántos intentos serían necesarios para conseguir un enlace telefónico. Suponga que la probabilidad de conseguir un enlace durante un momento ajetreado es *p* = 0.05. Nos interesa conocer la probabilidad de que se necesiten 5 intentos para enlazar con éxito una llamada.
- Solución: _N__ _N__ _N__ _N__ _E__$(.05)(.95)^4 = 0.04$

Ejemplo 3

- Tres personas lanzan una moneda legal y el disparejo paga los cafés. Si todas las monedas tienen el mismo resultado, se lanzan de nuevo. Calcule la probabilidad de que se necesiten menos de 4 lanzamientos.

- Pedro Joaquín María

Ejemplo 3

- Tres personas lanzan una moneda legal y el disparejo paga los cafés. Si todas las monedas tienen el mismo resultado, se lanzan de nuevo. Calcule la probabilidad de que se necesiten menos de 4 lanzamientos.
- $P(x < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
- $b^*(x; k, p) = (1; 1{,}0.75)\ (2; 1{,}0.75) + (3; 1, .75) =$ $\binom{0}{0}(0.75)^1(.25)^0$+$\binom{1}{0}(0.75)^1(.25)^1$+$\binom{2}{0}(0.75)^1(.25)^2$= 0.9843
- g(x;p)pq^{x-1}= 0.75+ (0.75)(.25)+(0.75)$(0.25)^2$=0.9843
- __D_= 0.75
- __N__ _D__ = (0.75)(.25)=
- __N__ _N__ _D__ = (0.75)$(0.25)^2$ =

Media y varianza de una distribución geométrica

La media y la varianza de una variable aleatoria que sigue la distribución geométrica son

$$\mu = \frac{1}{p} \text{ y } \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

- Cuál es la fórmula de la media de la distribución binomial?
- $\mu = np$
- Cuál es la fórmula de la media de la distribución hipergeométrica?
- $\mu = n\frac{k}{N}$
- Cuál es la fórmula de la media de la distribución geométrica?
- μ=$\frac{1}{p}$

Distribución de Poisson y proceso de Poisson

- Los experimentos que producen valores numéricos de una variable aleatoria *X*, que corresponden al número de resultados que ocurren durante un intervalo de tiempo determinado o en una región especifica, se denominan **experimentos de Poisson**. El intervalo de tiempo puede ser de cualquier duración, como un minuto, un día, una semana, un mes o incluso un año. Por ejemplo, un experimento de Poisson podría generar observaciones para la variable aleatoria *X* que representa el número de llamadas telefónicas por hora que recibe una oficina, el número de días que una escuela permanece cerrada debido a la nieve durante el invierno o el número de juegos suspendidos debido a la lluvia durante la temporada de beisbol. La región específica podría ser un segmento de recta, una área, un volumen o quizá una pieza de material. En tales casos *X* podría representar el número de ratas de campo por acre, el número de bacterias en un cultivo dado o el número de errores mecanográficos por página. Un experimento de Poisson se deriva del **proceso de Poisson** y tiene las siguientes propiedades:

- **1.** El número de resultados que ocurren en un intervalo o región específica es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo de tiempo o región del espacio disjunto. De esta forma vemos que el proceso de Poisson no tiene memoria.
- El número medio de resultados se calcula a partir de $\mu = \lambda t$, donde t es el “tiempo”, la “distancia”, el “área” o el “volumen” específicos de interés. Como las probabilidades dependen de λ, denotaremos la tasa de ocurrencia de los resultados con $p(x; \lambda t)$. La siguiente fórmula se utiliza para calcular probabilidades de Poisson

$$p(x;\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde λ es el número promedio de resultados por unidad de tiempo, distancia, área o volumen y $e = 2.71828\ldots$

La tabla A.2 contiene las sumatorias de la probabilidad de Poisson

$$P(r;\lambda t) = \sum_{x=0}^{r} p(x;\lambda t),$$

- Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo dado?
- X=6
- δt =4 en un milisegundo
- P(X=6)=p(6;4) $= \frac{e^{-\delta t}\delta t^{x}}{x!} = \frac{4^6}{e^4 6!} = \frac{4{,}096}{39310.66} = 0.1041$
- Podemos emplear las tablas: P(X=6)=$\sum_{x=0}^{x=6}$ p(x;4) $-$ $\sum_{x=0}^{x=5}$ p(x;4) $= 0.8893 - .7851 = .1042$

Ejemplo 2

- El número promedio de camiones-tanque que llega cada día a cierta ciudad portuaria es 10. Las instalaciones en el puerto pueden alojar a lo sumo 15 camiones-tanque por día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado lleguen más de 15 camiones y se tenga que rechazar algunos?

δt =10

$$P(X > 15) = 1 - P(X \le 15)$$
$$= 1 - \sum_{x=0}^{x=15} p(x;10) = 1 - 0.9565 = .0435$$

$b(x; n, p)$
$\mu = np$

- Tanto la media como la varianza de la distribución de Poisson $p(x; \lambda t)$ son λt. $\lambda t = \mu$
- La distribución de Poisson se relaciona con la distribución binomial.
- De hecho, si n es grande y p es cercana a 0, se puede usar la distribución de Poisson, con $\mu = np$, para aproximar probabilidades binomiales.

Sea X una variable aleatoria binomial con distribución de probabilidad $b(x; n, p)$. Cuando $n \to \infty$, $p \to 0$, y $np \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ permanece constante,

$$b(x; n, p) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p(x; \mu).$$

Ejemplo

- En cierta fábrica los accidentes ocurren con muy poca frecuencia. Se sabe que la probabilidad de un accidente en cualquier día dado es de 0.005, y que los accidentes son independientes entre sí.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día de cualquier periodo determinado de 400 días ocurra un accidente?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un accidente a lo sumo en tres días de tal periodo?

$p = 0.005$
$n = 400$
$x = 1$

a $b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$b(1; 400, 0.005) = \binom{400}{1}(0.005)(0.995)^{399} = 0.27$

Cuando $n \to \infty$ y $p \to 0$

$p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda t^x}{x!}$, $\lambda t = np$

$p(1; 2) = \frac{e^{-2}\, 2}{1!} = \frac{2}{e^2} = 0.27$

b) $P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} b(x; 400, 0.005)$

$P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} p(x; 2) = 0.8571$

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día de cualquier periodo determinado de 400 días ocurra un accidente?
- p=0.005 n=400
- Como n es grande y p es pequeña entonces podemos emplear poisson
- $\mu = np = 400(0.005) = 2$
- P(X=1)=b(1; 400,.005)≈ $p(1,2) = \frac{e^{-2}2^1}{1!} = \frac{2}{e^2}$ =0.2706

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un accidente a lo sumo en tres días de tal periodo?

- $P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{x=3} p(x,2) = 0.8571$

Ejemplo 2

- En un proceso de fabricación donde se manufacturan productos de vidrio ocurren defectos o burbujas, lo cual ocasionalmente hace que la pieza ya no se pueda vender. Se sabe que, en promedio, 1 de cada 1000 artículos producidos tiene una o más burbujas. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 8000 tenga menos de 4 artículos con burbujas?

$p = 0.001$ $\lambda t = \mu = (8000)(0.001) = 8$
$n = 8000$
$P(X < 4) = \sum_{x=0}^{3} p(x; 8) = 0.0424$

- Suponga que, en promedio, 1 persona en 1000 comete un error numérico al preparar su declaración de impuestos. Si se seleccionan 10,000 formas al azar y se examinan, encuentre la probabilidad de que 6, 7 u 8 de las formas contengan un error.

X → Número de personas que comete 1 error en su declaración

$P(6 \leq X \leq 8) = \sum_{x=0}^{8} b(x; 10{,}000, 0.001) - \sum_{x=0}^{5} b(x; 10{,}000, 0.001)$

$n = 10{,}000$
$p = 0.001$

$P(X = 6) = \binom{10{,}000}{6}(0.001)^6(0.999)^{9994}$
$P(X = 7) =$
$P(X = 8) =$

Emplearíamos a Poisson

$P(6 \leq x \leq 8) = \sum_{x=0}^{8} p(x; 10) - \sum_{x=0}^{5} p(x; 10) = 0.3328 - 0.0671 = 0.2657$

$\mu = 10$

- El chef de un restaurante prepara una ensalada revuelta que contiene, en promedio, 5 vegetales. Encuentre la probabilidad de que la ensalada contenga más de 5 vegetales
- *a*) en un día dado; $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{x=0}^{5} p(x; 5) = 1 - 0.6093 = 0.3907$

  $X \rightarrow$ número de vegetales
- *b*) en 3 de los siguientes 4 días; $b(3, 4, 0.3907) = \binom{4}{3}(0.3907)^3(0.6093)$

  $x = 3$, $n = 4$

  $= 0.1453$
- *c*) por primera vez en abril el día 5

$X \rightarrow$ los días que consigo una ensalada c/ más de 5 vegetales

$b^*(x; k, p) = g(x; p) = pq^{x-1}$

$b^*(5, 1, 0.3907) = g(5; 0.3907) = (0.3907)(0.6093)^4 = 0.053$

$\binom{5-1}{1-1} p^1 q^{x-k}$

N N N N E

$h(x; N, n, K)$

$\downarrow$

Puedo usar la distribución binomial

$\frac{n}{N} \leq 0.05$

$p = \frac{K}{N}$

$b(x, n, p)$

$p(x; \lambda t)$

$\downarrow \mu$

ocurre $n \rightarrow \infty$

$p \rightarrow 0$

Puedo emplear poisson

$p(x; np)$