Temas 1.4, 1.5 y 1.6

Probabilidad condicional

La probabilidad de que ocurra un evento *B* cuando se sabe que ya ocurrió algún evento *A* se llama **probabilidad condicional** y se denota con $P(B|A)$. El símbolo $P(B|\mathrm{A})$ por lo general se lee como "la probabilidad de que ocurra *B*, dado que ocurrió *A*", o simplemente, "la probabilidad de *B*, dado *A*".

La noción de probabilidad condicional brinda la capacidad de reevaluar la idea de probabilidad de un evento a la luz de la información adicional; es decir, cuando se sabe que ocurrió otro evento. La probabilidad $P(A|B)$ es una actualización de $P(A)$ basada en el conocimiento de que ocurrió el evento *B*.

Fórmula

- La probabilidad condicional de *B,* dado *A,* que se denota con $P(B|A)$, se define como

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$, siempre que $P(A) > 0$.

- La fórmula que se emplea es:
- $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{n(B \cap A)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{n(B \cap A)}{n(A)}$, siempre que $P(A) > 0$.

Regla del producto

Eventos Dependientes $P(A \cap B)$= $P(A)$*P*(*B*|*A*)

La fórmula se obtiene de efectuar un despeje:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Eventos independientes $P(A \cap B)$= *P*(*A*) *P*(*B*)

Entonces: dos eventos *A* y *B* son **independientes** si y solo si:

P(*B*|*A*) = *P*(*B*) ó

P(*A*|*B*) = *P*(*A*).

Tenemos un espacio muestral S constituido por la población de adultos de una pequeña ciudad que cumplen con los requisitos para obtener un título universitario. La clasificación de acuerdo a su género y situación laboral es:

	Empleado	Desempleado	Total
Hombre	460	40	500
Mujer	140	260	400
Total	600	300	900

Se selecciona al azar a una de estas personas para que realice un viaje con la finalidad de que promueva las ventajas de que se establezcan industrias nuevas en la ciudad.

Sea:

H: hombre, M: mujer, E: empleado, D: desempleado

¿Cuál es la probabilidad de elegir a un hombre dado que tiene empleo?
¿Cuál es la probabilidad de elegir a una mujer dado que es desempleada?
¿Cuál es la probabilidad de elegir a una persona desempleada dado que es hombre?
¿Cuál es la probabilidad de elegir a una persona con empleo, dado que es mujer?

En un grupo de alumnos, son mujeres y hombres, y tienen la siguiente situación académica:

	Regular	Irregular	Total
Hombre			
Mujer			
Total			

Se elige al azar a un estudiante:

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer dado que es regular?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre dado que es irregular?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea regular dado que es hombre?

Ejemplo:

La probabilidad de que un vuelo programado normalmente salga a tiempo es $P(D) = 0.83$, la probabilidad de que llegue a tiempo es $P(A) = 0.82$ y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo es $P(D \cap A) = 0.78$. Calcule la probabilidad de que un avión:

- *a*) llegue a tiempo, dado que salió a tiempo; y
- *b*) salió a tiempo, dado que llegó a tiempo.
- *c*) la probabilidad de que llegue a tiempo, dado que no salió a tiempo.

Ejemplo 2

Una caja contiene tres canicas; una roja, una blanca y una verde. Dos de ellas se extraen con reemplazamiento, es decir, una vez que se ha elegido una canica se observa su color y luego vuelve a introducirse en la caja, las canicas son revueltas antes de extraer una segunda canica y observar su color.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las canicas extraídas sea una verde y una blanca?

b) Si no hay reemplazamiento, ¿cuál será la probabilidad de que las canicas extraídas sea una verde y una blanca?

- De **6** números positivos y **8** números negativos se eligen **4** números al azar (sin sustitución) y se multiplican. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea un número positivo?

Ejemplo 2

El concepto de probabilidad condicional tiene innumerables aplicaciones industriales y Biomédicas. Considere un proceso industrial en el ramo textil, en el que se producen listones de una tela específica. Los listones pueden resultar con defectos en dos de sus características: la longitud y la textura. En el segundo caso el proceso de identificación es muy complicado. A partir de información histórica del proceso se sabe que 10% de los listones no pasan la prueba de longitud, que 5% no pasan la prueba de textura y que solo 0.8% no pasan ninguna de las dos pruebas. Si en el proceso se elige un listón al azar y una medición rápida identifica que no pasa la prueba de longitud, ¿cuál es la probabilidad de que la textura este defectuosa?

Ejemplo

Tenemos una caja con 31 galletas, 9 son de chocolate y 22 de otro sabor. Se extraen 2 galletas, una seguida de la otra, sin reemplazo.

Sean los eventos:

- ¿Cuál es la probabilidad de que las 2 sean de chocolate?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea de chocolate y la segunda de otro sabor?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean de otro sabor?

- Suponga que tenemos una caja de fusibles que contiene 20 unidades, de las cuales 5 están defectuosas. Si se seleccionan 2 fusibles al azar y se retiran de la caja, uno después del otro, sin reemplazar el primero, ¿cual es la probabilidad de que ambos fusibles estén defectuosos?

- Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 negras, y una segunda bolsa contiene 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera bolsa y se coloca sin verla en la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que ahora se saque una bola negra de la segunda bolsa?

- Una pequeña ciudad dispone de un carro de bomberos y una ambulancia para emergencias. La probabilidad de que el carro de bomberos este disponible cuando se necesite es 0.98 y la probabilidad de que la ambulancia este disponible cuando se le requiera es 0.92. En el evento de un herido, calcule la probabilidad de que tanto la ambulancia como el carro de bomberos estén disponibles, suponiendo que operan de forma independiente.

- La probabilidad de que el jefe de familia esté en casa cuando llame el representante de marketing de una empresa es 0.4. Dado que el jefe de familia está en casa, la probabilidad de que la empresa le venda un producto es 0.3. Encuentre la probabilidad de que el jefe de familia este en casa y compre productos de la empresa.

Si, en un experimento, pueden ocurrir los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, entonces

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \\
&\qquad = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}).
\end{aligned}
$$

Si los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son independientes, entonces

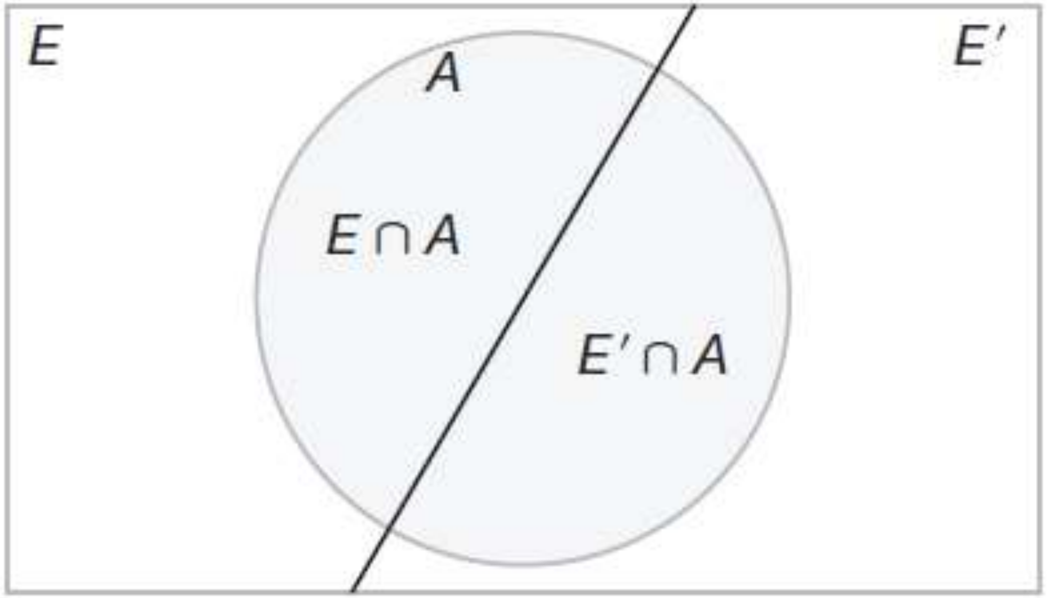
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)$$

Probabilidad total

- Regresemos al ejemplo en el que se selecciona un individuo al azar de entre los adultos de una pequeña ciudad para que viaje por el país promoviendo las ventajas de establecer industrias nuevas en la ciudad. Suponga que ahora se nos da la información adicional de que 36 de los empleados y 12 de los desempleados son miembros de un Club. Deseamos encontrar la probabilidad del evento *A* de que el individuo seleccionado sea miembro del Club.

	Empleado	Desempleado	Total
Hombre	460	40	500
Mujer	140	260	400
Total	600	300	900

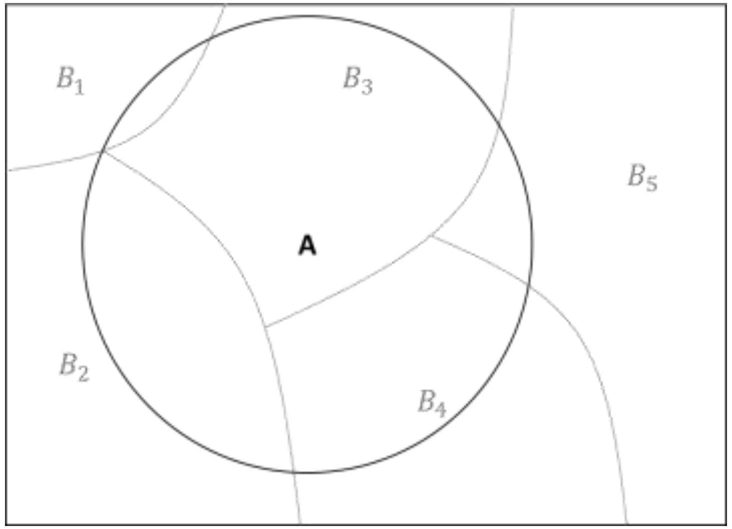
$$
\begin{aligned}
P(A) &= P\left[(E \cap A) \cup (E' \cap A)\right] = P(E \cap A) + P(E' \cap A) \\
&= P(E)P(A|E) + P(E')P(A|E').
\end{aligned}
$$



Teorema de probabilidad total o **regla de eliminación**

Si los eventos B_1, B_2,... B_k constituyen una partición del espacio muestral S, tal que $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2,..., k$, entonces, para cualquier evento A de S,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i).$$



- Tres máquinas de cierta planta de ensamble, $B1$, $B2$ y $B3$, montan 30%, 45% y 25% de los productos, respectivamente. Se sabe por experiencia que 2%, 3% y 2% de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente, tienen defectos. Ahora bien, suponga que se selecciona de forma aleatoria un producto terminado. ¿Cuál es la probabilidad de que este defectuoso?

- Suponga que en lugar de calcular $P(A)$ mediante la regla de eliminación en el ejemplo anterior, consideramos el problema de obtener la probabilidad condicional $P(Bi|A)$. En otras palabras, suponga que se selecciona un producto de forma aleatoria y que este resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que este producto haya sido ensamblado con la máquina Bi? Las preguntas de este tipo se pueden contestar usando el siguiente teorema, denominado **regla de Bayes**

Regla de Bayes

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)},$$

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$

- Con referencia al ejemplo de las máquinas de ensamblaje, si se elige al azar un producto y se encuentra que esta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido ensamblado con la maquina $B3$?

Ejercicio 1

Suponga que los cuatro inspectores de una fábrica de película colocan la fecha de caducidad en cada paquete de película al final de la línea de montaje. John, quien coloca la fecha de caducidad en 20% de los paquetes, no logra ponerla en uno de cada 200 paquetes; Tom, quien la coloca en 60% de los paquetes, no logra ponerla en uno de cada 100 paquetes; Jeff, quien la coloca en 15% de los paquetes, no lo hace una vez en cada 90 paquetes; y Pat, que fecha 5% de los paquetes, falla en uno de cada 200 paquetes. Si un cliente se queja de que su paquete de película no muestra la fecha de caducidad, .cual es la probabilidad de que haya sido inspeccionado por John?

Ejercicio 2

- Una empresa de manufactura emplea tres planos analíticos para el diseño y desarrollo de un producto específico. Por razones de costos los tres se utilizan en momentos diferentes. De hecho, los planos 1, 2 y 3 se utilizan para 30%, 20% y 50% de los productos, respectivamente. La tasa de defectos difiere en los tres procedimientos de la siguiente manera:

$P(D|P1) = 0.01$, $P(D|P2) = 0.03$, $P(D|P3) = 0.02$, en donde $P(D|Pj)$ es la probabilidad de que un producto este defectuoso, dado el plano j.

Si se observa un producto al azar y se descubre que esta defectuoso, ¿cuál de los planos tiene mas probabilidades de haberse utilizado y, por lo tanto, de ser el responsable?