Apuntes del Programa de Probabilidad y Estadística

Ricardo Ceballos Sebastián

2 de mayo de 2019

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la probabilidad

La probabilidad es una rama de las matemáticas cuya aplicación es de carácter tan general, que es tema de estudio tanto en las ciencias exactas como en las ciencias sociales. El concepto *probabilidad* surge de la necesidad de conocer la oportunidad de ganar en los juegos de azar. Su objeto de estudio son aquellos experimentos en los cuales está presente el azar como el elemento principal. El Diccionario Enciclopédico Espasa [5] define azar como casualidad y en el mismo sentido, la Real Academia de la Lengua Española[6] define el azar como casualidad o caso fortuito.

1.1. Generalidades

En esta sección se presentarán los conceptos fundamentales de la probabilidad: El objeto de estudio y sus características más importantes.

1.1.1. Modelos probabilísticos y determinísticos

Definición 1.1.1 (Experimento) *Se conoce como experimento a cualquier proceso que genere un conjunto de datos.*

Experimentos deterministas y modelos determinísticos Existen ciertos experimentos, que si se llevan a cabo, bajo condiciones esencialmente idénticas, se llegarán a los mismos resultados. A este tipo de experimentos se les conoce como experimentos deterministas. Por ejemplo, si se deja caer un balín de 1cm de diámetro desde una altura determinada h, es posible medir el tiempo de caída t (con el equipo adecuado) y éste será prácticamente el mismo, siempre que el experimento se repita bajo las mismas condiciones. Para el ejemplo que se ha citado, existe una ley que determina el tiempo de caída en función de la altura ($t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$). El modelo que llevó a establecer la ley anterior es un ejemplo de modelo determinista. El éxito del modelo solo puede concretarse una vez que se confirman las consecuencias del modelo mediante la observación o experimentación. En general, los modelos determinísticos son aquellos en los cuales se acepta que las condiciones iniciales en las que se realiza el experimento definen el resultado del mismo.

Experimentos aleatorios y modelos probabilísticos Existen experimentos en los cuales no es posible controlar el valor de determinadas variables, en otros las variables son desconocidas totalmente, de manera que el resultado cambiará de un experimento a otro, a pesar de que la mayoría de las condiciones sean las mismas. A este tipo de experimentos se les conoce como aleatorios. Por ejemplo, al lanzar una moneda al aire, el resultado del experimento será cara (C) o cruz (X). Aquí interesan particularmente las observaciones que se obtegan en la repetición del experimento que, como puede verse, dependerán del azar y no podrá predecirse un resultado con precisión. En este caso, aplicar un modelo determinista es imposible; sin embargo, los modelos probabilísticos han probado su potencial con este tipo de experimentos. En general, a diferencia de los modelos determinísticos, en un modelo probabilístico, las condiciones iniciales bajo las cuales se realiza el experimento no definen el resultado, sino lo que posteriormente se conocerá como la distribución de probabilidades.

1.1.2. Espacio de muestras y eventos

Definición 1.1.2 (Espacio de muestras o espacio muestral) *Se conoce como espacio muestral al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. El espacio muestral se representa generalmente mediante la letra S.*

Ejemplo 1.1.1 *Considérese el experimento que consiste en examinar dos artículos de una línea de producción. Los artículos pueden clasificarse en defectuosos (D) o no defectuoso (N). En este caso, el espacio muestral S es el conjunto,*

$$S = \{DD, DN, ND, NN\}.$$

Ejemplo 1.1.2 *Si se lanza un dado y se observa el número en la cara que cae hacia arriba, entonces el espacio muestral es*

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ejemplo 1.1.3 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un dado hasta que aparezca el primer* 3*. En este caso, en cada lanzamiento se puede obtener éxito*(3) *o fracaso*(3′)*. El espacio muestral puede representarse como,*

$$S = \{3, 3'3, 3'3'3, 3'3'3'3, \ldots\}$$

.

Ejemplo 1.1.4 *Considérese el experimento que consiste en determinar la altura de los estudiantes de una clase de matemáticas. En este caso, el espacio muestral consiste en un intervalo y cualquier valor entre dicho intervalo está permitido. En este caso,*

$$S = \{x|a < x < b\}.$$

Espacios muestrales discretos y no discretos
Los espacios muestrales se clasifican en discretos y no discretos. Los espacios muestrales discretos son aquellos que poseen un número finito o infinito numerable de elementos. Los ejemplos 1.1.1 y 1.1.2 son ejemplos de espacios muestrales discretos con un número finito de elementos; mientras que el ejemplo 1.1.3 representa un espacio muestral discreto con un número infinito numerable de elementos. Por otro lado, se conoce como espacio muestral no discreto a los espacios que contienen tantos elementos como el intervalo (0, 1) en los números reales. Un ejemplo de espacio muestral no discreto lo constituye el ejemplo 1.1.4.

Definición 1.1.3 (Eventos) *Un evento es cualquier subconjunto del espacio muestral. Dos eventos de particular interés lo constituyen el evento seguro S, y el evento imposible, denotado por* ϕ*.*

Definición 1.1.4 (Eventos excluyentes o disjuntos) *Dos eventos* A *y* B *son mutuamente excluyentes o disjuntos si* $A \cap B = \phi$*; es decir, no tienen elementos en común.*

Dado que los eventos son conjuntos, entonces es posible definir sobre ellos las operaciones usuales sobre conjuntos; es decir, la unión, la intersección, el complemento y la diferencia. A continuación se definen lo eventos citados y se representan gráficamente mediante los diagramas de Venn.

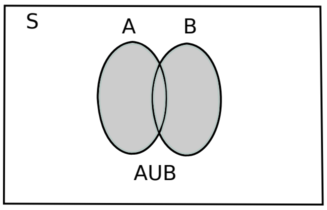


Figura 1.1: Unión

Definición 1.1.5 (Unión) *Si A y B son dos eventos, entonces la unión de estos eventos, denotado por $A \cup B$, es el evento que contiene a todos los elementos que pertenecen a A o a B.*

Definición 1.1.6 (Intersección) *Si A y B son dos eventos, entonces la intersección de estos eventos, denotado por $A \cap B$, es el evento que contiene a todos los elementos comunes a A y a B.*
Algunas veces se omite el signo $\cap$, de manera que el evento $A \cap B$ se denota como AB. Esta notación se utilizará algunas veces en este trabajo; sin embargo, se advertirá que se trata de la notación económica.

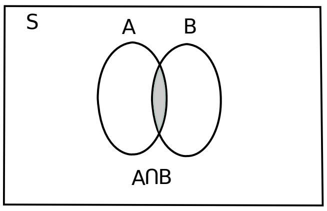


Figura 1.2: Intersección

Definición 1.1.7 (Diferencia) *Si A y B son dos eventos, entonces el evento diferencia de A y B, denotado por $A - B$, es el conjunto que contiene a los elementos que se encuentran en A pero que no se encuentran en B.*

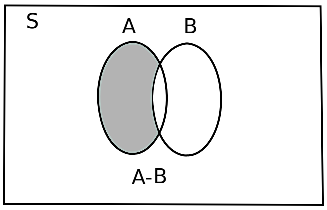


Figura 1.3: Diferencia

Definición 1.1.8 (Complemento) *Si A es un evento, entonces el complemento de A, denotado por $A', A^c, \complement A$ o $\overline{A}$, es el evento que contiene a los elementos de S que no están en A; es decir, $\overline{A} = S - A$.*

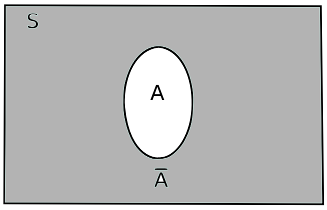


Figura 1.4: Complemento

Definición 1.1.9 (Producto cartesiano) *Si A y B son dos eventos diferentes del vacío, el producto cartesiano de A y B, denotado por $A \times B$ es*

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

1.1.3. Interpretación de la probabilidad

La probabilidad de un evento es una medida de la oportunidad de ocurrencia que tiene dicho evento. Para cuantificar la probabilidad del evento se le asigna un número entre 0 y 1. Se asigna una probabilidad de ocurrencia igual a 1, al evento seguro; es decir, al espacio muestral S; mientras que al evento imposible ϕ, se le asigna una probabilidad de ocurrencia 0. Para asignarle una probabilidad a cualquier evento A contenido en S, se tienen dos enfoques diferentes conocidos como: enfoque clásico y enfoque frecuentista.

Definición 1.1.10 (Enfoque clásico) *Si un experimento aleatorio puede resultar de n maneras diferentes, todas igualmente probables, y un evento A contenido en S contiene h de los posibles resultados, entonces la probabilidad del evento A, denotado por $P(A)$ es,*

$$P(A) = \frac{h}{n}. \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.1.5 *Supóngase que se lanza un dado y que las seis caras tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Si se define el evento A como: obtener un número par, entonces para este caso $n = 6$ y $h = 3$, y de acuerdo con el enfoque clásico,*

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.50.$$

Definición 1.1.11 (Enfoque frecuentista) *Si un experimento aleatorio con espacio muestral S se repite un número n de veces, donde n es muy grande, y el evento A contenido en S ocurre h veces, entonces la probabilidad del evento A, denotado por $P(A)$ es,*

$$P(A) = \frac{h}{n}. \tag{1.2}$$

Ejemplo 1.1.6 *Supóngase que se lanza un dado 100 veces y que se obtienen 55 números pares, en este caso, si A es el evento: obtener número par; de acuerdo con el enfoque frecuentista,*

$$P(A) = \frac{55}{100} = 0.55.$$

El enfoque clásico requiere, para su validez, que los eventos simples sean *igualmente probables*, mientras que el enfoque frecuentista requiere que n sea muy grande. Se evitarán la ambigüedades de las expresiones "igualmente probables" y "n muy grande" mediante un tercer enfoque, conocido como el enfoque axiomático de la probabilidad y que se tratará más adelante.

1.2. Elementos del análisis combinatorio

En muchos casos el número de puntos en un espacio muestral no es muy grande, de manera que resulta fácil la enumeración directa o el conteo directo. Sin embargo, con frecuencia se presentan experimentos cuyos espacios muestrales contienen tantos elementos que enlistarlos ya no constituye una posibilidad práctica. En tales casos, se hace uso del análisis combinatorio, que, como se verá a continuación, se basa en el principio fundamental de conteo.

Principio fundamental de conteo

Si una operación puede realizarse de n_1 maneras diferentes, y si para cada una de éstas una segunda operación puede efectuarse de n_2 maneras diferentes, y así sucesivamente hasta una k-ésima operación que puede realizarse de n_k maneras diferentes, entonces se tienen $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ maneras diferentes de realizar la secuencia de las k operaciones en el orden establecido.

El principio fundamental de conteo tiene su origen en el diagrama de árbol. A continuación se ilustra este hecho para tres procesos con $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 4$. Véase la figura 1.5.

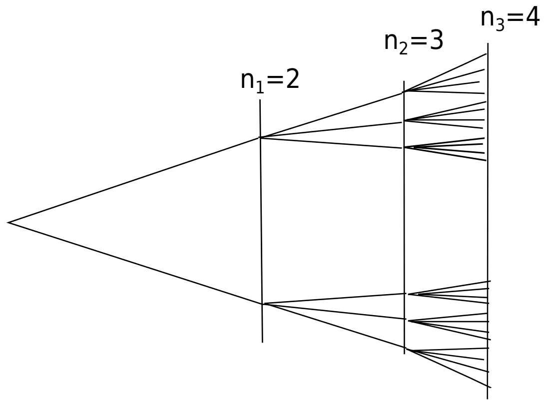


Figura 1.5: Principio fundamental de conteo y diagrama de árbol

El número total de manera en que el proceso puede realizarse en el orden 1, 2 y 3, corresponde al número total de las ramas finales del árbol: esto es $n_1 n_2 n_3 = 2(3)(4) = 24$.
Siempre resulta ventajoso tener una imagen del proceso. Se recomienda por simplicidad construir una línea de cuadros, como se muestra a continuación, y colocar en el cuadro correspondiente los número $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de acuerdo con el orden del proceso.

1	2	...	k
n_1	n_2	...	n_k

Ejemplo 1.2.1 *¿Cuántos números telefónicos pueden formarse con diez números, de los cuáles los dos primeros sólo pueden ser 5?*

Solución: Los dos primeros números solo tienen una manera de ser escogidos, ya que todos los números comenzarán con 55. Para cada uno de los siguientes números se tienen 10 posibilidades, ya que en cada uno de los espacios se usará un dígito.

1	1	10	10	10	10	10	10	10	10

Finalmente, por el principio fundamental de conteo se tienen 10^8 números telefónicos diferentes.

Ejemplo 1.2.2 *¿De cuántas maneras diferentes se pueden seleccionar parejas de distinto sexo de un grupo de 4 hombres y 7 mujeres?*

Solución: Hay 4 maneras de escoger un hombre y 7 maneras de seleccionar una mujer.

H	M
4	7

Por el principio fundamental de conteo se pueden formar $4(7) = 28$ parejas diferentes.

Ejemplo 1.2.3 *a) ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con el conjunto* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *si no se permite repetición? b) ¿Cuántos de estos números son pares? c) ¿Cuántos son impares?*

Solución:

a) Para explicar la solución de este tipo de problemas se recurrirá al arreglo de cuadros que se recomendó anteriormente. Considérese que los cuadros representan las tres cifras de los números que se requiere formar.

1	2	3

El primer cuadro se rellenará con el número 5, ya que del conjunto se pueden escoger solo 5 dígitos para formar el número de 3 cifras. El cero se descarta porque no se formarían con él números de tres cifras en dicha posición.

1	2	3
5		

El segundo cuadro se rellenará con el número 5, ya que existen 5 opciones del conjunto dado para formar un número de 3 cifras. Aunque el dígito que se usó en la casilla anterior no puede usarse nuevamente, en esta posición el cero si es una opción válida.

1	2	3
5	5	

Por último, los dos dígitos del conjunto dado que se hayan usado en la primera y segunda posición, ya no podrán usarse en la tercera posición del número a formar, de manera que el tercer cuadro se rellenará con el número 4.

1	2	3
5	5	4

Por el principio fundamental de conteo se tienen, $T = 5 \times 5 \times 4 = 100$ números diferentes de tres cifras.

b) Para determinar los números pares se comenzará por calcular aquellos que terminan en 2 y 4, ya que el cero sigue una regla diferente en la formación de los números y por esa razón se calcularán por separado los números pares de 3 cifras que terminan en cero.

Números pares que terminan en 2 y 4.
Considérese nuevamente la línea de cuadros,

1	2	3

El tercer cuadro se rellenará con el número 2, ya que hay dos opciones para que el número termine en 2 y 4.

1	2	3
		2

La primera casilla se rellenará con el número 4, debido a que el número que se usó en la tercera casilla y el cero no son opciones para el primer dígito del número que se formará. Éstos dos números se excluyen de las opciones válidas, de manera que, se tienen solamente 4 opciones diferentes para el primer dígito del número que se desea formar.

1	2	3
4	4	2

Excluyendo los dos númeron usados, quedan 4 opciones para escoger el segundo dígito, por esta razón la segunda casilla se rellanará con el número 4. Por el principio fundamental de conteo se tienen, $4 \times 4 \times 2 = 32$ números diferentes de tres cifras que terminan en 2 y 4.

Números pares que terminan en 0.
Considérese la línea de cuadros

1	2	3
5	4	1

Solo hay una opción para llenar la tercera casilla (el 0). Para la primera casilla hay 5 opciones descartando el cero. Para la segunda casilla hay 4 opciones, descartando el cero que se usó en la primer casilla y el número que se haya escogido para el primer cuadro. Por el principio fundametal de conteo se tienen, $4 \times 5 = 20$ números diferentes de tres cifras que terminan en 0.
Finalmente, sumando todos los números pares se obtienen $P = 32 + 20 = 52$ números pares diferentes de tres cifras.

c) Para hallar los números impares se cuenta con dos opciones:
Primera opción: Nuevamente la línea de cuadros

1	2	3
4	4	3

A continuación se explica el llenado de las casillas. Tercera casilla: Hay tres maneras en que un número impar puede finalizar, con el conjunto dado.
Primera casilla: Descartando el cero y el número usado en la primera casilla se tienen 4 opciones para la primer casilla.
Segunda casilla: Descartado los 2 dígitos usados en las casillas 3 y 1, quedan 4 opciones para la segunda casilla.
Por el principio fundamental de conteo se tienen $I = 4 \times 4 \times 3 = 48$ números impares de tres cifras.

Segunda opción:
El total T (hallado en el inciso a se compone de la cuenta de los números pares e impares. Si a T se le resta el número total de los pares, el resto debe corresponder a los impares; es decir,

$$I = T - P = 100 - 52 = 48.$$

1.2.1. Permutaciones

Supóngase que se tienen n objetos diferentes y que se desea ordenar r de ellos en línea. Cada una de estas posibles ordenaciones se conoce como permutación de n objetos tomados r a la vez. Para determinar el número total de tales ordenaciones se procede de la siguiente manera: Debido a que existen n maneras diferentes para escoger el primer objeto, y luego $n - 1$ maneras diferentes de escoger el segundo, y así sucesivamente, al final se tendrán $n - r + 1$ maneras de escoger el r-*ésimo* objeto. La siguiente tabla muestra el proceso.

1	2	...	r
n	$n-1$	...	$n-(r-1)$

A partir del principio fundamental de conteo, se deduce que el número de arreglos diferentes está determinado por,

$$nP_r = n(n-1)\dots(n–r+1), \tag{1.3}$$

donde nP_r es el número total de permutaciones de n objetos tomados r a la vez.
Es posible expresar nP_r de una forma más conveniente, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} nP_r &= n(n-1)\dots(n–r+1), \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n–r+1)((n-r)!)}{(n-r)!}, \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dado que $0! = 1$, entonces para el caso particular en que $r = n$ se obtiene,

$$nP_n = n! \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.2.4 *Determine el número de arreglos diferentes o permutaciones, que constan de 3 letras cada una, que pueden formarse a partir de 7 letras:* $\{A, B, C, D, E, F, G\}$

Solución: Se requiere determinar las permutaciones de 7 objetos tomados 3 a la vez; es decir,

$$7P_3 = \frac{7!}{4!} = 210.$$

Ejemplo 1.2.5 *En una sección de un teatro, la fila A tiene asientos numerados del 1 al 10. Si 5 niños y 5 niñas deben sentarse en la fila A. Determine el número de maneras en que esto es posible si,*

a) no existen restricciones,

b) deben sentarse en dos grupos: uno de niños y otro de niñas,

c) deben sentarse de manera alternada.

Solución:

a) Si no existen restriciones, entonces se trata de hallar las permutaciones de 10 elementos diferentes tomados todos a la vez; es decir,

$$10P_{10} = 10! = 3,628,800.$$

b) Se tienen 2 maneras de colocar a los grupos. Los elementos de cada grupo pueden colocarse de 5!. Por el principio fundamental de conteo se tienen

$$2(5!)(5!) = 28,800,$$

maneras diferentes de sentarlos en dos grupos.

c) Considésere en primer lugar que se acomodan a las niñas en los asientos impares. Esto puede hacerse de 5! maneras diferentes. Para cada una de las ordenaciones anteriores, los niños pueden colocarse en los asientos pares de 5! maneras diferentes. Por el principio fundamental de conteo se tienen $5! \times 5!$ maneras diferentes de colocarlos en sus asientos. Bajo el mismo argumento los niños pueden colocarse en los asientos impares y las niñas en los asientos pares de $5! \times 5!$ maneras diferentes. En total se tienen,

$$2 \times 5! \times 5! = 28800,$$

maneras diferentes de colocarlos en sus asientos de forma alternada.

Permutaciones de n elementos no todos diferentes entre sí

Supóngase que un conjunto consta de n objetos de los cuales n_1 son de una primera especie (es decir, que no pueden distinguirse entre sí), n_2 son de una segunda especie, y así sucesivamente; n_k son de una *k-ésima* especie, donde por supuesto, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Si todos los objetos fueran diferentes, entonces el número de permutaciones diferentes sería, $nP_n = n!$ Considerando que no todos los objetos son distinguibles y sea Q el número de arreglos diferentes, entonces $Qn_1!n_2!\ldots n_k!$ es el número de maneras de arreglar los n objetos como si fueran distinguibles, esto es $n!$, por lo tanto,

$$Qn_1!n_2!\ldots n_k! = n!$$

luego,

$$Q = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

El número total de permutaciones donde no todos los elementos son diferentes, se representa comunmente como $nP_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, de manera que,

$$nP_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \tag{1.6}$$

Ejemplo 1.2.6 *Determine el número de permutaciones diferentes de 9 letras que pueden formarse con las letras de la palabra CARRETERA.*

Solución: Se tiene un conjunto que consta de 1C, 2A, 3R, 2E y 1T, es decir, se tienen elementos de diferentes especies, por lo tanto, el número de permutaciones diferentes de 9 letras está dada por

$$9P_{1,2,3,2,1} = \frac{9!}{2!3!2!} = 15,120.$$

Ejemplo 1.2.7 *¿Cuántos códigos diferentes pueden formarse con 6 unos y 4 ceros, es decir, con 1111110000?*

a) Sin restricciones

b) Si siempre se comienza y finaliza con un 1.

Solución:

a) Se tiene un conjunto de 10 elementos, de los cuales 6 son de una especie y 4 de otra; el número de permutaciones diferentes está determinado por,

$$10P_{6,4} = \frac{10!}{6!4!} = 210.$$

b) Si se fijan los extremos de la permutación con unos en cada extremo, entonces se necesitan colocar 2 unos en dichas posiciones, los cuales pueden escogerse de una sola manera, ya que éstos 6 elementos son indistinguibles. De manera que los 4 unos restantes se permutarán con los 4 ceros generando un total de

$$8P_{4,4} = \frac{10!}{4!4!} = 70 \text{ permutaciones diferentes.}$$

Un arreglo posible del problema corresponde a 1111100001. Este problema está íntimamente relacionado con el problema de las casillas, que consiste en repartir n objetos idénticos en r casillas separadas. Es decir, el inciso b puede interpretarse como el número de maneras de repartir 4 canicas idénticas en 5 compartimentos separados.

Permutaciones circulares (cíclicas)

Considérese que se tienen n objetos diferentes que deben ser colocados alrededor de un círculo, en una secuencia cíclica o cerrada. Cada uno de los posibles arreglos se conoce como permutación cíclica. Considérese el caso en que tres personas, por decir, A, B y C deben sentarse en una mesa redonda. Los lugares a ocupar pueden numerarase como 1, 2 y 3. En la figura 1.6 se muestran dos arreglos, los cuales son esencialmente equivalentes.

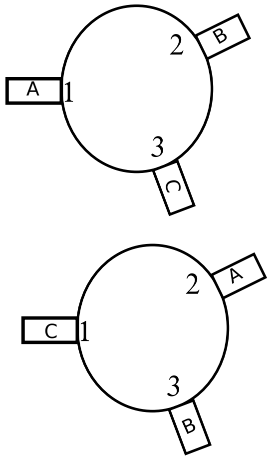


Figura 1.6: Arreglos equivalentes

Para no contar las permutaciones equivalentes más de una vez, se procederá de la siguiente manera. Se fijará un objeto en una de las posiciones y enseguida se permutarán los n–1 objetos restantes. Por lo anterior se tienen (n–1)! maneras diferentes de colocar los $n-1$ objetos, una vez que se fija el primero. Lo anterior se expresa mediante

$$nP_c = (n-1)! \tag{1.7}$$

donde nP_c representa el número de permutaciones cíclicas de n elementos.

Ejemplo 1.2.8 *¿De cuántas maneras pueden sentarse 6 personas alrededor de una mesa redonda?*

Solución: Se trata de determinar las permutaciones cíclicas de 6 objetos. De acuerdo con la ecuación 1.7 se tienen,

$$6P_c = 5! = 120,$$

maneras diferentes de sentar a 6 personas alrededor de una mesa redonda.

Ejemplo 1.2.9 *Tres mujeres y tres hombres deben sentarse de modo que sus lugares queden alternados. Calcule de cuántas formas es posible hacerlo si se sientan alrededor de una mesa circular.*

Solución: Se tienen 6 espacios, los cuales pueden numerarse como 1,2,3,4,5,6. Si los espacios impares son ocupados por las mujeres, entonces se tienen 2! formas de acomodar a las mujeres. Los lugares pares serán ocupados por los hombres y esto puede hacerse de 3! maneras diferentes. Por el principio fundamental de conteo se tienen 2!3! = 12 maneras diferentes.

Ejemplo 1.2.10 *Determine de cuántas formas pueden sentarse 8 personas alrededor de una mesa redonda si,*

a) pueden sentarse en cualquier forma,

b) dos personas no pueden estar una al lado de la otra.

Solución:
a) Se requiere determinar la permutación cíclica de 8 objetos.

$$8P_c = 7! = 5040.$$

b) Primero se calculará el número de formas en que estas personas pueden sentarse juntas, así que para los fines del conteo serán considerandos como un solo ente. Entonces se tienen 7 objetos diferentes que deben permutarse cíclicamente; por lo tanto,

$$7P_c = 6!$$

Para cada una de las ordenaciones anteriores, las dos personas que deben permanecer juntas, pueden intercambiar sus lugares, entonces por el principio fundamental de conteo se tienen, $2(6!) = 1440$ formas diferentes en que dos personas pueden sentarse juntas. El complemento de esta afirmación es justamente el número de formas en que dos personas no pueden sentarse juntas, así que este número será el que se obtenga de la diferencia con el total. Entonces se tienen, $5040 - 1440 = 3600$ formas en que dos personas no se sienten juntas.

1.2.2. Combinaciones

En muchos problemas el interés se centra en el número de formas diferentes de seleccionar r objetos de un total de n posibles, sin importar el orden. Estas selecciones se llaman combinaciones de n objetos tomados r a la vez. Por ejemplo, considérese el conjunto $\{A, B, C, D, E\}$, si se desea obtener las combinaciones de tres letras, se debe considerar que ABC y todas sus posibles permutaciones ($3! = 6$) forman una sola combinación ; es decir, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA son una misma combinación. Si C es el número total de combinaciones y por cada una de ellas hay ($3!$) permutaciones, entonces el número total de permutaciones de 5 letras, tomados 3 a la vez es

$$5P_3 = C(3!),$$

de manera que,

$$C = \frac{5P_3}{3!}$$

Lo anterior se generaliza de manera inmediata. El número de combinaciones de n objetos distintos, tomados r a la vez se denota por nC_r o $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$, de manera que,

$$nC_r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.8}$$

El número nC_r se como conoce como coeficiente binomial, ya que aparece en el desarrollo del binomio de Newton, como se mostrará en el ejemplo 1.2.11.

Teorema 1.2.1 *Si n y r son números enteros tales que $r \leq n$, entonces*

$$a) \quad \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Demostración: a) Desarrollando el lado derecho de la ecuación 1.9 se obtiene,

$$\begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!}, \\
&= \frac{(r+n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}, \\
&= \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}, \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}, \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1))!} + \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!}, \\
&= \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La propiedad contenida en inciso b implica que: seleccionar r objetos de n posibles es equivalente a seleccionar $n-r$ objetos de los n posibles. La propiedad contenida en el inciso b es la base para la construcción del arreglo de números conocido como triángulo de Pascal y que es muy útil en el desarrollo de la potencia de un binomio.

Ejemplo 1.2.11 *Considérese que un conjunto A contiene n elementos, donde n es un entero positivo. Demuéstrese que A posee exactamete 2^n subconjuntos.*

Solución: A contiene $nC_0 = 1$ subconjunto con cero elementos (el conjunto vacío), $nC_1 = n$ subconjuntos con 1 elemento , nC_2 subconjuntos con 2 elementos, ..., $nC_n = 1$ subconjunto con 1 elemento (el propio conjunto A). De manera que el número total de subconjuntos puede expresarse como,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \tag{1.11}$$

Por otra parte, el desarrollo del binomio de Newton se expresa como,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{1.12}$$

Si se evalúa la ecuación 1.12 para $x = y = 1$ se obtiene,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{1.13}$$

y esto es justo lo que se quería demostrar.

Ejemplo 1.2.12 *Una clase de probabilidad consta de 20 hombre y 15 mujeres. ¿Cuántos equipos de 5 estudiantes, cada uno constituido por 3 hombres y 2 mujeres pueden formarse?*

Solución: Se tienen $20C_3$ maneras de escoger tres hombres; para cada una de estas combinaciones se tienen $15C_2$ maneras de escoger 2 mujeres. Por el principio fundamental de conteo se tienen

$$(20C_3)(15C_2) = 119700$$

equipos de 5 estudiantes y que estén constituidos por 3 hombres y 2 mujeres.

Ejemplo 1.2.13 *Considérese la palabra clave AAABBCCD,*

a) ¿Cuántas combinaciones diferentes de 3 letra pueden formarse con ella?

b) ¿Cuántas permutaciones de tres letras son posibles?

Solución:

a) Las combinaciones son de tres tipos: aquellas en las cuales todas las letras son diferentes, las que tienen 2 letras iguales y una diferente, y finalmente, aquella que tiene todas las letras iguales.
Se tienen $4C_3 = 4$ combinaciones con las tres letras diferentes.
Se tienen $3C_1 3C_1 = 9$ combinaciones con un par de letras iguales y una diferente.
Finalmente, se tiene solo una combinación con todas las letras iguales.
Sumando todas las combinaciones se obtiene un total 14 combinaciones diferentes.

b) Una vez que se tienen clasificadas las combinaciones, se usarán los resultados de la sección anterior, ya que cada combinación genera un número de permutaciones que contribuyen al total de las permutaciones.
El primer tipo de combinaciones aporta $3! = 6$ permutaciones diferentes cada una.
El segundo tipo de combinaciones aporta $\frac{3!}{2!} = 3$ permutaciones diferentess cada una.
El tercer tipo de combinaciones solo aporta 1 permutación.
Al multiplicar por las combinaciones correspondientes y sumar esos productos se obtiene el total de 4(6)+9(3)+1(1)=52 permutaciones diferentes.

Para los ejercicios siguientes se recomienda revisar el apéndice A

Ejemplo 1.2.14 *¿De cuántas maneras puede extraerse un conjunto de 5 cartas de una baraja inglesa?*

Solución: La baraja inglesa consta de 52 cartas, dado que se extraen 5 de ellas, entonces se tienen

$$52C_5 = 2,598,960$$

maneras diferentes de obtener las 5 cartas. En estos casos el orden en que se obtienen las cartas no es importante. Solo interesa el conjunto de las 5 cartas.

Ejemplo 1.2.15 *De cuántas maneras puede extraerse una mano de poker que conste de 2 cartas rojas y 3 cartas negras?*

Solución: Se tienen $26C_2$ maneras de obtener 2 cartas rojas y para cada una de éstas se tienen $26C_3$ maneras de obtener una carta negra. Por el principio fundamental de conteo se tienen,

$$(26C_2)(26C_3) = 845,000$$

manos diferentes de *poker* que consten de 2 cartas rojas y 3 cartas negras.

Particiones de un conjunto

Considérese que se tiene un conjunto A y que éste consta de n elementos. Supóngase que se desea distribuir los elementos del conjunto A en k subconjuntos $A_1, A_2, \ldots A_k$, del conjunto A, donde $A_i \cap A_j = \phi$ para todo $i \neq j$, y $A = \cup_{i=1}^{k} A_i$. Se dice que los conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_k$ forman una partición de A. El problema que se plantea ahora es determinar de cuántas maneras es posible particionar el conjunto A en k subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, que contienen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elementos, respectivamente, donde $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. En primer lugar se tienen

$$\begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix}$$

maneras diferentes de elegir los n_1 elementos del conjunto A_1. Para cada una de las elecciones anteriores de los elementos de A_1, se tienen

$$\begin{pmatrix} n - n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

maneras diferentes de elegir los n_2 elementos del conjunto A_2. Continuando con este proceso, al final se tendrá

$$\begin{pmatrix} n - (n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1}) \\ n_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_k \\ n_k \end{pmatrix} = 1,$$

manera de escoger los n_k elementos de A_k. Si se denota por R al número total de maneras en que la partición puede llevarse a cabo, entonces por el principio fundamental de conteo se tiene,

$$R = \begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n - n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} n - (n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1}) \\ n_k \end{pmatrix}. \qquad (1.14)$$

Considérese el caso particular en que $k = 2$, de acuerdo con la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n - n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2 \\ n_2 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix}, \\ &= \frac{n!}{n_1!(n - n_1!)}, \\ &= \frac{n}{n_1!n_2!}. \end{aligned}$$

Puede demostrarse, por el método de inducción matemática, que en general

$$R = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}. \tag{1.15}$$

Ejemplo 1.2.16 *En un programa de concursos se tienen tres urnas diferentes, en las cuales se colocarán tres premios diferentes. ¿De cuántas maneras pueden colocarse los 3 premios en las 2 urnas si,*

a) no deben quedar urnas vacías?

b) si no hay restricciones?

Solución:
a) Se tiene un conjunto de 3 objetos el cual se desea particionar en 2 conjuntos. Las particiones permitidas son:

$$\{(n_1, n_2)|1 \leq n_1 \leq 3, 1 \leq n_2 \leq 3, n_1 + n_2 = 3\} = \{(12), (21)\}.$$

A continuación se procede a determinar el número de maneras posibles en que cada partición puede llevarse a cabo.

$$R_1 = \frac{3!}{2!} = 3, \tag{1.16}$$

$$R_2 = \frac{3!}{2!} = 3. \tag{1.17}$$

Sumando los números anteriores se obtienen en total 6 maneras diferentes de repartir 3 premios diferentes en dos urnas diferentes, sin que queden urnas vacías.
b) Si se quita la rectricción, entonces se agregan dos formas más, y éstas corresponden a poner todos los premios en una sola urna. Al final se tienen 8 maneras diferentes de colocar 3 premios diferentes en 2 urnas diferentes sin restricciones.

Ejemplo 1.2.17 *Con un grupo de 9 personas deben formarse 3 equipos de trabajo, con 4, 3 y 2 elementos. ¿De cuántas maneras pueden formarse los equipos?*

Solución: Se requiere particionar un conjunto de $n = 9$ elementos en tres conjuntos con $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 2$. De acuerdo con la ecuación 1.15 se tienen,

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260,$$

maneras diferentes de formar los equipos.

Ejemplo 1.2.18 *Después de un sismo, la cruz roja debe transladar a un equipo de rescate a la zona de desastre. Dispone de tres vehículos con capacidades máximas para 4, 3 y 2 pasajeros. Si debe movilizar a 7 brigadistas, ¿de cuántas maneras puede hacerse el translado de los brigadistas sin que queden vehículos sin usar?*

Solución: Sea B el conjunto de todas las particiones permitidas; es decir,

$$\begin{aligned} B &= \{(n_1, n_2, n_3) | 1 \leq n_1 \leq 2,\ \ 1 \leq n_2 \leq 3,\ \ 1 \leq n_3 \leq 4,\ \ n_1 + n_2 + n_3 = 7\} \\ &= \{(133), (124), (214), (223), (232)\}. \end{aligned}$$

A continuación se determinan el número de maneras posibles en que puede efectuarse cada partición.

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{8!}{3!3!} = 1120, \\ R_2 &= \frac{8!}{2!4!} = 840, \\ R_3 &= \frac{8!}{2!4!} = 840, \\ R_4 &= \frac{8!}{2!2!3!} = 1640, \\ R_5 &= \frac{8!}{2!3!2!} = 1640. \end{aligned}$$

Sumando los números anteriores se obtiene el resultado final, 6160.

1.3. Axiomas de probabilidad

Definición 1.3.1 (Probabilidad) *Sea S un espacio muestral y A cualquier evento de éste, se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral S a $P(A)$, si satisface los siguientes axiomas:*

1. $P(A) \geq 0$,

2. $P(S) = 1$,

3. *Si para los eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots,$*
   $A_i \cap A_j = \phi$ para toda $i \neq j$, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

.

Teorema 1.3.1 *Si A_1 y A_2 son eventos tales que, $A_1 \subseteq A_2$, entonces*

$$a) \quad P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1), \tag{1.18}$$
$$b) \quad P(A_1) \leq P(A_2). \tag{1.19}$$

Demostración: Considérese el diagrama de Venn mostrado en la figura 1.7.

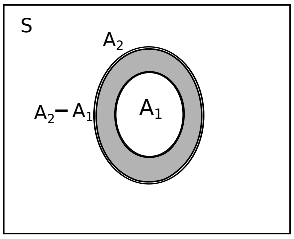


Figura 1.7: Diferencia

a) Se observa del diagrama que:

$$A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1),$$

además,

$$A_1 \cap (A_2 - A_1) = \phi.$$

Como consecuencia del axioma 3 se tiene,

$$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1),$$

despejando $P(A_2 - A_1)$ se obtiene,

$$P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1).$$

b) Como $A_2 - A_1$ es un evento contenido en S, entonces por el axioma 1,

$$P(A_2 - A_1) \geq 0.$$

De este resultado junto con el inciso anterior se sigue que,

$$P(A_2) - P(A_1) \geq 0;$$

es decir,

$$P(A_1) \leq P(A_2). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.3.2 *Para un evento cualquiera A,*

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{1.20}$$

Demostración: Como $A \subseteq S$, entonces por el teorema anterior,

$$P(A) \leq P(S),$$

además por el axioma 2,

$$P(A) \leq P(S) = 1,$$

Este resultado junto con el axioma 1 permiten establecer el contenido de este teorema. ∎

Teorema 1.3.3 *Si A' es el complemento del evento A, entonces*

$$P(A') = 1 - P(A). \tag{1.21}$$

Demostración: Considérese el diagrama de Venn que se muestra a continuación.

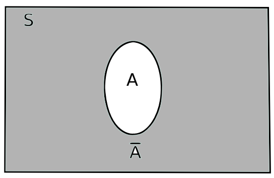


Figura 1.8: Complemento

Del diagrama se observa que,

$$S = A \cup A'$$
$$A \cap A' = \phi.$$

Por el axioma 3 de probabilidad se tiene,

$$P(S) = P(A) + P(A').$$

Del axioma 2 se sigue,

$$1 = P(A) + P(A').$$

Despejando $P(A')$ se concluye la demostración. ∎

Teorema 1.3.4 *Si ϕ es el evento imposible, entonces $P(\phi) = 0$.*

Demostración: Dado que S y ϕ son eventos complementarios, por el teorema anterior

$$P(\phi) = 1 - P(S),$$

además, por el axioma 2, $P(S) = 1$, por lo tanto,

$$P(\phi) = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.3.5 *Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1.22}$$

Demostración: Considérese el diagrama de Venn siguiente:

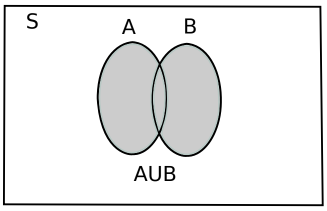


Figura 1.9: Unión de los eventos A y B

Es posible expresar $A \cup B$ como la unión de dos eventos disjuntos, éstos son, B y $A - B$. De manera que por el axioma 3,

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A - B). \tag{1.23}$$

Además,

$$A - B = A - (A \cap B),$$

de manera que por el teorema 1.3.1 se obtiene

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \tag{1.24}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 1.24 en la ecuación 1.23 se concluye la demostración. $\blacksquare$

Teorema 1.3.6 *Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces*

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B'). \tag{1.25}$$

Demostración: Obsérvese que A puede expresarse como la unión de los eventos disjuntos, $A \cap B$ y $A \cap B'$, de manera que por el axioma 3,

$$P(A) = (A \cap B) + P(A \cap B'). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.3.7 *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes; es decir, $A_i \cap A_j = \phi$, para todo $i \neq j$, y $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, entonces*

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n), \tag{1.26}$$

particularmente, si $A = S$, entonces

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \tag{1.27}$$

Demostración: Se sigue directamente de los axiomas 2 y 3. $\blacksquare$

Asignación de probabilidades

Espacios muestrales finitos

Considérese un espacio muestral finito S que se compone de n elementos, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. El conjunto S puede particionarse en n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que consten de un solo elemento. De la manera más simple se tiene $A_i = \{s_i\}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Estos conjuntos se conocen como conjuntos elementales, ya que contienen un solo punto del espacio muestral. De acuerdo con el axioma 1 de la probabilidad y con el teorema 1.3.7, los conjuntos elementales deben satisfacer las siguientes condiciones:

1. $P(A_i) \geq 0$,
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Si un evento cualquiera A consta de h elementos del espacio muestral, es decir,

$$A = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ih}\},$$

entonces

$$P(A) = \sum_{j=1}^{h} P(A_{ij}). \tag{1.28}$$

Ejemplo 1.3.1 *Una moneda está cargada de tal manera que el evento, obtener cara(C), tiene el doble de oportunidad de ocurrir que el evento, obtener cruz(C). Determine la probabilidad de los eventos simples.*

Solución: Como se definieron anteriormente, los eventos simples son:
C: Obtener cara.
X: Obtener cruz.

Si se define $P(X) = p$, entonces $P(C) = 2p$, y de acuerdo con la propiedad 2 para los eventos simples,

$$\begin{aligned} P(C) + P(X) &= 1, \\ 2p + p &= 1, \\ 3p &= 1. \end{aligned}$$

Por lo anterior, $P(X) = 1/3$ y $P(C) = 2/3$. Ambos valores son positivos, satisfaciendo la propiedad 1 de los eventos simples.

Espacios muestrales equiprobables

Si todos los puntos de un espacio muestral finito tienen la misma probabilidad de ocurrencia, el espacio muestral se conoce como espacio muestral equiprobable. En este caso los resultados de la sección anterior se reducen considerablemente. Por principio de cuentas,

$$P(A_i) = \frac{1}{n}. \tag{1.29}$$

Para un conjunto arbitrario A con h elementos se tiene,

$$P(A) = \sum_{j=1}^{h} P(A_{ij}) = \frac{h}{n}, \tag{1.30}$$

donde n representa el número de puntos del espacio muestral y h el número de puntos en que el evento A puede ocurrir.

Ejemplo 1.3.2 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un dado equilibrado. Determínese la probabilidad de los siguientes eventos:*

a) Obtener un número par.

b) Obtener un número impar.

c) Obtener un número mayor que 3.

d) Obtener un número impar o un número mayor que 3.

e) Obtener un número impar y que sea mayor que 3.

Solución: El espacio muestral es:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Considere los siguientes eventos:
A: Obtener número par.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

B: Obtener un número impar.

$$B = \{1, 3, 5\}$$

C: Obtener un número mayor que 3.

$$C = \{4, 5, 6\}$$

D: Obtener un número impar y que sea mayor que 3.

$$D = B \cap C = \{5\}$$

E: Obtener un número impar o un número mayor que 3.

$$E = B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

Cada punto muestral tiene la misma probabilidad, ya que el dado está equilibrado. De acuerdo con la ecuación 1.30,

$$\begin{array}{ll} a) & P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\ b) & P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\ c) & P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\ d) & P(D) = \frac{1}{6}, \\ e) & P(E) = \frac{5}{6}. \end{array}$$

Es ilustrativo verificar que el teorema 1.3.5 se satisface.

$$\begin{aligned} P(E) &= P(B \cup C), \\ &= P(B) + P(C) - P(B \cap C), \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.3 *Considerése el experimento que consiste en lanzar una moneda equilibrada dos veces.*

a) Determine la probabilidad de obtener máximo una cara.

b) Determine la probabilidad de obtener 0 caras.

c) Determine la probabilidad de obtener al menos una cara.

Solución: El espacio muestral de este experimento puede expresarse como:

$$S = \{CC, CX, XC, XX\}^1$$

Debido a que la moneda lanzada es equilibrada se tiene un espacio muestral equiprobable, es decir, cada evento elemental tiene probabilidad igual a 1/4. A continuación se definen los siguientes eventos:

A: Obtener máximo una cara.
B: Obtener 0 caras.
C: Obtener al menos una cara.

De acuerdo con lo anterior:

$$\begin{aligned} A &= \{XX, XC, CX\}, \\ B &= \{XX\}, \\ C &= \{CC, XC, CX\}. \end{aligned}$$

De la ecuación 1.30 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} &a) \qquad P(A) = \frac{3}{4}, \\ &b) \qquad P(B) = \frac{1}{4}, \\ &c) \qquad P(C) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

[1] Se está haciendo uso de la notación taquigráfica para la intersección, donde CX significa que se obtuvo cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo

Obsérvese que B y C son eventos complementarios; es decir, $C' = B$. De acuerdo con el teorema 1.3.3,

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(C'), \\ &= 1 - P(B), \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Para los siguientes ejemplos se recomienda ver el apéndice A

Ejemplo 1.3.4 *Se sacan 3 cartas de un mazo bien barajado de 52 naipes (baraja inglesa). Encuentre la probabilidad de sacar 3 ases.*

Solución: El espacio muestral consiste de todos los subconjuntos de 3 cartas que pueden formarse de un conjunto con 52 elementos diferentes. Se tienen

$$n = \binom{52}{3}$$

maneras de obtener tres cartas de un conjunto de 52. Este número corresponde a la cardinalidad del espacio muestral.
Si se define el evento A como:
A: Obtener 3 cartas que sean ases cuando se extraen 3 cartas de un mazo bien barajado de 52.
Dentro del conjunto de las 52 cartas solo se tienen 4 ases, de los cuales se deben tomar 3. El número de maneras en que se pueden sacar 3 ases de un conjunto de 4 es:

$$h = \binom{4}{3}.$$

Por lo tanto, la probabiidad del evento A es:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}}, \\ &= \frac{4}{22100} = \frac{1}{5525}, \\ &= 1.8 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Este problema se resolverá en la siguiente sección con un enfoque diferente.

Ejemplo 1.3.5 *Se sacan 5 cartas de una baraja inglesa. Determine la probabilidad de que,* *a) todas las cartas sean de un mismo palo,*

b) se saquen exactamente 2 ases,

c) que no se saquen ases,

d) se saque al menos un as.

Solución: El espacio muestral de este experimento consta todos los subconjuntos de 5 cartas que pueden formarse con un total de 52 cartas diferentes. La cardinalidad de este conjunto es $52C_2$.
A continuación se definen los eventos de interés:
A: Sacar todas las cartas de un mismo palo.
B: Sacar exactamente 2 ases.
C: No obtener ases.
D: Sacar al menos un as.

a) Se procede a determinar el número de elementos del conjunto A. Debido a que se tienen 4 palos diferentes, se tienen 4 opciones diferentes de escoger un palo; además, cada palo tiene 13 cartas de modo que se tienen $13C_5$ maneras diferentes de escoger las 5 cartas del palo. Por el principio fundamental de conteo se tienen, $4(13C_5)$ maneras de obtener 5 cartas del mismo palo; por lo tanto,

$$P(A) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{66}{4165}.$$

b) Para el conjunto B, debido a que se tienen 4 ases diferentes, en consecuencia se tienen $4C_2$ maneras de escoger 2 de de ellos. Las tres cartas restantes deberán tomarse del conjunto de 48 cartas que no son ases y esto puede hacerse de $(3C_{48})$ maneras diferentes. Por el principio fundamental de conteo se tienen $(4C_2)(3C_{48})$ formas diferentes de obtener 5 cartas con exactamente 2 ases. En consecuencia,

$$P(B) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{4324}{54145}.$$

c) Las 5 cartas deberán proceder del conjunto de 48 cartas que no son ases y esto puede hacerse de $(5C_{48})$ maneras diferentes. Por consiguiente,

$$P(C) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{35673}{54145}.$$

d) Obsérvese que los eventos C y D son complementarios, es decir, $D' = C$, de modo que mediante el teorema 1.3.3 se tiene,

$$\begin{aligned} P(D) &= 1 - P(D'), \\ &= 1 - P(C), \\ &= 1 - \frac{35673}{54145}, \\ &= \frac{18472}{54145}. \end{aligned}$$

El lector podrá verificar que,

$$P(D) = \frac{(4C_1)(48C_4) + (4C_2)(48C_3) + (4C_3)(48C_2) + (48C_1)}{52C_5} = \frac{18472}{54145}.$$

1.4. Probabilidad condicional

Para tener una aproximación intuitiva del concepto de probabilidad condicional, considérese el siguiente experimento aleatorio. Una urna consta de N esferas, de las cuales, n son blancas y el resto, $N - n$ son negras; por las demás características físicas son idénticas. Se deben extraer de la urna una tras otra x esferas y anotar sus colores. Este experimento puede realizarse de dos maneras conocidas como: extracción con reemplazo y sin reemplazo.

a) **Extracción con reemplazo**
Se extrae la primera esfera y una vez que se anota su color ésta es devuelta a la urna. Después se extrae la segunda esfera, una vez más se anota su color y se devuelve a la urna, y así sucesivamente, hasta completar la última extracción y anotar el color correspondiente.

b) **Extracción sin reemplazo**
A diferencia con el proceso anterior, si se extrae la segunda esfera sin antes devolver la primera esfera extraída, y cada extracción se realiza sin devolver la esfera de la extracción previa, y así sucesivamente, hasta extraer x de ellas, el proceso se conoce como extracción sin reemplazo.

Considérese el experimento aleatorio que consiste en extraer dos esferas de la urna antes mencionada y defínanse los eventos B_1 y B_2 como: B_1 es el evento que consiste en sacar esfera blanca en la primera extracción y B_2 es el evento que consiste en sacar una esfera blanca en la segunda extracción. Naturalmente, si el proceso de extracción se realiza con reemplazo, las probabilidades de los eventos B_1 y B_2 pueden calcularse sin dificultad alguna, ya que en cada extracción se sabe explícitamente cuantas esferas hay en total en la urna y cuantas de ellas son blancas. Más específicamente, si en total se tienen 30 esferas de las cuales 20 son blancas y 10 son negras, entonces para la primera extracción, $P(B_1) = 20/30$. Como la esfera extraída se devuelve a la urna, entonces para la segunda extracción se tiene, $P(B_2) = 20/30$.

Ahora considérese que el experimento se realiza sin reemplazo. Nuevamente, $P(B_1) = 20/30$; sin embargo, para calcular la probabilidad del segundo evento se necesita información adicional sobre la composición de la urna, ya que una vez que se extrae una esfera sin reemplazo, la composición de la urna necesariamente se modifica, de manera que, el número total de esferas y el número de esferas blancas dependerá del resultado obtenido en la primera extracción. Si en la primera extracción se obtuvo esfera blanca, esto permite conocer la nueva composición de la urna y es posible calcular la probabilidad de obtener una esfera blanca en la segunda extracción dado que en la primera extracción se obtuvo una esfera blanca. Esta probabilidad se conoce como la probabilidad condicional del evento B_2 dado que el evento B_1 ha ocurrido y se denota por $P(B_2|B_1)$. Para el ejemplo que se ha considerado, $P(B_2|B_1) = 19/29$, ya que después de la primera extracción se tienen 29 esferas de las cuales 19 son blancas.

Un análisis más detallado de este experimento permitirá desarrollar una definición general de la probabilidad condicional. Para el experimento anterior, el espacio muestral puede expresarse como:

$$S = \{B_1B_2, B_1N_2, N_1B_2, N_1N_2\}$$

donde B_1 y B_2 representan los eventos: obtener esfera Blanca en la extracción 1 y 2, respectivamente. De la misma manera N_1 y N_2 representan los eventos: obtener esfera negra en la extracción 1 y 2, respectivamente. Cuando se calcula la probabilidad del evento B_1 se está comparando la posibilidad de estar en el evento B_1 dado que se está el espacio muestral completo S; es decir, dentro de S los eventos que favorecen B_1 son $\{B_1B_2, B_1N_2\}$. Sin embargo, para la segunda extracción se está comparando la posibilidad de estar en B_2 dado que se está en B_1; es decir, el espacio muestral se reduce a $\{B_1B_2, B_1N_2\}$ y el evento que favorece a B_2 es $\{B_1B_2\}$. Lo anterior conduce a la siguiente definición.

Definición 1.4.1 (Probabilidad condicional) *Si A y B son dos eventos en un espacio muestral S tal que $P(A) > 0$, entonces se define la probabilidad condicional de que el evento B ocurra dado que el evento A ya ha ocurrido mediante,*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{1.31}$$

Si $P(B) > 0$, de manera análoga se define:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.32}$$

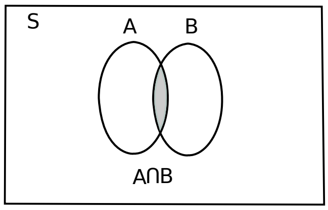


Figura 1.10: Probabilidad condicional

Despejando $P(A \cap B)$ en las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A), \\ &= P(B)P(A|B). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Ejemplo 1.4.1 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un dado equilibrado dos veces. Sean A y B los eventos, A: obtener un total de 10, y B: obtener al menos un 5. Determine a) $P(A|B)$, b)$P(B|A)$.*

Solución: Se comenzará por definir y determinar los elementos de los eventos involucrados en la definición de probabilidad condicional:

A: obtener un total de 10.
$A = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$
B: obtener al menos un cinco.
$B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}$
$A \cap B = \{(5,5)\}$

a) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$

b) $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$

Ejemplo 1.4.2 *La urna I contiene 10 bolas blancas y 15 bolas negras; mientras que la urna II contiene 20 bolas blancas y 10 bolas negras. Se extrae una bola de la urna I y sin ver su color se deposita en la urna II. Posteriormente se extrae una bola de la urna II. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la urna II sea blanca?*

Solución: Considérese los siguientes eventos:
B_1 : obtener una bola blanca de la urna I,
N_1 : obtener una bola negra de la urna I,
B_2 : obtener una bola blanca de la urna II,
E_1 : obtener blanca de la urna I y blanca de la urna II,
E_2 : obtener negra de la urna I y blanca de la urna II,
E : obtener blanca de la urna II.

El evento E puede ocurrir de dos maneras: que suceda E_1 o que suceda E_2. De manera que, $E = E_1 \cup E_2$. Como los eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, entonces

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1 \cup E_2), \\ &= P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2), \\ &= P(B_1)P(B_2|B_1) + P(N_1)P(B_2|N_1). \end{aligned}$$

Sustituyendo los datos se obtiene:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(B_1)P(B_2|B_1) + P(N_1)P(B_2|N_1), \\ &= \left(\frac{10}{25}\right)\left(\frac{21}{31}\right) + \left(\frac{15}{25}\right)\left(\frac{20}{31}\right), \\ &= \frac{102}{155}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.3 *Un lote está compuesto de 30 microcomputadoras de las cuales 5 son defectuosas. Se extraen sin reemplazo una tras otra 6 microcomputadoras del lote. Determine la probabilidad de que la sexta microcomputadora extraída sea la última microcomputadora defectuosa.*

Solución: Para que la sexta microcomputadora extraída sea la última defectuosa, necesariamente se tienen que haber obtenido 4 microcomputadoras defectuosas en las 5 extracciones anteriores. Por lo tanto, es conveniente definir los siguientes eventos:

A: Obtener 4 microcomputadoras defectuosas en las 5 primeras extracciones.

B: Obtener una microcomputadora defectuosa en la sexta extracción.
Se desea determinar la probabilidad del evento $E = A \cap B$. De manera que,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap B), \\ &= P(A)P(B|A). \end{aligned}$$

El evento A consiste en extraer 4 artículos defectuosos de un total de 5 posible y un artículo no defectuoso de 25 posibles, lo cual puede hacerse de $5C_4(25C_1)$ maneras diferentes. Por lo tanto,

$$P(A) = \frac{\binom{5}{4}\binom{25}{1}}{\binom{30}{5}} = \left(\frac{125}{142506}\right).$$

Hasta aquí se han extraído 5 artículos del lote, de los cuales 4 fueron defectuosos y uno no defectuoso. Para la última extracción la composición del lote es de 25 microcomputadoras, de las cuales solo una es defectuosa, por lo tanto,

$$P(B|A) = \left(\frac{1}{25}\right)$$

Finalmente,

$$P(E) = P(A)P(B|A) = \left(\frac{125}{142506}\right)\left(\frac{1}{25}\right) = \frac{5}{142506} = 3.5 \times 10^{-5}$$

Teorema 1.4.1 *Si A_1, A_2, A_3 son tres eventos cualesquiera de un espacio muestral, entonces*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \tag{1.34}$$

Demostración: Mediante una simple asociación de los conjuntos y la aplicación de la ecuación 1.33 se tiene,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3), \\ &= P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2), \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La generalización de este teorema para n conjuntos es inmediata.

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-1}). \tag{1.35}$$

La demostración (mediante el método de inducción matemática) se deja al lector.

Ejemplo 1.4.4 *Considérese nuevamente el ejemplo 1.3.4. Se sacan 3 cartas de un mazo bien barajado de 52 naipes (baraja inglesa). Encuentre la probabilidad de sacar 3 ases si las cartas se sacan una tras otra sin reemplazo.*

Solcución: Considere los siguientes eventos:

A_1: Obtener as en la primera extracción.
A_2: Obtener as en la segunda extracción.
A_3: Obtener as en la tercera extracción.

Se desea determinar la probabilidad del evento $A_1 \cap A_2 \cap A_3$. De manera que, de acuerdo con el teorema 1.4.1

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

Inicialmente se tienen 52 cartas, de las cuales 4 son ases, entonces

$$P(A_1) = \frac{4}{52}.$$

Una vez que se ha extraído un as de la baraja, quedan 3 ases de un total de 51 cartas, de manera que la probabilidad de obtener un as en la segunda extracción dado que se obtuvo un as en la primera extracción es,

$$P(A_2|A_1) = \frac{3}{51}.$$

Por último, una vez que se han retirado dos ases del mazo, quedan solo dos ases de un total de 50 cartas, así que la probabilidad de obtener as en la tercera extracción dado que se obtuvieron ases en las dos extracciones previas es,

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{50}.$$

Por lo tanto,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right)\left(\frac{2}{50}\right) = \frac{1}{5525}.$$

1.5. Eventos independientes y la regla de la multiplicación

Considérese nuevamente el experimento que consiste en extraer una tras otra dos esferas de una urna que contiene 20 esferas negras y 10 esferas blancas. Si la extracción se realiza con reemplazo y se definen nuevamente los eventos B_1 y B_2 como obtener esfera blanca en la primera y segunda extracción, respectivamente, entonces $P(B_2|B_1) = P(B_2)$; es decir, la probabilidad de B_2 no se ve afectada por la ocurrencia de B_1. Este resultado permite intuir el concepto de eventos estadísticamente independientes.

Si A y B son dos eventos en el espacio muestral S y $P(B|A) = P(B)$, entonces A y B son eventos independientes. Del mismo modo, se requiere que $P(A|B) = P(A)$ de otro modo la independencia no sería un concepto útil. Además de los anteriores requisitos, se debe cumplir que tanto $P(A)$ como $P(B)$ deben ser mayores que cero. Se puede abordar el concepto de una manera que permita su generalización, si se observa que para dos eventos independientes A y B, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Esta relación seguirá siendo válida aun cuando A o B sean eventos de probabilidad cero. Para tres eventos A, B y C, se dirá que éstos son eventos mutuamente independientes si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)P(B), \\
P(A \cap C) &= P(A)P(C), \\
P(B \cap C) &= P(B)P(C), \\
P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C).
\end{aligned}
$$

La generalización para n eventos se establece a continuación.

Definición 1.5.1 (Eventos independientes) *Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ son eventos en un espacio muestral S, entonces los eventos se conocen como mutuamente independientes si para cualquier subconjunto $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}$ del conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se satisface que,*

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik})$$

además,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Es importante notar que para n eventos, en general se tienen $2^n - 2$ relaciones por satisfacer. Este número corresponde al número de combinaciones de n objetos tomados r a la vez, con $r \geq 2$.

Ejemplo 1.5.1 *Se lanza una moneda equilibrada dos veces. Determine la probabilidad de que se obtenga:*

a) Solo una cara.

b) Al menos una cara

c) Máximo una cara.

Solución: El espacio muestral de este experimento es:

$$S = \{CC, CX, XC, XX\}$$

donde CX significa que se obtuvo cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo; es decir, se está usando la notación *económica* para la intersección.
a) Para el evento, A: obtener solo una cara, se tiene

$$A = \{CX, XC\}$$

Los dos eventos que conforman A son mutuamente excluyentes, así que,

$$P(A) = P(CX) + P(XC).$$

Debido a que los lanzamientos son independientes,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C)P(X) + P(X)(C), \\ &= (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2), \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

b) B: obtener al menos una cara.

$$B = \{CX, XC, CC\}$$

Por los mismos argumentos que en el inciso anterior,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C)P(X) + P(X)(C) + P(CC), \\ &= (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2), \\ &= 3/2. \end{aligned}$$

c) $\mathcal{C}$: Máximo una cara.

$$\mathcal{C} = \{CX, XC, XX\}$$

De la misma manera que en los incisos anteriores,

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}) &= P(C)P(X) + P(X)(C) + P(XX), \\ &= (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2,) \\ &= 3/2. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.2 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un dado equilibrado dos veces.*

a) Determine la probabilidad de cada punto muestral.

b) Determine la probabilidad de obtener un total de 7.

Solución:

a) El primer lanzamiento de un dado puede resultar uno de los números del conjunto $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, todos con la misma probabilidad. Para el segundo lanzamiento, de la misma manera, puede resultar cualquiera de los números de $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de la misma manera que con el primer dado lanzado, todos con la misma probabilidad. Por lo tanto, el espacio muestral que describe los resultados de este experimento es,

$$S = S_1 \times S_2 = \{(a, b) | a \in S_1, b \in S_2\}.$$

Cada uno de los posibles resultados en S tiene la misma probabilidad. Dado que S tiene 36 puntos muestrales, entonces $P[(a, b)] = 1/36$.

Bajo el enfoque de la independencia de eventos se llega a la misma conclusión. De hecho, como los lanzamientos son independietes; es decir, lo que se obtiene en el primer lanzamiento no influye sobre el resultado del segundo lanzamiento, entonces

$$\begin{aligned} P[(a, b)] &= P[\{a\} \cap \{b\}], \\ &= P(\{a\})P(\{b\}), \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right), \\ &= \left(\frac{1}{36}\right). \end{aligned}$$

b) Defínase el evento A como:

A: Obtener un total de 7 en 2 lanzamientos de una moneda equilibrada.
De acuerdo a la definición de A se tiene,

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},$$

por lo tanto,

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 1.5.3 *Considérese que se lanzan un par de dados equilibrados 5 veces.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 por primera vez en el último lanzamiento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 una sola vez?

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 al menos una vez?

Solución: Se definen los siguientes eventos:

E_i: obtener un total de 7 en el *i-ésimo* lanzamiento de los dos dados.

E_i': obtener un total diferente de 7 en el *i-ésimo* lanzamiento de los dos dados.

De los 36 posibles resultados que se obtienen al lanzar dos dados, 6 de ellos dan un total de 7, por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(E_i) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \\ P(E_i') &= \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

a) Si se obtiene un 7 por primera vez en el quinto lanzamiento, entonces debieron obtenerse totales diferentes de 7 en los primeros 4 lanzamientos de los dos dados. El evento de interés es: $A = E_1'E_2'E_3'E_4'E_5$. Debido a que cada lanzamiento de los dados es independiente de los demás, entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1'E_2'E_3'E_4'E_5), \\ &= P(E_1')P(E_2')P(E_3')P(E_4')P(E_5), \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right), \\ &= \frac{625}{7776} = 0.0803 \end{aligned}$$

b) A diferencia del inciso anterior, ahora el 7 pudo haberse obtenido en cualquiera de los intentos. El evento de interés está compuesto por todos aquellos eventos que dan un total de 7 en 5 intentos; es decir,

$$B = \{EE'E'E'E', E'EE'E'E', E'E'EE'E', E'E'E'EE', E'E'E'E'E\}$$

Se han omitido los subíndices, ya que en este punto debe ser claro que la posición de la letra corresponde al número del lanzamiento.
Los eventos que conforman a B son mutuamente excluyentes, así que, de acuerdo con el axioma 3 de la probabilidad,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(EE'E'E'E') + P(E'EE'E'E') + P(E'E'EE'E') + \\ &\quad P(E'E'E'EE') + P(E'E'E'E'E) \end{aligned}$$

Debido a que los 5 lanzamientos son independientes, entonces

$$\begin{aligned} P(B) &= 5P(E)P^4(E') \\ &= \binom{5}{1} P(E)P^4(E'), \\ &= 5\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4, \\ &= \frac{3125}{7776} = 0.4019 \end{aligned}$$

c) En cinco intentos se pueden obtener hasta 5 totales de 7. Considere los siguientes eventos:
C: obtener al menos un total de 7.
C': obtener totales diferentes de 7.
Se procederá a determinar la probabilidad del evento C', y posteriormente, mediante el teorema 1.3.3 se determinará la probabilidad del evento C.
El evento C' se obtiene cuando todos los lanzamientos dan totales diferentes de siete; es decir, $C = \{E'E'E'E'E'\}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(C') &= P(E'E'E'E'E'), \\ &= P^5(E'), \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^5, \\ &= \frac{3125}{7776}, \\ &= 0.4019 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(C'), \\ &= 1 - \frac{3125}{7776}, \\ &= \frac{4651}{7776}, \\ &= 0.5981 \end{aligned}$$

1.6. Regla de Bayes

Teorema 1.6.1 *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes; es decir, $A_i \cap A_j = \phi$ para todo $i \neq j$, y $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, entonces*

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots + P(A \cap A_n). \tag{1.36}$$

Demostración: Obsérvese que $A \cap A_i = A_i$ para todo i. Sustituyendo este resultado en el teorema 1.3.7 se concluye la demostración. ∎

Definición 1.6.1 (Partición finita del espacio muestral) *Sea S un espacio muestral y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una sucesión finita de eventos en S. Se dice que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición del espacio muestral S si se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

$$a) \quad A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j, \tag{1.37}$$

$$b) \quad S = A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n. \tag{1.38}$$

Teorema 1.6.2 (Probabilidad total) *Si S es un espacio muestral y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición de S, entonces para todo evento A en S se tiene,*

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + \ldots + P(A_n)P(A|A_n). \tag{1.39}$$

Demostración: Del teorema 1.6.1 se tiene,

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots + P(A \cap A_n). \tag{1.40}$$

De acuerdo con la definición 1.4.1

$$P(A \cap A_i) = P(A_i)P(A|A_i), \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.41}$$

Sustituyendo las ecuaciones descritas en 1.41 en la ecuación 1.40 se concluye la demostración. ▮

Teorema 1.6.3 (Teorema de Bayes) *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición del espacio muestral S y A es un evento en S, entonces*

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k)P(A|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)}, \quad k = 1, 2 \ldots, n. \tag{1.42}$$

Demostración: De acuerdo con la definición 1.4.1,

$$P(A_k|A) = \frac{P(A \cap A_k)}{P(A)}, \tag{1.43}$$

$$P(A|A_k) = \frac{P(A \cap A_k)}{P(A_k)}, \tag{1.44}$$

de la ecuación 1.44 se obtiene,

$$P(A \cap A_k) = P(A_k)P(A|A_k). \tag{1.45}$$

Sustituyendo la ecuación 1.45 en la ecuación 1.43 se obtiene,

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k)P(A|A_k)}{P(A)}, \quad k = 1, 2 \ldots, n. \tag{1.46}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 1.39 en la ecuación 1.46 se concluye la demostración. ▮

Ejemplo 1.6.1 *Un bolso contiene tres monedas de las cuales dos son normales, mientras que una de ellas está sesgada, de manera que el evento, obtener cara(C),tiene dos veces más probabilidad de ocurrir que el evento, obtener cruz(X). Se extrae aleatoriamente una moneda del bolso y se lanza cuatro veces, obteniéndose 4 caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda seleccionada haya sido la moneda sesgada?*

Solución: Defínase como evento seguro el evento que ya ha ocurrido y que consiste en obtener 4 caras en cuatro lanzamientos.

A: Obtener 4 caras en 4 lanzamientos.

Defínanse los eventos de la partición como:
A_1: Escoger la moneda sesgada.
A_2: Escoger una moneda no sesgada.

De acuerdo con los eventos definidos se requiere calcular la probabilidad de que se haya escogido la moneda sesgada dado que se obtuvieron 4 caras; es decir, $P(A_1|A)$. Como las monedas se extraen del bolso aleatoriamente, entonces

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{1}{3}, \\ P(A_2) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Para la moneda sesgada la probabilidad de obtener una cara es $P(C) = \frac{2}{3}$, mientras que para las no sesgadas se tiene $P(C) = \frac{1}{2}$. Además, los resultados de cada lanzamiento son independiente, de manera que,

$$\begin{aligned} P(A|A_1) &= \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}, \\ P(A|A_2) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el teorema de Bayes se obtiene,

$$\begin{aligned} P(A_1|A) &= \frac{P(A_1)P(A|A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)}, \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{16}{81}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{16}{81}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right)}, \\ &= \frac{64}{145} = 0.4414 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.2 *Una compañía posee tres máquinas que producen cierto tipo de pernos. Las máquinas M_1, M_2 y M_3 fabrican 50 %, 30 % y 20 % de la producción total, respectivamente. De lo que cada una produce, 7 % , 3 % y 2 %, respectivamente, son pernos defectuosos. Si se escoge un perno al azar y éste resulta defectuoso. ¿Cuál el la probabilidad de que el perno provenga de la máquina M_2?*

Solución: Se comenzará por definir los eventos de interés:

Evento seguro:
A: Obtener un perno defectuoso.

Los eventos de la partición se definen mediante:
A_i: El perno proviene de la máquina M_i, $\quad i = 1, 2, 3.$

Se requiere calcular la probabilidad de que el perno provenga de la máquina 2 dado que el perno resultó defectuoso; es decir, $P(A_2|A)$. Las probabilidades de que los pernos provengan de cada una de las máquinas están dadas por,

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.50, \\ P(A_2) &= 0.30, \\ P(A_3) &= 0.20 \end{aligned}$$

Además, las probabilidades que un perno sea defectuoso dado que fue producido por la máquina 1, 2 o 3, respectivamente, son:

$$\begin{aligned} P(A|A_1) &= 0.07, \\ P(A|A_2) &= 0.03, \\ P(A|A_3) &= 0.02 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Bayes se obtiene,

$$\begin{aligned} P(A_2|A) &= \frac{P(A_1)P(A|A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)}, \\ &= \frac{(0.3)(0.03)}{(0.50)(0.07) + (0.30)(0.03) + (0.20)(0.02)}, \\ &= 0.19 \end{aligned}$$

Capítulo 2

Variables aleatorias discretas y continuas

En este capítulo se estudiará el significado de las variables aleatorias y se mostrará como calcular cantidades relacionadas con éstas. En particular se estudiarán la media y la varianza, las cuales representan cantidades cuyos significados son relevantes dentro de la probabilidad y la estadística.

2.1. Variables aleatorias discretas y continuas

Las variables aleatorias surgen como una necesidad de cuantificar los resultados de un experimento aleatorio y con éstas realizar inferencias estadísticas sobre un conjunto de datos (población). Para tener una aproximación al concepto de las variables aleatorias, considérese un experimento sencillo, como el de extraer una tras otra tres esferas de una urna que contiene k esferas negras y $N-k$ esferas blancas. El espacio muestral de este experimento es

$$S = \{NNN, NNB, NBN, NBB, BNN, BNB, BBN, BBB\},$$

donde N significa que se extrajo una esfera negra y B que se extrajo una esfera blanca. El espacio muestral consta de resultados cualitativos (no numéricos); sin embargo, el interés podría centrarse en el número de esferas negras obtenidas en el experimento, de manera que resulta natural definir una función cuyo dominio sea el espacio muestral S y cuyo recorrido esté contenido en los reales. Estas funciones se conocen como variables aleatorias.

Definición 2.1.1 (Variables aleatorias) *Considérese un experimento aleatorio con espacio muestral S. Una variable aleatoria X es una función que* *asocia un número real con cada punto del espacio muestral S. Lo anterior se expresa en notación matemática de la siguiente manera,*

$$X : S \to \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

El recorrido de la variable aleatoria X, denotado por R_X, es un subconjunto de los números reales y se define como,

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} : X(s) = x, \text{ y } s \in S\},$$

de manera gráfica se representa en la figura 2.1.

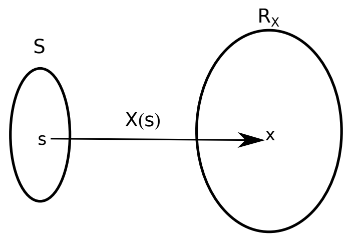


Figura 2.1: Recorrido o rango de X

En general, las variables aleatorias se denotan con una letra mayúscula como X, Y o Z, mientras que los valores que se encuentran dentro de sus recorridos se denotan por medio de letras minúsculas, como x, y o z, respectivamente.
En sentido estricto R_X representa también un espacio muestral y , naturalmente, pueden definirse probabilidades sobre este espacio, como se mostrará a continuación.

Ejemplo 2.1.1 *Considérese un lote que contiene 30 microcomputadoras de los cuales 5 son defectuosas. Si se extraen aleatoriamente y sin reemplazo, dos microcomputadoras para ser analizadas, entonces el espacio muestral es*

$$S = \{NN, ND, DN, DD\},$$

donde N significa que se extrajo una microcomputadora no defectuosa y D que se extrajo una microcomputadora defectuosa. Si el interés en este experimento se centra en el número de microcomputadoras defectuosas, entonces se debe definir a la variable aleatoria X como el número de microcomputadoras *defectuosas obtenidas en las dos extracciones. Los valores en el recorrido de la variable aleatoria* X *son:* $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. *De manera más explícita,*

$$\begin{aligned} X(NN) &= 0, \\ X(ND) &= 1, \\ X(DN) &= 1, \\ X(DD) &= 2. \end{aligned}$$

Si se define el evento B *como: obtener al menos un artículo defectuoso, entonces* $B = \{1, 2\}$. *De manera intuitiva se considera que* B *es equivalente*[1] *al evento* A *contenido en* S, *donde* $A = \{ND, DN, DD\}$. *Se infiere que* $P(A) = P(B)$ *para eventos equivalentes. Este hecho se establece en la siguiente definición.*

Definición 2.1.2 (Eventos equivalentes) *Considérese una variable aleatoria* X, *definida en un espacio muestral* S, *con recorrido* R_X. *Si* B *es un evento contenido en* R_X, *y el evento* A *que está contenido en* S *se define como*

$$A = \{s \in S : X(s) = x,\ \ y\ x \in B\},$$

entonces A *y* B *se conocen como eventos equivalentes y* $P(B) = P(A)$.

Ejemplo 2.1.2 *Considérese el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda equilibrada 2 veces. El espacio muestral de este experimento es* $S = \{CC, CX, XC, XX\}$, *donde* C *significa que se obtuvo cara y* X *que se obtuvo cruz. Ahora, sea* Y *la variable aleatoria que cuenta el número de caras en los dos lanzamientos, entonces* $R_Y = \{0, 1, 2\}$. *Si* B *es el evento: obtener menos de dos caras, entonces* $B = \{0, 1\}$. *El evento equivalente a* B *en el espacio muestral* S *es* $A = \{CX, XC, XX\}$. *De acuerdo con la definición 2.1.2,*

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A), \\ &= P(CX) + P(XC) + P(XX), \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Definición 2.1.3 (Variables aleatorias discretas) *Una variable aleatoria* X *se conoce como discreta si su recorrido* R_X *es un conjunto finito o infinito numerable.*

[1] Obsérvese que A y B no son conjuntos iguales, ya que no son subconjuntos de un mismo conjunto.

Ejemplo 2.1.3 (Caso finito) *Considérese que se lanza un dado normal (seis caras y no sesgado) dos veces y que X es la variable aleatoria que se define como la suma de puntos obtenidos en los dos lanzamientos. En este caso el recorrido de la variable aleatoria X consta de todos los valores enteros que van desde 2 hasta 12; por lo tanto, la variable aleatoria X es una variable aleatoria discreta.*

Ejemplo 2.1.4 (Caso infinito numerable) *Supóngase que se lanza una moneda normal (con cara y cruz) de manera repetida hasta obtener la primer cara, entonces el espacio muestral es*

$$\{C, XC, XXC, XXXC, ...\}$$

donde C significa que se obtuvo cara y X que se obtuvo cruz. Si se define la variable aleatoria Y como aquella que cuenta el número de lanzamientos hasta obtener la primera cara, entonces $R_Y = \{1, 2, \ldots\}$. En este caso la variable aleatoria R_Y toma un número infinito numerable de valores.

Definición 2.1.4 (Variables aleatorias continuas) *Una variable aleatoria X se define como continua si R_X contiene tantos puntos como puntos hay en el intervalo (0,1) en los reales.*

Ejemplo 2.1.5 (Caso continuo) *Considérese el experimento aleatorio que consiste en determinar el tiempo que tarda una bombilla eléctrica en fallar (dejar de funcionar). En este experimento el interés radica en medir el tiempo T, con cierto grado de precisión, que tarda el dispositivo en fallar a partir de que se ha puesto en funcionamiento por primera vez. El tiempo que se obtenga caerá dentro de cierto intervalo, en los reales, y dado que dentro de este intervalo existen tantos puntos como en el intervalo (0,1) contenido en $\mathbb{R}$, entonces T es una variable aleatoria continua.*

Las variables aleatorias continuas surgen generalmente de procesos de medición; mientras que las variables aleatorias discretas surgen de procesos de conteo.

2.1.1. Función de masa de probabilidad

Supóngase que el recorrido de una variable aleatoria discreta X es

$$R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

Cada uno de los valores del recorrido tiene asociado una probabilidad, dicho de otra manera, la variable aleatoria X puede tomar cada valor x_i de su

recorrido con cierta pobabilidad.
Notación: La probabilidad de que una variable aleatoria discreta X pueda tomar el valor particular $x_i \in R_X$ se denota por: $P(X = x_i)$.

Ejemplo 2.1.6 *Considérese una vez más el ejemplo 2.1.1. Como se mencionó anteriormente, se cuenta con un lote de 30 microcomputadoras de las cuales 5 son defectuosas; además, se extraen sin reemplazo una tras otra dos microcomputadoras. La variable aleatoria X que cuenta el número de microcomputadoras defectuosas en las 2 extracciones puede tomar los valores $x = 0, 1, 2$; es decir, $R_X = \{0, 1, 2\}$. Debido a que las dos extracciones son sin reemplazo,*

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= \frac{\binom{25}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{60}{87}, \\
P(X = 1) &= \frac{\binom{5}{1}\binom{25}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{25}{87}, \\
P(X = 2) &= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{2}{87}.
\end{aligned}
$$

Definición 2.1.5 (Función de masa de probabilidad) *Si X es una variable aleatoria discreta cuyo recorrido es $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, se conoce como función de probabilidad, función de masa de probabilidad o función de distribución de probabilidad, a la función que asocia a cada punto $x_i \in R_X$ el valor $P(X = x_i)$. La función de probabilidad se representa como $f(x)$. En general, $f(x)$ será la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X si:*

1. $f(x) \geq 0,$ *para todo* $x \in R_X$.
2. $\displaystyle\sum_{x \in R_X} f(x) = 1.$

La suma en el punto 2 toma todos los valores en el recorrido de X . De manera más explícita, si $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces la condición 2 representa:

$$\sum_{x \in R_X} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1. \tag{2.2}$$

Si R_X tiene infinitos elementos, entonces la condición 2 representa:

$$\sum_{x \in R_X} f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1. \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.1.7 *Para el ejemplo 2.1.6 determínese la función de probabilidad para la variable aleatoria X.*

Solución: Se construirá una tabla para representar los valores de R_X y las probabilidades que les asigna $f(x)$.

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

Tabla 2.1: Función de probabilidad

Se observa en la tabla 2.1 que las dos condiciones de la definición 2.1.5 se satisfacen.

Ejemplo 2.1.8 *Se lanza una moneda equilibrada dos veces. Determínese la función de probabilidad para la variable aleatoria X que cuenta el número de caras en los dos lanzamientos.*

Solución: El recorrido de la variable aleatoria X es $R_X = \{0, 1, 2\}$. Como los lanzamientos son independientes y la moneda es no sesgada,

$$\begin{aligned} f(0) &= P(X = 0) = \frac{1}{4}, \\ f(1) &= P(X = 1) = \frac{1}{2}, \\ f(2) &= P(X = 2) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

La función de probabilidad re representa en la tabla 2.2

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Tabla 2.2: Función de probabilidad

Definición 2.1.6 (Función de densidad de probabilidad) *Se dice que $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad o simplemente la función de densidad de la variable aleatoria continua X, si la probabilidad del evento $a < X < b$ está determinada por*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx, \text{ para todo } -\infty < a < b < \infty, \tag{2.4}$$

donde la función f(x) satisface las siguientes condiciones.

1. $f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

La probabilidad del evento $X = a$ es cero, ya que si $a = b$, entonces

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0. \tag{2.5}$$

Por lo anterior, para las variables aleatorias continuas, es posible reemplazar los signos $>$ y $<$ por $\geq$ y $\leq$ sin que se afecte el resultado; es decir,

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b). \tag{2.6}$$

+

Ejemplo 2.1.9 *a) Determine+ si la función $f(x)$ que se define a continuación representa una función de densidad para alguna variable continua X. b) Calcular la probabilidad de que X se encuentre entre -1 y 1.*

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución:

a) Como la función $f(x)$ es positiva para toda x, entonces $f(x)$ satisface la condición 1 de la definición 2.1.6 . Para concluir, se verificará la condición 2.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx, \\
&= \int_{-\infty}^{0} (0)dx + \int_{0}^{\infty} (2e^{-2x})dx, \\
&= -\int_{0}^{\infty} (e^{-2x}(-2))dx, \\
&= -\left. e^{-2x}\right|_{0}^{\infty} = 1.
\end{aligned}$$

La función $f(x)$ satisface las condiciones 1 y 2; por lo tanto, es una función de densidad de probabilidad.

b) De acuerdo con la definición 2.1.6

$$\begin{aligned}
P(-1 < X < 1) &= \int_{-1}^{1} f(x)dx, \\
&= \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx, \\
&= \int_{0}^{1} (2e^{-2x})dx, \\
&= -\left. e^{-2x}\right|_{0}^{1} = 1 - e^{-2} \\
&= 0.86
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.10 *Para la siguiente función:*

$$g(y) = \begin{cases} ky^3, & 0 < y < 2, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determínese el valor de k, de manera que f(x) sea una función de densidad para alguna variable aleatoria Y.

b) Calcúlese la probabilidad $P(0 < Y \leq 1)$.

Solución:

a) Se utilizará la condición 2 de la definición 2.1.6 para hallar el valor de

k.

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} g(y)dy + \int_{0}^{2} g(y)dy + \int_{2}^{\infty} g(y)dy, \\
&= \int_{0}^{2} (ky^3)dy, \\
&= \frac{k}{4}\, y^4\Big|_0^2, \\
&= 4k.
\end{aligned}$$

De la última ecuación se obtiene, $k = \frac{1}{4}$.

b) De la definición 2.1.6

$$\begin{aligned}
P(0 < Y < 1) &= \int_{0}^{1} g(y)dy = \int_{0}^{1} (\frac{y^3}{4})dy, \\
&= \frac{1}{16}\, y^4\Big|_0^1 = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Interpretaciones Gráficas para $f(x)$

Si $f(x)$ es la función de densidad para una variable aleatoria continua X, entonces es posible representarla gráficamente en el plano cartesiano, haciendo $y = f(x)$. En la figura 2.2 se representan las características generales de la gráfica, las cuales se obtienen a partir de su definición.

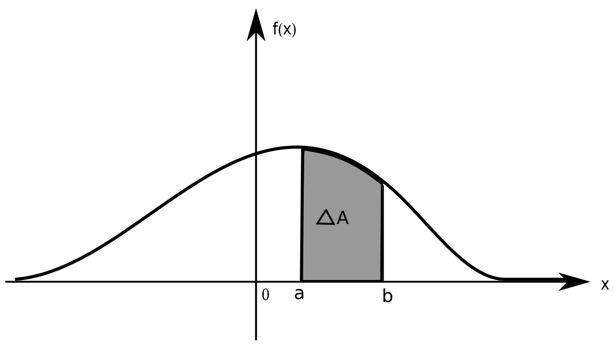


Figura 2.2: Gráfica de la función de densidad $f(x)$

Propiedades gráficas de la función de densidad $f(x)$.

1. $f(x) \geq 0$. Implica que la curva no cae por debajo del eje x.
2. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \Delta A$. Corresponde al área bajo la curva entre los puntos a y b.
3. $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. El área total bajo la curva es 1.

2.1.2. Función de distribución acumulativa

Para el cálculo de probabilidades, ya sea para una distribución discreta o continua, resulta más práctico utilizar lo que se conoce como función de distribución acumulativa. De hecho, existen tablas para las funciones de distribución acumulativas que se presentan de manera más frecuente al modelar experimetos aleatorios. Las tablas de las distribuciones se presentan en el apéndice E y se utilizarán en el capítulo 3.

Definición 2.1.7 (Función de distribución acumulativa) *La función de distribución acumulativa, función de distribución acumulada o simplemente función de distribución de una variable aleatoria (discreta o continua) X se define como:*

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{2.7}$$

De manera más explícita:

Caso discreto:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \ \textit{para} \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.8}$$

donde $f(x)$ es la función de probabilidad de la variable aleatoria discreta X. La suma toma todos los valores $t \in R_X$ que satisfacen la relación $t \leq x$.

Caso continuo:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \textit{para} \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.9}$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria continua X.

Ejemplos: Caso discreto

Ejemplo 2.1.11 *Considérese el ejemplo 2.1.7. Determine la función de distribución acumulada para la variable aleatoria X que cuenta el número de microcomputadoras defectuosas.*
Para el ejemplo al que se hace referencia, la función de probabilidad se representó mediante la tabla:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

Aplicando el caso discreto de la definición 2.1.7

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{60}{87}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{85}{87}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

La gráfica de $F(x)$ se muestra en la figura 2.3

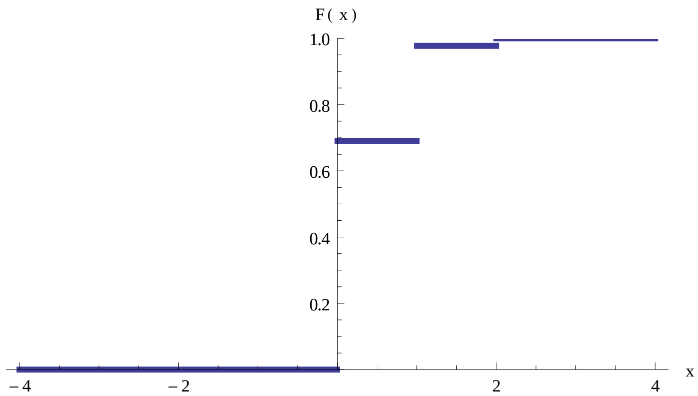


Figura 2.3: Función de distribución acumulada para el número de microcomputadoras defectuosas

Ejemplo 2.1.12 *Considérese el ejemplo 2.1.8. Determine la función de distribución acumulda para la variable aleatoria X que cuenta el número de caras en dos lanzamientos de una moneda.*
Para el ejemplo al que se hace referencia, la función de probabilidad se representó mediante la tabla:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

De acuerdo con la definición 2.1.7

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

A continuación se muestra la gráfica.

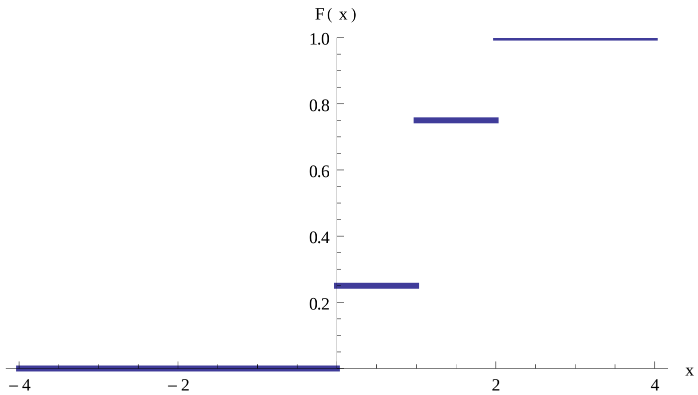


Figura 2.4: Función de distribución acumulada para el número de caras en el lanzamiento de una moneda

Ahora considérese que se conoce la función de distribución acumulada y se requiere calcular la probabilidad del evento $X = 1$ *mediante F(x). El procedimiento es el siguiente,*

$$\begin{aligned} F(1) &= f(0) + f(1), \\ F(0) &= f(0), \end{aligned}$$

por la tanto,

$$\begin{aligned} f(1) &= F(1) - F(0), \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En general, si X es una variable aleatoria discreta cuyo recorrido consta de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en dicho orden, entonces su función de distribución acumulada se determina por,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ f(x_1), & x_1 \leq x < x_2, \\ f(x_1) + f(x_2), & x_2 \leq x < x_3, \\ \vdots & \vdots \\ 1, & x \geq x_n. \end{cases}$$

Si se conoce $F(x)$ y se desea calcular la probabilidad de un punto o de un intervalo, por ejemplo, $f(x_i) = P(X = x_i)$, entonces

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq n.$$

Si se requiere hallar la probabilidad de un intervalo, por ejemplo, $P(X > x_i)$, entonces

$$\begin{aligned} P(X > x_i) &= 1 - P(X \leq x_i), \\ &= 1 - F(x_i), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.13 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un dado normal (de 6 caras y equilibrado) 2 veces. Si X es la variable aleatoria que determina el total en los dos lanzamientos:*

a) halle la función de distribución acumulada,

b) usando la función de distribución acumulada determine $P(X = 7)$ y $P(X > 7)$

Solución:

a)El recorrido de la variable aleatoria X es $R_X = \{2, 3 \ldots, 12\}$. La distribución de probabilidad se representa en la siguiente tabla:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La función de distribución acumulada es

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{1}{36}, & 2 \leq x < 3, \\ \frac{3}{36}, & 3 \leq x < 4, \\ \frac{6}{36}, & 4 \leq x < 5, \\ \frac{10}{36}, & 5 \leq x < 6, \\ \frac{15}{36}, & 6 \leq x < 7, \\ \frac{21}{36}, & 7 \leq x < 8, \\ \frac{26}{36}, & 8 \leq x < 9, \\ \frac{30}{36}, & 9 \leq x < 10, \\ \frac{33}{36}, & 10 \leq x < 11, \\ \frac{35}{36}, & 11 \leq x < 12, \\ 1, & x \geq 12. \end{cases}$$

La gráfica de la función se muestra a continuación,

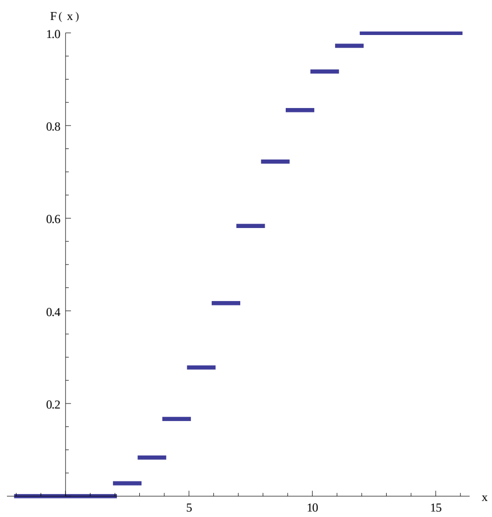


Figura 2.5: Función de distribución acumulada para el total en dos lanzamientos de un dado

b) Cálculo de las probabilidades requeridas:

$$\begin{aligned} P(X = 7) &= F(7) - F(6), \\ &= \frac{21}{36} - \frac{15}{36} = \frac{6}{36}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 7) &= 1 - P(X \leq 7), \\ &= 1 - F(7), \\ &= 1 - \frac{21}{36} = \frac{15}{36}. \end{aligned}$$

Ejemplos: Caso continuo

Ejemplo 2.1.14 *Considérese la variable aleatoria continua X definida en el ejemplo 2.1.9. Determine la función de distribución acumulada para la variable aleatoria X.*

Solución: La función de densidad está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De acuerdo con la definición 2.1.7,

i) Si $x \leq 0$, entonces $f(x) = 0$, y por lo tanto,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.$$

ii) Si $x > 0$, entonces $f(x) = 2e^{-2x}$, luego

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt, \\ &= \int_{0}^{x} (2e^{-2t})dt = -\left. e^{-2t}\right|_0^x, \\ &= 1 - e^{-2x}. \end{aligned}$$

La función de distribución acumulada es

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de $F(x)$.

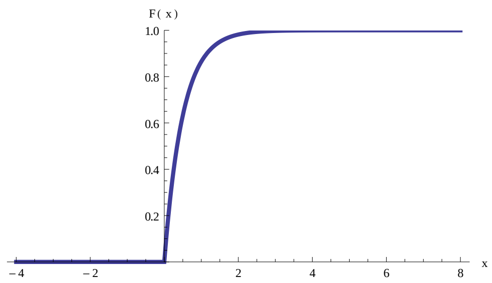


Figura 2.6: Función de distribución acumulada

Interpretaciones Gráficas para F(x)

Si $F(x)$ es la función de distribución acumulada para la variable aleatoria continua X, de manera análoga a como se interpretó $f(x)$, es posible representar gráficamente en el plano cartesiano a $y = F(x)$, mediante una curva tal como se muestra en la figura 2.7.

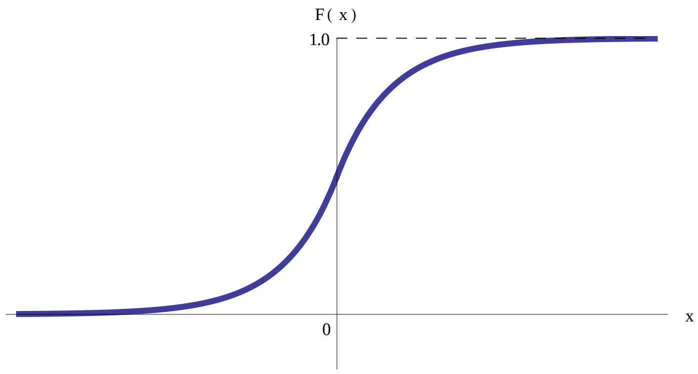


Figura 2.7: Curva de densidad de probabilidad

De la definición de la función de distribución acumulada se obtienen las siguientes propiedades generales de la curva:

a) Como $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$, entonces $F(x)$ es una función monótonamente creciente.

b) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$.

c) $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$.

Si se conoce la función de distribución acumulada $F(x)$, entonces es posible hallar la probabilidad de un intervalo (a,b) cualquiera, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
F(a) &= P(x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(u)du, \\
F(b) &= P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(u)du.
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= \int_{-\infty}^{b} f(u)du - \int_{-\infty}^{a} f(u)du, \\
&= \int_{-\infty}^{a} f(u)du + \int_{a}^{b} f(u)du - \int_{-\infty}^{a} f(u)du, \\
&= \int_{a}^{b} f(u)du, \\
&= P(a < X < b).
\end{aligned}$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \tag{2.10}$$

Una relación fundamental entre $f(x)$ y $F(x)$ se obtiene al aplicar el teorema fundamental del cálculo a la definición de $F(x)$, como se mostrará a continuación.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(F(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(u)du\right), \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

es decir,

$$f(x) = \frac{d}{dx}(F(x)) = F'(x). \tag{2.11}$$

Ejemplo 2.1.15 *Considérese la variable aleatoria continua Y definida en el ejemplo 2.1.10.*

a) Determine la función de distribución acumulada para la variable aleatoria Y.

b) Por medio de la función de distribución acumulada calcule $P(0 < Y < 1)$.

Solución:

a)La función de probabilidad para la variable aleatoria Y está dada por,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}y^3, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De acuerdo con la definición 2.1.7,

i) Si $y \leq 0$, entonces $g(y) = 0$, y por lo tanto,

$$G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(t)dt = 0.$$

ii) Si $0 < y < 2$, entonces $g(y) = \frac{1}{4}y^3$, luego

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{-\infty}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{y} g(t)dt, \\ &= \int_{0}^{y} g(t)dt = \int_{0}^{y} (\frac{1}{4}t^3)dt, \\ &= \frac{1}{16}\, t^4\Big|_0^y, \\ &= \frac{1}{16}y^4. \end{aligned}$$

iii) S $y \geq 2$, entonces $g(y) = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{-\infty}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{2} g(t)dt + \int_{2}^{y} g(t)dt, \\ &= \int_{0}^{2} g(t)dt = \int_{0}^{2} (\frac{1}{4}t^3)dt, \\ &= \frac{1}{16}\, t^4\Big|_0^2 = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de distribución acumulada está determinada por,

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{16}y^4, & 0 < y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de $G(Y)$. b) Cálculo de la probabilidad requerida.

$$\begin{aligned} P(0 < Y < 1) &= G(1) - G(0) = G(1), \\ &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

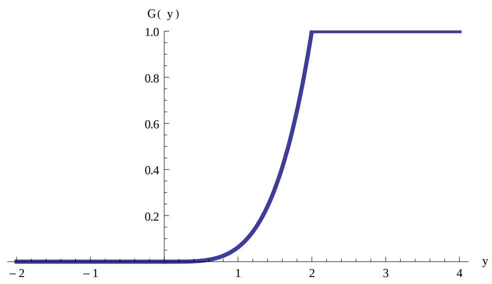


Figura 2.8: Función de distribución acumulada

Cambio de Variables

Teorema 2.1.1 (Cambio de variable-caso discreto) *Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad es $f(x)$. Supóngase que la variable aleatoria Y se define en términos de X mediante $Y = \phi(X)$, donde para cada valor de X le corresponde un único valor de Y e inversamente (a cada valor de Y le corresponde un único valor de X), de manera que es posible determinar $X = \psi(Y)$. Entonces la función de probabilidad de Y está determinada por,*

$$g(y) = f(\psi(y)). \tag{2.12}$$

Demostración: Dado que a cada valor de y le corresponde un único valor de x y también viceversa, si $x = \psi(y)$ entonces los eventos $X = x$ y $Y = y$ son equivalentes, luego

$$g(y) = P(Y = y) = P(\phi(X) = y) = P(X = \psi(y)) = f(\psi(y)). \quad \blacksquare \tag{2.13}$$

Ejemplo 2.1.16 *Considérese una variable aleatoria discreta X, cuya función de probabilidad está dada por,*

$$f(x) = \begin{cases} 2(\frac{1}{3})^x, & x = 1, 2, 3 \ldots \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.14}$$

a) Verifíquese que $f(x)$ sea una función de probabilidad.

b) Determínese la función de probabilidad para la variable aleatoria $Y = 4X - 1$.

Solución:

a) Todas las probabilidades asignadas por la ecuación 2.14 son positivas, por lo tanto, la propiedad 1 de la definición 2.1.5 se satisface. Aún queda por verificar que la suma de las probabilidades es igual a 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{\infty} f(x) &= 2\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}, \\
&= 2\left(1+\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1\right), \\
&= 2\left(\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1\right),
\end{aligned}$$

Se agregó y restó un 1 para identificar a la suma con la serie geométrica, para la cual se conoce que

$$\sum_{x=0}^{\infty} r^x = \frac{1}{1-r} \tag{2.15}$$

La convergencia de la suma está condicionada a que $|r| < 1$. Para el ejemplo que se está tratando, $r = \frac{1}{3}$, de manera que

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{\infty} f(x) &= 2\left(\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1\right), \\
&= 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1\right), \\
&= 2(3/2-1) = 1.
\end{aligned}$$

b) Cálculo de $g(y)$ para la variable aleatoria $Y = 4X - 1$.
Se observa que Y es una función que satisface las condiciones del teorema anterior (es una función biyectiva). Los valores en los recorridos de las variables aleatorias están relacionados por medio de las funciones,

$$y = 4x - 1 = \phi(x)$$

de donde se sigue que,

$$x = \frac{1}{4}(y+1) = \psi(y),$$

de manera que,

$$\begin{aligned}
g(y) &= f(\psi(y)), \\
g(y) &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}(y+1)}, \quad y = 3, 7, 11, \ldots
\end{aligned}$$

Teorema 2.1.2 (Cambio de variable-caso continuo) *Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, donde $f(x) > 0$ para algún intervalo, $a < x < b$. Si $Y = \phi(X)$ es una función de X estrictamente monótona(creciente o decreciente) y $y = \phi(x)$ es derivable para toda x. Entonces la función de densidad de probabilidad de Y está determinada por,*

$$\begin{aligned} g(y)|dy| &= f(x)|dx|, &(2.16)\\ g(y) &= f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(\psi(y))|\psi'(y)|. &(2.17)\end{aligned}$$

Demostración: Considérese el caso en que $y = \phi(x)$ es una función monótona creciente; es decir, y se incrementa a medida que x se incrementa, como se muestra en la figura 2.9. De acuerdo con la definición 2.1.2,

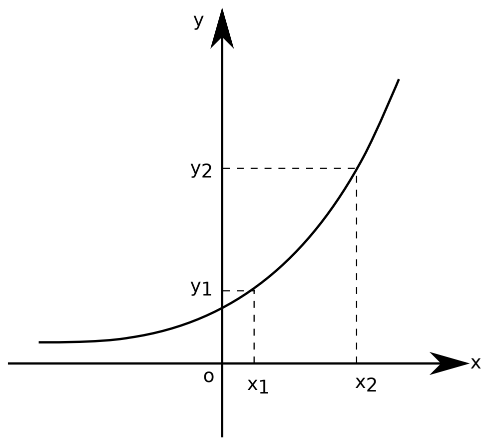


Figura 2.9: Gráfica de una función monótonamente creciente, $y = \phi(x)$.

$$\begin{aligned} P(y_1 < Y < y_2) &= P(x_1 < X < x_2),\\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx,\\ &= \int_{y_1}^{y_2} f(\psi(y))\psi'(y)dy. &(2.18)\end{aligned}$$

La ecuación 2.18 se obtuvo como resultado del teorema del cambio de variables que se estudia en cursos de cálculo. Por otro lado, desarrollando el lado izquierdo de la ecuación 2.18 se obtiene,

$$
\begin{aligned}
P(y_1 < Y < y_2) &= \int_{y_1}^{y_2} f(\psi(y))\psi'(y)dy, &(2.19)\\
\int_{y_1}^{y_2} g(y)dy &= \int_{y_1}^{y_2} f(\psi(y))\psi'(y)dy. &(2.20)
\end{aligned}
$$

La última ecuación puede expresarse como,

$$\int_{y_1}^{y_2} [g(y) - f(\psi(y)\psi'(y)dy]\, du = 0. \tag{2.21}$$

La ecuación 2.21 se cumple para todo valor de y_1 y y_2 si y solo si,

$$[g(y) - f(\phi(y)\psi'(y)dy] = 0, \tag{2.22}$$

luego

$$g(y) = f(\psi(y))\psi'(y). \quad \blacksquare$$

El caso de una función monótona decreciente se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 2.1.17 *Considérese la variable aleatoria X que se describió en el ejemplo 2.1.9. Si Y es otra variable aleatoria definida como, $Y = 4X - 1$, hallar la función de densidad de la variable aleatoria Y.*

Solución: La función de densidad de la variable aleatoria X está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Los valores de las variables aleatorias X y Y se relacionan por medio de las funciones,

$$
\begin{aligned}
y &= 4x - 1 = \phi(x),\\
x &= \frac{1}{4}(y+1) = \psi(y).
\end{aligned}
$$

Derivando la última ecuación se obtiene,

$$\psi'(y) = \frac{1}{4}.$$

De acuerdo con el teorema anterior se concluye que

$$
\begin{aligned}
g(y) &= f(\psi(y))\psi'(y),\\
&= 2e^{-2(\frac{1}{4}(y+1))}(1/4),\\
&= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(y+1)}, \quad y > 0.
\end{aligned}
$$

Cálculo del recorrido de $g(y)$.
Dado que $g(x) \geq 0$, para $x > 0$, entonces $g(y)$ será diferente de cero para toda $x = \psi(y) > 0$, de manera que

$$\begin{aligned} x &> 0, \\ \psi(y) &> 0, \\ \frac{1}{4}(y+1) &> 0, \\ y+1 &> 0, \\ y &> -1. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(y+1)}, & y > -1, \\ 0, & y \leq -1. \end{cases}$$

La gráfica de la función de densidad se muestra en la figura 2.10

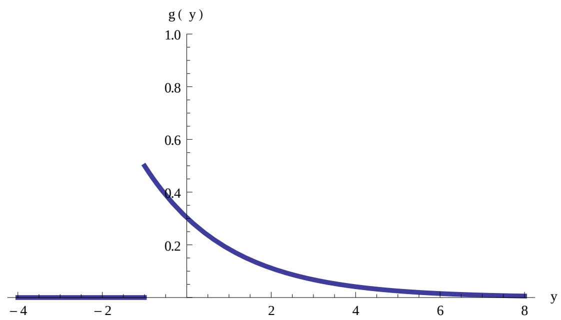


Figura 2.10: Gráfica de la función de densidad $g(y)$.

Teorema 2.1.3 *Si X es una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$, y sea $Y = X^2$, entonces la variable aleatoria Y tiene una función de densidad dada por*

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})). \tag{2.23}$$

Demostración: Para este caso no es aplicable el teorema anterior, ya que para cualquier $x \neq 0$ la función $\phi(x) = x^2$ asigna el mismo valor a x y a $-x$. Por lo anterior, se procederá de la siguiente manera: Se determinará la función de distribución acumulada $G(y)$, posteriormente se calculará $G'(y)$ lo que es igual a $g(y)$, de acuerdo con la ecuación 2.11.

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y), \\ &= P(X^2 \leq y), \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}), \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

Al derivar la última ecuación se obtiene el resultado.

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y), \\ &= F'(\sqrt{y}) - F'(-\sqrt{y}), \\ &= f(\sqrt{y})\frac{d}{dy}(\sqrt{y}) - f(-\sqrt{y})\frac{d}{dy}(-\sqrt{y}), \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.18 *Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Si una nueva variable aleatoria se define como $Y = X^2$, determine la función de densidad $g(y)$ de esta variable aleatoria.

Solución: De acuerdo con el teorema anterior, para toda $y > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right), \\ &= \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

Por lo anterior,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

La gráfica de la función $g(y)$ se muestra en la figura 2.11

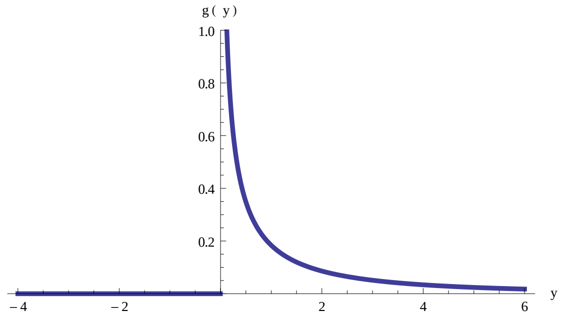


Figura 2.11: Gráfica de la función de densidad $g(y)$.

Para dar por terminada esta sección considérese la siguiente situación: Supóngase que se tiene una variable aleatoria X cuya función de densidad es conocida, y que se desea calcular la función de densidad de una variable aleatoria Z que puede expresarse como $Z = aX^2$, siendo a una constante. Lo recomendable es determinar la función de densidad $g(y)$ de la variable aleatoria $Y = X^2$, de acuerdo con el teorema 2.1.3 y posteriormente, hallar la función de densidad $h(z)$ de la variable aleatoria Z, observando que $Z = aY$ satisface las condiciones del teorema 2.1.2.

Ejemplo 2.1.19 *Considérese que el radio de una esfera es una variable aleatoria continua y supóngase que su función de densidad está determinada por*

$$f(r) = \begin{cases} 6r(1-r), & 0 < r < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determine la función de densidad para el área de la superficie que limita a la esfera.

Solución: La variable aleatoria S (área) está definida por la función $S = 4\pi R^2$. Se comenzará por hallar $g(y)$, donde $Y = X^2$. De acuerdo con el teorema 2.1.3 se obtiene,

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right), \\ &= \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \\ &= \frac{6\sqrt{y}(1-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \\ &= 3(1-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

Por lo anterior,

$$g(y) = \begin{cases} 3(1-\sqrt{y}), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora considérese que $S = 4\pi Y$. Las relaciones entre los valores de R_Y y R_S son:

$$\begin{aligned} s &= 4\pi y = \phi(y), \\ y &= \frac{s}{4\pi} = \psi(s). \end{aligned}$$

De la última ecuación se obtiene,

$$\psi'(s) = \frac{1}{4\pi}. \tag{2.24}$$

Aplicando el teorema 2.1.2 se concluye que,

$$\begin{aligned} h(s) &= g(\psi(s))\psi'(s), \\ &= 3\left(1-\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right)\frac{1}{4\pi}, \\ &= \frac{3}{4\pi}\left(1-\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right), \qquad 0 < s < 4\pi. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi}(1-\sqrt{\frac{s}{4\pi}}), & 0 < s < 4\pi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2.2. Valor esperado de una variable aleatoria (discreta o continua)

El valor esperado de una variable aleatoria es una de las cantidades más importantes que se estudian en probabilidad y estadística. La media de una variable aleatoria constituye una medida de tendencia central; es decir, los valores en R_X tienden a concentrarse alrededor de la media. El teorema de Chebyshev, que se estudiará en el capítulo 3, permitirá dar una interpretación más precisa de este hecho.

Definición 2.2.1 (Valor esperado de una variable aleatoria) *Si X es una variable aleatoria (discreta o continua) se define la esperanza, el valor* *esperado o la media de la variable aleatoria X como:*

Caso discreto:

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x), \quad \text{donde } f(x) \text{ es la función de probabilidad de } X. \tag{2.25}$$

La suma anterior se toma sobre todos los valores x en el recorrido de la variable aleatoria X.
Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i). \tag{2.26}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i). \tag{2.27}$$

Caso continuo:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad \text{donde } f(x) \text{ es la función de densidad de } X. \tag{2.28}$$

La media existirá si la suma o la integral (según corresponda) converge absolutamente; es decir, si al sustituir x por $|x|$ en las ecuaciones 2.25 o 2.28 la suma o la integral correspondiente converge.

Ejemplo 2.2.1 (Caso discreto-finito) *Suponga que una variable aleatoria discreta X tiene función de probabilidad descrita en la siguiente tabla.*

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

Determine el valor esperado de la variable aleatoria X.

Solución: R_X contiene un número finito de valores, de acuerdo con la definición 2.2.1,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i f(x_i) = 0(\frac{60}{87}) + 1(\frac{25}{87}) + 2(\frac{2}{87}) = \frac{29}{87}.$$

Ejemplo 2.2.2 (Caso discreto-infinito) *Considérese la variable aleatoria X del ejemplo 2.1.16, cuya función de probabilidad está dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2(\frac{1}{3})^x, & x = 1, 2, 3\ldots \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Determine el valor esperado de la variable aleatoria X.

Solución: De acuerdo con la definición 2.2.1,

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xf(x) = 2\sum_{x=1}^{\infty} x(\frac{1}{3})^x.$$

Hasta aquí lo que se quiere mostrar es el sentido de la definición. El resultado de este ejercicio se desarrollará en la sección 2.4

Ejemplo 2.2.3 (Caso continuo) *Considéres una variable aleatoria continua X cuya función de densidad está definida por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Determine el valor esperado de X.

Solución: A partir de la definición 2.2.1,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx, \\ &= \int_{0}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx, \end{aligned}$$

Mediante el método de integración por partes se obtiene,

$$u = x, \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-x}dx, \Rightarrow v = -e^{-x},$$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

De manera que,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx, \\ &= -xe^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}dx, \\ &= -xe^{-x}\Big|_0^{\infty} - e^{-x}\Big|_0^{\infty}, \\ &= e^{-x}(x+1)\Big|_{\infty}^{0} = 1. \end{aligned}$$

Teoremas sobre la media

Teorema 2.2.1 (Media de una función) *Sea X una variable aleatoria (discreta o continua), si se define una segunda variable aleatoria $Y = \phi(X)$, entonces*

Caso discreto:

$$E[Y] = E[\phi(X)] = \sum_x \phi(x)f(x), \tag{2.29}$$

La suma anterior se toma sobre todos los valores x en el recorrido de la variable aleatoria X.
Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)f(x_i). \tag{2.30}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(x_i)f(x_i). \tag{2.31}$$

donde $f(x)$ es la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

Caso continuo:

$$E[Y] = E[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx, \tag{2.32}$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria X.

Demostración: Se presentará un bosquejo de la demostración para el caso discreto. La demostración del caso continuo queda fuera de los objetivos de este trabajo.
Considérese una variable aleatoria X discreta cuyo recorrido sea finito, digamos, $R_X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ y sea $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots y_m\}$ el recorrido de Y. Si $\phi(X)$ es uno a uno y sobre; es decir, a cada valor de X le corresponde un solo

valor de Y y también viceversa, entonces $m = n$, además, de acuerdo con el teorema 2.18 $g(y) = f(\psi(y))$, luego

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{n} y_i g(y_i) = \sum_{y=1}^{n} \phi(x_i) f(x_i). \tag{2.33}$$

Ahora supóngase que $\phi(X)$ no es uno a uno y sobre; es decir, $m < n$. Para simplificar, supóngase que para todo $1 \leq i \leq n-2$, $\phi(x_i) = y_i$ y que $\phi(x_{n-1}) = \phi(x_n) = y_{n-1}$, como se muestra en la siguiente tabla.

x	x_1	$\ldots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
$y = \phi(x)$	y_1	$\ldots$	y_{n-2}	y_{n-1}	y_{n-1}

Para este caso,

$$g(y_i) = f(x_i) \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

y

$$g(y_{n-1}) = f(x_{n-1}) + f(x_n),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=1}^{n-1} y_i g(y_i), \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} y_i g(y_i) + y_{n-1} g(y_n - 1), \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} y_i f(x_i) + y_{n-1}(f(x_{n-1}) + f(x_n)), \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} y_i f(x_i) + y_{n-1} f(x_{n-1}) + y_{n-1} f(x_n), \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} \phi(x_i) f(x_i) + \phi(x_{n-1}) f(x_{n-1}) + \phi(x_n) f(x_n), \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) f(x_i).
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.4 *Considérese la variable aleatoria X que cuenta el número de microcomputadoras defectuosas cuando que se extraen sin reemplazo, dos de ellas de manera aleatoria de un lote que contiene en 30 microcomputadoras, de las cuales 5 son defectuosas. Si Y es otra variable aleatoria definida en términos de X como $Y = (3X-1)^2$, determine el valor esperado de la variable aleatoria Y.*

Solución: La función de probabilidad de la variable aleatoria X se muestra en la siguiente tabla:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

De acuerdo con el teorema anterior,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_x \phi(x)f(x), \\ &= \sum_x (3x-1)^2 f(x), \\ &= 1(\frac{60}{87}) + 4(\frac{25}{87}) + 25(\frac{2}{87}), \\ &= \frac{70}{29} = 2.41 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.5 *Sea X la variable aleatoria que se consideró en el ejemplo 2.1.17. Si Y es otra variable aleatoria que se define en términos de X por $Y = 4X - 1$, hallar el valor esperado de la variable aleatoria Y.*

Solución: La variable aleatoria X tiene función de densidad definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

De acuerdo con el teorema 2.2.1,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx, \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} \phi(x)f(x)dx, \\ &= 2\int_{0}^{\infty} (4x-1)e^{-2x}dx. \end{aligned}$$

Desarrollando la integral, mediante el método de integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}
E(X) &= 2\int_0^\infty (4x-1)e^{-2x}dx,\\
&= 2\left(-\frac{1}{2}\left.(4x-1)e^{-2x}\right|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}(4dx)\right),\\
&= 2\left(-\frac{1}{2}\left.(4x-1)e^{-2x}\right|_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-2x}dx\right),\\
&= 2\left.\left(-\frac{1}{2}(4x-1)e^{-2x} - e^{-2x}\right)\right|_0^\infty,\\
&= 2\left.\left(\frac{1}{2}(4x-1)+1\right)e^{-2x}\right|_\infty^0,\\
&= \left.\left((4x-1)+2\right)e^{-2x}\right|_\infty^0,\\
&= \left.(4x+1)\,e^{-2x}\right|_\infty^0,\\
&= 1.
\end{aligned}$$

El teorema 2.2.1 permite calcular la media de la función $Y = \phi(X)$, sin calcular previamente la función de densidad de la variable aleatoria Y, como se precisa de la definición de la media; sin embargo, la verdadera importancia de este teorema radica en los teoremas que se establecerán a continuación y que permiten calcular la media de funciones con mayor facilidad.

Teorema 2.2.2 *Si X es una variable aleatoria con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, y si C es una constante, entonces*

$$E(C) = C. \tag{2.34}$$

Demostración: Se desarrollará la demostración para una variable aleatoria discreta X. Para el caso continuo solo se requiere reemplazar sumas por integrales. De acuerdo con el teorema 2.2.1

$$E[C] = \sum_{x_i} Cf(x_i) = C\sum_{x_i} f(x_i) = C. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2.3 *Si X es una variable aleatoria con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, y si C es una constante, entonces*

$$E(CX) = CE(X). \tag{2.35}$$

Demostración: De manera análoga al teorema anterior,

$$E[CX] = \sum_{x_i} Cx_i f(x_i) = C \sum_{x_i} x_i f(x_i) = CE(X). \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2.4 (Media de la suma de variables dependientes) *Si X es una variable aleatoria con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, y si Y es otra variabe aleatoria que depende de X; es decir, $Y = Y(X)$, entonces*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y). \tag{2.36}$$

Demostración: Se demostrará el teorema para una variable aleatoria discreta X. Para el caso continuo solo se requiere reemplazar sumas por integrales. De acuerdo con el teorema 2.2.1,

$$\begin{aligned} E[Z(X)] &= \sum_{x_i} z(x_i) f(x_i), \\ &= \sum_{x_i} (x_i + y_i) f(x_i), \\ &= \sum_{x_i} x_i f(x_i) + \sum_{x_i} y_i f(x_i), \\ &= E(X) + E[Y]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.6 *Considérese el ejemplo 2.2.4. Obtenga la media requerida haciendo uso de los 3 teoremas anteriores.*

Solución: La variable aleatoria X tiene función de probabilidad dada por

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

Se requiere calcular el valor esperado de $Y = (3x - 1)^2$, de manera que desarrollando el binomio se obtiene,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(3X - 1)^2], \\ &= E[9X^2 - 6X + 1], \\ &= E[9X^2] + E[-6X] + E[1], \quad \text{teorema 2.2.4}, \\ &= 9E[X^2] - 6E[X] + E[1], \quad \text{teorema 2.2.3}, \\ &= 9E[X^2] - 6E[X] + 1, \quad \text{teorema 2.2.2}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Calculando por separado $E[X]$ y $E[X^2]$ se obtiene,

$$E[X] = \sum_x xf(x) = 0(\frac{60}{87}) + 1(\frac{25}{87}) + 2(\frac{2}{87}) = \frac{29}{87}.$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 f(x) = 0(\frac{60}{87}) + 1(\frac{25}{87}) + 4(\frac{2}{87}) = \frac{33}{87}.$$

Sustituyendo $E[X]$ y $E[X^2]$ en la ecuación 2.37 se obtiene,

$$E[Y] = 9E[X^2] - 6E[X] + 1 = 9(\frac{33}{87}) - 6(\frac{29}{87}) + 1 = \frac{70}{29}. = 2.41$$

Ejemplo 2.2.7 *Sea X la variable aleatoria del ejemplo 2.2.5, si Y se define en términos de X por $Y = 4X - 1$, calcúlese el valor esperado de la variable aleatoria Y, ahora utilizando los tres teoremas anteriores.*

Solución: La variable aleatoria X tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Calculando el valor esperado de $Y = 4X - 1$, tal como en el caso anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(4X-1)], \\ &= E[4X] + E[-1], \quad \text{teorema 2.2.4}, \\ &= E[4X] - 1, \quad \text{teorema 2.2.2}, \\ &= 4E[X] - 1, \quad \text{teorema 2.2.3}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

Se calculará $E[X]$.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) = \int_0^{\infty} (2x)e^{-2x}dx.$$

Aplicando el método de integración por partes se obtiene,

$$\begin{aligned} E(X) &= \left(-xe^{-2x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-2x}dx \right), \\ &= \left(-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right)\Bigg|_0^{\infty}, \\ &= \left(x + \frac{1}{2} \right) e^{-2x}\Bigg|_{\infty}^{0}, \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sustituyendo $E(X)$ en la ecuación 2.38 se obtiene,

$$E(Y) = 4(1/2) - 1 = 1.$$

2.3. Varianza de una variable aleatoria (discreta o continua)

Definición 2.3.1 (Varianza de una variable aleatoria) *Si una variable aleatoria X tiene media μ finita, se define la varianza de X como,*

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2], \tag{2.39}$$

de manera más precisa:

Caso discreto:

Si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $f(x)$ y media finita μ, se define la varianza de la variable aleatoria X como,

$$var(X) = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 f(x), \tag{2.40}$$

siempre y cuando la suma converja absolutamente.
La suma se toma sobre todos los valores x en el recorrido de la variable aleatoria discreta X.
Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 f(x_i). \tag{2.41}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$var(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i-\mu)^2 f(x_i). \tag{2.42}$$

Caso continuo:

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ y media finita μ, se define la varianza de la variable aleatoria X como,

$$var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx, \tag{2.43}$$

siempre y cuando la integral converja absolutamente.

Definición 2.3.2 (Desviación estándar) *La raíz cuadrada positiva de la varianza se conoce como desviación estándar y se denota por σ; es decir,*

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2)]}. \tag{2.44}$$

Obsérvese que $\sigma^2 = var(X)$, de hecho, es común usar σ^2 en lugar de $var(X)$ cuando no existe duda sobre la variable aleatoria a la cual se refiere.

Ejemplo 2.3.1 *Determine la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria X del ejemplo 2.2.6.*

Solución: De acuerdo con los resultados del ejemplo 2.2.6 se tiene que $\mu = 29/87$. Nuevamente se requiere de la función de probabilidad

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

De acuerdo con la definición 2.3.1

$$\begin{aligned} var(X) &= \sum_x (x-\mu)^2 f(x), \\ &= \left(0-\frac{29}{87}\right)^2\left(\frac{60}{87}\right)+\left(1-\frac{29}{87}\right)^2\left(\frac{25}{87}\right)+\left(2-\frac{29}{87}\right)^2\left(\frac{2}{87}\right), \\ &= \frac{70}{261}. \end{aligned}$$

Finalmente, la desviación estándar es,

$$\sigma = \sqrt{var(X)} = \sqrt{\frac{70}{261}} = 0.5270$$

Ejemplo 2.3.2 *Determine la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria X del ejemplo 2.2.7.*

Solución: Esta variable aleatoria tiene media $\mu = 1/2$, la cual se determinó en el ejemplo 2.2.7. Su función de densidad está definida como,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

De acuerdo con la definición 2.3.1,

$$\begin{aligned} var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)dx. \\ &= 2\int_{0}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 e^{-2x}dx. \end{aligned}$$

Desarrollando la integral, con el método de integración por partes, se obtiene

$$var(X) = \frac{1}{4}.$$

La desviación estándar es entonces,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Teoremas sobre la varianza

A continuación se demostrarán un conjunto de teoremas que permiten obtener la varianza de una variable aleatoria X de manera eficiente.

Teorema 2.3.1 *Si X es una variable aleatoria (discreta o continua) con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, entonces*

$$var(X) = E[X^2] - \mu^2. \tag{2.45}$$

Demostración: A partir de la definición 2.3.1 y aplicando las propiedades de la esperanza contenidas en los teoremas 2.2.2, 2.2.3 y 2.2.4 se obtiene en consecuencia,

$$\begin{aligned} var(X) &= E[(X - \mu)^2], \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2], \\ &= E[X^2] + E[-2\mu X] + E[\mu^2], \\ &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2, \\ &= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2, \\ &= E[X^2] - \mu^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.3.2 *Si X es una variable aleatoria (discreta o continua) con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, y si C es una constante, entonces*

$$var[CX] = C^2 var[X] \tag{2.46}$$

Demostración: Defínase la variable aleatoria $Y = CX$ y aplíquese el teorema 2.3.1

$$\begin{aligned} var[CX] &= var[Y], \\ &= E[Y^2] - E^2[Y], \\ &= E[C^2X^2] - [E(CX)]^2, \\ &= C^2E(X^2) - [C\mu]^2, \\ &= C^2[E(X^2) - \mu^2], \\ &= C^2var(X). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.3.3 *Si X es una variable aleatoria (discreta o continua) con función de probabilidad o de densidad $f(x)$, según corresponda, entonces y C es una constante, entonces*

$$var[X + C] = var[X] \tag{2.47}$$

Demostración: Defínase la variable aleatoria $Y = X + C$ y aplíquese el teorema 2.3.1

$$\begin{aligned} var[X + C] &= var[Y], \\ &= E[Y^2] - E^2[Y], \\ &= E[(X + C)^2] - [E(X + C)]^2. \end{aligned}$$

Finalmente, de las propiedades de la media se concluye que,

$$\begin{aligned} var[X + C] &= E[X^2 + 2CX + C^2] - [\mu + C]^2, \\ &= E(X^2) + 2C\mu + C^2 - [\mu^2 + 2\mu + C^2], \\ &= E(X^2) + 2C\mu + C^2 - \mu^2 - 2\mu C - C^2], \\ &= E(X^2) - \mu^2, \\ &= var(X). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.3 *Considérese la variable aleatoria X del ejemplo 2.3.2. Determine la varianza usando el teorema 2.3.1.*

Solución: La variable aleatoria tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

De acuerdo con el teorema 2.3.1 se requieren $E(X)$ y $E(X^2)$. Para esta variable aleatoria la media se calculó en el ejemplo 2.2.2. A continuación se calculará $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx. \\ &= 2\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x}dx. \end{aligned}$$

Desarrollando la integral, mediante el método de integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x}dx. \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}(2x)dx\right), \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\mu\right), \\ &= \mu = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, de acuerdo con el teorema 2.3.1 se tiene

$$var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

La desviación estándar es entonces,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2.3.4 *Suponga que una variable aleatoria X tiene media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Determine las varianzas correspondientes de las siguientes funciones.*

a) $U = 3X$,

b) $V = X + 5$,

c) $W = \frac{3}{2}X + 2$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
a) \quad var(U) &= var(3X), \\
&= 3^2 var(X), \quad \text{teorema 2.3.2}, \\
&= 9.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b) \quad var(v) &= var(X+5), \\
&= var(X), \quad \text{teorema 2.3.3}, \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c) \quad var(W) &= var(\tfrac{3}{2}X+2), \\
&= var(\tfrac{3}{2}X), \quad \text{teorema 2.3.3}, \\
&= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 var(X), \quad \text{teorema 2.3.2}, \\
&= \tfrac{9}{4}
\end{aligned}
$$

Otras medidas de tendencia central

Definición 2.3.3 (La moda) *Para una variable aleatoria discreta la moda es el valor que ocurre con mayor frecuencia. Para una variable aleatoria continua la moda es el valor para el cual la función de densidad tiene un máximo local. Es común que una variable aleatoria, discreta o continua, tenga varias modas, en tales casos se dice que la función es multimodal.*

Definición 2.3.4 (La mediana) *La mediana es el valor x para el cual $P(X < x) = 1/2$ y $P(X > x) \leq 1/2$. Para una distribución continua se cumple que $P(X < x) = P(X > x) = 1/2$; es decir, la mediana separa a la curva de densidad en dos regiones con áreas iguales.*

Definición 2.3.5 (Los percentiles) *Si f(x) es la función de densidad de una variable aleatoria continua X, y si P define un porcentaje del área total bajo la curva de densidad, entonces el valor x_P de la variable aleatoria X que satisface la ecuación,*

$$P = \int_{-\infty}^{x_P} f(x)dx. \tag{2.48}$$

se conoce como percentil. (ver figura 2.12)

Si el área se divide en 10 partes iguales, entonces los valores de las órdenadas se conocen como deciles: $x_{0.10}, x_{0.20}, \ldots, x_{0.90}$, de manera que $x_{0.10}$ es el primer decil o décimo percentil, $x_0.20$ es el segundo decil o vigésimo percentil, y así sucesivamente.

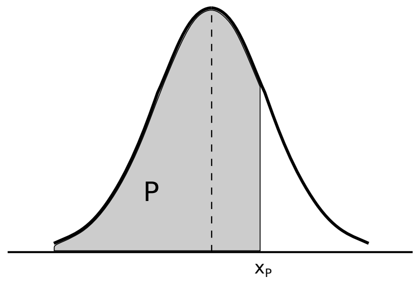


Figura 2.12: Los perdentiles

2.4. Función generadora de momentos de una variable aleatoria (discreta o continua)

Definición 2.4.1 (Momentos alrededor de la media) *Dada una variable aleatoria X con media μ finita, se define el momento r-ésimo alrededor de la media como,*

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.49}$$

Si $f(x)$ es la función de probabilidad (o de densidad), entonces

Caso discreto:

$$\mu_r = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^r f(x), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.50}$$

siempre que la sumatoria converja absolutamente.
La suma se toma sobre todos los valores x en el recorrido de la variable aleatoria discreta X.
Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^r f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.51}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i-\mu)^r f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.52}$$

Caso continuo:

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)dx, \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.53}$$

siempre que la integral converja absolutamente.

Obsérvese que los primeros momentos alrededor de la media son:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Definición 2.4.2 (Momentos alrededor del origen) *Dada una variable aleatoria X, el momento r-ésimo alrededor del origen se define como,*

$$\mu'_r = E[(X^r] \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.54}$$

Si $f(x)$ es la función de probabilidad (o de densidad) entonces

a) Caso discreto

$$\mu'_r = \sum_{x \in R_X} x^r f(x), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.55}$$

siempre que la sumatoria converja absolutamente.

Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$\mu'_r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.56}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$\mu'_r = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.57}$$

b) Caso continuo

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.58}$$

siempre que la integral converja absolutamente.

Obsérvese que los primeros mometos alrededor del origen son:

$$\begin{aligned}\mu'_0 &= 1,\\ \mu'_1 &= \mu,\\ \mu'_2 &= E(X^2).\end{aligned}$$

Teorema 2.4.1 *Si X es una variable aleatoria con función de probabilidad (o de densidad) $f(x)$, según corresponda, cuyos momentos alrededor de la media y alrededor del origen son μ_r y μ'_r, respectivamente, entonces*

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{r}{j} \mu^j \mu'_{r-j} \tag{2.59}$$

Demostración: Considérese la definición 2.4.1,

$$\mu_r = E[(X-\mu)]^r \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.60}$$

El desarrollo de $(X-\mu)^r$ mediante el binomio Newton permite establecer,

$$(X-\mu)^r = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{r}{j} \mu^j X_{r-j}. \tag{2.61}$$

Al sustituir la ecuación 2.61 en la ecuación 2.60 y, además, aplicando las propiedades de la media se obtiene,

$$\begin{aligned}\mu_r &= E\left[\sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{r}{j} \mu^j X_{r-j}\right],\\ &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{r}{j} \mu^j E[X_{r-j}],\\ &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \binom{r}{j} \mu^j \mu'_{r-j}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.1 *Desarrolle la ecuación 2.59 para $r = 2$.*

Solución: La ecuación 2.59 para $r = 2$ se expresa como:

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \sum_{j=0}^{2}(-1)^j \binom{2}{j} \mu^j \mu'_{2-j}, \\
&= \binom{2}{0} \mu^0 \mu'_2 - \binom{2}{1} \mu^1 \mu'_1 + \binom{2}{2} \mu^2 \mu'_0, \\
&= \mu'_2 - 2\mu^1 \mu'_1 + \mu^2 \mu'_0 \\
&= \mu'_2 - 2\mu^2 + \mu^2, \\
&= \mu'_2 - \mu^2,
\end{aligned}$$

Es importante destacar que la última ecuación coincide con el resultado del teorema 2.3.1. En efecto, $\mu_2 = var(X)$, $\mu'_2 = E(X^2)$. Al reescribir esta ecuación en estos términos se obtiene, $var(X) = X^2 - \mu^2$.

Definición 2.4.3 (Función generadora de momentos) *La función generadora de momentos de una variable aleatoria X se define como,*

$$M_X(t) = E(e^{tX}). \tag{2.62}$$

Si $f(x)$ es la función de probabilidad (o de densidad) entonces

a) Caso discreto

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} f(x), \tag{2.63}$$

siempre que la sumatoria converja absolutamente. La suma se toma sobre todos los valores x en el recorrido de la variable aleatoria discreta X.
Si R_X consta de un número finito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.64}$$

Si R_X consta de un número infinito de valores, $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} f(x_i), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.65}$$

b) Caso continuo

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx, \tag{2.66}$$

siempre que la integral converja absolutamente.

Teorema 2.4.2 *Si X es una variable aleatoria con función de probabilidad (o de densidad) $f(x)$ y si $M_X(t)$ es su función generadora de momentos, entonces*

$$\mu'_r = \frac{d^r}{dt^r} M_X(t)\bigg|_{t=0}$$

Demostración: La demostración que se desarrollará corresponde al caso continuo. Para el caso discreto se requiere reemplazar las integrales por sumas.
De acuerdo con la definición 2.4.3:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx,$$

Ahora, tomando la derivada *r-ésima* de la función generadora de momentos se establece,

$$\frac{d^r}{dt^r}(M_X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{dt^r} e^{tx} f(x)dx. \tag{2.67}$$

Por otro lado,

$$\frac{d^r}{dt^r}(e^{tx}) = x^r e^{tx}, \tag{2.68}$$

de manera que

$$\frac{d^r}{dt^r}(x^r e^{tx})\bigg|_{t=0} = x^r. \tag{2.69}$$

Sustituyendo la ecuación 2.68 en la ecuación 2.67 y evaluando en $t = 0$ se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r} M_X(t)\bigg|_{t=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x)dx\bigg|_{t=0}, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, \\ &= \mu'_r. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.2 *Considérese la variable aleatoria X que se describió en el ejemplo 2.2.2.*

$$f(x) = \begin{cases} 2(\frac{1}{3})^x, & x = 1, 2, 3 \ldots \\ 0. & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Hallar la función generadora de momentos, la media y la varianza de X.

Solución: De la definición 2.4.3

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}], \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} f(x), \\ &= 2\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} (\frac{1}{3})^x, \\ &= 2\sum_{x=1}^{\infty} (\frac{1}{3}e^t)^x, \\ &= 2\left(\sum_{x=0}^{\infty} (\frac{1}{3}e^t)^x - 1\right), \end{aligned}$$

La suma puede identificarse con la serie geométrica la cual converge si $(\frac{1}{3}e^t) < 1$. En este caso la suma converge para, $0 < t < \ln 3$, y por lo tanto,

$$M_X(t) = 2\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^t} - 1\right) = 2\left(\frac{e^t}{3 - e^t}\right). \tag{2.70}$$

Acontinuación se determinarán los momentos alrededor del origen μ'_1 y μ'_2. Para hallar el primer momento alrededor del origen se debe calcular la primera derivada de $M_X(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M_X(t) &= 2\left(\frac{e^t}{3 - e^t}\right), \\ &= 2\left(\frac{(3 - e^t)e^t - e^t(-e^t)}{(3 - e^t)^2}\right), \\ &= 2\left(\frac{3e^t - e^{2t} + e^{2t}}{(3 - e^t)^2}\right), \\ &= \frac{6e^t}{(3 - e^t)^2}, \end{aligned}$$

Al evaluar en $t = 0$ se obtiene,

$$\mu_1' = \frac{d}{dt}M_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{6e^t}{(3-e^t)^2}\bigg|_{t=0} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Para hallar el segundo momento alrededor del origen es necesario calcular la segunda derivada de $M_X(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}M_X(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right), \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{6e^t}{(3-e^t)^2}\right), \\
&= 6\left(\frac{(3-e^t)^2e^t - 2e^t(3-e^t)(-e^t)}{(3-e^t)^4}\right), \\
&= 6\left(\frac{(3-e^t)e^t + 2e^{2t}}{(3-e^t)^3}\right), \\
&= 6\left(\frac{3e^t - e^{2t} + 2e^{2t}}{(3-e^t)^3}\right), \\
&= 6\left(\frac{3e^t + e^{2t}}{(3-e^t)^3}\right).
\end{aligned}$$

Al evaluar en $t = 0$ se obtiene,

$$\mu_2' = \frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\bigg|_{t=0} = 6\,\frac{3e^t + e^{2t}}{(3-e^t)^3}\bigg|_{t=0} = \frac{24}{8} = 3.$$

Finalmente, la media y la varianza de X son, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu_1' = \frac{3}{2} \\
\sigma^2 &= \mu_2' - \mu^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

A continuación y para finalizar este capítulo, se presentan algunos resultados importantes relacionados con la función generadora de momentos, cuyas implicaciones serán de gran utilidad para el desarrollo de los capítulos 4 y 5.

Teorema 2.4.3 (Teorema de unicidad) *Si X y Y son variables aleatorias con funciones generadoras de momentos $M_X(t)$ y $M_Y(t)$, respectivamente, y si además, $M_X(t) = M_Y(t)$ para todos los valores de t, entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.*

La importancia de este teorema radica en que, si se conoce la función generadora de momentos, la distribución de probabilidad queda determinada de manera única. Es decir, la función generadora de momentos y la función de distribución de probabilidad (o de densidad) son características que definen de manera única a la variable aleatoria X.

Teorema 2.4.4 *Si X es una variable aleatoria con función generadora de momentos $M_X(t)$; si además, a es una constante, entonces*

$$\begin{array}{ll} a) & M_{X+a}(t) = e^{at}M_X(t), \\ b) & M_{aX}(t) = M_X(at). \end{array}$$

Demostración: A partir de la definición 2.4.3 se obtiene,

$$\begin{array}{llll} a) & M_{X+a} & = & E\left(e^{t(X+a)}\right), \\ & & = & e^{ta}E(e^{tX}) = e^{ta}M_X(t). \end{array}$$

$$b) \quad M_{aX} = E(e^{(ta)X}) = M_X(ta). \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

Distribuciones de probabilidad para variables aleatorias discretas y continuas

En este capítulo se estudian las distribuciones de probabilidad, tanto discretas como continuas, que se presentan con mayor frecuencia en el estudio de fenómenos aleatorios. El conocimiento de sus propiedades será de gran utilidad práctica para modelar una amplia gama de fenómenos aleatorios. Para el cálculo de las probabilidades se usarán las tablas estadísticas de las distribuciones, que se incluyen en el apéndice E.

3.1. Distribuciones de probabilidad para variables aleatorias discretas

Definición 3.1.1 (Ensayos de Bernoulli) *Si un experimento aleatorio puede repetirse cuantas veces se necesite y en cada repetición, o ensayo simple, es posible seleccionar un evento particular, el cual se busca analizar; cada vez que el evento seleccionado ocurre, se dice que se obtuvo un éxito. Por otro lado, si dicho evento no ocurre, se dice que se obtuvo fracaso. Si la probabilidad de éxito se mantiene constante de un ensayo a otro y cada repetición es indepentiente de las anteriores, entonces cada ensayo o prueba simple se conoce como prueba o ensayo de Bernoulli.*

Ejemplo 3.1.1 *Considérese el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda equilibrada dos veces. Si se define el evento C como obtener cara, entonces en cada uno de los dos ensayos la probabilidad de este evento* *es 1/2, además, cada ensayo es independiente. De acuerdo con la definición 3.1.1, cada repetición es un ensayo de Bernoulli.*

Ejemplo 3.1.2 *Supóngase que se tiene una urna con 5 bolas negras y 7 bolas blancas. Si se extraen aleatoriamente de la urna tres bolas, una tras otra con reemplazo, y se define el evento N como extraer una bola negra, entonces en cada extracción la probabilidad de extraer una bola negra es 5/12, además, cada extracción es independiente de las anteriores, por lo tanto, cada extracción es un ensayo de Bernoulli*[1].

3.1.1. Distribución geométrica

Definición 3.1.2 *Considérese un experimento aleatorio que consiste en ensayos de Bernoulli y sea A el evento que se requiere estudiar y p la probabilidad de ocurrencia de A en cada ensayo simple. Si X es la variable aleatoria que determina el número del ensayo en el cual ocurre el primer éxito; es decir, la primera ocurrencia del evento A, entonces se dice que X es una variable aleatoria con distribución geométrica. En general, si X es una variable aleatoria con distribución geométrica, entonces su función de probabilidad está determinada por,*

$$f(x) = P(X = x) = q^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.1}$$

donde $q = 1 - p$ es la probalidad de fracaso; es decir, que el evento A no ocurra.

Es conveniente representar a la función anterior como $g(x; p)$,

$$g(x; p) = q^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.2}$$

donde g hace referencia a la distribución geométrica. Los argumentos de g son: x, los valores en el recorrido de la variable aleatoria X y p, el parámetro más importante de esta distribución. Nótese que la variable x se separa del parámetro p por un punto y coma, mientras que cuando la función tenga más de un parámetro, éstos se separarán entre sí por medio de una coma simple.

Ejemplo 3.1.3 *Supóngase que se lanzan un par de dados equilibrados repetidamente. Si se define el evento A como obtener un total de 7, y si X se define como la variable aleatoria que determina el número del ensayo en el cual*

[1]Nótese que si las extracciones se realizan sin reemplazo, las extracciones ya no son independientes y la probabilidad tampoco permanece constante.

ocurre el primer éxito, entonces X es una variable aleatoria con distribución geométrica. El recorrido de la variable aleatoria X consta los valores 1, 2, 3, ... Si se requiere hallar la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor particular 3; es decir, se busca calcular la probabilidad de que el primer éxito (se obtenga un total de 7 por primera vez) ocurra en el tercer lanzamiento, entonces en los dos lanzamientos anteriores debieron obtenerse fracasos, de manera que,

$$f(3) = P(X = 3) = qqp = q^2p = (5/6)^2(1/6),$$

donde $p = 1/6$ y $q = 5/6$ son las probabilidades del éxito y del fracaso, respectivamente.

La función generadora de momentos

Una vez que se conoce la función de probabilidad se calcula la función geradora de momentos y con ésta, la media y la varianza.

De acuerdo con la definición 2.4.3,

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}), \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} g(x; p), \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} (1-p)^{x-1} p, \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} (1-p)^x, \\
&= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^x, \\
&= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (qe^t)^x, \\
&= \frac{p}{q} \left(\sum_{x=0}^{\infty} (qe^t)^x - 1 \right).
\end{aligned}$$

En la última ecuación se ha sumado y restado la unidad, de manera que la suma se lleve a cabo desde $x = 0$. Esto permite identificar la suma considerada con la serie geomética, la cual converge si $|r| = |qe^t| < 1$. Lo anterior permite obtener,

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-qe^t}-1\right),\\
&= \frac{pe^t}{1-qe^t}, \quad 0<t<\ln(1/q).
\end{aligned}
$$

La media y la varianza

Para hallar la media y la varianza se deben determinar primeros momentos alrededor del origen.

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= \left(\frac{d}{dt}(M_X(t))\right)\bigg|_{t=0},\\
&= \left(\frac{d}{dt}\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\bigg|_{t=0},\\
&= \frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\bigg|_{t=0},\\
&= \frac{p}{(1-q)^2},\\
&= \frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}.
\end{aligned}
$$

De manera análoga,

$$
\begin{aligned}
\mu_2' &= \left(\frac{d^2}{dt^2}(M_X(t))\right)\bigg|_{t=0},\\
&= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(M_X(t))\right)\right)\bigg|_{t=0},\\
&= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\right)\right)\bigg|_{t=0},\\
&= \left(\frac{pe^t+pqe^{2t}}{(1-qe^t)^3}\right)\bigg|_{t=0},\\
&= \frac{p+pq}{(1-q)^3}=\frac{p+pq}{p^3},\\
&= \frac{1+q}{p^2}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, la media es

$$
\mu=\mu_1'=\frac{1}{p} \tag{3.3}
$$

y la varianza

$$\begin{aligned} var(X) &= \mu_2' - \mu^2, \\ &= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2}, \\ &= \frac{q}{p^2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.1.4 *Tres jóvenes juegan un disparejo. El juego consiste en que cada uno de ellos lanza una moneda no sesgada. Ganará el juego quien obtenga un resultado diferente al de los otros 2. Si los tres obtienen el mismo resultado las monedas se lanzan nuevamente. El afortunado ganador será quien invite los cafés. Determine la probabilidad de que se requieran a lo más 4 lanzamientos.*

Solución: El espacio muestral que corresponde al lanzamiento de 3 monedas tiene ocho puntos muestrales, todos con la misma probabilidad. El fracaso en este experimento consistirá en obtener 3 caras o tres cruces, mientras que el éxito se obtiene con cualquier otro resultado. La probabilidad de fracaso en un lanzamiento de las 3 monedas es $1/4$, mientras que la probabilidad de éxito es $3/4$. Ahora defínase la variable aleatoria X como aquella que cuenta el número de lanzamientos necesarios hasta que se obtiene el primer éxito. Esta variable aleatoria tiene una distribución geomética con parámetro $p = 3/4$. Se busca hallar $P(X \leq 4)$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= \sum_{x=1}^{4} g(x; 3/4), \\ &= \sum_{x=1}^{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} \left(\frac{3}{4}\right), \\ &= \frac{255}{256} = 0.9961. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.5 *Se lanzan un par de dados repetidamente.*

a) ¿Cuál es la probilidad de obtener un 7 por primera vez en el cuarto lanzamiento?

b) ¿Cuál es el número mínimo de lanzamientos para que la probabilidad sea mayor a 0.90?

Solución: Defínase la variable aleatoria X como aquella que cuenta el número del lanzamiento de los dos dados en el cual se obtiene el primer 7. Entonces X es una variable aleatoria con distribución geométrica. En este caso, la probabilidad de éxito es 1/6, mientras que la probabilidad de fracaso es 5/6.

a) Se requiere determinar la probabilidad de que $X = 4$; de manera que,

$$\begin{aligned}
P(X = 4) &= g(4; 1/6), \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right), \\
&= \frac{125}{1296} = 0.0965.
\end{aligned}$$

b) En este caso se quiere determinar el valor de n tal que $P(X \leq n) > 0.90$.
Se despeja n.

$$\begin{aligned}
P(X \leq n) &= \sum_{x=1}^{n} g(x; p), \\
&= \sum_{x=1}^{n} pq^{x-1}, \\
&= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{n} q^x, \\
&= \frac{p}{q} \left(\sum_{x=o}^{n} q^x - 1 \right), \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

La suma anterior se deja como ejercicio al lector.

$$S_n = \sum_{x=0}^{n} q^x = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad (3.6)$$

Sustituyendo la ecuación 3.6 en la 3.5 se obtiene,

$$\begin{aligned}
P(X \leq n) &= \frac{p}{q} \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 1 \right), \\
&= 1 - q^n,
\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
1 - q^n &> 0.90, \\
1 - 0.90 &> q^n, \\
q^n &< 0.10,
\end{aligned}$$

Considerando que el logaritmo es una función creciente y que $0 < q < 1$, se obtiene,

$$n > \frac{\ln 0.10}{\ln(\frac{5}{6})} = 12.63.$$

Por último, n debe ser un entero mayor que 12, en consecuencia, el menor entero es 13.

3.1.2. Distribución binomial

Definición 3.1.3 (Distribución Binomial) *Considérese un experimento que consiste en n ensayos de Bernoulli. Si X es la variable aleatoria que determina el número de éxitos en los n ensayos, entonces X es una variable aleatoria con distribución binomial. En general, si X es una variable aleatoria con distribución binomial, entonces su función de probabilidad está determinada por*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

donde n es el número de ensayos de Bernoulli.

Resulta conveniente representar a la función de probabilidad para una variable aleatoria X con distribución binomial como $b(x; n, p)$; es decir,

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Es claro que b hace referencia a la distribución binomial y, n y p son los parámetros representativos de dicha distribución.

Ejemplo 3.1.6 *Supóngase que se lanzan un par de dados equilibrados 5 veces, y defínase el evento éxito como obtener un total de 7. Si X es la variable aleatoria que determina el número de éxitos en los 5 lanzamientos, entonces X es una variable aleatoria con distribución binomial. El recorrido de la variable aleatoria X es $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si se requiere hallar la probabilidad de que X tome el valor particular 3; es decir, se requiere calcular la probabilidad de obtener 3 éxitos(3 veces un total de 7) en 5 lanzamiento, entonces*

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3},$$

donde $p = 1/6$ y $q = 5/6$ son las probabilidades de éxito y de fracaso, respectivamente.

La función de distribución (acumulada)

La función de distribución (acumulada) está definida por,

$$F(x;n,p) = \sum_{u\leq x} b(u;n,p) = \sum_{u\leq x} \binom{n}{u} p^u q^{n-u}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{3.8}$$

La tabla 1 del apéndice E contiene las funciones distribuciones acumuladas para diversos valores de los parámetros n y p.

La función generadora de momentos

A continuación se determinan la función generadora de momentos y con ésta, la media y la varianza.

De acuerdo con la definición 2.4.3,

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}),\\
&= \sum_{x=1}^{n} e^{tx} b(x;n,p),\\
&= \sum_{x=1}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x},\\
&= \sum_{x=1}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x},\\
&= (pe^t + q)^n.
\end{aligned}$$

La media y la varianza

A continuación se calculan los primeros momentos alrededor del origen.

$$\begin{aligned}
\mu_1' &= \left(\frac{d}{dt}(M_X(t))\right)\Bigg|_{t=0},\\
&= \left(\frac{d}{dt}(pe^t + q)^n\right)\Bigg|_{t=0},\\
&= \left(np(pe^t + q)^{n-1} e^t\right)\Big|_{t=0},\\
&= np(p+q)^{n-1},\\
&= np.
\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
\mu_2' &= \left.\left(\frac{d^2}{dt^2}(M_X(t))\right)\right|_{t=0}, \\
&= \left.\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(M_X(t))\right)\right)\right|_{t=0}, \\
&= np\left.\left(\frac{d}{dt}\left(e^t(pe^t+q)^{n-1}\right)\right)\right|_{t=0}, \\
&= np\left.\left[(e^t(pe^t+q)^{n-1}) + (n-1)p(pe^t+q)^{n-2}e^{2t}\right]\right|_{t=0}, \\
&= np(1+(n-1)p), \\
&= np + n(n-1)p^2, \\
&= np + n^2p^2 - np^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, la media es

$$\mu = \mu_1' = np. \tag{3.9}$$

y la varianza

$$\begin{aligned}
var(X) &= \mu_2' - \mu^2, \\
&= np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2, \\
&= np - np^2, \\
&= np(1-p), \\
&= npq. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.7 *De acuerdo con la oficina de emisión de licencias para conducir de la ciudad de Westlake, Ohio; el 10 % de los solicitantes no superan la prueba de manejo. Si 15 personas realizan el examen, ¿cuál es la probabilidad de que más de 3 de ellas no obtengan su licencia de conducir?*

Solución: Si la variable aleatoria X se define como aquella que determina el número de solicitantes que fallan en la prueba de manejo, entonces X es una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros $p = 0.10$, $n = 15$. Se requiere determinar $P(X > 3)$.

$$\begin{aligned}
P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3), \\
&= 1 - F(3),
\end{aligned}$$

De la tabla 1 del apéndice E se obtiene, $F(3) = 0.9444$; por lo tanto,

$$P(X > 3) = 1 - 0.9444 = 0.0556.$$

Ejemplo 3.1.8 *Cierto tipo de componente electrónico tiene una probabilidad p=0.20 de pasar con éxito una prueba de durabilidad. Si 20 componentes electrónicos seleccionados aleatoriamente son sometidos a la prueba,*

a) determine la probabilidad de que al menos la mitad supere la prueba

b) determine el número esperado y la varianza para el número de componentes electrónicos que superan la prueba.

Solución: La variable aleatoria X que cuenta el número de componentes que superan la prueba tiene una distribución binomial con parámetros p =0.20 y n =20.

a) Se requiere determinar $P(X \geq 10)$, de modo que

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10), \\ &= 1 - P(X \leq 9), \\ &= 1 - F(9). \end{aligned}$$

De la tabla 1 del apéndice E se obtiene, $F(9) = 0.9944$, de manera que,

$$P(X \geq 10) = 1 - 0.9994 = 0.0006.$$

b) La media y la varianza para una distribución binomial son:

$$\begin{aligned} \mu &= np = 20(0.20) = 4.0, \\ \sigma^2 &= npq = 20(0.20)(0.80) = 3.2. \end{aligned}$$

3.1.3. Distribuciones hipergeométricas y de Poisson

Definición 3.1.4 (Distribución Hipergeométrica) *Considérese que se tiene un lote con N artículos, los cuales pueden ser clasificados en dos grupos, de acuerdo con cierta propiedad (o carácteristica) definida, de tal manera que k de dichos artículos poseen la propiedad y $N - k$ no la poseen. Supóngase que se extraen de manera aleatoria y sin remplazo n artículos del lote. Si el artículo extraído del lote posee la propiedad definida, se dice que se obtuvo un éxito, en caso contrario se dice que se obtuvo fracaso. Si X es la variable aleatoria que determina el número de éxitos en las n extracciones, entonces X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica. En general, si X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, donde $n \leq k$, entonces su función de probabilidad está definida por,*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, \quad \textit{para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Los parámetros que aparecen en la distribución hipergeméotrica se conocen como:
N : *Tamaño de la población.*
k : *Número de éxitos en la población.*
n: *Tamaño de la muestra.*

Resulta conveniente representar a la función de probabilidad para una variable aleatoria X con distribución hipergeométrica como $h(x; N, n, k)$; es decir,

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{3.11}$$

La letra h hace referencia a la distribución hipergeométrica y, N, n y k son los parámetros representativos de la distribución.

La tabla 3 del apéndice E contiene las funciones distribución (acumuladas) para diversos valores de los parámetros.

Ejemplo 3.1.9 *Considérese que una urna contiene 10 bolas blancas y 15 bolas negras. Si se extraen de la urna una tras otra y sin reemplazo 3 bolas, y si X determina el número de bolas negras extraídas, entonces X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica. En este ejemplo, $N = 25$, $k = 10$ y $n = 3$. El recorrido de la variable aleatoria X es $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$. La función de probabilidad está determinada por,*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{15}{3-x}}{\binom{15}{3}}, \quad x = 0, 1, 2, 3. \tag{3.12}$$

Ejemplo 3.1.10 *Considérese un lote de 50 microcomputadoras de las cuales 10 son defectuosas. Supóngase que se extraen sin reemplazo 5 microcomputadoras. Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de microcomputadoras defectuosas en la muestra, entonces X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, cuya función de probabilidad está determinada por,*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{40}{5-x}}{\binom{50}{5}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \tag{3.13}$$

La media y la varianza

En este caso, la función de probabilidad no facilita el cálculo de la función generadora de momentos, de manera que, para esta distribución se procederá a determinar la media y la varianza de la variable aleatoria X mediante las definiciones básicas.

La media
De acuerdo con la definición 2.2.1

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{x} xf(x), \\
&= \sum_{x=0}^{n} xb(x; N, n, k), \\
&= \sum_{x=0}^{n} x\frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}},
\end{aligned}$$

dado que el primer término de la sumatoria es nulo,

$$\mu = \sum_{x=1}^{n} x\frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}. \tag{3.14}$$

Ahora considérese la siguiente propiedad de la combinatoria:

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{m}{n}\begin{pmatrix} m-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

La propiedad anterior permite establecer:

$$\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix} = \frac{k}{x}\begin{pmatrix} k-1 \\ x-1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

y

$$\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \frac{m}{n}\begin{pmatrix} N-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.16 y 3.17 en la ecuación 3.14 se obtiene,

$$
\begin{aligned}
\mu &= \sum_{x=1}^{n} x \left[\frac{\frac{k}{x}\binom{k-1}{x-1}\binom{N-k}{n-x}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} \right], \\
&= \frac{nk}{N} \sum_{x=1}^{n} \frac{\binom{k-1}{x-1}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}}. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Ahora cámbiese el índice de la suma x por $y = x - 1$. Con este cambio la ecuación 3.18 se transforma en,

$$
\mu = \frac{nk}{N} \sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{k-1}{y}\binom{(N-1)-(k-1)}{(n-1)-y}}{\binom{N-1}{n-1}}. \qquad (3.19)
$$

Los términos que aparecen en la sumatoria de la ecuación 3.19 corresponden a una distribución hipergeométrica con parámetros:
Tamaño de la población: $N' = N - 1$,
Tamaño de la muestra: $n' = n - 1$,
Número de éxitos en la población: $k' = k - 1$.
Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{nk}{N} \sum_{y=0}^{n-1} h(y; N-1, n-1, k-1), \\
&= \frac{nk}{N} \sum_{y=0}^{n'} h(y; N', n', k'), \\
&= \frac{nk}{N}. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

La varianza
Para calcular la varianza considérese la siguiente propiedad:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(X^2) - E^2(X), \\
&= E(X^2) - E^2(X) + E(X) - E(X), \\
&= E(X^2) - E(X) - E^2(X) + E(X), \\
&= E(X^2 - X) + E(X) - E^2(X), \\
&= E(X(X-1)) + \mu - \mu^2. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Puesto que ya se conoce la media de la variable aleatoria X, para obtener la varianza solo falta calcular el primer término en la ecuación 3.21.
De acuerdo con el teorema 2.2.1

$$\begin{aligned}E(X(X-1)) &= \sum_x x(x-1)f(x),\\ &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)b(x;N,n,k),\\ &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}},\end{aligned}$$

como los términos primero y segundo de la suma son nulos, entonces

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}. \tag{3.22}$$

Aplicando recursivamente la propiedad de la combinatoria expresada en la ecuación 3.15 se obtiene,

$$\binom{m}{n} = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m-1}{n-1}\right)\binom{m-2}{n-2} \tag{3.23}$$

De la propiedad anterior se sigue,

$$\binom{k}{x} = \left(\frac{k}{x}\right)\left(\frac{k-1}{x-1}\right)\binom{k-2}{x-2} \tag{3.24}$$

y

$$\binom{N}{n} = \left(\frac{N}{n}\right)\left(\frac{N-1}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2} \tag{3.25}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.24 y 3.25 en la ecuación 3.22 se obtiene,

$$\begin{aligned}E(X(X-1)) &= \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\left[\frac{\left(\frac{k}{x}\right)\left(\frac{k-1}{x-1}\right)\binom{k-2}{x-2}\binom{N-2}{k-2}}{\left(\frac{N}{n}\right)\left(\frac{N-1}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2}}\right],\\ &= \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)}\sum_{x=2}^{n}\frac{\binom{k-2}{x-2}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N-2}{n-2}} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Cambiando el índice x de la suma por $y = x - 2$, la ecuación 3.26 se transforma en,

$$E(X(X-1)) = \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)} \sum_{y=0}^{n-2} \frac{\binom{k-2}{y}\binom{(N-2)-(k-2)}{(n-2)-y}}{\binom{N-2}{n-2}}$$

Los términos que aparecen en la sumatoria de la ecuación anterior corresponden a una distribución hipergeométrica con parámetros:
Tamaño de la población: $N'' = N - 2$,
Tamaño de la muestra: $n'' = n - 2$,
Número de éxitos en la población: $k'' = k - 2$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)} \sum_{y=0}^{n-2} h(y; N-2, n-2, k-2), \\ &= \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)} \sum_{y=0}^{n''} h(y; N'', n'', k''), \\ &= \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.20 y 3.27 en la ecuación 3.21 se obtiene,

$$\sigma^2 = \frac{n(n-1)k(k-1)}{N(N-1)} + \frac{nk}{N} - \frac{n^2k^2}{N^2}.$$

Realizando el álgebra se obtiene,

$$\sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) n \left(\frac{k}{n}\right)\left(1 - \frac{k}{n}\right). \tag{3.28}$$

Ejemplo 3.1.11 *Una compañía utiliza un sistema de control para la aceptación de los artículos producidos antes de ser embarcados. Se preparan cajas de 15 artículos para embarques y se selecciona una muestra de 3 para verificar si tienen algún artículo defectuoso. Si se encuentra un artículo defectuoso, entonces la caja entera se regresa para verificarla al 100 %. Si no se encuentran artículos defectosos, entonces la caja se embarca. ¿Cuál es la probabilidad de que se embarque una caja que contiene 2 artículos defectuosos?*

Solución: Si la variable aleatoria X cuenta el número de artículos defectuosos en la muestra, entonces X tiene una distribución hipergeométrica con parámetros $N = 15$, $k = 2$, $n = 3$. Se requiere calcular $P(X = 0)$, ya que solo en el caso de no encontrar artículos defectuosos en la muestra, el embarque de la caja procedería. Por lo anterior,

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= h(0; 20, 3, 2), \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}}, \\ &= \frac{22}{35}, \\ &= 0.6286. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.12 *Un viajero ha colocado en cada uno de tres frascos idénticos 6 píldoras de narcóticos y 10 de vitaminas, las cuales son en apariencia idénticas. ¿Cuál es la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión ilegal de drogas si,*

a) el agente de aduanas revisa una muestra de 3 píldoras de un solo frasco?

b) el agente toma muestras de 3 píldoras en 2 de los tres frascos?

Solución:

a) La variable aleatoria X que cuenta el número de narcóticos en la muestra tiene una distribución hipergeométrica con parámetros $N = 16$, $n = 3$, $k = 6$. Se requiere la probabilidad de que al menos un narcótico aparezca en la muestra.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0), \\ &= 1 - h(0; 20, 3, 6), \\ &= 1 - \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}}, \\ &= 1 - \frac{3}{14}, \\ &= \frac{11}{14} = 0.7857. \end{aligned}$$

b) Para cada uno de los tres frascos la probabilidad de obtener al menos una píldora de narcótico en una muestra aleatoria de tamaño 3 es una constante. Si Y es la variable aleatoria que cuenta el número de éxitos (obtener al menos un narcótico en la muestra) en 2 ensayos, la variable aleatoria Y tiene distribución binomial con parámetros $n = 2$, p =0.7857. El viajero será arrestado si $Y \geq 1$; es decir, si se obtiene al menos un éxito en los 2 ensayos; por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0), \\ &= 1 - b(0; 2, 0.7857), \\ &= 1 - \binom{2}{0} p^0 q^2, \\ &= 1 - \left(\frac{3}{14}\right)^2, \\ &= \frac{187}{196} \\ &= 0.9541. \end{aligned}$$

Distribución de Poisson

La distribución de Poisson surge del proceso que lleva el mismo nombre y es de gran utilidad para modelar eventos que ocurren en un determinado intervalo de tiempo o en una región determinada. El parámetro más importante para una variable aleatoria con distribución de Poisson es la media, como se mostrará más adelante. A continuación se define el proceso de Poisson y en el apéndice B se muestra la deducción de la función de probabilidad.

Proceso de Poisson

Las tres propiedades que definen el proceso de Poisson y que se enuncian a continuación, están descritas en términos de un *tiempo específico*; sin embargo, en todas las propiedades es posible reemplazar tiempo específico por *espacio específico*(longitud, área, volumen) y los enunciados siguen siendo válidos.
Propiedades que definen el proceso de Poisson.

1. Los eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.

2. La probabilidad de que un evento sencillo ocurra en un intervalo de tiempo pequeño es proporcional a la longitud del intervalo.

3. La probabilidad de que más de un evento sencillo ocurra en un intervalo pequeño de tiempo es despreciable.

Definición 3.1.5 (Distribución de Poisson) *Una variable aleatoria X que surge del proceso de Poisson se conoce como variable aleatoria con distribución de Poisson y su función de probabilidad está definida por,*

$$p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.29}$$

La tabla 2 del apéndice E contiene las funciones de distribución para diversos valores de la media.

La función generadora de momentos

A continuación se calcula la función generadora de momentos y con ésta, la media y la varianza. De acuerdo con la definición 2.4.3,

$$\begin{aligned}
M_X(u) &= E(e^{uX}), \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{ux} p(x; \lambda t), \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{ux} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{ux}(\lambda t)^x}{x!}, \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{[\lambda t e^u]^x}{x!}, \\
&= e^{-\lambda t} e^{[\lambda t e^u]}, \\
&= e^{\lambda t(e^u - 1)}, \\
&= exp[\lambda t(e^u - 1)].
\end{aligned}$$

La media y la varianza

A continuación se determinan los primeros momentos alrededor del origen.

$$\begin{aligned}
\mu_1' &= \left(\frac{d}{du}(M_X(u))\right)\bigg|_{u=0}, \\
&= \left(\frac{d}{du}e^{\lambda t(e^u-1)}\right)\bigg|_{u=0}, \\
&= e^{\lambda t(e^u-1)}[\lambda t e^u]\big|_{u=0}, \\
&= \lambda t.
\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
\mu_2' &= \left(\frac{d^2}{du^2}(M_X(u))\right)\bigg|_{u=0}, \\
&= \left(\frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}(M_X(t))\right)\right)\bigg|_{u=0}, \\
&= \left(\frac{d}{du}\left(e^{\lambda t(e^u-1)}(\lambda t e^u)\right)\right)\bigg|_{u=0}, \\
&= \lambda t\frac{d}{du}e^{[\lambda t(e^u-1)+u]}\bigg|_{u=0}, \\
&= \lambda t e^{[\lambda t(e^u-1)+u]}[\lambda t(e^u)+1]\big|_{u=0}, \\
&= \lambda t(\lambda t+1).
\end{aligned}$$

Finalmente, la media es

$$\mu = \mu_1' = \lambda t. \tag{3.30}$$

y la varianza

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mu_2' - \mu^2, \\
&= \lambda t(\lambda t+1) - (\lambda t)^2, \\
&= \lambda t. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

La media es el parámetro más importante en una distribución de Poisson. Es conveniente reescribir la función de probabilidad para una distribución de Poisson en términos de la media.

$$p(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.32}$$

Ejemplo 3.1.13 *Las llamadas telefónicas que entran a un centro de atención a clientes tiene una distribución de Poisson con una media de 3 llamadas por minuto. Determine la probabilidad de que en un minuto cualquiera,* *a) No se reciba llamada alguna.*

b) Se reciba al menos una llamada.

b) Se reciban más de tres llamadas.

Solución: Los datos necesarios para resolver este problema pueden consultarse en la tabla 2.

a) Se debe calcular $P(X = 0)$, para una distribución de Poisson con parámetro $\mu = 3$ llamadas por minuto.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= p(0; 3), \\ &= F(0), \\ &= 0.0498. \end{aligned}$$

b) Se requiere determinar $P(X \geq 1)$. Este evento es el complemento del evento determinado en el inciso a), así que

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0), \\ &= 1 - 0.0498, \\ &= 0.9502. \end{aligned}$$

c) Por último, se necesita calcular $P(X > 3)$.

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3), \\ &= 1 - F(3), \\ &= 1 - 0.6472, \\ &= 0.3528. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.14 *Un pequeño productor de alimentos produce 15 unidades de un jamón especial cada mes. Si el producto no se vende dentro de un mes, debe descartarse. Supóngase que la demanda (pequeña) X del producto, es una variable aleatoria distribuida de Poisson con parámetro 9. Si se obtiene una utilidad de 1000 pesos en cada unidad vendida, mientras que ocurre una pérdida de 300 pesos en cada unidad que debe ser descartada. Calcúlese la utilidad esperada que el productor puede obtener en un mes con 15 unidades producidas.*

Solución: La utilidad es una función de la variable aleatoria X cuya distribución es de Poisson. La utilidad se define como:

$$U(X) = \begin{cases} 1000X - 300(15 - X), & x = 0, 1, 2 \ldots, 15. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El valor esperado de la variable aleatoria U es,

$$
\begin{aligned}
E(U) &= \sum_{x=0}^{\infty} u(x)f(x), \\
&= \sum_{x=0}^{15} u(x)f(x), \\
&= \sum_{x=0}^{15}(1300x - 4500)p(x;9), \\
&= 6,814.00 \text{ pesos.}
\end{aligned}
$$

3.1.4. Aproximación entre las distribuciones binomial y de Poisson

La forma de la función de probabilidad para una distribución binomial resulta difícil de evaluar cuando n, el número de ensayos, es muy grande; sin embargo, cuando n es muy grande y p es pequeña, de manera que la media np permanece constante, es posible evaluar una distribución binomial mediante una distribución de Poisson. A continuación se demuestra por qué es posible hacer esta aproximación.

Para comenzar considérese una variable aleatoria X con distribución binomial; es decir, su función de probabilidad está dada por,

$$b(x;n,p) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) p^x q^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Desarrollando la combinatoria y sustituyendo el parámetro $p = \frac{\mu}{n}$ se obtiene,

$$
\begin{aligned}
b(x;n,p) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}, \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x}, \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!} \frac{\mu^x}{n^x} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x}, \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-(x+1))(n-x)!}{x!(n-x)!} \frac{\mu^x}{n^x} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x}, \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-(x+1))}{x!} \frac{\mu^x}{n^x} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x}, \\
&= \frac{\mu^x}{x!}(1 - \frac{1}{n})\ldots(1 - \frac{x+1}{n}) \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-x},
\end{aligned}
$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, p tiende a cero, y x y μ permanecen constantes se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} b(x;n,p) = \frac{\mu^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{x+1}{n})\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}\right]. \tag{3.33}$$

Considerando el límite del producto por separado,

$$\lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{x+1}{n})\right] = 1 \tag{3.34}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)\right]^{-x} = 1. \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-\frac{n}{\mu}}\right]^{-\mu},\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{\mu}}\right)^{-\frac{n}{\mu}}\right]^{-\mu},\\ &= e^{-\mu}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.34, 3.35 y 3.36 en la ecuación 3.33 se concluye,

$$\lim_{n\to\infty} b(x;n,p) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = p(x;\mu), \quad x = 0,1,2\ldots n. \tag{3.37}$$

Ejemplo 3.1.15 *Considérese que se lanzan un par de dados 200 veces. Defínase como éxito al evento que ocurre cuando se obtiene un total de 7. Determine la probabilidad de obtener 40 sietes, usando la distribución binomial y mediante la aproximación de Poisson a la binomial.*

Solución: Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de 7 en los 200 lanzamientos, entonces X es una variable aleatoria con distribución binomial, cuyos parámetros son: $n = 200$ y $p = \frac{1}{6}$ =0.17. Su función de probabilidad es

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 1,2,3,\ldots,100.$$

La probabilidad de obtener 40 sietes en los 200 lanzamientos se expresa mediante,

$$\begin{aligned}P(x=40) &= b(40;200,0.17),\\ &= \binom{200}{40}(0.17)^{40}(0.83)^{160},\\ &= 0.0382\end{aligned}$$

De acuerdo con la aproximación de Poisson a la binomial,

$$\begin{aligned} b(40; 200, 0.17) &\approx p(40; 34), \\ &\approx \frac{e^{-34}(34)^{40}}{40!}, \\ &\approx 0.0381. \end{aligned}$$

Aunque los programas de cómputo actuales permiten calcular los dos valores, es claro que el segundo proceso requiere de mucho menos recursos, y en esto radica la importancia de la aproximación de la binomial mediante una distribución de Poisson.

3.2. Distribuciones de probabilidad para variables aleatorias continuas

En esta sección se presentarán las distribuciones continuas, sus propiedades y sus aplicaciones, mismas que serán relevantes para el desarrollo del capítulo 5 de este curso.

3.2.1. Distribución exponencial y gama

Distribución Exponencial

Definición 3.2.1 (Distribución exponencial) *Una variable aleatoria continua X tiene distribución exponencial si para algún $\alpha > 0$, su función de densidad está definida por,*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & si\ x > 0, \\ 0, & si\ x \leq 0. \end{cases} \tag{3.38}$$

La función de distribución acumulada

La función de distribución acumulada para la distribución exponencial se determina a continuación.
De acuerdo con la definición 2.1.7,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

a) Si $x \leq 0$, entonces F(u)=0.
b) Si $x > 0$, entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \alpha e^{-\alpha u} du, \\ &= \alpha \int_0^x e^{-\alpha u} du, \\ &= -e^{-\alpha u}\Big|_0^x, \\ F(x) &= 1 - e^{-\alpha x}. \end{aligned}$$

Por lo anterior,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

A continuación se calcularán la media y la varianza mediante la función generadora de momentos.

La función generadora de momentos

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x) dx, \\ &= \int_0^{\infty} e^{tX} \alpha e^{-\alpha x} dx, \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-(\alpha - t)x} dx, \ \text{[la integral converge si } \alpha - t > 0], \\ &= -\frac{\alpha}{\alpha - t} e^{-(\alpha - t)x}\Big|_0^{\infty}, \\ M_X(t) &= \frac{\alpha}{\alpha - t}, \quad t < \alpha. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Primer momento alrededor del origen

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)\right)\Big|_{t=0}, \\ &= \frac{\alpha}{(\alpha - t)^2}\Big|_{t=0}, \\ \mu_1' &= \frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Segundo momento alrededor del origen

$$
\begin{aligned}
\mu_2' &= \left.\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)\right)\right|_{t=0}, \\
&= \left.\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha}{(\alpha - t)^2}\right)\right)\right|_{t=0}, \\
&= \left.\frac{2\alpha}{(\alpha - t)^3}\right|_{t=0}, \\
\mu_2' &= \frac{2}{\alpha^2}.
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

La media

La media corresponde al primer momento alrededor del origen,

$$\mu = \frac{1}{\alpha}. \tag{3.43}$$

La varianza

Como se demostró en el capítulo 1, la varianza es

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mu_2' - \mu^2, \\
&= \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}, \\
\sigma^2 &= \frac{1}{\alpha^2}.
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

Ejemplo 3.2.1 *Un tipo de fusible tiene una duración T distribuida exponencialmente, con media igual a 700 días. Determine la probabilidad de que un determinado fusible tenga una duración mayor a su media.*

Solución: La variable aleatoria continua T tiene una distribución exponencial, de manera que su función de distribución acumulada es,

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{700}t}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Se quiere determinar $P(T > 700)$; de modo que,

$$
\begin{aligned}
P(T > 700) &= 1 - P(T \leq 700), \\
&= 1 - F(700), \\
&= 1 - (1 - e^{-1}), \\
&= e^{-1}, \\
&= 0.3678.
\end{aligned}
$$

Nótese que este resultado es de un carácter mucho más general; es decir, el resultado no depende de la media particular.

Ejemplo 3.2.2 *Supóngase que la duración de un componente electrónico es una variable aleatoria continua T con una distribución exponencial. El proceso de fabricación garantiza una duración esperada de 100 horas (esto es, el parámetro $\alpha = 100^{-1}$). Suponiendo que el proceso de producción tiene un costo de 1000 pesos si el dispositivo dura más de 150 horas, mientras que si el dispositivo dura menos de 150 horas, se agrega una pérdida de 500 pesos en contra del fabricante. ¿Cuál es el costo esperado de producción por cada componente electrónico?*

Solución: Sea C la variable aleatoria que determina el costo por fusible, entonces:

$$C(T) = \begin{cases} 1000, & \text{si } T > 150, \\ 1500, & \text{si } T \leq 150. \end{cases}$$

Además, la función de distribución acumulada es

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{100}}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Ahora se requiere calcular el valor esperado del costo por unidad producida.

$$\begin{aligned} E(C) &= \int_{-\infty}^{\infty} c(t)f(t)dt, \\ &= 1500\int_{0}^{150} f(t)dt + 1000\int_{150}^{\infty} f(t)dt, \\ &= 1000P(T > 150) + 1500P(T \leq 150), \\ &= 1000(1 - P(T \leq 150)) + 1500(P(T \leq 150)), \\ &= 1000(1 - F(150)) + 1500F(150), \\ &= 1000 + 500F(150), \\ &= 1000 + 500(1 - e^{-\frac{150}{100}}), \\ &= 1000 + 500(1 - e^{-\frac{3}{2}}), \\ &= 1388.43 \text{ pesos}. \end{aligned}$$

La distribución Gama

Antes de comenzar con un desarrollo de la distribución gama, será necesario hacer una discusión breve de la función gama, la cual tiene diversas aplicaciones en muchas ramas de las matemáticas.

Definición 3.2.2 (La función Gama) *Si p es un número real positivo, la función gama, denotada por Γ, se define mediante la integral impropia*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx. \tag{3.45}$$

Puede demostrarse que la integral converge para todo $p > 0$.

Mediante el método de integración por partes se obtiene la siguiente propiedad, conocida como **fórmula recursiva**

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1). \tag{3.46}$$

Para un entero n, la aplicación sucesiva de la fórmula recursiva permite establecer

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots\Gamma(1), \tag{3.47}$$

además,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1. \tag{3.48}$$

Sustituyendo la ecuación 3.48 en la 3.47 se obtiene

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{3.49}$$

A continuación se prueba la siguiente propiedad,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \tag{3.50}$$

De acuerdo con la definición de la función gama (definición 3.2.2),

$$\Gamma(1/2) \;=\; \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$$

Mediante el cambio de variable, $x = \frac{u^2}{2}$, $dx = udu$, de manera que

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx, \\ &= \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \sqrt{2} I, \end{aligned}$$

donde

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

La integral anterior se desarrolla en el apéndice C.1.
Finalmente,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Definición 3.2.3 (La distribución gama) *Una variable aleatoria continua X tiene distribución gama si para $r > 0$ y $\alpha > 0$, su función de densidad de probabilidad puede expresarse como,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \tag{3.51}$$

En la figura 3.1 se muestran las gráficas que corresponden a la distribución gama para $\alpha = 1/2$ y valores de $r = 1, 2, 3, 4$. Se observa que para $r = 1$ la distribución gama se reduce a una distribución exponencial; en otras palabras, la distribución exponencial corresponde a una distribución gama con parámetro $r = 1$. En la siguiente sección se discute el significado de este parámetro.

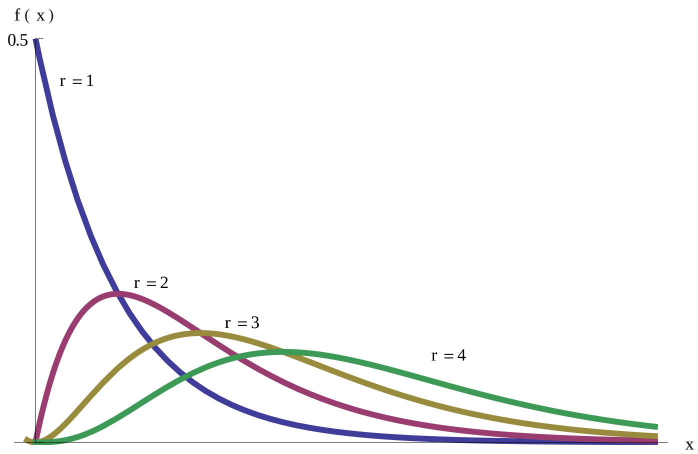


Figura 3.1: Distribución Gama

Función generadora de momentos para una variable aleatoria con distribución Gama

A continuación se determina la función generadora de momentos para una variable aleatoria X con distribución gama.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}), \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(r)} \int_0^\infty (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x} e^{tx} dx, \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(r)} \int_0^\infty (\alpha x)^{r-1} e^{-(\alpha - t)x} dx. \end{aligned}$$

Haciendo $\beta = \alpha - t$ se obtiene,

$$M_X(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} \int_0^\infty (\alpha x)^{r-1} e^{-\beta x} dx.$$

La integral converge si $\beta = \alpha - t > 0$; es decir, si $t < \alpha$. Mediante el cambio de variables $y = \beta x$ se obtiene,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{\alpha^r}{\beta^r \Gamma(r)} \int_0^\infty y^{r-1} e^{-y} dx, \\ &= \frac{\alpha^r}{\beta^r}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$M_X(t) = \frac{\alpha^r}{(\alpha - t)^r}, \quad t < \alpha. \tag{3.52}$$

Primer momento alrededor del origen

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\alpha^r}{(\alpha - t)^r} \right) \Bigg|_{t=0}, \\ &= \frac{r\alpha^r}{(\alpha - t)^{r+1}} \Bigg|_{t=0}, \\ \mu_1' &= \frac{r}{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Segundo momento alrededor del origen

$$\begin{aligned} \mu_2' &= \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\alpha^r}{(\alpha - t)^r} \right) \right) \Bigg|_{t=0}, \\ &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{r\alpha^r}{(\alpha - t)^{r+1}} \right) \right) \Bigg|_{t=0}, \\ &= \frac{r(r+1)\alpha^r}{(\alpha - t)^{r+2}} \Bigg|_{t=0}, \\ \mu_2' &= \frac{r(r+1)}{\alpha^2}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

La media

La media corresponde al primer momento alrededor del origen.

$$\mu = \frac{r}{\alpha}. \tag{3.55}$$

La varianza

Como se demostró en el capítulo 1, la varianza está dada por,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mu_2' - \mu^2, \\
&= \frac{r(r+1)}{\alpha^2} - \frac{r^2}{\alpha^2}, \\
\sigma^2 &= \frac{r}{\alpha^2}. \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

La distribución acumulada de una variable aleatoria con distribución Gama y su relación con la distribución de Poisson

A continuación se determina la función de distribución acumulada para una variable aleatoria X con distribución Γ.
Si $x \leq 0$, $F(x) = 0$; por otro lado, para $x > 0$,

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X \leq x), \\
&= 1 - P(X > x), \\
&= 1 - \int_x^\infty \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha y)^{r-1} e^{-\alpha y} dy, \\
&= 1 - I,
\end{aligned}$$

donde

$$I = \int_x^\infty \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha y)^{r-1} e^{-\alpha y} dy.$$

Mediante el cambio de variable $u = \alpha y$, se obtiene $du = \alpha dy$, luego la integral se transforma en,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\alpha x}^\infty \frac{1}{\Gamma(r)} u^{r-1} e^{-u} du, \\
&= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{\alpha x}^\infty u^{r-1} e^{-u} du, \\
&= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{\mu}^\infty u^{r-1} e^{-u} du.
\end{aligned}$$

Si se hace $\mu = \alpha x$ y se considera que r es un entero, entonces

$$I = \frac{1}{(r-1)!}\int_{\mu}^{\infty} u^{r-1}e^{-u}du.$$

Esta integral se desarrolla en el apéndice C.2, el resultado es

$$I = \frac{1}{(r-1)!}\int_{\mu}^{\infty} u^{r-1}e^{-u}du = \sum_{k=0}^{r-1}\frac{e^{-\mu}(\mu)^k}{k!}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \sum_{k=0}^{r-1}\frac{e^{-\mu}(\mu)^k}{k!}, \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} P(Y=k), \end{aligned} \tag{3.57}$$

donde Y es una variable aleatoria de Poisson con media $\mu = \alpha x$.
El hecho de que la función de distribución acumulada de una variable aleatoria con distribución gama, pueda calcularse mediante la distribución acumulada de una variable aleatoria con distribución de Poisson no es una casualidad, como se demostrará a continuación.
Sea X una variable aleatoria que surge del proceso de Poisson; es decir, X mide el número de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo fijo $(0,t)$ y satisface todas las hipótesis que el proceso de Poisson requiere. La función de probabilidad está determinada por $p(x;\alpha t)$, donde α es el valor esperado de eventos que ocurren en el intervalo fijo de tiempo t. Si se fija el número de los eventos que ocurren, por decir k, y se define la variable aleatoria T como el tiempo necesario para que k eventos ocurran, entonces la función de distribución acumulada de la variable aleatoria T está definida por,

$$H(t) = P(T \le t) = 1 - P(T > t),$$

Si k eventos ocurren en el tiempo $T \le t$, entonces en $T > t$ ocurren menos de k eventos. Esta probabilidad se calcula mediante la distribución de Poisson como se muestra en seguida.

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 - P(T > t), \\ &= 1 - P(X < k), \\ &= 1 - P(X \le k-1), \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{k-1} p(x;\alpha t), \end{aligned}$$

El caso más sencillo se observa cuando $k = 0$. En este supuesto, la probabilidad de que ningún evento ocurra en $(0, t)$ está determinada por;

$$p(0; \alpha t) = e^{-\alpha t}.$$

Si se define la variable aleatoria T como aquella que mide el tiempo necesario para que un evento ocurra, entonces su función de distribución acumulada está determinada por,

$$\begin{aligned} G(t) &= P(T \leq t) \\ &= 1 - P(T > t), \\ &= 1 - P(X \leq 0), \\ &= 1 - e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Derivando $G(t)$ se obtiene,

$$\begin{aligned} g(t) &= G'(t), \\ &= \alpha e^{-\alpha t} \quad x > 0. \end{aligned}$$

Por lo que T es una variable distribuida exponencialmente.

Ejemplo 3.2.3 *Supóngase que las llamadas telefónicas que entran a un conmutador en particular, siguen el proceso de Poisson con un promedio de 6 llamadas por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que pase hasta un minuto antes de que entren 4 llamadas?*

Solución: Se define la variable aleatoria T como el tiempo necesario para que ocurran 4 eventos. T tiene una distribución gama con parámetros $r = 4$ y $\alpha = 6$ y se requiere calcular $F(1) = P(T \leq 1)$. De acuerdo con la ecuación 3.57,

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-6}(6)^k}{k!}, \\ &= 1 - \frac{118}{3e^5}, \\ &= 0.7349. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.4 (La distribución χ^2) *Una distribución de gran interés en la estadística se obtiene al sustituir los parámetros $\alpha = 1/2$ y $r = n/2$ (donde n es un entero positivo), en la distribución gama descrita por la ecuación 3.51. La familia de funciones que se obtienen corresponden a variables aleatorias cuya distribución se conoce como chi-cuadrado (χ^2).*

a) Determine la función de densidad para una variable Z con distribución χ^2

b) Determine la media, la varianza y la función generadora de momentos de la variable aleatoria Z.

Solución:

a) Considérese la ecuación 3.51

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Sustituyendo $\alpha = 1/2$, $r = n/2$ y $x = z$ en la ecuación anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\Gamma(n/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n/2-1} e^{-\frac{z}{2}}, \quad z > 0 \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1}e^{-\frac{z}{2}}, \quad z > 0. \end{aligned}$$

De manera más precisa, se dice que una variable aleatoria Z tiene distribución χ^2 con n grados de libertad si su función de densidad de probabilidad está definida por,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1}e^{-\frac{z}{2}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0. \end{cases} \tag{3.58}$$

En la figura 3.2 se muestran las gráficas de $f(z)$ para $n = 1, 2, 3$, y en la tabla 5 del apéndice E se determinan las funciones de distribución acumuladas para diversos valores de n.

b) Dado que la distribución chi-cuadrado es un caso particular de la distribución gama, cuya media y varianza están definidas por las ecuaciones 3.55 y 3.56, entonces

$$\mu = n, \tag{3.59}$$

$$\sigma^2 = 2n, \tag{3.60}$$

$$M_Z(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}. \tag{3.61}$$

En la tabla 5 del apéndice E se muestran los valores cuantiles χ_p^2, (para diferentes valores del parámetro n) los cuales deben interpretarse como:

$$p = \int_0^{\chi_p^2} f(z)dz. \tag{3.62}$$

Como se muestra en la figura 3.3.

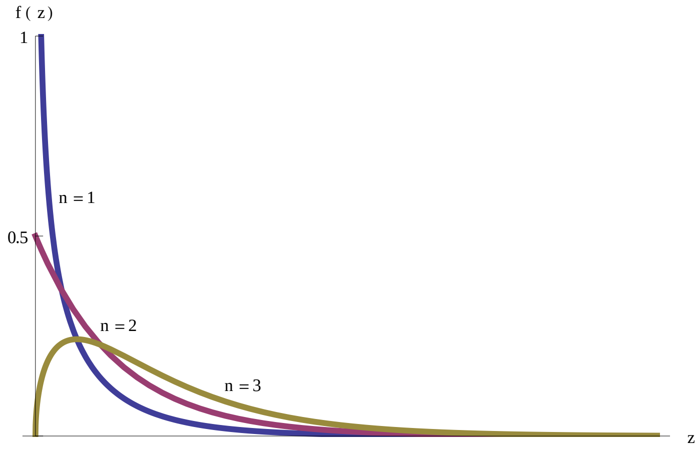


Figura 3.2: Distribución χ^2

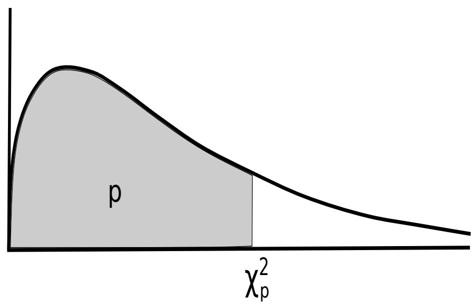


Figura 3.3: Valores cuantiles de χ^2

3.2.2. La distribución normal

Definición 3.2.4 (La distribución normal) *Una variable aleatoria continua X tiene distribución normal si para dos números reales μ y σ, con $\sigma > 0$, su función de densidad puede expresarse como*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{3.63}$$

A continuación se verificará que la integral de $f(x)$ sobre todo el dominio es igual a la unidad.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx, \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, se obtiene, $dx = \sigma dz$, manera que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}I = 1. \end{aligned}$$

La integral denotada como I se desarrolla en el apéndice C.1.
Ahora será necesario hacer un análisis de las propiedades de la función de densidad para tener un conocimiento general de su comportamiento.

Máximos y mínimos

Derivando $f(x)$ e igualando a cero se obtiene,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)f(x) = 0.$$

De la ecuación anterior se concluye que $f(x)$ tiene un punto crítico en $x = \mu$. Calculando la segunda derivada y evaluando en este punto se comprueba que se trata de un máximo (ya que la concavidad es negativa). En efecto, la segunda derivada puede expresarse de manera conveniente como,

$$f''(x) = -\frac{f(x)}{\sigma^2}\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + 1\right).$$

Puntos de inflexión

Igualando a cero la ecuación anterior se encuentra que la gráfica tiene sus puntos de inflexión en $x = \mu + \sigma$ y $x = \mu - \sigma$.

Simetría

Otra característica de $f(x)$ es la simetría respecto a la recta $x = \mu$; es decir, para todo $\epsilon > 0$, $f(x+\epsilon) = f(x-\epsilon)$.

Asíntota

Por último,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

de manera que la recta $y = 0$ constituye una asíntota.
En la figura 3.4 se muestra la gráfica de $f(x)$ para los valores de $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. La distribución se conoce como distribución normal estándar y se denota por $N(0, 1)$.

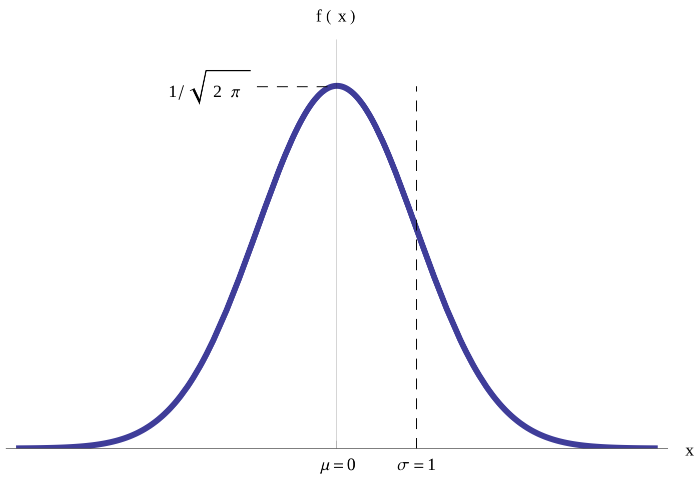


Figura 3.4: Distribución normal estándar

Función generadora de momentos

De acuerdo con la definición 2.4.3,

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tx}), \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{tx} dx, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.
\end{aligned}
$$

De aquí en adelante el procedimiento consistirá en extraer de la integral los términos que no dependen de la variable x. En el proceso se requerirá de completar un trinomio cuadrado perfecto, como se muestra a continuación.

$$
\begin{aligned}
exp\left[tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] &= exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-\mu)^2 - 2\sigma^2 tx\right)\right], \\
&= exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 tx\right)\right], \\
&= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x\right]\right],
\end{aligned}
$$

Sea $\alpha = \mu + \sigma^2 t$, entonces

$$
exp\left[tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2\alpha x\right)\right],
$$

Para completar el trinomio cuadrado perfecto se debe sumar y restar α^2.

$$
\begin{aligned}
exp\left[tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] &= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \alpha^2\right)\right], \\
&= exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-\alpha)^2 - \alpha^2\right)\right], \\
&= exp\left(\frac{-\mu^2+\alpha^2}{2\sigma^2}\right) exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\alpha)^2\right].
\end{aligned}
$$

Mediante el cambio de variable $z = \frac{x-\alpha}{\sigma}$ se obtiene, $dx = \sigma dz$ y la integral se transforma en

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= exp\left(\frac{-\mu^2+\alpha^2}{2\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \\
&= exp\left(\frac{-\mu^2+\alpha^2}{2\sigma^2}\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente, sustituyendo $\alpha = \mu + \sigma^2 t$ se obtiene

$$
M_X(t) = exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right). \tag{3.64}
$$

La media y la varianza

A continuación se calculan los primeros momentos alrededor del origen.

Primer momento alrededor del origen

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= \left(\frac{d}{dt}exp\left(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right)\Big|_{t=0},\\
&= \left((exp(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2)(\mu+\sigma^2 t)\right)\Big|_{t=0},\\
&= \left(M_X(t)(\mu+\sigma^2 t)\right)\big|_{t=0},\\
&= \mu.
\end{aligned}
$$

Segundo momento alrededor del origen

$$
\begin{aligned}
\mu_2' &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)\right)\Big|_{t=0},\\
&= \left(\frac{d}{dt}\left(M_X(t)(\mu+\sigma^2 t)\right)\right)\Big|_{t=0},\\
&= \left(M_X'(t)(\mu+\sigma^2 t)+M_X(t)(\sigma^2)\right)\big|_{t=0},\\
&= \mu^2+\sigma^2.
\end{aligned}
$$

La media

La media corresponde al primer momento alrededor del origen, de manera que,

$$E(X)=\mu \tag{3.65}$$

La varianza

$$
\begin{aligned}
var(X) &= \mu_2'-\mu^2,\\
&= \sigma^2
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

En general, una variable aleatoria distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2 se denota por $N(\mu,\sigma^2)$.

3.2.3. Estandarización y cálculo de probabilidades utilizando las tablas normales

En la figura 3.5 se muestran las gráficas de las funciones de densidad para tres valores diferentes de las varianzas. Puede observarse que una varianza menor tiene un máximo más pronunciado; es decir, la curva se vuelve más aguda. Las integrales que involucran a una distribución normal se vuelven

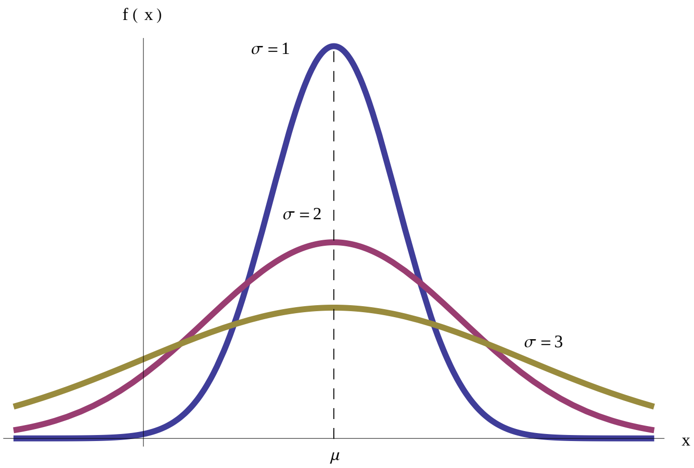


Figura 3.5: Distribuciones normales con media μ y varianzas diferentes

complejas y, de hecho, se puede demostrar que no existe una función analítica para la función de distribución acumulada. Debido a este inconveniente y teniendo en cuenta la importancia que esta distribución representa para la estadística, se vuelve prioritario contar con tablas de las funciones de distribución acumulada para determinar las probabilidades en las que interviene dicha distribución. En principio se requieren tantas tablas como parejas de números permitidos μ y σ existan. Afortunadamente, esto no será necesario y, como se mostrará a continuación, bastará con la tabla que nos proporcione los valores de la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar, para calcular las probabilidades de cualquier distribución normal.
Supóngase que X es una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Si se define la variable aleatoria Z como

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \tag{3.67}$$

entonces la variable aleatoria Z tiene media 0 y varianza 1. Las variables que se definen de esta manera se conocen como variables aleatorias estandarizadas. Todas las variables estandarizadas tienen media cero y varianza 1.
La función de densidad de una variable aleatoria estandarizada, depende de la función de densidad de la variable aleatoria X. A continuación se determinará la función de densidad de la variable aleatoria Z, considerando que, en este caso, X tiene distribución normal.

De acuerdo con el teorema 2.4.4 la función generadora de momentos de la variable aleatoria Z está dada por

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} M_X(\frac{t}{\sigma}), \\ &= e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} e^{\left(\frac{\mu t}{\sigma}+\frac{1}{2}t^2\right)}, \\ &= e^{\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

La función generadora de momentos de la variable aleatoria Z corresponde a una distribución normal estándar y de acuerdo con el teorema 2.4.3 la variable aleatoria Z tiene función de densidad definida por la ecuación,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < \infty.$$

Por otro lado, la ecuación 3.67 cumple con los supuestos del teorema 2.1.2; por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right), \\ &= P(z_1 < Z < z_2), \\ &= F(z_2) - F(z_1). \end{aligned}$$

La tabla 4 del apéndice E contiene la función de distribución acumulada para la distribución normal estándar. Aun cuando no existe una primitiva para la función $F(x)$ el área bajo la curva normal estándar se calcula mediante métodos de integración numérica. Los valores en la tabla deben interpretarse como:

$$F(Z) = \int_{-\infty}^{z} f(u)du. \tag{3.68}$$

Como se muestra en la figura 3.6

Ejemplo 3.2.5 *Determine el área bajo la curva normal estándar entre los puntos $z_1 = -1.52$ y $z_2 = 1.52$.*

Solución: El área que se busca determinar se muestra en la figura 3.7 y corresponde a:

$$P(-1.52 < Z < 1.52) = F(1.52) - F(-1.52),$$

De acuerdo con la tabla 4 del apéndice E, $F(-1.52) = 0.0643$ y $F(1.52) = 0.9357$.

$$P(-1.52 < Z < 1.52) = F(1.52) - F(-1.52) = 0.8714.$$

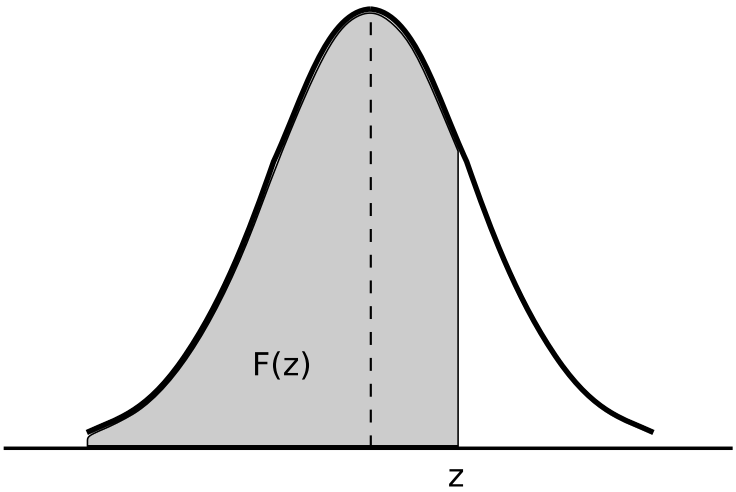


Figura 3.6: Área bajo la curva normal estándar

Ejemplo 3.2.6 *Para el ejemplo anterior,*

a) determine el área a la derecha de z_2,

b) determine el área a la izquierza de z_1.

Solución:

a) El área a la derecha de z_2 corresponde a $P(Z > z_2)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(Z > z_2) &= 1 - P(Z \leq z_2), \\ &= 1 - F(z_2), \\ &= 1 - F(1.52), \\ &= 1 - 0.9357, \\ &= 0.0643. \end{aligned}$$

b) El área a la izquierda de z_1 corresponde a $P(Z \leq z_1)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(Z \leq z_1) &= P(Z \leq z_1), \\ &= F(z_1), \\ &= F(-1.52), \\ &= 0.0643. \end{aligned}$$

Obsérvese que la suma de las áreas de las tres regiones es igual a 1, como debe corresponder al área bajo la curva de una función de densidad.

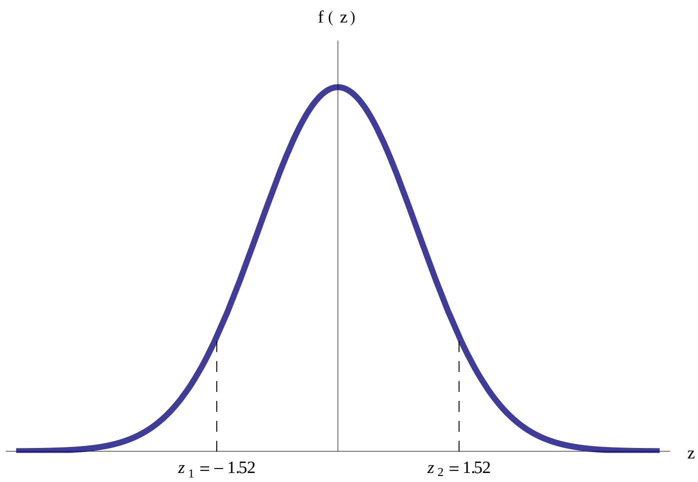


Figura 3.7: Distribuciones normales

Ejemplo 3.2.7 *Determine el valor de z de tal manera que* $P(Z < z) = 0.75$

Solución: Directamente de la tabla 4 del apéndice E se busca el valor de z tal que $F(z)$ sea lo más cercano a 0.75. Las áreas que se aproximan son 0.7485 y 0.7517, los valores de z correspondientes son, $z_1 = 0.67$ y $z_2 = 0.68$, respectivamente. Se recomienda tomar como valor de z a la media aritmética de z_1 y z_2, en este caso, $z = 0.675$.

Ejemplo 3.2.8 *El diámetro de un cable está distribuido normalmente con media 0.8 y varianza 0.0004.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro sea mayor 0.81 pulgadas?

b) Suponiendo que el cable se considere defectuoso si el diámetro se diferencia de su media en 0.025 pulgadas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cable defectuoso?

Solución:

a) Sea X la variable aleatoria que mide el diámetro del cable, se requiere calcular $P(X > 0.81)$. Por lo discutido anteriormente,

$$P(X > 0.81) = P(Z > z_1),$$

donde,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Sustituyendo $x_1 = 0.81$, $\mu = 0.80$ y $\sigma = \sqrt{0.0004} = 0.02$ se obtiene,

$$z_1 = \frac{0.81 - 0.80}{0.02} = 0.29,$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} P(X > 0.81) &= P(Z > 0.29), \\ &= 1 - P(Z \leq 0.29), \\ &= 1 - F(0.29), \\ &= 1 - 0.6141, \\ &= 0.3859. \end{aligned}$$

b) La probabilidad de obtener un cable defectuoso está determinado por,

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| > 0.025) &= 1 - P(|X - \mu| \leq 0.025), \\ &= 1 - P(-1.25 \leq Z \leq 1.25), \\ &= 1 + F(-1.25) - F(1.25), \\ &= 1 + 0.1056 - 0.8944, \\ &= 0.2112. \end{aligned}$$

3.2.4. Aproximación normal a la binomial

Teorema 3.2.1 (Aproximación normal a la binomial) *Sea X una variable aleatoria binomial con media y con desviación estándar determinados por*

$$\begin{aligned} \mu &= np, \\ \sigma &= \sqrt{np(1-p)}, \end{aligned}$$

respectivamente, entonces la variable aleatoria estandarizada

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}, \tag{3.69}$$

tiene una función de distribución que tiende a la distribución normal estándar cuando $n \to \infty$.

Demostración: La demostración que se presentará se basa en el hecho de que la función generadora de momentos define de manera única la distribución de una variable aleatoria; por lo tanto se calculará la función generadora de momentos de la variable aleatoria Y y se analizará su comportamiento

límite.
Considerando que X tiene una distribución binomial, entonces $\mu = np$ y $\sigma = npq$; además su función generadora de momentos está definida por,

$$M_X(t) = (q + pe^t)^n \tag{3.70}$$

Por otro lado, la variable aleatoria Y corresponde a una variable aleatoria estandarizada; es decir,

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \tag{3.71}$$

para los valores de μ y σ que corresponden a la variable aleatoria X. La función generadora de momentos de la variable aleatoria Y se determina, de acuerdo con el teorema 2.4.4, de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma})}(t), \\ &= e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} M_X(\frac{t}{\sigma}). \end{aligned} \tag{3.72}$$

Evaluando la ecuación 3.72 mediante la ecuación 3.71 se obtiene,

$$M_Y(t) = e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} (q + pe^{\frac{t}{\sigma}})^n \tag{3.73}$$

Sustituyendo $\mu = np$ en la ecuación anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= e^{-\frac{npt}{\sigma}} (q + pe^{\frac{t}{\sigma}})^n, \\ &= \left(e^{-\frac{pt}{\sigma}} (q + pe^{\frac{t}{\sigma}})\right)^n, \\ &= \left(qe^{-\frac{pt}{\sigma}} + pe^{\frac{t}{\sigma}(1-p)}\right)^n, \\ &= \left(qe^{-\frac{pt}{\sigma}} + pe^{\frac{qt}{\sigma}}\right)^n, \end{aligned} \tag{3.74}$$

Ahora considere el desarrollo de las exponenciales, de acuerdo con el desarrollo de Taylor de la función exponencial,

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \ldots,$$

$$qe^{-\frac{pt}{\sigma}} = q\left(1 - \frac{pt}{\sigma} + \frac{p^2t^2}{2\sigma^2} + \ldots\right), \tag{3.75}$$

$$pe^{\frac{qt}{\sigma}} = p\left(1 + \frac{qt}{\sigma} + \frac{q^2t^2}{2\sigma^2} + \ldots\right). \tag{3.76}$$

Sumando las ecuaciones 3.75 y 3.76 se obtiene,

$$
\begin{aligned}
qe^{-\frac{pt}{\sigma}} + pe^{\frac{qt}{\sigma}} &= q\left(1 - \frac{pt}{\sigma} + \frac{p^2t^2}{2\sigma^2} + \dots\right) + p\left(1 + \frac{qt}{\sigma} + \frac{q^2t^2}{2\sigma^2} + \dots\right), \\
&= (p+q) + \frac{pq(p+q)t^2}{2\sigma^2} + \dots, \\
&= 1 + \frac{pqt^2}{2\sigma^2} + \dots \qquad (3.77)
\end{aligned}
$$

Los términos de orden superior son de la forma $(\frac{1}{n})^{\frac{k}{2}}, \quad k \geq 3$, los cuales tienden rápidamente a cero a medida n aumenta. Sustituyendo $\sigma^2 = npq$ en la ecuación 3.77 se obtiene,

$$
qe^{-\frac{pt}{\sigma}} + pe^{\frac{qt}{\sigma}} = 1 + \frac{t^2}{2n} + \dots \qquad (3.78)
$$

Finalmente, al considerar el limite cuando $n \to \infty$ en la ecuación 3.74 se obtiene,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} M_Y(t) &= \lim_{n\to\infty}\left(qe^{-\frac{pt}{\sigma}} + pe^{\frac{qt}{\sigma}}\right)^n, \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t^2}{2n}\right)^n, \\
&= e^{\frac{t^2}{2}}. \qquad (3.79)
\end{aligned}
$$

De acuerdo con la ecuación 3.64, la ecuación 3.79 corresponde a la función generadora de momentos de una distribución normal estándar; además, de acuerdo con el teorema 2.4.3 la variable aleatoria Y tiene en sí misma una distribución normal estándar. ∎

Ejemplo 3.2.9 *Considérese el experimento de lanzar un par dados. Determine la probabilidad de obtener 40 totales de 7 en 200 lanzamientos.*

Solución: Si X es la variable aleatoria cuenta el número de sietes que ocurren en los 200 lanzamientos, entonces X es una variable aleatoria con distribución binomial, cuyos parámetros son $n = 200$ y $p = \frac{1}{6}$ =0.17. El cálculo mediante la distribución binomial se realizó en el problema 3.1.15.

La probabilidad de obtener 40 sietes en los 200 lanzamientos se expresa mediante,

$$
\begin{aligned}
P(x = 40) &= b(40; 200, 0.17), \\
&= \binom{200}{40}(0.17)^{40}(0.83)^{160}, \\
&= 0.0382.
\end{aligned}
$$

Para aplicar la aproximación de la distribución normal a la distribución binomial se requiere conocer la media y la desviación estándar de X.

$$\begin{aligned} \mu &= np = 200(0.17) = 34, \\ \sigma &= \sqrt{npq} = \sqrt{200(0.17)(0.83)} = 5.31. \end{aligned}$$

La probabilidad de un punto no puede obtenerse mediante una distribución continua, lo que se hará es determinar la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo: $39.5 < X < 40.5$. Este intervalo está centrado en 40 y tiene ancho 1. Se procederá a determinar los extremos del intervalo de la variable aleatoria estandarizada.

$$\begin{aligned} z &= \frac{x-\mu}{\sigma}, \\ z_1 &= \frac{39.5-34}{5.31} = 1.04, \\ z_2 &= \frac{40.5-34}{5.31} = 1.22. \end{aligned}$$

Debido a que Z tiene distribución normal estándar, entonces de acuerdo con la tabla 4 del apéndice E

$$\begin{aligned} P(X=40) &\approx P(39.5 < X < 40.5), \\ &\approx P(1.04 < Z < 1.22), \\ &\approx F(1.22) - F(1.04), \\ &\approx 0.8888 - 0.8508, \\ &\approx 0.0380. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.10 *Un antibiótico determinado tiene una probabilidad de 0.07 de causar una reacción alérgica. Si 100 personas se someten a un tratamiento con este antibiótico, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 12 personas presenten reacciones alérgicas?*

Solución: La variable aleatoria X que cuenta el número de personas que muestran reacciones alérgicas al medicamento, es una variable aleatoria con distribución binomial. Se requiere determinar la probabilidad de que la variable aleatoria X esté entre 0 y 12; es decir, $P(X \leq 12)$. De manera exacta esta probabilidad está determinada por

$$P(X \leq 12) = \binom{100}{x} \sum_{x=0}^{12} (0.07)^x (0.93)^{50-x}$$

Si se usa la aproximación de la normal a la binomial, entonces se debe tener el cuidado de calcular $P(-0.5 < X < 12.5)$. De manera análoga que en el ejemplo anterior,

$$\begin{aligned}\mu &= np = 100(0.07) = 7,\\ \sigma &= \sqrt{npq} = \sqrt{100(0.03)(0.97)} = 2.55.\end{aligned}$$

Los extremos del intervalo de la variable aleatoria estandarizada son:

$$\begin{aligned}z &= \frac{x-\mu}{\sigma},\\ z_1 &= \frac{-0.5-7}{2.55} = -2.94,\\ z_2 &= \frac{12.5-7}{2.55} = 2.15.\end{aligned}$$

Se sabe que si Z tiene distribución normal estándar, entonces

$$\begin{aligned}P(-0.5 \leq X \leq 2.5) &= P(-2.94 < Z < 2.15),\\ &= F(2.15) - F(-2.94).\end{aligned}$$

De acuerdo con la tabla 4 del apéndice E,

$$\begin{aligned}P(-0.5 \leq X \leq 2.5) &= 0.9846 - 0.0016,\\ &= 0.9830.\end{aligned}$$

Finalmente, usando la aproximación de la normal a la binomial se concluye que,

$$\begin{aligned}P(X \leq 12) &\approx P(-0.5 \leq X \leq 2.5),\\ &\approx 0.9830.\end{aligned}$$

3.3. Teorema de Chebyshev

Teorema 3.3.1 (Teorema de Chebyshev) *Si X es una variable aleatoria discreta o continua con media μ y varianza σ^2, ambas finitas, entonces para todo $\epsilon > 0$ se satisface,*

$$P(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \tag{3.80}$$

de manera equivalente para el evento complementario,

$$P(|X-\mu|<\epsilon)>1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \tag{3.81}$$

Si se sustituye $\epsilon = k\sigma$ en las desigualdades anteriores se obtienen dos formas equivalentes más de expresar el teorema de Chebyshev,

$$P(|X-\mu|\geq k\sigma)\leq\frac{1}{k^2} \tag{3.82}$$

de manera equivalente para el evento complementario,

$$P(|X-\mu|<k\sigma)>1-\frac{1}{k^2} \tag{3.83}$$

Demostración: Se demostrará el teorema para el caso continuo.
Considérese una variable X con función de densidad $f(x)$. Para esta variable aleatoria su varianza está determinada por,

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx. \tag{3.84}$$

La integral puede descomponerse en dos regiones como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx,\\
&= \int_{-\infty}^{\mu-\epsilon}(x-\mu)^2 f(x)dx+\int_{\mu-\epsilon}^{\mu+\epsilon}(x-\mu)^2 f(x)dx+\\
&\quad \int_{\mu+\epsilon}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx,\\
&= \int_{|X-\mu|<\epsilon}(x-\mu)^2 f(x)dx+\int_{|X-\mu|\geq\epsilon}(X-\mu)^2 f(x)dx
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Como consecuencia de que σ^2 es la suma de dos términos positivos, de acuerdo con la ecuación 3.85, entonces σ^2 es mayor o igual que cualquiera de los dos términos; por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &\geq \int_{|X-\mu|\geq\epsilon}(X-\mu)^2 f(x)dx,\\
&\geq \epsilon^2\int_{|X-\mu|\geq\epsilon}f(x)dx,\\
&\geq \epsilon^2 P(|X-\mu|\geq\epsilon).
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Reescribiendo la desigualdad expresada en 3.86 se obtiene,

$$\begin{aligned}\epsilon^2 P(|X-\mu| \geq \epsilon) &\leq \sigma^2, \\ P(|X-\mu| \geq \epsilon) &\leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Corolario 3.3.1 *Si X es una variable aleatoria discreta o continua, entonces sin importar la distribución de la que se trate,*

$$P(|X-\mu| < 2\sigma) > \frac{3}{4}. \tag{3.87}$$

Demostración: Sustituyendo $k = 2$ en la desigualdad de Chebyshev expresada mediante la ecuación 3.83 se obtiene el resultado. Este resultado implica que en un ancho de 2σ alrededor de la media se concentra al menos el 75 % de los datos.

Ejemplo 3.3.1 *Considérese una variable aleatoria X con distribución exponencial y parámetro $\alpha = 2$; es decir, X tiene media, $\mu = \frac{1}{2}$ y varianza $\sigma^2 = \frac{1}{4}$. Determine $P(|X-\mu| < 2\sigma)$ y compare el resultado con la cota inferior establecida mediante el teorema de Chebyshev.*

Solución: La función de densidad de la variable aleatoria X está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

La función de distribución acumulada se determina por,

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Se requiere calcular, $P(|X-\frac{1}{2}| > 1)$, de manera que,

$$\begin{aligned} P\left(\left|X-\frac{1}{2}\right| < 1\right) &= P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right), \\ &= F(3/2) - F(-1/2), \end{aligned}$$

Evaluando se obtiene,

$$P\left(\left|X-\frac{1}{2}\right| < 1\right) = F(3/2) = 1 - e^{-\frac{3}{2}} = 0.7769.$$

Este resultado es acorde con el teorema de Chebyshev, o más específicamente, con el corolario que garantiza una cota inferior para la probabilidad de 0.75.

Capítulo 4

Distribución de varias variables aleatorias

En el capítulo 2 se estudiaron las funciones de probabilidad para variables aleatorias discretas y las funciones de densidad que corresponde a las variables aleatorias continuas. En ambos casos las funciones solo dependían de una variable; sin embargo, existen situaciones en las cuales, para un experimento aleatorio dado cuyo espacio muestral es S, es necesario contar o medir más de una variable aleatoria; por ejemplo, los médicos requieren llevar un registro de la edad, los pesos y las alturas de los niños para detectar posibles desórdenes en la salud de los mismos. Por lo anterior, es necesario generalizar los conceptos estudiados en el capítulo 2 y así poder analizar experimentos que requieran del manejo de dos o más variables aleatorias.

En las siguientes secciones se establecerán los conceptos fundamentales para variables aleatorias bidimensionales. La generalización de los conceptos se abordarán en la sección 4.4.2

4.1. Probabilidad conjunta y marginal

Definición 4.1.1 (Variable aleatoria bidimensional) *Si X y Y son dos variables aleatorias definidas en un espacio muestral S y si (X, Y) se define como*

$$\begin{aligned}(X, Y) &: S \to \mathbb{R}^2, \\ (X, Y)(s) &= (X(s), Y(s)), \quad \forall\, s \in S.\end{aligned}$$

Se dice que (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional.
Si X y Y son Variables aleatorias discretas, entonces (X, Y) es una variable

aleatoria bidimensional discreta; Si tanto X como Y son variables aleatorias continuas, entonces (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua; en cualquier otro caso, (X, Y) será una variable aleatoria bidimensional mixta.[1]

El recorrido de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) se denota por R_{XY} y está definido como,

$$R_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (X(s), Y(s)) = (x, y) \text{ para algún } s \in S\} \tag{4.1}$$

En la figura 4.1 se muestra una representación esquemática del concepto anterior.

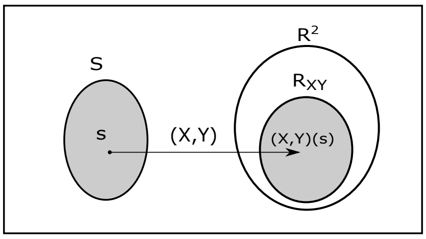


Figura 4.1: Representación esquemática de una variable bidimensional (X,Y)

Ejemplo 4.1.1 *Considérese el experimento aleatorio que consiste en extraer una tras otra, sin reemplazo, dos esferas de una urna que contiene 10 esferas blancas y 15 negras. Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de esferas blancas y Y la variable aleatoria que cuenta el número de esferas negras, entonces (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta. El recorrido de (X, Y) es un conjunto discreto de puntos contenidos en* $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.1.2 *Considérese el experimento que consiste en determinar los pesos y las alturas de un grupo de 30 estudiantes que toman una clase de matemáticas. Si W es la variable aleatoria que mide el peso y H la variable aleatoria que mide la altura, entonces (W,H) es una variable aleatoria bidimensional continua. El recorrido de (W,H) es un conjunto de puntos contenidos en* $\mathbb{R}^2$.

Notación: Si (X, Y) es una variable bidimensional discreta, se denota como $P(X = x, Y = y)$ a la probabilidad de que la variable aleatoria discreta X asuma el valor particular x, mientras que la variable aleatoria discreta Y asuma el valor particular y.

[1] En este trabajo no se considerarán las variables aleatorias bidimensionales mixtas.

Definición 4.1.2 (Función de probabilidad conjunta) *Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional, se conoce como función de probabilidad conjunta de X y Y, y se denota por f(x,y), a la función que asigna la probabilidad P(X=x, Y=y) a cada pareja de valores (x,y) en el recorrido de (X,Y); es decir,*

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y), \quad \forall\,(x,y) \text{ en el recorrido de (X,Y).} \tag{4.2}$$

La función de probabilidad conjunta debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. $f(x,y) \geq 0$, *para todo* $x \in R_X$ *y* , $y \in R_Y$.
2. $\displaystyle\sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} f(x,y) = 1.$

Las sumas, en la condición 2, deben realizarse sobre todos elementos x en el recorrido de la variable aleatoria X y sobre todos los elementos y que se encuentren en el recorrido de Y. De manera más explícita, si $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, mientras que $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, entonces la condición 2 representa:

$$\sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) = 1. \tag{4.3}$$

Si los recorridos de las variables aleatorias X y Y tienen infinitos elementos, entonces la condición 2 representa:

$$\sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y} f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) = 1. \tag{4.4}$$

En el caso de que X y Y tengan recorridos finitos, resulta conveniente construir una tabla, como se muestra a continuación, para representar a la función de probabilidad conjunta.

X/Y	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	
y_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_2, y_1)$	$\ldots$	$f(x_n, y_1)$	$f_2(y_1)$
y_2	$f(x_1, y_2)$	$f(x_2, y_2)$	$\ldots$	$f(x_n, y_2)$	$f_2(y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	$f(x_1, y_m)$	$f(x_2, y_m)$	$\ldots$	$f(x_n, y_m)$	$f_2(y_m)$
	$f_1(x_1)$	$f_1(x_2)$	$\ldots$	$f_1(x_n)$	Gran Total=1

Tabla 4.1: Representación tabular de la función de probabilidad conjunta

Ejemplo 4.1.3 *Considérese el experimento aleatorio que consiste lanzar un dado 2 veces. Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de 5 y Y la variable aleatoria que cuenta el número de 6 en el experimento, determine la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y. Supóngase que el dado es normal y no está cargado.*

Solución: Las variables aleatorias X y Y asumen los valores 0, 1 y 2. Como se mencionó anteriormente, es conveniente representar a la función de probabilidad conjunta mediante la siguiente tabla:

X/Y	0	1	2	
0	f(0,0)	f(1,0)	f(2, 0)	
1	f(0,1)	f(1,1)	f(2,1)	
2	f(0,2)	f(1,2)	f(2,2)	Gran Total

Tabla 4.2: Representación de la función de probabilidad conjunta

Debido a que el experimento aleatorio está limitado a 2 lanzamientos, entonces los eventos $(X = 1, Y = 2)$, $(X = 2, Y = 1)$ $(X = 2, 2)$ son eventos imposibles, de manera que $f(1, 2) = f(2, 1) = f(2, 2) = 0$. Las demás probabilidades conjuntas se determinan de acuerdo con el ejemplo 1.5.2.

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 16/36, \\
f(1,0) &= 8/36, \\
f(2,0) &= 1/36, \\
f(0,1) &= 8/36, \\
f(1,1) &= 2/36, \\
f(0,2) &= 1/36.
\end{aligned}$$

Dado que $f(x, y)$ es una función de probabilidad, es importante verificar que los valores que asume sean positivos y que la suma de todas las probabilidades sea a la unidad, lo que en la tabla 4.1 se indica como el Gran Total. La tabla que representa a la función de probabilidad conjunta, para este ejemplo, es:

X/Y	0	1	2	
0	16/36	8/36	1/36	
1	8/36	2/36	0	
2	1/36	0	0	1

Tabla 4.3: Representación tabular de la función de probabilidad conjunta

En la tabla 4.1 se reservaron un último renglón y una última columna, las cuales se denotaron como $f_1(x)$ y $f_2(y)$, respectivamente. Estas funciones se conocen como funciones de probabilidades marginales y se definen a continuación:

Definición 4.1.3 (Funciones de probabilidades marginales) *Supóngase (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta con función de probabilidad conjunta f(x,y). Si a cada valor x de la variable aleatoria X, se le asigna la suma de las probabilidades conjuntas sobre todos los valores permitidos de la variable aleatoria Y, se obtiene la función de probabilidad marginal para la variable aleatoria X, es decir,*

$$f_1(x) = \sum_{y \in R_Y} f(x,y)f(x,y), \quad x \in R_X. \tag{4.5}$$

De manera análoga, si a cada valor y de la variable aleatoria Y, se le asigna la suma de las probabilidades conjuntas sobre todos los valores de la variable aleatoria X, se obtiene la función de probabilidad marginal de la variable aleatoria Y; es decir,

$$f_2(y) = \sum_{x \in R_X} f(x,y), \quad y \in R_Y. \tag{4.6}$$

De manera más explícita, si $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, mientras que $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, entonces las ecuaciones anteriores representan:

$$f_1(x_i) = \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j), \quad i = 1, 2 \ldots, n. \tag{4.7}$$

$$f_2(y_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j), \quad j = 1, 2 \ldots, n. \tag{4.8}$$

Si los recorridos de las variables aleatorias X y Y tienen infinitos elementos, entonces

$$f_1(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j), \quad i = 1, 2 \ldots. \tag{4.9}$$

$$f_2(y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_j), \quad j = 1, 2 \ldots. \tag{4.10}$$

Ejemplo 4.1.4 *Para el ejemplo 4.1.3, determine las funciones de probabilidades marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$.*

Solución: De acuerdo con la definición 4.2.2, sumando sobre las columnas en la tabla 4.1 se obtienen los valores de $f_1(x)$; es decir,

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 25/36, \\ f_1(1) &= 10/36, \\ f_1(2) &= 1/36. \end{aligned}$$

De manera análoga, sumando sobre los renglones se obtiene,

$$\begin{aligned} f_2(0) &= 25/36, \\ f_2(1) &= 10/36, \\ f_2(2) &= 1/36. \end{aligned}$$

Por último, con los datos anteriores se obtiene la tabla 4.1.

X/Y	0	1	2	$f_2(y)$
0	16/36	8/36	1/36	25/36
1	8/36	2/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
$f_1(x)$	25/36	10/36	1/36	1

Tabla 4.4: Representación tabular de la función de probabilidad conjunta y las funciones de probabilidad marginales

Se observa que:

$$\sum_{x=0}^{2} f_1(x) = \sum_{y=0}^{2} f_2(y) = 25/36 + 10/36 + 1/36 = 1.$$

Estos resultados son de carácter general dado que,

$$\sum_{x \in R_X} f_1(x) = \sum_{y \in R_Y} f_2(y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} f(x,y) = 1. \tag{4.11}$$

4.2. Densidad conjunta y marginal

Las definiciones anteriores se extienden de manera inmediata para el caso de las variables aleatorias bidimensionales continuas.

Definición 4.2.1 (Función de densidad conjunta) *Si (X,Y) es una variable aleatoria continua bidimensional, entonces f(x,y) se conoce como la función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y, si la probabilidad de que $a < X < b$ mientras que $c < Y < d$ está determinada por,*

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy, \tag{4.12}$$

donde a, b, c, d son números reales tales que $a < b$ y $c < d$. La función de densidad conjunta f(x,y) debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. $f(x,y) \geq 0, \quad -\infty < x, y < \infty.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$

Definición 4.2.2 (Funciones de densidades marginales) *Si (X,Y) es una variable aleatoria continua bidimensional con función de densidad conjunta f(x,y), se definen las densidades marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$ para las variables aleatorias X y Y, respectivamente, como:*

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv, \quad -\infty < x < \infty. \tag{4.13}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)du, \quad -\infty < y < \infty. \tag{4.14}$$

4.3. Distribución conjunta y marginal

Definición 4.3.1 (Función de distribución conjunta) *Para una variable aleatoria bidimensional (X,Y) se define la función de distribución conjunta de la siguiente manera:*

Caso discreto:

Si (X, Y) *una variable aleatoria bidimensional discreta y supóngase que f(x,y) es la función de probabilidad conjunta de X y Y, entonces la función de densidad conjunta de las variables aleatoria X y Y se define mediante:*

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u, v), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.15}$$

Las sumas que aparecen en la ecuación 4.15 deben interpretarse como: la suma sobre todos los u que están en el recorrido de X y que son menores o iguales que x; y, la suma sobre todos los v que están en el recorrido de Y y que son menores o iguales que y.

Caso continuo:

Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua y si f(x,y) es la función de densidad conjunta de X y Y, entonces la función de distribución conjunta de las variables aleatorias X y Y se define como:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y), & (4.16) \\ &= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v) du dv, \quad -\infty < x, y < \infty. & (4.17) \end{aligned}$$

La función de densidad $F(x, y)$ debe satisfacer,

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \tag{4.18}$$

Ejemplo 4.3.1 *Si X y Y son dos variables aleatorias, cuya función de densidad conjunta está dada por,*

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq 1,\, y \leq x, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Determine la función de distribución conjunta.

Solución: El cálculo de la función de distribución debe realizarse por casos, considerando la región en donde se localiza el punto (x, y).

i) Si (x,y) está en la región $x < 0$ o $y < 0$, entonces $f(x, y) = 0$ y por lo tanto, $F(x, y) = 0$.

ii) Si (x,y) está en la región $0 \leq x \leq 1$, $y < x$, entonces la región de interés, para el cálculo de la integral que define a la función de distribución, se compone de dos regiones disjuntas, como se muestra en la figura 4.2.
La región de integración puede expresarse como,

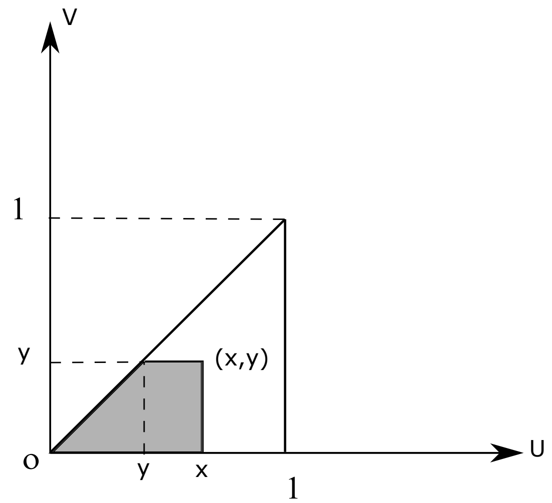


Figura 4.2: Representación de la región de integración.

$$
\begin{aligned}
R_{UV} &= \{(u, v) \,|\, 0 \leq u \leq y,\, 0 \leq v \leq u\} \cup \\
&\quad \{(u, v) \,|\, y \leq u \leq x,\, 0 \leq v \leq y\}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= \int_{R_{UV}} f(u, v)dudv, \\
&= \int_0^y \int_0^u f(u, v)dvdu + \int_y^x \int_0^y f(u, v)dvdu, \\
&= 8\int_0^y \int_0^u uvdvdu + 8\int_y^x \int_0^y uvdvdu, \\
&= 4\int_0^y u^3du + 4\int_y^x uy^2du, \\
&= y^4 + 2y^2(x^2 - y^2), \\
&= y^2(2x^2 - y^2).
\end{aligned}
$$

iii) Si (x,y) está en la región $x \geq 1$, $0 \leq y \leq 1$, entonces la región de integración puede expresarse como,

$$R_{UV} = \{(u,v)\,|\,0 \leq v \leq y,\, v \leq x \leq 1\}$$

La región se muestra en la figura 4.3 Por lo tanto,

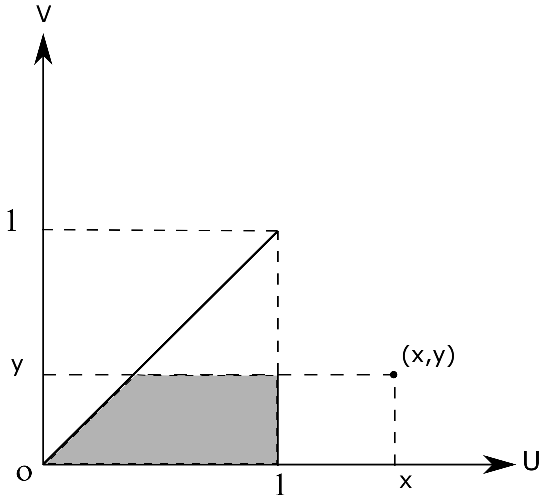


Figura 4.3: Representación de la región de integración.

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{R_{UV}} f(u,v)dudv, \\
&= \int_0^y \int_v^1 f(u,v)dudv, \\
&= 8\int_0^y \int_v^1 vududv, \\
&= 4\int_0^y v(1-v^2)dv, \\
&= 4\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right), \\
&= y^2(2-y^2)
\end{aligned}$$

iv) Si (x,y) está en la región $0 \leq x \leq 1$, $y \geq x$, entonces la región de interés, para el cálculo de la integral que define a $F(x,y)$ puede expresarse como,

$$R_{UV} = \{(u,v)\,|\,0 \leq u \leq x,\, 0 \leq v \leq u\}$$

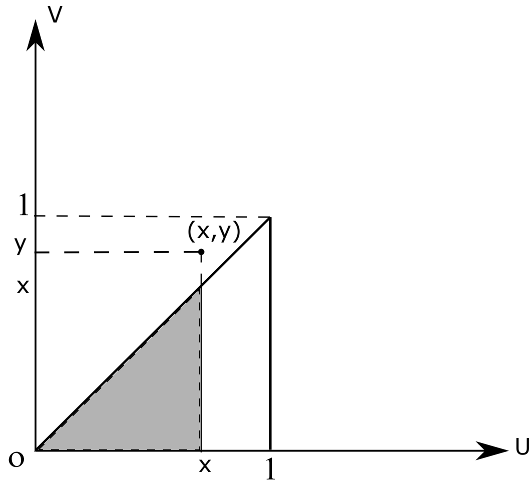


Figura 4.4: Representación de la región de integración.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{R_{UV}} f(u,v)dudv, \\ &= \int_0^x \int_0^u f(u,v)dvdu, \\ &= 8\int_0^x \int_0^u uvdvdu, \\ &= 4\int_0^x u^3du, \\ &= x^4. \end{aligned}$$

v) Finalmente, si (x,y) se encuentra en la región $x \geq 1$, $y \geq 1$, entonces $F(x,y) = 1$.
La función de distribución conjunta se representa en la figura 4.5

Definición 4.3.2 (Distribuciones marginales) *Las funciones de distribuciones marginales se definen por casos:*

Caso discreto:

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta y supóngase que f(x,y) es la función de probabilidad conjunta de X y Y.. Las funciones de

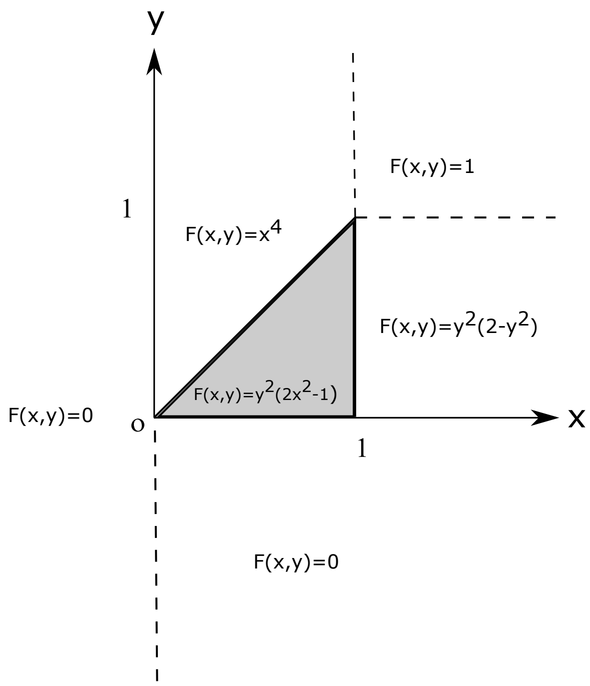


Figura 4.5: Representación de la función de distribución conjunta $F(x, y)$.

distribuciones marginales $F_1(x)$ *y* $F_2(y)$*, para X y Y, respectivamente, se definen de la manera siguiente:*

$$F_1(x) = \sum_{u \leq x} \sum_{y \in R_Y} f(u, y), \quad -\infty < x < \infty. \tag{4.19}$$

La sumas que aparecen en la ecuaciones anteriores deben interpretarse como: la suma sobre todos los u que están en el recorrido de X y que son menores o iguales que x; y, la suma sobre todos los v que están en el recorrido de Y.

$$F_2(y) = \sum_{v \leq y} \sum_{x \in R_X} f(x, v), \quad -\infty < y < \infty. \tag{4.20}$$

La sumas que aparecen en la ecuaciones anteriores deben interpretarse como: la suma sobre todos los v que están en el recorrido de Y y que son menores o iguales que Y; y, la suma sobre todos los x que están en el recorrido de X.

Caso continuo:

Si (X,Y) es una variable aleatorias bidimensional continua con función de densidad conjunta f(x,y), se definen las densidades marginales $F_1(x)$ *y*

$F_2(y)$ para las variables aleatorias X y Y, respectivamente, mediante

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv, \quad -\infty < x < \infty. \tag{4.21}$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu, \quad -\infty < y < \infty. \tag{4.22}$$

De las definiciones anteriores se observa que,

$$F_1(x) = \sum_{u\leq x} f_1(u) = P(X \leq x),$$

y

$$F_2(y) = \sum_{v\leq y} f_2(v) = P(Y \leq y).$$

Para el caso continuo se tiene,

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv, \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dvdu, \\ F_1(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_1(u)du = P(X \leq x). \end{aligned} \tag{4.23}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} F_2(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu, \\ &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv, \\ F_2(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_2(v)dv = P(Y \leq y). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Ejemplo 4.3.2 *Si X y Y son dos variables aleatorias, cuya función de densidad conjunta está dada por,*

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq 1,\ y \leq x, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar:

a) las densidades marginales,

b) las distribuciones marginales,

Solución:
a) Se determinarán las densidades marginales.
Densidad marginal para la variable aleatoria X
De acuerdo con la definición 4.2.2 se tiene:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv, \quad -\infty < x < \infty.$$

Si $x \in (0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_0^x 8xvdv, \\ &= 4x^3. \end{aligned}$$

Luego,

$$f_1(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De manera análoga,
Densidad marginal para la variable aleatoria Y

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)du, \quad -\infty < y < \infty.$$

Si $y \in (0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_y^1 8uydu, \\ &= 4y(1-y^2). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$f_2(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

b) Cálculo de las distribuciones marginales.
Distribución marginal para la variable aleatoria X
De acuerdo con la ecuación 4.23 se tiene:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)du, \quad -\infty < x < \infty.$$

Si $x < 0$, entonces $f(x,y) = 0$, en consecuencia, $F_1(x) = 0$. Si $0 \leq x < 1$, entonces

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_0^x f_1(u)du, \\ &= 4\int_0^x u^3 du, \\ &= x^4. \end{aligned}$$

Finalmente, si $x \geq 1$, entonces $F_1(x) = 1$, de manera que:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^4, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Distribución marginal para la variable aleatoria Y
De acuerdo con la ecuación 4.24 se tiene:

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(v)dv, \quad -\infty < y < \infty.$$

Si $y < 0$, entonces $f(x,y) = 0$, en consecuencia $F_2(y) = 0$.
Si $0 \leq y < 1$, entonces

$$\begin{aligned} F_2(y) &= \int_0^y f_2(v)dv, \\ &= 4\int_0^y v(1 - v^2 dv), \\ &= 2y - y^4. \end{aligned}$$

Finalmente, si $y \geq 1$, entonces $F_2(y) = 1$, de manera que:

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 2y - y^4, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

4.4. Cálculo de probabilidades para densidades de dos o más variables aleatorias

4.4.1. Cálculo de probabilidades para una variable aleatoria bidimensional

En general $z = f(x,y)$ define una superficie en el espacio tridimensional, como se muestra en las figura 4.6.

La primera condición de la definición 4.2.1 indica que la superficie no cruza el plano XY; ésta siempre se encontrará del lado positivo del eje z.
La segunda condición de la definición 4.2.1 implica que el volumen total limitado por la superficie es igual a la unidad.

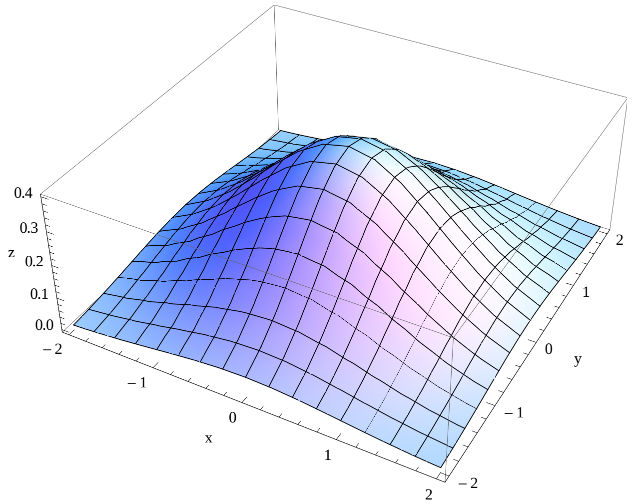


Figura 4.6: Representación de la función de densidad conjunta

En general, un evento A que se encuentre en el recorrido de (X, Y) tiene asociado una región R_{xy} en el plano cartesiano XY, de manera que:

$$P(A) = \int_{R_{xy}} f(x, y)dxdy. \tag{4.25}$$

Ejemplo 4.4.1 *Considérese las variables aleatorias X y Y del ejemplo 4.3.2. Determine la probabilidad del evento A, donde A es la región acotada por las rectas $y = 0$, $y = x$, y, $x + y = 1/2$.*

Solución: El evento A es la unión de dos eventos disjuntos A_1 y A_2 (ver la figura 4.7), donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(X, Y)|0 \leq X \leq 1/4\}, 0 \leq Y \leq X\}, \\ A_2 &= \{(X, Y)|1/4 \leq X \leq 1/2\}, 0 \leq Y \leq 1/2 - X\}, \end{aligned}$$

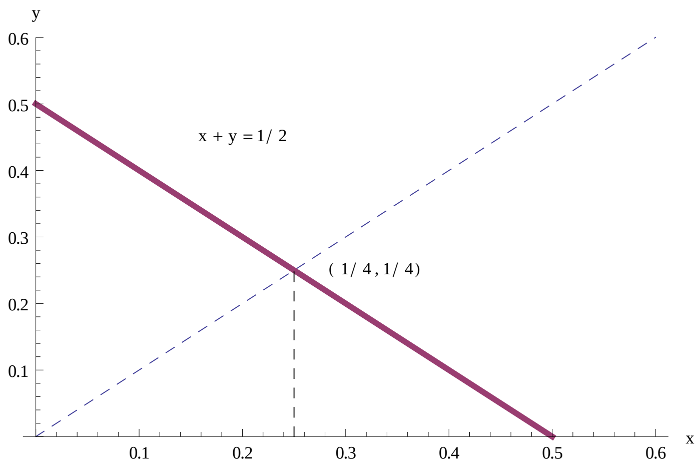


Figura 4.7: Representación gráfica del evento A

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1) + P(A_2), \\
&= \int_0^{1/4} \int_0^x f(x,y)dydx \\
&\quad + \int_{1/4}^{1/2} \int_0^{1/2-x} f(x,y)dydx, \\
&= 8\int_0^{1/4} \int_0^x xydydx + 8\int_{1/4}^{1/2} \int_0^{1/2-x} xydydx, \\
&= 8\int_0^{1/4} x \int_0^x ydydx + 8\int_{1/4}^{1/2} x \int_0^{1/2-x} ydydx, \\
&= 4\int_0^{1/4} x^3 dx + 4\int_{1/4}^{1/2} x(1/2-x)^2 dx, \\
&= x^4\Big|_0^{1/4} + \left(x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{1/4}^{1/2}, \\
&= \frac{1}{96}.
\end{aligned}$$

Funciones de una variable bidimensional

Sea (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua y $f(x,y)$ la función de densidad conjunta de las variables X y Y. Supóngase que una variable aleatoria U es función de las variables aleatorias X y Y; es decir, $U = \phi(X, Y)$. El problema que se plantea consiste en determinar la función de densidad de la variable aleatoria U. El procedimiento que se sigue se establece en siguiente teorema y de manera más específica en el corolario. La demostración se omite; sin embargo, a manera de ejemplos, en el apéndice D se obtienen las distribuciones t de Student y F (las cuales son de gran importancia en la estadística inferencial) mediante la aplicación directa del teorema y su corolario.

Teorema 4.4.1 *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional y f(x,y) es la función de densidad conjunta de las variables X y Y. Supóngase (U, V) es otra variable aleatoria bidimensional definida en términos de (X, Y) por $U = \phi_1(X, Y)$ y $v = \phi_2(X, Y)$, donde a cada pareja de valores (u,v) le corresponde una única pareja de valores (x,y) y también viceversa; es decir, X y Y pueden expresarse en términos de U y V mediante, $X = \psi_1(U, V)$ y $X = \psi_2(U, V)$. Si además, las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ existen y son continuas, entonces la función de probabilidad conjunta de (U, V) está dada por*

$$
\begin{aligned}
g(u, v) &= f(x, y)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|, \\
g(u, v) &= f(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))|J|, \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

donde J es el jacobiano de la transformación y está definido mediante

$$
\begin{aligned}
J &= \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Corolario 4.4.1 *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional y f(x,y) es la función de densidad conjunta de las variables X y Y. Supóngase (U, V) es otra variable aleatoria bidimensional definida en términos de (X, Y) por $U = \phi(X, Y)$ y $V = X$, donde a cada pareja de valores (u,v) le corresponde una única pareja de valores (x,y) y también viceversa. Entonces la función de densidad U es la densidad marginal obtenida a partir de la densidad conjunta de (U, V) dada por el teorema anterior.*

4.4.2. Generalizaciones

En esta sección se generalizan los conceptos estudiados en las secciones anteriores para variables aleatorias n-dimensionales.

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$

Definición 4.4.1 (Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$) *Si n es un entero positivo, entonces una n-ada ordenada es una sucesión de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. El conjunto de todas las n-adas ordenadas se conoce como espacio n-dimensional y se denota por $\mathbb{R}^n$; es decir,*

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,:\, a_i \in \mathbb{R}, \quad \textit{para todo} \;\; i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces la entrada *n-ésima* de u, la denotaremos por $(u)_i$; es decir, $(u)_i = u_i$.

Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$, con entradas $(u)_i = u_i$ y $(v)_i = v_i$, entonces se dice que son iguales y se escribe $u = v$, si y solo si, las entradas correspondientes son iguales; es decir,

$$u = v \Longleftrightarrow u_i = v_i, \quad \textit{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar definidas sobre $\mathbb{R}^n$ son:

Suma

Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ están en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n);$$

es decir,

$$(u + v)_i = u_i + v_i, \quad \textit{para todo} \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

Multiplicación por un escalar

Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ y k es un escalar, entonces

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n);$$

es decir,

$$(ku)_i = ku_i \;\; \textit{para todo} \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

Puede demostrarse que el conjunto $\mathbb{R}^n$ con las dos operaciones anteriores constituye un espacio vectorial de dimensión n, de manera que sus elementos, las n-adas, son vectores.
Si sobre $\mathbb{R}^n$ se define el producto interior

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n, \tag{4.28}$$

entonces este espacio de productos interiores se conoce como espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.4.2 (Variable aleatoria n-dimensional) *Considérese un experimento aleatorio cuyo espacio muestral sea S. Si* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *es un conjunto de n funciones todas con dominio S, es decir,* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *son variables aleatorias definidas en el espacio muestral S, entonces la función* $X : S \to \mathbb{R}^n$ *definida como:*

$$X(s) = (X_1(s), X_2(s), \ldots, X_n(s)), \quad \forall s \in S$$

se conoce como variable aleatoria n-dimensional. Si todas las variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *son discretas, entonces X es variable aleatoria n-dimensional discreta; Si las n variables aleatorias* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *son continuas, entonces X es una variable aleatoria n-dimensional continua; en cualquier otro caso, X será una variable n dimensional mixta. En este trabajo no se considerarán las variables aleatorias n-dimensionales mixtas.*

De acuerdo con la definición 4.4.2, el recorrido de una variable aleatoria n-dimensional X está contenido en $\mathbb{R}^n$. La figura 4.8 muestra una representación de este hecho, la cual no es más que una abstracción, ya que S y $\mathbb{R}^n$, en general, no son puntos del plano.

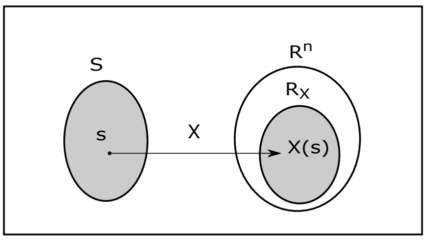


Figura 4.8: Variable aleatoria n-dimensional

Función de probabilidad conjunta

Considérese un experimento aleatorio cuyo espacio muestral sea S. Si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una variable n-dimensional discreta definida en el espacio muestral S y si la n-ada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se encuentra en el recorrido de X, se denota por $P(X = x)$ a la probabilidad de que la variables aleatoria n-dimensional X asuma asuma la n-ada x. De manera más explícita se denota $P(X = x)$ mediante $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$.

Definición 4.4.3 (Función de probabilidad conjunta) *Si X es una variable aleatoria n-dimensional discreta, es decir, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, se conoce como función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ o (función de probabilidad de la variable aleatoria n-dimensional X) a la función que asocia la probabilidad $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ a cada n-ada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que se encuentra en el recorrido de X (R_X). La función de densidad conjunta de X se denota por $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y debe satisfacer las siguientes propiedades:*

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0,\ \textit{para todo}\ x_i \in R_{X_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$
2. $\displaystyle\sum_{x_1 \in R_{X_1}} \sum_{x_2 \in R_{X_2}} \cdots \sum_{x_n \in RX_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1.$

En el capítulo 2 se discutió el concepto de eventos equivalentes (definición 4.4.4) cuando X era una variable unidimensional, de manera análoga se tiene:

Definición 4.4.4 (Eventos equivalentes) *Considérese un experimento aleatorio cuyo espacio muestral sea S. Sea X una variable aleatoria n-dimensional definida en S cuyo recorrido es R_X, si B es un evento contenido en R_X y el evento A que está contenido en S se define como*

$$A = \{s \in S : X(s) = x, \textit{para algún } x \in B\},$$

entonces A y B se conocen como eventos equivalentes y $P(B) = P(A)$.

$$P(A) = \sum_{x \in B} f(x) = \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B} f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (4.29)$$

Lo anterior se representa en la figura 4.9.

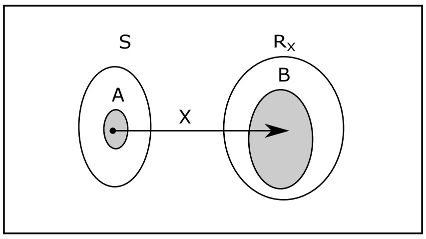


Figura 4.9: Eventos equivalentes

Función de densidad conjunta

Definición 4.4.5 (Función de densidad conjunta) *Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una variable aleatoria n-dimensional continua, se conoce como función de densidad conjunta de las variables $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ a la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si ésta satisface las siguientes condiciones,*

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$, *para todo* $x_i \in R_{X_i}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n = 1.$

Además, si R es un evento contenido en el recorrido de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, es decir, R es una región del espacio $\mathbb{R}^n$, entonces

$$P((x_1 \ldots x_n) \in R) = \int_R f(x)dx = \int_R f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n. \tag{4.30}$$

Probabilidades y densidades marginales

Definición 4.4.6 (Probabilidades y densidades marginales) *Considérese que $(X_1 \ldots, X_i, \ldots, X_n)$ es una variable aleatoria n-dimensional (discreta o continua), y que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la función de probabilidad o de densidad conjunta, según corresponda. Sea X_i la variable aleatoria que corresponde a la componente i-ésima de la variable aleatoria n-dimensional X, se define la función marginal $f_i(u)$ de la siguiente manera:*

Caso discreto:

$$f_i(u) = \sum_{x_1 \in R_{X_1}} \cdots \sum_{x_{i-1} \in R_{X_{i-1}}} \sum_{x_{i+1} \in R_{X_{i+1}}} \cdots \sum_{x_n \in R_{x_n}} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_{i+1} \ldots x_n), \tag{4.31}$$

donde $u \in R_{X_i}$. *La función* $f_i(u)$ *se conoce como función de probabilidad marginal de la variable aleatoria discreta* X_i.

Caso continuo:

$$f_i(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_{i+1} \ldots x_n) dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n, \tag{4.32}$$

La función $f_i(u)$ *se conoce como función de densidad marginal de la variable aleatoria continua* X_i.

Función de distribución conjunta y funciones de distribuciones marginales

Definición 4.4.7 (Función de distribución conjunta) *Considérese una variable aleatoria n-dimensional* $(X_1 \ldots, X_i, \ldots, X_n)$ *y supóngase que* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es la función de probabilidad o de densidad conjunta, según corresponda. Se define la función de distribución conjunta, denotada por* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *, de la siguiente manera:*

Caso discreto:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{u_1 \in R_{X_1}, \\ u_1 \leq x_1}} \cdots \sum_{\substack{u_n \in R_{X_n}, \\ u_n \leq x_n}} f(u_1, \ldots, u_n), \tag{4.33}$$

$-\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty.$

Caso continuo:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_n, \tag{4.34}$$

$-\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty.$

Definición 4.4.8 (Funciones de distribuciones marginales) *Considérese una variable aleatoria n-dimensional (discreta o continua)* $(X_1 \ldots, X_i, \ldots, X_n)$, *y supóngase que su función de probabilidad o de densidad conjunta, según corresponda, está determinada por* $f(x_1, \ldots, x_i \ldots, x_n)$. *Sea* X_i *la variable aleatoria que corresponde a la componente i-ésima de la variable aleatoria* *n-dimensional, se define la función, $F_i(t)$, de la siguiente manera:*

Caso discreto:

$$F_i(t) = \sum_{\substack{x_i \in R_{X_n}, \\ x_i \leq t}} f_i(x_i), \quad -\infty < t < \infty, \tag{4.35}$$

$F_i(t)$ se conoce como función de distribución marginal de la variable aleatoria discreta X_i.

Caso continuo:

$$F_i(t) = \int_{-\infty}^{t} f_i(x_i)dx_i, \quad -\infty < t < \infty, \tag{4.36}$$

$F_i(t)$ se conoce como función de distribución marginal de la variable aleatoria continua X_i.

4.5. Suma de variables aleatorias

La media

En esta sección se extienden los conceptos relacionados con la media, para distribuciones de 2 o más variables aleatorias.

Definición 4.5.1 (La media) *Para una variable aleatoria bidimensional se define la media como:*

Caso discreto:

Sea (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional discretas con función de probabilidad conjunta f(x,y), se define la media de la variable aleatoria X como:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{y \in R_Y} \sum_{x \in R_X} x f(x,y), \tag{4.37}$$

siempre y cuando la doble suma converja absolutamente.

De manera análoga, se define la media de la variable aleatoria Y como:

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{y \in R_Y} \sum_{x \in R_X} y f(x,y), \tag{4.38}$$

siempre y cuando la doble suma converja absolutamente.

Caso continuo:

Sea (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta f(x,y), se define la media de la variable aleatoria X como:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy, \tag{4.39}$$

siempre y cuando la integral doble converja absolutamente.
De manera análoga, se define la media de la variable aleatoria como:

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy, \tag{4.40}$$

siempre y cuando la integral doble converja absolutamente.

Una consecuencia inmediata de la definición 4.5.1r es:

Caso discreto:

$$E(X) = \sum_{x\in R_X} xf_1(x), \tag{4.41}$$

$$E(Y) = \sum_{y\in R_Y} yf_2(y). \tag{4.42}$$

Caso continuo:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx, \tag{4.43}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy \tag{4.44}$$

Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una variable aleatoria n-dimensional con función de probabilidad o densidad conjunta (según corresponda) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces el concepto de media se establece como:
Caso dicreto:

$$E(X_i) = \sum_{u \in R_{X_i}} u f_i(u), \quad i = 1, 2, \dots n. \tag{4.45}$$

La suma se realiza sobre todos los u en el recorrido de X_i.

Caso continuo:

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u f_i(u) du, \quad i = 1, 2, \dots n. \tag{4.46}$$

Teoremas sobre la media

Teorema 4.5.1 *Si X y Y son dos variables aleatorias, ambas continuas o ambas discretas, cuya función de probabilidad o de densidad conjunta, según corresponda al caso, es f(x,y), si además,* $Z = \phi(X, Y)$ *es una variable aleatoria definida en términos de las variables aleatorias X y Y, entonces,*

a) ***Caso discreto:***

$$E(Z) = E(\phi(X, Y)) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} \phi(x, y) f(x, y), \tag{4.47}$$

b) ***Caso continuo:***

$$E(Z) = E(\phi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) f(x, y) dx dy. \tag{4.48}$$

Demostración: La demostración queda fuera de los objetivos de este trabajo.

Para los teoremas que se enunciarán a continuación solo se demostrará el caso continuo.

Teorema 4.5.2 *Si C es una constante, entonces*

$$E(C) = C \tag{4.49}$$

Demostración: De acuerdo con el teorema 4.5.1, si $Z = \phi(X,Y) = C$, entonces

$$\begin{aligned}
E(C) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Cf(x,y)dxdy,\\
&= C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy,\\
&= C. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 4.5.3 *Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional y $Z = \phi(X,Y)$ es una variable aleatoria que es función de (X,Y) y C es una constante, entonces*

a) $E[C\phi(X,Y)] = CE[\phi(X,Y)]$,
b) $E(CX) = CE(X)$,
c) $E(CY) = CE(Y)$.

Demostración: a) Como $Z = C\phi(X,Y)$ sigue siendo una función de las variables aleatorias X y Y, entonces, de acuerdo con el teorema 4.5.1 se tiene

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C\phi(x,y)f(x,y)dxdy,\\
&= C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y)f(x,y)dxdy,\\
&= CE(\phi(X,Y)).
\end{aligned}$$

Para los incisos b) y c) solo se sustituye $\phi(X,Y) = X$ y $\phi(X,Y) = Y$. $\blacksquare$

Teorema 4.5.4 *Si (X,Y) es una variable bidimensional, entonces*

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \tag{4.50}$$

Demostración: De acuerdo con el teorema 4.5.1, si se hace $Z = X + Y$ se obtiene,

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E(X+Y)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)f(x,y)dxdy,\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy\\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy,\\
&= E(X) + E(Y). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Los teoremas anteriores tienen formas equivalentes para variables aleatorias n-dimensionales.

Teorema 4.5.5 *Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una variable aleatoria n-dimensional con función de probalidad o densidad conjunta $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (según corresponda), entonces*

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n). \tag{4.51}$$

Demostración: El teorema se demuestra por el método de inducción matemática. La demostración se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 4.5.1 *Considérese el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado equilibrado dos veces. Sean X y Y las variables aleatorias que determinan los números que resulta en el primer y el segundo lanzamiento, respectivamente. Determine el valor esperado del total en los dos lanzamientos.*

Solución: Para las variables aleatoria X y Y se tiene $E(X) = E(Y) = 7/2$. Defínase la variable aleatoria $Z = X + Y$. De manera que Z es la variable aleatoria que da el total en los lanzamientos. De acuerdo con el teorema 4.5.4,

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X+Y), \\ &= E(X) + E(Y), \\ &= 7. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.2 *Considérese el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado 2 veces. Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de 5 y Y la variable aleatoria que cuenta el número de 6 en el experimento, determine*

a) El valor esperado de la variable aleatoria X.

b) La esperanza de Y

c) La media de XY.

Solución: Tabla 4.4 del ejemplo 4.1.4 muestra los valores de las funciones de probabilidades marginales.

X/Y	0	1	2	$f_2(y)$
0	16/36	8/36	1/36	25/36
1	8/36	2/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
$f_1(x)$	25/36	10/36	1/36	1

a) De la tabla se obtiene,

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 25/36, \\ f_1(1) &= 10/36, \\ f_1(2) &= 1/36. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i f_1(x_i) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

b) De manera análoga,

$$\begin{aligned} f_2(0) &= 25/36, \\ f_2(1) &= 10/36, \\ f_2(2) &= 1/36. \end{aligned}$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j f_2(y_j) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

c) De acuerdo con el teorema 4.5.1

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} xyf(x,y), \\ &= f(1,1) = \frac{2}{36}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.3 *Si X y Y son dos variables aleatorias continuas cuya función de densidad conjunta está dada por,*

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le 1,\ y \le x, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar:

a) El valor esperado de X.

b) El valor esperado de Y.

c) El valor esperado de XY.

Solución: Las funciones de densidades marginales para X y Y se determinaron en el 4.3.2.

$$f_1(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) De acuerdo con la definición 4.5.1,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx, \\ &= 4\int_0^1 x^4 dx, \\ &= \frac{4}{5}\, x^5\Big|_0^1, \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

b) De manera análoga al inciso anterior,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) dy, \\ &= 4\int_0^1 y^2(1-y^2) dy, \\ &= 4\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5)\right|_0^1, \\ &= \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

c) De acuerdo con el teorema 4.5.1

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy,\\
&= 8\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} x^2y^2dydx,\\
&= 8\int_{0}^{1} x^2\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^x dx,\\
&= \frac{8}{3}\int_{0}^{1} x^5dx,\\
&= \frac{8}{18}\,x^6\big|_0^1,\\
&= \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.4 *Considérese que* (X, Y) *es una variable aleatoria bidimensional y que la función de densidad conjunta de las variables* X *y* Y *está determinada por la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}$$

Determinar:

a) El valor esperado de X.

b) El valor esperado de Y.

c) El valor esperado de XY.

Solución: Se calcularán las densidades marginales.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv,\\
&= 4\int_{0}^{1} xvdv,\\
&= 4x\,\frac{v^2}{2}\Big|_0^1,\\
&= 2x.
\end{aligned}$$

De manera más precisa,

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Procediendo de la misma manera se obtiene,

$$f_2(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) De acuerdo con la definición 4.5.1

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx, \\ &= 2\int_0^1 x^2 dx, \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) De manera análoga al inciso anterior,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) dy, \\ &= 2\int_0^1 y^2 dy, \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

c) De acuerdo con el teorema 4.5.1

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y) dxdy, \\ &= 4\int_0^1\int_0^1 x^2y^2 dydx, \\ &= 4\int_0^1 x^2 dx \int_0^1 y^2 dy, \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right), \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

La varianza y la covarianza

El concepto de varianza estudiado en el capítulo 2 para una variable real, y que resulta ser una medida de la dispersión de los valores que asume la variable aleatoria, respecto a la media, se extiende a dos o más variables aleatorias sin mayores dificultades, como se muestra a continuación.

Definición 4.5.2 (La varianza) *Si (X Y) es una variable aleatoria bidimensional (discreta o continua), y si* $Z = \phi(X, Y)$ *es una variable aleatoria que es función de las variables aleatorias X y Y, entonces se define la varianza de la variable aleatoria Z, denotada por var(Z) o* σ_Z^2*, mediante*

$$var(Z) = \sigma_Z^2 = E[(Z - \mu_Z)^2]. \tag{4.52}$$

Para el caso particular en que $Z = \phi(X, Y) = X$*, se obtiene la varianza de la variable aleatoria X*

$$var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2], \tag{4.53}$$

de manera análoga, si $Z = \phi(X, Y) = Y$*, entonces la varianza de la variable aleatoria* Y *es,*

$$var(Y) = \sigma_Y^2 = E[(Y - \mu_Y)^2]. \tag{4.54}$$

Al considerar los casos discretos y continuos se obtiene:

Caso discreto:

$$var(X) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (x - \mu_X)^2 f(x, y), \tag{4.55}$$

siempre y cuando la sumatoria converja absolutamente.

$$var(Y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (y - \mu_Y)^2 f(x, y). \tag{4.56}$$

siempre y cuando la sumatoria converja absolutamente.

Caso Continuo:

$$var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x, y) dx dy, \tag{4.57}$$

siempre y cuando la integral converja absolutamente.

$$var(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_Y)^2 f(x, y) dx dy, \tag{4.58}$$

siempre y cuando la integral converja absolutamente.

Definición 4.5.3 (La covarianza) *Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional, se define la covarianza de las variables aleatorias X y Y como:*

$$cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]. \tag{4.59}$$

De manera más precisa se tiene:

Caso discreto:

$$cov(X,Y) = \sum_{x\in R_X}\sum_{y\in R_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y), \tag{4.60}$$

siempre y cuando la suma converja absolutamente.

Caso Continuo:

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy, \tag{4.61}$$

siempre y cuando la integral converja absolutamente.

Teoremas sobre la varianza y la covarianza

Teorema 4.5.6 *Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional, y si $Z = \phi(X,Y)$ define una variable aleatoria que es función de las variables aleatorias X y Y, entonces*

$$var(Z) = E(Z^2) - \mu_Z^2, \tag{4.62}$$

Demostración: Mediante la definición 4.5.2 y el uso de los teoremas 4.5.4, 4.5.2 y 4.5.3, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
var(Z) &= E[(Z-\mu_Z)^2],\\
&= E[Z^2 - 2\mu_Z Z + \mu_Z^2],\\
&= E[Z^2] - 2\mu_Z E[Z] + E[\mu_Z^2],\\
&= E[Z^2] - 2\mu_Z^2 + \mu_Z^2,\\
&= E(Z^2) - \mu_Z^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

El teorema anterior implica que, si $Z = \phi(X,Y) = X$, entonces

$$var(X) = E(X^2) - \mu_X^2, \tag{4.63}$$

de manera análoga, si $Z = \phi(X,Y) = Y$ se obtiene

$$var(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2. \tag{4.64}$$

Teorema 4.5.7 *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, y si* $Z = \phi(X,Y)$ *define una variable aleatoria que es función de las variables aleatorias X y Y; si además, C es una constante, entonces*

a) $var(CZ) = C^2 var(Z)$

b) $var(Z + C) = var(Z)$

Demostración: De acuerdo con la definición 4.5.2 y el teorema 4.5.3, se tiene:

$$\begin{aligned} a) \quad var[CZ] &= E[(CZ - E(CZ))^2], \\ &= E[C^2(Z - \mu_Z)^2], \\ &= C^2 E[(Z - \mu_Z)^2], \\ &= C^2 var(Z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad var[Z + C] &= E[((Z + C) - E(Z + C))^2], \\ &= E[((Z + C) - (\mu_Z + C))^2], \\ &= E[(Z - \mu_Z)^2], \\ &= var(Z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4.5.8 *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, entonces*

$$cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y \tag{4.65}$$

Demostración: Mediante la definición 4.5.3 y el uso de los teoremas 4.5.4, 4.5.2 y 4.5.3, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)], \\ &= E[XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y], \\ &= E[XY] - \mu_X E[Y] - \mu_Y E[X] + E[\mu_X \mu_Y], \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_Y \mu_X + \mu_X \mu_Y, \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4.5.9 *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, entonces*

$$var(X \pm Y) = var(X) + var(Y) \pm 2cov(X, Y) \qquad (4.66)$$

Demostración: Mediante el uso de la definición 4.5.2, y el teorema 4.5.6, donde $Z = X + Y$, de manera que, $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$, se tiene:

$$\begin{aligned}
var(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - (\mu_X + \mu_Y)^2, \\
&= E[X^2 + 2XY + Y^2] - \mu_Y^2 - 2\mu_X\mu_Y + \mu_Y^2], \\
&= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] \\
&\quad -\mu_X^2 - 2\mu_X\mu_Y - \mu_Y^2], \\
&= [E(X^2) - \mu_X^2] + [E(Y^2) - \mu_Y^2] \\
&\quad +2[E(XY) - \mu_X\mu_Y], \\
&= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Se deja al lector la demostración para el caso de la resta de X y Y.

Ejemplo 4.5.5 *Considérese la variable aleatoria bidimensiona discreta que se definió en el ejemplo 4.5.2.*

a) Las varianzas de las variables aleatorias X y Y.

b) La covarianza de X y Y.

c) La varianza de X+Y.

Solución:

a) De acuerdo con el teorema 4.5.6 se requieren las esperanzas $E(X^2)$ y $E(X)$ para determinar la varianza de X. Para calcular la esperanza de X^2 se recurre a la tabla siguiente:

X/Y	0	1	2	$f_2(y)$
0	16/36	8/36	1/36	25/36
1	8/36	2/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
$f_1(x)$	25/36	10/36	1/36	1

De acuerdo al teorema 4.5.1

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 f_1(x_i), \\ &= \frac{10}{36} + 4(1/36), \\ &= \frac{14}{36}. \end{aligned}$$

Se sabe que $E(X) = 12/36$, de manera que,

$$var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{5}{18}.$$

De manera análoga se procede con la variable aleatoria Y.

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{i=1}^{3} y_i^2 f_2(y_i), \\ &= \frac{10}{36} + 4(1/36), \\ &= \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

Se sabe que $E(Y) = 12/36$, de manera que,

$$var(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{5}{18}.$$

b) La covarianza se determina de acuerdo con el teorema 4.5.8

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{18}.$$

c) La varianza de la suma se determina de acuerdo con el teorema 4.5.9.

$$var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X, Y) = \frac{4}{9}.$$

Ejemplo 4.5.6 *Considérese la variable aleatoria bidimensional del ejemplo 4.5.3. Calcular:*

a) Las varianzas de las variables aleatorias X y Y.

b) La covarianza de X y Y.

c) La varianza de $X+Y$.

Solución: Las funciones de densidades marginales para X y Y se determinaron en el ejemplo 4.3.2.

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{cases} 4x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
f_2(y) &= \begin{cases} 4y(1-y^2), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Se calcularán las esperanzas de X^2 y de Y^2.

a) De acuerdo con el teorema 4.5.1,

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx, \\
&= 4\int_0^1 x^5 dx, \\
&= \frac{4}{6}\, x^6\Big|_0^1, \\
&= \frac{4}{6}
\end{aligned}
$$

De manera análoga,

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy, \\
&= 4\int_0^1 y^3(1-y^2)dy, \\
&= 4\,(\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{6}y^6)\Big|_0^1, \\
&= \frac{2}{6}.
\end{aligned}
$$

De acuerdo con el teorema 4.5.6

$$
\begin{aligned}
var(X) &= E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{2}{75}, \\
var(Y) &= E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{66}{255}.
\end{aligned}
$$

b) La covarianza se determina de acuerdo con en teorema 4.5.8

$$
cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{225}.
$$

c) La variaza de la suma se determina de acuerdo con el teorema 4.5.9.

$$var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X,Y) = \frac{80}{225}.$$

Ejemplo 4.5.7 *Para la variable aleatoria bidimensional continua que se discutió en el ejemplo 4.5.4, determine:*

a) Las varianzas de las variables aleatorias X y Y.

b) La covarianza de X y Y.

c) La varianza de $X+Y$.

Solución:
a)

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx, \\ &= 2\int_0^1 x^2 dx, \\ &= \frac{2}{3}\, x^3\Big|_0^1, \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy, \\ &= 2\int_0^1 y^2 dy, \\ &= \frac{2}{3}\, y^3\Big|_0^1, \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorena 4.5.6

$$\begin{aligned} var(X) &= E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{2}{9}, \\ var(Y) &= E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

b) La covarianza se determina de acuerdo con en teorema 4.5.8

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y), \\ &= \frac{4}{9} - (2/3)(2/3), \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) La varianza de la suma se determina de acuerdo con el teorema 4.5.9.

$$var(X+Y) = var(X) + var(Y) = \frac{4}{9}.$$

4.6. Independencia de dos o más variables aleatorias

En esta sección se estudiarán conceptos relacionados con la independencia de eventos, estudiados en el capítulo 1. Para comenzar recuérdese que para dos eventos A y B, la probabilidad condicional del evento A dado que B ha ocurrido se definió como,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{si } P(B) > 0.$$

Por otro lado, se sabe que para dos variables aleatorias discretas X y Y, $X = x$ y $Y = y$, definen eventos en el espacio muestral S. De manera que si se identifican A y B con los eventos descritos en términos de las variables aleatorias X y Y, la ecuación anterior se puede expresar mediante,

$$\begin{aligned} P(X = x|Y = y) &= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \\ &= \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \qquad \text{si } f_2(y) > 0. \end{aligned}$$

Esta probabilidad se define de manera precisa a continuación y se extiende el concepto para variables aleatorias continuas.

Definición 4.6.1 (Funciones de probabilidades condicionales) *Si (X,Y) son dos variables aleatorias discretas, cuya función de probabilidad conjunta es f(x,y) y con las funciones de probabilidad marginales $f_1(x)$ y $f_1(y)$ para las variables X y Y, respectivamente:*
Se define la función de probabilidad condicional de la variable aleatoria X, dado que Y=y mediante,

$$f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \quad si\ f_2(y) \neq 0. \tag{4.67}$$

De manera análoga se define la función de probabilidad condicional de la variable aleatoria Y, dado que X=x mediante,

$$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \quad si\ f_1(x) \neq 0. \tag{4.68}$$

Definición 4.6.2 (Funciones de densidades condicionales) *Sean (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua, cuya función de densidad conjunta es f(x,y) y con las funciones de densidad marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$ para las variables X y Y, respectivamente:*
Se define la función de densidad condicional de la variable aleatoria X, dado que Y=y mediante,

$$f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \quad si\ f_2(y) \neq 0. \tag{4.69}$$

De manera análoga se define la función de densidad condicional de la variable aleatoria Y, dado que X=x mediante,

$$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \quad si\ f_1(x) \neq 0. \tag{4.70}$$

Si X y Y son dos variables aleatorias continuas, y si A y B son dos eventos tales que, A se encuentra en el recorrido de X y B se encuentra en el recorrido de Y, entonces es posible hallar la probabilidad de que el evento A ocurra dado que un evento particular $Y = y$ ha ocurrido, para lo anterior simplemente se sumará $g(x|y)$ sobre todos los $x \in A$; es decir,

$$P(A|Y = y) = \sum_{x \in R_X} f_1(x|y). \tag{4.71}$$

De manera análoga se determina la probabilidad de que el evento B ocurra dado que un evento particular $X = x$ ha ocurrido, para lo anterior simplemente se sumará $h(x|y)$ sobre todos los $y \in B$; es decir,

$$P(B|Y = y) = \sum_{y \in R_Y} f_2(y|x). \tag{4.72}$$

Si X y Y son dos variables aleatorias continuas, y si A y B son dos eventos tales que, $A = \{a < X < b\}$ se encuentra en el recorrido de X y $B = \{c < Y < d\}$ se encuentra en el recorrido de Y, entonces es posible hallar la probabilidad de que el evento A ocurra dado que un evento particular $Y = y$ ha ocurrido, para lo anterior se integrará $g(x|y)$ sobre el intervalo dado; es decir,

$$P(A|Y = y) = P(a < X < b|Y = y) = \int_a^b f_1(x|y)dx. \qquad (4.73)$$

De manera análoga se determina la probabilidad de que el evento B ocurra dado que un evento particular $X = x$ ha ocurrido,

$$P(B|Y = y) = P(c < Y < d|X = x) = \int_c^d f_2(y|x)dy. \qquad (4.74)$$

Ejemplo 4.6.1 *Una compañía dulcera distribuye cajas de chocolates con una mezcla de tres tipos de chocolate: cremas, chiclosos y envinados. Suponga que el peso de cada caja es de un kilogramo, pero los pesos individuales de las cremas, de los chiclosos y de los envinados varían de una caja a otra. Para una caja seleccionada aleatoriamente X y Y representan el peso de las cremas y de los chiclosos, respectivamente, y suponga que la función de densidad conjunta de estas variables es,*

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & si\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ caso. \end{cases}$$

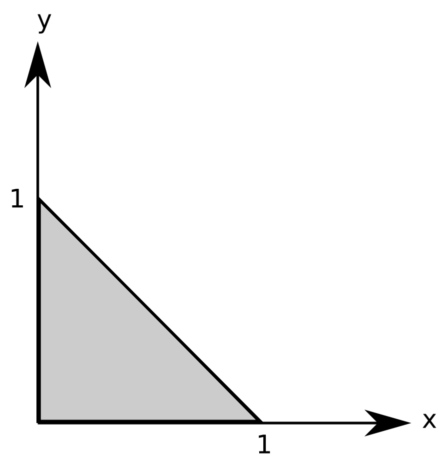


Figura 4.10: Región donde $f(x,y) \neq 0$

a) Encuentre la densidad marginal para el peso de los chiclosos.

b) Encuentre la probabilidad de que el peso de los chocolates de cremas en una caja sea menos de 1/8 de kilogramo, si se sabe que las chiclosos constituyen 3/4 del peso.

Solución:

a) En la figura 4.10 se muestra la región donde la función de densidad conjunta es diferente de cero.
A continuación se calcula la marginal requerida.
De acuerdo con la definición 4.2.2,

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)du.$$

i) Si $0 \leq y \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} f_2(y) &= 24\int_0^{1-y} uydu, && (4.75)\\ &= 24\int_0^{1-y} uydu, && (4.76)\\ &= 12y(1-y)^2. && (4.77) \end{aligned}$$

ii) En cualquier otra región $f(x, y) = 0$ y por lo tanto, $f_2(y) = 0$.
Por lo anterior,

$$f_2(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0 \leq y \leq 1,\\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

b) De acuerdo con la ecuación 4.74,

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1/8|Y = y) &= \int_a^b f_1(x|y)dx,\\ &= \int_0^{1/8} f_1(x|3/4)dx,\\ &= 32\int_0^{1/8} xdx,\\ &= 16(1/8)^2,\\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Variables aleatorias independientes

El el capítulo 1 se estudió el concepto de eventos independientes. Recuérdese que si A y B son dos eventos, éstos se consideran independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de que el otro ocurra. Esta forma intuitiva permitió establecer la independencia estadística de los eventos A y B como:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B|A) = P(A).$$

Las ecuaciones anteriores generan dificultades teóricas cuando se trabaja con un número relativamente grande de variables aleatorias. Sin embargo, las dos condiciones anteriores se satisfacen cuando se requiere que,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

y permite establecer de manera conveniente la independencia estadística de dos o más variables aleatorias.

Definición 4.6.3 (Variables independientes) *Si X y Y son dos variables aleatorias, ambas continuas o ambas discretas, y f(x,y) es su función de probabilidad (o densidad) conjunta, según corresponda. Se dice que X y Y son variables aleatorias estadísticamente independientes o simplemente independientes, si y solo si,*

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y), \tag{4.78}$$

para todo (x,y) en el rango de (X,Y). Donde $f_1(x)$ y $f_2(y)$ son las probabilidades(o densidades) marginales de X y Y, respectivamente.

El concepto anterior de independencia se generaliza fácilmente para variables aleatorias n-dimensionales. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ discreta (o continua) define una variable aleatoria n dimensional, se dice que las variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ son independientes si y solo si la función de probabilidad conjunta (o de densidad conjunta) puede expresarse como el producto de las probabilidades (o densidades) marginales de las variables aleatorias en todo el recorrido de la variable n-dimensional; es decir, si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n) \tag{4.79}$$

De manera equivalente, si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ define una variable aleatoria n dimensional, entonces se dice que las variables aleatoria $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ son independientes si y solo si la función de distribución conjunta puede expresarse como el producto de las distribuciones marginales de las variables aleatorias en todo el recorrido de la variable n-dimensional; es decir, si

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\ldots F_n(x_n). \tag{4.80}$$

Ejemplo 4.6.2 *Las variables aleatorias definidas en los ejemplos 4.5.5 y 4.5.6 no son variables independientes. En el primer caso la función de probabilidad conjunta no corresponde al producto de las funciones de probabilidades marginales.*

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \frac{16}{32}, \\ f_1(0)f_2(0) &= (25/36)(25/36), \\ f(0,0) &\neq f_1(0)f_2(0). \end{aligned}$$

En el segundo caso la función de densidad conjunta tampoco corresponde al producto de las densidades marginales.

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = 0, & \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\} \\ f_1(x)f_2(y) = 16x^3y(1-y^2), & \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\} \\ f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y), & \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}. \end{array}$$

Ejemplo 4.6.3 *Determine la función de distribución conjunta para las variables aleatorias X y Y definidas en el ejemplo 4.5.7*

Solución: Las variables aleatorias X y Y son independientes, dado que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \begin{cases} 4xy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ f_1(x) &= \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ f(x,y) &= f_1(x)f_2(y). \end{aligned}$$

Algunos resultados obtenidos anteriormente se simplifican si las variables aleatorias X y Y son independientes, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 4.6.1 *Si (X, Y) es una variable bidimensional y si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces*

$$a) \quad E(XY) = E(X)E(Y). \tag{4.81}$$

$$b) \quad cov(X,Y) = 0. \tag{4.82}$$

$$c) \quad var(X+Y) = var(X) + var(Y). \tag{4.83}$$

Demostración:
a) De acuerdo con el teorema 4.5.1,

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy. \tag{4.84}$$

Dado que las variables aleatorias X y Y son independientes, entonces

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \tag{4.85}$$

Sustituyendo la ecuación 4.85 en la 4.84,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y) dx dy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) dy, \\ &= E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Los incisos b y c se obtienen como consecuencia de este resultado y de los teoremas 4.5.8 y 4.5.9 . $\blacksquare$El inciso c representa una propiedad muy importante para la estadística, de manera que es necesario enunciar la generalización.

Teorema 4.6.2 *Si* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *define una variable aleatoria n dimensional, y si las variables aleatorias* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *son independientes, entonces*

$$var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = var(X_1) + var(X_2) + \ldots var(X_n). \tag{4.86}$$

Demostración: El teorema se demuestra por el método de inducción matemática. La demostración se deja al lector.

El coeficiente de correlación

Si (X,Y) es un variable aleatoria bidimensional, surge la necesidad de indagar qué tipo de relación funcional existe entre ellas. El problema no es simple de abordar; sin embargo, al menos parcialmente, este problema puede abordarse a partir del coeficiente de correlación, el cuál se presenta a continuación.

Definición 4.6.4 (El coeficiente correlación) *Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional, se define el coeficiente de correlación de las variables X y Y como:*

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{4.87}$$

Si $\rho_{XY} = 0$ se dice que las variables son no correlacionadas.

Obsérvese que si X y Y son variables aleatorias independientes entonces $\sigma_{XY} = 0$, y por lo tanto, $\rho = 0$. Por otra lado, si $X = Y$, entonces $\rho = 1$. Para tener una interpretación adecuada del coeficiente de correlación, es necesario demostrar algunos resultados.

Teorema 4.6.3 *Si X y Y son dos variables aleatorias independientes, entonces $\rho_{XY} = 0$.*

Demostración: Dado que las variables X y Y son independientes, entonces $cov(X,Y) = \sigma_{XY} = 0$, y por lo tanto, $\rho_{XY} = 0$. $\blacksquare$ El teorema 4.6.3 significa que si las variables aleatorias X y Y son independientes, entonces las variables aleatorias son no correlacionadas. El recíproco de este teorema es falso; es decir que si X y Y son variables no correlacionadas, no se deduce de este hecho que sean independientes.

Ejemplo 4.6.4 *Considérese el experimento que consiste en lanzar un par de dados equilibrados. Sean X y Y los resultados del primer y segundo dado, respectivamente. Si las variables U y V se definen como se muestra a continuación,*

$$\begin{aligned} U &= X + Y, \\ V &= X - Y. \end{aligned}$$

a) determine el factor de correlación de U y V,

b) determine si U y V son independientes.

Solución: a) Se calculará la covarianza de U y V.

$$\begin{aligned} cov(U,V) &= E(UV) - E(U)E(V), \\ &= E((X+Y)(X-Y)) - E(X+Y)E(X-Y), \\ &= E(X^2 - Y^2)) - E(X+Y)E(X-Y), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dado que la covarianza es cero, entonces el factor de correlación es cero y, por lo tanto, las variables U y V son no correlacionadas.
b) Los recorridos de las variables U y V son:

$$\begin{aligned} R_U &= \{2, 3, \ldots, 12\} \\ R_V &= \{-5, \ldots, 0, \ldots, 5\} \end{aligned}$$

Considérese, por ejemplo, que $U = 2$ y $V = -5$.

$$P(U = 2)P(V = -5) = \left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{1}{36}\right).$$

Por otro lado, dado que $x + y = 2$ y $x - y = -5$ es un sistema de ecuaciones lineales inconsistente, (corresponde al evento imposible) entonces

$$P(U = 2, V = -5) = 0,$$

en consecuencia,

$$P(U = 2, V = -5) \neq P(U = 2)P(V = -5).$$

Lo anterior significa que U y V no son variables aleatorias independientes.

Teorema 4.6.4 *Si X y Y son dos variables aleatorias cualesquiera, entonces* $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

Demostración: Sean $U = X - \mu_X$ y $V = Y - \mu_Y$, defínase el polinomio en t como:

$$p(t) = E[(Ut + V)^2]. \tag{4.88}$$

Desarrollando el binomio al cuadrado,

$$\begin{aligned} p(t) &= E[U^2t^2 + 2UVt + V^2], \\ &= E[U^2]t + 2E[UV]t + E[V^2], \\ &= \sigma_X^2 t^2 + 2\sigma_{XY} t + \sigma_Y^2. \end{aligned} \tag{4.89}$$

La ecuación 4.89 puede expresarse como:

$$p(t) = At^2 + Bt + C. \tag{4.90}$$

donde $A = \sigma_X^2$, $B = 2\sigma_{XY}$ y $C = \sigma_Y^2$.
Las raíces del polinomio anterior están determinadas por

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{4.91}$$

Dado que $p(t) \geq 0$, de acuerdo con la ecuación 4.88, entonces sus raíces son complejas o a lo más tiene una sola raíz real, de manera que el discriminante, $B^2 - 4AC$, debe ser menor o igual que cero; por lo tanto,

$$B^2 - 4AC = 4\sigma_{XY}^2 - 4\sigma_X^2\sigma_Y^2 \leq 0.$$

Realizando los cálculos correspondientes se obtiene,

$$\begin{aligned} \sigma_{XY}^2 &\leq \sigma_X^2\sigma_Y^2, \\ \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} &\leq 1, \\ \rho_{XY}^2 &\leq 1, \\ -1 \leq \rho_{XY} &\leq 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4.6.5 *Si X y Y son dos variables aleatorias tales que $Y = AX+B$, entonces $\rho_{XY}^2 = 1$. Además, $\rho_{XY} = 1$ si $A > 0$ y $\rho_{XY} = -1$ si $A < 0$.*

Demostración: La media, la varianza y la desviación estándar de Y son:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(AX + B) = AE(X) + B, \\ var(Y) &= var(AX + B) = A^2 var(X), \\ \sigma_Y &= \sqrt{A^2 var(X)} = |A|\sigma_X. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= E(XY) - E(X)E(Y), \\ &= E[X(AX + B)] - E(X)E[(AX + B)], \\ &= AE[X^2] + BE[X] - AE^2[X] - BE[X], \\ &= Avar(X), \end{aligned}$$

por lo anterior, el coeficiente de correlación es:

$$\rho_{XY} = \frac{A\sigma_X^2}{\sigma_X(|A|\sigma_X)} = \frac{A}{|A|}. \quad \blacksquare$$

La pregunta que se debe plantear ahora es si el recíproco del teorema anterior es verdadero. Se abordará este problema de una manera informal. Considérese que $\rho_{XY} = 1$, de manera que el polinomio $p(t)$ descrito por la ecuación 4.88 tiene una raíz única. Sea t_0 la raíz del polinomio, entonces $p(t_0) = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} E[(Ut_0 + V)^2] &= 0, \\ E[Ut_0 + V] &= t_0E(U) + E(V) = 0, \\ var[Ut_0 + V] &= 0. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema de Chebyshev, $P(|X-\mu| \leqslant \epsilon) \geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$. Aplicado a la variable Ut_0+V se concluye que,

$$P(|Ut_0+V| \leq \epsilon) = 1.$$

La ecuación anterior es válida para todo $\epsilon > 0$; por lo tanto, $Ut_0+V=0$,

$$Ut_0+V = t_0(X-\mu_X)+(Y-\mu_Y) = 0.$$

Realizando el álgebra se obtiene,

$$Y = -t_0X+\mu_Y-t_0\mu_X$$

La última ecuación es de la forma $Y = AX+B$.
En conclusión si $\rho_{XY} = 1$ entonces, con probabilidad 1, $Y = AX+B$.

Propiedades reproductivas

Supóngase que X y Y son dos variables aleatorias con la misma distribución de probabilidad, si la variable aleatoria Z=X+Y tiene la misma distribución que X y Y, entonces se dice que la distribución en sí misma tiene propiedades reproductivas. Para el estudio de las propiedad reproductiva es de gran utilidad la función generadora de momentos.

Teorema 4.6.6 *Supóngase que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes cuyas funciones generadoras de momentos son $M_{X_1}, M_{X_2}, \ldots, M_{X_n}$, respectivamente. Entonces la función generadora de momentos de la variable aleatoria $Y = X_1+X_2+\ldots+X_n$ está determinada por,*

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t). \tag{4.92}$$

Demostración: De acuerdo con la definición 2.4.3,

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= E[e^{tZ}],\\
&= E[e^{t(X_1+X_2+\ldots+X_n)}],\\
&= E[e^{(tX_1+tX_2+\ldots+tX_n)}],\\
&= E[e^{tX_1}e^{tX_2}\ldots e^{tX_n}], \text{dado que las variables son independientes,}\\
&= E[e^{tX_1}]E[e^{tX_2}]\ldots E[e^{tX_n}],\\
&= M_Y(t) = (M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 4.6.7 (Propiedad reproductiva de la normal) *Supóngase que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con distribuciones*

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2), \ldots, N(\mu_n, \sigma_n^2),$$

respectivamente. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes, entonces la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_2X_n$ tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde

$$\mu = \sum_i^n a_i\mu_i, \tag{4.93}$$

$$\sigma^2 = \sum_i^n a_i^2\sigma_i^2. \tag{4.94}$$

Demostración: La demostración se basa en los teoremas 2.4.3 y 2.4.4.
De acuerdo con la ecuación 3.64, las funciones generadoras de momentos de las variables aleatorias X_i están determinadas por:

$$M_{X_i} = e^{\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2} \quad i = 1, 2 \ldots, n. \tag{4.95}$$

Como las variables aleatorias X_i son independientes, entonces por el teorema 4.6.6

$$\begin{aligned} M_Y &= M_{X_1}M_{X_2}\ldots M_{X_n}, \\ &= \left(e^{\mu_1(a_1t)+\frac{1}{2}\sigma_1^2(a_1t)^2}\right)\left(e^{\mu_2(a_2t)+\frac{1}{2}\sigma_2^2(a_2t)^2}\right)\ldots\left(e^{\mu_n(a_nt)+\frac{1}{2}\sigma_n^2(a_nt)^2}\right), \\ &= e^{[(a_1\mu_1+a_2\mu_2+\ldots+a_n\mu_n)t+\frac{1}{2}(a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+\ldots+a_n^2\sigma_n^2)t^2]} \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema 2.4.3 la variable aleatoria Y tiene distribución normal con media y varianza determinadas por:

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_i^n a_i\mu_i, \\ \sigma^2 &= \sum_i^n a_i^2\sigma_i^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 4.6.1 *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales idénticas con media μ y varianza σ^2, entonces la variable aleatoria $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tiene distribución normal con media $N(\mu, \sigma^2)$, donde*

$$\mu = \sum_i^n \mu_i, \tag{4.96}$$

$$\sigma^2 = \sum_i^n \sigma_i^2. \tag{4.97}$$

Demostración: Se obtiene tomando todas las constantes $a_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. ∎

Ejemplo 4.6.5 *Tres resistores se conectan en serie en un circuito. La resistencia eléctrica R_i de cada resistor tiene distribución normal con $E(R_i) = 100\,\Omega$ y $var(R_i) = 5\,\Omega^2$. Calcule la probabilidad de que la resistencia total del circuito sobre pase los $303\,\Omega$*

Solución: La resistencia total de un circuito en serie es la suma de las resistencias, de manera que si se define $R = R_1 + R_2 + R_3$. Esta variable aleatoria representa la resistencia total del cicuito. La variable aleatoria R tiene disctribución normal con media $\mu = 3E(R_i) = 300\,\Omega$ y varianza $\sigma = 3var(R_i) = 15\,\Omega^2$. Se requiere determinar $P(R > 305)$.

$$\begin{aligned} P(X > 305) &= 1 - P(X \leq 305), \\ &= 1 - P(Z \leq z_1), \\ &= 1 - F(z_1), \end{aligned}$$

donde

$$z_1 = \frac{300 - 305}{3.87} = -1.29.$$

$$\begin{aligned} P(X > 49) &= 1 - F(-1.29), \\ &= 1 - 0.0985, \\ &= 0.9015. \end{aligned}$$

Teorema 4.6.8 (Propiedad reproductiva de la χ^2_n) *Supóngase que X_1, $X_2 \ldots X_k$ son variables aleatorias independientes con distribuciones $\chi^2_{n_1}, \chi^2_{n_2}$, $\chi^2_{n_k}$, respectivamente, entonces la variable aleatoria $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tiene distribución χ^2_n, donde*

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k. \tag{4.98}$$

Demostración: La demostración es análoga al caso anterior, considerando que la función generadora de momentos está determinada por la ecuación 3.61.

$$M_{X_i(t)} = \frac{1}{(1 - 2t)^{n_i/2}}, \quad i = 1, 2, \ldots k.$$

Los detalles se dejan para el lector. ∎

Teorema 4.6.9 *Si X es una variable con distribución normal estándar, entonces $Z = X^2$ tiene distribución χ_n^2.*

Demostración: Se sabe que X tiene distribución $N(0,1)$, es decir, la función de densidad está determinada por,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{4.99}$$

La función de densidad de $Z = X^2$ puede calcularse mediante el teorema 2.1.3

$$g(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}(f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})). \tag{4.100}$$

De las ecuaciones 4.99 y 4.99 se obtiene,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2\sqrt{z}} (e^{-\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}) \right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\frac{z}{2}} \right). \end{aligned}$$

La función de densidad determinada por $g(z)$ corresponde a una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad, χ_1^2, como puede verificarse en la ecuación 3.58.

Teorema 4.6.10 *Supóngase que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, todas con distribución $N(0,1)$. Entonces la variable aleatoria $Z = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ tiene distribución χ_n^2.*

Demostración: Se sigue de los teoremas 4.6.9 y 4.6.8. Dado que las X_i tienen distribución normal estándar, entonces todas las X_i^2 tendrán distribución chi-cuadrado con un grado de libertad. La suma de las X_i^2 tendrá distribución chi-cuadrado con n grados de libertad. ∎

Ley débil de los grandes números

Teorema 4.6.11 (Ley débil de los grandes números) *Supóngase que X_1, $X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes (discretas o continuas) idénticamente distribuidas, todas con media μ y varianza σ^2. Si*

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0. \tag{4.101}$$

Demostración: De acuerdo con los teoremas 4.5.5 y 4.86

$$\begin{aligned}
E(\overline{X}) &= E\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right),\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i),\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu,\\
&= \mu.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
var(\overline{X}) &= var\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right),\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i),\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2,\\
&= \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Chebyshev (teorema 3.3.1) a la variable aleatoria $\overline{X}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\overline{X}-E(\overline{X})\right| \geq \epsilon\right) &\leq \frac{var(\overline{X})}{\epsilon^2},\\
P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| \geq \epsilon\right) &\leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2},\\
\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| \geq \epsilon\right) &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

La variable aleatoria $\overline{X}$ es la media aritmética de las variables $X_1, X_2, \ldots,$ X_n. Este teorema establece que: la probabilidad de que la media aritmética difiera de su media una cantidad mayor que ϵ tiende a cero a medida que $n \to \infty$. En el capítulo 5 se interpretará a la variable aleatoria $\overline{X}$ como la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño n tomado de una población $f(x)$ con media poblacional μ y varianza poblacional σ^2.

Capítulo 5

Estadística parámetrica usando estimación y prueba de hipótesis

La estadística se divide en dos ramas: La estadística descriptiva y la estadística inferencial. La estadística descriptiva se ocupa de recolecctar, clasificar, organizar y presentar los datos de un experimento. Por otro lado, la estadística inferencial se ocupa del estudio de los métodos y procedimientos inductivos (que van de lo particular a lo general) para determinar las propiedades de una *población estadística*. En este capítulo se estudiarán los conceptos y las técnicas de la estadística inferencial. Para comenzar esta unidad se presentará una breve introducción de la teoría del muestreo.

Introducción a la teoría del muestreo

Población y muestra

El el capítulo 1 se definió *experimento* como cualquier proceso que genere un conjunto de datos. El conjunto de todos los datos se conoce como población. Si la población consta de un número finito de datos, el total de éstos se conoce como tamaño de la población. Por otro lado, se conoce como muestra a cualquier subconjunto finito de datos tomados de la población. El número de datos que componen la muestra se conoce como tamaño de la muestra.

Parámetros de la población e inferencia estadística

En general, los datos que constituyen la población son mediciones u observaciones de una variable aleatoria X cuya función de probabilidad o (de

densidad) $f(x)$ puede ser conocida o no. Por lo anterior, la población se denomina en términos de la distribución correspondiente a $f(x)$, por ejemplo, si $f(x) = b(x; n, p)$ (ver la definición 3.1.3) se dirá que la población tiene distribución binomial. La función $f(x)$ depende de ciertos parámetros, éstos se conocen como parámetros poblacionales.
En la práctica generar los datos implica diseñar los experimentos de tal manera que puedan observarse las variables que son de interés para el observador. La obtención de todos los datos de un experimento puede llegar a ser un trabajo impráctico o imposible. En consecuencia, al realizar estudios estadísticos, se opta por determinar *una muestra representativa* de la población y, a partir de los resultados encontrados en ésta, se busca inferir conclusiones sobre las propiedades de la población. Este proceso se conoce como **inferencia estadística.**

Muestreo aleatorio y distribuciones muestrales

El procedimientro mediante el cual se obtiene una muestra de la población se conoce como muestreo. Se dirá que la muestra es sesgada si el muestreo sobrestima o subestima una característica de la población, lo cual ocurre con mucha frecuencia cuando se descarta a un segmento de la población. Para eliminar el sesgo en un estudio estadístico se requiere que la muestra sea representativa de la población y esto solo puede lograrse si todos los elementos de la población tienen la misma oportunidad de formar parte de la muestra. El proceso de muestreo puede englobarse en dos casos muy generales, los cuales se discuten a continuación.

Muestreo con y sin reemplazo

1. El primer caso se discutió en el capítulo 1. La población se compone de un conjunto de N objetos, los cuales poseen la característica X. Por ejemplo, la población puede formarse de todos los artículos de un lote, donde cada artículo puede caracterizarse como defectuoso $X = 0$ o no defectuoso $X = 1$. Los objetos que componen la población pueden numerarse como $1, 2, \ldots, N$. La obtención de una muestra de tamaño n puede realizarse de dos maneras: con reemplazo y sin reemplazo. En ambos casos se supone que los objetos no pueden ser observados (o medidos) sino hasta después de haber sido extraídos de la población. Una muestra de tamaño n, extraída de la población, es una n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de valores de la característica medible X. Si se definen n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ donde la variable X_i toma el valor x_i que se obtiene en la i-ésima medición con $i = 1, 2, \ldots n$,

entonces la n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una medición de la variable n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. La distribución de probabilidad de la variable n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dependerá de si el muestreo se realiza con reemplazo o sin reemplazo.
a)Si el muestreo se realiza con reemplazo, es decir, el objeto se devuelve a la urna (o al lote) antes de realizar la siguiente extracción, entonces las condiciones bajo las cuales se realiza la i-ésima extración $(1 < i \leq n)$ son idénticas a la que se tenían al realizar la primera extracción y, por lo tanto, las variables aleatorias X_i para $i = 1, 2, \ldots n$ son independientes y tienen la misma distribución que la variable aleatoria X, luego

$$\begin{aligned} P(X_1 = j_1, X_2 = j_2, \ldots X_n = j_n) &= f(j_1)f(j_2)\ldots f(j_n), \\ &\quad \text{donde } j_i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

b)Si el muestreo se realiza sin reemplazo, entonces las condiciones bajo las cuales se realiza la i-ésima extración $(1 < i \leq n)$ no son idénticas a las que se tenían al realizar la primera extracción y, además, las variables aleatorias X_i no son independientes. La función de probabilidad conjunta puede expresarse como:

$$\begin{aligned} P(X_1 = j_1, X_2 = j_2, \ldots X_n = j_n) &= \frac{1}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}, \\ &\quad \text{donde } j_i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

2. La segunda situación se presenta en las ciencias físicas y la ingeniería. En este caso la población no consiste de un conjunto de objetos, sino de un conjunto infinito de posibles resultados para una cantidad medible X con función de densidad $f(x)$ y que resulta de interés para el investigador. Para obtener una muestra de tamaño n, es decir, n mediciones de la variable aleatoria X, se diseña un experimento que permita medir la característica X obteniéndose un valor x_1. El experimento se repite nuevamente, bajo las mismas condiciones para obtener una segunda medición x_2 de X, y así sucesivamente, hasta obtener una medición x_n de X. Todas las mediciones se realizan de manera independiente y bajo las mismas condiciones. Al final se tiene una muestra $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de la característica medible X. Si se definen n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ donde la variable X_i toma el valor x_i que se obtiene en la i-ésima medición con $i = 1, 2, \ldots n$. De esta manera, la n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una medición de la variable *n-dimensional* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Dado que las mediciones se obtuvieron bajo las mismas condiciones y de manera independiente, entonces las

variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tienen la misma distribución que X y además son independientes; por lo tanto, su función de densidad conjunta está determinada por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n). \tag{5.1}$$

Muestras aleatorias

Definición 5.0.5 (Muestras aleatorias) *Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad determinada (normal, binomial, etc...). Se dice que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de X, si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes y si tienen la misma distribución que X.*

Estadístico muestral

Definición 5.0.6 (Estadístico) *Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de una variable aleatoria X, entonces se conoce como estadístico muestral a cualquier función real $U = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.*

Dado que U es una variable aleatoria, entonces el estadístico tendrá asociado una función de distribución y parámetros (como la media y la varianza). De este modo, dado un estadístico U, se hablará de la distribución y de los parámetros del estadístico U.

La media muestral

Definición 5.0.7 (La media muestral) *Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de una población específica, entonces se conoce como la media muestral al estadístico $\overline{X}$ definido como:*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5.2}$$

La varianza muestral

Definición 5.0.8 (La varianza muestral) *Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de una población específica, entonces se conoce como la varianza muestral al estadístico S^2 definido como:*

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2. \tag{5.3}$$

La desviación estándar muestral

Definición 5.0.9 (La desviación estándar muestral o error estándar) *La raíz cuadrada positiva de la varianza muestral se conoce como la desviación estándar muestral o error estándar; es decir,*

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}. \tag{5.4}$$

Definición 5.0.10 (Distribución muestral) *La distribución de probalidad de un estadístico se conoce como distribución muestral del estadístico. Las distribuciones muestrales de los estadísticos $\overline{X}$ y S^2 son de particular interés, ya que a partir de su conocimiento es posible hacer inferencias sobre la media y la varianza poblacional.*

5.1. Estimación de parámetros

La inferencia estadística puede abordase desde dos enfoques, conocidos como el enfoque clásico y el enfoque bayesiano. El enfoque clásico consiste en obtener una estimación de un parámetro poblacional, considerado como un valor desconocido pero fijo, a partir de una muestra aleatoria. En el enfoque bayesiano la estimación requiere de información adicional, que no proviene de la muestra, y que se basa en la experiencia del observador. En esta sección se presentan los conceptos básicos para comprender y desarrollar los métodos del enfoque clásico de la estimación.

Estimación puntual y estimación por intervalos

La estimación de un parámetro poblacional puede llevarse a cabo mediante una muestra en conjunción con el uso de un estadístico. Considérese que se obtiene una muestra aleatoria $(X_1, X_1, \ldots, X_n)$ de un población cuya distribución depende de un parámetro desconocido θ. Para estimar el valor de θ se requiere de un estadístico. Si después de los procedimientos se reporta un valor numérico $\widehat{\theta}$ para estimar el parámetro θ, el proceso se conoce como estimación puntual. El valor $\widehat{\theta}$ se conoce como la estimación y corresponde al valor del estadístico al sustituir los valores de la muestra. Por otro lado, si al final de los procedimientos se reporta un intervalo en el cual el parámetro poblacional puede encontrarse, con cierta probabilidad, entonces el procedimiento se conoce como estimación por intervalo. El intervalo determinado mediante este proceso se conoce como intervalo de confianza. Dado que se pueden tener diversos estadísticos para realizar la estimación de un parámetro poblacional, es necesario establecer criterios para seleccionar el estimador más adecuado para estimar el parámetro poblacional, en el sentido de que provea una mejor estimación en términos probabilístico.

Definición 5.1.1 (Estimador y estimación) *Supóngase que $f(x;\theta)$ es la función de distribución de una población y que de ella se extrae una muestra aleatoria $(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ de tamaño n. Si $\widehat{\Theta} = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es el estadístico que se utiliza para estimar el parámetro poblacional θ, entonces $\widehat{\Theta}$ se conoce como estimador del parámetro poblacional θ, mientras que el valor que asume el estimador al sustituir los valores muestrales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se conoce como estimación de θ y se representa por $\widehat{\theta}$; es decir,*

$$\widehat{\theta} = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.5}$$

Definición 5.1.2 (Estimador insesgado) *Supóngase $\widehat{\Theta}$ es un estimador de un parámetro poblacional θ, entonces se dice $\widehat{\Theta}$ es un estimador insesgado de θ si*

$$E(\widehat{\Theta}) = \theta, \tag{5.6}$$

para todos los posibles valores de θ.

En la figura 5.1 se muestran las funciones de densidad de dos estimadores $\widehat{\Theta}_1$ y $\widehat{\Theta}_2$. Se observa que $\widehat{\Theta}_1$ es un estimador insesgado del parámetro poblacional θ.

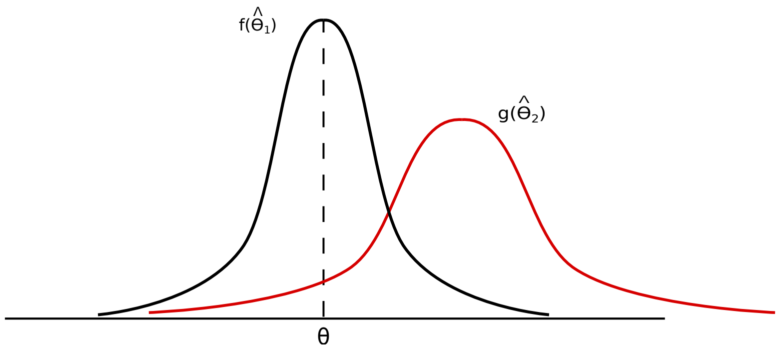


Figura 5.1: Estimadores

Ejemplo 5.1.1 *Considérese una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población $f(x;\mu)$. Si se estima la media mediante el estimador*

$$T = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

entonces

$$E(T) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{n}{n+1}\mu,$$

por lo tanto, T no es un estimador insesgado de μ.

Teorema 5.1.1 *Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Si $\overline{X}$ es la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño n, entonces*

a) $E(\overline{X}) = \mu$.

b) $var(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

c) Si X está distribuido normalmente, entonces $\overline{X}$ tiene distribución normal.

Demostración:
a) De acuerdo con la definición 5.0.7 y las propiedades de la media estudiados en el capítulo 4,

$$\begin{aligned}
E(\overline{X}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right), \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right), \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i), \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X), \\
&= \frac{n\mu}{n} = \mu.
\end{aligned}$$

Lo anterior significa que la media muestral $\overline{X}$ es un estimador insesgado de la media μ

b)

$$\begin{aligned}
var(\overline{X}) &= E(\overline{X}-\mu)^2, \\
&= var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right), \\
&= \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right), \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i), \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X), \\
&= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}$$

c) Se obtiene directamente de la propiedad reproductiva de la distribución normal (teorema 4.94). ∎

Teorema 5.1.2 *Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Si $\overline{X}$ es la media muestral y S^2 es la varianza muestral de una muestra aleatoria de tamaño n, entonces*

a) $E(S^2) = \sigma^2$.

b) Si X está distribuida normalmente, entonces la variable aleatoria

$$\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right) S^2,$$

tiene distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad.

Demostración:
a) Desarróllese la siguiente suma:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\overline{X})^2,\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)\right]^2,\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)(\overline{X}-\mu)+(\overline{X}-\mu)^2\right],\\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)(X_i-\mu)+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2,\\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2,\\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\overline{X}-\mu)(n\overline{X}-n\mu)+n(\overline{X}-\mu)^2,\\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2. \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

Aplicando las propiedades de la media a la ecuación 5.7 se obtiene,

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2\right]\right],\\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-nE(\overline{X}-\mu)^2\right],\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}var(X_i)-n\,var(\overline{X})\right),\\
&= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n(\frac{\sigma^2}{n})\right),\\
&= \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Esto significa que la varianza muestral S^2 es un estimador insesgado de la varianza poblacional σ^2.
b) De la ecuación 5.7 se obtiene,

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2.$$

De la definición de la varianza (definición 5.0.8) se sigue

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2,\\ \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 &= (n-1)S^2+n(\overline{X}-\mu)^2,\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\dfrac{1}{\sigma^2}$,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)S^2+\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2. \tag{5.8}$$

Si se definen las variables aleatorias

$$Y = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2, \tag{5.9}$$

$$Y_1 = \left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)S^2, \tag{5.10}$$

$$Y_2 = \left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2, \tag{5.11}$$

entonces la ecuación 5.8 puede expresarse como

$$Y=Y_1+Y_2. \tag{5.12}$$

De acuerdo en el teorema 4.6.10, la variable aleatoria Y definida por la ecuación 5.9 es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado con n grados de libertad. El teorema 4.6.9 permite establecer que Y_2 es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado y con un grado de libertad. Puede probarse que las variables aleatorias Y y Y_2 son independientes, de manera que la propiedad reproductiva de la distribución chi-cuadrado permite concluir que Y_1 es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado y con $n-1$ grados de libertad. ∎

Definición 5.1.3 (Estimador insesgado de varianza mínima) *Si $\widehat{\Theta}_1$ es un estimador insesgado de un parámetro poblacional θ, se dice que $\widehat{\Theta}_1$ es un estimador insesgado de varianza mínima o estimador más eficiente, si para cualquier otro estimador $\widehat{\Theta}_2$, se cumple que*

$$var(\widehat{\Theta}_1)<var(\widehat{\Theta}_2)$$

.

En la figura 5.2 se representan las distribuciones de dos estimadores $\widehat{\Theta}_1$ y $\widehat{\Theta}_2$ para el mismo parámetro θ. Se observa que $var(\widehat{\Theta}_1) < var(\widehat{\Theta}_2)$. Si lo anterior se cumple para cualquier otro estimador insesgado de θ, entonces $\widehat{\Theta}_1$ será un estimador insesgado de varianza mínima para el parámetro θ.

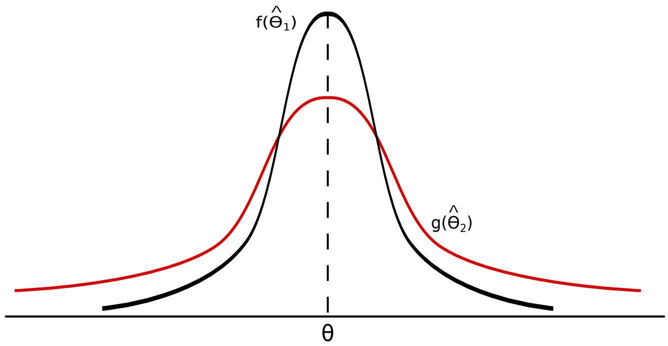


Figura 5.2: Estimadores

Definición 5.1.4 (Estimador convergente) *Si $\widehat{\Theta}$ es una estimación de un parámetro poblacional θ, entonces se dice que $\widehat{\Theta}$ es un estimador convergente si,*

$$\lim_{n\to\infty} (|\widehat{\Theta} - \theta| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0, \tag{5.13}$$

o de manera equivalente si

$$\lim_{n\to\infty} (|(\widehat{\Theta} - \theta| < \epsilon) = 1, \quad \forall \epsilon > 0. \tag{5.14}$$

Ejemplo 5.1.2 *Si la media muestral $\overline{X}$ se usa como estimador de la media μ, entonces, de acuerdo con el teorema 4.6.11*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}| - \mu > \epsilon) = 0, \tag{5.15}$$

por lo tanto, $\overline{X}$ es un estimador convergente.

Definición 5.1.5 (El mejor estimador insesgado) *Se dice que $\widehat{\Theta}$ es el mejor estimador de un parámetro poblacional θ si se satisfacen las siguientes condiciones*

a) $\widehat{\Theta}$ *es un estimador insesgado.*

b) $\widehat{\Theta} = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$, *donde todas las a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes.*

c) Si $\widehat{\Theta}$ es un estimador de varianza mínima.

Hasta aquí solo se han definido las características deseables de un estimador. Existen varios métodos para obtener estimadores para un parámetro poblacional dado, en este trabajo no se abordarán dichos métodos. El lector interesado encontrará una amplia exposición de estos métodos en la bibliografía recomendada al final de este trabajo.

5.1.1. Estimación puntual

Una estimación puntual de un parámetro poblacional θ es un valor único $\widehat{\theta}$ del estimador Θ.

Ejemplo 5.1.3 *Si se usa la media muestral como estimador de la media poblacional, entonces el valor único*

$$\widehat{\overline{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

corresponde a una estimación puntual de la media, donde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ son los valores de una muestra aleatoria de tamaño n.

Ejemplo 5.1.4 *Si se utiliza la varianza muestral como estimador de la varianza poblacional, entonces el valor único*

$$\widehat{s^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\overline{x}})^2,$$

corresponde a una estimación puntual de la varianza, donde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ son los valores de una muestra aleatoria de tamaño n.

Ejemplo 5.1.5 *Las medidas de una muestra aleatoria corresponden a los pesos 8.3, 10.6, 9.7, 8.8, 10.2, y 9.4 lb. a) Determine una estimación puntual de la media usando el estimador insesgado $\overline{X}$, b) determine una estimación puntual de la varianza poblacional usando el estimador insesgado S^2.*

Solución: Las estimaciones puntuales de la media y la varianza son:

$$\begin{aligned}
\widehat{\overline{x}} &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 9.5, \\
\widehat{s^2} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \widehat{\overline{x}})^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - 9.5)^2 = 0.736.
\end{aligned}$$

5.1.2. Estimación por intervalo

Si en lugar de determinar un valor único para un parámetro poblacional θ se determina un intervalo en el cual θ puede estar contenido, con cierta probabilidad, entoces la estimación se conoce como estimación por intervalo. En una estimación por intervalo el parámetro poblacional θ estará acotado por dos estadísticos $\widehat{\Theta}_1$ y $\widehat{\Theta}_2$ tal que

$$\widehat{\Theta}_1 < \theta < \widehat{\Theta}_2.$$

Tanto $\widehat{\Theta}_1$ como $\widehat{\Theta}_2$ dependen del estimador y de la distribución del mismo, de tal manera que es posible determinar

$$P(\widehat{\Theta}_1 < \theta < \widehat{\Theta}_2) = 1 - \alpha, \tag{5.16}$$

para un $0 < \alpha < 1$.

5.2. Intervalos de confianza(I de C)

El valor $1-\alpha$ en la ecuación 5.16 se conoce como coeficiente de confianza de $(1-\alpha)$ o coeficiente de confianza del $(1-\alpha)100\,\%$.
El intervalo $(\widehat{\Theta}_1 < \theta < \widehat{\Theta}_2)$ se conoce como intervalo de confianza para la media y para el coeficiente de confianza del $(1-\alpha)100\,\%$.
La ecuación 5.16 debe interpretarse como: $1-\alpha$ es la probabilidad de que el intervalo aleatorio de confianza $(\widehat{\Theta}_1, \widehat{\Theta}_2)$ contenga al parámetro θ.
A continuación se precisarán los conceptos anteriores analizando un caso general.

Intervalo de confianza para la media cuando se muestrea una población normal con varianza conocida

Considérese una población distribuida normalmente $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ es conocida y μ es el parámetro poblacional que se requiere estimar. Supóngase que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de la población y que se utiliza la media muestral para estimar μ. De acuerdo con el teorema 5.0.7, $\overline{X}$ tiene distribución $N(\mu, \sigma^2/n)$, luego la variable estandarizada

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

tiene distribución normal estándar. En la figura 5.3 se muestra la función de densidad de la variable aleatoria Z. Para precisar los parámetros de la figura

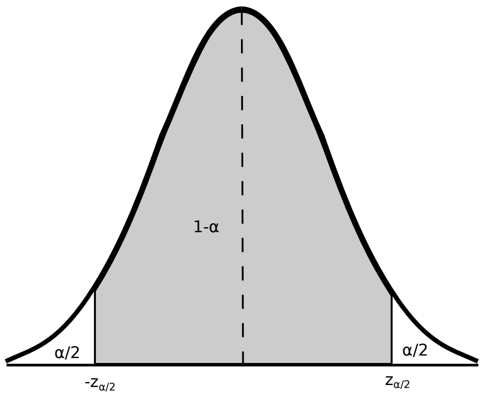


Figura 5.3: La distribución normal

anterior obsérvese que:

$$
\begin{aligned}
F(z_{\alpha/2}) &= \int_{-\infty}^{-z_{\alpha/2}} f(x)dx + \int_{-z_{\alpha/2}}^{z_{\alpha/2}} f(x)dx, \\
&= F(-z_{\frac{\alpha}{2}}) + (1-\alpha), \\
&= \frac{\alpha}{2} + (1-\alpha), \\
&= 1-\alpha/2. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Se debe tener siempre presente que $z_{\alpha/2}$ corresponde al cuantil $z_{1-\alpha/2}$.
Lo anterior permite establecer,

$$
\begin{aligned}
P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) &= 1-\alpha, \\
P(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\alpha/2}) &= 1-\alpha, \\
P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}-\mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= 1-\alpha, \qquad (5.18) \\
P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} < -\mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X}) &= 1-\alpha, \\
P(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= 1-\alpha. \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

A continuación se precisan algunas cantidades que aparecen en la ecuación 5.19.

El valor $1-\alpha$ en la ecuación 5.19 corresponde al coeficiente de confianza del $(1-\alpha)100\,\%$.

El intervalo de confianza para la media y para el coeficiente de confianza de $(1-\alpha)100\,\%$ es,

$$(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \tag{5.20}$$

La ecuación 5.19 debe interpretarse como: $1-\alpha$ es la probabilidad de que el intervalo aleatorio de confianza $(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ contenga a la media μ.
Los límites de confianza se determinan a partir de los estadísticos

$$L_1 = \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{5.21}$$

$$L_2 = \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.22}$$

Una vez que se tiene la muestra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ el intervalo de confianza puede expresarse como:

$$\widehat{l}_{2,1} = \overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{5.23}$$

Ejemplo 5.2.1 *Un fabricante de fibras sintéticas desea estimar la tensión de ruptura media de una fibra. Diseña un experimento en las que se observan las tensiones de ruptura, en Newtons, de 16 hilos del proceso, seleccionados aleatoriamente. Las tensiones son: 20.8, 20.6, 21.0, 20.9, 19.9, 20.2, 19.8, 19.6, 20.9, 21.1, 20.4, 20.6, 19.7, 19.6, 20.3, 20.7. Supóngase que la tensión de ruptura de una fibra se encuentra modelada por una distribución normal con varianza de 0.45 Newtons. Construya un intervalo de confianza del 98 % para el valor real de la tensión promedio de ruptura promedio de la fibra.*

Solución: La estimación puntual de la media es:

$$\widehat{\overline{x}} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 20.3812.$$

Dado que el coeficiente de confianza es 0.98, entonces $\alpha = 0.02$ y $\alpha/2 = 0.01$ y por lo tanto, $F(Z_{0.01}) = 0.99$. De la tabla 4 del apéndice E se obtiene $Z_{0.01} = 2.33$. Los límites de confianza se determinan de acuerdo con la ecuación 5.23

$$\widehat{l}_{2,1} = 20.3812 \pm 2.33\frac{0.45}{\sqrt{16}} = 20.3187 \pm 0.2621, \tag{5.24}$$

$$\widehat{l}_2 = 20.3812 + 0.26217 = 20.6433, \tag{5.25}$$

$$\widehat{l}_1 = 20.3812 - 0.2621 = 20.1192, \tag{5.26}$$

Finalmente, el intervalo de confianza para μ del 98 % es:

$$20.1192 < \mu < 20.6433.$$

5.3. I de C, error estándar y tamaño de muestra

Considérese el siguiente desarrollo de la ecuación 5.18,

$$\begin{aligned} P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= 1-\alpha, \\ P(|\overline{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= 1-\alpha. \end{aligned} \tag{5.27}$$

La cantidad

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{5.28}$$

se conoce como error absoluto y se denota como ϵ. La ecuación 5.27 se expresa en términos del error absoluto como

$$P(|\overline{X} - \mu| < \epsilon) = 1-\alpha. \tag{5.29}$$

En muchas situaciones se requiere determinar el tamaño de la muestra de tal manera que la ecuación 5.29 se satisfaga para un ϵ determinado. De la ecuación 5.28 se obtiene,

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\epsilon}\right)^2. \tag{5.30}$$

Definición 5.3.1 (Error estándar de un estimador puntual) *Dado un estimador puntual $\widehat{\Theta}$ de un parámetro poblacional θ, se define el error estándar como la desviación estándar del estimador; es decir,*

$$e.s(\widehat{\Theta}) = \sqrt{var(\widehat{\Theta})} \tag{5.31}$$

El intervalo de confianza de una estimación por intervalos dependerá del estimador que se utilice a través su error estándar, como se muestra a continuación.

Ejemplo 5.3.1 *Considérese que se utiliza la media muestral para estimar un la media de una población normal con varianza conocida. De acuerdo con el teorema 5.1.1 la varianza del estimador es*

$$var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

de manera que la desviación estándar o error estándar de la media es

$$e.s(\overline{X}) = \sqrt{(var(\overline{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

En términos del error estándar los límites del intervalo de confianza para la estimación de la media se espresan como:

$$\widehat{l_1} = \overline{x} - z_{\alpha/2} e.s(\overline{X}), \tag{5.32}$$

$$\widehat{l_2} = \overline{x} + z_{\alpha/2} e.s(\overline{X}). \tag{5.33}$$

Intervalo de confianza para la media cuando se muestrea una población normal con varianza desconocida

Considérese que se desea hacer una estimación de la media para una población con distribución normal de la cual se desconoce la varianza, en este caso se recurre al estadístico

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}. \tag{5.34}$$

Desafortunadamente, el estadístico T no tiene distribución normal; sin embargo, su distribución puede determinarse considerando que,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{\frac{S}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} \\ &= \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} \end{aligned}$$

Si se definen las variables aleatorias Z y V como,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

y

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$$

entonces T puede expresarse como:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}}. \tag{5.35}$$

Si la muestra aleatoria se extrae de una población normal, entonces Z tiene distribución normal estándar (teorema 5.1.1) y V tiene disdribución chi-cuadrado con $(n-1)$ grados de libertad (teorema 5.1.2) . Si se supone que Z y V son independientes, entonces la variable aleatoria T tiene distribución t de Student, la cual se define en el siguiente teorema.

Teorema 5.3.1 *Sea (Z, V) una variable aleatoria bidimensional, donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, mientras que V es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado con n grados de libertad. Supóngase que Z y V son independientes y que T es una variable aleatoria que se define en términos de Z y V mediante*

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}}, \tag{5.36}$$

entonces la función de densidad de la variable aleatoria T está determinada por

$$g(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{5.37}$$

Una variable aleatoria cuya función de densidad está determinada por la ecuación 5.37 se conoce como variable aleatoria con distribución t de Student[1] *con n grados de libertad.*

Demostración: La demostración se desarrolla en el apéndice D.1.

En la tabla 6 del apéndice E se muestran los valores cuantiles t_p, los cuales deben interpretarse como:

$$p = \int_{-\infty}^{t_p} g(t)dt, \tag{5.38}$$

como se ilustra en la figura 5.4.

[1]Esta distribución fue publicada en 1908 por W. S. Gosset bajo el seudónimo de Student.

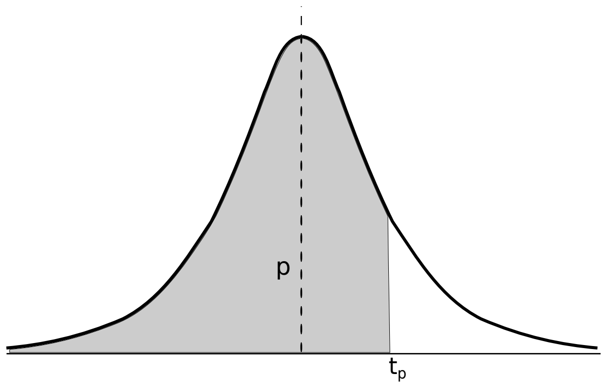


Figura 5.4: Cuantiles de la distribución t de Student

Para determinar el intervalo de confianza, considérese la figura 5.5

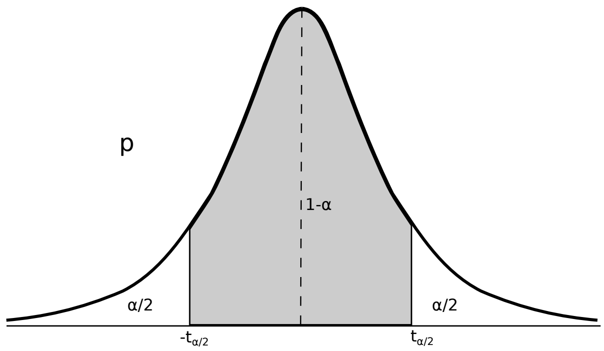


Figura 5.5: La distribución t

De manera análoga al caso anterior,

$$\begin{aligned} P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) &= 1-\alpha, \\ P\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) &= 1-\alpha. \end{aligned} \tag{5.39}$$

La ecuación 5.39 establece el intervalo de confianza para la media de una población normal con varianza desconocida. Los límites de confianza están dados por los estadísticos

$$L_1 = \overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{5.40}$$

$$L_2 = \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{5.41}$$

Con los valores de la muestra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se determinan las estimaciones que corresponsen a los estimadores de los límites de confianza:

$$\widehat{l}_{2,1} = \overline{x} \pm t_{\alpha/2}\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}. \tag{5.42}$$

Se debe tener siempre presente que el estadístico de interés T definido mediante la ecuación 5.34 tiene distribibición t de Student con $n-1$ grados de libertad.

Ejemplo 5.3.2 *Se registraron 5 medidas del tiempo de reacción de un individuo ante cierto estímulo como: 0.28, 0.30, 0.27, 0.33, 0.31 segundos. Encuentre los límites de confianza del a) 90 % b) 95 % y c) 99 % para el tiempo verdadero medio de reacción.*

Solución: Las estimaciones puntuales de la media, la varianza y la desviación estándar son:
La media,

$$\widehat{\overline{x}} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 0.298.$$

La varianza,

$$\widehat{s^2} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - 0.298)^2 = 0.0007.$$

La desviación estándar,

$$\widehat{s} = \sqrt{\widehat{s^2}} = \sqrt{0.0007} = 0.0264.$$

Además,

$$\frac{\widehat{s}}{\sqrt{5}} = \frac{0.0264}{2} = 0.0118.$$

Por otro lado, para obtener los cuantiles la tabla 6 del apéndice E, recuérdese que $t_{\alpha/2}$ corresponde al cuantil $t_{1-\alpha/2}$. Los cuantiles $t_{1-\alpha/2}$ para $n-1=4$, se muestran en la tabla 5.1

Coeficientes de confianza	90 %	95 %	99 %
$\alpha/2$	0.05	0.025	0.005
$F(t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$	0.95	0.975	0.995
$t_{\alpha/2}$	2.132	2.776	4.604

Tabla 5.1: Cuantiles $t_{1-\alpha/2}$

a) De acuerdo con la ecuación 5.42 el intervalo de confianza del 90 % para la media

$$\begin{aligned}\widehat{l}_{2,1} &= 0.298 \pm (2.132)(0.0118), \\ &= 0.298 \pm 0.0251.\end{aligned}$$

b) De manera análoga al caso anterior, el intervalo de confianza del 95 % para la media

$$\begin{aligned}\widehat{l}_{2,1} &= 0.298 \pm (2.776)(0.0118), \\ &= 0.298 \pm 0.0327.\end{aligned}$$

c) De la misma manera que en los incisos anteriores, el intervalo de confianza del 99 % para la media

$$\begin{aligned}\widehat{l}_{2,1} &= 0.298 \pm (4.604)(0.0118), \\ &= 0.298 \pm 0.0543.\end{aligned}$$

Intervalo de confianza para la varianza cuando se muestrea una población normal

Si se requiere hacer una estimación de la varianza para una población normal, entonces considera el estimador

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - X_i)^2.$$

Para determinar el intervalo de confianza debe considerarse el estadístico

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

El estadístico anterior tiene un distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad, como se demostró en el teorema 5.1.2. Considérese la figura 5.6. El parámetro α permite establecer,

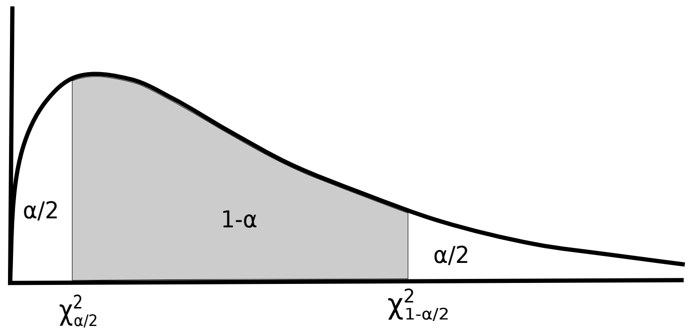


Figura 5.6: La distribución Chi-cuadrado

Los términos que aparecen en la figura anterior corresponden a los cuantiles,

$$\begin{aligned} F(\chi^2_{\alpha/2}) &= \frac{\alpha}{2}, \\ F(\chi^2_{1-\alpha/2}) &= 1-\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Lo anterior permite establecer,

$$\begin{aligned} P\left(\chi^2_{\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(\chi^2_{\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(\frac{\chi^2_{\alpha/2}}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}}{(n-1)S^2}\right) &= 1-\alpha, \\ P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right) &= 1-\alpha. \qquad (5.43) \end{aligned}$$

La ecuación 5.43 establece el intervalo de confianza para la varianza de una población normal. Los límites de confianza están dados por los estadísticos

$$L_1 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \qquad (5.44)$$

$$L_2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \qquad (5.45)$$

Para una muestra aleatoria $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la estimación de los límites de confianza se determinan como:

$$\widehat{l_1} = \frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \tag{5.46}$$

$$\widehat{l_2} = \frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\chi^2_{\alpha/2}} \tag{5.47}$$

Ejemplo 5.3.3 *Un fabricante de baterías para automóvil, asegura que sus baterías duran tres años en promedio, con una varianza de 1 año. Si 5 de éstas baterías tienen duraciones 1.9, 1.4, 3.0, 3.5, y 4.2 años, determine un intervalo de confianza de 95 % para σ^2. Supóngase que la población de la duración de las baterías tiene distribución normal.*

Solución: Las estimaciones puntuales de la media y la varianza son:

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{x}} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 3 \\ \widehat{s^2} &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \widehat{\overline{x}})^2 = 0.815 \end{aligned}$$

Los cuantiles satisfacen:

$$\begin{aligned} F(\chi^2_{\alpha/2}) &= 0.025, \\ F(\chi^2_{1-\alpha/2}) &= 0.975. \end{aligned}$$

De la tabla 5 del apéndice E se obtiene:

$$\begin{aligned} \chi^2_{1-\alpha/2} &= 11.15, \\ \chi^2_{\alpha/2} &= 0.48. \end{aligned}$$

De las ecuaciones 5.46 y 5.47 se obtiene la estimación de los límites de confianza.

$$\begin{aligned} \widehat{l_1} &= \frac{4(0.815)}{11.15}, \\ \widehat{l_2} &= \frac{4(0.815)}{0.48}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza del 95 % para la varianza es:

$$0.2923 < \sigma^2 < 6.7914.$$

Intervalo de confianza para el cociente de varianzas cuando se muestrean dos poblaciones normales

Supóngase que se toma una muestra aleatoria de tamaño n_1 de una poblacio normal $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y que una segunda muestra aleatoria de tamaño n_2 se toma de otra población normal $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Si se requiere hacer una estimación del cociente de las varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, entonces se recurre al estadístico F definido como,

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}.$$

Mediante los estadísticos U y V definidos como

$$\begin{aligned} U &= \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}, \\ V &= \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}, \end{aligned}$$

es posible expresar el estadístico F como:

$$F = \frac{U/(n_1-1)}{V/(n_2-1)}$$

Dado que las muestras se toman de poblaciones con distribuciones normales, entonces los estadísticos U y V tienen distribuciones chi-cuadrado con $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ grados de libertad, respectivamente. La distribución del estadístico F se establece en el siguiente teorema.

Teorema 5.3.2 *Sea (U, V) una variable aleatoria bidimensional, donde U y V son variables aleatorias con distribución chi-cuadrado cada una con n y m grados de libertad, respectivamente. Supóngase que U y V son variables aleatorias independientes y que F es una variable aleatoria que se define en términos de U y V mediante*

$$F = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{m}}, \tag{5.48}$$

entonces la función de densidad $g(f)$ de la variable aleatoria F está determinada por

$$g(f) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}}, \quad 0 < f < \infty. \tag{5.49}$$

Una variable aleatoria cuya función de densidad está determinada por la ecuación 5.49 se conoce como variable aleatoria con distribución F. Los parámetros n y m se conocen como grados de libertad de la distribución F.

Demostración: La demostración se desarrolla en el apéndice D.2.
El la tabla 7 del apéndice E se muestran los valores cuantiles f_p, para diversos valores de los parámetros (l_1, l_2) (grados de libertad, que en dicho orden corresponden a (n,m)).
Los cuantiles deben interpretarse como:

$$p = \int_{-\infty}^{f_p} g(f)df, \tag{5.50}$$

como se ilustra en la figura 5.7.

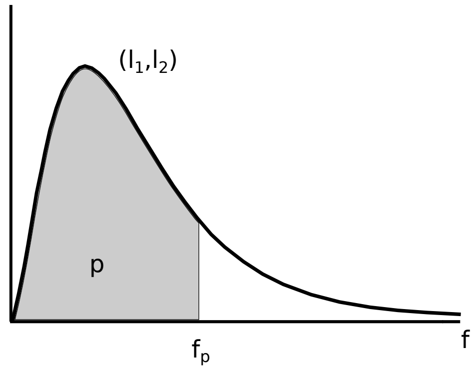


Figura 5.7: Cuantiles de la distribución F

Los cuantiles de interés se muestran en la figura 5.8 y se definen mediante:

$$\begin{aligned} P(F \leq f_{\alpha/2}) &= \int_0^{f_{\alpha/2}} g(f)df = \frac{\alpha}{2}, \\ P(F \leq f_{1-\alpha/2}) &= \frac{\alpha}{2} + 1 - \alpha, \end{aligned}$$

De acuerdo con la figura 5.8,

Lo anterior permite establecer,

$$\begin{aligned} P\left(f_{\alpha/2} < F < f_{1-\alpha/2}\right) &= 1 - \alpha, \\ P\left(f_{\alpha/2} < \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < f_{1-\alpha/2}\right) &= 1 - \alpha, \\ P\left(f_{\alpha/2}\frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < f_{1-\alpha/2}\frac{S_2^2}{S_1^2}\right) &= 1 - \alpha, \\ P\left(\frac{1}{f_{1-\alpha/2}}\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{f_{\alpha/2}}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) &= 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{5.51}$$

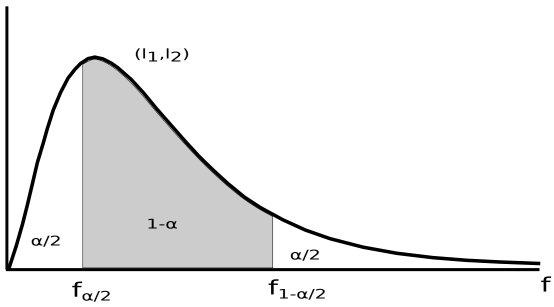


Figura 5.8: La distribución F

La siguiente propiedad de los cuantiles (ver el apéndice D.2)

$$f_{\alpha/2}(n,m) = \frac{1}{f_{1-\alpha/2}(m,n)}$$

permite expresar la ecuación 5.51 como:

$$P\left(\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(n,m)}\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < f_{1-\alpha/2}(m,n)\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) = 1-\alpha. \tag{5.52}$$

La ecuación 5.52 establece el intervalo de confianza para el cociente de dos varianzas. Los límites de confianza están dados por los estimadores,

$$L_1 = \frac{1}{f_{1-\alpha/2}(n,m)}\frac{S_1^2}{S_2^2}, \tag{5.53}$$

$$L_2 = f_{1-\alpha/2}(m,n)\frac{S_1^2}{S_2^2}. \tag{5.54}$$

Mediante las muestras $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$ obtenidas de poblaciones independientes con distribuciones normales $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_1^2)$, respectivamente, se obtienen las estimaciones de los límites de confianza para el cociente de varianzas $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$,

$$\widehat{l}_1 = \frac{1}{f_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\frac{\widehat{s_1^2}}{\widehat{s_2^2}}, \tag{5.55}$$

$$\widehat{l}_2 = f_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)\frac{\widehat{s_1^2}}{\widehat{s_2^2}}, \tag{5.56}$$

donde

$$\widehat{l}_1 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \widehat{l}_2. \tag{5.57}$$

Ejemplo 5.3.4 *Cierto metal se produce, por lo común, mediante un proceso estándar. Se desarrolla un nuevo proceso en el que se añade una aleación a la producción del metal. Para cada proceso se seleccionan 12 especímenes y cada uno de ellos se somete a una tensión hasta que se rompe. La siguiente tabla muestra las tensiones de rupturas de los especímenes, en kilogramos por centímetros cuadrados.*

Si se supone que el muestreo se llevó a cabo sobre dos distribuciones normales e independientes. Determine un intervalo de confianza del 98 % para en cociente de las varianzas σ_1^1/σ_2^2*, donde* σ_1^2 *es la varianza del proceso estándar (P 1) y* σ_2^2 *es la varianza del segundo proceso (P 2).*

P 1	428	419	458	439	441	456	463	429	438	445	441	463
P 2	462	448	435	465	429	472	453	459	427	468	452	447

Tabla 5.2: Tabla de los procesos

Solución: Las estimaciones puntuales para la media y la varianza del proceso 1 son:

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{x}}_1 &= 433.3333, \\ \widehat{s_1^2} &= 312.9704. \end{aligned}$$

Las estimaciones puntuales para la media y la varianza del proceso 2 son:

$$\begin{aligned} \widehat{\overline{x}}_2 &= 451.4166, \\ \widehat{s_2^2} &= 223.1742. \end{aligned}$$

Además,

$$\frac{\widehat{s_1^2}}{\widehat{s_2^2}} = 1.4023.$$

Se requiere obtener un intervalo de confianza del 98 %; por lo tanto $\alpha/2 = 0.01$ De la tabla 7 del apéndice E se obtiene

$$f_{0.99,11,11} = 4.46.$$

De las ecuaciones 5.55 y 5.56 se obtiene la estimación de los límites de confianza

$$\begin{aligned} \widehat{l_1} &= (1.4023)/(4.46) = 0.3145, \\ \widehat{l_2} &= (1.4023)(4.46) = 6.2491. \end{aligned}$$

El intervalo de confianza del 98 % para el cociente de las varianzas es:

$$0.3145 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 6.2491.$$

5.4. Teorema de límite central

Teorema 5.4.1 (Teorema del límite central) *Supóngase que* X_1*,* $X_2, \ldots, X_n$ *son n variables aleatorias independientes (discretas o continuas) idénticamente distribuidas, todas con media* μ *y varianza* σ^2*. Si*

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq b\right) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

es decir; la variable estandarizada $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ *tiende asintóticamente a la distribución normal estándar a medida que* $n \to \infty$*.*

Demostración: Dado que las variables aleatorias X_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ son independientes, entonces de acuerdo con el teorema 4.6.6 la función generadora de momentos de la variable aleatoria S_n es:

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t).$$

Además las variables aleatorias son idénticamente distribuidas; por lo tanto,

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}^n(t).$$

La variable aleatoria S_n tiene media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$. Considérese la variable aleatoria estandarizada

$$Z = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

De acuerdo con el teorema 2.4.4

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= e^{-\frac{n\mu t}{\sqrt{n}\sigma}t} M_{S_n}(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}), \\
&= e^{-\frac{n\mu t}{\sqrt{n}\sigma}} M_{X_1}^n(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}), \\
&= e^{-\frac{n\mu t}{\sqrt{n}\sigma}} \left(E(e^{\frac{tX_1}{\sqrt{n}\sigma}})\right)^n, \\
&= \left(e^{-\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma}} E(e^{\frac{tX_1}{\sqrt{n}\sigma}})\right)^n, \\
&= \left(E(e^{\frac{(X_1-\mu)t}{\sqrt{n}\sigma}})\right)^n.
\end{aligned}$$

Mediante el desarrollo de Taylor para la función exponencial se obtiene,

$$
\begin{aligned}
E\left(e^{\left(\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)t}\right) &= E\left(1+\left(\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)t+\frac{1}{2}\left(\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 t^2+\dots\right),\\
&= 1+E\left(\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)t+\frac{1}{2}E\left(\frac{X_1-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 t^2+\dots,\\
&= 1+\frac{1}{2n\sigma^2}E\left(X_1-\mu\right)^2 t^2+\dots,\\
&= 1+\frac{1}{2n}t^2+\dots,
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} M_Z(t) &= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n}t^2)^n,\\
&= e^{\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Ésta es la función generadora de momentos para una variable aleatoria Z con distribución normal estándar. De acuerdo con el teorema 2.4.3 Z tiene distribución N(0,1). ∎

Los expertos en probabilidad recomiendan usar la aproximación establecida en el teorema anterior para muestras de tamaño $n > 30$ (lo cual se conoce como aproximación de muestras grandes). Dicho de otra manera, si no se conoce la distribución de la cual se extrae la muestra o si ésta se vuelve compleja para manipular, pero el tamaño de la muestra satisface el criterio de muestras grandes, puede usarse la distribución normal y este procedimiento está plenamente justificado por el teorema de límite central. A continuación se utilizará el teorema anterior para hallar un intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial.

Intervalo de confianza para la proporción cuando se muestrea una distribución binomial

Supóngase que se muestrea una población binomial cuyo parámetro p se requiere estimar mediante una muestra aleatoria. Considérese el estimador

$$
\widehat{P}=\frac{X}{n}, \tag{5.58}
$$

el cual resulta ser un estimador insesgado del parámetro p como se muestra a continuación:

$$E(\widehat{P}) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}(np) = p, \tag{5.59}$$

$$var(\widehat{P}) = \frac{1}{n^2}var(X) = \frac{1}{n^2}(np(1-p)) = \frac{p(1-p)}{n}. \tag{5.60}$$

El hecho de que $\widehat{P}$ resulte ser un estimador insesgado para el para el parámetro binomial p no es una casualidad, de hecho, si se definen n variables aleatorias X_i con $i = 1, \ldots, n$ donde X_i asume al valor 1 si se obtiene éxito y asume el valor cero si se obtiene fracaso, entonces el estimador $\widehat{P}$ puede expresarse como

$$\widehat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{5.61}$$

por lo tanto, el estimador $\widehat{P}$ corresponde a la media muestral $\overline{X}$ y, de acuerdo con el teorema 5.1.1 éste es un estimador insesgado. Por otro lado, de acuerdo con el teorema de límite central, para muestras grandes, la variable aleatoria

$$Z = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sigma} = \frac{\widehat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

tiene distribución normal estándar. Se procederá a determinar un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\,\%$ para el parámetro p.

$$\begin{aligned}
P(-z_{\alpha/2} < Z < -z_{\alpha/2}) &= 1-\alpha,\\
P(-z_{\alpha/2} < \frac{\widehat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{\alpha/2}) &= 1-\alpha,\\
P\left(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \widehat{P} - p < z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= 1-\alpha,\\
P\left(-\widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < -p < -\widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= 1-\alpha,\\
P\left(\widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= 1-\alpha.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

La ecuación 5.62 tiene el inconveniente teórico de que los límites de confianza dependen del parámetro p que se desea estimar . Dado que se está trabajando con muestras grandes, se espera que la estimación puntual $\widehat{p} = x/n$ se aproxime p, de manera que si se sustituye $\widehat{P} = X/n$ en los radicales que aparecen en la ecuación 5.62, los estimadores de los límites de confianza se expresan como:

$$\begin{aligned} L_1 &= \widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}}, \\ L_2 &= \widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{P}(1-\widehat{P})}{n}}. \end{aligned}$$

Para una muestra aleatoria $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la estimaciones de los límites de confianza se expresan como:

$$\widehat{l_1} = \widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \tag{5.63}$$

$$\widehat{l_2} = \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}. \tag{5.64}$$

Ahora supóngase que para el coeficiente de confianza de $(1-\alpha)100\,\%$ y un $\epsilon > 0$ se requiere determinar el tamaño de la muestra de tal manera que

$$P(|\widehat{P} - p| < \epsilon) = 1 - \alpha.$$

Lo anterior puede lograrse considerando que la ecuación 5.63 puede expresarse como:

$$P\left(\left|\widehat{P} - p\right| < z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha. \tag{5.65}$$

Por lo anterior,

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}. \tag{5.66}$$

Despejando n de la ecuación anterior se obtiene

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2}{\epsilon^2}p(1-p). \tag{5.67}$$

Aparentemente el problema está resuelto; sin embargo, la ecuación 5.67 depende del parámetro p que se desea estimar. Considerada como una función de p, $n = n(p)$ tiene un máximo para $p = 1/2$; por lo tanto, para $p = 1/2$ se obtiene la estimación más conservadora del tamaño de la muestra.

Ejemplo 5.4.1 *Se recibe un lote muy grande de artículos que provienen de un fabricante que asegura que el porcentaje de artículos defectuosos en la población es del 1 %. Al seleccionar una muestra aleatoria de 200 artículos y después de inspeccionarlos, se descubren 8 defectuosos. Obténgase los intervalos de confianza aproximados del 90, 95 y 99 % para la verdadera proporción de artículos defectuosos en el proceso de manufactura del fabricante. Con base en estos resultados ¿Qué puede decirse sobre la afirmación del fabricante?*

Solución: La estimación puntual de la proporción es:

$$\widehat{p} = \frac{x}{n} = \frac{8}{200} = 0.0004.$$

Los cuantiles para los coeficientes de cofianza dados se muestran en la tabla 5.3. Los valores de los cuantiles se determinan mediante la tabla 4 del apéndice E.

Coeficientes de confianza	90 %	95 %	99 %
$\alpha/2$	0.05	0.025	0.005
$F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$	0.95	0.975	0.995
$z_{\alpha/2}$	1.645	1.96	2.575

Tabla 5.3: Cuantiles $z_{1-\alpha/2}$

Los valores $z_{\alpha/2}$ se determinaron mediante la tabla 4 del apéndice E. Para determinar la estimación de los límites aproximados de confianza se recurre a las ecuaciones 5.63 y 5.64.

$$\begin{aligned}
\widehat{l_1} &= \widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \\
\widehat{l_2} &= \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo los datos de la muestra y la estimación puntual $\widehat{p}$ se obtiene

$$\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} = 0.0139.$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$\widehat{l}_{2,1} = \widehat{p} \pm (0.0139) z_{\alpha/2}.$$

Finalmente, sustituyendo $\widehat{p} = 0.04$ y los valores correspondientes de la tabla 5.3 se obtiene:

a) Intervalo de confianza del 90 % para la proporción.

$$\widehat{l}_{2,1} = 0.04 \pm (0.0139) z_{\alpha/2} = 04 \pm (0.0139)(1.645) = 0.04 \pm 0.0227,$$

$$0.0173 < p < 0.0627.$$

b) Intervalo de confianza del 90 % para la proporción.

$$\widehat{l}_{2,1} = 0.04 \pm (0.0139) z_{\alpha/2} = 0.04 \pm (0.0139)(1.9600) = 0.04 \pm 0.0270,$$

$$0.0130 < p < 0.0670.$$

c) Intervalo de confianza del 90 % para la proporción.

$$\widehat{l}_{2,1} = 0.04 \pm (0.0139) z_{\alpha/2} = 0.04 \pm (0.0139)(2.5750) = 0.04 \pm 0358,$$

$$0.0045 < p < 0.0755.$$

El valor de p que el fabricante asigna a su proceso queda fuera de los intervalos de confianza que se han obtenido. Existe entonces razón suficiente para sospechar que el valor verdadero de p no es 0.01 como él afirma.

5.5. Prueba de hipótesis

En muchas situaciones se deben tomar decisiones sobre hipótesis que involucran una población, basados en una muestra aleatoria; por ejemplo, el especialista de cierta área tiene que tomar decisiones sobre alguna hipótesis como podría ser: determinar si un nuevo fármaco ofrece alguna mejora significativa en el tratamiento de un padecimiento, si un automóvil tiene un mejor rendimiento que otro, o si el consumo de ciertos alimentos afectan la salud, etc... Las pruebas de hipótesis son una herramienta útil para abordar problemáticas como los anteriores.

Definición 5.5.1 (Hipótesis estadística) *Se entenderá por hipótesis estadística a una conjetura o afirmación acerca de una característica desconocida de una o más poblaciones. En general, una hipótesis estadística involucra un parámetro de la población.*

5.5.1. Elección de la prueba

Las pruebas de hipótesis se establecen mediante dos hipótesis conocidas como: la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alterna H_1.
Si la población de interés tiene distribución $f(x;\theta)$ y las hipótesis se definen en términos del parámetro poblacional θ, entonces la hipótesis nula se formulará como un valor único θ_0, mientras que la hipótesis alterna H_1 se formulará de manera más abierta; es decir, el parámetro θ podrá asumir un valor mayor, menor o diferente de θ_0. Las pruebas de hipótesis basadas en el parámetro poblacional θ pueden expresarse como:

a)

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = \theta_0, \\ H_1 &: \quad \theta > \theta_0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = \theta_0, \\ H_1 &: \quad \theta < \theta_0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = \theta_0, \\ H_1 &: \quad \theta \neq \theta_0. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.5.1 *La cantidad promedio de una sustancia que se coloca en un recipiente en un proceso de llenado se supone que es de 20 ml. En forma periódica se escogen 25 recipientes y el contenido de cada uno de éstos se pesa. Se supone que la cantidad que se vacía en cada recipiente se encuentra aproximada, en forma adecuada por una distribución normal con desviación estándar* 0.5 *ml. Si se sospecha que la cantidad promedio se encuentra fuera de control, las hipótesis pueden plantearse como:*

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 20, \\ H_1 &: \quad \mu_2 \neq 20. \end{aligned}$$

La conclusión de que el sistema es encuentra fuera de control debe alcanzarse mediante el rechazo de la hipótesis nula.

Ejemplo 5.5.2 *Si se sospecha que una moneda está sesgada de tal manera que cara tiene menor oportunidad de ocurrir que cruz, entonces las hipótesis se pueden plantear de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p = 0.5 \\ H_1 &: \quad p < 0.5. \end{aligned}$$

La conclusión de que H_1 es cierta se obtendrá a partir del rechazo de H_0.

5.6. Nivel de significancia

5.6.1. Errores tipo I(alfa) y tipo II(beta)

Las pruebas de hipótesis se diseñan de tal modo que la evidencia que proviene de la muestra permita rechazar o aceptar la hipótesis nula. Debe quedar claro que una decisión tomada a partir de una muestra nunca tendrá una certeza total. Los errores que pueden presentarse en una prueba de hipótesis se muestran en la siguiente tabla:

	H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Se acepta H_0	Decisión correcta	Error tipo II
Se rechaza H_0	Error tipo I	Decisión correcta

Tabla 5.4: Errores tipo I y II

Definición 5.6.1 (Error tipo I) *Se comete un error tipo I si se rechaza la hipótesis nula dado que es verdadera. La probabilidad de este error se denota por α.*

Definición 5.6.2 (Error tipo II) *Se comete un error de tipo II si se acepta la hipótesis nula dado que es falsa. La probabilidad de este error de denota por β.*

De las deficiones anteriores se sigue que:

$$\alpha = P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ es cierta}), \tag{5.68}$$

$$\beta = P(\text{aceptar } H_0 | H_0 \text{ es falsa}). \tag{5.69}$$

Definición 5.6.3 (Nivel de significancia) *Se conoce como nivel de significancia a la probabilidad de cometer un error de tipo I; es decir, rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es cierta.*

El nivel de significancia α debe interpretarse de la misma manera que se interpretó la probabilidad de un intervalo de confianza; es decir, un nivel de significancia α significa que se rechazará la hipótesis nula en un $100\alpha\,\%$ de las veces.

Supóngase que el nivel de significancia es $\alpha = 0.01$; es decir, se cometerá un error de tipo I o se rechazará la hipótesis nula dado que es cierta en un 1 % de las veces, mientras que en un 99 % de las veces se aceptará la hipótesis nula dado que es cierta.

Para tomar una decisión sobre una hipótesis nula, una vez que se cuenta con la información de la muestra, es necesario tener una regla o un procedimiento prestablecido con el cual la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis se defina de manera unívoca. En otras palabras, se debe decidir hasta que punto serán aceptables las fluctuaciones entre la medición y el valor real del parámetro poblacional.

Definición 5.6.4 (Prueba o dócima, y Estadístico de prueba) *Una prueba o dócima de una hipótesis estadística con respecto a alguna cárácterística desconocida de la población es cualquier regla para decidir si se rechaza o no la hipótesis nula, con base a la información de una muestra aleatoria de la población. Esta prueba requiere del uso de un estadístico cuya distribución o la distribución de una función de él debe ser conocida. El estadístico se conoce como estadístico de prueba.*

Ejemplo 5.6.1 *Considérese el ejemplo 5.5.1, para el cual se establecieron las hipótesis como:*

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 20, \\ H_1 &: \quad \mu_2 \neq 20. \end{aligned}$$

Si ahora se define la prueba como: Se juzga el proceso como fuera de control cuando la media muestral $\overline{X}$ es menor o igual a 19.8 *o mayor o igual* 20.2 *ml. En esta caso la prueba se ha establecido en términos de la estadístico $\overline{X}$ el cual tiene distribución normal $N(\mu, \sigma^2/n)$.*

Como se mostró en el ejemplo anterior, la prueba se define en términos de ciertos valores del estadístico de prueba para los cuales la hipótesis nula debe ser rechazada. La región definida por estos valores se conoce como región crítica. En general para un estadístico de prueba T las pruebas pueden plantearse como:

a) Rechazar H_0 si T es mayor que un valor establecido c.

b) Rechazar H_0 si T es menor que un valor establecido c.

c) Rechazar H_0 si T es mayor que un valor establecido c_2 y menor que un valor establecido c_1.

Los valores c en cada prueba se conocen como valores críticos. Las pruebas definidas como en los incisos a) y b) se conocen como pruebas unilaterales o de una cola , mientras que las pruebas definidas como en el inciso c) se conocen como bilaterales o de doble cola. Las pruebas unilaterales se definen en términos de un único valor crítico, mientras que las pruebas bilaterales se definen en términos de dos valores críticos. La clasificación de las pruebas de hipótesis se debe a la forma en que el valor crítico o los valores críticos dividen el rango del estadístico de prueba. Las regiones se conocen como región crítica (o de rechazo) y región de aceptación (o de confianza). Lo anterior se representa en la figura 5.9. El riesgo de tomar una decisión equivocada siem-

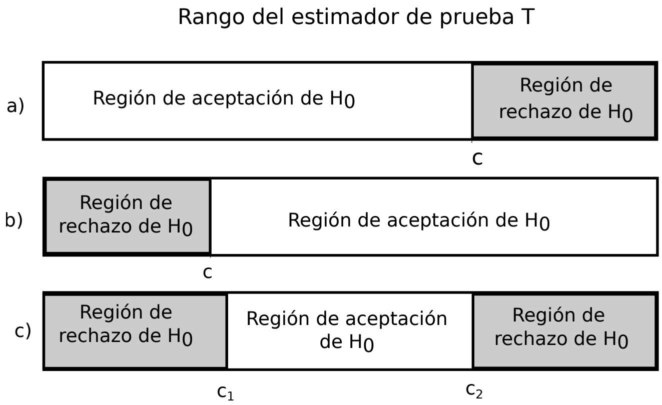


Figura 5.9: Pruebas de hipótesis de una y de dos colas

pre estará presente en las pruebas de hipótesis. Los riesgos que se asumen al tomar una decisión basada en una prueba de hipótesis definirán la calidad de la prueba. En general, se puede hacer que el valor de α sea tan pequeño como se quiera; sin embargo, esto incrementa la probabilidad de cometer un error de tipo II, por fortuna, ambas probabilidades pueden disminuirse aumentando el tamaño de la muestra. Lo anterior se analizará en la siguiente sección.

5.7. Prueba de hipótesis para la media

Para ejemplificar los conceptos anteriores considérese que se tiene una población con distribución normal $N(\mu, \sigma)$ y que las hipótesis se establecen

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = \mu_0, \\ H_1 &: \quad \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

Si se utiliza el estadístico prueba $\overline{X}$, y la prueba se establece como: Rechazar H_0 si $\overline{X} > c$, donde $\overline{X}$ es la media muestral y c es una constante. De acuerdo con la propiedad reproductiva de la distribución normal (teorema 4.94) y el teorema 5.1.1, $\overline{X}$ tiene distribución normal $N(\mu, \sigma^2/n)$, por lo tanto el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$$

tiene distribución normal estándar.
Supóngase que se conoce el tamaño de la muestra y se especifica un valor de c para la prueba, entonces el nivel de significancia se determina de la siguiente manera: Dado que Z es una función uno a uno y sobre de X, de acuerdo con el teorema 2.1.2,

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{rechazar } H_0 \,|\, H_0 \text{ es cierta}),\\
&= P(\overline{X} > c \,|\, \mu = \mu_0),\\
&= 1 - P(\overline{X} \leq c \,|\, \mu = \mu_0),\\
&= 1 - P\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right),\\
&= 1 - P\left(Z \leq \frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right),\\
&= 1 - F\left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \qquad (5.70)
\end{aligned}$$

donde

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

De la ecuación 5.70 se obtiene

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= F\left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \qquad (5.71)\\
&= F(z_c), \qquad (5.72)
\end{aligned}$$

donde

$$z_c = \frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}. \qquad (5.73)$$

El valor z_c corresponde al cuantil $z_{1-\alpha}$. Es decir, el área de la curva normal estándar a la izquierda de z_c es $1-\alpha$. El estadístico Z puede usarse para determinar la prueba considerando que para Z la región de rechazo está definida por $Z > z_c$. La región crítica y de aceptación de H_0 en términos de z_c se muestran en la figura 5.10.

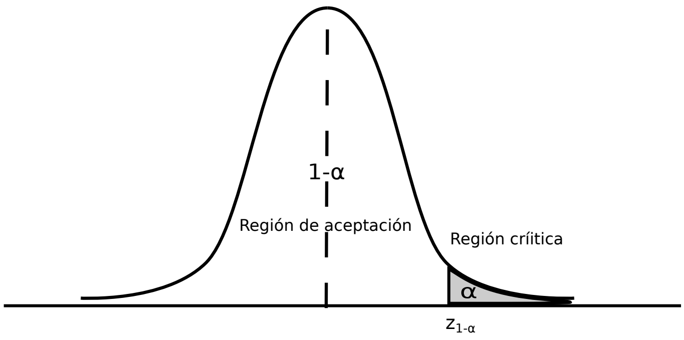


Figura 5.10: Prueba unilateral de cola derecha

Para las otras pruebas, bajo un procedimiento análogo, se determinan las regiones críticas y de aceptación para el estadístico Z en términos de los cuantiles correspondientes. Lo anterior se muestra en las figuras 5.11 y 5.12.

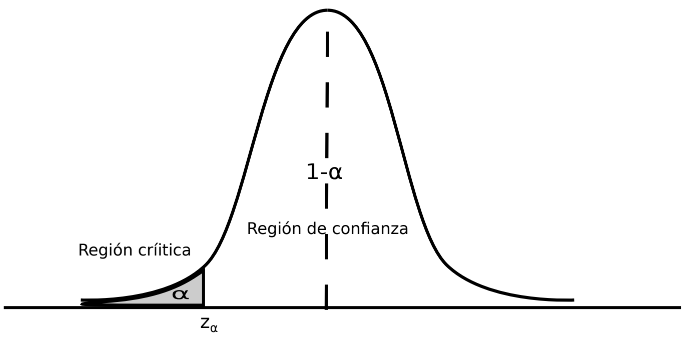


Figura 5.11: Prueba unilateral de cola izquierda

Obsérvese que para una prueba de dos colas con un nivel de significancia α, la hipótesis nula se rechazará para valores del estadístico Z que queden dentro de la región crítica ($Z < z_{\alpha/2}$ o $Z > z_{1-\alpha/2}$) o de manera equivalente, que queden fuera de la región de confianza. La región de confianza para una prueba de doble cola es equivalente el intervalo de confianza que se definió en la sección 5.2, $z_{\alpha/2} < Z << z_{1-\alpha/2}$; por lo tanto, las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza deben considerarse como temas equivalentes.

La ecuación 5.71 permite avanzar en dos sentidos. Si se conocen c y el tamaño de la muestra n, entonces es posible determinar z_1 y con esto el nivel de significancia α. Por otro lado, si se conocen n y α, entonces es posible calcular el valor crítico c y con éste las regiones crítica y de aceptación.

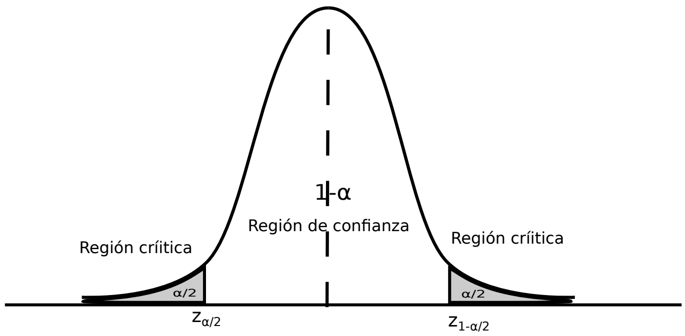


Figura 5.12: Prueba de hipótesis de doble cola

El interés se centrará ahora en determinar si una prueba es mejor que otra. El principio básico que debe guiar una buena prueba consiste en mantener baja la probabilidad de cometer los errores tipo I y II.

Ejemplo 5.7.1 *Considérese que se tiene una población con distribución normal $N(20, 0.5^2)$ y que de ella se extrae una muestra de tamaño $n = 25$ se desea probar las hipótesis*

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \quad \mu = 20, \\
H_1 &: \quad \mu > 20.
\end{aligned}
$$

mediante las pruebas:
Prueba A: Se rechaza H_0 si $\overline{X} > 20.1$,
Prueba B: Se rechaza H_0 si $\overline{X} > 20.2$,
Prueba C: Se rechaza H_0 si $\overline{X} > 20.3$,
determine el nivel de significancia para las tres pruebas.

De acuerdo con la ecuación 5.70 se tienen los soguientes niveles de significancia:
Para la prueba A:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 1 - F\left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \\
&= 1 - F\left(\frac{(20.1-20)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\
&= 1 - F(1), \\
&= 1 - 0.8413 = 0.1587.
\end{aligned}
$$

Para la prueba B:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - F\left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right),\\ &= 1 - F\left(\frac{(20.2-20)\sqrt{25}}{0.5}\right),\\ &= 1 - F(2),\\ &= 1 - 0.9772 = 0.0228.\end{aligned}$$

Para la prueba C:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - F\left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right),\\ &= 1 - F\left(\frac{(20.3-20)\sqrt{25}}{0.5}\right),\\ &= 1 - F(3),\\ &= 1 - 0.9987 = 0.0013.\end{aligned}$$

Para las pruebas anteriores se necesita determinar la probabilidad de cometer un error de tipo II; es decir, aceptar la hipótesis nula dado que es falsa.

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= P(\text{ aceptar } H_0 \,|\, H_0 \text{ es falsa})\\ &= P(\overline{X} \leq c \,|\, \mu > 20).\end{aligned}$$

Para evaluar la probabilidad anterior se debe asignar un valor específico a μ. Supóngase que $\mu = 20.1$, en este caso,

$$\begin{aligned}\beta(20.1) &= P(\overline{X} \leq c \,|\, \mu > 20.1) = P(Z \leq \frac{(c-20.1)\sqrt{n}}{\sigma})\\ &= = F(\frac{(c-20.1)\sqrt{n}}{\sigma})\end{aligned}$$

Mediante la tabla 4 del apéndice E se obtiene los siguientes errores tipo II:
Para la prueba A:

$$\begin{aligned}\beta(20.1) &= F\left(\frac{(c-20.1)\sqrt{25}}{0.5}\right),\\ &= F(0) = 0.5000.\end{aligned}$$

Para la prueba B:

$$\begin{aligned} \beta(20.1) &= F\left(\frac{(20.2-20.1)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\ &= F(1) = 0.8413. \end{aligned}$$

Para la prueba C:

$$\begin{aligned} \beta(20.1) &= F\left(\frac{(20.3-20.1)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\ &= F(2) = 0.9772. \end{aligned}$$

Se puede observar que al aumentar el valor crítico se puede disminuir la probabilidad de cometer un error de tipo I, pero en este proceso la probabilidad de cometer un error de tipo II se incrementa. En este ejemplo se ha calculado el error tipo II para un valor específico de μ. Mediante el uso de la función de operación carracterística, que se define a continuación, es posible obtener algunos resultados generales sobre el comportamiento de las pruebas.

Definición 5.7.1 *Se conoce como función de operación característica ,O.C, a la función de la media definida como:*

$$L(\mu) = P(\text{ aceptar } H_0 \,|\, \mu). \tag{5.74}$$

Esta función permitirá establecer las propiedades de la prueba. De acuerdo con nuestras hipótesis

$$\begin{aligned} L(\mu) &= P(\text{aceptar } H_0 \,|\, \mu), \\ &= P(\overline{X} \leq c \,|\, \mu), \\ &= P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{(c-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \\ &= P\left(Z \leq \frac{(c-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \\ &= F\left(\frac{(c-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \end{aligned} \tag{5.75}$$

donde

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

De las propiedades de la función de distribución acumulada F se deducen las siguientes propiedades de la función de operación característica.

a) $\lim_{\mu \to -\infty} L(\mu) = 1.$

b) $\lim_{\mu \to \infty} L(\mu) = 0.$

c) $\frac{d}{d\mu} L(\mu) < 0, \quad \forall \mu.$

Por las propiedades anteriores, la función de operación carácterística tiene la forma general que se muestra en la figura 5.13

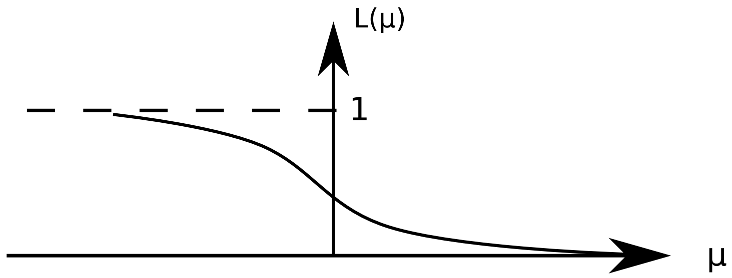


Figura 5.13: Función de operación característica

En el ejemplo 5.7.2 se mostró como determinar las probabilidades de los errores tipo I y II una vez que se han especificado el valor crítico c y el tamaño de la muestra n. En la práctica, lo que realmente se hace es establecer previamente el nivel de significancia y el tamaño de la muestra y con éstos determinar el valor crítico (o los valores críticos) para la prueba, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.7.2 *Considérese que se tiene una población con distribución normal $N(20, 0.5^2)$ y que de ella se extrae una muestra de tamaño $n = 25$ determínese el valor crítico c para la prueba*

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 20, \\ H_1 &: \quad \mu > 20. \end{aligned}$$

de tal manera que se rechace la hipótesis nula un 1 % de las veces siempre que $\overline{X} > c$.

Solución: El nivel de significancia $\alpha = 0.01$, y puede expresarse en términos de la función de operación característica como, $\alpha = 1 - L(20)$ de manera equivalente $L(20) = 0.99$. De la ecuación 5.75 se tiene

$$\begin{aligned} 0.99 &= L(20), \\ &= F\left(\frac{(c-20)\sqrt{25}}{0.5}\right), \end{aligned}$$

La tabla de la distribución normal se obtiene el cuantil correspondiente al área 0.99, luego

$$\frac{(c-20)\sqrt{25}}{0.5} = 2.33.$$

Despejando se obtiene $c = 20.23$. Esto significa que si se rechaza la hipótesis nula cada vez que la media muestral es mayor que 20.23, entonces se garantiza que ocurrirá un error de tipo 1 el 1 % de las veces. Al especificar α y n la función de operación característica queda definida completamente y podrá usarse para evaluar cualquier valor de μ. Al especificar α y n se impone la condición de que la curva de operación catacterística pase por un punto particular, como se muestra en la figura 5.14. Si se especifican dos puntos

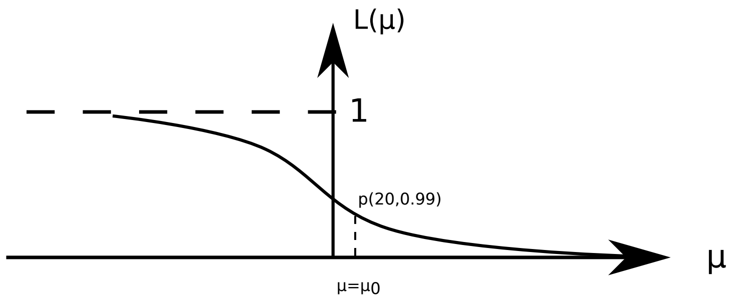


Figura 5.14: Función de operación característica definida para α y n

para la curva de la función de operación característica, entonces se pueden determinar simultáneamente (para una prueba) el valor crítico c y el tamaño de la muestra n. Los puntos de la curva se especifican como:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= F\left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \\ \beta &= F\left(\frac{(c-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

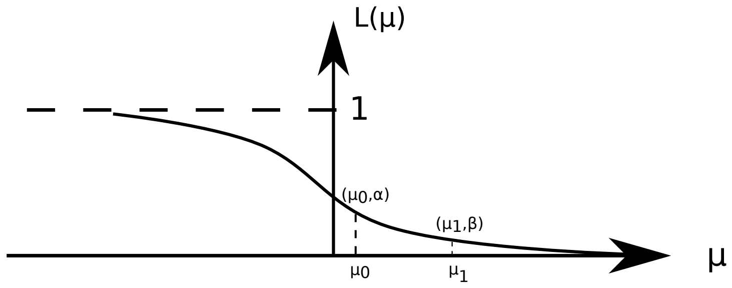


Figura 5.15: Función de operación característica definida para dos puntos

La solución se obtiene a partir de los cuantiles $z_{1-\alpha}$ y z_β dado que,

$$z_{1-\alpha} = \left(\frac{(c-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \tag{5.76}$$

$$z_\beta = \left(\frac{(c-\mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \tag{5.77}$$

dividiendo las ecuacines anteriores se obtiene

$$c = \frac{\mu_1 z_{1-\alpha} - \mu_0 z_\beta}{z_{1-\alpha} - z_\beta}. \tag{5.78}$$

Sustituyendo la ecuación 5.78 en la ecuación 5.76 se obtiene

$$n = \left(\frac{\sigma z_{1-\alpha}}{c-\mu_0}\right)^2. \tag{5.79}$$

Se ha desarrollado esta sección exponiendo los conceptos en términos de una prueba unilateral derecha, las pruebas restantes se realizan con el mismo enfoque, por lo cual se espera que el lector pueda desarrollarlos por sí mismo sin dificultad. Por otro lado, debe notarse que existe una relación muy cercana entre las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza. De hecho, se pueden establecer casos de pruebas de hipótesis para cada una de las situaciones estudiadas en la sección de intervalos de confianza. En cada caso debe considerarse el estadístico de prueba adecuado, sobre todo cuando se trabaje con muestras pequeñas y no se pueda garantizar la aplicación del teorema del límite central.

Ejemplo 5.7.3 *La cantidad promedio de una sustancia que se coloca en un recipiente en un proceso de llenado se supone que es de 20 ml. En forma periódica se escogen 25 recipientes y el contenido de cada uno de éstos se* *pesa. Se juzga el proceso como fuera de control cuando la media muestral* $\overline{X}$ *es menor o igual a* 19.8 *o mayor o igual* 20.2 *ml. Se supone que la cantidad que se vacía en cada recipiente se encuentra distribuida normalmente con desviación estándar* 0.5 *ml.*

a) Enuncie las hipótesis nula y alterna que son apropiadas para esta situación.

b) Obtener la probabilidad del error tipo I.

Solución:

a) Las hipótesis nula y la alterna se definen como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 20, \\ H_1 &: \quad \mu \neq 20. \end{aligned}$$

Se rechaza H_0 si $\overline{X} > 20.2$ o $\overline{X} < 19.8$

b) Dado que la población tiene distribución normal $N(20, 0.5^2)$, entonces $\overline{X}$ tiene distribución normal $N(20, 0.5^2/25)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{ rechazar } H_0 \,|\, H_0 \text{ es cierta }) \\ &= P(|\overline{X} - 20| > 0.2), \\ &= 1 - P(|\overline{X} - 20| \leq 0.2), \\ &= 1 - P(19.8 \leq \overline{X} \leq 20.2), \\ &= 1 - P\left(\frac{(19.8 - 20)\sqrt{25}}{0.5} \leq Z \leq \frac{(20.2 - 20)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\ &= 1 - P\left(\frac{(19.8 - 20)\sqrt{25}}{0.5} \leq Z \leq \frac{(20.2 - 20)\sqrt{25}}{0.5}\right), \\ &= 1 - P(-2 \leq Z \leq 2) = 1 + F(-2) - F(2), \\ &= 1 + 0.0228 - 0.9772 = 0.0456. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.7.4 *El propietario de un automóvil compacto sospecha que la distancia promedio por galón es menor que la especificada por la EPA, la cual es de 30 millas por galon. El propietario observa la distancia recorrida por galón en nueve ocasiones y obtiene los siguientes datos: 28.3, 31.2, 29.4, 27.2, 30.8, 28.7, 29.2, 26.5, 28.1. Después de una investigación el propietario concluye que la distancia recorrida por galón es una variable aleatoria distribuida normalmente com media* $\mu = 30$ *y desviación estándar de* 1.4*, millas por galón. Con base a esta información, ¿Se encuentra apoyada la sospecha del propietario con* $\alpha = 0.01$*?*

Solución: Se proponen las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 30, \\ H_1 &: \quad \mu < 30. \end{aligned}$$

Además se propone una prueba de cola izquierda es decir: Se recharazá H_0 si $\overline{X} < c$. Para determinar el valor crítico c se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{ rechazar } H_0 \,|\, H_0 \text{ es cierta }) \\ &= P(\overline{X} < c \,|\, \mu = 30), \\ &= P(\frac{\overline{X} - 10}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{(c-30)\sqrt{n}}{\sigma}), \\ &= P(Z < \frac{(c-30)\sqrt{n}}{\sigma}), \\ &= F\left(\frac{(c-30)\sqrt{n}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

El cuantil $z_{0.01} = -2.35$ (ver la tabla 4 del apéndice E) de manera que

$$\frac{(c-30)\sqrt{n}}{\sigma} = -2.35.$$

Despejando c y sustituyendo los valores de n y σ se obtiene $c = 28.90$. Por otro lado, la media muestral es $\overline{x} = 28.82$. Dado que $\overline{x}$ está dentro de la zona crítica, entonces la hipótesis nula debe ser rechazada con un nivel de significancia $\alpha = 0.01$.

5.8. Prueba de hipótesis para la varianza

Considérese que se desean probar hipótesis donde el parámetro poblacional θ que se definió en la sección 5.5.1 corresponde a la varianza, y si la pobación de la cual se obtiene la muesta tiene distribución normal, entonces de la misma manera que se establecieron pruebas de hipótesis para la media puedense establecer para la varianza, como se muestra a continuación. Considérese que se desea probar la hipótesis de doble cola

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2, \\ H_1 &: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2. \end{aligned}$$

En este caso el estadístico de prueba es

$$\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2},$$

el cual tiene distribución chi cuadrado con $n-1$ grados de libertad. La hipótesis nula se rechazará con nivel de significancia α para los valores del estadístico de prueba χ^2 que quedan dentro de la región crítica que se muestra en la figura 5.16.

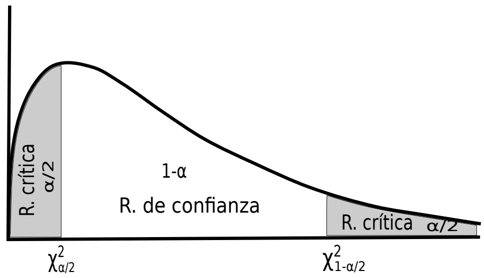


Figura 5.16: Prueba de hipótesis de dos colas para la varianza

Ejemplo 5.8.1 *Experiencias pasadas indican que el tiempo para que alumnos del último año terminen un examen estandarizado es una variable aleatoria normal con una desviación estándar de 6 minutos. Pruebe que la hipótesis de que* $\sigma = 6$ *en contraposición de que* $\sigma < 6$*, si una muestra aleatoria de 20 estudiantes tiene una desviación estándar muestral* $s = 4.51$ *al realizar este examen. Utilice un nivel de significancia de* 0.05

Solución: Considérese las hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma^2 = 36, \\ H_1 &: \quad \sigma^2 < 36. \end{aligned}$$

Se rechazará H_0 si $\chi^2 < \chi^2_\alpha$.
Se trata de una prueba unilateral izquierda. El cuantil χ^2_α para $n = 19$ que se obtiene de la tabla 5 (apéndice E) es: $chi^2_{0.05} = 10.11$. Ahora se determinará χ^2 de los datos de la muestra.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(19)(4.51)^2}{36} = 10.68.$$

Dado $\chi^2 = 10.68$ está en la región de confianza, la hipótesis nula no se rechaza para el nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

Si se requiere estimar la igualdad de varianzas de dos poblaciones, las hipótesis se plantean como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma_0^2 = \sigma_0^2, \\ H_1 &: \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2. \end{aligned}$$

En general el estadístico de prueba para dos poblaciones con distribuciones normales y varianzas diferentes es,

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2},$$

el cual tiene distribución F. Bajo la hipótesis nula, el estadístico de prueba se reduce a:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

La hipótesis nula será rechazada con un nivel de significancia α para valores del estadístico de prueba F que quedan dentro de la región crítica que se muestra en la figura 5.17.

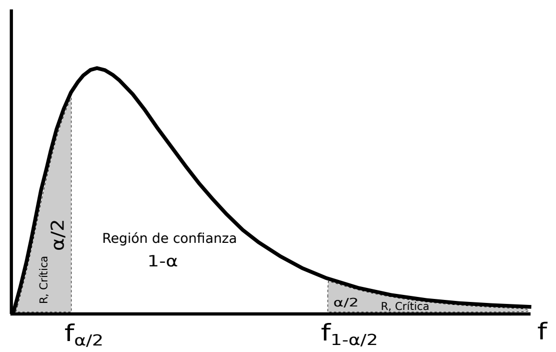


Figura 5.17: Prueba de hipótesis de dos colas para el cociente de varianzas

Ejemplo 5.8.2 *Se lleva a cabo un estudio para comparar el tiempo que tardan hombres y mujeres en armar un producto determinado. Las experiencias anteriores indican que la distribución de tiempo tanto para hombres como para mujeres es aproximadamente normal, pero las varianzas de los tiempos para las mujeres es menor que la de los hombres. Una muestra aleatoria de tiempos para 11 hombre y 14 mujeres arroja los siguientes datos. Pruebe la*

	Hombre	Mujeres
n	11	14
s	6.1	5.3

Tabla 5.5:

hipótesis de que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ *en contraposición a la alternativa* $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$*. Utilice un nivel de significancia de* 0.01.

Solución: La prueba es unilateral derecha; por lo tanto, se requiere del cuantil $f_{1-\alpha}(10, 13)$. De la tabla 7 (apéndice E)se obtiene $f_{0.99}(10, 13) = 4.10$. Al evaluar el estadístico de prueba se obtiene:

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.32.$$

El estadístico de prueba queda fuera de la región crítica; por lo tanto, no se rechaza la hipótesis nula H_0 para el nivel de significancia $\alpha = 0.01$.

Apéndices

Apéndices A

Sobre la baraja inglesa

Entre los juegos de azar, aquellos en los que se reparten cartas son de los preferidos por los jugadores. En este trabajo el interés por las cartas se centra solo en los problemas que estos juegos plantean a las técnicas de conteo y a la probabilidad en sí misma. Por lo anterior, se pondrán algunos términos en contexto.
En general, una baraja consta de un conjunto de cartas (o naipes) de diferentes colores, figuras, números, e incluso letras. Existen dos tipos de barajas que son las más comunmente usadas: La baraja inglesa y la española. Solo se describirá la baraja inglesa: La baraja inglesa consta de cuatro clases diferentes de figuras, las cuales se conocen como palos: corazones, diamantes, tréboles y picas. Las figuras que aparecen en estas cartas tienen estas formas. Las cartas de los palos corazones y diamantes son de color rojo; mientras que las cartas de los palos tréboles y picas son de color negro. Cada palo contiene 13 cartas. Las primeras 9 de ellas están numeradas del 2 hasta el 10. Las 4 cartas restantes se conocen como figuras y se designan mediante letras: J(Jack-jota o sota), Q(Queen-reina), K(King-rey) y A(As), como se muestra en la figura A.1.

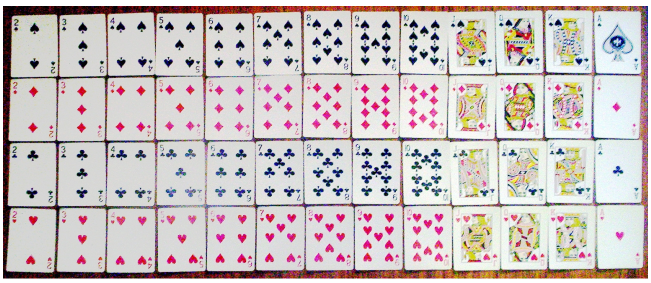


Figura A.1: Baraja inglesa

Los juegos más comunes con la baraja inglesa son: el *poker*, el *bridge* y la *canasta*. Solo se especificará aquí algunos términos propios del juego de **poker**.
En el juego de *poker* cada jugador recibe 5 cartas. Las cinco cartas que un jugador recibe se conocen como manos. Las más codiciadas, por su valor en el juego, son:
Escalera: Cinco cartas consecutivas, sin importar el palo de las mismas.
Escalera de color: Cinco cartas consecutivas del mismo palo.
Escalera real: La mejor mano posible en *poker*. Escalera desde el Diez al As, del mismo palo.

Estos datos son los que interesan para los objetivos de este trabajo.

Apéndices B

Distribución de Poisson

Conidérese las tres propiedades que definen el proceso de Poisson.

1. Los eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.
2. La probabilidad de que un evento sencillo ocurra en un intervalo de tiempo pequeño es proporcional a la magnitud del intervalo.
3. La probabilidad de que más de un evento sencillo ocurra en un intervalo pequeño de tiempo es despreciable.

Para deducir la función de probabilidad para una variable aleatoria de Poisson a partir del proceso de Poisson, considérese la siguiente notación:

$$P_0(t) \equiv \text{Probabilidad de que ningún evento ocurra en el intervalo de tiempo t}$$

$$P_x(t) \equiv \text{Probabilidad de que x eventos ocurran en el intervalo de tiempo t}$$

$$P_0(\Delta t) \equiv \text{Probabilidad de que ningún evento ocurra en el intervalo } \Delta t$$

$$P_x(\Delta t) \equiv \text{Probabilidad de que x eventos ocurran en el intervalo } \Delta t.$$

El interés se centra en determinar $P_x(\Delta t)$, a partir del proceso de Poisson, para tal fin, se comenzará por determinar $P_x(\Delta t)$ para los primeros valores de X y finalmente se propondrá la fórmula general que podrá ser probada mediante el método de inducción matemática.

i) Para X=0:
Considérese el siguiente esquema, el cual permite tener una imagen del proceso.

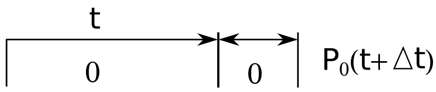


Figura B.1:

La probabilidad de ningún evento ocurra en el intervalo de tiempo $t+\Delta t$ solo puede ocurrir de una manera: 0 eventos en t y 0 eventos en Δt. Como los intervalos t y Δt son disjuntos, entonces, de acuerdo con el punto 1, los eventos que en estos intervalos ocuren son independientes, por lo tanto

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t). \tag{B.1}$$

Por otro lado, los eventos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$, son complementarios, ya que de acuerdo con el punto 3, la probabilidad de que más de un evento ocurra en un intervalo de tiempo pequeño es cero, por lo anterior

$$P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t). \tag{B.2}$$

Sustituyendo la ecuación B.2 en la ecuación B.1 se obtiene

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1 - P_1(\Delta t)). \tag{B.3}$$

Ahora considérese el punto 2, el cual especifica que la probabilidad de un evento simple ocurra en Δt es proporcional a este intervalo pequeño. Sea λ la constante de proporcionalidad, entonces

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t. \tag{B.4}$$

Sustituyendo la ecuación B.4 en la ecuación B.3 se obtiene

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda \Delta t). \tag{B.5}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t). \tag{B.6}$$

Ahora considérese el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.6

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} &= -\lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_0(t), \\ \frac{d}{dt} P_0(t) = -\lambda P_0(t). \end{aligned} \tag{B.7}$$

En este punto es necesario recurrir a los métodos de solución para ecuaciones diferenciales. La ecuación anterior es separable, de modo que,

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{P_0(t)} &= -\lambda t, \\ \ln P_0(t) &= -\lambda t + \ln c_0. \end{aligned} \tag{B.8}$$

De la ecuación B.8 se obtiene

$$\begin{aligned} P_0(t) &= e^{-\lambda t + \ln c_0}, \\ &= e^{\ln c} e^{-\lambda t}, \\ &= c e^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Finalmente, se evaluará $P_0(t)$ en $t = 0$ para determinar la constante c_0. Dado que la probabilidad de que ningún evento ocurra en $t = 0$ es el evento seguro, entonces

$$P_0(0) = c_0 = 1, \tag{B.10}$$

de manera que

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{B.11}$$

ii)Para X=1

Considérese el esquema siguiente:

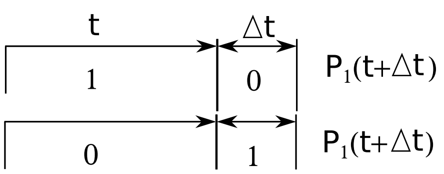


Figura B.2:

Existen dos eventos mutuamente excluyentes mediante los cuales se puede generar un evento en el intervalo de tiempo $t + \Delta t$. De acuerdo con el axioma 3 de la probabilidad y el punto 1 del proceso de Poisson se tiene

$$P_1(t+\Delta t) = P_0(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_1(t). \tag{B.12}$$

Como los eventos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$, son complementarios (de acuerdo con el punto 3), entonces

$$P_0(\Delta t) = (1 - P_1(\Delta t)). \tag{B.13}$$

Sustituyendo la ecuación B.13 en la ecuación B.12 se obtiene

$$P_1(t + \Delta t) = P_0(t)P_1(\Delta t) + (1 - P_1(\Delta t))P_1(t), \tag{B.14}$$

además, por el punto 2 se tiene que

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t. \tag{B.15}$$

Sustituyendo la ecuación B.15 en la ecuación B.14 se obtiene

$$P_1(t + \Delta t) = \lambda P_0(t)\Delta t + (1 - \lambda \Delta t)P_1(t). \tag{B.16}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t). \tag{B.17}$$

Ahora considérese el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.17

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_1(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_0(t), \\ \frac{d}{dt} P_1(t) + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t). & \qquad \text{(B.18)} \end{aligned}$$

La ecuación B.18 representa una ecuación diferencial cuya solución se obtiene mediante el método conocido como: método del factor integrante, el cual consiste en hallar una función $u(t)$ tal que al multiplicar ambos lados de la ecuación B.18 por esta función, el lado izquierdo se convierta en

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right).$$

Para la acuación anterior se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lambda u(t)P_0(t) &= u(t)\frac{d}{dt}\left(P_1(t)\right) + \lambda u(t)P_1(t), & \text{(B.19)} \\ &= u_1(t)\frac{d}{dt}\left(P_1(t)\right) + P_1(t)\frac{d}{dt}\left(u(t)\right), & \text{(B.20)} \\ &= \frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right). & \text{(B.21)} \end{aligned}$$

Para que las tres ecuaciones anteriores sean consistentes, se debe satisfacer que:

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)P_1(t)\right) = \lambda u(t).$$

Esta ecuación es separable y su solución es:

$$u(t) = ce^{\lambda t}.$$

Considérese la constante $c = 1$, ya que para cualquier $c \neq 0$ su valor específico es irrelevante, ya que, al multiplicar ambos lados de la ecuación B.18 ésta se anula por todas partes. De manera que

$$u(t) = e^{\lambda t}. \tag{B.22}$$

Sustituyendo B.22 en la ecuación B.21 se obtiene

$$e^{\lambda t}P_0(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right), \tag{B.23}$$

donde $P_0(t)$ es la función que se determinó en el inciso i. Sustituyendo $P_0(t)$ en la ecuación B.23 se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right), \\ \lambda &= \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right). \end{aligned} \tag{B.24}$$

Integrando la ecuación B.24 se obtiene

$$e^{\lambda t}P_1(t) = \lambda t + c_1,$$

de manera que

$$P_1(t) = (\lambda t + c_1)e^{-\lambda t}$$

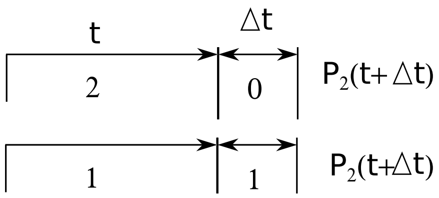
Finalmente evaluando en $t = 0$ se obtiene, el evento imposible $P_1(0) = 0$, lo que permite concluir que $c_1 = 0$, de manera que

$$P_1(t) = (\lambda t)e^{-\lambda t}. \tag{B.25}$$

iii) Para X=2

Nuevamente, se tienen dos eventos mutuamente excluyentes que generan dos eventos en el intervalo $t + \Delta t$, como se muestra en el siguiente esquema. De la misma manera como se procedió en los incisos anteriores se obtiene para este caso:

$$P_2(t + \Delta t) = P_1(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_2(t). \tag{B.26}$$



Usando las propiedades del proceso de Poisson como en los incisos anteriores se obtiene

$$P_2(t+\Delta t) = \lambda P_1(t)\Delta t + (1-\lambda\Delta t)P_2(t). \tag{B.27}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_2(t+\Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t). \tag{B.28}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.28

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_2(t+\Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_2(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_1(t), \\ \frac{d}{dt}P_2(t) + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t). \end{aligned} \tag{B.29}$$

Al aplicar el método del factor integrante para resolver la ecuación anterior se obtiene

$$P_2(t) = \left(\frac{(\lambda t)^2}{2} + c_2\right)e^{-\lambda t}.$$

Finalmente, evaluando en $t = 0$ se obtiene el evento imposible $P_2(0) = 0$, lo que permite concluir que $c_2 = 0$, de manera que

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}. \tag{B.30}$$

iv) Para X=x

A partir de los resultados anteriores resulta razonable proponer la siguiente expresión general para la distribución de Poisson.

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{B.31}$$

Para terminar este apartado, se probará validez de la ecuación B.31 mediante el método de inducción matemática.

a) Evaluando la fórmula para x=0, se obtiene

$$f(0) = e^{-\lambda t}, \tag{B.32}$$

lo que coincide con $P_0(t)$ dado por la ecuación B.11.

b) Supóngase que la fórmula es válida para el entero $x \geq 0$; es decir

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}. \tag{B.33}$$

c) Demuéstrese que la fórmula dada es válida para x+1.
Una vez más, considérese el siguiente esquema. Nuevamente, se tienen dos

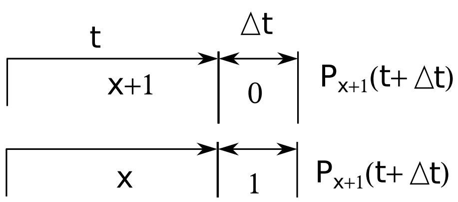


Figura B.3:

eventos mutuamente excluyentes que generan 2 eventos en el intervalo $t+\Delta t$, manera que

$$P_{x+1}(t+\Delta t) = P_x(t)P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t)P_{x+1}(t). \tag{B.34}$$

Usando las propiedades del proceso de Poisson como en los incisos i) y ii) de la primera parte,

$$P_{x+1}(t+\Delta t) = \lambda P_x(t)\Delta t + (1-\lambda\Delta t)P_{x+1}(t). \tag{B.35}$$

Desarrollando el álgebra en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{P_x(t+\Delta t) - P_{x+1}(t)}{\Delta t} + \lambda P_{x+1}(t) = \lambda P_x(t). \tag{B.36}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ en ambos lados de la ecuación B.36

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{x+1}(t+\Delta t) - P_{x+1}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_{x+1}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \lambda P_x(t), \\ \frac{d}{dt}P_{x+1}(t) + \lambda P_{x+1}(t) = \lambda P_x(t). & \qquad \text{(B.37)} \end{aligned}$$

Mediante el método del factor integrante para resolver la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{d}{dt}(u(t)P_{x+1}(t)) = \lambda u(t)P_x(t). \tag{B.38}$$

Al sustituir $u(t) = e^{\lambda t}$ y la ecuación B.33 en la ecuación B.38 se obtiene

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_{x+1}(t)) = \frac{\lambda(\lambda t)^x}{x!}. \tag{B.39}$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} P_{x+1}(t) &= \left(\frac{\lambda^{x+1}t^{x+1}}{(x+1)x!} + c_{x+1}\right)e^{-\lambda t}, \\ &= \left(\frac{(\lambda t)^{x+1}}{(x+1)!} + c_{x+1}\right)e^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{B.40}$$

Finalmente, evaluando en $t = 0$ se obtiene el evento imposible $P_{x+1}(0) = 0$, lo cual permite concluir que $c_{x+1} = 0$, de manera que

$$P_{x+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{x+1}e^{-\lambda t}}{(x+1)!}. \tag{B.41}$$

Se observa que la ecuación B.41 coincide con lo que la fórmula B.31 genera al evaluarla en $x + 1$, por lo tanto, la fórmula general queda demostrada.

Apéndices C

Cálculo de las integrales usadas

C.1. Integral para la normal estándar

Verifique que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Sea

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}} dx = \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

entonces,

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-\frac{X^2}{2}} dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right), \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy. \end{aligned}$$

Para continuar se hace un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta, &\qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ y = r\operatorname{sen}\theta, &\qquad 0 \le r < \infty. \end{aligned}$$

El jacobiano correspondiente es

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}, \\ &= r. \end{aligned}$$

Considerando lo anterior,

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy, \\
&= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} r d\theta dr, \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r dr, \\
&= -\frac{\pi}{2} e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, extrayendo la raíz cuadrada se obtiene

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

C.2. Integral para la distribución gama

Verifique que

$$I = \frac{1}{(r-1)!} \int_\mu^\infty u^{r-1} e^{-u} du = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\mu}(\mu)^k}{k!}.$$

Multiplicando por $(r-1)!$ se obtiene,

$$I^* = (r-1)! I = \int_\mu^\infty u^{r-1} e^{-u} du$$

Se procede mediante el método de integración por partes:
Si

$$w = u^{r-1} \quad \text{y} \quad dz = e^{-u} du,$$

entonces

$$dw = (r-1) u^{(r-2)} du \quad \text{y} \quad z = -e^{-u}$$

El método de integración por partes nos conduce a

$$\begin{aligned}
I^* &= -\, u^{r-1} e^{-u} \Big|_\mu^\infty + (r-1) \int_\mu^\infty u^{r-2} e^{-u} du, \\
&= e^{-\mu} \mu^{r-1} + (r-1) \int_\mu^\infty u^{r-2} e^{-u} du,
\end{aligned}$$

La última integral es del tipo inicial, de manera que integrando por partes $(r-1)$ veces se obtiene el último término, ya que r es un entero; por lo tanto,

$$(r-1)(r-2)\ldots 1 \int_{\mu}^{\infty} e^{-u} du = (r-1)! e^{-\mu}$$

Por lo anterior,

$$I^* = e^{-\mu}\left(\mu^{r-1} + (r-1)\mu^{r-2} + \ldots + (r-1)!\right).$$

Finalmente, al dividir entre $(n-1)!$ obtiene I.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{I^*}{(r-1)!} \\
&= \frac{e^{-\mu}}{(r-1)!}\left(\mu^{r-1} + (r-1)\mu^{r-2} + \ldots + (r-1)!\right), \\
&= e^{-\mu}\left(\frac{\mu^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{\mu^{r-2}}{(r-2)!} + \ldots + 1\right), \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Apéndices D

Las distribuciones t y F

D.1. La distribución t de Student

Teorema D.1.1 *Sea (Z,V) una variable aleatoria bidimensional, donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, mientras que V es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrada (con n grados de libertad). Supóngase que la función de densidad conjunta de Z y V está determinada por*[1]

$$f(z,v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} v^{n/2-1} e^{-\frac{v}{2}}, & -\infty < z < \infty, \\ & 0 < v < \infty, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.1}$$

Si T es una variable aleatoria que se define en términos de Z y V mediante

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}}, \tag{D.2}$$

entonces la función de densidad de la variable aleatoria T está determinada por

$$g(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{D.3}$$

Demostración: De acuerdo con el corolario 4.4.1 se definen,

$$\begin{array}{ll} t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{v}{n}}} = \phi_1(z,v), & -\infty < z < \infty, \\ u = v = \phi_2(z,v), & \quad 0 < v < \infty. \end{array} \tag{D.4}$$

[1]Esto significa que Z y V son variables aleatorias independientes.

La aplicación anterior asigna a cada pareja ordenada (z, v) en el intervalo especificado, una y solo una pareja (t, u) en el intervalo, $-\infty < z < \infty$ y $0 < v < \infty$. También se satisface que a cada pareja ordenada (t, u) en el intervalo, $-\infty < t < \infty$ y $0 < u < \infty$ le corresponde una y solo una pareja ordenada (z, v) en el intervalo $-\infty < t < \infty$ y $0 < u < \infty$. Lo anterior significa que la aplicación es invertible y la aplicación inversa es:

$$\begin{array}{ll} z = \sqrt{\frac{v}{n}}t = \psi_1(t, v), & -\infty < z < \infty, \\ v = u = \psi_2(t, v), & \quad 0 < v < \infty. \end{array} \tag{D.5}$$

De acuerdo con la ecuación 4.27

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t,u) & \frac{\partial}{\partial u}\psi_1(t,u) \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi_2(t,u) & \frac{\partial}{\partial u}\psi_2(t,u) \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{u}{n}} & \frac{1}{2}\frac{T}{\sqrt{nu}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ &= \sqrt{\frac{u}{n}}. \end{aligned}$$

La función de densidad conjunta de las variables T y U se determina de acuerdo con la ecuación 4.26

$$\begin{aligned} g(t,u) &= f(\psi_1(t,u), \psi_2(t,u))|J|, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} u^{n/2-1} e^{-\frac{ut^2}{2n}} e^{-\frac{u}{2}} \left(\sqrt{\frac{u}{n}}\right), \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{n/2-1/2} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}, \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}. \end{aligned}$$

De manera más precisa,

$$g(t,u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})}, & -\infty < t < \infty, \\ & 0 < u < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.6}$$

La función de densidad de la variable aleatoria T corresponde a la marginal de T que se obtiene a partir de la densidad conjunta $g(t, u)$; es decir,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^{-\infty} g(t,u)du, \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-(\frac{u}{2})(1+\frac{t^2}{n})} du, \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variables $w = ku$ donde $k = \frac{1}{2}(1 + \frac{t^2}{n})$ (para los fines de la integración es k una constante), la integral se transforma,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} (\frac{w}{k})^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-w} \frac{1}{k} dw, \\
&= \frac{k^{-\frac{n+1}{2}}}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} w^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-w} dw, \\
&= \frac{k^{-\frac{n+1}{2}}}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} \Gamma(\frac{n+1}{2}), \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} (\frac{1}{k})^{\frac{n+1}{2}}, \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2^{n/2}\sqrt{2\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}, \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.
\end{aligned}$$

La función de densidad de la variable aleatoria T se expresa como,

$$g(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.7}$$

En la figura D.1 se muestran las gráficas de $g(t)$ para los valores $n = 2$ y $n = 5$. En ésta se ha denotado a la normal estándar como $n = \infty$. A continuación se enumeran algunas propiedades de la distribución t de Student.

1. Es simétrica respecto a la recta $y = 0$.

2. Su media es cero.

3. Su varianza es,
$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

4. La distribución t de Student tiende a la distribución normal cuando n tiende a infinito.

5. $t_{1-p} = -t_p$

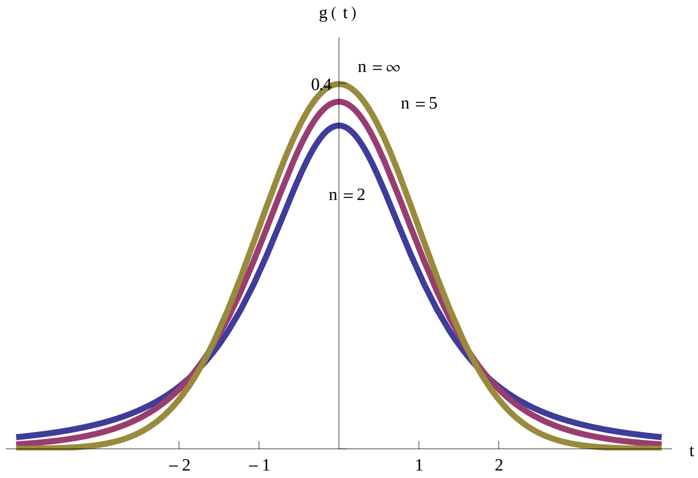


Figura D.1: La distribución t de Student

D.2. La distribución F

Teorema D.2.1 *Sea (U, V) una variable aleatoria bidimensional, donde U y V son variables aleatorias con distribución gama cada una con n y m grados de libertad, respectivamente. Supóngase que la función de densidad conjunta de U y V está determinada por*[2]

$$h(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} u^{n/2-1} e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} v^{m/2-1} e^{-\frac{v}{2}}, & 0 < u < \infty, \\ & 0 < v < \infty, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.8}$$

Si F es una variable aleatoria que se define en términos de U y V mediante

$$F = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{m}}, \tag{D.9}$$

entonces la función de densidad $g(f)$ de la variable aleatoria F está determinada por

$$g(f) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}}, \quad 0 < f < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.10}$$

Demostración: De acuerdo con el corolario 4.4.1

$$\begin{aligned} f &= \frac{\frac{u}{n}}{\frac{v}{m}} = \phi_1(u,v), \quad 0 < u < \infty, \\ w &= v = \phi_2(u,v), \quad 0 < v < \infty. \end{aligned} \tag{D.11}$$

[2]Esto corresponde a la hipótesis de independencia entre U y V.

Las funciones inversas son:

$$\begin{array}{ll} u = \frac{nwf}{m} = \psi_1(f,w), & -\infty < z < \infty, \\ v = w = \psi_2(t,v), & \quad 0 < v < \infty. \end{array} \tag{D.12}$$

De acuerdo con la ecuación 4.27

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial f}\psi_1(f,w) & \frac{\partial}{\partial w}\psi_1(f,w) \\ \frac{\partial}{\partial f}\psi_2(f,w) & \frac{\partial}{\partial w}\psi_2(f,w) \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} \frac{n}{m}w & \frac{n}{m}f \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \\ &= \frac{n}{m}w. \end{aligned}$$

La función de densidad conjunta de las variables F y W se determina de acuerdo con la ecuación 4.26

$$\begin{aligned} g(f,w) &= f(\psi_1(f,w),\psi_2(f,w))|J|, \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} e^{-\frac{nwf}{2m}} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} w^{m/2-1} e^{-\frac{w}{2}} \left(\frac{n}{m}w\right), \\ &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1} e^{-\frac{nwf}{2m}} e^{-\frac{w}{2}} \left(\frac{n}{m}w\right), \\ &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1} e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})} \left(\frac{n}{m}w\right), \end{aligned}$$

De manera más precisa,

$$g(f,w) = \begin{cases} \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1} e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})} \left(\frac{n}{m}w\right), & 0 < f < \infty, \\ & 0 < w < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{D.13}$$

La función de densidad de la variable aleatoria F corresponde a la marginal que se obtiene a partir de la densidad conjunta $g(f,w)$; es decir,

$$\begin{aligned} g(f) &= \int_0^{-\infty} g(f,w)du, \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nwf}{m}\right)^{n/2-1} w^{m/2-1} e^{-\frac{w}{2}(1+\frac{nf}{m})} \left(\frac{n}{m}w\right) dw, \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variables $z = kw$ donde $k = \frac{1}{2}(1 + \frac{nf}{m})$ (para los fines de la integración es k una constante), la integral se transforma,

$$\begin{aligned}
g(f) &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \int_0^{\infty} \left(\frac{nfz}{km}\right)^{n/2-1} \left(\frac{z}{k}\right)^{m/2-1} e^{-z} \left(\frac{nz}{mk}\right) \frac{1}{k} dz, \\
&= \frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^{\infty} \left(\frac{nfz}{m}\right)^{n/2-1} z^{m/2-1} e^{-z} \left(\frac{nz}{m}\right) dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^{\infty} (fz)^{n/2-1} z^{m/2-1} e^{-z} z dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^{\infty} z^{n/2-1} z^{m/2-1} z e^{-z} dz, \\
&= \frac{(\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}} \int_0^{\infty} z^{\frac{n+m}{2}-1} z e^{-z} dz, \\
&= \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)k^{(n+m)/2}}, \\
&= \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}},
\end{aligned}$$

La función de densidad de la variable aleatoria F se expresa como,

$$g(f) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](\frac{n}{m})^{n/2} f^{n/2-1}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+\frac{nf}{m})^{(n+m)/2}}, \quad 0 < f < \infty. \quad \blacksquare \tag{D.14}$$

La función $g(f)$ no solo depende de los valores de sus parámetro n y m, sino que también depende del orden en que éstos se tomen. Por lo anterior, es necesario tener presente que n se definió como los grados de libertad de la variable U, que corresponde al numerador en la ecuación 5.48. De la misma manera, m se definió como los grados de libertad de la variable aleatoria V, que corresponde al denominador en la ecuación 5.48.
En la figura D.2 se muestran las gráficas de $g(f)$ para las parejas de valores $(n, m) = (6, 10)$ y $(n, m) = (6, 30)$

A continuación se enumeran algunas propiedades de la distribución F.

1. Tiene un único máximo en
$$(\frac{n-2}{n})(\frac{m}{m+2}) \quad n > 2.$$

2. Su media es
$$E(F) = \frac{m}{m-2} \quad m > 2.$$

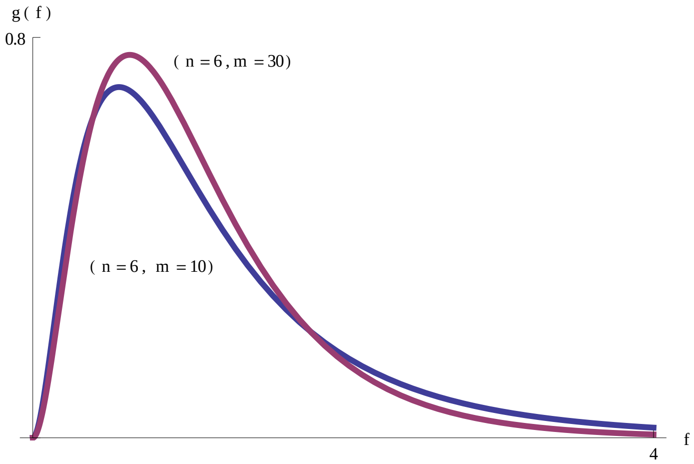


Figura D.2: La distribución F

3. Su varianza es,

$$\sigma^2 = \frac{m^2(2m+2n-4)}{n(m-2)^2(m-4)} \quad m > 4.$$

4.

Teorema D.2.2 *Demuestre la validez de la propiedad* $F_{1-p,n,m} = \frac{1}{F_{p,m,n}}$.

Demostración: Considérese que F se define de acuerdo con la ecuación D.9, se ha probado que F tiene distribución dada por la ecuación D.14. Si ahora se define la variable aleatoria $F' = 1/F$, entoces

$$F' = \frac{1}{F} = \frac{\frac{V}{m}}{\frac{U}{n}} \tag{D.15}$$

La variable aleatoria F' tiene distribución F con m y n grados de libertad. Nótese que los indíces, están invertido. Ahora considérense los cuantiles, denotados por $1-\alpha$, para F, donde $\alpha > 0$, es decir,

$$\begin{aligned}
P(F \leq f_{1-\alpha}(n,m)) &= 1-\alpha, \\
P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= 1-\alpha, \\
P\left(\frac{1}{F} \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= \alpha, \\
P\left(F' \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)}\right) &= \alpha
\end{aligned} \tag{D.16}$$

Por otro lado, los cuantiles α de F', están dados por,

$$P(F' \leq f'_\alpha(m,n)) = \alpha, \quad \alpha > 0. \tag{D.17}$$

Como las escuaciones D.16 y D.17 son equivalentes, entonces

$$f'_\alpha(m,n) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(n,m)} \quad \blacksquare \tag{D.18}$$

Apéndices E

Tablas de las distribuciones

TABLAS ESTADÍSTICAS.

Tabla 1

Función de Distribución Binomial

						P						
n	***X***	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
2	**0**	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	**0**	0.9703	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	**0**	0.9606	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	**0**	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9990	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	1.0000	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	**0**	0.9415	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9985	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	1.0000	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	1.0000	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	**0**	0.9321	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9980	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	1.0000	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	1.0000	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	**0**	0.9227	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9973	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9999	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	1.0000	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	**0**	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9966	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9999	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	1.0000	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461

		P										
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
9	**6**	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	**0**	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9957	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9999	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	1.0000	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	1.0000	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	**0**	0.8953	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.9948	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
	2	0.9998	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
	3	1.0000	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
	4	1.0000	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
	5	1.0000	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	**0**	0.8864	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.9938	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
	2	0.9998	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
	3	1.0000	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
	4	1.0000	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
	5	1.0000	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	**0**	0.8775	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.9928	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
	2	0.9997	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
	3	1.0000	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
	4	1.0000	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
	5	1.0000	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n	X	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
						P						
14	**0**	0.8687	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.9916	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9997	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	1.0000	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	1.0000	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
	5	1.0000	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
	6	1.0000	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	**0**	0.8601	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.9904	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9996	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	1.0000	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	1.0000	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	1.0000	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	**0**	0.8515	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.9891	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003
	2	03.9995	0.9571	0.7893	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021
	3	1.0000	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106
	4	1.0000	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384
	5	1.0000	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051
	6	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	**0**	0.8429	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.9877	0.7922	0.48l8	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001
	2	0.9994	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012
	3	1.0000	0.9912	0.9l74	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064
	4	1.0000	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245
	5	1.0000	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717
	6	1.0000	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662

		P										
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
17	**7**	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166	0.6855
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936
	14	1,0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	**0**	0.8345	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9862	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001
	2	0.9993	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007
	3	1.0000	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038
	4	1.0000	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154
	5	1.0000	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481
	6	1.0000	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189
	7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9916	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	**0**	0.8262	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9847	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.9991	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004
	3	1.0000	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022
	4	1.0000	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096
	5	1.0000	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318
	6	1.0000	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159	0.6762
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9904
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	**0**	0.8179	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9831	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.9990	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
	3	1.0000	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
	4	1.0000	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059

		P										
n	*X*	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
20	**5**	1.0000	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
	6	1.0000	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
	7	1.0000	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	**0**	0.7778	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9742	0.6424	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9980	0.8729	0.5371	0.2537	0.0982	0.0321	0.0090	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000
	3	0.9999	0.9659	0.7636	0.4711	0.2340	0.0962	0.0332	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001
	4	1.0000	0.9928	0.9020	0.6821	0.4207	0.2137	0.0905	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005
	5	1.0000	0.9988	0.9666	0.8385	0.6167	0.3783	0.1935	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020
	6	1.0000	0.9998	0.9905	0.9305	0.7800	0.5611	0.3407	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073
	7	1.0000	1.0000	0.9977	0.9745	0.8909	0.7265	0.5118	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216
	8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9920	0.9532	0.8506	0.6769	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9979	0.9827	0.9287	0.8106	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9703	0.9022	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9985	0.9893	0.9558	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9825	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9927
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 2

Función de Distribución de Poisson

	l									
X	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1.0**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2.0**
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4338	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3.0**
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9163	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.988!
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

X	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**4.0**
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1468	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3208	0.3027	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	0.6288
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9421	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

					l					
X	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**4.6**	**4.7**	**4.8**	**4.9**	**5.0**
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611	0.0563	0.0518	0.0477	0.0439	0.0404
2	0.2238	0.2102	0.1974	0.1851	0.1736	0.1626	0.1523	0.1425	0.1333	0.1247
3	0.4142	0.3954	0.3772	0.3595	0.3423	0.3257	0.3097	0.2942	0.2793	.0.2650
4	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321	0.5132	0.4946	0.4763	0.4582	0.4405
5	0.7693	0.7531	0.7367	0.7199	0.7029	0.6858	0.6664	0.6510	0.6335	0.6160
6	0.8787	0.8675	0.8558	0.8436	0.8311	0.8180	0.8046	0.7908	0.7767	0.7622
7	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134	0.9050	0.8960	0.8867	0.8769	0.8666
8	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9597	0.9549	0.9497	0.9442	0.9382	0.9319
9	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829	0.9805	0.9778	0.9749	0.9717	0.9682
10	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933	0.9922	0.9910	0.9896	0.9880	0.9863
11	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976	0.9971	0.9966	0.9960	0.9953	0.9945
12	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980
13	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

X	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**	**5.7**	**5.8**	**5.9**	**6.0**
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0-0030	0.0027	0.0025
1	0.0372	0.0342	0.0314	0.0289	0.0266	0.0244	0.0224	0.0206	0.0189	0.0174
2	0.1165	0.1088	0.1016	0.0948	0.0884	0.0824	0.07&8	0.0715	0.0666	0.0620
3	0.2513	0.2381	0.2254	0.2133	0.2017	0.1906	0.1801	0.1700	0.1604	0.1512
4	0.4231	0.4061	0.3895	0.3733	0.3575	0.3422	0.3272	0.3127	0.2987	0.2&51
5	0.5984	0.5809	0.5635	0.5461	0.5289	0.5119	0.4950	0.4783	0.4619	0.4457
6	0.7474	0.7324	0.7171	0.7017	0.6860	0.6703	0.6544	0.6384	0.6224	0.6063
7	0.8560	0.8449	0.8335	0.8217	0.8095	0.7970	0.7842	0.7710	0.7576	0.7440
8	0.9252	0.9181	0.9106	0.9027	0.8944	0.8857	0.8766	0.8672	0.8574	0.8472
9	0.9644	0.9603	0.9559	0.9512	0.9462	0.9409	0.9352	0.9292	0.9228	0.9161
10	0.9844	0.9823	0.9800	0.9775	0.9747	0.9718	0.9686	0.9651	0.9614	0.9574
11	0.9937	0.9927	0.9916	0.9904	0.9890	0.9875	0.9859	0.9841	0.9821	0.9799
12	0.9976	0.9972	0.9967	0.9962	0.9955	0.9949	0.9941	0.9932	0.9922	0.9912
13	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980	0.9977	0.9973	0.9969	0.9964
14	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9990	0.9988	0.9986
15	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995
16	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

X	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**6.4**	**6.5**	**6.6**	**6.7**	**6.8**	**6.9**	**7.0**
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0159	0.0146	0.0134	0.0123	0.0113	0.0103	0.0095	0.0087	0.0080	0.0073
2	0.0577	0.0536	0.0498	0.0463	0.0430	0.0400	0.0371	0.0344	0.0320	0.0296
3	0.1425	0.1342	0.1264	0.1189	0.1119	0.1052	0.0988	0.0928	0.0871	0.0818
4	0.2719	0.2592	0.2469	0.2351	0.2237	0.2127	0.2022	0.1920	0.1823	0.1730
5	0.4298	0.4141	0.3988	0.3837	0.3690	0.3547	0.3407	0.3270	0.3137	0.3007
6	0.5902	0.5742	0.5582	0.5423	0.5265	0.5108	0.4953	0.4799	0.4647	0.4497
7	0.7301	0.7160	0.7018	0.6873	0.6728	0.6581	0.6433	0.6285	0.6136	0.5987
8	0.8367	0.8259	0.8148	0.8033	0.7916	0.7796	0.7673	0.7548	0.7420	0.7291
9	0.9090	0.9016	0.8939	0.8858	0.8774	0.8686	0.8596	0.8502	0.8405	0.8305
10	0.9531	0.9486	0.9437	0.9386	0.9332	0.9274	0.9214	0.9151	0.9084	0.9015
11	0.9776	0.9750	0.9723	0.9693	0.9661	0.9627	0.9591	0.9552	0.9510	0.9467
12	0.9900	0.9887	0.9873	0.9857	0.9840	0.9821	0.9801	0.9779	0.9755	0.9730
13	0.9958	0.9952	0.9945	0.9937	0.9929	0.9920	0.9909	0.9898	0.9885	0.9872
14	0.9984	0.9981	0.9978	0.9974	0.9970	0.9966	0.9961	0.9956	0.9950	0.9943
15	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9984	0.9982	0.9979	0.9976
16	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990
17	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1 0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

	l									
X	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**7.4**	**7.5**	**7.6**	**7.7**	**7.8**	**7.9**	**8.0**
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0067	0.0061	0.0056	0.0051	0.0047	0.0043	0.0039	0.0036	0.0033	0.0030
2	0.0275	0.0255	0.0236	0.0219	0.0203	0.0188	0.0174	0.0161	0.0149	0.0138
3	0.0767	0.0719	0.0674	0.0632	0.0591	0.0554	0.0518	0.0485	0.0453	0.0424
4	0.1641	0.1555	0.1473	0.1395	0.1321	0.1249	0.1181	0.1117	0.1055	0.0996
5	0.2881	0.2759	0.2640	0.2526	0.2414	0.2307	0.2203	0.2103	0.2006	0.1912
6	0.4349	0.4204	0.4060	0.3920	0.3782	0.3646	0.3514	0.3384	0.3257	0.3134
7	0.5838	0.5689	0.5541	0.5393	0.5246	0.5100	0.4956	0.4812	0.4670	0.4530
8	0.7160	0.7027	0.6892	0.6757	0.6620	0.6482	0.6343	0.6204	0.6065	0.5926
9	0.8202	0.8097	0.7988	0.7877	0.7764	0.7649	0.7531	0.7411	0.7290	0.7166
10	0.8942	0.8867	0.8788	0.8707	0.8622	0.8535	0.8445	0.8352	0.8257	0.8159
11	0.9420	0.9371	0.9319	0.9265	0.9208	0.9148	0.9085	0.9020	0.8952	0.8881
12	0.9703	0.9673	0.9642	0.9609	0.9573	0.9536	0.9496	0.9454	0.9409	0.9362
13	0.9857	0.9841	0.9824	0.9805	0.9784	0.9762	0.9739	0.9714	0.9687	0.9658
14	0.9935	0.9927	0.9918	0.9908	0.9897	0.9886	0.9873	0.9859	0.9844	0.9827
15	0.9972	0.9969	0.9964	0.9959	0.9954	0.9948	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918
16	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9974	0.9971	0.9967	0.9963
17	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989	0.9988	0.9986	0.9984
18	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
19	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

X	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.8**	**8.9**	**9.0**
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0028	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0018	0.0016	0.0015	0.0014	0.0012
2	0.0127	0.0118	0.0109	0.0100	0.0093	0.0086	0.0079	0.0073	0.0068	0.0062
3	0.0396	0.0370	0.0346	0.0323	0.0301	0.0281	0.0262	0.0244	0.0228	0.0212
4	0.0941	0.0887	0.0837	0.0789	0.0744	0.0701	0.0660	0.0621	0.0584	0.0550
5	0.1823	0.1736	0.1653	0.1573	0.1496	0.1422	0.1352	0.1284	0.1219	0.1157
6	0.3013	0.2896	0.2781	0.2670	0.2562	0.2457	0.2355	0.2256	0.2160	0.2068
7	0.4391	0.4254	0.4119	0.3987	0.3856	0.3728	0.3602	0.3478	0.3357	0.3239
8	0.5786	0.5647	0.5508	0.5369	0.5231	0.5094	0.4958	0.4823	0.4689	0.4557
9	0.7041	0.6915	0.6788	0.6659	0.6530	0.6400	0.6269	0.6137	0.6006	0.5874
10	0.8058	0.7956	0.7850	0.7743	0.7634	0.7522	0.7409	0.7294	0.7178	0.7060
11	0.8807	0.8731	0.8652	0.8571	0.8487	0.8400	0.8311	0.8220	0.8126	0.8030
12	0.9313	0.9261	0.9207	0.9150	0.9091	0.9029	0.8965	0.8898	0.8829	0.8758
13	0.9628	0.9595	0.9561	0.9524	0.9486	0.9445	0.9403	0.9358	0.9311	0.9262
14	0.9810	0.9791	0.9771	0.9749	0.9726	0.9701	0.9675	0.9647	0.9617	0.9585
15	0.9908	0.9898	0.9887	0.9875	0.9862	0.9848	0.9832	0.9816	0.9798	0.9780
16	0.9958	0.9953	0.9947	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918	0.9909	0.9899	0.9889
17	0.9982	0.9979	0.9977	0.9973	0.9970	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947
18	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9981	0.9978	0.9976
19	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989
20	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996
21	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

	l									
X	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**9.4**	**9.5**	**9.6**	**9.7**	**9.8**	**9.9**	**10.0**
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0011	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005
2	0.0058	0.0053	0.0049	0.0045	0.0042	0.0038	0.0035	0.0033	0.0030	0.0028
3	0.0198	0.0184	0.0172	0.0160	0.0149	0.0138	0.0129	0.0120	0.0111	0.0103
4	0.0517	0.0486	0.0456	0.0429	0.0403	0.0378	0.0355	0.0333	0.0312	0.0293
5	0.1098	0.1041	0.0987	0.0935	0.0885	0.0838	0.0793	0.0750	0.0710	0.0671
6	0.1978	0.1892	0.1808	0.1727	0.1650	0.1575	0.1502	0.1433	0.1366	0.1301
7	0.3123	0.3010	0.2900	0.2792	0.2687	0.2584	0.2485	0.2388	0.2294	0.2202
8	0.4426	0.4296	0.4168	0.4042	0.3918	0.3796	0.3676	0.3558	0.3442	0.3328
9	0.5742	0.5611	0.5480	0.5349	0.5218	0.5089	0.4960	0.4832	0.4705	0.4579
10	0.6941	0.6820	0.6699	0.6576	0.6453	0.6330	0.6205	0.6081	0.5956	0.5830
11	0.7932	0.7832	0.7730	0.7626	0.7570	0.7412	0.7303	0.7193	0.7081	0.6968
12	0.8684	0.8607	0.8529	0.8448	0.8364	0.8279	0.8191	0.8101	0.8009	0.7916
13	0.9210	0.9156	0.9100	0.9042	0.8981	0.8919	0.8853	0.8786	0.8716	0.8645
14	0.9552	0.9517	0.9480	0.9441	0.9400	0.9357	0.9312	0.9265	0.9216	0.9165
15	0.9760	0.9738	0.9715	0.9691	0.9665	0.9638	0.9609	0.9579	0.9546	0.9513
16	0.9878	0.9865	0.9852	0.9838	0.9823	0.9806	0.9789	0.9770	0.9751	0.9730
17	0.9941	0.9934	0.9927	0.9919	0.9911	0.9902	0.9892	0.9881	0.9870	0.9857
18	0.9973	0.9969	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947	0.9941	0.9935	0.9928
19	0.9988	0.9986	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9975	0.9972	0.9969	0.9965
20	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9986	0.9984
21	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993
22	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

	l									
X	**11.0**	**12.0**	**13.0**	**14.0**	**15.0**	**16.0**	**17.0**	**18.0**	**19.0**	**20.0**
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001
6	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0003
7	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015	0.0008
8	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039	0.0021
9	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089	0.0050
10	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183	0.0108
11	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347	0.0214
12	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606	0.0390
13	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984	0.0661
14	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497	0.1049
15	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0-3715	0.2867	0.2148	0.1565
16	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751	0.2920	0.2211
17	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784	0.2970
18	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622	0.4695	0.3814
19	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606	0.4703
20	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472	0.5591
21	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991	0.7255	0.6437
22	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931	0.7206
23	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490	0.7875
24	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9S94	0.9317	0.8933	0.&432
25	0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554	0.9269	0.8878
26	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718	0.9514	0.9221
27	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827	0.9687	0.9475
28	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897	0.9?05	0.9657
29	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941	0.9882	0.9782
30	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967	0.9930	0.9865
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982	0.9960	0.9919
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

Tabla 3

Función de Distribución y de Probabilidad Hipergeométrica.

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
2	1	1	0	0.500000	0.500000
2	1	1	1	1.000000	0.500000
3	1	1	0	0.666667	0.666667
3	1	1	1	1.000000	0.333333
3	2	1	0	0.333333	0.333333
3	2	1	1	1.000000	0.666667
3	2	2	1	0.666667	0.666667
3	2	2	2	1.000000	0.333333
4	1	1	0	0.750000	0.760000
4	1	1	1	1.000000	0.250000
4	2	1	0	0.500000	0.500000
4	2	1	1	1.000000	0.500000
4	2	2	0	0.166667	0.166667
4	2	2	1	0.833333	0.666667
4	2	2	2	1.000000	0.166667
4	3	1	0	0.250000	0.250000
4	3	1	1	1.000000	0.750000
4	3	2	1	0.500000	0.500000
4	3	2	2	1.000000	0.500000
4	3	3	2	0.750000	0.750000
4	3	3	3	1.000000	0.250000
5	1	1	0	0.800000	0.800000
5	1	1	1	1.000000	0.200000
5	2	1	0	0.600000	0.600000
5	2	1	1	1.000000	0.400000
5	2	2	0	0.300000	0.300000
5	2	2	1	0.900000	0.600000
5	2	2	2	1.000000	0.100000
5	3	1	0	0.400000	0.400000
5	3	1	1	1.000000	0.600000
5	3	2	0	0.100000	0.100000
5	3	2	1	0.700000	0.600000
5	3	2	2	1.000000	0.300000
5	3	3	1	0.300000	0.300000
5	3	3	2	0.900000	0.600000
5	3	3	3	1.000000	0.100000
5	4	1	0	0.200000	0.200000
5	4	1	1	1.000000	0.800000
5	4	2	1	0.400000	0.400000
5	4	2	2	0.000000	0.600000
5	4	3	2	0.600000	0.600000
5	4	3	3	1.000000	0.400000
5	4	4	3	0.800000	0.800000
5	4	4	4	1.000000	0.200000
6	1	1	0	0.833333	0.833333
6	1	1	1	1.000000	0.166667
6	2	1	0	0.666667	0.666667
6	2	1	1	1.000000	0.333333
6	2	2	0	0.400000	0.400000
6	2	2	1	0.933333	0.533333
6	2	2	2	1.000000	0.066667
6	3	1	0	0.500000	0.500000
6	3	1	1	1.000000	0.500000
6	3	2	0	0.200000	0.200000
6	3	2	1	0.800000	0.600000
6	3	2	2	1.000000	0.200000
6	3	3	0	0.050000	0.050000
6	3	3	1	0.500000	0.450000
6	3	3	2	0.950000	0.450000
6	3	3	3	1.000000	0.050000
6	4	1	0	0.333333	0.333333
6	4	1	1	1.000000	0.666667
6	4	2	0	0.066667	0.066667
6	4	2	1	0.600000	0.533333
6	4	2	2	1.000000	0.400000
6	4	3	1	0.200000	0.200000
6	4	3	2	0.800000	0.600000
6	4	3	3	1.000000	0.200000
6	4	4	2	0.400000	0.400000
6	4	4	3	0.933333	0.533333
6	4	4	4	1.000000	0.066667
6	5	1	0	0.166667	0.166667
6	5	1	1	1.000000	0.833333
6	5	2	I	0.333333	0.333333
6	5	2	2	1.000000	0.666667
6	5	3	2	0.500000	0.500000
6	5	3	3	1.000000	0.500000
6	5	4	3	0.666667	0.666667
6	5	4	4	1.000000	0.333333
6	5	5	4	0.833333	0.833333
6	5	5	5	1.000000	0.166667
7	1	1	0	0.857143	0.857143
7	1	1	1	1.000000	0.142857
7	2	1	0	0.714286	0.714286
7	2	1	1	1.000000	0.285714
7	2	2	0	0.476190	0.476190
7	2	2	1	0.952381	0.476190
7	2	2	2	1.000000	0.047619
7	3	1	0	0.571429	0.571429
7	3	1	1	1.000000	0.428571
7	3	2	0	0.285714	0.285714
7	3	2	1	0.857143	0.571429
7	3	2	2	1.000000	0.142857
7	3	3	0	0.114286	0.114286
7	3	3	1	0.628571	0.514286
7	3	3	2	0.971428	0.342857
7	3	3	3	1.000000	0.028571
7	4	1	0	0.428571	0.428571
7	4	1	1	1.000000	0.571429
7	4	2	0	0.142857	0.142857
7	4	2	1	0.714286	0.571429
7	4	2	2	1.000000	0.285714
7	4	3	0	0.025571	0.028571
7	4	3	1	0.371429	0.342857
7	4	3	2	0.885714	0.514286
7	4	3	3	1.000000	0.114286
7	4	4	1	0.114286	0.114286
7	4	4	2	0.628571	0.514286

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
7	4	4	3	0.971428	0342857
7	4	4	4	1.000000	0.028571
7	5	1	0	0.285714	0.285714
7	5	1	1	1.000000	0.714286
7	5	2	0	0.047619	0.047619
7	5	2	1	0.523809	0.476190
7	5	2	2	1.000000	0.476190
7	5	3	1	0.142857	0.142857
7	5	3	2	0.714286	0.571429
7	5	3	3	1.000000	0.285714
7	5	4	2	0.285714	0.285714
7	5	4	3	0.857143	0.571429
7	5	4	4	1.000000	0.142857
7	5	5	3	0.476190	0.476190
7	5	5	4	0.952381	0.476190
7	5	5	5	1.000000	0.047619
7	6	1	0	0.142857	0.142857
7	6	1	1	1.000000	0.857143
7	6	2	1	0.285714	0.285714
7	6	2	2	1.000000	0.714286
7	6	3	2	0.428571	0.428571
7	6	3	3	1.000000	0.571429
7	6	4	3	0.571429	0.571429
7	6	4	4	1.000000	0.428571
7	6	5	4	0.714286	0.714286
7	6	5	5	1.000000	0.285714
7	6	6	5	0.857143	0.857143
7	6	6	6	1.000000	0.142857
8	1	1	0	0.875000	0.875000
8	1	1	1	1.000000	0.125000
8	2	1	0	0.750000	0.750000
8	2	1	1	1.000000	0.250000
8	2	2	0	0.535714	0.535714
8	2	2	1	0.964286	0.428571
8	2	2	2	1.000000	0.035714
8	3	1	0	0.625000	0.625000
8	3	1	1	1.000000	0.375000
8	3	2	0	0.357143	0.357143
8	3	2	1	0.892857	0.535714
8	3	2	2	1.000000	0.107143
8	3	3	0	0.178571	0.178571
8	3	1	1	0.714286	0.535714
8	3	3	2	0.982143	0.267857
8	3	3	3	1.000000	0.017857
8	4	1	0	0.500000	0.500000
8	4	1	1	1.000000	0.500000
8	4	2	0	0.214286	0.214286
8	4	2	1	0.785714	0.571429
8	4	2	2	1.000000	0.214286
8	4	3	0	0.071429	0.071429
8	4	3	1	0.500000	0.428571
8	4	3	2	0.928571	0.428571
8	4	3	3	1.000000	0.071429
8	4	4	0	0.014286	0.014286
8	4	4	1	0.242857	0.228571
8	4	4	2	0.757143	0.5142S6
8	4	4	3	0.985714	0.228571
8	4	4	4	1.000000	0.014286
8	5	1	0	0.375000	0.375000

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
8	5	1	1	1.000000	0.625000
8	5	2	0	0.107143	0.107143
8	5	2	1	0.642857	0.5357Í4
8	5	2	2	1.000000	0.357143
8	5	3	0	0.017857	0.017857
8	5	3	1	0.285714	0.267857
8	5	3	2	0.821429	0.535714
8	5	3	3	1.000000	0.178571
8	5	4	1	0.071429	0.071429
8	5	4	2	0.500000	0.428571
8	5	4	3	0.928571	0.428571
8	5	4	4	1.000000	0.071429
8	5	5	2	0.178571	0.178571
8	5	5	3	0.714286	0.535714
8	5	5	4	0.982143	0:267857
8	5	5	5	1.000000	0.017857
8	6	1	0	0.250000	0.250000
8	6	1	1	1.000000	0.750000
8	6	2	0	0.035714	0.035714
8	6	2	1	0.464286	0.428571
8	6	2	2	1.000000	0.535714
8	6	3	1	0.107143	0.107143
8	6	3	2	0.642857	0.535714
8	6	3	3	1.000000	0.357143
8	6	4	2	0.214286	0.214286
8	6	4	3	0.785714	0.571429
8	6	4	4	1.000000	0.214286
8	6	5	3	0.357143	0.357143
8	6	5	4	0.892857	0.535714
8	6	5	5	1.000000	0.107143
8	6	6	4	0.535714	0.535714
8	6	6	5	0.964286	0.428571
8	6	6	6	1.000000	0.035714
8	7	1	0	0.125000	0.125000
8	7	1	1	1.000000	0.875000
8	7	2	1	0.250000	0.250000
8	7	2	2	1.000000	0.750000
8	7	3	2	0.375000	0.375000
8	7	3	3	1.000000	0.625000
8	7	4	3	0.500000	0.500000
8	7	4	4	1.000000	0.500000
8	7	5	4	0.625000	0.625000
8	7	5	5	1.000000	0.375000
8	7	6	5	0.750000	0.750000
8	7	6	6	1.000000	0.250000
8	7	7	6	0.875000	0.875000
8	7	7	7	1.000000	0.125000
9	1	1	0	0.888889	0.888889
9	1	1	1	1.000000	0.111111
9	2	1	0	0.777778	0.777778
9	2	1	1	1.000000	0.222222
9	2	2	0	0.583333	0.583333
9	2	2	1	0.972222	0.388889
9	2	2	2	1.000000	0.027778
9	3	1	0	0.666667	0.666667
9	3	1	1	1.000000	0.333333
9	3	2	0	0.416667	0.416667
9	3	2	1	0.916667	0.500000
9	3	2	2	1.000000	0.083333

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*	*N*	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
9	3	3	0	0.238095	0.238095	9	7	2	1	0.416667	0.388889
9	3	3	1	0.773809	0.535714	9	7	2	2	1.000000	0.583333
9	3	3	2	0.988095	0.214286	9	7	3	1	0.083333	0.083333
9	3	3	3	1.000000	0.011905	9	7	3	2	0.583333	0.500000
9	4	1	0	0.555556	0.555556	9	7	3	3	1.000000	0.416667
9	4	1	1	1.000000	0.444444	9	7	4	2	0.166667	0.166667
9	4	2	0	0.277778	0.277778	9	7	4	3	0.722222	0.555556
9	4	2	1	0.833333	0.555556	9	7	4	4	1.000000	0.277778
9	4	2	2	1.000000	0.166667	9	7	5	3	0.277778	0.277778
9	4	3	0	0.119048	0.119048	9	7	5	4	0.833333	0.555556
9	4	3	1	0.595238	0.476190	9	7	5	5	1.000000	0.166667
9	4	3	2	0.952381	0.357143	9	7	6	4	0.416667	0.416667
9	4	3	3	1.000000	0.047619	9	7	6	5	0.916667	0.500000
9	4	4	0	0.039683	0.039683	9	7	6	6	1.000000	0.833333
9	4	4	1	0.357143	0.317460	9	7	7	5	0.583333	0.583333
9	4	4	2	0.833333	0.476190	9	7	7	6	0.972222	0.388889
9	4	4	3	0.992063	0.158730	9	7	7	7	1.000000	0.027778
9	4	4	4	1.000000	0.007936	9	8	1	0	0.111111	0.111111
9	5	1	0	0.444444	0.444444	9	8	1	1	1.000000	0.888889
9	5	1	1	1.000000	0.555556	9	8	2	1	0.222222	0.222222
9	5	2	0	0.166667	0.166667	9	8	2	2	1.000000	0.777778
9	5	2	1	0.722222	0.555556	9	8	3	2	0.333333	0.333333
9	5	2	2	1.000000	0.277778	9	8	3	3	1.000000	0.666667
9	5	3	0	0.047619	0.047619	9	8	4	3	0.444444	0.444444
9	5	3	1	0.404762	0.357143	9	8	4	4	1.000000	0.555556
9	5	3	2	0.880952	0.476190	9	8	5	4	0.555556	0.555556
9	5	3	3	1.000000	0.119048	9	8	5	5	1.000000	0.444444
9	5	4	0	0.007936	0.007936	9	8	6	5	0.666667	0.666667
9	5	4	1	0.166667	0.158730	9	8	6	6	1.000000	0.333333
9	5	4	2	0.642857	0.476190	9	8	7	6	0.777778	0.777778
9	5	4	3	0.960317	0.317460	9	8	7	7	1.000000	0.222222
9	5	4	4	1.000000	0.039683	9	8	8	7	0.888889	0.888889
9	5	5	1	0.039683	0.039683	9	8	8	8	1.000000	0.111111
9	5	5	2	0.357143	0.317460	10	1	1	0	0.900000	0.900000
9	5	5	3	0.833333	0.476190	10	1	1	1	1.000000	0.100000
9	5	5	4	0.992063	0.158730	10	2	1	0	0.800000	0.800000
9	5	5	5	1.000000	0.007936	10	2	1	1	1.000000	0.200000
9	6	1	0	0.333333	0.333333	10	2	2	0	0.622222	0.622222
9	6	1	1	1.000000	0.666667	10	2	2	1	0.977778	0.355556
9	6	2	0	0.083333	0.083333	10	2	2	2	1.000000	0.022222
9	6	2	1	0.583333	0.500000	10	3	1	0	0.700000	0.700000
9	6	2	2	1.000000	0.416667	10	3	1	1	1.000000	0.300000
9	6	3	0	0.011905	0.011905	10	3	2	0	0.466667	0.466667
9	6	3	1	0.226190	0.214286	10	3	2	1	0.933333	0.466667
9	6	3	2	0.761905	0.535714	10	3	2	2	1.000000	0.066667
9	6	3	3	1.000000	0.238095	10	3	3	0	0.291667	0.291667
9	6	4	1	0.047619	0.047619	10	3	3	1	0.816667	0.525000
9	6	4	2	0.404762	0.357143	10	3	3	2	0.991667	0.175000
9	6	4	3	0.880952	0.476190	10	3	3	3	1.000000	0.008333
9	6	4	4	1.000000	0.119048	10	4	1	0	0.600000	0.600000
9	6	5	2	0.119048	0.119048	10	4	1	1	1.000000	0.400000
9	6	5	3	0.595238	0.476190	10	4	2	0	0.333333	0.333333
9	6	5	4	0.952381	0.357143	10	4	2	1	0.866667	0.533333
9	6	5	5	1.000000	0.047619	10	4	2	2	1.000000	0.133333
9	6	6	3	0.238095	0.238095	10	4	3	0	0.166667	0.166667
9	6	6	4	0.773809	0.535714	10	4	3	1	0.666667	0.500000
9	6	6	5	0.988095	0.214286	10	4	3	2	0.966667	0.300000
9	6	6	6	1.000000	0.011905	10	4	3	3	1.000000	0.033333
9	7	1	0	0.222222	0.222222	10	4	4	0	0.071429	0.071429
9	7	1	1	1.000000	0.777778	10	4	4	1	0.452381	0.380952
9	7	2	0	0.027778	0.027778	10	4	4	2	0.880952	0.428571

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
10	4	4	3	0.995238	0.114286
10	4	4	4	1.000000	0.004762
10	5	1	0	0.500000	0.500000
10	5	1	1	1.000000	0.500000
10	5	2	0	0.222222	0.222222
10	5	2	1	0.777778	0.555556
10	5	2	2	1.000000	0.222222
10	5	3	0	0.083333	0.083333
10	5	3	1	0.500000	0.416667
10	5	3	2	0.916667	0.416667
10	5	3	3	1.000000	0.083333
10	5	4	0	0.023810	0.023810
10	5	4	1	0.261905	0.238095
10	5	4	2	0.738095	0.476190
10	5	4	3	0.976190	0.238095
10	5	4	4	1.000000	0.023810
10	5	5	0	0.003968	0.003968
10	5	5	1	0.103175	0.099206
10	5	5	2	0.500000	0.396825
10	5	5	3	0.896825	0.396825
10	5	5	4	0.996032	0.099206
10	5	5	5	1.000000	0.003968
10	6	1	0	0.400000	0.400000
10	6	1	1	1.000000	0.600000
10	6	2	0	0.133333	0.133333
10	6	2	1	0.666667	0.533333
10	6	2	2	1.000000	0.333333

N	*n*	*k*	*x*	*F(x)*	*P(x)*
10	6	3	0	0.033333	0.033333
10	6	3	1	0.333333	0.300000
10	6	3	2	0.833333	0.500000
10	6	3	3	1.000000	0.166667
10	6	4	0	0.004762	0.004762
10	6	4	1	0.119048	0.114286
10	6	4	2	0.547619	0.428571
10	6	4	3	0.928571	0.380952
10	6	4	4	1.000000	0.071429
10	6	5	1	0.023810	0.023810
10	6	5	2	0.261905	0.238095
10	6	5	3	0.738095	0.476190
10	6	5	4	0.976190	0.238095
10	6	5	5	1.000000	0.023810
10	6	6	2	0.071429	0.071429
10	6	6	3	0.452381	0.380952
10	6	6	4	0.880952	0.428571
10	6	6	5	0.995238	0.114286
10	6	6	6	1.000000	0.004762
10	7	1	0	0.300000	0.300000
10	7	1	1	1.000000	0.700000
10	7	2	0	0.066667	0.066667
10	7	2	1	0.533333	0.466667
10	7	2	2	1.000000	0.466667
10	7	3	0	0.008333	0.008333
10	7	3	0	0.008333	0.008333

Tabla 4

Función de Distribución Normal (0,1)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0-7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Tabla 5

Función de Distribución c^2

	p									
g.l.	**0.005**	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.64	7.90
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.60	5.99	7.38	9.22	10.59
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.82	9.36	11.32	12.82
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.15	13.28	14.82
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.84	15.09	16.76
6	0.67	0.87	1.24	1.63	2.20	10.65	12.60	14.46	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.02	18.47	20.27
8	1.34	1.64	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.55	20.08	21.94
9	1.73	2.09	2.70	3.32	4.17	14.69	16.93	19.03	21.65	23.56
10	2.15	2.55	3.24	3.94	4.86	15.99	18.31	20.50	23.19	25.15
11	2.60	3.05	3.81	4.57	5.58	17.28	19.68	21.93	24.75	26.71
12	3.06	3.57	4.40	5.22	6.30	18.55	21.03	23.35	26.25	28.25
13	3.56	4.10	5.01	5.89	7.04	19.81	22.37	24.75	27.72	29.88
14	4.07	4.65	5.62	6.57	7.79	21.07	23.69	26.13	29.17	31.38
15	4.59	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	.27.50	30.61	32.86
16	5.14	5.81	6.90	7.96	9.31	23.55	26.30	28.86	32.03	34.32
17	5.69	6.40	7.56	8.67	10.08	24.77	27.59	30.20	33.43	35.77
18	6.25	7.00	8.23	9.39	10.86	25.99	28.88	31.54	34.83	37.21
19	6.82	7.63	8.90	10.11	11.65	27.21	30.15	32.87	36.22	38.63
20	7. 42	8.25	9.59	10.85	12.44	28.42	31.42	34.18	37.59	40.05
21	8.02	8.89	10.28	11.59	13.24	29.62	32.68	35.49	38.96	41.45
22	8.62	9.53	10.98	12.34	14.04	30.82	33.93	36.79	40.31	42.84
23	9.25	10.19	11.69	13.09	14.85	32.01	35.18	38.09	41.66	44.23
24	9.87	10.85	12.40	13.84	15.66	33.20	36.42	39.38	43.00	45.60
25	10.50	11.51	13.11	14.61	16.47	34.38	37.66	40.66	44.34	46.97
26	11.13	12.19	13.84	15.38	17.29	35.57	38.89	41.94	45.66	48.33
27	11.79	12.87	14.57	16.15	18.11	36.74	40.12	43.21	46.99	49.69
28	12.44	13.55	15.30	16.92	18.94	37.92	41.34	44.47	48.30	51.04
29	13.09	14.24	16.04	17.70	19.77	39.09	42.56	45.74	49.61	52.38
30	13.77	14.94	16.78	18.49	20.60	40.26	43.78	46.99	50.91	53.71
35	17.16	18.49	20.56	22.46	24.79	46.06	49.81	53.22	57.36	60.31
40	20.67	22.14	24.42	26.51	29.06	51.80	55.75	59.34	63.71	66.80
45	24.28	25.88	28.36	30.61	33.36	57.50	61.65	65.41	69.98	73.20
50	27.96	29.68	32.35	34.76	37.69	63.16	67.50	71.42	76.17	79.52
60	35.50	37.46	40.47	43.19	46.46	74.39	79.08	83.30	88.40	91.98
70	43.25	45.42	48.75	51.74	55.33	85.52	90.53	95.03	100.44	104.24
80	51.14	53.52	57.15	60.39	64.28	96.57	101.88	106.63	112.34	116.35
90	59.17	61.74	65.64	69.13	73.29	107.56	113.14	118.14	124.13	128.32
100	67.30	70.05	74.22	77.93	82.36	118.49	124.34	129.56	135.82	140.19

Tabla 6

Función de Distribución t-Student

	p						
g.l.	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**	**0.999**
1	1.376	3.078	6.31	12.70	31.82	63.65	318.39
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.32
3	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21
4	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
70	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
80	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
90	0.846	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.183
100	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
200	0.843	1.286	1.652	1.972	2.345	2.601	3.131
500	0.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107
1000	0.842	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098

Esta distribución es simétrica: $t_{n,p} = t_{n,1-p}$

Tabla 7

Función de Distribución F de Snedecor

P = 0.9

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.79	2.75	2.72	2.70
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
12	3.18	2.81	2.61	2.48	1.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
35	2.85	2.46	2.25	2.11	2.02	1.95	1.90	1.85	1.82	1.79
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
50	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
80	2.77	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68
100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66
200	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63
500	2.72	2.31	2.09	1.96	1.86	1.79	1.73	1.68	1.64	1.61
1000	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64	1.61

P=0.9

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
1	60.47	60.71	61.22	61.74	62.06	62.26	62.53	62.69	63.00	63.29
2	9.40	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.22	5.22	5.20	5.19	5.17	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.91	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.78	3.76
5	3.28	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.13	3.11
6	2.92	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.75 2	2.72
7	2.68	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.50 2	2.47
8	2.52	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.32 2	2.30
9	2.40	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.19	2.16
10	2.30	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.09	2.06
11	2.23	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.00	1.98
12	2.17	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.94	1.91
13	2.12	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.88	1.85
14	2.07	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.83	1.80
15	2.04	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.79	1.76
16	2.01	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.76	1.72
17	1.98	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.73	1.69
18	1.95	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.70	1.66
19	1.93	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.67	1.64
20	1.91	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.65	1.61
21	1.90	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.63	1.59
22	1.88	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.61	1.57
23	1.87	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.59	1.55
24	1.85	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.58	1.54
25	1.84	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.56	1.52
26	1.83	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.55	1.51
27	1.82	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.54	1.50
28	1.81	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.53	1.48
29	1.80	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.52	1.47
30	1.79	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.51	1.46
35	1.76	1.74	1.69	1.63	1.60	1.57	1.53	1.51	1.47	1.42
40	1.74	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.43	1.38
50	1.70	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.39	1.33
60	1.68	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.36	1.30
80	1.65	1.63	1.57	1.51	1.47	1.44	1.40	1.38	1.32	1.25
100	1.64	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.29	1.22
200	1.60	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.24	1.16
500	1.58	1.56	1.50	1.44 .	1.39	1.36	1.31	1.28	1.21	1.11
1000	1.58	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.20	1.08

P=0.95

gl_2	*Grados de libertad 1* gl_1: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.50	215.7	224.5	230.1	233.9	236.7	238.8	240.5	241.8
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.97
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.73
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85
1000	3.85	3.01	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84

P=0.95

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
1	242.9	243.9	245.9	248.0	249.2	250.0	251.1	251.7	253.0	254.1
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.76	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.94	5.91	5.86	5.80	5.77	5.74	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.70	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.03	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.60	3.57	3.'5)	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.31	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.10	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.94	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.82	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.46	2.41
12	2.72	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.63	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.57	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.19	2.14
15	2.51	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.46	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.07	2.02
17	2.41	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.02	1.97
18	2.37	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.34	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.31	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.91	1.85
21	2.28	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.88	1.82
22	2.26	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.85	1.79
23	2.24	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.82	1.76
24	2.22	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.80	1.74
25	2.20	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.78	1.72
26	2.18	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.76	1.70
27	2.17	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.74	1.68
28	2.15	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.73	1.66
29	2.14	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.71	1.65
30	2.13	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.70	1.63
35	2.07	2.04	1.96	1.88	1.82	1.79	1.74	1.70	1.63	1.57
40	2.04	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.59	1.52
50	1.99	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.52	1.45
60	1.95	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.48	1.40
80	1.91	1.88	1.79	1.70	1.64	1.60	1.54	1.51	1.43	1.34
100	1.89	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.39	1.30
200	1.84	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.32	1.21
500	1.81	1.77	1.69	1.59	1.53	1.48	1.42	1.38	1.28	1.14
1000	1.80	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.26	1.11

P=0.975

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.83	2.77
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16
1000	5.02	3.69	3.12	2.79	2.59	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05

P=0.975

	Grados de libertad 1 gl_1								
gl_2	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**1000**
1	976.7	978.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	39.41	39.43	39.45	39.45	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.39	2.32	2.26	1.19
19	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
1000	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

P=0.99

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.50	27.34	27.22
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	9.33	6,93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
35	7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96	2.88
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34

P=0.99

	Grados de libertad 1 gl_1									
gl_2	**11**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**100**	**1000**
2	99.41	99.42	99.43	99.45	99.46	99.46	99.47	99.48	99.49	99.51
3	27.12	27.03	26.85	26.67	26.58	26.50	26.41	26.35	26.24	26.14
4	14.45	14.37	14.19	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.58	13.48
5	9.96	5.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.30	9.24	9.13	9.03
6	7.79	7.7.2	7.56	7.40	7.29	7.23	7.15	7.09	6.99	6.89
7	6.54	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.75	5.66
8	5.73	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	4.96	4.87
9	5.18	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.41	4.32
10	4.77	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.01	3.92
11	4.46	4.40	4.25	4.10	4.00	3.94	3.86	3.81	3.71	3.61
12	4.22	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.47	3.37
13	4.02	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.27	3.18
14	3.86	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.11	3.02
15	3.73	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	2.98	2.88
16	3.62	.3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.86	2.76
17	3.52	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.76	2.66
18	3.43	'3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.68	2.58
19	3.36	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.60	2.50
20	3.29	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.54	2.43
21	3.24	3.17	3.03	2.88	2.78	2.72	2.64	2.58	2.48	2.37
22	3.18	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.42	2.32
23	3.14	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.37	2.27
24	3.09	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.33	2.22
25	3.06	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.29	2.18
26	3.02	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.25	2.14
27	2.99	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.22	2.11
28	2.96	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.19	2.08
29	2.93	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.16	2.05
30	2.91	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.24	2.13	2.02
35	2.80	2.74	2.60	2.44	2.35	2.28	2.19	2.14	2.02	1.90
40	2.73	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	1.94	1.82
50	2.62	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.82	1.70
60	2.56	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.75	1.62
80	2.48	2.42	2.27	2.12	2.01	1.94	1.85	1.79	1.65	1.51
100	2.43	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.60	1.45
200	2.34	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.48	1.30
500	2.28	2.22	2.07	1.92	1.81	1.74	1.63	1.57	1.41	1.20
1000	2.27	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.38	1.16

Referencias

[1] Paul L. Meyer, Probabilidad y Aplicaciones Estadística, Segunda Edición, Editorial Fondo Educativo Interamericano, S. A., México(1973).

[2] Murray R. Spiegel & John J. Schiller & R. Alu Srinivasan, Probabilidad y Estadística, Segunda Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(2003).

[3] Ronald E. Walpole & Raymond H. Myers, Probabilidad y Estadística, Cuarta Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(1992).

[4] George C. Canavos, Probabilidad y Estadística, Primera Edición, Editorial Mc Graw-Hill, México(1988).

[5] Diccionario enciclopédico , Tercera edición, Editorial Espasa-Calpe , España(1986).

[6] Real academia de la lengua española.(2018).*azar*. 8 de febrero de 2018, de RAE Sitio web: http://dle.rae.es/?id=4dukUoz

[7] Universidad de Jaén. *TABLAS ESTADÍSTICAS*. 26 de noviembre de 2017. de Sitio web: http://www4.ujaen.es/ mpfrias/TablasDistribucionesI.pdf