Del Dato
al Conocimiento

Introducción a la Modelización Estadística

Antonio Pita Lozano

Máster en Data Science

Sobre mi

Del Dato al Conocimiento

KSCHOOL

Director de Operaciones y Soluciones en ***Synergic Partners***

19 años de experiencia laboral:

synergic partners — A Telefónica COMPANY

everis — an NTT DATA Company

BCC — BANCO DE CRÉDITO COOPERATIVO

Liberbank

cajamar

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Mejor Científico de Datos de España 2016 (1ª edición)

DATA SCIENCE AWARDS SPAIN 2016

RECONOCIENDO EL TALENTO ANALÍTICO EN ESPAÑA

EFPA ESPAÑA — European Financial Planning Association

Asesor financiero europeo (EFA) Nº 9520

kaggle

Kaggler: 466/515.453

19 años de experiencia docente:

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

KSCHOOL

CIFF — Centro Internacional de Formación Financiera

Afi Escuela de Finanzas

UOC — Universitat Oberta de Catalunya

ie — SCHOOL OF HUMAN SCIENCES & TECHNOLOGY

ACADEMIA NOTA

EOI — Escuela de organización industrial

GRUPO IOE

coursera

escuelaformaciónfinanciera

https://antoniopitablog.wordpress.com

En continuo aprendizaje:

- Licenciado en Matemáticas (2001)
- DEA en Algebra (2003)
- Máster en Administración de Empresas y Marketing (2009)
- Máster en Derecho Comunitario (2010)
- Master en Asesoramiento Financiero (2012)
- Experto Universitario en Estadística Aplicada (2013)
- Máster en Visual Analytics and Big Data (2014)
- Machine Learning Specialization (2016)

Modelización Estadística

Regresión Lineal

1. Componentes
2. Supuestos de la Regresión Lineal
3. Interpretación de Coeficientes
4. Evaluación de los modelos
5. Multicolinealidad y Análisis de Residuos
6. Interpretación en R
7. Análisis de Cambios Estructurales

Modelización Estadística

Del Dato al Conocimiento

Las técnicas de modelización estadística buscan encontrar la distribución estadística que mejor representa a los datos para estudiar las relaciones entre las variables.

Principales técnicas:

- Regresión Lineal (LM) – Series Temporales
- Modelos Lineales Generalizados (GLM) – Logística, Poisson, GAM…
- Modelos Lineales Robustos
- Modelos Gráficos Probabilísticos (PGM)—Redes Bayesianas, Redes de Markov

Regresión Lineal

KSCHOOL

Del Dato al Conocimiento

Objetivo

Estimar la relación entre una variable dependiente (variable explicada) y varias variables independientes (variables explicativas) mediante una expresión lineal en coeficientes con el objetivo de contrastar teorías y estimar efectos entre las variables.

Desarrollo

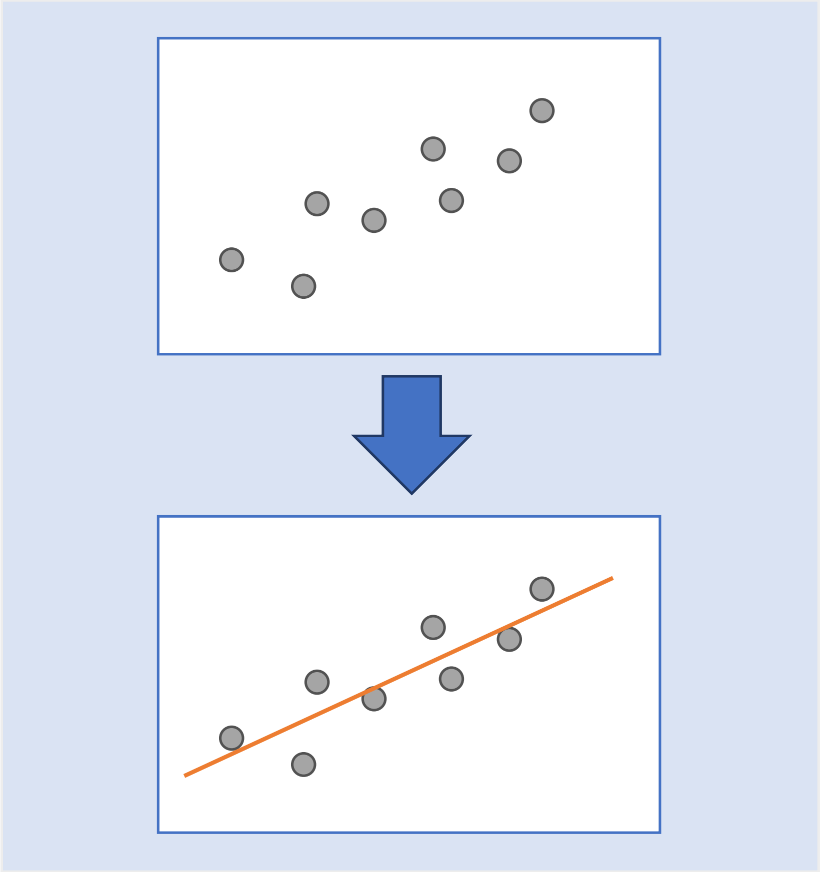
Para la estimación de una relación líneal es necesario establecer el modelo a estimar, que será una combinación lineal de los regresores. La diferencia con la variable dependiente (que debe ser numérica real) se denomina residuo:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \varepsilon$$

La estimación se realiza utilizando el estimador MCO y las estimaciones se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones.

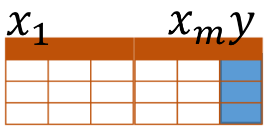
La solución obtenidas es el mínimo global que minimiza la suma de los residuos al cuadrado

(*) en esta sesión sólo se considerará el modelo con término constante



1 Regresión Lineal: Componentes

Datos



Modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m$$

Función de coste

$$g(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - \beta_1 x_{i1} - \cdots - \beta_m x_{im})^2$$

Algoritmo estimador

Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

Regresión Lineal: Teorema de Gauss-Markov

Supuestos ampliados de la Regresión Lineal Múltiple (RLM)

- RLM 1. Modelo lineal en parámetros
- RLM 2. Muestreo aleatorio
- RLM 3. Media condicionada nula

$$E(\varepsilon_i | x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{(k-1)N}, x_{kN}) = E(\varepsilon_i) \quad \forall i = 1, \cdots, N$$

- RLM 4. No multicolinealidad perfecta
- RLM 5. Homocedasticidad

$$V(\varepsilon_i | x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{(k-1)N}, x_{kN}) = V(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

Los estimadores son los **estimadores lineales insesgados óptimos** (ELIO)

Insesgado: La esperanza del estimador coincide con el valor poblacional

Óptimo: El estimados es el de menor varianza entre los insesgados lineales

Regresión Lineal: Asunciones débiles

Supuestos de la Regresión Lineal Múltiple (RLM)

- RLM 1. Modelo lineal en parámetros
- RLM 2. Muestreo aleatorio
- RLM 3. Media condicionada nula

$$E(\varepsilon_i \mid x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{(k-1)N}, x_{kN}) = E(\varepsilon_i) \quad \forall i = 1, \cdots, N$$

- RLM 4. No multicolinealidad perfecta

→ Los estimadores son **insesgados** (no tienen sesgo)

Supuestos débiles la Regresión Lineal Múltiple (RLM)

- RLM 1. Modelo lineal en parámetros
- RLM 3'. Exogeneidad débil

$$E(\varepsilon_i \mid x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ki}) = E(\varepsilon_i) \ \forall i \text{ con } i = 1, \cdots, N$$

- RLM 4. No multicolinealidad perfecta

→ Los estimadores son **consistente** (en el límite no tienen sesgo)

Big Data → **Sesgo despreciable y varianza casi nula**

Regresión Lineal: Interpretación de Coeficientes

Los coeficientes son efectos **ceteris paribus** si se cumple el supuesto de media condicionada nula:

$$E(\varepsilon / x_1, x_2, \ldots, x_k) = E(\varepsilon) = 0$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \beta_i$$

Incremento de y al incrementar 1 unidad de x_i manteniendo el resto de variables dependientes constantes.

Se pueden estudiar efectos diferentes utilizando otras construcciones lineales

Modelo	Variable Dependiente	Variable Independiente	Interpretación
Regresión Level-Level $y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$	y	x	Un aumento de 1 unidad en x se corresponde con un aumento de beta unidades en y. **(efecto marginal)**
Regresión Log-Level $ln(y) = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$	ln(y)	x	Un aumento de 1 unidad en x se corresponde con un aumento del 100*beta% en y. **(semielasticidad)**
Regresión Level-Log $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot ln(x) + \epsilon$	y	ln(x)	Un aumento del 1% en x se corresponde con un aumento de beta/100 unidades en y.
Regresión Log-Log $ln(y) = \beta_0 + \beta_1 \cdot ln(x) + \epsilon$	ln(y)	ln(x)	Un aumento del 1% en x se corresponde con un aumento de beta% en y. **(elasticidad)**

- STC= Suma total de cuadrados $$STC = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2$$
- SCE = Suma cuadrados de los errores $$SCE = \sum_{i=1}^{N} e_i^2$$
- SCR = Suma cuadrado de la regresión $$SCR = \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

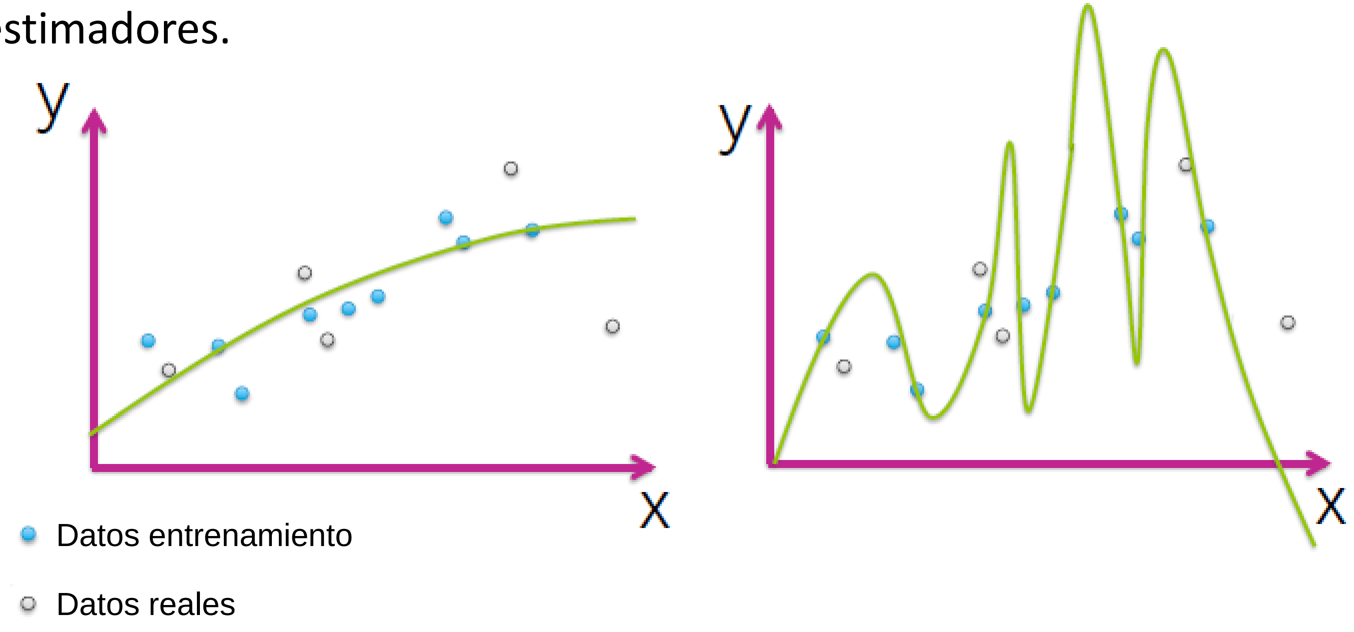
STC = SCR + SCE

Varianza Total — Varianza Explicada — Varianza Residual

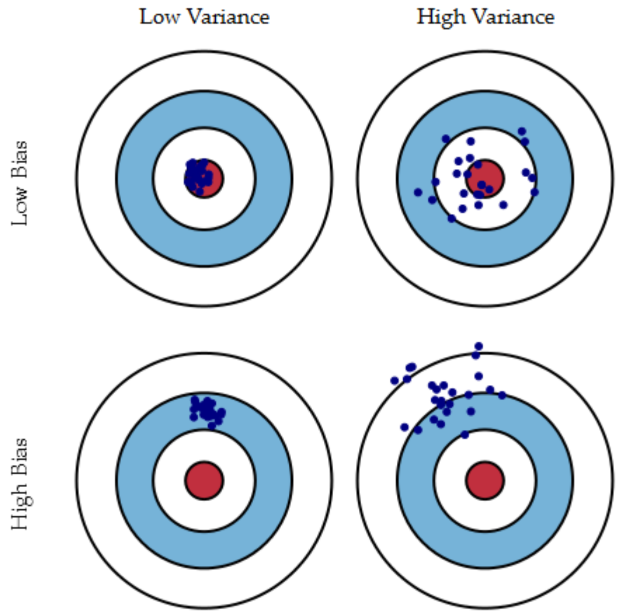
Coeficiente de Determinación $$R^2 = \frac{SCR}{STC}$$

Regresión Lineal: Overfitting

Con el objetivo de aumentar la varianza explicada por la regresión, podemos introducir nuevas variables, pero tenemos que tener cuidado que no produzcan sobre-ajustar (overfitting) y aumento de la varianza de los estimadores.



Bias - Variance Tradeoff



Regresión Lineal: Comparativa de Modelos

Comparativa de Modelos:

Existen diferentes técnicas para comparar modelos lineales en función a sus características.

Estas métricas tratan de penalizar la mejora del modelo al introducir una variable irrelevante.

RELATIVOS

R^2

$$\cancel{R^2 = 1 - \frac{SCE}{STC} = \frac{SCR}{STC}}$$

R^2 ajustado

$$R_a^2 = 1 - \frac{N-1}{N-K}\frac{SCE}{STC}$$

Se elige el modelo con valor más alto

ABSOLUTOS

BIC Bayesian Information Criterion

-2 Ln(likelihood) + 2K* Ln(N)

Se elige el modelo con valor más bajo

AIC Akaike Information Criterion

-2 Ln(likelihood) + 2K

Se elige el modelo con valor más bajo

COMPARATIVO

Contraste F

$$F = \frac{(SCE_R - SCE_{NR})/q}{SCE_{NR}/(N-K)}$$

Se elige el modelo NR si se rechaza el test

Regresión Lineal: Multicolinealidad

Cuando dos de los variables explicativas están muy correlacionados entre sí puede provocar el aumento de la varianza de los coeficientes estimados del modelo y la no convergencia del estimador.

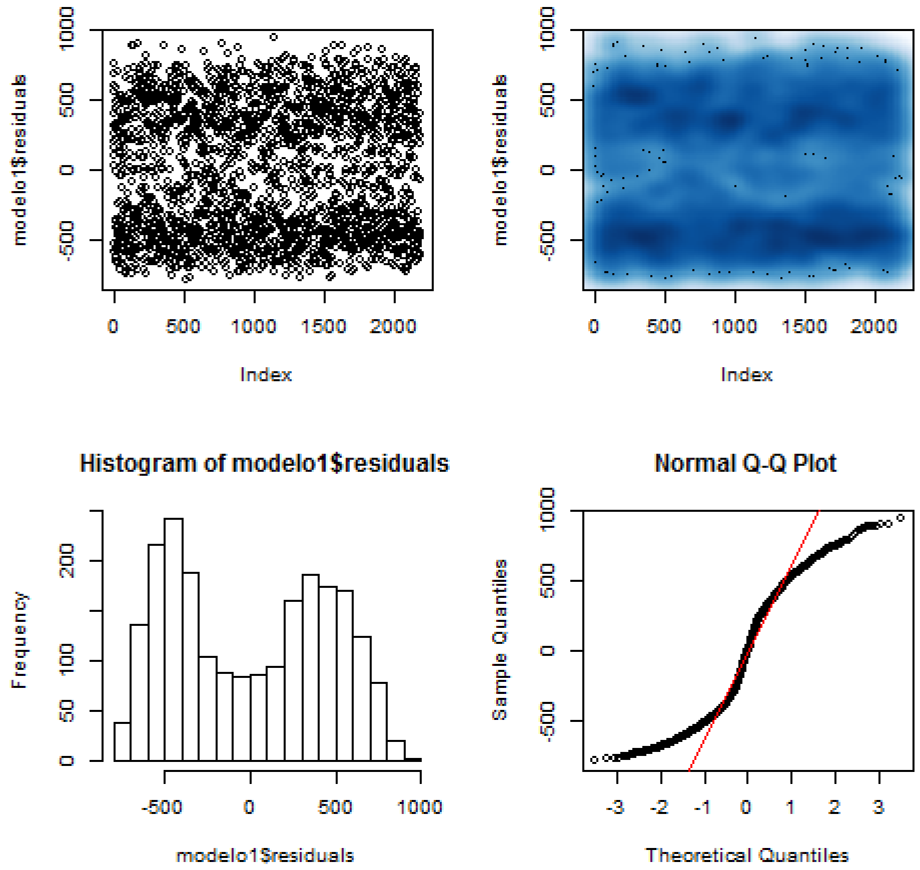
Como detectarlo:

- Coeficientes demasiado elevados sin interpretación.
- Falta de convergencia de los parámetros.
- Correlación elevada entre variables explicativas.

Análisis de Residuos:

Si la distribución de los residuos no es una normal con media cero existen factores a introducir en el modelo que aportan información.

Esto disminuye la varianza y aparentemente las estimaciones son más precisas.



Regresión Lineal: Interpretación en R

```
Call:
lm(formula = Cantidad ~ Precio, data = Ventas)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-560.1  -127.6   -14.7   123.9   629.8

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  3304.878     15.778   209.5   <2e-16 ***
Precio       -251.793      2.494  -101.0   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 192.5 on 2188 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8233,   Adjusted R-squared:  0.8232
F-statistic: 1.019e+04 on 1 and 2188 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Coeficientes estimados

Contraste t:

$$t = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_j)}}$$

Determinación:

$$R^2 = 1 - \frac{SCE}{STC} = \frac{SCR}{STC}$$

$$R_a^2 = 1 - \frac{N-1}{N-K}\frac{SCE}{STC}$$

Contraste F:

$$F = \frac{(SCE_R - SCE_{NR})/q}{SCE_{NR}/(N-K)}$$

Donde NR es el modelo no restringido y R el modelo restringido. N el tamaño total de la muestras, K el número de parámetros del modelo NR y q el número de restricciones. En ejemplo: q=K y SCE(R)=

Existe cambio estructural cuando los valores numéricos de los parámetros poblacionales no son iguales en submuestras diferentes.

$$y_i = \beta_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} x_{1i} + \ldots + \beta_k^{(1)} x_{ki} + \varepsilon_i$$

$$y_i = \beta_0^{(2)} + \beta_1^{(2)} x_{1i} + \ldots + \beta_k^{(2)} x_{ki} + \varepsilon_i$$

Test de Chow

$$H_0 : \beta_0^{(1)} = \beta_0^{(2)}, \ldots, \beta_k^{(1)} = \beta_k^{(2)}$$

$$H_1 : \text{No } H_0$$

¡ ES UN CONTRASTE F!

Del Dato al Conocimiento

el rincón de Antonio Pita

https://antoniopita.blog

Del Dato
al Conocimiento

Introducción a la Modelización Estadística

Antonio Pita Lozano

Máster en Data Science

https://www.linkedin.com/in/antoniopitalozano/

@anto_pita