Iterantes de Picard

El teorema del punto fijo de Banach, además de ser la clave para demostrar el teorema de Picard-Lindelöf, no indica cómo podemos calcular la solución de una manera aproximada:

Calculamos $a, b, M, L > 0$ tales que:

1. $a \leq b/M$
2. $\mathcal{R}_{a,b} \subset D$
3. $\|f(t,x)\| \leq M$ para todo $(t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}$.
4. $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\,\|x-y\|$ para todo $(t,x),(t,y) \in \mathcal{R}_{a,b}$.

Definimos la sucesión de funciones $\phi_n : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$ (llamadas **iterantes de Picard**) como sigue:

$$\phi_0(t) = x_0\,,$$

$$\phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_k(s))\,ds, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Esta sucesión está bien definida y converge uniformemente hacia la única solución de $(*)$.

Ejemplo

Consideramos el PVI

$$(P)\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Tomando $a = b = 1$ se verifican las condiciones y podemos definir las *iterantes de Picard* $\phi_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\phi_0(t) = 1\,,\\
&\phi_1(t) = 1 + \int_0^t 1\, ds = 1 + t\,,\\
&\phi_2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)\, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}\,,\\
&\vdots\\
&\phi_n(t) = 1 + t + \cdots + \frac{t^k}{n!} \qquad n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}$$

Esta sucesión converge uniformemente en $[-1,1]$ hacia la única solución maximal de (P) que es $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \varphi(t) = e^t$.

Durante mucho tiempo se intentó probar que las iterantes de Picard convergían hacia una solución incluso cuando la función f no es localmente lipschitziana. Pero un contraejemplo publicado en 1927 mostró que esos intentos eran baldíos.

El contraejemplo de Müller (1927)

Se considera el P.V.I.

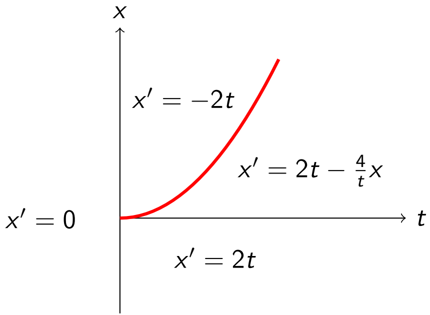
$$(P)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función

$$f(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2t & \text{si } t > 0 \quad \text{y} \quad x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t} & \text{si } t > 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t & \text{si } t > 0 \quad \text{y} \quad x > t^2 \,. \end{cases}$$

Podemos comprobar que la función f es continua.

Como la función f está definida *a trozos* conviene representar gráficamente las distintas ecuaciones diferenciales que se combinan:



Podemos calcular una solución maximal del problema (P) concatenando soluciones de las cuatro ecuaciones lineales que aparecen. En particular, si $t \leq 0$ debemos resolver

$$\begin{cases} x' = 0 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Pero cuando $t \geq 0$ tenemos tres opciones. De esas tres opciones, la que va tener éxito es

$$\begin{cases} x' = 2t - \frac{4}{t}x \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Se trata de un problema impropio, pero al que fácil calcularle la solución.

- Podemos comprobar que

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{3}t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

  es una solución maximal de (P).
- Para cada $t \leq 0$ la función $x \mapsto f(t,x) \equiv 0$ es constante, por tanto creciente, y el teorema de unicidad de Peano nos asegura que (P) verifica la propiedad de unicidad en el pasado.
- Para cada $t \geq 0$ la función $x \mapsto f(t,x)$ es decreciente, y el teorema de unicidad de Peano nos asegura que (P) verifica la propiedad de unicidad en el futuro.

En consecuencia, $\varphi(t)$ es la única solución maximal de (P).

Para que los cáculos resulten más sencillos, consideramos la sucesión de *iterantes de Picard* en el intervalo $[0,1]$:

$$\phi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\phi_0(t) &= 0\,,\\
\phi_1(t) &= 0 + \int_0^t f(s,\phi_0(s))\,ds = \int_0^t 2s\,ds \ = t^2,\\
\phi_2(t) &= 0 + \int_0^t f(s,\phi_1(t))\,ds = \int_0^t -2s\,ds \ = -t^2\,,\\
\phi_3(t) &= 0 + \int_0^t f(s,\phi_2(t))\,ds = \int_0^t 2s\,ds \ = t^2\,,\\
&\vdots\\
\phi_n(t) &= \begin{cases} t^2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -t^2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}
\end{aligned}$$

Se trata de una sucesión alternada que no es convergente y ninguna de sus parciales convergentes converge hacia la solución del PVI.

Si queremos utilizar el teorema de Picard-Lindelöf, debemos ser capaces de reconocer cuándo se verifica la hipótesis fundamental de dicho teorema.

Caracterización de función localmente lipschitziana mediante sucesiones

Sean $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un conjunto y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función continua. La función f es *localmente lipschitziana respecto de la variable* x si para todo punto $(T, p) \in D$ y para todo par de sucesiones $(t_n, x_n), (t_n, y_n) \in D$ tales que

$$(x_n \neq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}) \qquad \wedge \qquad (t_n, x_n) \to (T, p) \leftarrow (t_n, y_n)$$

se verifica que la sucesión

$$\frac{\|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)\|}{\|x_n - y_n\|}$$

está acotada.

Caracterización de función no localmente lipschitziana

Sean $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un conjunto y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función continua. La función f no es *localmente lipschitziana respecto de la variable* x si existe un punto $(T, p) \in D$ y existen un par de sucesiones $(t_n, x_n), (t_n, y_n) \in D$ tales que

$$(x_n \neq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}) \qquad \wedge \qquad (t_n, x_n) \to (T, p) \leftarrow (t_n, y_n)$$

y además la sucesión $\dfrac{\|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)\|}{\|x_n - y_n\|} \to +\infty.$

Ejemplos

1. $f(t, x) = |x|^p$ donde $p \in (0, 1)$.
2. $f(t, x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
3. $f(t, x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$f(t,x) = |x|^p$ donde $p \in (0,1)$

Tomamos $t_n = 0$, $x_n = 1/n$, $y_n = 0$:

$$\frac{|f(t_n,x_n) - f(t_n,y_n)|}{|x_n - y_n|} = \frac{(1/n)^p}{1/n} = n^{1-p} \to +\infty$$

ya que $1 - p < 0$.

$f(t,x) = \ln|x|$ si $x \neq 0$, $f(t,0) = 0$

Tomamos $t_n = 0$, $x_n = 1/n$, $y_n = 0$:

$$\frac{|f(t_n,x_n) - f(t_n,y_n)|}{|x_n - y_n|} = |\ln(1/n)| = \ln(n) \to +\infty.$$

$f(t,x) = x\,\mathrm{sen}\,(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(t,0) = 0$

Tomamos $t_n = 0$, $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}$:

$$\frac{|f(t_n,x_n) - f(t_n,y_n)|}{|x_n - y_n|} = \left| \frac{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}} \right| = 4n \to +\infty.$$

Lema

Sean $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función continua tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ la sección $x \mapsto f(t, x)$ es diferenciable y su matriz jacobiana

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$$

es continua, entonces la función f es *localmente lipschitziana respecto de la variable* x.

Ejemplo

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t, x) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{t} \cdot \operatorname{sen}(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{t} \cdot \cos(x)$$

es continua y por tanto f es *localmente lipschitziana respecto de la variable* x.

Ejemplo

$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\; f(t,x)=f(t,(x_1,x_2))=(|t|\,x_1+4x_2\,,\,|x_1|\,(x_1+e^{x_2}))$

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,,\;\frac{\partial f}{\partial x}(t,(x_1,x_2))=\begin{pmatrix}|t| & 4\\ 2\,|x_1| & |x_1|\,e^{x_2}\end{pmatrix}$$

es continua y por tanto f es *localmente lipschitziana respecto de la variable* x.