Ejercicio 1. *Estudia si la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ |x| & |x| > 1 \end{cases}$$

es lipschitziana y, en caso de serlo, calcula una constante de Lipschitz óptima para f.

Estudiamos si su derivada está acotada:

$$f'(x) := \begin{cases} 2x & |x| \leq 1 \\ 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

Que vemos que podemos acotarla por 2, y que esa es la constante más pequeña con la que podemos acotarla, luego es la óptima.

Ejercicio 2. *Estudia si la función*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 36x \sin(x + 6)$$

es lipschitziana y, en caso de serlo, calcula una constante de Lipschitz óptima para f.

Igual que antes, calculamos su derivada:

$$f'(x) = 36 \sin(x + 6) + 36x \cos(x + 6)$$

Que vemos que no podemos acotar por el término x que aparece, luego no es lipschitz.

Ejercicio 3. *Estudia si la función*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sin(x) \arctan(y)$$

es lipschitziana y, en caso de serlo, calcula una constante de Lipschitz para f cuando se usa en $\mathbb{R}^2$ la norma del máximo.

Calculamos las dos derivadas parciales y las intentamos acotar:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x) \arctan(y) \Rightarrow \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\sin(x)}{1 + y^2} \Rightarrow \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|_\infty \leq 1$$

Luego es lipschitziana con constante $L = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 4. *¿Cuál de los siguientes funciones **no** es localmente lipschitziana en $\mathbb{R}$?*

(a) $f(x) = \log(x^2 + 1)$

(b) $f(x) = x + |x|$

(c) $f(x) = |x|^{7/6}$

(d) $f(x) = |x|^{8/7}$

(e) $f(x) = x|x|$

(f) $f(x) = |x|^{6/7}$

Si nos fijamos en la (f) y la derivamos:

$$f'(x) := \begin{cases} x^{-1/7} & x \geq 0 \\ -x^{-1/7} & x < 0 \end{cases}$$

Como el exponente es negativo, en un entorno de $x = 0$ no se va a poder acotar, luego no es localmente lipschitziana.

Ejercicio 5. *Estudia si la función*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 8 \arctan(7x + 3)$$

es lipschitziana y, en caso de serlo, calcula una constante de Lipschitz óptima para f.

Calculamos su derivad:

$$f'(x) = \frac{56}{1 + (7x + 3)^2}$$

Luego sí es lipschitziana con $L = 56$.

Ejercicio 6. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ una función lipschitziana cuyo valor absoluto está acotado inferiormente:*

$$R = \text{ínf}\{|f(x)| : x \in A\} > 0$$

y cuya constante de Lipschitz óptima es L_f. Estudia si

$$F : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{f(x)}$$

es lipschitziana y, en caso de serlo, calcula una constante de Lipschitz para F.

$$\|F(x) - F(y)\| = \left\| \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{F(y)} \right\| = \left\| \frac{F(y) - F(x)}{F(x)F(y)} \right\| \leq \frac{L_f \|x - y\|}{R^2}$$

Luego sí lo es con constante $L = \frac{L_f}{R^2}$.

Ejercicio 7. *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones lipschitzianas con constantes de Lipschitz óptimas L_f y L_g (resp.). Estudia si el producto:*

$$F : A \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad F(x) := g(x)f(x)$$

es lipschitziana y, en caso de serlo, calcula una constante de Lipschitz para F.

No lo es, considerar $f(x) = x$, $g(x) \Rightarrow F(x) = x^2$ que no es lipstchitziana ya que su derivada es $F'(x) = 2x$, que no está acotada.

Ejercicio 8. *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ y sean $f_1, f_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dos funciones lipschitzianas con constantes de Lipschitz óptimas L_1 y L_2 (resp.). Estudia si la combinación lineal*

$$F : A \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad F(x) = af_1(x) + bf_2(x) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

es lipschitziana y, en caso de serlo, calcula una constante de Lipschitz para F.

$$|F(x) - F(y)| = |af_1(x) + bf_2(x) - af_1(y) - bf_2(y)| \leq |a||f_1(x) - f_2(x)| + |b||f_1(x) - f_2(y)| \leq$$

$$\leq |a|L_1|x - y| + |b|L_2|x - y| = (|a|L_1 + |b|L_2)$$

Ejercicio 9. *Sean $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k$ y $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos funciones lipschitzianas con constantes de Lipschitz óptimas L_f y L_g (resp.). Estudia si la composición*

$$F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x) = g(f(x))$$

es lipschitziana y, en caso de serlo, calcula una constante de Lipschitz para F.

$$\|g(f(x_1)) - g(f(x_2))\| \leq L_g \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L_f L_g \|x_1 - x_2\| \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$$

Luego sí lo es, con constante L igual a $L_f L_g$.

Ejercicio 10. *Sea $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ globalmente lipschitziana y $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ (una matriz cuadrada). ¿Podemos asegurar que la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $F(t, x) = g(tAx)$ es globalmente lipschitziana?*

Si no estuviera la t sí que lo es (lo han dicho los demás, no me he enterado por qué). Está en el archivo que han pasado del año pasado.