

# 1. Ejercicios tema 1

**Ejercicio 1.1.** Sean  $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $y(x) \in \mathcal{C}^2(a, b)$ ,  $y'(x) \neq 0$ . Dado el funcional

$$F[y] = \int_a^b \Phi(x, y(x), y'(x)) dx$$

demuéstrese la equivalencia de las dos formas siguientes de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

- $\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$
- $\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dx} (\Phi - y' \frac{\partial \Phi}{\partial p}) = 0$

*Demostración.* Comenzamos viendo el caso  $a) \implies b)$ . Para ello en primer lugar tenemos que comprobar que efectivamente podemos derivar  $\Phi$  respecto al tercer parámetro. Del apartado a) sabemos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

y del enunciado sabemos que  $\Phi$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  luego  $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$  es de  $\mathcal{C}^1$ . Cuando derivamos  $\Phi(x, y(x), y'(x))$  obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi(x, y(x), y'(x))' &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y(x), y'(x)) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) y'(x) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial p}(x, y(x), y'(x)) y''(x) \end{aligned}$$

Recordemos que  $\frac{\partial \Phi}{\partial p}(x, y(x), y'(x)) = z(x)$  luego

$$\frac{d}{dx} (\Phi - y' \frac{\partial \Phi}{\partial p}) = \Phi_x + \Phi_y y' + \Phi_p y'' - y'' z - y' z'$$

Tenemos que el 3º y 4º termino son iguales t el 2º y 4º son iguales entre ellos luego obtenemos

$$\frac{d}{dx} (\Phi - y' \frac{\partial \Phi}{\partial p}) = \Phi_x$$

que es lo que queríamos.

$b) \implies a)$

Todos los pasos que hemos dado son reversibles pero necesitamos ver que  $\frac{\partial \Phi}{\partial p}(x, y(x), y'(x))$  es  $\mathcal{C}^1$ .

Llamando  $H(x) = \Phi - y'(x)z(x)$ , por hipótesis tenemos que  $H$  es derivable. Despejando tenemos que

$$z = \frac{\Phi - H}{y'}$$

luego se verifica cómo queríamos.

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \Phi_x + \Phi_y y' + \Phi_p y'' - y'' z - y' z' \\ \implies y'(\Phi_y - z') &= 0\end{aligned}$$

e  $y' \neq 0$  por hipótesis luego  $\Phi_y - z' = 0$ . □

**Ejercicio 1.2.** *Obtengase la forma que adopta la ecuación de Euler-Lagrange en los siguientes casos particulares.*

a) *Demostración.*  $\Phi$  solo depende de  $y'$  Aplicamos el Ejercicio 1 para resolver este apartado. Como  $\Phi$  solo depende de  $y'$  tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi(y') \\ \Phi_x &= 0\end{aligned}$$

Del primer ejercicio tenemos que

$$\frac{d}{dx}\Phi = \Phi_p(y'(x))y''(x)$$

y además

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \Phi_x + \Phi_y y' + \Phi_p y'' - y'' z - y' z' \\ &= y''\Phi + y' \frac{d}{dx}\Phi_p\end{aligned}$$

igualando las dos expresiones obtenemos

$$y' \frac{d}{dx}\Phi_p = 0 \implies \frac{d}{dx}\Phi_p = 0$$

De donde deducimos que  $\Phi_p(y'(x))$  es una constante. □

**Ejercicio 1.3** (5). *Aplíquense los resultados anteriores a los ejemplos siguientes:*

$$a) \mathcal{F}[y(x)] = \int y(2x - y)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/2$$

Definimos  $F(x, y, p) = y(2x - y)$ . Se cumple

$$F_p = 0$$

$$z(x) = 0$$

$$F_y(x, y(x)) = 0$$

De aquí obtenemos  $2x - 2y = 0 \implies y(x) = x$ . Ahora tenemos que comprobar que la solución cumple las condiciones de contorno.

$$y(0) = 0, y(\pi/2) = \pi/2$$

Luego se cumplen ambas condiciones.