

# Índice general

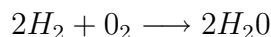
<b>1. Ley de acción de masas</b>	<b>2</b>
1.1. Reacción química . . . . .	3
1.2. Reacción química en equilibrio . . . . .	7
1.3. Modelo de Michaelis-Menten (1913) . . . . .	8
1.3.1. Comportamiento asintótico . . . . .	10

## Ley de acción de masas

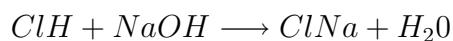
Ahora dejamos los puentes y cambiamos a otro tipo de modelos totalmente diferentes. Vamos a hablar de la ley de acción de masas, pero primero vamos a repasar un poco algunas nociones sobre reacciones químicas. Tenemos una serie de productos  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$  y una serie de coeficientes que nos indican la concentración de cada producto:  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ . A estos coeficientes se les llama *coeficientes estequiométricos*. Estos elementos nos dan una reacción química, que expresaremos como:



**Ejemplo 1.1.** La reacción química de la quema de hidrógeno:



Otra diferente:



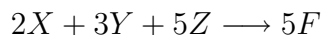
Esto es una cuestión molecular y trabajar con ellas es bastante complicado. Para solventar ese problema, usamos los *moles*. Un *mol* es la cantidad de una sustancia que contiene tantos átomos como su peso atómico. También usaremos la *concentración de un producto*,  $[N]$ , que es el igual al número de moles que hay del producto. En la reacción anterior obtendríamos dos moles de agua, combinando dos moles de hidrógeno y un mol de oxígeno. Podemos hablar de concentración de *reactivos* y *productos*:  $[A] = \{ \text{número de moles de reactivo} \}$ ,  $[B] = \{ \text{número de moles de producto} \}$

Por otro lado, está la denominada *velocidad de reacción*, que es la variación de la concentración a lo largo del tiempo. La teoría nos dice que:

$$\frac{d}{dt}[B] = k[A_1] \cdots [A_n]$$

## 1.1. Reacción química

Sean  $X, Y$  y  $Z$  tres compuestos químicos que se combinan en un producto final  $F$  según la reacción:



La velocidad de reacción (moléculas más o menos iguales) se puede suponer proporcional al producto de concentraciones de productos  $X, Y, Z$ , según un coeficiente  $\beta$  (velocidad de reacción). Suponemos que  $\beta = 0.01$ . Si partimos inicialmente de 5 moles de  $X$ , 7 moles de  $Y$  y 10 moles de  $Z$ , plantear un modelo que permita calcular la concentración de cada sustancia en cada instante. ¿Qué pasará tras mucho tiempo?

Básicamente hay que aplicar una regla de 3:

$$\left. \begin{array}{l} 2X \longrightarrow 5F \\ 5X \longrightarrow ? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{se producirían } 12.5F$$

$$\left. \begin{array}{l} 3Y \longrightarrow 5F \\ 7Y \longrightarrow ? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{se producirían } 11.6F$$

$$\left. \begin{array}{l} 5Z \longrightarrow 5F \\ 10Z \longrightarrow ? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{se producirían } 10F$$

De aquí, deduzco que se van a producir 10 moles de  $F$ , ya que es el mínimo de las 3 reglas que hemos hecho. Ahora tenemos que ver cuanta cantidad queda de los reactivos  $X$  e  $Y$  al crear 10 moles de  $F$ .

$$\left. \begin{array}{l} 2X \longrightarrow 5F \\ ? \longrightarrow 10F \end{array} \right\} \Rightarrow \text{se gastan } 4X$$

$$\left. \begin{array}{l} 3Y \longrightarrow 5F \\ ? \longrightarrow 10F \end{array} \right\} \Rightarrow \text{se gastan } 6Y$$

Luego sobran 1 de  $X$ , 1 de  $Y$  y 0 de  $Z$ , y se habrán creado 10 moles de  $F$ . Ahora vamos a denotar por  $x(t), y(t), z(t), F(t)$  a la concentración de  $X, Y, Z, F$  en el instante  $t$  respectivamente. En el instante  $t = 0$ , tendremos las concentraciones iniciales, y en el instante  $t = 1$ , tendremos las finales (el resultado de las cuentas que hemos hecho antes), es decir:

	$t = 0$	$t = 1$
$x(t)$	4	1
$y(t)$	7	1
$z(t)$	10	1
$F(t)$	0	1

Si nos fijamos,  $5 - x(t), 7 - y(t), 10 - z(t)$  son los restantes de los productos  $X, Y, Z$  en el instante  $t$ . Es decir, tenemos que la velocidad de reacción de  $F$  es:

$$F'(t) = \beta x(t)y(t)z(t)$$

Haciendo otra regla de 3:

$$\left. \begin{array}{l} 2X \longrightarrow 5F \\ 5 - x(t) \longrightarrow F(t) \end{array} \right\} \Rightarrow F(t) = \frac{5(5 - x(t))}{2} \Rightarrow x(t) = 5 - \frac{2F(t)}{5}$$

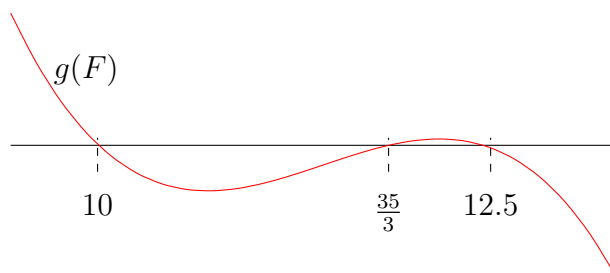
De forma análoga, obtenemos las expresiones de  $y(t)$  y  $z(t)$ :

$$y(t) = 7 - \frac{3F(t)}{5}, \quad z(t) = 10 - F(t)$$

Es decir, la expresión final de la velocidad de reacción sería:

$$F'(t) = 0.01 \left( 5 - \frac{2F(t)}{5} \right) \left( 7 - \frac{3F(t)}{5} \right) (10 - F(t)), \quad F(0) = 0$$

Si llamamos  $g(F) = 0.01 \left( 5 - \frac{2F}{5} \right) \left( 7 - \frac{3F}{5} \right) (10 - F)$ , que tiene raíces  $F = 10, 35/3, 12.5$ .



Ahora vamos a abstraer un poco el problema para no tener que trabajar con todos los números particulares. Supongamos que tenemos el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ x(0) = x_0, \quad x_0 < \alpha_1 \end{cases}$$

donde  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(\alpha_1) = 0$ ,  $g'(\alpha_1) < 0$  (para que sea compatible con el dibujo),  $g(x) > 0$  si  $x \in (-\infty, \alpha_1)$  y  $\alpha_1$  es la primera raíz de  $g$ .

Como sabemos, el anterior problema de valores iniciales tiene una solución maximal  $x : (w_-, w_+) \rightarrow \mathbb{R}$ , que además es única. Probemos ahora una serie de propiedades.

- $x(t) < \alpha_1$ , si  $t \in (w_-, w_+)$

Tomamos  $t^* \in (w_-, w_+)$  con  $x(t^*) = \alpha_1$ , entonces  $x$  sería solución del problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ x(t^*) = \alpha_1 \end{cases}$$

cuya solución es la constante,  $x(t) = \alpha_1 \quad \forall t \in (w_-, w_+)$ . (**duda: no entiendo esta demostración x'd**)

- $x'(t) > 0 \quad \forall t \in (w_-, w_+)$

Usando el punto anterior es fácil, ya que  $x'(t) = g(x(t)) > 0$  porque  $g(x)$  es positivo para todo  $x$  en  $(-\infty, \alpha_1)$

- Necesariamente se tiene que  $w_+ = +\infty$ .

Si  $t \in [0, w_+)$ , entonces  $x_0 \leq x(t) < \alpha_1$ . Ahora podemos usar la teoría de prolongación de soluciones, que nos dice que si tenemos una solución acotada, podemos prolongarla.  $x$  además de estar acotada, está lejos del borde.

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \alpha_1$

Como  $x(t)$  es creciente y acotada, entonces el límite existe, y valdrá  $L \in \mathbb{R}$ . Evidentemente,  $L \leq \alpha_1$ . Lo único que tenemos que ver es que  $L = \alpha_1$ . Para ello, vamos a recordar un resultado general:

**Lema 1.2.** Sea  $x : (w_-, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$  con  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = L \in \mathbb{R}$ . Entonces existe una sucesión  $t_n \in (w_-, +\infty)$  tal que  $t_n \rightarrow +\infty$ , con  $x'(t_n) \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Considerando la diferencia  $x(n+1) - x(n)$  y aplicando el teorema del valor medio, nos queda que:

$$x(n+1) - x(n) = x'(t_n)(n+1 - n) = x'(t_n)$$

Como  $x(n+1) \rightarrow L \leftarrow x(n)$ ,  $x'(t_n) \rightarrow 0$ . □

Luego al existir el límite anterior, existe también  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $x'(t_n) \rightarrow 0$ , es decir,  $g(x(t_n)) \rightarrow 0$ . Pero  $g(x(t_n)) \rightarrow g(L)$ , luego  $L = \alpha_1$ , que es la raíz.

Como  $\alpha_1$  era la primera raíz de  $g$ , es decir,  $\alpha_1 = 10$ , hemos visto que  $F(t) \rightarrow 10$ . Pero ojo, simplemente tiende, nunca llegamos a crear los 10 moles enteros, es una asíntota que no se alcanza en tiempo finito. Además  $F(t) < 10 \forall t \in (0, +\infty)$ .

Usando la cota sobre  $F(t)$  y recordando la expresión de  $x(t)$ , llegamos a que:

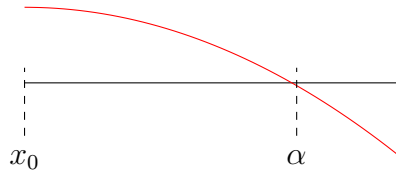
$$x(t) = 5 - \frac{2F(t)}{5} > 5 - 4 = 1 \Rightarrow x(t) \rightarrow 1$$

Igual con la  $y(t)$  y  $z(t)$ :

$$y(t) = 7 - \frac{3F(t)}{5} > 7 - 6 = 1 \Rightarrow y(t) \rightarrow 1$$

$$z(t) = 10 - F(t) \Rightarrow z(t) \rightarrow 0$$

Volvemos otra vez a la parte abstracta. Sea  $g \in \mathcal{C}^2$  de la forma:



cumpliendo  $g(\alpha) = 0$  y  $g'(\alpha) = \delta < 0$ . Entonces vamos a tener que (lo que he visto antes):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \alpha$$

Ahora vamos a decir un poquito más. Vamos a probar que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t) - \alpha}{e^{\delta t}} = L \in (-\infty, 0)$$

Eso quiere decir que la convergencia al valor  $\alpha$  es exponencial, es decir, los residuos  $(x(t), y(t), z(t))$  no sólo tienden a  $(1, 1, 0)$ , sino que además lo hacen exponencialmente.

*Demostración.* Calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'(t)}{x(t) - \alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(x(t))}{x(t) - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x)}{x - \alpha} = \delta$$

Eso nos dice que si tenemos  $\beta(t) = \frac{x'(t)}{x(t) - \alpha}$ , entonces  $\beta(t) \rightarrow \delta$ . Por supuesto,  $\beta$  es continua y se verifica la ecuación diferencial:

$$x'(t) = \beta(t)(x(t) - \alpha)$$

Usando que  $x(t) = \alpha$  es una solución particular de esa ecuación y  $x(t) = ce^{-\int_0^t \beta(s) ds}$  es una solución de la homogénea, podemos escribir la solución general:

$$x(t) = \alpha - ce^{-\int_0^t \beta(s) ds}$$

donde hemos añadido la solución de la homogénea directamente restando porque sabemos que se tiene que cumplir  $x(t) < \alpha$ . Dividiendo todo por  $e^{\delta t}$ :

$$\frac{x(t) - \alpha}{e^{\delta t}} = \frac{-ce^{-\int_0^t \beta(s) ds}}{e^{\delta t}} = -ce^{-\int_0^t \beta(s) ds - \delta t} = -ce^{-\int_0^t (\beta(s) - \delta) ds}$$

Ahora ya lo único que queda por ver es que  $\beta(s) - \delta$  sea integrable en  $(0, +\infty)$ . Para eso:

$$\beta(t) - \delta = \frac{x'(t)}{x(t) - \alpha} - \delta = \frac{g(x(t)) - \delta(x(t) - \alpha)}{x(t) - \alpha} = \frac{g(x) - g(\alpha) - g'(\alpha)(x - \alpha)}{x - \alpha} \leq O(x - \alpha)$$

donde para la acotación por algo de orden  $x - \alpha$  hemos usado que  $g \in \mathcal{C}^2$ , luego:

$$\beta(t) - \delta \leq O(x(t) - \alpha)$$

Para ver que  $x(t) - \alpha$  es integrable, se puede expresar  $g(x(t))$  de la siguiente forma:

$$g(x(t)) = \frac{x(t) - \alpha}{g(x(t))} x'(t)$$

Se vió anteriormente que el primer término converge a una constante  $(-\frac{1}{\delta})$ , luego solo hay que comprobar si  $x'(t)$  es integrable. Como  $x'(t) > 0$ , se tiene:

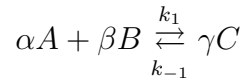
$$\int_0^{+\infty} x'(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T x'(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} (x(T) - x(0)) = \alpha - x(0)$$

Luego  $x'$  es integrable (lebesgue) en  $(0, +\infty)$ . □

Este es el único modelo que vamos a desarrollar con este nivel de detalle, los siguientes serán más escuetos.

## 1.2. Reacción química en equilibrio

En este modelo se supone que hay dos sustancias químicas,  $A$  y  $B$ , con concentraciones  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Estas dos sustancias químicas se combinarán para formar una tercera sustancia,  $C$ , con concentración  $\gamma$ . La diferencia de este modelo con el anterior, es que en este se va a considerar posible que parte del producto  $C$ , vuelva a descomponerse en las sustancias  $A$  y  $B$ . Esa nueva reacción química se va a representar como sigue:



donde  $k_1$  y  $k_{-1}$  son constantes. Se denota por  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  al número de moles de  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente, y por  $a_0$ ,  $b_0$  a las cantidades iniciales de  $A$  y  $B$ . La cantidad inicial de  $C$  se supone 0.

Al igual que antes, si se hace una regla de tres con los productos  $A$  y  $C$  se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha A \longrightarrow \gamma C \\ a_0 - x(t) \longrightarrow z(t) \end{array} \right\} \Rightarrow z(t) = \frac{(a_0 - x(t))\gamma}{\alpha}$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta B \longrightarrow \gamma C \\ b_0 - y(t) \longrightarrow z(t) \end{array} \right\} \Rightarrow z(t) = \frac{(b_0 - y(t))\gamma}{\beta}$$

Además, la variación de concentrado tiene como expresión:  $z'(t) = k_1 x(t)y(t)$ . Ojo, esto solo es para la reacción hacia la derecha. También se debe tener en cuenta la relación hacia la izquierda, en la que se destruyen moléculas de  $C$  según la constante  $k_{-1}$ .  $z'$  quedaría entonces:

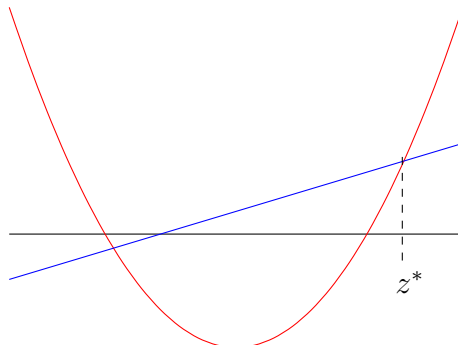
$$z'(t) = k_1 x(t)y(t) - k_{-1}z(t)$$

Despejando de las reglas de tres del principio, se obtienen las expresiones de  $x(t)$  y  $y(t)$ , quedando:

$$z'(t) = k_1 \left( a_0 - \frac{\alpha z(t)}{\gamma} \right) \left( b_0 - \frac{\beta z(t)}{\gamma} \right) - k_{-1}z(t)$$

Al igual que en el otro modelo, se toma  $z' = g(z)$  para estudiar la ecuación. Se ve que el primer término de  $g$  es una parábola, con dos raíces diferentes dependientes de  $\alpha$  y  $\beta$ . El segundo es una recta de pendiente  $k_{-1}$  que corta a esa parábola.

**duda: me no sale una parábola invertida**



$z^*$  es la raíz más grande de las dos que salen al resolver  $g(z) = 0$ . Eso implica que  $z(t) \rightarrow z^*$ . Se toma también  $x^*$  e  $y^*$  como el resultado de despejar  $x(t)$  e  $y(t)$  al sustituir  $z(t)$  por  $z^*$  en las expresiones anteriores. Como  $z^*$  es raíz de  $g$ , queda:

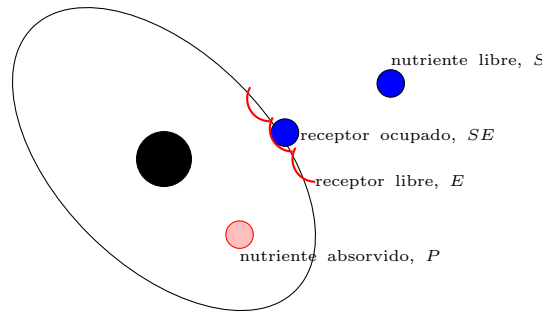
$$k_1 x^* y^* = k_{-1} z^*$$

A partir de esa expresión se deduce la ley de *equilibrio químico*:

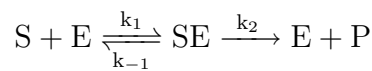
$$\frac{x^* y^*}{z^*} = \frac{k_{-1}}{k_1}$$

### 1.3. Modelo de Michaelis-Menten (1913)

Se supone una especie de *bacteria*, con el núcleo (en negro) y la membrana citoplasmática. Dentro de esa membrana, hay una serie de enzimas, cuyo único objetivo es coger los nutrientes e introducirlos dentro de la misma.



Este intercambio de nutrientes se puede representar por la siguiente reacción química:



Si un nutriente libre es atrapado por un receptor, se tiene un receptor ocupado (con constante  $k_1$ ). Este proceso puede deshacerse, es decir, un receptor ocupado puede soltar el nutriente que tenga (esta reacción pasa con constante  $k_{-1}$ ). Si la absorción tiene éxito, entonces el nutriente se absorbe y el receptor vuelve a quedar libre (esto pasa con constante  $k_2$ ).

Se denota por:

- $s(t)$ : cantidad de nutrientes libres.
- $e(t)$ : concentración de enzimas libres.
- $c(t)$ : concentración de enzimas ocupadas.
- $p(t)$ : concentración de nutrientes absorbidos.

El objetivo es escribir y estudiar la ecuación diferencial que sigue este modelo. Al principio, una parte del sustrato reacciona con la enzima, disminuyendo la cantidad de nutrientes libres,



luego se añade  $-k_1 s(t)e(t)$ . Pero como este enlace se puede romper, liberando esos nutrientes, también hay que añadir:  $k_{-1}c(t)$ . Luego:

$$s'(t) = -k_1 s(t)e(t) + k_{-1}c(t)$$

De igual forma se razona con  $e'(t)$ :

$$e'(t) = k_2 c(t) + k_{-1}c(t) - k_1 s(t)e(t)$$

donde el primer término es la concentración de receptores que se quedan libres al producirse la absorción, el segundo son los liberados por escape del nutriente y el último son los que pasan a estar ocupados.

Repitiendo el razonamiento, se obtienen las dos ecuaciones restantes:

$$\begin{aligned} c'(t) &= k_1 s(t)e(t) - k_{-1}c(t) - k_2 c(t) \\ p'(t) &= k_2 c(t) \end{aligned}$$

En resumen, se tienen cuatro ecuaciones diferenciales distintas:

$$\begin{cases} s'(t) = -k_1 s(t)e(t) + k_{-1}c(t) \\ e'(t) = (k_2 + k_{-1})c(t) - k_1 s(t)e(t) \\ c'(t) = k_1 s(t)e(t) - (k_{-1} + k_2)c(t) \\ p'(t) = k_2 c(t) \end{cases}$$

Al sumar la segunda y tercera ecuación, se obtiene que  $e'(t) + c'(t) = 0$ , es decir, el número de enzimas en la membrana es constante, obviamente. Se tiene que la concentración de nutrientes también es constante (sumando la primera y las dos últimas). Estos dos valores se representan por las constantes  $T_e$  y  $T_n$ , respectivamente. Además, si se integra en las dos sumas:

$$\begin{aligned} T_e &= e(t) + c(t) \\ T_n &= s(t) + c(t) + p(t) \end{aligned}$$

Ya se tiene el planteamiento del problema, ahora se necesitan los datos iniciales. Se supone que hay nutrientes tanto fuera de la célula como dentro. Además de que en el momento 0 ya hay receptores ocupados y libres, es decir:

$$s(0) = s_0 > 0, \quad e(0) = e_0, \quad c(0) = c_0, \quad p(0) = p_0, \quad T_e = e_0 + c_0 > 0$$

Para los siguientes razonamientos se deja de lado la última ecuación (la de  $p'(t)$ ), porque al depender solo de  $c(t)$  no va a ser de mucha ayuda en este estudio.

Tomando las dos primeras ecuaciones y sustituyendo  $c(t) = T_e - e(t)$  queda:

$$\begin{cases} s'(t) = -k_1 s(t)e(t) + k_{-1}(T_e - e(t)) \\ e'(t) = (k_2 + k_{-1})(T_e - e(t)) - k_1 s(t)e(t) \end{cases}$$

Que es un sistema de dos ecuaciones diferenciales. Se supone que se tiene una solución maximal  $s, e : (w_-, w_+) \longrightarrow \mathbb{R}$  y se prueban varias propiedades, que hacen que el modelo tenga sentido:

- $e(t) > 0 \forall t \in [0, w_+)$

Se tiene que  $e(0) = e_0 \geq 0$ . Si  $e_0 = 0$ , entonces  $e'(0) = (k_{-1} + k_2)T_e > 0$ , por lo tanto:  $e(t) > 0$  en un intervalo  $(0, \varepsilon)$ .

Si  $e_0 > 0$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $e(t) > 0$  en el intervalo  $(0, \varepsilon)$ . Por reducción al absurdo, se supone que existe  $\bar{t} \in [0, w_+)$  de forma que  $e(\bar{t}) < 0$ . Sea  $t^* = \inf\{t \in [0, w_+] : e(t) < 0\}$ . De ahí se deduce que  $e(t^*) = 0$ , puesto que antes de  $t^*$ ,  $e(t)$  es positivo y después de  $t^*$  es negativo. Al ser  $e(t^*) = 0$ , queda  $e'(t^*) = (k_{-1} + k_2)T_e > 0$ .

- $e(t) < T_e \forall t \in (0, w_+)$ . Este apartado se prueba de forma análoga al anterior. (**completar**)
- $s(t) > 0 \forall t \in [0, w_+)$ . Este apartado se prueba de forma análoga al anterior. (**completar**)

Volviendo al sistema de ecuaciones general, sean  $s, e, c, p : [0, w_+) \rightarrow \mathbb{R}$  son soluciones maximales. Se ha visto que  $s(t)$  y  $e(t)$  son positivas.  $c(t)$  también lo es ya que se puede expresar como  $c(t) = T_e - e(t)$ , que siempre es positivo ya que  $e(t) < T_e$  para todo  $t$ .

La expresión  $s(t) + e(t) + p(t) = T_n$  indica que todas las soluciones están acotadas por  $T_n$ , luego la teoría de prolongación de soluciones nos dice que podemos prolongarla hasta el infinito, es decir,  $w_+ = +\infty$ .

### 1.3.1. Comportamiento asintótico

Ahora se va a proceder al estudio del comportamiento asintótico de estas soluciones. Se tienen dos sistemas (en el apartado anterior se dejó la  $p$  aparte):

$$\begin{cases} s'(t) = -k_1 s(t)e(t) + k_{-1}c(t) \\ e'(t) = (k_2 + k_{-1})c(t) - k_1 s(t)e(t) \\ c'(t) = k_1 s(t)e(t) - (k_{-1} + k_2)c(t) \end{cases} \quad \begin{cases} p(t) = T_n - c(t) - s(t) \\ p'(t) = k_2 c(t) \end{cases}$$

El primer sistema se puede ver como la ecuación diferencial  $x' = f(x)$  donde  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f \in C^1$  y  $x(t)$  es una solución acotada para  $t \geq 0$ .

Para demostrar eso se necesita el teorema de *Lasalle*, que requiere mucha terminología. Aquí se va a usar una adaptación. Sea  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida por  $V(s, c) = s + c$  y se denota por  $\dot{V}(s, c) = \frac{d}{dt}V(s(t), c(t)) = -k_{-1}c$  a su derivada. Como  $\dot{V}(s, c) \leq 0$ , se tiene que  $V$  es una función guía de ese problema.

**Teorema 1.3** (Teorema de Lasalle (adaptación)). *Sea  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $V(x(t))$  es decreciente (función de Liapunov) y  $x(t)$  está positivamente acotada, entonces  $\dot{V}(x(t)) \rightarrow 0$ .*

Luego si se aplica ese teorema a este caso, tenemos que  $\dot{V}(x(t)) = -k_{-1}c(t) \rightarrow 0$ , por lo tanto,  $c(t) \rightarrow 0$ . Como se tenía que  $T_e = e(t) + c(t)$ , lo anterior implica que  $e(t) \rightarrow T_e$ . Esto quiere decir que las enzimas tienden a quedarse todas libres, ya que se ha visto que las ocupadas tienden a 0.

Además  $p(t)$  tiene límite por ser una función acotada y creciente. Con  $s(t)$  pasa exactamente lo mismo,  $s(t) = T_n - c(t) - p(t)$  y  $s(t) \rightarrow s^*$ .

**Lema 1.4.** Si  $s : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  es de clase 1 y existe su límite, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) \in \mathbb{R}$$

Entonces  $t_n \longrightarrow +\infty$  con  $s'(t_n) \longrightarrow 0$ .

Aplicando ese lema a  $s(t)$ , se tiene que:

$$s'(t_n) = k_{-1}c(t_n) - k_1s(t_n)e(t_n)$$

Haciendo ahora  $t_n \longrightarrow +\infty$ , se obtiene que  $s^*T_e = 0$ . Como  $T_e \neq 0$ , tiene que ser  $s^* = 0$  t por lo tanto  $p(t) \longrightarrow T_n$ .

En definitiva se ha visto que las concentraciones tienden a:

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t) \longrightarrow 0 \\ e(t) \longrightarrow T_e \\ c(t) \longrightarrow 0 \\ p(t) \longrightarrow T_n \end{array} \right.$$

Lo que significa que todas las enzimas se quedan libres después de haber absorbido todos los nutrientes disponibles.