Teorema de unicidad de Peano

Dados un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, un punto $(t_0, x_0) \in D$ y una función continua $f : D \to \mathbb{R}^d$, consideramos el problema de valores iniciales escalar

$$(P) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Teorema

1. Si para todo $t \geq t_0$ la sección $x \mapsto f(t,x)$ es decreciente, entonces (P) verifica la propiedad de unicidad en el futuro.
2. Si para todo $t \leq t_0$ la sección $x \mapsto f(t,x)$ es creciente, entonces (P) verifica la propiedad de unicidad en el pasado.

Ejercicio

Estudia la unicidad del PVI $\begin{cases} x' = -t\sqrt[3]{x} \\ x(0) = 1 \end{cases}$.

Consideramos un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y una función continua $f : D \to \mathbb{R}^d$.

Lema

Si $\forall (t_0, x_0) \in D$ el problema de valores iniciales

$$(P) \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

verifica la propiedad de *unicidad local* entonces (P) también verifica la propiedad de *unicidad global*.

Lema

Dado $(t_0, x_0) \in D$, si el problema de valores iniciales

$$(P) \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

verifica la propiedad de *unicidad global*, entonces existe una única *solución maximal* del PVI (P).

Solución general

Si para cada $(t_0, x_0) \in D$ el problema de valores iniciales

$$(*) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución (en sentido global), vamos a denotar $\big(\alpha(t_0,x_0)\,,\,\omega(t_0,x_0)\big)$ al dominio de la solución maximal de $(*)$ y la solución maximal será denotada:

$$t \mapsto G(t; t_0, x_0) \qquad\qquad t \in \big(\alpha(t_0,x_0)\,,\,\omega(t_0,x_0)\big)$$

Observa que G se puede ver como una función de "tres"variables definida en el el conjunto de $\mathbb{R}^{d+2}$:

$$\Omega = \big\{(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \;:\; (t_0, x_0) \in D \;\wedge\; \alpha(t_0,x_0) < t < \omega(t_0,x_0)\big\}\,.$$

La función G recibe el nombre de *solución general* de $x' = f(t,x)$.

Ejercicio

Calcula la solución general de la EDO $x' = x^2$