

MODELOS MATEMÁTICOS II

Juanjo Nieto & Antonia Delgado

Curso 2017–18



Índice

PARTE I: PROBLEMAS VARIACIONALES	2	5. Funcionales dependientes de funciones de varias variables	24
1. Motivación	2	5.1. La membrana vibrante	24
1.1. Curva longitud mínima	3	5.1.1. Simplificaciones usuales	25
1.2. Motivación matemática	4	5.1.2. Modelos asociados	26
1.3. Principio de mínima acción	4	5.2. Separación de variables	27
1.4. Ejemplos clásicos	4	5.3. Problemas de Sturm-Liouville	28
Braquistocrona	4	5.3.1. Ejemplos	29
Catenaria	5	5.3.2. Caracterización variacional	30
Geodésicas	6	5.4. Fundamentos de análisis funcional	31
Problema de Dido	6	5.5. Serie trigonométrica de Fourier	33
Superficies minimales	7	5.5.1. Convergencia	34
		5.5.2. Cambio de intervalo.	36
		5.5.3. Serie de senos/cosenos	37
2. Cálculo de Variaciones	8	5.6. Solución de la ecuación de Ondas	37
2.1. Lema Fundamental	8	5.6.1. Unicidad	38
2.2. Ecuación de Euler–Lagrange	8	5.6.2. Fórmula de D’Alembert	38
2.2.1. Extremales	8	5.7. Solución de la ecuación de Dirichlet	39
2.2.2. Condiciones implícitas $F_p = 0$	9		
2.2.3. Ecuación para $F(x, p)$	9	6. Formulación débil	42
2.2.4. Ecuación para $F(y, p)$	10	6.1. Derivada generalizada y débil	42
2.3. Ejemplos	10	La delta de Dirac	43
Oscilador armónico	10	6.1.1. Espacios de Sobolev	44
Longitud mínima	10	6.2. Repaso: Hilbert, Riesz, Poincaré...	45
Superficie minimal: catenoide	10	6.3. El Teorema de Lax–Milgram	46
2.4. Convexidad: existencia	12	6.3.1. Formulación débil de ecuaciones	47
		6.3.2. Elementos finitos (breve intro)	48
3. Cálculo de extremales: Pb. de Contorno	13	PARTE II: MODELOS BIOLÓGICOS	49
3.1. Casuística de existencia y unicidad	13	7. La ley de acción de masas	49
3.2. Tipos de condiciones de contorno.	14	7.1. Descripción de la ley de acción de masas	49
3.3. El problema de la viga	14	7.2. Reacción enzimática básica	50
Tipos de sujeción	14	Reducción número ecuaciones	50
Ejemplos	15	Adimensionalización del sistema	50
Formulación variacional de la Viga	15	Buen planteamiento	51
3.4. Forma autoadjunta de algunos PC	15	Positividad y acotación	51
3.5. Relación con el cálculo de variaciones	15	Comportamiento: análisis y numérico	51
3.6. Sols. de un PC: Alternativa de Fredholm	16	7.3. Cooperatividad	52
4. Ligaduras, extremos condicionados	19	8. Ley de Fick–difusión–ecuación del calor	54
4.1. PV dependientes de varias funciones	19	8.1. Deducción de la ecuación del calor	54
4.2. Ligaduras algebraicas	20	8.2. Resolución de la ecuación del calor	57
4.3. Ligaduras integrales	20		
4.4. Geodésicas, P. de Dido, Catenaria	21		

8.2.1. Transformada de Fourier	58
8.2.2. Fourier y convolución	58
8.2.3. Solución fundamental	60
Unicidad y propiedades	61
8.3. Sol. fundamental por autosemejanza .	62
9. Ecuaciones de Reacción-difusión	62
9.1. Modelos de dinámica de poblaciones .	62
Malthus, Logístico, Efecto Alle	62
9.2. Ecuaciones de reacción difusión	63
FKPP y Biestable	63
9.3. Soluciones de tipo onda viajera	64
9.3.1. Ondas viajeras para FKPP . .	65
9.3.2. Ondas viajeras para biestable .	67
10. Morfogénesis	68
10.1. Modelo matemático. Patrones	68
10.1.1. El modelo de Turing	69
PARTE III: PROGRAMACIÓN LINEAL	71
11. Programación lineal	71
11.1. Motivación en Economía	71
11.2. Método gráfico	71
11.3. Método del simplex	71
12. Apéndice I: Varios	71
13. Apéndice II: Ejercicios de exámenes	72

Parte I: Modelos Variacionales y Problemas de Contorno asociados

1. Motivación

A comienzos del siglo XVIII, las ecuaciones diferenciales, la teoría de series, el cálculo de variaciones o el análisis numérico, se desarrollan paralela y, a veces, simultáneamente. Resulta difícil distinguir entre unos y otros.

El primer problema significativo del cálculo de variaciones fue propuesto y resuelto por Newton al estudiar el movimiento de los objetos en el agua. Más tarde, matemáticos como Newton, Leibniz, L'Hôpital o los hermanos Bernouilli, estudian y resuelven el famoso problema de la braquistocrona. Euler se inició en el cálculo de variaciones con la obtención de geodésicas sobre una superficie. Más tarde obtuvo la ecuación diferencial que deben verificar las posibles soluciones del problema variacional. A partir de la ecuación obtenida, Euler trató otro tipo de problemas tales como los problemas isoperimétricos.

Poco tiempo después de la muerte de Newton en 1727, el cálculo de variaciones se manifiesta como una rama nueva de las matemáticas, con entidad propia y de gran importancia para las matemáticas y la ciencia. Tal vez la mayor motivación para este auge fue el principio de mínima acción. Este principio físico, intuitivo ya por Euclides o Herón, fue elaborado por Euler en una serie de trabajos durante los años 1726 a 1744, en el primer libro de la historia sobre cálculo de variaciones. En el libro de Euler se citan más de 60 ejemplos que ilustran las posibilidades del nuevo método. En ellos se demuestra el valor práctico del cálculo y se establece su estrecha relación con la mecánica y la física. El objetivo de este método era encontrar curvas para las cuales cierta magnitud alcanza su valor máximo o mínimo. Este método, sin embargo, no era suficientemente riguroso.

A finales del año 1754, Lagrange hizo importantes avances en el estudio de la braquistocrona, que contribuiría sustancialmente al estudio del Cálculo de Variaciones (que los matemáticos empezaban a estudiar, pero no se llamó así hasta que en el año 1766 Euler le dio el nombre con el que ahora lo conocemos). En 1756, Lagrange envió a Euler los resultados obtenidos al aplicar a la mecánica el Cálculo de Variaciones. Lagrange comunicó a Euler el método general analítico de cálculo de variación de la integral mediante la integración por partes.

Ya en el siglo XX, el interés en los métodos directos

del cálculo de variaciones dio lugar al conocido método de Ritz para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. A partir de este método surge el método de elementos finitos para la resolución aproximada de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico.

1.1. Ejemplo: curva de longitud mínima que une dos puntos del plano

Sean $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$ dos puntos del plano. Se trata de determinar cuál es la curva plana de longitud mínima que une los puntos A y B . Es bien conocido que dicha curva es el segmento de recta que determinan ambos puntos, pero queremos plantear el problema de forma analítica. Dada una función

$$y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$$

continua tal que $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, su gráfica $G = \{(x, y(x)) : x \in [x_0, x_1]\}$ es una curva plana que une los puntos A y B . Si suponemos además, que la función es al menos de clase C^1 , la longitud de la curva viene dada por

$$L[y] := \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

lo que define un “funcional” L (función que actúa sobre un conjunto de funciones) sobre el conjunto

$$\mathcal{D} := \{y \in C^1([x_0, x_1]) : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}.$$

El problema anterior se reencuadra ahora como el problema de encontrar el mínimo de L en el conjunto de funciones \mathcal{D} . Vamos a tratar de resolverlo.

Suponemos que el mínimo de L se alcanza sobre una cierta función $\bar{y} \in \mathcal{D}$ y definimos la función real de variable real siguiente (derivación a la *Feynmann*)

$$g(s) := L[\bar{y} + s\phi],$$

donde ϕ es una función cualquiera en

$$\mathcal{D}_0 := \{\phi \in C^1([x_0, x_1]) : \phi(x_0) = 0, \phi(x_1) = 0\}.$$

Nótese que hay que pedirle a ϕ que valga cero en x_0 y x_1 para que la suma $\bar{y} + s\phi$ pertenezca a \mathcal{D} y el funcional L pueda ser aplicado. Dado que \bar{y} es el mínimo de L , entonces, sea quien sea ϕ , la función g tendrá un mínimo en $s = 0$, y, si pudiésemos derivarla, tendríamos $g'(0) = 0$. Calculemos esta derivada

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{d}{ds} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (\bar{y}'(x) + s\phi'(x))^2} dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{2(\bar{y}'(x) + s\phi'(x))\phi'(x)}{2\sqrt{1 + (\bar{y}'(x) + s\phi'(x))^2}} dx, \end{aligned}$$

de donde obtenemos, para cada ϕ :

$$0 = g'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\bar{y}'(x)}{\sqrt{1 + (\bar{y}'(x))^2}} \phi'(x) dx. \quad (1)$$

Si suponemos que \bar{y} es C^2 y hacemos una integración por partes, obtendremos

$$0 = \left[\frac{\bar{y}' \phi}{\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}} \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \phi \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{y}'}{\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}} \right) dx.$$

Aquí, el primer término se cancela, porque aparecen las evaluaciones de ϕ en x_0 y en x_1 , que vale cero, por lo que solo queda:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \phi \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{y}'}{\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}} \right) dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_0$. Como veremos en breve (en el Teorema 1), el hecho de que esa integral sea nula para toda ϕ , es equivalente a que el integrando (sin ϕ) sea cero, y por lo tanto, hemos obtenido una ecuación que debería cumplir el mínimo de L :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{y}'}{\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}} \right) = 0.$$

La simplificamos un poco:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{y}'}{\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}} \right)' &= \frac{\bar{y}'' \sqrt{1 + (\bar{y}')^2} - \frac{\bar{y}' 2\bar{y}' \bar{y}''}{2\sqrt{1 + (\bar{y}')^2}}}{1 + (\bar{y}')^2} \\ &= \frac{\bar{y}''}{(\sqrt{1 + (\bar{y}')^2})^3} = 0. \end{aligned}$$

En resumen, hemos averiguado que el mínimo \bar{y} de L , si es C^2 , ha de cumplir una ecuación diferencial (condición necesaria)

$$L[\bar{y}] = \min_{y \in \mathcal{D}} L[y] \Rightarrow \bar{y}'' = 0,$$

por lo que los candidatos a mínimo deberán cumplir esa ecuación diferencial. En este caso, además, la podemos resolver, ya que

$$\bar{y}'' = 0 \Rightarrow \bar{y}(x) = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Los candidatos a minimizar L son, por lo tanto, las rectas. Si ahora imponemos que $\bar{y} \in \mathcal{D}$, es decir, que $\bar{y}(x_0) = y_0$ y que $\bar{y}(x_1) = y_1$, obtenemos finalmente

$$\bar{y}(x) = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

que es la solución conocida. Ojo: no hemos probado que esta función sea el mínimo de L , solo que, de tenerlo, ha de ser este.

Resumimos el argumento seguido:

- Suponemos que \bar{y} es un mínimo.
- Definimos $g(s) := L[\bar{y} + s\phi]$ y hacemos $0 = g'(0)$.
- Integramos por partes, suponiendo regularidad.
- Usamos las condiciones de contorno de ϕ .
- Deducimos una ecuación diferencial.
- Resolvemos la ecuación (candidato a mínimo).
- Imponemos las condiciones de contorno de \mathcal{D} .
- Probamos que es el mínimo.

Esta es la estructura a aprender en este curso, justificando cada paso con rigor, y estudiando las particularidades y ejemplos que van apareciendo.

Nota 1 La ecuación (1) se conoce como **formulación débil** del problema. Más adelante, en la sección 6.3.1 entenderemos la gran importancia de este *paso intermedio*, que aquí parece ser simplemente uno más dentro de un proceso.

1.2. Motivación matemática

Podemos también entender el problema de minimizar funcionales como una generalización matemática del problema de minimizar funciones. De este modo tal vez nos sea más fácil entender algunos conceptos y técnicas.

Al minimizar una función real de variable real $f(x)$ sobre un cierto conjunto, buscamos primero los candidatos a mínimo entre sus puntos críticos, es decir, primero calculamos la derivada de f , luego resolvemos la ecuación (algebraica) $f'(x) = 0$, encontrando los puntos críticos que serán los candidatos a mínimos de f . Por último, el conocimiento sobre la derivada segunda de f (que determina su convexidad/concavidad) determina si los candidatos son mínimos o no.

Establezcamos esta analogía:

$L : D \rightarrow \mathbb{R}$	$f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
$L[\bar{y}] = \min_{y \in D} L[y]$	$f(\bar{x}) = \min_{x \in (a, b)} f(x)$
ecuación diferencial	$f'(x) = 0$
soluciones=candidatos (extremales)	soluciones=candidatos (puntos críticos)
criterios de mínimo convexidad + otros	criterios de mínimo $f''(\bar{x}) \geq 0$ y otros

Además, esta analogía permite ser extendida al caso de mínimos con restricciones, es decir, al caso en que el conjunto \mathcal{D} tiene otras restricciones adicionales de igualdad, lo que dará lugar a una técnica similar a la de los Multiplicadores de Lagrange que se estudia en el caso de funciones.

1.3. Motivación mecánica: principio de mínima acción—Leyes de Newton

En mecánica, un principio (variacional) básico establece que entre todos los movimientos imaginables que puede realizar una partícula (aunque se puede generalizar a todo un sistema mecánico) para llegar desde el lugar r_0 en el instante t_0 hasta la posición r_1 en el instante t_1 , el movimiento real que realizará será aquel que minimice el valor de una cierta cantidad que se asocia a cada uno de esos movimientos imaginables, la acción:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (K - P) dt$$

siendo K la energía cinética y P la potencial. En general, si hablamos de una sola partícula de masa m y $r(t) := (x(t), y(t), z(t))$ describe su movimiento (posición) posible en cada instante del intervalo (t_0, t_1) , entonces su energía cinética viene dada por

$$K[r] = \frac{1}{2} m r'(t)^2 = \frac{1}{2} m (r'_1(t)^2 + r'_2(t)^2 + r'_3(t)^2),$$

mientras que su energía potencial vendrá dada, generalmente, en términos de su posición $P[r] = V(r)$, que describiremos en cada ejemplo concreto. Notamos que el funcional, en este caso, depende de varias funciones (las 3 componentes de r) y que las condiciones de contorno son $r(t_0) = r_0$ y $r(t_1) = r_1$. Al integrando del funcional acción: $K - P = \frac{1}{2} m r'(t)^2 - V(r)$, se le llama Lagrangiano (y a veces, también acción) y es el principio de Hamilton el que establece que el recorrido de la partícula $r(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ será tal que $r(t)$ se corresponda con un “punto estacionario” del funcional.

Si aplicamos la misma técnica descrita en el ejemplo anterior, obtendremos también una ecuación diferencial

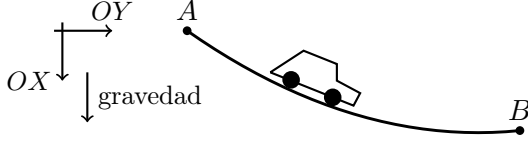
$$m r''(t) = -\nabla_r V(r(t))$$

que nos debe de recordar a la segunda ley de Newton ($ma = F$), en la que la aceleración es la segunda derivada de la posición, y en la que la fuerza es conservativa, es decir, viene dada por el gradiente de un potencial $F = -\nabla_r V$. En este caso constatamos que la forma newtoniana de plantear las ecuaciones del movimiento y la forma variacional, como mínimo de un funcional, son equivalentes.

1.4. Ejemplos clásicos

Braquistocrona. El problema de la braquistocrona o curva de descenso más rápido es, como comentamos en la introducción, uno de los problemas más

antiguos del cálculo de variaciones. Se trata de encontrar, de entre todas las curvas que unen dos puntos A y B , aquella a lo largo de la cual un punto material



que se mueva únicamente bajo la fuerza de la gravedad, llegue del más alto al más bajo en el menor tiempo posible. Para el modelado, es habitual considerar la fuerza de la gravedad como un vector apuntando hacia la parte positiva del eje OX (es decir, “bajar” es avanzar por el eje OX) y considerar los puntos $A = (0, 0)$ y $B(x_1, y_1)$ (nótese que $y_1 = 0$ produciría la caída en picado, la línea recta).

Llamaremos $y : [0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$, a la función cuya gráfica sea una curva que une A y B , es decir,

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Para modelar correctamente el problema a minimizar, hemos de introducir el tiempo, por lo que llamamos auxiliariamente a una curva $\gamma(t)$ que se moverá a lo largo de la gráfica de y , es decir, $\gamma(t) = (x(t), y(x(t)))$ y que determinará la posición de la partícula en el instante de tiempo t (tomando $\gamma(0) = A = (0, 0)$). Observamos entonces que, transcurrido un tiempo t , la partícula ocupa la posición $\gamma(t) = (x(t), y(x(t)))$ y habrá recorrido un espacio $s(t)$ dado por la longitud de la curva:

$$s(t) = S(x(t)) = \int_0^{x(t)} \sqrt{1 + y'(z)^2} dz, \quad (2)$$

y la idea es invertir esta función $t = s^{-1}(s)$ para describir el tiempo transcurrido y minimizarlo. Para ello, primero deducimos la celeridad $v(t)$ de la partícula (el módulo de su velocidad $v(t) = |\gamma'(t)|$) a partir de esta expresión

$$v(t) := \frac{ds}{dt} = x'(t) \sqrt{1 + y'(x(t))^2}, \quad (3)$$

lo que nos permitirá más adelante hacer un cambio de variables de s a x . Por otro lado, vamos a deducir el valor de esta velocidad desde el principio de conservación de la Energía, la suma de la energía cinética y la potencial permanece constante. En este caso, la energía cinética es $\frac{1}{2}mv^2(t)$, siendo m la masa de la partícula, y la potencial (gravitatoria) es mgh , siendo $g = 9,8m/s^2$ y h la altura desde algún nivel de referencia. En este caso, como el eje vertical es el eje OX y bajar en altura es aumentar la x , podemos tomar la altura del punto A (que corresponde

con $x = 0$) como altura de referencia y nos quedará entonces $x = h_A - h$. Por lo tanto, la conservación de la energía se escribe como

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + mgh(t) = E_A = mgh_A,$$

lo que nos permite reescribir la celeridad como:

$$v^2 = 2g(h_A - h) = 2gx \Rightarrow v = \sqrt{2gx}.$$

Ya podemos invertir $t = s^{-1}(s)$ y usar la regla de derivación de la inversa para obtener una expresión del tiempo transcurrido hasta llegar al punto B :

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{v(t(s))} \Rightarrow t_B = \int_{s(A)}^{s(B)} \frac{ds}{v(t(s))}$$

de donde

$$t_B = \int_{s(A)}^{s(B)} \frac{ds}{\sqrt{2gx(t(s))}}$$

haciendo aquí el cambio de variable $s = S(x)$ dado en (2) cuya diferencial viene dada por (3)

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

obtenemos finalmente el funcional a minimizar:

$$T[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gx}} dx.$$

Por último, notemos que el conjunto sobre el cual hemos de minimizar es:

$$\mathcal{D} = \{y \in C^1(0, x_1) : y(0) = 0, y(x_1) = y_1\}.$$

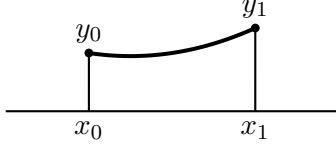
Nota 2 Si en el planteamiento inicial, se deja la gravedad en la dirección del eje OY (que puede parecer incluso más natural, y solo repercute en la expresión de la energía potencial y, por supuesto, en la interpretación del resultado) el funcional a minimizar resulta ser:

$$T[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Tenemos, por lo tanto, dos formas de plantear el problema. La diferencia matemática es que en el primer funcional, el integrando no depende de y mientras que en el segundo caso, no depende de x . Esto proporcionará distintas simplificaciones a la hora de obtener y resolver las ecuaciones que se obtienen.

Nota 3 Establecer las conexiones entre braquistocrona, cicloide y tautocrona.

Catenaria. Consideremos un cable homogéneo inextensible (ver dibujo) suspendido en el aire y sujeto en dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) . El problema es determinar la forma que toma el cable sometido únicamente a la acción de la gravedad. En este caso, el principio de Hamilton (de mínima acción) equivale a maximizar la energía potencial, puesto que en su configuración final, el cable estará en reposo (no posee energía cinética). Si, para cada $x \in [x_0, x_1]$, llamamos



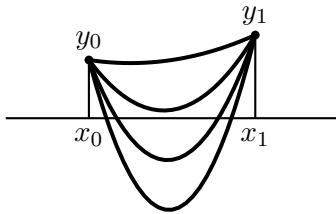
$y(x)$ a la altura del cable en la vertical del punto x , el funcional acción asociado a cada posible configuración $y(x)$ viene dado por (en este caso, omitimos la deducción expresa)

$$A[y] = \int_{x_0}^{x_1} mg y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

donde m es la densidad del cable (masa por unidad de longitud) y $g = 9,8m/s^2$ es la aceleración típica de la gravedad. Se trataría, por lo tanto, de encontrar el mínimo de A sobre el conjunto

$$\mathcal{D} = \{y \in C^1(x_0, x_1) : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}.$$

Pero en este caso podemos observar fácilmente que el funcional no está acotado inferiormente (probar con funciones del tipo $y_\lambda(x) = 1 + \lambda(x^2 - 1)$ con condiciones $y(-1) = y(1) = 1$ y véase (numéricamente) que $A[y_\lambda] \rightarrow -\infty$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$), por lo que difícilmente alcanzará un mínimo.



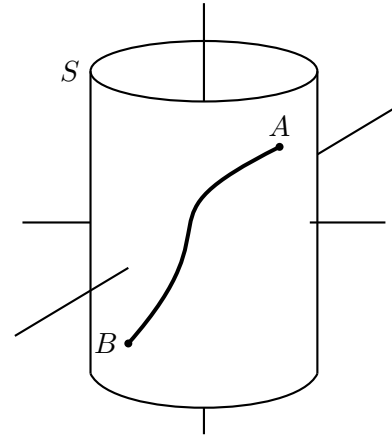
La naturaleza del problema nos proporciona la solución, puesto que lo que observamos con las funciones y_λ es que el cable no tiene una longitud definida (puede ser tan largo como quiera) y eso es lo que produce que el funcional acción no esté acotado inferiormente. Parece, por lo tanto, obvio que es necesario y natural predefinir la longitud del cable, y que esta longitud sea al menos la distancia entre los dos puntos de sujeción, lo que cambiaría el planteamiento y la solución del problema, aunque no el funcional a minimizar, que sigue siendo $A[y]$. En realidad, fijar una cantidad L como longitud del cable (mayor

que la distancia entre los dos puntos de sujeción $L > \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$), no es más que añadir una restricción del tipo

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = L,$$

al conjunto \mathcal{D} de configuraciones posibles, lo que se traducirá, como veremos en la sección 4.3, en un problema de minimización con restricciones de tipo integral y requerirá del uso de multiplicadores de Lagrange. Resolveremos este ejemplo en la página 23.

Líneas geodésicas. Dada una superficie de \mathbb{R}^3 dada por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x, y, z) = 0\}$ de \mathbb{R}^3 , nos planteamos el problema de obtener curvas en S que unan dos puntos $A = (x_0, y_0, z_0)$ y $B = (x_1, y_1, z_1)$ cuya longitud sea lo menor posible. Las curvas re-



sultantes, cuando existen, se denominan geodésicas. Para formalizar el problema, buscamos funciones

$$x, y, z : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R},$$

derivables, cumpliendo $(x, y, z)(t_0) = (x_0, y_0, z_0) \in S$, y $(x, y, z)(t_1) = (x_1, y_1, z_1) \in S$, que estén contenidas en S , es decir,

$$\Phi(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \forall t.$$

y que minimicen el funcional

$$L[x, y, z] := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Es lo que se conoce como problema de minimización de un funcional sujeto a una **ligadura algebraica**. Notamos además que el funcional a minimizar depende de **varias funciones**.

Problema de Dido. Dido fue la fundadora (según la mitología griega), constructora y reina de Cartago (814 a. de C.). Era hija del rey Belo y hermana de Pigmalión, que sucedió en el trono a su padre. A esta mítica figura de mujer se le conoce también como Elisa, nombre devenido de la Eneyda del poeta romano Virgilio. Siendo muy joven, se casó con Siqueo, sacerdote de Melkart, a quien Pigmalión mandó asesinar para apoderarse de sus inmensas riquezas. Ella tramó una conspiración para recuperar lo perdido, pero al ser descubierta se vio obligada a huir al norte de África. Allí le pidió a Jarbas de Numidia que le vendiera tierra para poder tener una patria. Él le dijo que le proporcionaría aquella tierra que se pudiera encerrar en una piel de vaca. Dido cortó dicha piel en finas tiras formando un largo cordel con ellas. Extendiendo la



Figura 1.1: Representación de la ciudad de Cartago en el *Carthage National Museum*.

cuerda hasta formar un círculo, consiguió encerrar el mayor área posible. Dido además extendió la cuerda en línea recta paralela a una playa, formando un semicírculo que le dio aún más terreno. Así, Dido abarcó el terreno suficiente para construir una fortaleza. De esta forma, se creó el recinto fortificado de Cartago, en torno al cual se edificó después la ciudad.

En términos modernos se denomina un **problema isoperimétrico**, y consiste en encontrar de entre todas las curvas cerradas de perímetro constante L , aquella que encierra área máxima. Analíticamente, dadas

$$x, y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(0) = x(1), y(0) = y(1)$$

continuas, y definiendo la curva cerrada

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [0, 1]\},$$

se trata de maximizar el funcional (ver página 21)

$$A[x, y] = \text{Área encerrada por la curva } \Gamma,$$

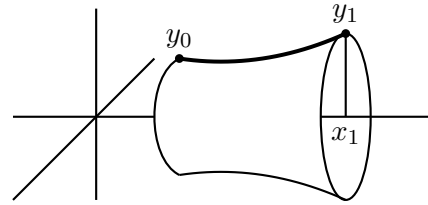
sujeto a la restricción de que el perímetro tenga longitud L dada, es decir (suponiendo que x e y sean

derivables)

$$L[x, y] := \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dx = L = cte.$$

En este caso, no solo tenemos **restricciones de tipo integral y un funcional dependiente de varias funciones** sino que resaltamos que las **condiciones de contorno** son de coincidencia a la izquierda y derecha, **de tipo periódico**.

Superficies minimales de revolución. Se trata de encontrar una superficie en \mathbb{R}^3 generada a partir de la rotación en torno al eje OX de la gráfica de una función real que pase por ciertos puntos $A = (x_0, y_0, 0)$ y $B = (x_1, y_1, 0)$ de manera que su área sea lo más pequeña posible. Si llamamos $y : [0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$,



a la función cuya gráfica pretendemos rotar, deberá verificar

$$y(x_0) = y_0 > 0, \quad e \quad y(x_1) = y_1 > 0.$$

y el área de la superficie de revolución que genera constituirá el funcional a minimizar:

$$S[y] := 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

En este caso, el conjunto sobre el que minimizaremos ha de incluir la positividad de las funciones:

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1(x_0, x_1) : y(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1] \right. \\ \left. y(x_0) = y_0 > 0, y(x_1) = y_1 > 0 \right\}.$$

Notamos además que, a diferencia del ejemplo de la catenaria, cuyo funcional asociado es el mismo salvo constante, ahora sí que esperamos tener un mínimo, ya que al trabajar con funciones positivas es obvio que $S[y] \geq 0$. Más adelante, en el Ejemplo 5, veremos que, para que exista solución, es preciso imponer ciertas restricciones sobre los puntos A y B ya que la posible solución será del tipo $C_1 \cosh((x - C_2)/C_1)$ y no puede pasar por cualesquiera dos puntos.

Nota 4 Comparar con la catenaria y buscar el concepto de catenoide.

2. Fundamentos del Cálculo de Variaciones

Como vimos en la introducción, debemos deducir que una cierta expresión es nula a partir de una propiedad de integrales nulas que se cumple para un conjunto de funciones “test” dadas. Este hecho constituye una propiedad fundamental que podrá ser generalizada más adelante, y que enunciamos y probamos ahora.

2.1. Lema Fundamental

Teorema 1 *Dada una función continua f en un intervalo $[a, b]$, equivalen:*

- i) $f(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$,
- ii) $\int_a^b f(x)\phi(x)dx = 0$ para toda $\phi \in C_0^1(a, b)$.

Prueba. i) \Rightarrow ii) es trivial, por lo que probamos la otra implicación por reducción al absurdo. Supongamos que en algún punto x_0 tenemos $f(x_0) > 0$ (si fuese < 0 razonamos análogamente). Por lo tanto f será positiva en torno a x_0 , en un intervalo de la forma $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ contenido en (a, b) . Tomando $\phi(x) = e^{\frac{1}{(x-x_0-\epsilon)(x-x_0+\epsilon)}}$ en ese subintervalo y 0 fuera, se concluye la demostración. \square

2.2. Ecuación de Euler–Lagrange

Vamos a dar rigor a los cálculos introducidos a la hora de minimizar un funcional del tipo

$$\mathcal{F}[y] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (4)$$

donde $F(x, y, p)$ es una función continua definida en $[x_0, x_1] \times \Omega$, siendo Ω un dominio de \mathbb{R}^2 . De manera general, consideraremos \mathcal{F} definido sobre el conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1(x_0, x_1) : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \right. \\ \left. (y(x), y'(x)) \in \Omega \ \forall x \in [x_0, x_1] \right\}.$$

Veamos que si \bar{y} es un mínimo de \mathcal{F} , entonces \bar{y} ha de verificar necesariamente una cierta ecuación diferencial.

Teorema 2 (Condición necesaria) *Sea el funcional \mathcal{F} definido sobre \mathcal{D} y supongamos que F es dos veces derivable respecto de y y p . Entonces, si $\bar{y} \in \mathcal{D} \cap C^2(x_0, x_1)$ es un mínimo de \mathcal{F} , se verifica*

$$F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \frac{d}{dx} \left(F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \right) = 0$$

que llamaremos *ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema de minimización*.

Prueba. Definimos la función real de variable real siguiente

$$g(s) := \mathcal{F}[\bar{y} + s\phi],$$

donde ϕ es una función cualquiera en $C_0^1(x_0, x_1)$ por lo que $(\bar{y} + s\phi)(x_0) = y_0$ y $(\bar{y} + s\phi)(x_1) = y_1$. Para que \mathcal{F} esté bien definida, solo falta que $(\bar{y} + s\phi)$ se quede dentro de \mathcal{D} , es decir, que $((\bar{y} + s\phi)(x), (\bar{y} + s\phi)'(x)) \in \Omega$, lo que es fácil de imponer para un $|s| < s_0$ suficientemente pequeño, ya que el intervalo $[x_0, x_1]$ es compacto.

Dado que \bar{y} es el mínimo de \mathcal{F} por hipótesis, entonces, sea quien sea ϕ , la función g tiene un mínimo en $s = 0$, y al ser derivable (aquí es donde requerimos que \bar{y} tenga, a priori, dos derivadas), entonces $g'(0) = 0$. Calculamos esta derivada

$$g'(s) = \frac{d}{ds} \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}(x) + s\phi(x), \bar{y}'(x) + s\phi'(x)) dx \\ = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(\square)\phi + \frac{\partial F}{\partial p}(\square)\phi' dx,$$

(donde $\square = (x, \bar{y}(x) + s\phi(x), \bar{y}'(x) + s\phi'(x))$). Evaluando en $s = 0$, obtenemos, para cada ϕ :

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(\square)\phi(x) + \frac{\partial F}{\partial p}(\square)\phi'(x) dx,$$

(donde $\square = (x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))$). Si integramos por partes en la segunda integral que nos ha quedado, obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(\square)\phi(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial p}(\square) \right) \phi(x) dx \\ + \left[\frac{\partial F}{\partial p}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \phi(x) \right]_{x_0}^{x_1} = 0. \quad (5)$$

Y, como estamos tomando $\phi \in C_0^1(x_0, x_1)$ (es decir, se anula en los extremos del intervalo), el último término se anula y queda:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\square) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial p}(\square) \right) \right) \phi(x) dx$$

para toda $\phi \in C_0^1(x_0, x_1)$. Usando el Teorema 1 (lema fundamental del cálculo de variaciones) obtenemos finalmente el resultado deseado. \square

2.2.1. Extremales

Como ya hemos dicho, la ecuación obtenida (que escribiremos de forma sintética: $\partial_y F - \frac{d}{dx} F_p = 0$) se llama **ecuación de Euler Lagrange** asociada al problema de minimización. Esta ecuación constituye, según el Teorema 2, una **condición necesaria** que ha

de verificar el mínimo \bar{y} buscado, siempre que sea suficientemente regular $\bar{y} \in C^2$, y por lo tanto, las soluciones de la ecuación de Euler Lagrange son **candidatos** a mínimos de \mathcal{F} , y se les denomina **Extremales** del problema de minimización. Para que un extremal sea mínimo, tendremos que pedirle además, que esté en el conjunto \mathcal{D} , es decir, que verifique las **condiciones de contorno**

$$\bar{y}(x_0) = y_0, \quad \bar{y}(x_1) = y_1,$$

que describen dicho conjunto. Incluso tras este paso, no tendremos garantizado que la(s) función(es) así obtenida(s) sean mínimos; más adelante describiremos alguna **condición suficiente** que garantice la existencia de mínimos.

Vemos qué ocurre cuando el conjunto \mathcal{D} no incluye este tipo de condiciones.

2.2.2. Condiciones para conjuntos sin condiciones de contorno

Vamos a ver qué ocurre en el caso particular en que pretendemos minimizar el mismo funcional anterior

$$\mathcal{F}[y] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

pero sobre el conjunto

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}} = \{y \in C^1(x_0, x_1) : (y(x), y'(x)) \in \Omega \ \forall x \in [x_0, x_1]\}.$$

Teorema 3 Sea el funcional \mathcal{F} definido sobre $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ y supongamos que F es dos veces derivable respecto de y y p . Entonces, si $\bar{y} \in \overset{\circ}{\mathcal{D}} \cap C^2(x_0, x_1)$ es un mínimo de \mathcal{F} , verifica la ecuación $F_y - \frac{d}{dx}F_p = 0$ y además las siguientes condiciones de contorno

$$F_p(x_0, \bar{y}(x_0), \bar{y}'(x_0)) = 0 = F_p(x_1, \bar{y}(x_1), \bar{y}'(x_1)).$$

Prueba. Repetimos los pasos seguidos en el Teorema 2 pero tomando cualquier test $\phi \in C^1(x_0, x_1)$, es decir, sin pedirle ahora a los test que valgan necesariamente cero en los extremos del intervalo. Podemos llegar hasta la fórmula (5) de manera idéntica. Teniendo en cuenta que (5) se cumple para toda $\phi \in C_0^1(x_0, x_1) \subset C^1(x_0, x_1)$, podemos continuar el argumento anterior y deducir que $\partial_y F - \frac{d}{dx}F_p = 0$ sobre \bar{y} . Pero entonces, volviendo a (5), obtenemos

$$\left[\frac{\partial F}{\partial p}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \phi(x) \right]_{x_0}^{x_1} = 0.$$

Pues bien, tomando en esta expresión sendas funciones test $\phi_0, \phi_1 \in C^1(x_0, x_1)$ que cumplan

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1,$$

deducimos el resultado enunciado. \square

Nota 5 De manera análoga podemos probar que, si al conjunto \mathcal{D} le quitamos únicamente una de las condiciones, por ejemplo, la condición en x_1 ,

$$\mathcal{D}_1 = \{y \in C^1(x_0, x_1) : y(x_0) = y_0, (y(x), y'(x)) \in \Omega\},$$

entonces el mínimo de \mathcal{F} sobre \mathcal{D}_1 ha de cumplir

$$\bar{y}(x_0) = y_0, \quad 0 = F_p(x_1, \bar{y}(x_1), \bar{y}'(x_1)) = 0.$$

Ejemplo 1 Resuelve el problema de la curva de longitud mínima sobre los conjuntos \mathcal{D}_1 y $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, e interpreta el resultado.

En este caso, $F(x, y, p) = \sqrt{1 + p^2}$ y al no cambiar el funcional, la ecuación de Euler–Lagrange sigue siendo $\bar{y}'' = 0$ y, por lo tanto, las extremales son rectas $\bar{y}(x) = Ax + B$. Además, $F_p = p/\sqrt{1 + p^2}$, por lo que al minimizar sobre \mathcal{D}_1 tendremos que resolver

$$y''(x) = 0, \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_1) = 0,$$

y la única solución es la recta horizontal $y(x) = y_0$. Esto parece lógico, puesto que la coordenada Y del punto a la derecha no está fijada, y tiene sentido que el más cercano sea aquel que se encuentra en la misma horizontal que el punto de la izquierda.

Al minimizar sobre $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ tendremos que resolver

$$y''(x) = 0, \quad y'(x_0) = 0 = y'(x_1),$$

lo que nos deja infinitas soluciones $y(x) = B$, rectas horizontales. En este caso, al no fijar la coordenada Y ni a la derecha ni a la izquierda, también parece lógico el resultado, puesto que cualesquiera dos puntos a la misma altura, estarían a la misma distancia, y sería la mínima posible.

2.2.3. Ecuación de Euler–Lagrange cuando F no depende de y

Vamos a ver qué ocurre en el caso particular en que pretendemos minimizar un funcional de la forma

$$\mathcal{F}_1[y] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y'(x)) dx.$$

En este caso, el proceso y la demostración es la misma, pero obteniendo $F_y = 0$, por lo que podemos enunciar el siguiente

Teorema 4 Sea $\bar{y} \in C^2(x_0, x_1)$ el mínimo del funcional \mathcal{F}_1 definido sobre \mathcal{D} y supongamos que F es dos veces derivable respecto de p . Entonces, \bar{y} verifica la ecuación

$$F_p(x, \bar{y}'(x)) = \text{cte.}$$

Además, en el caso en que \mathcal{F}_1 esté definido sobre $\mathring{\mathcal{D}}$, se cumple que

$$F_p(x_0, \bar{y}'(x_0)) = F_p(x_1, \bar{y}'(x_1)) = 0.$$

2.2.4. Ecuación de Euler–Lagrange cuando F no depende de x

Por último, en el caso particular en que el funcional es de la forma

$$\mathcal{F}_2[y] := \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), y'(x)) dx,$$

podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 5 Sea $\bar{y} \in C^2(x_0, x_1)$ el mínimo del funcional \mathcal{F}_2 definido sobre \mathcal{D} y supongamos que F es dos veces derivable respecto de y y p . Entonces, \bar{y} verifica la ecuación

$$F(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - y'(x)F_p(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = \text{cte.}$$

Prueba. Realizamos el siguiente cálculo sobre el mínimo \bar{y} (por lo que $p' = \bar{y}''$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(F - y' F_p \right) &= \bar{y}' F_y + p' F_p - \bar{y}'' F_p - \bar{y}' \frac{d}{dx} F_p \\ &= \bar{y}' \left(F_y - \frac{d}{dx} F_p \right) = 0, \end{aligned}$$

donde la última identidad se debe a que, por supuesto, la ecuación de Euler Lagrange se verifica. Esto concluye la demostración. \square

2.3. Ejemplos

Ejemplo 2 (Oscilador armónico.) Calcula los extremos del siguiente problema: Minimizar

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^{\pi/2} (y'(x)^2 - y(x)^2) dx$$

sobre el conjunto

$$\mathcal{D} = \{y \in C^1(0, \pi/2) : y(0) = 0, y(\pi/2) = 1\}.$$

En este caso, $F(x, y, p) = p^2 - y^2$, por lo que la ecuación de E–L es

$$0 = F_y - \frac{d}{dx} F_p = -2y - (2p)' = -2(y + y''),$$

cuyas soluciones son $y(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$, para cualesquiera valores A y B en \mathbb{R} . Si imponemos las condiciones de contorno descritas en el conjunto \mathcal{D} , obtenemos

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(\pi/2) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 1 \end{aligned} \right\}$$

por lo que en este caso tenemos una única extremal $y(x) = \sin(x)$, candidata a minimizar el funcional \mathcal{F} .

Ejemplo 3 (Longitud mínima) Calcula los extremos del siguiente problema: Minimizar

$$L[y] := \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

sobre el conjunto

$$D := \{y \in C^1([x_0, x_1]) : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}.$$

Aunque este ejemplo ya lo resolvimos en la sección 1.1, vamos a recalcularlo usando el Teorema 4. En este caso, la ecuación sería:

$$F_p(x, y(x)) = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = C,$$

lo que nos lleva a

$$|y'(x)| = \frac{C^2}{1 - C^2} = k$$

y, de nuevo, a la línea recta como solución al problema.

Ejemplo 4 Calcula los extremos del problema anterior usando el Teorema 5.

En este caso la ecuación es

$$C = F - y' F_p = \sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

lo que nos lleva a

$$|y'(x)| = \sqrt{\frac{1 - C^2}{C^2}} = k_2$$

y otra vez a la línea recta.

Ejemplo 5 Calcula los extremos del problema de la superficie minimal de revolución usando el Teorema 5.

Se trata, salvo constante, de minimizar

$$\mathcal{F}[y] := \int_{x_0}^{x_1} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

En este caso, al aplicar el Teorema 5, la ecuación resultante es

$$C = F - y'F_p = y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

o, despejando,

$$y = C\sqrt{1 + y'^2} \quad (6)$$

Nota 6 Este es una ecuación diferencial implícita de tipo Lagrange $y(x) = x\varphi(y'(x)) + \psi(y'(x))$, que se resuelven, de forma general, haciendo el cambio $y' = p$, de donde se deduce $(p - \varphi(p)) = p'(x\varphi'(p) + \psi'(p))$, se distinguen casos: el caso $p' = 0$, o pts fijos de φ , y el caso $p' \neq 0$, que permite invertir la función $p(x)$ y calcular la ecuación de $x = p^{-1}(p)$ que resulta verificar una EDO lineal (integrable)

$$x'(p)(p - \varphi(p)) = x\varphi'(p) + \psi'(p),$$

dando $x = f(p)$ y obteniendo x e y en paramétricas.

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = f(p)\varphi(p) + \psi(p), \end{cases} \quad p \in \mathbb{R}.$$

En nuestro ejemplo $\varphi(p) = 0$ y $\psi(p) = C\sqrt{1 + p^2}$. El primer caso produce la solución $y(x) \equiv C$ y en el segundo se obtiene la EDO

$$x'(p)p = C \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \Rightarrow x = K + C \operatorname{arcsinh}(p),$$

y por lo tanto, la solución en paramétricas.

$$\begin{cases} x = K + C \operatorname{arcsinh}(p), \\ y = C\sqrt{1 + p^2}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si se hace ahora el cambio: $p = \sinh(t)$ queda,

$$\begin{cases} x = K + Ct, \\ y = C \cosh(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

y ese es el motivo del cambio “amañado” que vamos a hacer y que simplifica la integral final.

Primero observamos que hay soluciones de (6) constantes $y \equiv C$. Para encontrar el resto definimos una variable t con el objeto de describir tanto x como y en función de este parámetro y resolver el problema en paramétricas. Definimos $y' := \sinh(t)$ y, usando la ecuación (6), obtenemos:

$$y = C\sqrt{1 + (y')^2} = C\sqrt{1 + \sinh^2(t)} = C \cosh(t), \quad (7)$$

lo que ya nos da y en función de t . Una vez descartadas las constantes, tenemos $y' \neq 0$, y podemos invertir implícitamente x en función de y y derivar, obteniendo:

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x(y))}.$$

Integrando respecto de y , buscamos una primitiva, usando el cambio de variables dado por (7),

$$\begin{aligned} x &= \int^y \frac{dy}{y'(x(y))} = \int^y \frac{dy}{\sinh(t)} = \left[\begin{array}{l} y = C \cosh(t) \\ dy = C \sinh(t) dt \end{array} \right] \\ &= \int^t \frac{C \sinh(t) dt}{\sinh(t)} = K + Ct. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución, en paramétricas, es

$$\begin{cases} x = K + Ct, \\ y = C \cosh(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ahora podemos recuperar $y = y(x) = C \cosh(\frac{x-K}{C})$ y aparentemente, solo resta verificar dos condiciones $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, y tenemos dos parámetros libres K y C , con lo que todo parece estar bien planteado, pero en realidad no toda condición de contorno produce una solución.

Nota 7 Veamos que, en realidad, no para cualesquiera condiciones de contorno podemos calcular C y K . Recuperamos la formulación en paramétricas y suponemos que $y_1 \geq y_0 > 0$ y deducimos lo siguiente:

$$\begin{cases} y_0 = C \cosh(t_0) \\ y_1 = C \cosh(t_1) \end{cases} \Rightarrow \frac{\cosh(t_1)}{\cosh(t_0)} = \frac{y_1}{y_0} \geq 1,$$

y, por otro lado

$$\begin{cases} x_0 = K + Ct_0, \\ x_1 = K + Ct_1, \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_0 + \frac{x_1 - x_0}{C}$$

por lo que, poniendo $C = y_0 / \cosh(t_0)$ queda la ecuación que ha de cumplir t_0 :

$$f(t_0) := \frac{\cosh\left(t_0 + \frac{x_1 - x_0}{y_0} \cosh(t_0)\right)}{\cosh(t_0)} = \frac{y_1}{y_0}.$$

Observamos que la función $f(t_0)$ tiene un mínimo positivo (es positiva y tiende a ∞ en $t_0 \rightarrow \pm\infty$) pero, dependiendo del valor de $(x_1 - x_0)$ es decir, NO se pueden alcanzar valores cualesquiera de y_0 e y_1 .

El caso más habitual es tomar $y_0 = y_1 > 0$. En este caso podemos recuperar $y(x) = C \cosh(\frac{x-K}{C})$ y partir de aquí deducir de $y(x_0) = y(x_1)$ que

$$\cosh\left(\frac{x_0 - K}{C}\right) = \cosh\left(\frac{x_1 - K}{C}\right) \Leftrightarrow K = \frac{x_0 + x_1}{2},$$

y en segundo lugar, deduciremos C (de manera implícita) de la igualdad

$$y_1 = C \cosh\left(\frac{x_1 - x_0}{2C}\right)$$

que también hemos de observar que no tiene por qué verificarse para cualquier valor de y_1 , ya que la expresión tiene un valor $C_0 \sim 0,416778(x_1 - x_0)$ para el cual alcanza el mínimo $\sim 0,75444(x_1 - x_0)$.

2.4. Convexidad: condición suficiente de existencia

En esta sección daremos una respuesta parcial a la pregunta sobre la existencia de mínimos. Como ya comentamos en la introducción, sección 1.2, la analogía con el caso de funciones nos permite entender mejor la condición que vamos a describir: la convexidad. La idea general es que algo convexo está “doblado hacia arriba” y, por lo tanto, de tener un “punto crítico” (un extremal) seguro que es el mínimo. Vamos a dar formalidad a esta idea.

En un espacio vectorial, un conjunto Ω se dice convexo cuando contiene al segmento que une cualesquiera dos puntos del mismo, es decir

$$\forall x, y \in \Omega \Rightarrow tx + (1 - t)y \in \Omega, \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Y una función f definida sobre ese conjunto convexo se dice que es convexa cuando cumple la siguiente desigualdad

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

para cualesquiera $x, y \in \Omega$ y para todo $t \in [0, 1]$. Análogamente, diremos que es estrictamente convexo cuando la desigualdad anterior es estricta para los valores interiores $t \in (0, 1)$

Con estas definiciones estamos en condiciones de enunciar el principal teorema de esta sección.

Teorema 6 (Existencia de mínimo) *Sea el funcional \mathcal{F} dado por (4) definido sobre el conjunto \mathcal{D} y supongamos las condiciones de regularidad del Teorema 2.*

Supongamos además que tanto el conjunto \mathcal{D} como el funcional \mathcal{F} son convexos y que $\bar{y} \in \mathcal{D} \cap C^2$ es una extremal de \mathcal{F} , entonces \bar{y} es un mínimo global de \mathcal{F} en \mathcal{D} .

Prueba. Primero observamos que, invirtiendo los pasos de la demostración del teorema 2, podemos deducir que una extremal, por ser solución de la ecuación de Euler–Lagrange, verifica

$$\left. \frac{d}{dt} (\mathcal{F}[\bar{y} + t\phi]) \right|_{t=0} = 0,$$

para cualquier $\phi \in C_0^1$. En segundo lugar, tomamos cualquier $z \in \mathcal{D}$, llamamos $\phi = z - \bar{y}$ y usamos que $tz + (1 - t)\bar{y} = \bar{y} + t\phi$ y que \mathcal{F} es convexo, para escribir $\mathcal{F}[\bar{y} + t\phi] \leq t\mathcal{F}[z] + (1 - t)\mathcal{F}[\bar{y}] = \mathcal{F}[\bar{y}] + t(\mathcal{F}[z] - \mathcal{F}[\bar{y}])$ y deducir

$$\frac{\mathcal{F}[\bar{y} + t\phi] - \mathcal{F}[\bar{y}]}{t} \leq \mathcal{F}[z] - \mathcal{F}[\bar{y}].$$

Tomando entonces $t \rightarrow 0$, obtenemos

$$\mathcal{F}[z] - \mathcal{F}[\bar{y}] \geq \left. \frac{d}{dt} (\mathcal{F}[\bar{y} + t\phi]) \right|_{t=0} = 0,$$

y por lo tanto $\mathcal{F}[z] \geq \mathcal{F}[\bar{y}]$. \square

También podemos deducir la existencia de mínimo global cuando, por algún medio auxiliar, tengamos un mínimo local y convexidad.

Teorema 7 (Mínimo local es global) *Si partimos de un funcional $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ convexo definido sobre un subconjunto convexo \mathcal{D} de un espacio vectorial, y suponemos que \mathcal{F} alcanza un mínimo (resp. estricto) local en $\bar{y} \in \mathcal{D}$, entonces \bar{y} es un mínimo (resp. estricto) global.*

Prueba. Como $\bar{y} \in \mathcal{D}$ es un mínimo local, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{F}[\bar{y}] \leq \mathcal{F}[z], \quad \forall z \in \mathcal{D} : \|z - \bar{y}\| \leq \varepsilon.$$

Tomamos ahora un $v \in \mathcal{D}$ distinto de \bar{y} y definimos $t_0 := \min\{\varepsilon/\|v - \bar{y}\|, 1\}$. Tomando entonces el punto $z_0 = t_0 v + (1 - t_0)\bar{y}$, tenemos

$$\|z_0 - \bar{y}\| = \|t_0 v + (1 - t_0)\bar{y} - \bar{y}\| = t_0 \|v - \bar{y}\| \leq \varepsilon,$$

por lo que podemos aplicar la desigualdad de mínimo local anterior y obtener $\mathcal{F}[\bar{y}] \leq \mathcal{F}[z_0]$ y, usando la convexidad,

$$\mathcal{F}[\bar{y}] \leq \mathcal{F}[z_0] \leq t_0 \mathcal{F}[v] + (1 - t_0) \mathcal{F}[\bar{y}],$$

de donde obtenemos

$$t_0 \mathcal{F}[\bar{y}] \leq t_0 \mathcal{F}[v], \quad \forall v \in \mathcal{D},$$

lo que concluye la demostración ($t_0 > 0$). \square

Por último, veamos cómo deducir la convexidad en algunas ocasiones.

Teorema 8 (Condición de convexidad) *Sea el funcional \mathcal{F} dado por*

$$\mathcal{F}[y] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

con $F(x, y, p)$ definida en $[x_0, x_1] \times \Omega$, siendo Ω un convexo de \mathbb{R}^2 y supongamos las condiciones de regularidad del Teorema 2. Entonces, si la función F es convexa sobre Ω , entonces \mathcal{F} es un funcional convexo.

Prueba. Trivial (linealidad de la integral). \square

Nota 8 Observamos que la condición anterior no es necesaria. Por ejemplo el funcional

$$\mathcal{F}[y] := \int_0^1 y(x)^2 (1 - y(x)') dx$$

es convexo sobre $\mathcal{D} = C_0^1(0, 1)$ pero $F = y^2(1 - p)$ no es una función convexa. Veamos primero que F no es convexa; esto en consecuencia directa de que su matriz hessiana

$$Hess(F)(y, p) = \begin{pmatrix} 2(1-p) & -2y \\ -2y & 0 \end{pmatrix}$$

es definida negativa para $p > 1$. Por otro lado, veamos que \mathcal{F} se puede reescribir de manera que se vea fácilmente que es convexa.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y] &= \int_0^1 y(x)^2 dx - \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{y(x)^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 y(x)^2 dx - \left[\frac{y(x)^3}{3} \right]_0^1 = \int_0^1 y(x)^2 + c. \end{aligned}$$

3. Cálculo de extremales: problemas de contorno

Un problema de contorno PC consiste en encontrar una solución de una ecuación diferencial ordinaria EDO en un intervalo $I = [x_0, x_1]$ que, a diferencia de los problemas de valores iniciales, verifique ciertas condiciones en ambos extremos del intervalo. En definitiva, los PC son el tipo de problema que nos hemos encontrado en la búsqueda de extremales de un problema de minimización.

Este concepto se extiende de forma natural a varias dimensiones, y consistirá en encontrar las soluciones de una ecuación en derivadas parciales EDP sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ que verifiquen ciertas condiciones sobre su frontera $\partial\Omega$.

Con respecto a la existencia y unicidad de solución de un PC, existen algunos resultados pero, en general y en los ejemplos habituales, pueden darse todos los casos posibles: que no haya solución, que haya una única solución, y que existan múltiples soluciones. Veámoslo a través de ejemplos.

3.1. Casuística de existencia y unicidad

Ejemplo 6 (Existencia y unicidad) Encuentra, si es posible, las soluciones del PC siguiente:

$$\left. \begin{aligned} y''(x) + y(x) &= 0, & x \in [0, \pi/2] \\ y(0) &= 0, \\ y(\pi/2) &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Referimos al Ejemplo 2, donde encontramos la única solución $y(x) = \sin(x)$.

Ejemplo 7 (No existencia) Encuentra, si es posible, las soluciones del PC siguiente:

$$\left. \begin{aligned} y''(x) &= 2, & x \in [0, 1] \\ y'(0) &= 0, \\ y'(1) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

En este caso, la solución general de la ecuación es $y(x) = x^2 + Ax + B$. Si imponemos las condiciones de contorno, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ y'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 0 \\ 2 + A &= 0 \end{aligned}$$

que resultan ser incompatibles, por lo que no hay solución posible.

Ejemplo 8 (Existencia múltiple) Encuentra, si es posible, las soluciones del PC siguiente:

$$\left. \begin{aligned} y''(x) + y(x) &= 0, & x \in [0, \pi] \\ y(0) &= 0, \\ y(\pi) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

En este caso, la solución general de la ecuación es $y(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$. Si imponemos las condiciones de contorno, obtenemos

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(\pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 0 \\ A &= 0 \end{aligned}$$

por lo que B queda libre y tenemos infinitas soluciones de la forma $y(x) = B \sin(x)$, $B \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 9 (Del PC al PV) Encuentra, si es posible, un problema de minimización del cual proceda el PC del Ejemplo 7 y verifica si tampoco posee solución

Este ejercicio no es mecánico y, en este momento, requiere de cierta parte creativa (véase sección 3.5). Pretendemos encontrar un funcional cuya ecuación de Euler Lagrange asociada sea $y'' - 2 = 0$. Basándonos en los ejemplos anteriores, e identificando $y'' = -d_t(F_p)$ y $F_y = 2$, intuimos que una posibilidad

es $F(x, y, p) = p^2/2 + 2y$. En efecto, el problema de minimizar

$$\mathcal{F}[y] := \int_0^1 \left(2y(x) + \frac{(y'(x))^2}{2} \right) dx,$$

sobre el conjunto $\mathcal{D} = C^1(0, 1)$ produce el PC enunciado, y notamos que no es necesario introducir las condiciones $y'(0) = y'(1) = 0$ en el conjunto \mathcal{D} , ya que en este caso $F_p = p$, por lo que al aplicar el Teorema 3, obtenemos precisamente las condiciones prescritas.

Por último, constatamos que \mathcal{F} no puede tener mínimo, ya que si evaluamos sobre funciones $y_c(x) \equiv c$ constantes, tenemos $\mathcal{F}[y_c] = 2c$ que podemos hacer tan pequeño como queramos.

3.2. Tipos de condiciones de contorno.

Aprovechamos estos ejemplos para presentar tipos habituales de condiciones de contorno. Cuando se prescriben **valores de la función** sobre los extremos del intervalo, como en los ejemplos 6 u 8, se dice que son condiciones de **tipo Dirichlet**, mientras que si se prescriben **valores de la derivada de la función** sobre los extremos del intervalo, como en el ejemplo 7, hablamos de condiciones de **tipo Neumann**.

Cuando los valores impuestos son **nulos** se dice que son condiciones **homogéneas** y, recíprocamente, cuando los valores impuestos son **no nulos**, diremos que las condiciones de contorno son **no homogéneas**.

Por último, como en el problema de Dido, pueden aparecer condiciones que ligan los valores a la derecha y a la izquierda del intervalo, pero sin determinar estos valores. Cuando lo que se exige es una misma igualdad algebraica a la derecha e izquierda, típicamente $y(x_0) = y(x_1)$ e/o $y'(x_0) = y'(x_1)$ se denominan **condiciones periódicas**.

Nota 9 Cuando las condiciones de contorno impuestas sean periódicas, parece necesario que los coeficientes que intervienen en la ecuación también lo sean (es decir, que su valor en x_0 y x_1 coincidan), pero en realidad no es así. Veámoslo en un ejemplo: la siguiente ecuación diferencial

$$y''(x) - y(x) = f(x) = \cos(\pi x),$$

cuyos coeficientes NO son periódicos en $[0, 1]$ (las constantes sí, pero el segundo miembro no cumple las condiciones de periodicidad: $f(0) \neq f(1)$), tiene soluciones (repasar el método de los coeficientes indeterminados) de la forma

$$y(x) = \frac{-1}{\pi^2 + 1} \cos(\pi x) + Ae^{-x} + Be^x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

No obstante, podemos imponer las condiciones periódicas

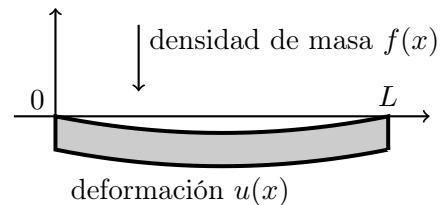
$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1),$$

y encontrar la solución:

$$y(x) = \frac{1}{\pi^2 + 1} \left(\frac{e^{1-x} - e^x}{e - 1} - \cos(\pi x) \right).$$

3.3. El problema de la viga

Consideramos una viga (horizontal) de longitud L que, bajo la acción de ciertas fuerzas (verticales) tales como su peso o su carga, queda en equilibrio. Describimos la deformación en equilibrio con respecto a la posición horizontal mediante una función $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ y, si $f(x) \geq 0$ representa la densidad (seccional) de la

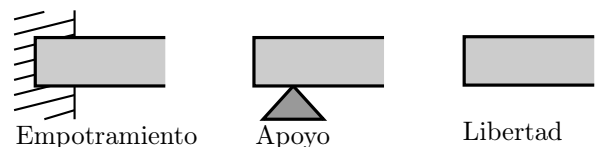


viga en cada punto x (su peso total vendrá dado por $\int_0^L f(x) dx$), entonces u ha de cumplir la ecuación diferencial

$$Mu^{(4)}(x) + Nu''(x) = f(x), \quad x \in [0, L],$$

Donde $M > 0$ es el *módulo de rigidez* de la viga y $N \in \mathbb{R}$. Es una EDO de orden 4, por lo que se complementará con cuatro condiciones de contorno, dos en cada extremo de la viga, que dependerán del modo es que la viga esté sujeta.

Tipos de sujeción de una viga Se pueden plantear los siguientes casos.



• **Empotramiento (horizontal).** En este caso, las condiciones en el respectivo extremo (izquierdo en el dibujo) fijan posición e inclinación en ese extremo:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

• **Apoyo.** En este caso se determina la posición en el extremo, y queda libre la inclinación:

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 0 \text{ (curvatura nula)}.$$

- Libertad (viga en voladizo). En este caso:

$$u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 0.$$

Combinando las posibilidades anteriores obtendremos el problema de contorno asociado a cada viga. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 10 *Formula y resuelve el problema de contorno de una viga homogénea ($f = \text{cte}$) de longitud L , libre a la izquierda y empotrada a la derecha, con módulo de rigidez $M = 1$ y $N = 0$.*

Ejemplo 11 (Forma variacional de la viga)

Demuestra que la ecuación de la viga es una condición necesaria que ha de cumplir un posible extremo del funcional siguiente:

$$\mathcal{F}[u] := \int_0^L \left(M \frac{(u''(x))^2}{2} - N \frac{(u'(x))^2}{2} - f(x)u(x) \right) dx.$$

definido en un conjunto adecuado.

En la sección 2 aprendimos que las soluciones de un PV han de cumplir necesariamente un PC y, recíprocamente, hemos hecho varios ejemplos en los que un PC proviene de algún PV pero, ¿es esto siempre posible? Aunque la respuesta será negativa, vamos a presentar una familia muy utilizada de ecuaciones para la cual la respuesta es afirmativa, y que nos permitirá resolver multitud de problemas más adelante.

3.4. Forma autoadjunta de algunos PC

Para las ecuaciones diferenciales de segundo orden, las más habituales en los PC que nos aparecen en la resolución de extremales, en ocasiones es posible enmarcarlas dentro de una estructura general, que permite facilitar ciertos cálculos.

Dada una EDO lineal de segundo orden

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \quad x \in [x_0, x_1],$$

con a, b, c continuas siempre es posible realizar el siguiente cambio

$$P(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x a(z) dz \right\}, \quad Q = Pb, \quad y \quad R = Pc,$$

para reescribirla como

$$\left((P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = R(x) \right), \quad x \in [x_0, x_1],$$

con Q, R continuas y $0 < P \in C^1$, que diremos que **está en forma autoadjunta** o forma de Sturm–Liouville.

3.5. Relación con el cálculo de variaciones

Si tenemos una EDO en forma autoadjunta, siempre es posible encontrar un funcional \mathcal{F} cuya ecuación de Euler–Lagrange asociada sea la que tenemos. Basta considerar

$$\mathcal{F}[y] := \int_{x_0}^{x_1} \left(P(x) \frac{y'(x)^2}{2} - Q(x) \frac{y(x)^2}{2} + R(x)y(x) \right) dx,$$

y observar que $(F(x, y, p) = P \frac{p^2}{2} - Q \frac{y^2}{2} + Ry)$:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_p = -Qy - (Py')' + R.$$

Notamos que este hecho no dice *a priori* que las soluciones del problema de contorno tengan que ser extremos de \mathcal{F} . Aunque sí podemos constatar el siguiente resultado.

Teorema 9 *Si con P, Q, R son funciones continuas en $[x_0, x_1]$, con $P > 0$ y suponemos además que $Q(x) < 0$ (ó $b(x) < 0$) para todo $x \in [x_0, x_1]$, entonces el funcional \mathcal{F} es convexo.*

Bajo estas hipótesis, y bajo condiciones de contorno de tipo Dirichlet o, (quasi-Dirichlet) en general,

$$\left. \begin{aligned} a_0 y(x_0) + b_0 y'(x_0) &= c_0 \\ a_1 y(x_1) + b_1 y'(x_1) &= c_1 \end{aligned} \right\} \text{ con } |a_0| + |a_1| > 0,$$

y cumpliendo $a_0 b_0 \geq 0$ y $a_1 b_1 \geq 0$, podemos asegurar que existe una única extremal solución del problema de contorno y mínimo de \mathcal{F} .

Prueba. Para probar la primera parte, usamos $F(x, y, p) = P \frac{p^2}{2} - Q \frac{y^2}{2} + Ry$ para hacer el cálculo siguiente:

$$Hess_{y,p}(F) = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

que, por ser una matriz definida positiva, nos da la convexidad de F y, usando el Teorema 8, la convexidad del funcional \mathcal{F} .

La segunda parte de la demostración la haremos en la página 18 después del resultado *Alternativa de Fredholm*. \square

Ejemplo 12 (Oscilador armónico) *Encuentra la formulación variacional del siguiente problema de contorno. Calcula, en función de ω , las extremales y determina, cuando sea posible, si hay mínimo.*

$$\left. \begin{aligned} y''(x) + \omega^2 y(x) &= 0, \quad x \in [0, \pi] \\ y(0) &= 0, \\ y(\pi) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ejemplo 13 (Oscilador con rozamiento)

Expresa la ecuación siguiente en forma autoadjunta y describe la formulación variacional del problema de contorno.

$$\left. \begin{aligned} my''(x) + cy'(x) + ky(x) &= 0, \quad x \in [0, \pi] \\ y(0) &= 0, \\ y(\pi) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

donde $m > 0$ es la masa, $c > 0$ el coeficiente de rozamiento y $k > 0$ la constante de recuperación.

Hay que resaltar de nuevo en este punto que **no todo problema de contorno admite una formulación variacional**, como veremos más adelante con la ecuación del Calor.

Otra cuestión será cómo insertar las **condiciones de contorno** que se tengan en el problema variacional. Podemos usar el Teorema 3 para responder parcialmente a esta cuestión. Puesto que nuestro funcional viene dado por $F = P\frac{v^2}{2} - Q\frac{y^2}{2} + Ry$, tenemos que $F_p(x, y(x), y'(x)) = y'(x)P(x)$, por lo que podemos obtener condiciones **Newmann homogéneas** sin imponer nada en el problema variacional (**extremos libres**), mientras que las condiciones de tipo Dirichlet sí deberían ser incluidas en este.

Veamos un resultado para pasar de Dirichlet no homogéneas a homogéneas, que nos permitirá trabajar de manera más sencilla.

Teorema 10 Dada una solución del PC siguiente:

$$\left. \begin{aligned} (P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) &= R(x), \quad x \in [x_0, x_1] \\ y(x_0) &= y_0, \quad y(x_1) = y_1. \end{aligned} \right\}$$

Entonces el cambio $\boxed{z(x) = y(x) - (ax + b)}$ cumple

$$\left. \begin{aligned} (P(x)z'(x))' + Q(x)z(x) &= \hat{R}(x), \quad x \in [x_0, x_1] \\ z(x_0) &= 0, \quad z(x_1) = 0, \end{aligned} \right\}$$

para la recta $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $b = \frac{y_0x_1 - y_1x_0}{x_1 - x_0}$ y con $\hat{R} = R - aP' - (ax + b)Q$.

Prueba. Verificación directa. \square

Ejemplo 14 Encontrar un cambio que transforme un PC tipo Newmann cualquiera a uno homogéneo probando con $z(x) = y(x) - (\frac{a}{2}x^2 + bx)$.

Vamos a estudiar en primer lugar la resolubilidad de estos problemas en el caso homogéneo $R = 0$.

3.6. Soluciones de un PC en forma autoadjunta

Caso homogéneo. Se trata de encontrar soluciones (no nulas) de la ecuación

$$(P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = 0, \quad x \in [x_0, x_1]$$

tanto en el caso de condiciones de contorno separadas

$$a_0y(x_0) + b_0y'(x_0) = 0, \quad a_1y(x_1) + b_1y'(x_1) = 0,$$

como en el caso de condiciones contorno periódicas

$$y(x_0) = y(x_1), \quad y'(x_0) = y'(x_1),$$

y ver la casuística que se nos puede plantear. En ocasiones la única solución será la trivial $y \equiv 0$ y a veces encontraremos otras. En este segundo caso, hemos de observar que el conjunto de soluciones tiene estructura de espacio vectorial, por lo que en cuanto hallemos una, tendremos toda una recta de soluciones. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 15 Resolvemos:

- 1.) $y'' + y = 0$, con condiciones $y(0) = 0 = y'(\pi)$.
- 2.) El ejemplo 6 con condiciones homogéneas.
- 3.) $y'' - y = 0$, con $y(0) = y(2\pi)$ e $y'(0) = y'(2\pi)$.
- 4.) El ejemplo 8.
- 5.) $y'' = 0$, con $y(0) = y(2\pi)$ e $y'(0) = y'(2\pi)$.
- 6.) $y'' + y = 0$, con $y(0) = y(2\pi)$ e $y'(0) = y'(2\pi)$.

- 1.), 2.) y 3.) poseen únicamente la solución trivial.
- 4.) tiene una recta de soluciones $y = C \sin(x)$, con $C \in \mathbb{R}$ y
- 5.) otra familia de soluciones de la forma $y(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Por último, en
- 6.) todas las soluciones de la ecuación verifican las condiciones de contorno, y la familia de soluciones es $y(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$, con $A, B \in \mathbb{R}$.

Nota 10 Esto último (que todas las soluciones de la EDO resuelvan el PC) no puede ocurrir con condiciones de contorno separadas. Para verlo, supongamos que sí, que todas las soluciones $y(x) = A\phi_1(x) + B\phi_2(x)$ (con ϕ_1 y ϕ_2 independientes) verificasen el mismo problema de contorno, por ejemplo, Dirichlet: $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Podemos preguntarnos por aquellas que resuelven el PVI $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = 0$ (por ejemplo), pero como todas ya cumplen $y(x_0) = y_0$, basta imponer $A\phi_1'(x_0) = -B\phi_2'(x_0)$, lo que permite despejar A (o B) en función de B (o A) (ya que por unicidad o bien $\phi_1'(x_0) \neq 0$ o bien $\phi_2'(x_0) \neq 0$) y nos daría infinitas soluciones del PVI, lo que no puede ser.

Nota 11 En el caso de que la ecuación sea lineal y homogénea, la afirmación de la nota anterior puede ser más tajante. Si dos soluciones cumplen simultáneamente una condición de tipo:

$$a_0 y(x_0) + b_0 y'(x_0) = 0,$$

entonces han de ser linealmente dependientes. El argumento es sencillo; si hubiera ϕ_1 y ϕ_2 cumpliendo la condición anterior, entonces tendríamos

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_1'(x_0) \\ \phi_2(x_0) & \phi_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que, o bien $a_0 = b_0 = 0$, que no daría condición alguna, o bien la matriz no tiene inversa por lo tanto, ϕ_1 y ϕ_2 serían linealmente dependientes (tendrían wronskiano nulo en x_1).

Veamos ahora qué podemos decir en el caso no homogéneo.

Caso no homogéneo. Ahora se trata de saber si la ecuación

$$\left(P(x)y'(x) \right)' + Q(x)y(x) = R(x), \quad x \in [x_0, x_1]$$

tiene alguna solución, tanto en para condiciones de contorno separadas como periódicas y ver la casuística. El principal resultado de esta sección requiere de unas cuantas definiciones: ecuación completa:

$$\left(P(x)y'(x) \right)' + Q(x)y(x) = R(x), \quad (8.EC)$$

ecuación homogénea:

$$\left(P(x)y'(x) \right)' + Q(x)y(x) = 0, \quad (9.EH)$$

condiciones de contorno separadas:

$$\left. \begin{aligned} a_0 y(x_0) + b_0 y'(x_0) &= 0, \\ a_1 y(x_1) + b_1 y'(x_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

y condiciones de contorno periódicas:

$$y(x_0) = y(x_1), \quad y'(x_0) = y'(x_1). \quad (10.2)$$

El resultado es el siguiente.

Teorema 11 (Alternativa de Fredholm) Para $i = 1, 2$, necesariamente ha de verificarse alguno de los siguientes casos (alternativas):

Caso 1. Que el problema de contorno homogéneo (9.EH)–(10.i) admita únicamente la solución trivial, en cuyo caso el problema completo (8.EC)–(10.i) tendrá una única solución.

Caso 2. Que el problema de contorno homogéneo (9.EH)–(10.i) admita múltiples soluciones, en cuyo caso el problema completo (8.EC)–(10.i) poseerá soluciones (tantas como el homogéneo) si y solo si

$$\int_{x_0}^{x_1} R(x) y_h(x) dx = 0, \quad (11)$$

para TODA y_h solución de (9.EH)–(10.i).

Prueba. Basándonos en resultados previos de ecuaciones diferenciales I, sabemos que existe un sistema fundamental de soluciones $\{\phi_1, \phi_2\}$ de la ecuación (9.EH) y, usando la fórmula de variación de las constantes, cualquier solución de (8.EC) ha de escribirse como

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\phi_1(x) + B\phi_2(x) + \int_{x_0}^x \frac{R(z)}{W(x_0)P(x_0)} (\phi_2(x)\phi_1(z) - \phi_2(z)\phi_1(x)) dz \quad (12)$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

Nota 12 Recordamos que la ecuación (8.EC) se puede pasar a un sistema

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Q}{P} & -\frac{P'}{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R/P \end{pmatrix},$$

con una matriz fundamental dada por

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{pmatrix}$$

con fórmula (matricial) de variación de constantes:

$$Y(x) = \Phi(x) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi(z)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ R(z)/P(z) \end{pmatrix} dz.$$

Como

$$\Phi(z)^{-1} = \frac{1}{W(\phi_1, \phi_2)(z)} \begin{pmatrix} \phi_2'(z) & -\phi_2(z) \\ -\phi_1'(z) & \phi_1(z) \end{pmatrix}$$

siendo $W(z) = W(\phi_1, \phi_2)(z)$ el determinante de la matriz fundamental Φ llamado Wronskiano. Haciendo la cuenta, el integrando queda:

$$\Phi(x)\Phi(z)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ R(z)/P(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R(z)}{P(z)} \frac{\phi_2(x)\phi_1(z) - \phi_2(z)\phi_1(x)}{W(z)} \\ \frac{R(z)}{P(z)} \frac{\phi_2'(x)\phi_1(z) - \phi_2(z)\phi_1'(x)}{W(z)} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, gracias a la fórmula de Jacobi–Liouville, podemos ver que $W(x)P(x) = cte$:

$$\begin{aligned} \frac{W(x)}{W(x_0)} &= e^{-\int_{x_0}^x \text{traza}(A(z)) dz} = e^{-\int_{x_0}^x \frac{P'(z)}{P(z)} dz} \\ &= e^{-\ln \left(\frac{P(x)}{P(x_0)} \right)} = \frac{P(x_0)}{P(x)}. \end{aligned}$$

Con todo ello, si extraemos la primera componente de la fórmula (matricial) de variación de las constantes, queda la fórmula (12) que hemos escrito.

Hacemos primero la prueba para el caso de condiciones **Dirichlet** $y(x_0) = 0$, e $y(x_1) = 0$ (un caso particular de (10.1)). Elegimos un sistema fundamental tal que,

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x_0) &= 1, & \phi_2(x_0) &= 0, \\ \phi_1'(x_0) &= 0, & \phi_2'(x_0) &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Si buscamos entonces las soluciones de la completa (12) que cumplen $y(x_0) = 0$, e $y(x_1) = 0$, obtenemos que los A y B correspondientes resuelven el sistema

$$\left. \begin{aligned} 1A &= 0, \\ \phi_2(x_1)B &= \beta. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

donde

$$\beta = - \int_{x_0}^{x_1} R(z) \frac{(\phi_2(x_1)\phi_1(z) - \phi_2(z)\phi_1(x_1))}{P(x_0)W(x_0)} dz,$$

(nótese que $W(x_0) = 1$, aunque lo dejamos). Distinguimos los casos a partir del sistema (13), entendiendo que sus soluciones corresponden a soluciones de la ecuación completa (8.EC)–Dirichlet y que cuando $\beta = 0$, las soluciones del SEL corresponden a soluciones de la ecuación homogénea (9.EH)–Dirichlet.

-La primera posibilidad es que el sistema con $\beta = 0$ tenga como única solución el cero (entonces $\phi_2(x_1) \neq 0$), entonces la matriz tendrá inversa y el completo (13) será compatible determinado y tendrá una única solución.

-La segunda posibilidad es que el sistema con $\beta = 0$ tenga una recta de soluciones ($\phi_2(x_1) = 0$, B quede libre y ϕ_2 es la que genera la recta de soluciones cumpliendo Dirichlet). En este caso, para que (13) tenga soluciones se tiene que verificar que β sea cero, es decir

$$0 = \frac{\phi_1(x_1)}{P(x_0)} \int_{x_0}^{x_1} R(z)\phi_2(z)dz,$$

y como $\phi_1(x_1)$ no puede ser también cero (si lo fuese, la matriz fundamental en x_1 : $\Phi(x_1)$ no sería regular) y ϕ_2 es la que genera la recta de soluciones cumpliendo Dirichlet, concluye la demostración para condiciones Dirichlet.

ACABAR: Hacemos ahora la prueba para el caso de condiciones **periódicas** (10.2). Si en este caso describimos a partir de (12) las soluciones que cumplen (10.2), obtenemos el SEL

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x_1) - \phi_1(x_0) & \phi_2(x_1) - \phi_2(x_0) \\ \phi_1'(x_1) - \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_1) - \phi_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (14)$$

donde β es el mismo de antes (ahora $W(x_0)$ no tiene por qué ser 1), y γ , tras hacer el desarrollo, viene dado por:

$$\gamma = - \int_{x_0}^{x_1} R(z) \frac{(\phi_2'(x_1)\phi_1(z) - \phi_2(z)\phi_1'(x_1))}{P(x_0)W(x_0)} dz.$$

Distinguimos los casos a partir del sistema (14), observando de nuevo que sus soluciones corresponden a soluciones de (8.EC)–(10.2) y que cuando $\gamma = \beta = 0$, las soluciones del SEL corresponden a soluciones de (9.EH)–(10.2).

-La primera posibilidad es que el sistema con $\gamma = \beta = 0$ tenga como única solución el cero, entonces la matriz tendrá inversa y el sistema completo (14) será compatible determinado y tendrá una única solución.

-La segunda posibilidad es que las soluciones del sistema con $\gamma = \beta = 0$ sean todas las de \mathbb{R}^2 , por lo que la matriz ha de ser cero (todas las soluciones de (9.EH) verifican (10.2)). En este caso, para que (14) tenga solución γ y β han de ser cero. Para este caso, podemos elegir un sistema fundamental (de soluciones periódicas) verificando

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x_1) &= 1, & \phi_2(x_1) &= 0, \\ \phi_1'(x_1) &= 0, & \phi_2'(x_1) &= 1. \end{aligned} \right\}$$

de manera que $\beta, \gamma = 0$ implica respectivamente

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} R(z)\phi_2(z)dz, \quad 0 = \int_{x_0}^{x_1} R(z)\phi_1(z)dz,$$

y ϕ_1, ϕ_2 representan todas las soluciones periódicas.

-La tercera y última posibilidad es que el sistema con $\gamma = \beta = 0$ tenga una recta de soluciones... **ELEGIR ϕ_1 PERIÓDICA Y ϕ_2 AJUSTADA PARA TERMINAR.**

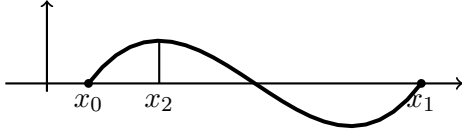
Nota 13 Gracias al Teorema 10, también es posible decidir la situación de una ecuación completa (8.EC) con condiciones de contorno separadas **no homogéneas** con la precaución de que las condiciones de ortogonalidad (11) se han de verificar para \hat{R} .

Corolario: demostración del Teorema 9. Para concluir la demostración, basta demostrar que existe una (única) extremal, lo que equivale, gracias al Teorema 11 de Fredholm (combinado con la nota anterior) a que el problema (9.EH)–(10.1) tenga únicamente la solución trivial. Lo haremos únicamente para el caso de Dirichlet y dejamos como ejercicio los otros casos.

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos pues que existe una función $y(x)$ no nula verificando

$$\left. \begin{aligned} (P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) &= 0, \quad x \in [x_0, x_1] \\ y(x_0) &= 0 = y(x_1), \end{aligned} \right\}$$

con $Q < 0$. Por la unicidad del PVI asociado, deducimos que $y'(x_0) \neq 0$ (podemos suponer que $y'(x_0) > 0$, el caso opuesto es análogo). Por lo tanto tendremos que $y(x)$ será positiva al menos en un entorno a la derecha de x_0 de modo que su máximo absoluto (que alcanzará por ser continua sobre un compacto $[x_0, x_1]$) será estrictamente positivo. Además, como $y(x_1) = 0$, el máximo no puede alcanzarlo en x_1 , por lo que será en un punto interior y, por lo tanto, un punto crítico. Por todo ello, si llamamos $x_2 \in (x_0, x_1)$



al punto donde alcanza ese máximo, tendremos

$$y(x_2) > 0, \quad y'(x_2) = 0, \quad y''(x_2) \leq 0.$$

Pero esto nos lleva a una contradicción ya que, usando la ecuación, obtendríamos la desigualdad contraria en la derivada segunda:

$$y''(x_2) = \overbrace{\frac{-P'(x_2)}{P(x_2)}y'(x_2)}^{=0} - \overbrace{\frac{Q(x_2)}{P(x_2)}y(x_2)}^{<0} > 0.$$

Por lo tanto, existe una única extremal de nuestro problema, lo que, usando el Teorema 6, nos proporciona el único mínimo de \mathcal{F} . \square

4. Problemas variacionales con ligaduras, extremos condicionados

Como hemos visto en los problemas introducidos en la Sección 1.4, existen situaciones que requieren tanto de funcionales que dependen de varias variables como de conjuntos que incluyen restricciones de tipo algebraico y/o integral. Por ello, vamos a generalizar el estudio realizado para cubrir estas situaciones.

4.1. Problemas variacionales dependientes de varias funciones

En este caso, pretendemos minimizar un funcional del tipo

$$\mathcal{F}[\vec{y}] := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) dx \quad (15)$$

donde $F(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$ es una función continua definida en $[x_0, x_1] \times \Omega$, siendo Ω un dominio de \mathbb{R}^{2n} . De manera general, consideraremos \mathcal{F} definido sobre el conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{aligned} \vec{y}(t) &= (y_1(t), \dots, y_n(t)) : y_i \in C^1(x_0, x_1) \quad \forall i \\ y(x_0) &= \vec{y}_0, \quad y(x_1) = \vec{y}_1 \\ (\vec{y}(x), \vec{y}'(x)) &\in \Omega \quad \forall x \in [x_0, x_1] \end{aligned} \right\}.$$

De manera completamente análoga al estudio realizado en la sección 2.2 para funcionales sobre funciones escalares, si la función vectorial \vec{y} es un mínimo de \mathcal{F} , ahora habrá de verificar necesariamente ciertas ecuaciones diferenciales,

Teorema 12 (Condición necesaria) *Sea el funcional (15) definido sobre \mathcal{D} y supongamos que F es dos veces derivable. Entonces, si $\vec{y} \in \mathcal{D} \cap (C^2(x_0, x_1))^n$ es un mínimo de \mathcal{F} , ha de verificar las n ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} \left(F_{p_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Prueba. Análogo al Teorema 2. Definimos

$$g(s) := \mathcal{F}[\vec{y} + s\vec{\phi}],$$

donde $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ es una función test vectorial de clase 1 con soporte compacto por lo que $(\vec{y} + s\vec{\phi})(x_0) = \vec{y}_0$ y $(\vec{y} + s\vec{\phi})(x_1) = \vec{y}_1$. De nuevo, la función g tiene un mínimo en $s = 0$ y entonces $g'(0) = 0$, de donde, siguiendo los pasos del Teorema 2, obtenemos

$$0 = \sum_{i=1}^n \int_{x_0}^{x_1} \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} \left(F_{p_i} \right) \right) \phi_i(x) dx.$$

Eligiendo tests de la forma $\vec{\phi} = (0, \dots, \phi_i, \dots, 0)$ para cada $i = 1, \dots, n$, y usando nuevamente el Teorema 1, obtenemos el resultado deseado. \square

4.2. Ligaduras algebraicas

Tratando de dar cobertura al problema de las curvas geodésicas introducido en la Sección 1.4, consideramos el funcional (15) definido sobre un conjunto \mathcal{D} pero con ciertas restricciones de tipo algebraico:

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} \vec{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) : y_i \in C^1(x_0, x_1) \\ y(x_0) = \vec{y}_0, y(x_1) = \vec{y}_1 \\ (\vec{y}(x), \vec{y}'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in [x_0, x_1] \\ \varphi_1(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{array} \right\}.$$

Notamos que \mathcal{D}_φ incluye $\boxed{m < n}$ restricciones (también llamadas **ligaduras** o **enlaces**) dadas por las funciones φ_j , $j = 1, \dots, m$.

Método de sustitución Al igual que en los problemas de minimizar funciones sujetas a restricciones, antes de usar multiplicadores de Lagrange y, siempre que sea posible, conviene sustituir, o sea, usar las ligaduras para eliminar alguna de las incógnitas (funciones en este caso) escribiéndolas en función de las otras.

Ilustramos este caso en la sección siguiente con el ejemplo de las geodésicas en un cilindro que se encuentra en la página 23.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Se puede probar que (véase demostración en [4, §9] junto con la analogía para el caso de funciones).

Teorema 13 (Ligaduras algebraicas) Si tenemos un mínimo $\vec{y} \in \mathcal{D}_\varphi \cap (C^2(x_0, x_1))^n$ del funcional \mathcal{F} dado por (15) sobre el conjunto con restricciones \mathcal{D}_φ , entonces, existen m funciones $\lambda_j(x)$ (multiplicadores de Euler-Lagrange) tales que si definimos

$$F^* := F - \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j(x, y_1, \dots, y_n),$$

en el punto \vec{y} se cumplen las $n + m$ ecuaciones

$$\begin{cases} F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} \left(F_{p_i}^* \right) = 0, & i = 1, \dots, n \\ \varphi_j = 0, & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Es decir, $(\vec{y}, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ son las extremales del funcional $\mathcal{F}^*[\vec{y}, \vec{\lambda}] := \int_{x_0}^{x_1} F^* dx$, sobre un conjunto sin restricciones (pero con más funciones).

Si generalizamos el tipo de restricciones de modo que aparezcan las derivadas, podemos considerar el funcional (15) definido sobre un conjunto:

$$\mathcal{D}'_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} y_i \in C^1(x_0, x_1) : y_i(x_0) = y_{i0}, y_i(x_1) = y_{i1} \\ (\vec{y}(x), \vec{y}'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in [x_0, x_1] \\ \varphi_1(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0 \end{array} \right\}.$$

que incluye $\boxed{m < n}$ restricciones que involucran la derivada, se puede probar un resultado análogo.

Corolario [Ligaduras algebro-diferenciales] Si tenemos un mínimo $\vec{y} \in \mathcal{D}'_\varphi \cap (C^2(x_0, x_1))^n$ del funcional \mathcal{F} dado por (15) sobre el conjunto con restricciones \mathcal{D}'_φ , entonces, existen m funciones $\lambda_j(x)$ tales que si definimos

$$F^* := F - \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$$

en el punto \vec{y} se cumplen las $n + m$ ecuaciones

$$\begin{cases} F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} \left(F_{p_i}^* \right) = 0, & i = 1, \dots, n \\ \varphi_j = 0, & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Es decir, $(\vec{y}, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ son las extremales del funcional $\mathcal{F}^*[\vec{y}, \vec{\lambda}] := \int_{x_0}^{x_1} F^* dx$. sin restricciones.

4.3. Ligaduras integrales

Por último consideramos el funcional (15) definido sobre un conjunto (ahora puede ser $m < n$ ó $m \geq n$)

$$\mathcal{D}_G = \left\{ \begin{array}{l} y_i \in C^1(x_0, x_1) : y_i(x_0) = y_{i0}, y_i(x_1) = y_{i1} \\ (\vec{y}(x), \vec{y}'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in [x_0, x_1] \\ \int_{x_0}^{x_1} G_1(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = L_1 \\ \vdots \\ \int_{x_0}^{x_1} G_m(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = L_m. \end{array} \right\}.$$

Teorema 14 (Ligaduras integrales) Si tenemos un mínimo $\vec{y} \in \mathcal{D}_G \cap (C^2(x_0, x_1))^n$ del funcional \mathcal{F} dado por (15) sobre el conjunto con restricciones \mathcal{D}_G , entonces en \vec{y} se cumple:

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} \left(F_{p_i}^* \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde

$$F^* := F - \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j$$

y las **constantes** λ_j (y las demás constantes de integración de las EDOs) vienen determinadas por las condiciones de contorno y las ligaduras de \mathcal{D}_G .

Prueba. Primero definimos el (mismo) funcional

$$\tilde{\mathcal{F}}[\vec{y}, z_1, \dots, z_m] := \mathcal{F}[y]$$

pero dependiente de $m+n$ funciones sobre un conjunto con m restricciones de tipo algebraico-diferencial (como siempre tendremos $m < m+n$, es por lo que no es preciso que m sea inferior a n),

$$\mathcal{D}'_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} \vec{y} \in \mathcal{D}, \quad z_j \in C_1(x_0, x_1) : \\ \quad \quad \quad z_j(x_0) = 0, \quad z_j(x_1) = L_j \\ G_1(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) - z'_1 = 0 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ G_m(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) - z'_m = 0 \end{array} \right\}.$$

Precisamente se proponen estas condiciones Dirichlet y estas ligaduras $\varphi_j = G_j - z'_j$ porque como

$$z_j(x_1) = \overbrace{z_j(x_0)}^{=0} + \int_{x_0}^{x_1} z'_j(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} z'_j(x) dx,$$

entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} G_j dx = L_j \quad \stackrel{z_j(x_1)=L_j}{\Leftrightarrow} \quad z' = G_j \Leftrightarrow \varphi_j = 0. \quad (16)$$

Basta pues aplicar el Corolario anterior a $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre \mathcal{D}'_φ . Definimos

$$\tilde{F}^* := \tilde{F}[\vec{y}, z_1, \dots, z_m] - \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) (G_j - z'_j)$$

y escribimos las $(n+m) + m$ ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{F}_{y_i}^* - \frac{d}{dx} \left(\tilde{F}_{p_i}^* \right) = 0, & i = 1, \dots, n, \\ \tilde{F}_{z_j}^* - \frac{d}{dx} \left(\tilde{F}_{z'_j}^* \right) = 0, & j = 1, \dots, m, \\ \varphi_j = 0, & j = 1, \dots, m, \end{array} \right.$$

o, haciendo la cuenta y usando (16),

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{F}_{y_i}^* - \frac{d}{dx} \left(\tilde{F}_{p_i}^* \right) = 0, & i = 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dx} \left(\lambda_j(x) \right) = 0, & j = 1, \dots, m, \\ \int_{x_0}^{x_1} G_j dx = L_j, & j = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

Notamos que el tercer grupo de ecuaciones corresponde a las ligaduras y que el segundo grupo indica que las funciones λ_j son en realidad constantes; entonces basta notar que el primer grupo de ecuaciones es idéntico para \tilde{F}^* o para el F^* de enunciado. \square

Principio de reciprocidad Notamos que las ecuaciones de Euler–Lagrange no cambian si F^* se multiplica por un cierto valor constante μ_0 , por lo tanto las extremales del funcional

$$\mathcal{F}^{**}[\vec{y}] := \sum_{j=0}^m \int_{x_0}^{x_1} \mu_j G_j dx,$$

donde $G_0 = F$ y $\mu_j = \mu_0 \lambda_j$, $j = 1, \dots, m$, son las mismas. Escrito así, las funciones G_j aparecen de forma simétrica y permutar sus roles, es decir, deducimos que las extremales del problema asociado al funcional

$$\mathcal{F}_{j_0}[\vec{y}] := \int_{x_0}^{x_1} G_{j_0} dx,$$

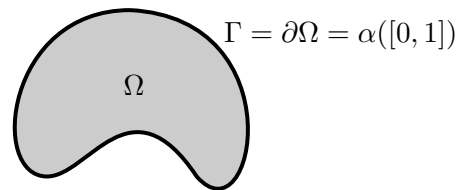
sobre un conjunto con las ligaduras integrales

$$\int_{x_0}^{x_1} G_{j_0} dx = L_{j_0}, \quad j_0 = 0, 1, \dots, (j_0 - 1), (j_0 + 1), \dots, m,$$

coinciden para cualquier j_0 (siendo $L_0 := \mathcal{F}[\vec{y}]$). Este es el llamado Principio de Reciprocidad. Por ejemplo, el problema de maximizar el área delimitada por una curva cerrada de longitud fija y el problema de minimizar la longitud de una curva cerrada que encierra un área fija son equivalentes y poseen las mismas extremales.

4.4. Ejemplos.

Problemas isoperimétricos/Problema de Dido. Recordamos el Problema de Dido que presentamos en la introducción. Para formularlo correctamente hemos de concretar el concepto de área, y lo haremos usando el Teorema de Stokes. Si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ definida en $[0, 1]$ es la curva cerrada (regular, simple y orientada positivamente) que encierra una superficie Ω , en-



tonces el área que encierra se puede calcular mediante el Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{\Omega} 1 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\partial_{x_1}(x_1) - \partial_{x_2}(-x_2)] dx \\ &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{rot} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} dx \stackrel{\text{Stokes}}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot d\alpha \\ &:= \int_0^1 \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{\alpha'(t)}{2} dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle(t) \frac{dt}{2} \\ &= \int_0^1 \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{2} dt. \end{aligned}$$

Nota 14 También se puede probar la fórmula del área usando el teorema de la divergencia de Gauss.

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{\Omega} 1 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\partial_{x_1}(x_1) + \partial_{x_2}(x_2)] dx \\ &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{div} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} dx \stackrel{\text{Gauss}}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x \cdot n dS \end{aligned}$$

suponiendo que $\alpha(t)$ recorre $\partial\Omega$ en sentido antihorario, el normal exterior es $n = \frac{1}{|\alpha'(t)|} (y'(t), -x'(t))$, quedando

$$:= \frac{1}{2} \int_0^1 \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} \frac{|\alpha'(t)| dt}{|\alpha'(t)|} = \text{lo mismo.}$$

Este será el funcional a minimizar y la restricción de que el perímetro tenga longitud L dada es

$$\int_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = L.$$

Notamos que al ser una curva cerrada, se tiene $x(0) = x(1), y(0) = y(1)$. Resumiendo, se trata de maximizar el funcional

$$A[x, y] = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt$$

sobre el conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ x, y \in C^1(0, 1) : x(0) = x(1), y(0) = y(1) \right. \\ \left. \int_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = L. \right\}.$$

Veamos que la solución es, como no podía ser de otro modo, un disco con circunferencia L . En este caso $F(t, x, y, p, q) = \frac{1}{2}(xq - yp)$ y $F^* = F - \lambda(p^2 + q^2)^{1/2}$. Aplicamos el Teorema 14 para obtener las ecuaciones:

$$0 = F_x^* - \frac{d}{dt}(F_p^*) = \frac{q}{2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{-y}{2} - \frac{\lambda p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right),$$

y

$$0 = F_y^* - \frac{d}{dt}(F_q^*) = -\frac{p}{2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{2} - \frac{\lambda q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right).$$

Al sustituir $q = y'$ y $p = x'$, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(y + \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) = 0 = \frac{d}{dt} \left(x - \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right),$$

y, por lo tanto, existen sendas constantes x_0 e y_0 (serán el centro de la circunferencia) tales que

$$y + \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = y_0, \quad (17)$$

$$x - \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = x_0. \quad (18)$$

Ahora es inmediato verificar que

$$(y(t) - y_0)^2 + (x(t) - x_0)^2 = \lambda^2,$$

es decir, toda extremal describe una circunferencia de cierto (x_0, y_0) y radio $|\lambda|$ que, usando el perímetro fijo L , nos dice que $L = 2\pi|\lambda|$. Pero vamos a ver una relación aún más bonita. Multiplicando (17) por x' y (18) por y' y restando, podemos calcular

$$yx' - xy' = y_0x' - x_0y' - \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

que, integrando en $[0, 1]$ y usando las condiciones de contorno, nos da la relación:

$$2A \Big|_{\alpha=\text{extremal}} = 0 + \lambda L \quad (= 2\pi\lambda^2),$$

que relaciona el valor del multiplicador λ (el radio), el perímetro L y el área máxima que no es más que el área de la circunferencia.

Nota 15 No hemos incluido en el conjunto \mathcal{D} la orientación de la curva, por lo que a priori, habría curvas que darían lugar a valores negativos de A . Este hecho produce una segunda familia de extremales, las de *área negativa mínima*, que no es más que la misma familia de circunferencias recorrida en sentido horario y que corresponden a los valores opuestos del multiplicador λ . ¿Dónde hemos “omitido” el signo de λ ?

Nota 16 Hay que remarcar aquí que, como este ejemplo clásico es generador de los problemas variacionales estudiados la sección 4.3, en el lenguaje moderno el epíteto de **problemas isoperimétricos** se aplica a cualquier problema variacional con restricciones de tipo integral y condiciones periódicas.

Geodésicas (véase [7, pág 19]). En general, se trata de minimizar el funcional longitud de una curva:

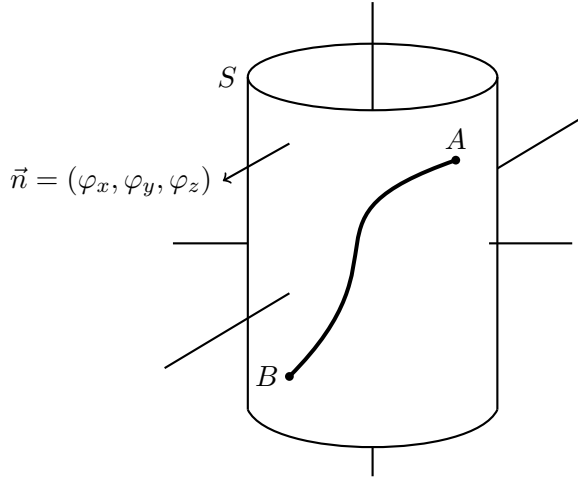
$$L[x, y, z] := \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

sobre funciones

$$x, y, z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

derivables, cumpliendo $x(0) = x_0, x(1) = x_1, y(0) = y_0, y(1) = y_1, z(0) = z_0, y z(1) = z_1$, que estén contenidas en una superficie S dada por una ecuación φ , es decir,

$$\varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \forall t.$$



En este caso $F(t, x, y, z, p, q, r) = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ y, aplicando el Teorema 13, se generan las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\lambda(t)\varphi_x - \frac{d}{dt}\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}\right) &= 0, \\ \lambda(t)\varphi_y - \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}\right) &= 0, \\ \lambda(t)\varphi_z - \frac{d}{dt}\left(\frac{z'(t)}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}\right) &= 0, \\ \varphi(x(t), y(t), z(t)) &= 0.\end{aligned}$$

Para ver que las soluciones de este sistema son geodésicas, reparametrizamos las curvas por la longitud del arco s , es decir, definimos

$$s = s(t) = \int_0^t v(t) dt$$

siendo $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ el módulo de la velocidad de la curva, lo que nos proporciona el cambio inverso $t = t(s)$

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} = v(t) \frac{d}{ds}$$

y, por lo tanto, podemos reescribir las tres primeras ecuaciones como (hacemos solo la primera)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{v(t)}\right) = v(t) \frac{d}{ds}\left(\frac{v(t) \frac{dx}{ds}}{v(t)}\right) = v(t) \frac{d^2x}{ds^2}.$$

Sustituyendo, nos queda:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\lambda(t)}{v(t)}$$

es decir, una vez parametrizada por el arco s , la aceleración $\frac{d^2}{ds^2}(x, y, z)$ es paralela al vector normal $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ a la superficie (no hay aceleraciones que no sean debidas a la curvatura de la misma) y por lo tanto, es una geodésica.

Geodésicas en el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$. En este caso, podemos eliminar las restricciones del conjunto usando coordenadas cilíndricas $(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$. Así, una curva cualquiera sobre el cilindro puede ser descrita mediante una única función $z(\theta)$, de manera que

$$\theta \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z(\theta)),$$

es cualquier curva sobre el cilindro. Si ajustamos θ_0 y θ_1 a los datos de contorno

$$\begin{aligned}(r \cos(\theta_0), r \sin(\theta_0), z_0) &= (x_0, y_0, z_0), \\ (r \cos(\theta_1), r \sin(\theta_1), z_1) &= (x_1, y_1, z_1),\end{aligned}$$

la longitud de la curva vendrá dada por

$$L[z] := \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + (z'(\theta))^2} d\theta.$$

Así descrito, es un problema como los del capítulo 2 con $F(\theta, z, p) := \sqrt{r^2 + p^2}$, y la ecuación de Euler Lagrange asociada es

$$0 = F_z - \frac{d}{d\theta} F_p = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{z'}{\sqrt{r^2 + (z')^2}} \right) = \frac{r^2 z''(\theta)}{(r^2 + (z')^2)^{3/2}},$$

es decir, $z''(\theta) = 0$, o lo que es lo mismo: $z(\theta) = A\theta + B$, lo que corresponde con una hélice sobre el cilindro, restando solo ajustar las constantes A y B para que se cumplan las condiciones de contorno

$$A\theta_0 + B = z_0, \quad A\theta_1 + B = z_1.$$

Catenaria. Como vimos en los modelos clásicos de la sección 1.4, se trata de calcular las extremales del funcional acción:

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^1 y \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

definido sobre el conjunto

$$\mathcal{D}_G = \left\{ y \in C^1(0, 1) : y(0) = y(1) = h, \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = L > 1. \right\}.$$

Aplicamos el Teorema 14. Definimos nuestro nuevo funcional introduciendo el multiplicador

$$\mathcal{F}^*[y] = \int_0^1 (y + \lambda) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_0^1 F^*[y, y'] dx.$$

y calculamos la ecuación asociada. Como estamos en el caso en que $F[y, p] = (y + \lambda) \sqrt{1 + p^2}$ no depende de

x , aplicamos el Teorema 5, y deducimos la ecuación $F^* - y'F_p^* = C$, en este caso

$$C = \frac{(y + \lambda)}{\sqrt{1 + p^2}} \Rightarrow y = C\sqrt{1 + (y')^2} - \lambda,$$

que no es más que la ecuación (7) (haciendo el cambio $y_1 = y + \lambda$) que estudiamos en el ejemplo 5 de superficies de revolución, pero acoplada con la restricción: $\int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = L > 1$. Por lo tanto, ya conocemos las soluciones, o bien constantes, o bien

$$y(x) + \lambda = C \cosh\left(\frac{x - K}{C}\right),$$

Primero descartamos las posibles soluciones constantes, que serían de la forma $y(x) = A$, porque ninguna cumpliría la restricción

$$\int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_0^1 1 dx = 1 = L > 1!!!!$$

Por lo tanto, nos quedamos con las de tipo coseno hiperbólico: $y(x) = C \cosh\left(\frac{x-K}{C}\right) - \lambda$. Imponiendo ahora que $y(0) = y(1)$ y usando la paridad del cosh obtenemos:

$$\cosh\left(\frac{-K}{C}\right) = \cosh\left(\frac{1-K}{C}\right) \Leftrightarrow |K| = |1-K| \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}.$$

Imponiendo la integral $\int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = L > 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 < L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{2x-1}{2C}\right)} dx \\ &= \int_0^1 \cosh\left(\frac{2x-1}{2C}\right) dx = 2C \sinh\left(\frac{1}{2C}\right), \end{aligned}$$

lo que determina de forma única (e implícita) el valor de C . Finalmente recordamos que el valor $y(0) = y(1) = 0$, lo que permite fijar el valor de λ como:

$$\lambda = C \cosh\left(\frac{1}{2C}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{4C^2 + L^2}.$$

5. Funcionales dependientes de funciones de varias variables

Cuando aplicamos el principio de mínima acción a medios continuos en lugar de sistemas de partículas, nos encontramos con funcionales definidos sobre funciones que dependen de varias variables. Por simplicidad, nos limitaremos al caso de dos variables. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y regular, y $\gamma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Consideramos el funcional \mathcal{F}

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} F(x_1, x_2, u(x), \partial_{x_1} u(x), \partial_{x_2} u(x)) dx,$$

(con $F(x_1, x_2, u, p, q)$ dada) sobre

$$\mathcal{D} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u(x) = \gamma(x) \forall (x, y) \in \partial\Omega\}$$

$u = u(x_1, x_2)$ se puede ver como una superficie que se proyecta sobre Ω y la condición $u = \gamma$ sobre la frontera $\partial\Omega$ se traduce en que tiene el borde prefijado (condición de Dirichlet).

Condición necesaria Euler Lagrange.

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x_1}(F_p) - \frac{\partial}{\partial x_2}(F_q) = 0.$$

Condición suficiente, convexidad. Mismas demostraciones. Los teoremas 6, 7 y 8 son ciertos.

5.1. La membrana vibrante

Se trata de modelar, en los términos descritos en la sección 1.3, la posición de una película elástica homogénea (membrana, tambor) sujeta por el borde y sometida a fuerzas. $\varphi(x)$ será una posición admisible (normalmente el reposo o una **posición de equilibrio**) y $u = u(t, x)$ a la nueva posición en el instante t . Suponemos que el **desplazamiento es vertical** (y pequeño), es decir, que cada punto de la membrana $(x, \varphi(x))$ se ha desplazado a la posición $(x, u(t, x))$ en el instante t .

En algunos textos se llama u al desplazamiento, es decir, a $u - \varphi$, lo que cambia levemente el modelado, pero como habitualmente φ se toma constante e igual a cero, el resultado es el mismo.

$$\varphi \in C^1(\bar{\Omega}), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ (ó } \mathbb{R}^N)$$

En primer lugar tratamos el caso **independiente del tiempo**, para simplificar la notación, y llamamos $u(x)$ a la posición final.

La **fuerza aplicada también se supone vertical**, con densidad $f(x)$ (o $f(t, x)$ cuando introduzcamos el tiempo).

La **fuerza de inercia** (de resistencia del medio elástico, similar la Ley de Hooke en un muelle) es proporcional –y contraria– al desplazamiento, es decir: $-\alpha(x)(u(x) - \varphi(x))$, siendo $\alpha(x) \geq 0$ el coeficiente de elasticidad.

La **fuerza resultante** es pues $F(x, u) = f(x) - \alpha(x)(u(x) - \varphi(x))$ y el **trabajo** (integral de la fuerza a lo largo del recorrido) para pasar de la posición φ a u es

$$W_1 = \int_{\Omega} \int_{\varphi(x)}^{u(x)} F(x, u) du dx$$

$$= \int_{\Omega} f(x)(u(x) - \varphi(x)) - \frac{\alpha(x)}{2} (u(x) - \varphi(x))^2 dx$$

La elasticidad genera además una **tensión** debida al cambio de una posición a otra (heurísticamente, al estirar y aumentar el área, aumenta la tensión: nótese en el funcional que sigue, la relación con la fórmula del área de una gráfica): “el **trabajo** de esta fuerza de tensión sobre cada elemento de área dx de la membrana Ω es proporcional a la variación del área de la superficie de la parte de la membrana que se proyecta sobre dicho elemento dx ; se denota al coeficiente de proporcionalidad como $\sigma(x)$ al que también se denomina *tensión de la membrana*”. Dicho en fórmulas

$$W_2 = - \int_{\Omega} \sigma(x) \left(\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2} \right) dx$$

donde ∇ es el gradiente respecto de x .

Si, además, se aplica una **fuerza en el contorno** de la membrana, con densidad (lineal) dada por

$$g_1(x, u) = g_1(x) - \sigma_1(x)(u - \varphi), \quad x \in \partial\Omega,$$

(a veces aparece $g_1 - \alpha_1 u$, que es igual, cambiando g_1) siendo α_1 el *coeficiente de fijación elástica del contorno*, entonces aparece un nuevo **trabajo** (análogo a W_1) asociado a esta fuerza para pasar de la posición φ a u :

$$W_3 = \int_{\partial\Omega} g_1(x)(u - \varphi) - \frac{\alpha_1(x)}{2} (u - \varphi)^2 dS$$

Por lo tanto la **energía potencial** de la membrana en la posición final u , será la que tuviese en φ menos los tres trabajos descritos:

$$\begin{aligned} E_p[u] &= E_p[\varphi] - W_1 - W_2 - W_3 = Cte + \\ &+ \int_{\Omega} \sigma \left(\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2} \right) dx \\ &- \int_{\Omega} f(x)(u - \varphi) - \frac{\alpha}{2} (u - \varphi)^2 dx \\ &- \int_{\partial\Omega} g_1(x)(u - \varphi) - \frac{\alpha_1}{2} (u - \varphi)^2 dS. \end{aligned}$$

Introducimos ahora la **dependencia del tiempo**, que esencialmente introducirá la **energía cinética** (en la que solo aparecerá u , ya que el estado inicial no depende de t)

$$E_k[u(t, \cdot)] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u|^2 dx$$

Aquí y en todo lo anterior, hemos supuesto que la densidad de masa es constante, por lo que no aparece.

Con todo esto, el **el funcional acción** es (recordar sección 1.3): $\mathcal{F}[u] = \int_0^T (E_k[u] - E_p[u]) dt$, es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u] &:= C(\varphi) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\partial_t u|^2 dx dt \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \sqrt{1 + |\nabla u|^2} + f(x)u - \frac{\alpha}{2} (u - \varphi)^2 dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} g_1(x)u - \frac{\alpha_1}{2} (u - \varphi)^2 dS dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Donde $C(\varphi)$ es una constante que solo depende del estado φ y no influye en la búsqueda del mínimo (la eliminaremos en lo que sigue).

Normalmente, en los textos, aparece este **funcional simplificado**; veamos en qué consisten estas simplificaciones, la casuística que conlleva, y los diversos modelos en EDPs que aparecen.

5.1.1. Simplificaciones usuales

[S1] Borde sujeto (Dirichlet). En la mayoría de los casos, el borde se deja sujeto a la posición de equilibrio, es decir, $u = \varphi$ para $x \in \partial\Omega$.

Con ello, en el funcional (19) desaparecen los términos sobre $\partial\Omega$ y queda (nótese que $f \rightarrow f - \alpha\varphi$):

$$\mathcal{F}[u] = \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{(\partial_t u)^2}{2} - \sigma \sqrt{1 + |\nabla u|^2} + fu - \alpha \frac{u^2}{2} \right) dx dt$$

[S2] Caso estacionario. Es habitual estudiar las posiciones estacionarias de la membrana, esto es, suponer que ha pasado el tiempo y la membrana ha alcanzado una posición de equilibrio, por lo que u es independiente del tiempo.

En este caso, $\mathcal{F}[u]$ se puede tomar como $E_p[u]$.

[S3] Equilibrio nulo. En la práctica, la posición de equilibrio φ suele ser horizontal, $\varphi(x) = c$, y se puede tomar igual a 0 para simplificar.

Uniendo [S1], [S2] y [S3], el funcional \mathcal{F} queda:

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} \left(\sigma \sqrt{1 + |\nabla u|^2} + \frac{\alpha}{2} u^2 - f(x)u \right) dx.$$

[S4]. Taylor: deformaciones pequeñas. A menudo, en el término asociado a la tensión de la membrana que involucra la expresión $\sqrt{1 + |\nabla u|^2}$, se usa el siguiente desarrollo de Taylor para realizar una nueva simplificación:

$$\sqrt{1 + s^2} = 1 + \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{8} + \mathcal{O}(s^6).$$

Con ello, y suponiendo que las deformaciones $|\nabla u|$ son pequeñas, podemos despreciar $\mathcal{O}(|\nabla u|^4)$ y aproximar

$$\int_{\Omega} \sigma \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx \sim C + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 dx.$$

Uniendo [S1], [S2], [S3] y [S4], el funcional \mathcal{F} queda:

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} \left(\frac{\sigma(x)}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} u^2 - f(x)u \right) dx. \quad (20)$$

En la siguiente sección estudiamos varias combinaciones de estas, junto con suponer que las funciones α , σ y f sean constantes y/o nulas, y los modelos que aparecen.

5.1.2. Modelos asociados

Comenzamos por estudiar el modelo suponiendo [S1], [S2], [S3] y [S4], esto es, la **membrana estacionaria con deformaciones pequeñas, sujeta al borde y con equilibrio nulo**. En este caso el funcional $\mathcal{F}[u]$ dado por (20), queda definido sobre funciones $u \in C_0^1(\Omega)$. Con la notación del tema, tenemos

$$F(x, u, p, q) = \frac{\sigma(x)}{2} (p^2 + q^2) + \frac{\alpha(x)}{2} u^2 - f(x)u,$$

que resulta ser una función convexa en (u, p, q) , y la condición de E-L resultante es $F_u - \partial_{x_1} F_p - \partial_{x_2} F_q = 0$, o equivalentemente,

$$u \in C_0^1(\Omega) : \quad \boxed{-\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f - \alpha u.} \quad (21)$$

A partir de esta ecuación básica obtenemos los siguientes casos particulares, aunque realmente cada uno posee entidad propia.

La ecuación de Poisson. Corresponde a la membrana (21) con $\sigma = cte$ y $\alpha = 0$.

$$u \in C_0^1(\Omega) : \quad \boxed{-\Delta_x u = f/\sigma.}$$

El operador

$$\Delta_x u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

se denomina **laplaciano** respecto de la variable x .

Modos de vibración: problema de autovalores. Corresponde a (21) con σ constante y $f = 0$.

$$u \in C_0^1(\Omega) : \quad \boxed{-\Delta_x u = \frac{\alpha}{\sigma} u = \lambda u.}$$

El problema de Dirichlet. Si suponemos solo [S1], [S2], y [S4], y tomamos $\alpha = f = 0$ y $\sigma = cte$, el funcional \mathcal{F} se llama *integral de Dirichlet*,

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

sobre el conjunto

$$\mathcal{D} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u = \gamma = \varphi|_{\partial\Omega} \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Y resulta

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = \gamma(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (22)$$

Como $F(x_1, x_2, u, p, q) = p^2 + q^2$ es convexa, todo mínimo resuelve la ecuación y toda solución es mínimo.

Superficie minimal (área o tensión mínima) colgada o sujeta a una curva. Si suponemos ahora [S1] y [S2], y tomamos igual que el caso anterior $\alpha = f = 0$ y $\sigma = cte$, (nótese que si $|\nabla \varphi|$ no son despreciables, tampoco lo serán $|\nabla u|$, y por eso no se supone [S4]) nos queda minimizar

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

sobre

$$\mathcal{D} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u = \gamma \text{ en } \partial\Omega\}.$$

es decir, dada una curva C (C será la gráfica de $\gamma = \varphi|_{\partial\Omega}$), buscamos la superficie “sujeta a C ” y de área mínima (nótese que \mathcal{F} es el área de la gráfica de u).

En este caso, la ecuación “análoga” a (22) es

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = \gamma(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

la llamada ecuación de las superficies minimales.

La ecuación de Ondas. En todos los casos anteriores hemos supuesto [S2], el caso estacionario. Ahora, por último, partimos del funcional dependiente del tiempo, incluyendo solo [S1] y [S4] y suponiendo que α y σ son constantes:

$$\mathcal{F}[u] = \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{(\partial_t u)^2}{2} - \frac{\sigma}{2} |\nabla u|^2 + f u - \alpha \frac{u^2}{2} \right) dx dt$$

Con la notación $F = F((x, t), u, p, q, r)$ del tema, tenemos un F dado por

$$F = \frac{r^2 - \sigma(p^2 + q^2) - \alpha u^2 + 2fu}{2},$$

y queda definido sobre un conjunto del tipo

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{ll} u \in C^1([0, T] \times \Omega), & \\ u(0, x) = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u(T, x) = \text{dado}, & x \in \Omega, \\ u(t, x) = \varphi(x), & t \geq 0, x \in \partial\Omega. \end{array} \right\}.$$

En este caso, la condición de Euler–Lagrange se denomina **ecuación de Ondas**

$$\begin{aligned} 0 &= F_u - \partial_t F_r - \partial_{x_1} F_p - \partial_{x_2} F_q \\ &= f - \alpha u - \partial_{tt}^2 u + \sigma \Delta_x u, \end{aligned}$$

o, como se suele escribir,

$$u \in \mathcal{D} : \quad \boxed{\partial_{tt}^2 u = \sigma \Delta_x u - \alpha u + f(x)}.$$

Centraremos las siguientes secciones en resolver el problema de Dirichlet y la ecuación de ondas.

5.2. Resolución: separación de variables y necesidad del desarrollo en series

Veamos sobre el ejemplo de la ecuación de ondas en $1 - D$, un técnica de resolución ideada por Daniel Bernoulli en 1753: la separación de variables. Primero, consideramos la **membrana uno dimensional**, es decir, la variable espacial $x \in \Omega = [0, L]$ y, en vez de trabajar en tiempo finito, lo hacemos en $t \in [0, \infty)$. Además, tomamos $\sigma = c^2$ ($c \in \mathbb{R}$ tendrá unidades de velocidad) y $\alpha = f = 0$, quedando

$$\mathcal{F}[u] = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dt.$$

La ecuación (básica) de ondas que obtenemos es

$$\partial_{tt}^2 u = c^2 \partial_{xx}^2 u \quad \text{o} \quad u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (23)$$

Al abrir el intervalo temporal, hemos perdido la posibilidad de fijar la condición de borde “a la derecha” $u(T, x)$, lo que supliremos añadiendo otra “condición inicial”. Además, en espacio, supondremos en principio condiciones periódicas y homogéneas. Así, las **condiciones de borde** serán

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(0, x) = u_0(x) \in C^2, & x \in [0, L], \\ (\partial_t u)(0, x) = v_0(x) \in C^1, & x \in [0, L], \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t \geq 0. \end{array} \right.$$

Con **condiciones de compatibilidad** adicionales:

$u_0(0) = u_0(L) = u_0''(0) = u_0''(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0$, (cuya utilidad veremos más adelante para establecer convergencia y regularidad de la solución).

Lo primero que haremos es buscar soluciones particulares de la ecuación de ondas (23) (sin usar las condiciones de contorno) que se puedan escribir como producto de funciones de t por funciones de x .

Separación de variables, ppio. de superposición y desarrollo en serie. Buscamos pues una solución (que no sea nula, que esa ya la conocemos) de (23) de la forma

$$u(t, x) = T(t)W(x).$$

Al imponer que sea solución obtenemos

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = T''(t)W(x) - c^2 T(t)W''(x)$$

y así,

$$\text{func. de } t = \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{W''(x)}{W(x)} = \text{func. de } x,$$

por lo que ambas funciones han de ser constantes. Llamamos $-\lambda$ a esa constante. Tendremos pues que, de existir, T y W han de cumplir

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad y \quad W''(x) + \frac{\lambda}{c^2} W(x) = 0.$$

Al recuperar alguna de las condiciones de contorno, obtenemos

$$u(t, 0) = T(t)W(0) = u(t, L) = T(t)W(L) = 0$$

$$\Rightarrow W(0) = W(L) = 0.$$

Por lo tanto, el primer problema es buscar funciones no nulas verificando

$$\left\{ \begin{array}{l} W''(x) + \frac{\lambda}{c^2} W(x) = 0, \quad x \in [0, L] \\ W(0) = W(L) = 0. \end{array} \right. \quad (24)$$

para algún valor de λ . Nótese que si $\lambda \leq 0$, solo hallaremos la solución nula. Para $\lambda > 0$, las soluciones de esta ecuación son de la forma

$$W(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x/c) + B \cos(\sqrt{\lambda}x/c), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Al imponer $W(0) = 0$ obtenemos $B = 0$ y, al imponer $W(L) = 0$ (y buscar soluciones no nulas: $A \neq 0$), obtenemos

$$\sin(\sqrt{\lambda}L/c) = 0, \Rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}L}{c} \in \pi\mathbb{N},$$

es decir, tendremos soluciones no nulas si $\lambda = \lambda_n = (n\pi/L)^2$ para algún natural $n \in \mathbb{N}$ y estas soluciones serán:

$$n \in \mathbb{N} : W_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

La otra ecuación que hemos de resolver es

$$T''(t) + \lambda_n T(t) = T''(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0, \quad t \in [0, \infty)$$

cuyas soluciones son (para cada $n \in \mathbb{N}$):

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right), \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada A_n y B_n en \mathbb{R} , hemos encontrado una función

$$u_n(t, x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[A_n \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \right]$$

que es solución de (23) junto con dos de las condiciones de contorno, es decir, de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Pero si tratamos de imponer las dos condiciones que aún no hemos usado: $u(0, x) = u_0(x)$ y $u_t(0, x) = v_0$, tendremos un problema, ya que

$$\begin{aligned} u_n(0, x) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \stackrel{?}{=} u_0(x), \\ (\partial_t u_n)(0, x) &= B_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \stackrel{?}{=} v_0(x), \end{aligned}$$

no tiene por qué ser posible para ningún valor de n , A_n y B_n . ¿Cómo resolver este problema? Pues aprovechando dos hechos el **Principio de superposición**, es decir, hecho de que la suma de soluciones de (23) vuelve a ser una solución (suma finita o infinita con convergencia) y el **Desarrollo (de Fourier) en serie de senos** de una función.

Esencialmente, vamos a probar que toda función u_0 con condiciones $u_0(0) = U_0(L) = 0$ y con cierta regularidad, podrá ser descrita como una serie de la forma

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

y, aplicando el mismo resultado a v_0

$$v_0(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

podremos concluir que la serie

$$\sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) + \frac{b_n L}{nc\pi} \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

será la única solución de la ecuación de ondas con las condiciones de contorno prescritas.

Vamos a dar, en las siguientes tres secciones, rigor matemático a todos estos resultados formales.

5.3. Problemas de Sturm-Liouville, Valores y Funciones propias, desarrollos en serie de funciones propias

Primero generalizamos el problema de contorno (24) que dio lugar a la sucesión de λ_n y W_n . Un **Problema de Sturm-Liouville** consiste en encontrar los valores de un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales es posible hallar soluciones no nulas del PC autoadjunto homogéneo siguiente

$$\left. \begin{aligned} (Py')' + (Q + \lambda S)y &= 0, \quad x \in [x_0, x_1] \\ a_0 y(x_0) + b_0 y'(x_0) &= 0, \\ a_1 y(x_1) + b_1 y'(x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

donde, como en la Sección 3.4, Q, S son continuas, $P \in \mathcal{C}^1$ y $P > 0$ y aquí suponemos adicionalmente que $\boxed{S > 0}$. Para el contorno simplemente suponemos condiciones no triviales $|a_0| + |b_0| > 0$ y $|a_1| + |b_1| > 0$.

Sabemos que (25) siempre posee la solución trivial, $y = 0$. Cuando logramos encontrar un valor del parámetro λ para el que existe una solución y_λ no nula de (25), en realidad encontraremos exactamente un espacio de dimensión uno de soluciones, ya que no podrá ser el total (ver Nota 10). En esta situación al parámetro λ lo llamaremos **Valor Propio de Problema de Sturm-Liouville (25)** y a la función asociada y_λ (que está determinada salvo constante) la llamaremos **Función Propia asociada**.

Ejemplo 16 En el problema (24), que ha originado este estudio, los valores propios eran $\lambda_n = (nc\pi/L)^2$ para cada natural $n \in \mathbb{N}$ y las funciones propias:

$$W_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En realidad, las funciones propias esconden muchas propiedades. Para ver un poquito más, definimos el espacio vectorial siguiente:

$$L_S^2(x_0, x_1) := \left\{ y \text{ medible} : \int_{x_0}^{x_1} y^2(x) S(x) dx < \infty \right\},$$

que se convierte en espacio de Hilbert si lo dotamos del producto escalar (el de L^2 pero con peso S , por eso le pedíamos que fuese positiva):

$$\langle y, v \rangle := \int_{x_0}^{x_1} y(x) v(x) S(x) dx.$$

Antes de escribir el Teorema abstracto que queremos dar, veamos cierta analogía con el caso de dimensión finita.

Nota 17 Analogía con valores y vectores propios de matrices simétricas: $Ax = \lambda x$. Si definimos el operador diferencial

$$L[y] := \frac{1}{S(x)} \left((P(x)y(x)')' + Q(x)y(x) \right),$$

resulta que será *autoadjunto* (coincide con su adjunto) sobre el espacio de Hilbert $L_S^2(x_0, x_1)$ (añadiendo cierta regularidad), ya que

$$\langle L[y], v \rangle = \langle y, L[v] \rangle + \left[y'v - yv' \right]_{x_0}^{x_1},$$

y las condiciones separadas de contorno hacen que el último término sea nulo. El problema de valores propios es pues hallar λ tal que $L[y] = \lambda y$.

En el caso de dimensión finita, el problema análogo es hallar los λ tal que $Ax = \lambda x$ siendo A una matriz “simétrica” (coincide con su matriz traspuesta) sobre el espacio de Hilbert \mathbb{R}^N . Sabemos además que, por estar en el caso simétrico, existe una **base ortonormal de \mathbb{R}^N formada por vectores propios**.

Veamos el teorema “equivalente” en dimensión infinita.

Teorema 15 (Teoría de Sturm–Liouville) *Los valores propios de (25) forman una sucesión creciente $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $\lambda_n \rightarrow \infty$. Las funciones propias $\{y_n\}$ normalizadas ($\|y_n\|_{L_S^2} = 1$) quedan determinadas de forma única (salvo signo) y verifican para $n = 1, 2, \dots$*

- y_n tiene exactamente $n - 1$ ceros en (x_0, x_1) .
- Son S -ortogonales 2 a 2, es decir

$$n \neq m \Rightarrow \langle y_n, y_m \rangle = \int_{x_0}^{x_1} y_n(x)y_m(x) S(x)dx = 0.$$

- Cualquier función $y \in L_S^2(x_0, x_1)$ puede ser **desarrollada en serie de funciones propias**

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, y_n \rangle y_n.$$

Omitimos aquí la demostración de este resultado, que escapa a los objetivos de este curso.

Nota 18 También es posible estudiar el caso de valores propios con condiciones periódicas, pero en este caso un mismo valor propio puede tener dos funciones propias asociadas independientes, la ortogonalidad no es automática, aunque puede ser obtenida (ver la analogía con los valores y vectores propios múltiples de una matriz y el método de Gram–Schmidt).

Notamos que el tercer punto de este teorema basta para completar la existencia de solución de la ecuación de Ondas en $1 - D$. Pero vamos a dar algunas pinceladas adicionales de análisis funcional.

5.3.1. Ejemplos: Trigonométricas, Funciones de Bessel, Familias de Polinomios Ortogonales Clásicos

Ejemplo 17 (Funciones Trigonométricas) *En el marco del oscilador armónico (24), podemos también plantear el caso periódico:*

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in [0, L] \\ y(0) = y(L), \quad y'(0) = y'(L). \end{cases}$$

Aplicando las mismas ideas que para (24). Si probamos con $\lambda < 0$, las soluciones son

$$y(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

y al imponer las condiciones periódicas obtenemos (ver) $A = B = 0$, es decir, no tenemos autovalores negativos.

Para $\lambda_0 = 0$, tenemos $y(x) = Ax + B$ que cumplen las condiciones de contorno sii $A = 0$, por lo que tenemos un primer autovalor $\lambda = 0$ y autofunción $y_0(x) = 1$.

Por último, buscamos valores propios positivos $\lambda > 0$, obteniendo las posibles soluciones:

$$y(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Al imponer $y(0) = y(L)$ e $y'(0) = y'(L)$

$$\begin{pmatrix} \cos(L\sqrt{\lambda}) - 1 & \sin(L\sqrt{\lambda}) \\ -\sin(L\sqrt{\lambda}) & \cos(L\sqrt{\lambda}) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y para que este sistema tenga soluciones no nulas, es preciso que el determinante de la matriz sea nulo, es decir

$$0 = \det = 2 \left(1 - \cos(L\sqrt{\lambda}) \right) \Leftrightarrow L\sqrt{\lambda} \in 2\pi\mathbb{N},$$

es decir, para cada natural $n \in \mathbb{N}$, tendremos soluciones no nulas sii $\lambda_n = (2n\pi/L)^2$ y estas soluciones serán todas, generadas por (2 para cada n):

$$y_{2n}(x) = \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), \quad y_{2n-1}(x) = \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right).$$

Ejemplo 18 (Funciones de Bessel) *Ecuación de Bessel de orden $p \geq 0$.*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \Leftrightarrow (xy')' + \left(x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0.$$

Cuyas soluciones son llamadas funciones de Bessel de primera especie (o segunda especie cuando $p \in \mathbb{N}$) de índice p .

Poner gráficas.

Aparecen al resolver la membrana en $2 - D$.

Ejemplo 19 (Polinomios Ortogonales Clásicos)

Ecuación hipergeométrica:

$$\left(\sigma(x)\rho(x)y'(x)\right)' + \lambda\rho(x)y(x) = 0,$$

tal que

$$\sigma \in \mathbb{P}_2[x], \quad y \quad \tau(x) := \frac{(\sigma(x)\rho(x))'}{\rho(x)} \in \mathbb{P}_1[x].$$

Poseen soluciones polinómicas en los siguientes casos:

	Hermite	Laguerre	Jacobi
σ	1	x	$1 - x^2$
ρ	e^{-x^2}	$x^\alpha e^{-x}$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$
λ_n	$2n$	n	$n(n+\alpha+\beta+1)$
I	\mathbb{R}	$[0, \infty)$	$[-1, 1]$

y, en particular, para elecciones concretas de α y β en el caso de Jacobi, se obtienen

	Legendre	Tchebyshev 1ª especie	Tchebyshev 2ª especie
$\alpha = \beta$	0	-1/2	+1/2
$y_n(x)$...	$\cos(n \arccos(x))$	$\frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sin(n \arccos(x))}$

Resaltar Tchebyshev y su relación con óptica.

5.3.2. Caracterización variacional de valores y funciones propias

Dado el funcional (el mismo de la Sección 3.5 pero multiplicado por 2)

$$\mathcal{F}[y] := \int_{x_0}^{x_1} \left(P(x)(y'(x))^2 - Q(x)y(x)^2 \right) dx,$$

para condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas $y(x_0) = y(x_1) = 0$ y sometido a la ligadura integral (de tipo isoperimétrico)

$$\|y\|_{L_S^2}^2 := \int_{x_0}^{x_1} y^2(x)S(x)dx = 1,$$

aplicaríamos el Teorema 14 de la teoría de la Sección 3.5 y obtendríamos que el mínimo de \mathcal{F} ha de cumplir

$$\left\{ \begin{array}{l} (Py')' + (Q + \lambda S)y = 0, \quad x \in [x_0, x_1] \\ y(x_0) = y(x_1) = 0, \\ \int_{x_0}^{x_1} y^2(x)S(x)dx = 1, \end{array} \right\}$$

En realidad, es posible probar que efectivamente \mathcal{F} alcanza un mínimo en

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ y \in C^1(x_0, x_1) : y(x_0) = y(x_1) = 0, \int_{x_0}^{x_1} y^2(x)S(x)dx = 1 \right\}.$$

y que ese mínimo se alcanza justamente el la primera función propia y_1 (la constante viene determinada, salvo un signo, por la ligadura, que implica $\|y_1\|_{L_S^2} = 1$) y que el valor propio es precisamente el valor mínimo de \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}[y_1] = \lambda_1.$$

Podemos iterar este proceso gracias a la ortogonalidad. Concretamente, como sabemos que y_2 es S -ortogonal a y_1 , para calcular y_2 nos planteamos el problema de minimizar \mathcal{F} sobre el conjunto con una segunda ligadura

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ y \in C^1(x_0, x_1) : y(x_0) = y(x_1) = 0, \int_{x_0}^{x_1} y^2(x)S(x)dx = 1, \int_{x_0}^{x_1} y(x)y_1(x)S(x)dx = 0 \right\}.$$

y, efectivamente, el mínimo en \mathcal{D}_2 será y_2 y su valor $\mathcal{F}[y_2] = \lambda_2$. En general es posible probar el siguiente teorema

Teorema 16 En las condiciones del Teorema 15, las funciones propias y_n se obtienen al minimizar \mathcal{F} sobre el conjunto

$$\mathcal{D}_n = \left\{ y \in C^1(x_0, x_1) : y(x_0) = y(x_1) = 0, \int_{x_0}^{x_1} y^2(x)S(x)dx = 1, \int_{x_0}^{x_1} y(x)y_1(x)S(x)dx = 0, \dots, \int_{x_0}^{x_1} y(x)y_{n-1}(x)S(x)dx = 0 \right\}.$$

Y además $\mathcal{F}[y_n] = \lambda_n$.

Ejemplo 20 Se considera el siguiente problema: calcular el mínimo relativo del funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_1^e x (y'(x))^2 dx,$$

en el espacio

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C_0^1([1, e]), \int_1^e \frac{1}{x} y(x)^2 dx = 1, \int_1^e \frac{1}{x} y(x) \sin(\pi \ln(x)) dx = 0 \right\}.$$

Identificamos $P(x) = x$ que es derivable y positiva en $[1, e]$; $Q = 0$ y el peso $S(x) = 1/x$. Como el problema de Sturm-Liouville asociado es

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0 \Leftrightarrow x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0,$$

con condiciones dirichlet $y(1) = y(e) = 0$. Calculamos sus valores y funciones propias. Es una ecuación de tipo Euler, de modo que el cambio $s = \ln(x)$ y $z(s) = y(x)$ produce

$$z''(s) + \lambda z(s) = 0, \quad z(0) = z(1) = 0,$$

que es el Ejemplo 24 (con $c = L = 1$). Sabemos pues que los valores y funciones propias son

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad z_n(s) = \sin(n\pi s), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Deshaciendo el cambio, obtenemos

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad y_n(x) = \sin(n\pi \ln(x)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, la condición del conjunto \mathcal{D} no es mas que

$$0 = \int_1^e \frac{1}{x} y(x) \sin(\pi \ln(x)) dx = \int_1^e y(x) y_1(x) S(x) dx,$$

por lo que aplicando el Teorema 16 sabemos que \mathcal{F} alcanza su mínimo en $y_2(x) = K \sin(2\pi \ln(x))$, donde K viene dada por la ligadura:

$$\frac{1}{K^2} = \int_1^e \frac{1}{x} \sin^2(2\pi \ln(x)) dx = \int_0^1 \sin^2(2\pi s) ds = \frac{1}{2}.$$

y que su valor es $\mathcal{F}[y_2] = \lambda_2 = 4\pi^2$.

5.4. Fundamentos de análisis funcional

(SECCION OPCIONAL)

Trabajaremos sobre el espacio vectorial de las funciones medibles sobre un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y de cuadrado integrable $L^2(I)$. Este es un espacio de Hilbert, con producto escalar

$$\langle u, v \rangle := \int_I u(x)v(x)dx.$$

Sobre este espacio suponemos que tenemos construido un **sistema ortonormal** consistente en una sucesión de funciones $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\langle y_n, y_m \rangle = \delta_{n,m}.$$

Un sistema ortonormal es particularmente interesante cuando genera un subespacio denso,

$$\overline{L(y_1, y_2, \dots)} = L^2(I),$$

y en este caso se denomina **base hilbertiana** o **base ortonormal**, que NO es una base en el sentido algebraico, salvo en dimensión finita: \mathbb{R}^N . Es sabido que todo espacio de Hilbert es separable si admite una base hilbertiana numerable; curiosamente todos los espacios usados en Física son separables.

En este punto cabe recordar los siguientes resultados.

Teorema 17 (Proy. Ortogonal y Mejor Aprox.)

Dado un espacio de Hilbert H , un sistema ortonormal $\{y_n\}$ y los subespacios de dimensión finita $Y_N := L(y_1, \dots, y_N)$ y dado un vector $v \in V$ cualquiera, entonces el vector de Y_N

$$P_N(v) := \sum_{i=1}^N \langle v, y_i \rangle y_i,$$

se denomina **proyección ortogonal** de v sobre Y_N y se caracteriza por cualesquiera de las siguientes dos propiedades:

- $v - P_N(v)$ es ortogonal a todos los vectores de Y_N
- $\|v - P_N(v)\|_H \leq \|v - y\|_H$ para todo $y \in Y_N$.

Además, cuando el sistema ortonormal es una base hilbertiana, se tiene

$$\|v - P_N(v)\|_H \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

y, en general, a la serie que define el límite anterior

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, y_i \rangle y_i (= v),$$

se le denomina **Serie de Fourier de v relativa al sistema ortonormal**, y a los coeficientes $\langle v, y_n \rangle$, **Coefficientes de Fourier de v relativa al sistema ortonormal**

Teorema 18 Propiedades. Dado un espacio de Hilbert H y un sistema ortonormal $\{y_n\}$, se cumple la **Desigualdad de Bessel**:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\langle v, y_i \rangle|^2 \leq \|v\|_H^2,$$

para todo vector $v \in H$. Además, el sistema será **completo** (\Leftrightarrow base hilbertiana) si y solamente si, se cumple la **Identidad de Parseval**

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\langle v, y_i \rangle|^2 = \|v\|_H^2 \quad \left(o \sum_{i=0}^{\infty} \langle v, y_i \rangle \langle u, y_i \rangle = \langle v, u \rangle \right)$$

para todo vector $v \in H$.

Prueba. Veamos una igualdad que nos da toda la demostración.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v - P_N(v)\|_H^2 = \langle v - P_N(v), v - P_N(v) \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - 2\langle v, P_N(v) \rangle + \langle P_N(v), P_N(v) \rangle. \end{aligned}$$

Ahora bien, como los y_n son ortonormales, tenemos:

$$\begin{aligned}\langle P_N(v), P_N(v) \rangle &= \sum_{n=1}^N |\langle v, y_n \rangle|^2, \\ \langle v, P_N(v) \rangle &= \left\langle v, \sum_{n=1}^N \langle v, y_n \rangle y_n \right\rangle = \sum_{n=1}^N \langle v, y_n \rangle \langle v, y_n \rangle,\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$0 \leq \|v - P_N(v)\|_H^2 = \|v\|_H^2 - \sum_{i=0}^N |\langle v, y_n \rangle|^2.$$

Tomando límites obtenemos, en primer lugar, la desigualdad de Bessel. En segundo lugar, si suponemos la igualdad (Parseval) obtenemos la convergencia de $P_N(v)$ a v y viceversa. \square

Nota 19 Otras caracterizaciones. Dado un espacio de Hilbert H y un sistema ortonormal $\{y_n\}$, equivalen:

1. Igualdad de Bessel: $\sum_{i=0}^{\infty} |\langle v, y_n \rangle|^2 = \|v\|_H^2$.
2. Identidad de Parseval: $\sum_{i=0}^{\infty} \langle v, y_n \rangle \langle u, y_n \rangle = \langle v, u \rangle$.
3. Desarrollo de Fourier: $v = \sum_{i=0}^{\infty} \langle v, y_n \rangle y_n$.
4. $\overline{L\{y_n : n \in \mathbb{N}\}} = H$.
5. Si $v \in H$ tal que $\langle v, y_n \rangle = 0 \ \forall n$, entonces $v = 0$.
6. $\{y_n\}$ es maximal (no se pueden añadir más vectores y que siga siendo un sistema ortonormal).

Ejemplo 21 Establece la relación entre la Identidad de Parseval y el Teorema de Pitágoras.

Veamos ahora qué podemos añadir sobre la convergencia de estas series para funciones, es decir, cuando el espacio de Hilbert es el espacio de funciones $L_S^2(x_0, x_1)$ introducido en esta Sección, y el sistema ortonormal completo es una sucesión de funciones (provengan o no de un problema de Sturm Liouville), en qué sentido la serie de Fourier de una función

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, y_n \rangle y_n(x).$$

la “representa”. En principio esta igualdad (según el Teorema 15 para el caso de funciones propias o según la nota anterior para un sistema ortonormal completo

cualquiera de $H = L_S^2(x_0, x_1)$) es una igualdad únicamente casi por doquier (c.p.d.), es decir, puntual en el intervalo $[x_0, x_1]$ salvo en un conjunto de medida nula. Por lo tanto, a priori, la convergencia de la serie hacia la función

$$P_N(y) := \sum_{n=1}^N c_n y_n(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} y(x)$$

(siendo $c_n = \langle y, y_n \rangle$) solo podemos afirmar, *a priori* que sea también c.p.d.

Veremos algunas condiciones sobre $y(x)$ para que la convergencia mejore. Para ello usaremos algunos resultados adicionales:

Teorema 19 Dado el espacio de Hilbert $L_S^2(x_0, x_1)$ y un sistema ortonormal completo de funciones $\{y_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, una función $y(x)$ de este espacio y su serie de Fourier asociada $P_N(x)$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si y es continua y su serie $P_N(y)$ es uniformemente convergente en un intervalo, entonces la suma de la serie es una función continua.
2. Si la serie es uniformemente convergente, entonces la suma (infinita) y la integral conmutan:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{x_0}^{x_1} y_n(x) dx.$$

Nota: Cuando el intervalo (x_0, x_1) es infinito, hay que pedirles adicionalmente a las funciones y_n que sean integrables.

3. Si las funciones $y_n(x)$ son derivables, la serie $P_N(x)$ converge puntualmente y la serie $P'_N(x)$ converge uniformemente, entonces y es derivable y la derivada conmuta con la suma (infinita):

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y'_n(x).$$

Veamos, finalmente, dos resultados que implican la convergencia uniforme de series de funciones.

Test de Cauchy: $P_N(x)$ converge uniformemente sii es uniformemente de Cauchy, es decir, para todo ϵ existe un N_ϵ tal que $|P_{N_1}(x) - P_{N_2}(x)| < \epsilon$ siempre que $N_1, N_2 > N_\epsilon$ y para cualquier x .

Test de Weierstrass: dada una serie funcional $\sum_{N \geq 1} f_n(x)$ tal que $|f_n(x)| \leq C_N$ para todo x . Entonces si la serie numérica $\sum_{N \geq 1} C_N$ converge (a un valor C), podemos afirmar que la serie funcional $\sum_{N \geq 1} f_n(x)$ converge uniformemente.

Prueba. La convergencia puntual es obvia por ser absolutamente convergente. Ahora Para todo x , se tiene:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n = \left| C - \sum_{n=1}^N C_n \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 22 (Puntual pero no uniforme) Si definimos

$$S_N = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^N},$$

y aplicamos, para cada $x \neq 0$ la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón menor que 1, obtenemos

$$S_N = (1+x^2) - \frac{1}{(1+x^2)^N}, \quad x \neq 0.$$

Usando esta igualdad, deducimos que $S_N(x)$ converge puntualmente a $(1+x^2)$. Sin embargo, no lo hace uniformemente, ya que la condición sobre N_ϵ resultaría

$$|S_{N_\epsilon} - (1+x^2)| < \epsilon \Rightarrow N_\epsilon > -\frac{\log(\epsilon)}{\log(1+x^2)},$$

y esta expresión no está acotada cuando $x \sim 0$.

5.5. Desarrollo en serie trigonométrica de Fourier

Dedicaremos esta sección a establecer que la sucesión de funciones trigonométricas, es decir, las funciones propias del problema de Sturm–Liouville deducidas en el Ejemplo 17, forman un sistema ortonormal completo, es decir, que **las funciones trigonométricas pueden aproximar cualquier función T -periódica**. Concretamente, veremos que en el espacio $L^2(0, T)$ (en realidad puede ser $L^2(a, a+T)$ para cualquier valor de a , lo importante es la longitud T del intervalo, que determina la periodicidad de las funciones que usaremos), el conjunto de funciones trigonométricas T -periódicas

$$y_0(x) := \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad y_{2n-1}(x) := \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right),$$

$$y_{2n-1}(x) := \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

es un sistema ortonormal completo, una base hilbertiana. El desarrollo de una función sería

$$y(x) = \frac{A_0}{\sqrt{T}} + \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right),$$

donde

$$A_0 = \langle y, y_0 \rangle = \int_0^T \frac{y(x)}{\sqrt{T}} dx,$$

$$A_n = \langle y, y_{2n} \rangle = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T y(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx,$$

$$B_n = \langle y, y_{2n-1} \rangle = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T y(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx.$$

aunque es habitual escribirlo como

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right),$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{T}} A_0 = \frac{2}{T} \int_0^T y(x) dx,$$

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{T}} A_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx,$$

$$b_n = \sqrt{\frac{2}{T}} B_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx.$$

Nótese que no podemos aplicar directamente el Teorema 15 porque está enunciado para condiciones de contorno separadas. Ello nos lo da el siguiente resultado.

Teorema 20 (de Riesz–Fischer (1907)) *El conjunto anterior de funciones trigonométricas $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortonormal completo y, por lo tanto, toda función de $L^2(0, T)$ puede ser descrita de manera única a través de su serie de Fourier.*

Veamos ahora, a modo de ejercicio, que es un sistema ortonormal (para lo que usaremos las fórmulas:

- $2 \cos^2(a) = 1 + \cos(2a)$,
- $2 \sin^2(a) = 1 - \cos(2a)$,
- $2 \cos(a) \sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$,
- $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$,
- $2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.)

Primero vemos que están normalizados

$$\begin{aligned}
\bullet \|y_0(x)\|^2 &= \int_0^T \frac{dx}{T} = 1, \\
\bullet \|y_{2n}\|^2 &= \int_0^T \frac{2}{T} \cos^2\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx \\
&= \int_0^T \frac{1}{T} \left(1 + \cos\left(\frac{4n\pi x}{T}\right)\right) dx = 1, \\
\bullet \|y_{2n-1}\|^2 &= \int_0^T \frac{2}{T} \sin^2\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx \\
&= \int_0^T \frac{1}{T} \left(1 - \cos\left(\frac{4n\pi x}{T}\right)\right) dx = 1,
\end{aligned}$$

y por otro lado que son perpendiculares:

$$\begin{aligned}
\bullet \langle y_0, y_{2n} \rangle &= \int_0^T \frac{\sqrt{2}}{T} \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) = 0, \\
\bullet \langle y_0, y_{2n-1} \rangle &= \int_0^T \frac{\sqrt{2}}{T} \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) = 0, \\
\bullet \langle y_{2m}, y_{2n-1} \rangle &= \int_0^T \frac{2}{T} \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) - \sin\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) dx = 0, \\
\bullet \langle y_{2m}, y_{2n} \rangle &= \int_0^T \frac{2}{T} \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) dx \stackrel{n \neq m}{=} 0, \\
\bullet \langle y_{2m-1}, y_{2n-1} \rangle &= \int_0^T \frac{2}{T} \sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) - \cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) dx \stackrel{n \neq m}{=} 0.
\end{aligned}$$

A continuación, hagamos el desarrollo de Fourier en un ejemplo.

Ejemplo 23 Vamos a calcular el desarrollo de la función $y(x) = x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Como $T = 2\pi$, nuestro sistema ortonormal de funciones es:

$$y_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad y_{2n}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx),$$

$$y_{2n-1}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx).$$

La serie será:

$$x = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \frac{B_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \quad (26)$$

siendo

$$\begin{aligned}
A_0 &= \langle x, y_0 \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} dx, \\
A_n &= \langle x, y_{2n} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{x}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) dx, \\
B_n &= \langle x, y_{2n-1} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{x}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) dx.
\end{aligned}$$

Realizamos los cálculos.

$$A_0 = \left[\frac{x^2}{2\sqrt{2\pi}} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2\pi^3},$$

y

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos(nx) \\ du = dx, \quad v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{array} \right] \\
&= \left[x \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{\pi}} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx = 0.
\end{aligned}$$

y por último:

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin(nx) \\ du = dx, \quad v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{array} \right] \\
&= -\left[x \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{\pi}} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx = -\frac{2\sqrt{\pi}}{n}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (26), obtenemos

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Ejemplo 24 Probar que la función parte entera: $E(x)$, puede escribirse ($\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$) como:

$$E(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n},$$

haciendo un desarrollo adecuado de $f(x) = x - E(x)$, que es 1-peródica. En la sección que sigue, veremos por qué han de excluirse los x naturales.

Veamos ahora qué podemos añadir sobre la convergencia de estas series, es decir, en qué sentido (además de como función de L^2) la serie de Fourier de una función la “representa”.

5.5.1. Convergencia de la serie de Fourier

En principio, según el Teorema 20 de Riesz–Fischer, la convergencia es únicamente casi por doquier, es decir, puntual en el intervalo $[0, T]$ salvo en un conjunto de medida nula. Vamos a aplicar los resultados de la sección anterior para decir algo más.

Condición necesaria. Como todas las y_n son periódicas, $y_n(0) = y_n(T)$, la serie (y su límite) hereda esta propiedad, de modo que si queremos convergencia puntual, es preciso que $y(0) = y(T)$. En particular, la serie anterior de la función $y(x) = x$ no convergerá puntualmente. En realidad lo que ocurre es que la “versión T -periódica” de nuestra función

$$y(x) = \begin{cases} x - nT : & x \in [nT, (n+1)T), \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

no es continua en $x = T$, y es esa discontinuidad la que falla. Veamos esto de manera más general.

Convergencia puntual a trozos. Si $y(x)$ es una función continua a trozos en $[0, T]$, es decir, existen puntos $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_m \leq T$ tales que y es continua en (a_i, a_{i+1}) pero tiene saltos en estos puntos (en $a_0 = 0$ o $a_m = T$, entendemos que su versión T -periódica lo es, es decir $y(0) \neq y(T)$, que es el caso anterior). Entonces la serie trigonométrica de Fourier converge en todo punto de continuidad y en los a_i cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(a_i) = \frac{f(a_i^+) + f(a_i^-)}{2}.$$

En particular, la serie de $y(x) = x$ converge hacia π tanto en $x = 0$ como en $x = 2\pi$.

Fenómeno de Gibbs. Son comportamientos oscilatorios que le ocurren a las aproximaciones de Fourier cerca de los puntos de discontinuidad de f .

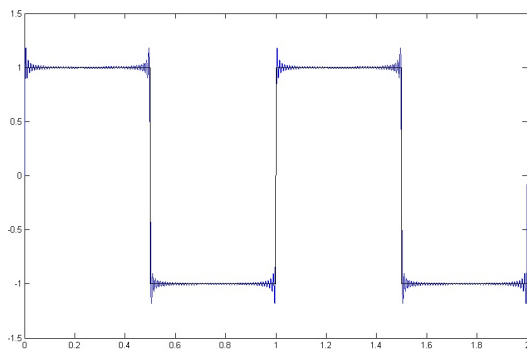


Figura 5.2: Serie Fourier (con $n = 100$) para la onda cuadrada: $f(x) = \text{signo}(x - E(x) - 0.5)$.

Ejemplo 25 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -L < x \leq 0, \\ L, & \text{si } 0 < x \leq L, \end{cases}$$

cuya serie de Fourier es (véase),

$$S_N(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin((2n-1)\pi x/L)}{2n-1}$$

representa $S_{12}(x)$ y observa los fenómenos oscilatorios en torno a $x = 0$ y a los extremos.

Convergencia uniforme. Si y es continua en $[0, T]$, se cumple la condición necesaria $y(0) = y(T)$ y además, $y'(x)$ es continua a trozos (admitimos pues que $y(x)$ tenga “picos”), entonces la serie trigonométrica de Fourier converge uniformemente (y absolutamente) a y en $[0, T]$. Para probar este hecho, lo haremos sobre cada ejemplo, usando el criterio de Weierstrass, es decir, una vez calculemos los coeficientes de Fourier:

$$\frac{A_0}{\sqrt{T}} + \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right),$$

para que converja uniformemente, basta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| + |B_n| < \infty.$$

Notamos que esto falla en el ejemplo de $y(x) = x$.

Ejemplo 26 $y(x) = |x - 1|$ en $[0, 2]$.

$$a_0 = \int_0^2 |x - 1| dx = 1$$

$$b_n = \int_0^2 |x - 1| \sin(n\pi x) dx = 0,$$

$$a_n = \int_0^2 |x - 1| \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} [1 + (-1)^{(n+1)}],$$

de donde, escribiendo sólo los sumandos impares:

$$|x - 1| = \frac{1}{2} + \sum \frac{4}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos((2n-1)\pi x)$$

converge uniformemente (en \mathbb{R}).

Convergencia de la derivada. Si y es $C^1[0, T]$, se cumple la condición necesaria $y(0) = y(T)$ y además, $y'(0) = y'(T)$ y admite derivada segunda a trozos, entonces la serie trigonométrica de Fourier y la correspondiente serie de sus derivadas convergen uniformemente (y absolutamente) a y y y' respectivamente en $[0, T]$.

En general (es algo así como iterando este resultado), se puede probar lo siguiente

Teorema 21 Si una función periódica y es $C^k[0, T]$ (por lo tanto $y^{(n)}(0) = y^{(n)}(T)$ para $n = 0, 1, 2, \dots, k$) y la derivada $(k+1)$ -ésima es continua a trozos, entonces la serie numérica

$$\sum_{n \geq 1} n^k (|a_n| + |b_n|),$$

converge uniformemente, siendo a_n y b_n los coeficientes de Fourier de y .

Convergencia en media. Es la igualdad

$$\frac{2}{T} \int_0^T y(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

que no es más que la identidad de Bessel (o Parseval), pero escribiendo el desarrollo alternativo:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right).$$

(En realidad, si recordamos la prueba de la igualdad de Bessel, es equivalente a la convergencia en L^2).

5.5.2. Cambio de intervalo.

Si queremos calcular la serie de Fourier de una función $y(x)$ definida sobre un intervalo genérico $[a, b]$, tenemos dos opciones: o repetimos el proceso, o hacemos una transformación lineal

$$x = a + \frac{b-a}{T} t$$

que transforma el intervalo $t \in [0, T]$ en el intervalo $x \in [a, b]$ y viceversa. En este segundo caso

$$Y(t) := y(x) = y\left(a + \frac{b-a}{T} t\right)$$

puede ser desarrollada en serie trigonométrica

$$Y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right),$$

siendo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T Y(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T Y(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T Y(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt. \end{aligned}$$

Lo que, desaciendo el cambio, nos da $y(x) =$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi(x-a)}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi(x-a)}{b-a}\right),$$

siendo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{b-a} \int_a^b y(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b y(x) \cos\left(\frac{2n\pi(x-a)}{b-a}\right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b y(x) \sin\left(\frac{2n\pi(x-a)}{b-a}\right) dx. \end{aligned}$$

Caso particular $[a, b] = [-T, T]$. En este caso obtenemos: $y(x) =$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi(x+T)}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi(x+T)}{T}\right)$$

que, usando las fórmulas del seno y coseno de una suma, resulta:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + (-1)^n b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T y(x) dx, \\ a_n &= \frac{(-1)^n}{T} \int_{-T}^T y(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \\ b_n &= \frac{(-1)^n}{T} \int_{-T}^T y(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx. \end{aligned}$$

Como el cambio de signo aparece tanto en la serie como en los coeficientes, se puede eliminar y enunciar el resultado:

Teorema 22 Dada $y \in L^2(-T, T)$, se tiene

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T y(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T y(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T y(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx. \end{aligned}$$

5.5.3. Desarrollo en serie de senos/cosenos

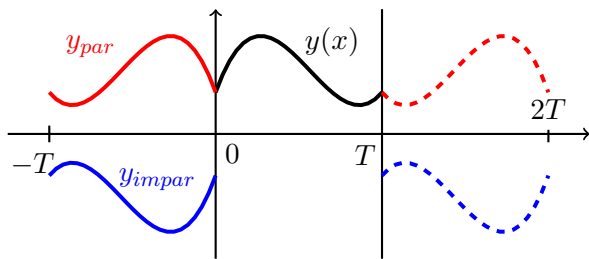
Dada una función continua $y \in C([0, T])$, nos planteamos aproximarla por series trigonométricas que sean únicamente de senos o únicamente de cosenos (salvo constante). Para ello observamos que sobre un intervalo simétrico $[-T, T]$, los coeficientes de Fourier descritos en el Teorema 22 tienen la siguiente cualidad (debido a que los senos son funciones impares y que los cosenos y las constantes son pares)

$$\begin{aligned} a_n &= 0 && \text{cuando } y \text{ es impar, } (y(x) = -y(-x)), \\ b_n &= 0 && \text{cuando } y \text{ es par, } (y(x) = y(-x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos las **extensiones par e impar** de la función $y \in C([0, T])$ como

$$\begin{aligned} y_{\text{par}}(x) &:= \begin{cases} y(x) & x \in [0, T] \\ y(-x) & x \in [-T, 0] \end{cases} \\ y_{\text{impar}}(x) &:= \begin{cases} y(x) & x \in [0, T] \\ -y(-x) & x \in (-T, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

respectivamente, obtendremos que en el desarrollo



de Fourier de y_{par} no aparecerán senos, mientras que en el desarrollo de y_{impar} no aparecerán cosenos ni la constante.

Además observamos (véase las extensiones en la línea discontinua a \mathbb{R} en el dibujo) que y_{par} es continua siempre (en \mathbb{R}) ya que $y_{\text{par}}(-T) = y_{\text{par}}(T)$. Sin embargo, para que y_{impar} sea continua, se requiere que:

$$\begin{cases} y_{\text{impar}}(0^-) = y_{\text{impar}}(0^+) \Rightarrow y(0) = 0, \\ y_{\text{impar}}(-T) = y_{\text{impar}}(T) \Rightarrow y(T) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, aplicando los resultados anteriores, es posible probar el siguiente resultado.

Teorema 23 (Serie de cosenos/senos) Dada $y \in C^1(0, T)$, entonces la serie de cosenos

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T y(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T y(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \end{aligned}$$

converge absoluta y uniformemente hacia y en $[0, T]$.

Si además $y(0) = y(T) = 0$ entonces la serie de senos

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

siendo

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx,$$

converge absoluta y uniformemente hacia y en $[0, T]$.

Si además $y \in C^{2k}([0, T])$, con $y^{(m)}(0) = y^{(m)}(T) = 0$, para $m = 0, 2, 4, \dots, 2k$, entonces la serie anterior (de senos) converge, ella y sus $2k - 1$ derivadas, converge absoluta y uniformemente hacia las correspondientes derivadas de y en $[0, T]$.

5.6. Solución de la ecuación de Ondas

En esta sección simplemente reproduciremos los cálculos realizados en la Sección 5.2 y que sirvieron de motivación para estudiar los problemas de Sturm–Liouville y los desarrollos en series.

Se trata de resolver la ecuación de ondas en $1 - D$:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(0, x) = u_0(x) \in C^2([0, L]), \\ (\partial_t u)(0, x) = v_0(x) \in C^1([0, L]), \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

con condiciones de compatibilidad adicionales:

$$u_0(0) = u_0(L) = u_0'(0) = u_0'(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0.$$

Por separación de variables, obtuvimos una familia biparamétrica numerable

$$u_n(t, x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[A \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) + B \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \right]$$

de soluciones de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

Ahora sí podemos usar las series de Fourier respectivas de u_0 y v_0 :

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$v_0(x) = \sum_{n \geq 1} b'_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad b'_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

por lo que el candidato a solución es

$$\sum_{n \geq 1} \left[b_n \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) + \frac{b'_n L}{nc\pi} \sin\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Con todos los resultados previos es fácil probar que esta serie, sus primeras y sus segundas derivadas parciales convergen uniformemente, y que el límite es la solución de la ecuación de ondas descrita en esta sección. Concretamente, es posible probar que:

Teorema 24 Dadas $u_0 \in C^2(0, L)$ con derivada tercera continua a trozos y $v_0 \in C^1(0, L)$ con derivada segunda continua a trozos tales que $u_0(0) = u_0(L) = u_0''(0) = u_0''(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0$, entonces el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(0, x) = u_0(x) \in C^2([0, L]), \\ (\partial_t u)(0, x) = v_0(x) \in C^1([0, L]), \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

posee una solución dada por la expresión anterior

Notemos sólo el motivo de las relaciones de compatibilidad (y convergencia). (...)

5.6.1. Unicidad

Para estudiar la unicidad de solución vamos a recurrir el llamado **método de la energía**. Definimos la *energía (de la cuerda vibrante)* como:

$$E[u](t) := \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx = 0,$$

y verificamos que esta cantidad es constante en t si se aplica a soluciones de nuestra ecuación de Ondas en las condiciones del Teorema 24. Para ello, multiplicamos la ecuación $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ por u_t , integramos entre 0 y L , e integramos por partes para obtener:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{\partial u_t^2}{\partial t} dx \\ &\quad + \left[u_t u_x \right]_0^L + c^2 \int_0^L u_{tx} u_x dx = \frac{d}{dt} E[u](t), \end{aligned}$$

(nótese que los términos de borde se cancelan por la periodicidad ya que $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ implica $u_t(t, 0) = u_t(t, L) = 0$). Por lo tanto, $E[u](t)$ es constante sobre soluciones.

Para probar unicidad, basta suponer que u_1 y u_2 son soluciones, llamar $u := u_1 - u_2$ a su diferencia, que también será solución, y por lo tanto

$$E[u](t) = E[u](0) = E[u_1](0) - E[u_2](0) = 0,$$

ya que en $t = 0$, tanto u_1 como u_2 son iguales a u_0 . Así, dado que E es suma de cantidades no negativas, los integrandos son nulos, o sea: $u_t = u_x = 0$, por lo que u es constante y constantemente 0, que es su valor en $t = 0$. Por lo tanto $u_1 = u_2$.

5.6.2. Soluciones de la ecuación de Ondas en \mathbb{R} : fórmula de D'Alembert

Consideramos la ecuación de ondas para $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}), \\ (\partial_t u)(0, x) = v_0(x) \in C^1(\mathbb{R}), \end{cases}$$

y buscamos la solución explícita del problema. Para ello, consideramos el cambio de variables $\xi = x + ct$ y $\eta = x - ct$ (o equivalentemente $x = (\xi + \eta)/2$ y $t = (\xi - \eta)/(2c)$) y definimos

$$u(t, x) = U(\xi, \eta) = U(x + ct, x - ct),$$

de donde deducimos que las derivadas cumplen (suponiendo la regularidad necesaria):

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \Rightarrow u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$$

$$u_t = cU_\xi - cU_\eta, \Rightarrow u_{tt} = c^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}),$$

De aquí deducimos que

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 U_{\xi\eta}.$$

Por lo tanto U_η no depende de ξ y U_ξ no depende de η , de lo que deducimos que U puede escribirse como

$$U(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta).$$

para ciertas funciones g y h que pasamos a determinar. Desahaciendo el cambio de variables, obtenemos:

$$u(t, x) = g(x + ct) + h(x - ct), \quad (27)$$

y, aplicando las condiciones iniciales, se obtiene

$$\begin{cases} u(0, x) = g(x) + h(x) = u_0(x), \\ u_t(0, x) = c(g'(x) - h'(x)) = v_0(x). \end{cases}$$

Derivando la primera igualdad, sumando y restando, obtenemos

$$\begin{cases} 2c g'(x) = c u_0'(x) + v_0(x), \\ 2c h'(x) = c u_0'(x) - v_0(x). \end{cases}$$

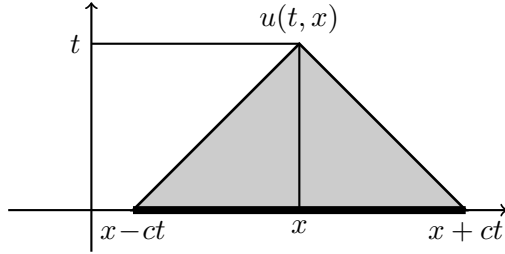
Si ahora integramos, obtenemos

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2} u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy + K_1 \\ h(x) = \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy + K_2 \end{cases}$$

donde las constantes de integración han de cumplir $K_1 + K_2 = 0$ para que se cumpla la condición anterior ($g + h = u_0$). Sustituyendo en (27), obtenemos finalmente la llamada Fórmula de D'Alembert

$$u(t, x) = \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy.$$

Zona de dependencia. Notamos en este punto una propiedad de la ecuación de ondas (y de las ecuaciones elípticas en general): la velocidad finita de propagación y la consecuente existencia de una *zona de dependencia*. Este hecho se refleja en la fórmula de D'Alembert y en la figura : “el valor de la solución en



un punto x en un instante $t > 0$ depende exclusivamente de los valores iniciales (en $t = 0$) sobre la **zona** contenida en $[x - ct, x + ct]$ ”, o, leído en sentido inverso, la propagación de la “información” contenida en u se produce a velocidad máxima c , por lo que en un tiempo t puede avanzar, como mucho, un espacio igual a $\pm ct$ desde el punto en que se origina.

5.7. Solución de la ecuación de Dirichlet

Usando también la técnica de separación de variables, veamos cómo resolver la ecuación de Dirichlet (22) en varios dominios Ω , que, como ya hemos visto, tiene solución.

Laplaciano en polares. Primero, para un caso genérico en que Ω sea “redondo”, hacemos un **cambio a coordenadas polares** (en \mathbb{R}^2).

$$(x_1, x_2) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)), \quad u(x_1, x_2) = U(\rho, \theta).$$

Así, calculamos las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned} U_\rho &= \cos(\theta)u_{x_1} + \sin(\theta)u_{x_2}, \\ U_{\rho\rho} &= \cos^2(\theta)u_{x_1x_1} + \cos(\theta)\sin(\theta)u_{x_1x_2} \\ &\quad + \sin(\theta)\cos(\theta)u_{x_2x_1} + \sin^2(\theta)u_{x_2x_2} \\ U_\theta &= -\rho \sin(\theta)u_{x_1} + \rho \cos(\theta)u_{x_2}, \\ U_{\theta\theta} &= \rho^2 \sin^2(\theta)u_{x_1x_1} - \rho^2 \sin(\theta)\cos(\theta)u_{x_1x_2} \\ &\quad - \rho \cos(\theta)u_{x_1} - \rho \sin(\theta)u_{x_2} \\ &\quad - \rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta)u_{x_2x_1} + \rho^2 \cos^2(\theta)u_{x_2x_2}. \end{aligned}$$

Podemos pues deducir el **Laplaciano en polares**:

$$\left(U_{\rho\rho} + \frac{U_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{U_\rho}{\rho} \right)(\rho, \theta) = (\Delta_x u)(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$$

Nota 20 En particular, cuando una función u es radial (depende de x sólo a través de $\rho = |x|$ y, con la notación introducida: $u(x) = U(\rho)$), entonces queda

$$\Delta_x u(x) = U_{\rho\rho} + \frac{U_\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho U_\rho).$$

Y en dimensión N , sale $\Delta_x u = \frac{1}{\rho^{N-1}} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^{N-1} U_\rho)$. En particular, la ecuación (sin tener en cuenta las condiciones de contorno) es resoluble en \mathbb{R}^N y sale

$$u(x) = \begin{cases} C_1 |x| & N = 1, \\ C_2 \log |x| & N = 2, \\ C_N \frac{1}{|x|^{N-1}} & N \geq 3, \end{cases}$$

que es la llamada **solución fundamental del Laplaciano en \mathbb{R}^N** y que, por convolución, sirve para resolver múltiples problemas (elípticos) asociados.

La ecuación de Dirichlet en el disco. Primero nos proponemos resolver (22) sobre el disco D :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in D = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \\ u(x) = \gamma(x) & x \in \mathbb{S}^1 = \partial D. \end{cases}$$

La función γ que determina el valor sobre la frontera \mathbb{S}^1 , se puede ver como una función real en la variable θ y que sea 2π -periódica:

$$\bar{\gamma}(\theta) := \gamma(\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Por lo tanto, el problema de Dirichlet queda:

$$\begin{cases} U_{\rho\rho} + \frac{U_{\theta\theta}}{\rho^2} + \frac{U_\rho}{\rho} = 0 & (\rho, \theta) \in (0, 1) \times [0, 2\pi], \\ U(1, \theta) = \bar{\gamma}(\theta) & \theta \in [0, 2\pi], \\ U(\rho, 0) = U(\rho, 2\pi) & \rho \in (0, 1]. \end{cases}$$

(Ya veremos qué se pone en el lateral $(0, \theta)$, que corresponde con el punto $x = 0$). Separamos variables.

$$U(\rho, \theta) = v(\rho)w(\theta) \Rightarrow$$

$$v''(\rho)w(\theta) + \frac{v(\rho)}{\rho^2}w''(\theta) + \frac{v'(\rho)}{\rho}w(\theta) = 0,$$

resultando

$$\frac{w''(\theta)}{w(\theta)} = -\frac{\rho^2 v''(\rho) + \rho v'(\rho)}{v(\rho)} = -\lambda \equiv cte.$$

Por lo tanto, para w nos queda un Problema de Sturm-Liouville conocido, el Ejemplo 17 con $L = 2\pi$.

$$\begin{cases} w''(\theta) + \lambda w(\theta) = 0, & \theta \in [0, 2\pi] \\ w(0) = w(2\pi), \quad w'(0) = w'(2\pi) \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned}\lambda_0 = 0 & : w_0(\theta) = 1 \\ \lambda_n = n^2 & : w_{2n}(\theta) = \cos(n\theta), w_{2n-1}(\theta) = \sin(n\theta).\end{aligned}$$

La ecuación para v queda pues:

$$\rho^2 v''(\rho) + \rho v'(\rho) - n^2 v(\rho) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

que es una ecuación de Euler igual a la del Ejemplo 20 que, gracias al cambio $s = \ln(\rho)$ y $z(s) = v(\rho)$, queda

$$z''(s) - n^2 z(s) = 0.$$

Sus soluciones son: $z(s) = Ae^{ns} + Be^{-ns}$, y por lo tanto

$$v(\rho) = Ae^{n \ln \rho} + Be^{-n \ln \rho} = A\rho^n + \frac{B}{\rho^n}.$$

Ahora recordamos que $\rho = 0$ corresponde con el valor de la solución en el centro del disco, por lo que exigimos que v sea finito. Por ello $B = 0$, y nos quedamos con $v_n(\rho) = A\rho^n$. Por lo tanto, hemos encontrado la siguiente familia de soluciones en variables separadas: para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A_n, B_n \in \mathbb{R}$,

$$U_n(\rho, \theta) = \rho^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)],$$

junto con $U_0(\rho, \theta) = A_0$. De nuevo, para poder imponer la condición restante $U(1, \theta) = \bar{\gamma}(\theta)$, debemos usar el **Principio de superposición** (la suma (infinita) de soluciones es solución) ya que con una sola de las funciones en variables separadas solo podemos escribir

$$U_n(1, \theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \stackrel{?}{=} \gamma(\theta).$$

Por lo tanto, descomponemos nuestra condición en la frontera $\bar{\gamma}$ en serie de Fourier (ver Teorema 20):

$$\bar{\gamma}(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta),$$

cuyos coeficientes son

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\gamma}(\theta) d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\gamma}(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\gamma}(\theta) \sin(n\theta) d\theta.\end{aligned}$$

De este modo, podemos construir

$$U(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)],$$

y ver que es la solución que buscábamos. La convergencia está garantizada puesto que, al ser $\rho \in [0, 1]$, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty.$$

Además $u(x) = U(\rho, \theta)$ es armónica¹ (por ser suma, infinita en este caso, de armónicas) y cumple, sobre el borde $x \in \mathbb{S}^1 = \partial D$,

$$u(x) \stackrel{|x|=1}{=} U(1, \theta) = \bar{\gamma}(\theta) \stackrel{|x|=1}{=} \gamma(x).$$

Ejemplo 27 Resuelve la ecuación de Dirichlet en el disco para $\gamma(x_1, x_2) = x_1^2$.

En este caso, la función γ vista como función de θ es simplemente $\bar{\gamma}(\theta) = \cos^2(\theta)$, por lo que su desarrollo de Fourier lo obtenemos simplemente recordando las fórmulas trigonométricas conocidas

$$\bar{\gamma}(\theta) = \cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta).$$

(la serie tiene casi todos los términos nulos: $a_0 = 1$ y $a_2 = 1/2$ y el resto cero). La solución será:

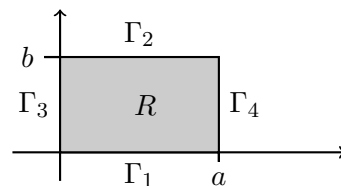
$$U(\rho, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cos(2\theta).$$

Si recuperamos “a mano” las coordenadas cartesianas $(x_1, x_2) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$, (usando la fórmula del coseno del ángulo doble) obtenemos:

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} + \frac{|x|^2}{2} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{|x|^2}{2} \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^2} \right) = \frac{1 + x_1^2 - x_2^2}{2}.\end{aligned}$$

La ecuación de Dirichlet en un rectángulo. En segundo lugar, resolvamos el problema (22) de Dirichlet en el conjunto R :

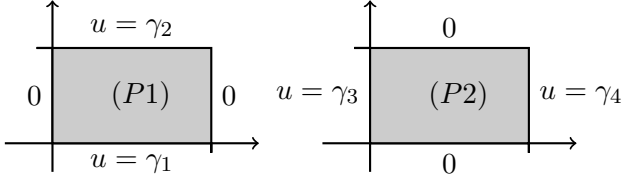
$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in R = \{(x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, b]\}, \\ u(x) = \gamma(x), & x \in \partial R = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$



¹Una función armónica es aquella que cumple $\Delta u = 0$.

Supondremos que γ es dada y se anula en los vértices de R . Para resolver en este caso, planteamos dos problemas auxiliares

$$(P1) \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } R, \\ u = \gamma_1 \text{ en } \Gamma_1, \\ u = \gamma_2 \text{ en } \Gamma_2, \\ u = 0 \text{ en } \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \end{cases} \quad (P2) \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } R, \\ u = 0 \text{ en } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ u = \gamma_3 \text{ en } \Gamma_3, \\ u = \gamma_4 \text{ en } \Gamma_4, \end{cases}$$



donde cada $\gamma_i(x)$ es simplemente la función γ restringida al trozo Γ_i de la frontera. La idea es que en cada uno de estos problemas sí podremos usar la técnica de separación de variables (cosa que no funcionaría en el general) para encontrar sendas soluciones u_1 y u_2 y, posteriormente, usar que:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \text{ solución de } (P1) \\ u_2 \text{ solución de } (P2) \end{array} \right\} \Rightarrow u = u_1 + u_2 \text{ solución global.}$$

Por lo tanto, nos planteamos en cada uno de estos problemas, la separación de variables.

Primero resolvemos (P1). Separamos variables:

$$u_1(x_1, x_2) = v(x_1)w(x_2) \Rightarrow \frac{v''(x_1)}{v(x_1)} = -\frac{w''(x_2)}{w(x_2)} = -\lambda.$$

Por lo tanto, para $v(x_1)$ nos queda el problema de Sturm–Liouville (24) con $c = 1$ y $L = a$:

$$\begin{cases} v''(x_1) + \lambda v(x_1) = 0, & x_1 \in [0, a] \\ v(0) = v(a) = 0, \end{cases}$$

porque $u_1 = 0$ en $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$

Nota 21 Al resolver (P2), comenzaremos por la ecuación de $w(x_2)$, que será la que lleve condiciones de contorno nulas.

Como ya resolvimos (24), las soluciones son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad v_n(x_1) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x_1\right),$$

para $n = 1, 2, \dots$, y la ecuación para w queda:

$$w''(x_2) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 w(x_2) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

cuya solución general puede ser escrita como

$$w(x_2) = A \sinh\left(\frac{n\pi}{a}x_2\right) + B \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b - x_2)\right),$$

(elegimos este formato en lugar de la habitual suma de exponenciales para que la expresión en serie sea más simple). De nuevo, tenemos una familia de funciones u_1 , en variables separadas, que pretendemos combinar en una serie infinita usando el principio de superposición para que cumplan las condiciones de contorno. Por lo tanto, descomponemos nuestras dos condiciones de frontera γ_1 y γ_2 , ahora en serie de senos, que son las autofunciones que nos han aparecido en la variable x_1

$$\gamma_i(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^i \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right), \quad \beta_n^i = \frac{2}{a} \int_0^a \gamma_i(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{a}\right) ds.$$

Además, por el Teorema 23 y dado que γ_1 y γ_2 se anulan en 0 y en a , tenemos convergencia uniforme. De este modo, podemos proponer $u_1(x)$ como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x_1\right) \left[\frac{\beta_n^2 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}x_2\right) + \beta_n^1 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b - x_2)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \right],$$

que converge, es armónica por construcción, y cumple

$$u_1(x_1, 0) = \gamma_1(x_1), \quad u_1(x_1, b) = \gamma_2(x_1),$$

y $u_1(0, x_2) = u_1(a, x_2) = 0$, por lo resuelve de (P1).

Resolvemos (P2) de manera análoga. Separamos variables y, siguiendo la Nota 21 y el proceso previo, construimos u_2 como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x_2\right) \left[\frac{\beta_n^4 \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x_1\right) + \beta_n^3 \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(a - x_1)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \right],$$

donde β_n^3 y β_n^4 son los respectivos coeficientes de las series de senos de γ_3 y γ_4 , esto es:

$$\gamma_i(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^i \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right), \quad \beta_n^i = \frac{2}{b} \int_0^b \gamma_i(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{b}\right) ds.$$

para $i = 3, 4$.

Ejemplo 28 Resuelve la siguiente ecuación de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in R = [0, a] \times [0, b], \\ u(x, b) = \gamma_2(x) = 0, & u(x, 0) = \gamma_1(x) = B \sin(\pi x/a), \\ u(a, y) = \gamma_4(y) = 0, & u(0, y) = \gamma_3(y) = Ay(b - y). \end{cases}$$

Observamos que los γ_i valen cero en las esquinas de R y notamos que sólo necesitamos hacer el desarrollo en senos de γ_3 ya que los otros “están hechos”:

$$\begin{aligned} \gamma_{2,4} &= 0, & \Rightarrow \beta_n^{2,4} &= 0, \quad \forall n, \\ \gamma_1 &= B \sin(\pi x/a), & \Rightarrow \beta_1^1 &= B, \quad \beta_n^1 = 0 \quad \forall n \geq 2, \end{aligned}$$

de donde, de hecho, ya obtenemos:

$$u_1(x, y) = \frac{B}{\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{a}(b - y)\right).$$

Calculamos entonces los coeficientes de γ_3 .

$$\begin{aligned}\beta_n^3 &= \frac{2}{b} \int_0^b \gamma_3(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{b}\right) ds = \frac{2A}{b} \int_0^b s(b-s) \sin\left(\frac{n\pi s}{b}\right) ds \\ &= (\text{partes}) \left[\begin{array}{ll} u = s(b-s) & dv = \sin(n\pi s/b) ds \\ du = (b-2s) ds & v = -\frac{b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi s}{b}\right) \end{array} \right] \\ &= \frac{2A}{n\pi} \int_0^b (b-2s) \cos\left(\frac{n\pi s}{b}\right) ds \\ &= (\text{partes}) \left[\begin{array}{ll} u = (b-2s) & dv = \cos(n\pi s/b) ds \\ du = -2 ds & v = \frac{b}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi s}{b}\right) \end{array} \right] \\ &= \frac{4bA}{(n\pi)^2} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi s}{b}\right) ds = \frac{4b^2 A}{(n\pi)^3} \left(1 - (-1)^n\right)\end{aligned}$$

que se anula en los n pares. Por lo tanto, en la serie des-cribimos sólo los términos impares $n = 2k - 1$.

$$\gamma_3(y) = \frac{8b^2 A}{\pi^3} \sum_{k \geq 1} \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi y}{b}\right)}{(2k-1)^3}.$$

Finalmente, aplicando la fórmula anterior, construimos

$$u_2(x, y) = \frac{8b^2 A}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{b} y\right) \frac{\sinh\left(\frac{(2k-1)\pi}{b} (a-x)\right)}{\sinh\left(\frac{(2k-1)\pi a}{b}\right)},$$

y la solución es $u = u_1 + u_2$.

6. Formulación débil

A lo largo de los temas anteriores hemos pedido regularidad (ser de clase $C^2([x_0, x_1])$) para que los problemas variacionales y los problemas de contorno asociados tengan la misma solución. Es decir, como trabajamos con soluciones regulares de las ecuaciones diferenciales involucradas, solo en estos casos podemos hacer caminos de ida y vuelta entre ambas formulaciones. Sin embargo, parece que para formular y resolver un problema variacional, no es preciso pedirle tanta regularidad al conjunto donde buscamos la solución. De hecho, como vamos a ver enseguida, para trabajar con la formulación variacional, para que los funcionales tengan sentido y estén bien definidos, ni siquiera es preciso la regularidad C^1 , sino que la función y su derivada sean de cuadrado integrable.

Las preguntas que surgen son naturales: si se logra minimizar un funcional en un espacio que no tiene tanta regularidad ¿qué relación hay entre el mínimo encontrado y el problema de contorno asociado? Al no tener regularidad, no se puede decir que sea una solución en el sentido que lo han venido siendo pero, ¿podremos afirmar que son soluciones en algún otro sentido?

Pasemos a desarrollar los conceptos para responder a estas preguntas con rigor.

6.1. Derivada generalizada y débil

Primero vamos a generalizar el concepto de derivada mediante una fórmula que, aunque nunca se resalta en cursos anteriores, la caracteriza.

Integración por partes y fórmula de Green.

Como todos sabemos, si $u, v \in C^1([a, b])$ se tiene

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = -\int_a^b u'(x)v(x)dx + \left[u(x)v(x)\right]_{x=a}^{x=b}.$$

Cuando además pedimos que $v \in C_0^1(a, b)$ (tenga soporte compacto), es decir $v(a) = v(b) = 0$, esta fórmula queda reducida a

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = -\int_a^b u'(x)v(x)dx,$$

En el caso en que las funciones dependan de varias variables, la fórmula análoga a la de integración por partes se denomina fórmula de Green: dadas $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u(x) \partial_{x_i} v(x) dx &= -\int_{\Omega} \partial_{x_i} u(x) v(x) dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) dS,\end{aligned}$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$ y $n_i(x)$ es la i -ésima componente del vector n normal a la frontera $\partial\Omega$ en el punto x . De nuevo, si $v \in C_0^1(\Omega)$ tiene soporte compacto, este último término desaparece y queda

$$\boxed{\int_{\Omega} \partial_{x_i} u(x) v(x) dx = -\int_{\Omega} u(x) \partial_{x_i} v(x) dx} \quad (28)$$

Nos quedamos con esta última, para trabajar con más generalidad. La clave de esta fórmula es doble:

Clave 1. Las derivadas de la función u quedan caracterizadas, es decir, si encontrásemos “otra” función $g \in C^0(\bar{\Omega})$ tal que, para cualquier $v \in C_0^1(\Omega)$ se cumpliera

$$\int_{\Omega} g(x) v(x) dx = -\int_{\Omega} u(x) \partial_{x_i} v(x) dx,$$

entonces g sería igual a $\partial_{x_i} u$ (basta aplicar directamente el Teorema 1).

Clave 2. Dada u , la parte derecha de la igualdad define un operador lineal actuando sobre funciones $v \in C_0^1(\Omega)$

$$L_u[v] := -\int_{\Omega} u(x) \partial_{x_i} v(x) dx$$

que por lo tanto es igual al operador (el de la izquierda en (28)) que se puede construir usando la derivada de u , pero que queda bien definido sin usar la derivada; es más, L_u se puede definir **incluso sin que u sea derivable** pidiendo tan solo que u sea integrable sobre compactos de Ω ($u \in L_{loc}^1(\Omega)$).

Con todo ello, se puede hacer la siguiente definición operacional de la derivada de una función.

Definición 1 Dada una función $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, es decir, integrable sobre compactos de Ω , definimos su **derivada generalizada o distribucional** respecto de x_i (y la seguiremos notando por $\partial_{x_i} u$ o $\frac{\partial u}{\partial x_i}$), como el operador L_u

anterior actuando sobre funciones $v \in C_0^\infty(\Omega)$. La notación usual es:

$$\langle \partial_{x_i} u, v \rangle := -\langle u, \partial_{x_i} v \rangle := -\int_{\Omega} u(x) \partial_{x_i} v(x) dx.$$

de modo que los ángulos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sirvan tanto para notar la acción del operador lineal (izquierda) como para la “integral del producto” (derecha), que no deja de ser un operador lineal.

Nota 22 Esta identificación entre los ángulos $\langle \cdot, \cdot \rangle$, también usados para los productos escalares en los espacios de Hilbert, y la “integral del producto”, no es una elección caprichosa y aunque aparentemente puede generar confusión, en realidad es muy natural ya que, como veremos en la siguiente sección sobre topologías duales y teoremas de representación, estos tres conceptos representan la misma acción.

Esta misma definición sirve para construir la derivada de una medida o incluso de un operador, pero no buscamos esa generalidad en estas notas. Lo que sí queremos dejar claro es que con este concepto **se puede derivar casi cualquier cosa**. En particular, vamos a derivar funciones con saltos, que aparecen muy habitualmente como *soluciones* de las ecuaciones que manejamos.

Este concepto es muy útil para el análisis matemático, pero demasiado general e inmanejable (no se puede, por ejemplo, simular en un ordenador). Por ello nos interesan aquellas funciones cuyas derivadas (generalizadas) sean “no tan generales”, es decir, cuyo operador asociado venga dado por alguna función, medida u objeto conocido y manejable. Concretamente haremos la siguiente definición, que en muchos textos se equipara a la anterior:

Definición 2 Una función $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, diremos que **tiene derivada débil** respecto de x_i , cuando existe una cierta función $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} g(x) v(x) dx = -\int_{\Omega} u(x) \partial_{x_i} v(x) dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

es decir, cuando su derivada generalizada respecto de x_i (que siempre existe) pueda escribirse como el operador lineal asociado a g ,

$$\langle \partial_{x_i} u, v \rangle = \langle g, v \rangle := \int_{\Omega} g(x) v(x) dx.$$

Notamos como los ángulos y la integral del producto vuelven a confundirse de forma natural. En este caso simplemente escribimos

$$\partial_{x_i} u = g \text{ en sentido débil,}$$

o decimos que “su derivada débil es la función g ”.

Nota 23 Hemos de remarcar desde ya que la derivada clásica y esta nueva derivada **no tienen por qué coincidir necesariamente**. Concretamente:

- Si $u \in C^1(\bar{\Omega})$ entonces **[sí]** tiene derivada débil y coincide (c.p.d.) con la clásica (gracias a la fórmula de Green y el Teorema 1).
- Si u tiene derivada débil (es decir, su derivada generalizada es una función) y además $u \in C^1$ en todos (o casi todos) los puntos de Ω , entonces ambas derivadas **[sí]** coinciden c.p.d.
- Aunque $u \in C^1(\Omega)$ (tiene derivada clásica en Ω), **es posible que [no] coincida** con su derivada generalizada, que siempre existe. En este caso, no tendrá derivada débil.

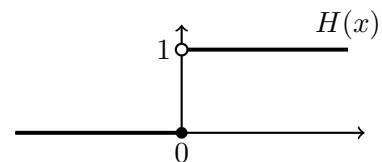
Por lo tanto, **la derivada clásica** (cuando existe) es siempre la única **candidata a derivada débil**, pero no tiene por qué serlo. El ejemplo 29 siguiente describe el tercero de estos casos, ya que la derivada clásica es 0 en todos los puntos salvo uno en que no es derivable (Ω no es conexo), pero la derivada generalizada no es la función cero, sino un operador de evaluación llamado Delta de Dirac. Para encontrar un ejemplo con Ω conexo hemos de irnos, al menos, a dos dimensiones. Por otro lado, en el ejemplo 30, veremos un caso en que la derivada clásica existe en todos los puntos salvo uno, pero como sí tiene derivada débil, estas coinciden.

Ejemplo 29 Función Heaviside y Delta de Dirac.

Vamos a calcular la derivada de una función con un salto; concretamente de la función de Heaviside, dada por

$$H(x) := \max\{0, x/|x|\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En $x = 0$ su valor cambia según los textos, pero aquí es irrelevante pues, como función de $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ solo está definida c.p.d.



Para calcular su derivada (generalizada) usamos la definición: para cada $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, calculamos

$$\begin{aligned} \langle H', v \rangle &= -\int_{\mathbb{R}} H(x) v'(x) dx = -\int_0^\infty v'(x) dx \\ &= -\left[v(x) \right]_0^\infty = -v(\infty) + v(0) = v(0), \end{aligned}$$

es decir, el operador “evaluar en $x = 0$ ”. Este operador que, al actuar sobre una función, devuelve su valor en cero es conocido como Delta de Dirac y se nota como, δ_0 . Por lo tanto, el cálculo anterior se lee como

$$\langle H', v \rangle = \langle \delta_0, v \rangle, \quad \forall v$$

y por lo tanto, diremos simplemente $H' = \delta_0$ en sentido generalizado o distribucional. En este caso (lo dejamos como ejercicio, por reducción al absurdo) se puede verificar que no hay ninguna función g asociada a este operador, es decir, no hay derivada débil puesto que la derivada distribucional no está asociada a función alguna.

6.1.1. Espacios de Sobolev

Definición 3 (Espacios de Sobolev) Dado un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, un natural $m \in \mathbb{N}$ y un índice $p \in [1, \infty]$, se definen los espacios de Sobolev como:

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N \right\},$$

es decir, funciones de $L^p(\Omega)$ cuyas derivadas de cualquier orden inferior o igual a m están también en $L^p(\Omega)$.

Estos espacios vectoriales, dotados de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_p^p + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} \right\|_p^p \right)^{1/p},$$

se convierten en espacios de Banach y poseen múltiples propiedades que se escapan del interés de estos apuntes (véase [2] para profundizar). En especial, cuando $p = 2$, lo notaremos $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ y se trata de un espacio de Hilbert. En particular, resaltamos el espacio $H^1(\Omega)$, que queda dado por

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\},$$

con el producto escalar $\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx$, donde observamos de nuevo la integral del producto (véase

la Nota 22) que, en este caso, afecta tanto a las funciones como a sus derivadas.

Más en particular, es útil considerar los espacios

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} \quad y \quad H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)},$$

que, *grosso modo*, son las funciones de los Sobolev correspondientes cuyo “valor” en la frontera de Ω es cero.

Nota 24 Notamos que, en principio, no tiene sentido hablar del valor de una función que solo está definida c.p.d. en un conjunto como $\partial\Omega$, que es de medida nula. Lo que ocurre es que, en realidad, las funciones de los Sobolev tienen muchas más propiedades y, en particular, es posible definir su “valor” en $\partial\Omega$, que se llamará **traza de u** , para cuya construcción y comprensión referimos de nuevo a [2].

Ejemplo 30 Vamos a calcular el gradiente de la función $w(x, y) = |(x, y)| - 1 = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 1$ (es decir, sus dos derivadas parciales) en la bola unidad B de \mathbb{R}^2 , y vamos a ver que está en $W_0^{1,p}(B)$ para todo p . Primero notamos que no es $C^1(\bar{B})$ porque no es derivable en cero, aunque sí en todos los demás puntos, por lo que usamos la definición; tomamos una función $\phi \in C_0^\infty(B)$ y calculamos su derivada parcial respecto de x (la única “dificultad” es parametrizar la circunferencia).

$$\begin{aligned} \langle \partial_x w, \phi \rangle &:= - \int_B w(x, y) \partial_x \phi(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \partial_x \phi(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \overbrace{(1 - \sqrt{x^2 + y^2})}^u \overbrace{\partial_x \phi(x, y)}^{dv} dx + \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \overbrace{(1 - \sqrt{x^2 + y^2})}^u \overbrace{\partial_x \phi(x, y)}^{dv} dx \right) dy \stackrel{\text{partes}}{=} \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ \overbrace{(1 - \sqrt{y^2}) \phi(0, y)}^{\text{cancela con...}} + \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{x \phi(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx - \overbrace{(1 - \sqrt{y^2}) \phi(0, y)}^{\text{...este otro}} + \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x \phi(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \right\} dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x \phi(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \right) dy = \int_B \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \phi(x, y) dx dy = \left\langle \frac{x}{|(x, y)|}, \phi \right\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera derivada débil respecto de x es:

$$\partial_x w(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

y para $\partial_y w$ procedemos análogamente, obteniendo:

$$\nabla w(x, y) = (\partial_x w, \partial_y w) = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

Para concluir observamos tres cosas:

- $w \in C(\bar{B})$, por lo que está en todos los $L^p(B)$.
- En $\partial B = \mathbb{S}^1$, obviamente w vale $1 - 1 = \text{cero}$.
- El gradiente (débil) cumple $|\nabla w(x, y)| = \frac{|(x, y)|_2}{|(x, y)|_2} = 1$, por lo que también está en todos los $L^p(B)$.

Por lo tanto $w \in W_0^{1,p}(B)$ para todo p .

Nota 25 (Derivada de $|x|^\alpha$). Nótese que la única dificultad técnica está en parametrizar correctamente la bola, y esto es análogo en dimensiones superiores, por lo que es fácil concluir que la derivada débil de $w(x) = |x|^\alpha$ en la bola $B \subset \mathbb{R}^N$ es

$$\nabla w(x) = \alpha x |x|^{\alpha-2},$$

es decir, su derivada débil coincide c.p.d. con su derivada clásica allí donde existe, que es para x distinta de 0. Uniendo esto y el ejemplo 31 siguiente, es fácil determinar en qué espacios de Sobolev está cada potencia.

Ejemplo 31 ¿En qué L^p está $1/|x|^\alpha$? Veamos que, si $B_R \subset \mathbb{R}^N$ es la bola de centro 0 y radio R , se verifica:

$$\begin{cases} \frac{1}{|x|^\alpha} \in L^p(B_R) & \Leftrightarrow \alpha p < N, \\ \frac{1}{|x|^\alpha} \in L^q(\mathbb{R}^N \setminus B_R) & \Leftrightarrow \alpha q > N. \end{cases}$$

Haciendo el cambio a polares en dominios circulares de \mathbb{R}^N :

$$\begin{bmatrix} \rho := |x|, \quad x = \rho \theta & \text{con} \quad \rho \in [a, b] \\ dx = \rho^{N-1} d\rho d\theta & \quad y \quad \theta \in \mathbb{S}^{N-1}, \end{bmatrix}$$

la primera integral queda:

$$\int_{B_R} \frac{dx}{|x|^{\alpha p}} = \int_0^R \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \rho^{N-1-\alpha p} d\theta d\rho = \frac{|\mathbb{S}^{N-1}|}{N-\alpha p} R^{N-\alpha p},$$

siempre que $N - \alpha p > 0$ para que la integral impropia sea finita. La otra es análoga:

$$\int_{B_R^c} \frac{dx}{|x|^{\alpha q}} = \int_R^\infty \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \rho^{N-1-\alpha q} d\theta d\rho = \frac{|\mathbb{S}^{N-1}|}{\alpha q - N} R^{N-\alpha q},$$

necesitando ahora que $N - \alpha q < 0$ para la finitud. Nótese que, además, hemos calculado las respectivas normas.

Tras este concepto existe una amplia literatura que no podemos abarcar en estas notas. Indicamos sólo algunas pinceladas de lo que se genera tras esta definición.

6.2. Repaso de análisis Funcional: Espacios de Hilbert, Teorema de Representación de Riesz, Desigualdad de Poincaré

Teorema 25 (Teorema fundamental del cálculo)

Dada una función $u \in L^1_{loc}(a, b)$ y $c \in (a, b)$, definimos la primitiva de f que se anula en c como:

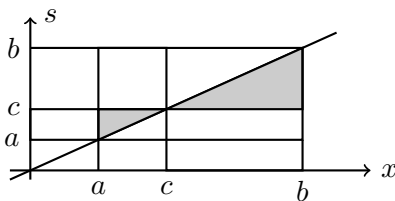
$$F(x) = \int_c^x f(s) ds.$$

Entonces, F es continua, tiene derivada débil en (a, b) y es igual a f c.p.d.

Prueba. Primero, aplicamos la definición de derivada generalizada:

$$\langle F', \phi \rangle = - \int_a^b \left(\int_c^x f(s) ds \right) \phi'(x) dx = - \int_a^b \int_c^x f(s) \phi'(x) ds dx,$$

lo que puede ser escrito como una integral sobre el siguiente conjunto, es decir (ojo con los signos)



$$\langle F', \phi \rangle = \int_a^c \int_x^c f(s) \phi'(x) ds dx - \int_c^b \int_c^x f(s) \phi'(x) ds dx.$$

Aplicando entonces Fubini, obtenemos

$$\langle F', \phi \rangle = \int_a^c f(s) \int_a^s \phi'(x) dx ds - \int_c^b f(s) \int_s^b \phi'(x) dx ds,$$

y, usando la regla de Barrow en la integral interior y, teniendo en cuenta que $\phi(a) = \phi(b) = 0$, queda

$$\langle F', \phi \rangle = \int_a^c f(s) \phi(s) ds - \int_c^b f(s) (-\phi(s)) ds = \langle f, \phi \rangle,$$

lo que concluye la prueba. \square

Teorema 26 (Desigualdad de Poincaré) Dado un dominio acotado Ω y $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces existe una constante C dependiente solo de Ω , tal que

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \quad (29)$$

Prueba (en dimensión 1). Primero lo probamos para funciones regulares. Definimos el operador siguiente $\mathcal{F}[y] := \int_{x_0}^{x_1} (y'(x))^2 dx$, sobre el dominio

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ y \in C_0^1(x_0, x_1) : \int_{x_0}^{x_1} y^2(x) dx = 1 \right\}.$$

y, según el Teorema 16 con $P = S = 1$ y $Q = 0$, \mathcal{F} alcanza su mínimo en la primera función propia del problema de Sturm Liouville asociado (análogo a (24)):

$$y'' + \lambda y = 0, \quad \text{con } y(x_0) = y(x_1) = 0.$$

cuyos valores propios son $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{x_1 - x_0} \right)^2$. Además, el valor mínimo es precisamente $\mathcal{F}[y_1] = \lambda_1$. Entonces, dada $u \in C_0^1(x_0, x_1)$ no nula, notamos que $y = u/\|u\|_{L^2} \in \mathcal{D}_1$, por lo que

$$\lambda_1 \leq \mathcal{F}[y] = \frac{\int_{x_0}^{x_1} (u'(x))^2 dx}{\int_{x_0}^{x_1} u(x)^2 dx},$$

que es (29) con la constante óptima $C = (x_1 - x_0)^2 / \pi^2$.

Para probar la desigualdad sobre funciones $u \in H_0^1$, usamos un **argumento típico de densidad**, esto es, como $H_0^1 := \overline{C_0^\infty}^{H^1}$, dada cualquier $u \in H_0^1$ podemos tomar $u_n \in C_0^\infty$ tales que $\|u_n - u\|_{H^1}^2 \rightarrow 0$. Si concretamos esta convergencia, obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_1} (u'_n - u')^2 dx + \int_{x_0}^{x_1} (u_n - u)^2 dx \rightarrow 0,$$

y, en particular,

$$\int_{x_0}^{x_1} (u'_n)^2 dx \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} (u')^2 dx, \quad \int_{x_0}^{x_1} u_n^2 dx \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} u^2 dx.$$

Como ya hemos probado (29) para u_n , basta tomar los dos límites anteriores en dicha desigualdad para concluir. \square

Corolario 1 (Norma de H_0^1) Cuando Ω es acotado, el operador

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

constituye una norma en $H_0^1(\Omega) \leq H^1(\Omega)$ equivalente a la heredada de $H^1(\Omega)$.

A partir de la desigualdad de Poincaré, es inmediato observar que

$$\|u\|^2 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1+C)\|u\|^2,$$

lo que esencialmente concluye la prueba. \square

Teorema 27 (Riesz para Hilbert) Sea H un espacio de Hilbert con su producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Entonces, toda aplicación lineal y continua sobre H se puede ver como un elemento de H , es decir, dada cualquier aplicación lineal y continua $\tilde{f} : H \rightarrow \mathbb{R}$, existe un único $f \in H$ tal que, para todo $v \in H$,

$$\tilde{f}(v) = \langle f, v \rangle_H, \quad y \quad \|\tilde{f}\|_{H'} = \|f\|_H.$$

Otra forma de ver este resultado es decir que la aplicación $T : H \rightarrow H'$, $u \mapsto Tu$ definida como

$$Tu : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad Tu(v) := \langle u, v \rangle_H,$$

es una isometría de espacios vectoriales topológicos, o, lo que es lo mismo, el dual de un Hilbert “es” él mismo.

Teorema 28 (Riesz para L^p) Sea $1 \leq p < \infty$ y p' el conjugado de p , esto es,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad (\text{siendo } 1' := \infty).$$

Entonces toda aplicación $G : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua se puede ver como una función de $L^{p'}(\Omega)$, es decir, existe un único $g \in L^{p'}(\Omega)$ tal que, para todo $f \in L^p(\Omega)$,

$$G(f) = \langle g, f \rangle := \int_{\Omega} g(x)f(x)dx, \quad y \quad \|G\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^{p'}}.$$

Nota 26 Temas relacionados: Desigualdad de Hölder, espacios duales, espacios reflexivos, topologías débiles, Teorema de Banach–Alaouglu–Bourbaki... que serían contenidos propios de otras materias.

Teorema 29 (Propiedades de los Hilbert)

- Si $A \subseteq H$ cualquiera, entonces $A^{\perp\perp} = \overline{\langle A \rangle}$,
- Un subespacio $V \leq H$ es denso $\Leftrightarrow V^{\perp} = \{0\}$.

6.3. El Teorema de Lax–Milgram

Vamos a motivar el Teorema desde el ejemplo (21) de la Membrana desarrollado en la sección anterior. Partimos del funcional

$$E[u] = \int_{\Omega} \left(\frac{\sigma}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{2} u^2 - f(x)u \right) dx,$$

pero ahora definido ahora sobre funciones $u \in H_0^1(\Omega)$. Recordamos que la ecuación asociada al mínimo regular es:

$$-\sigma \Delta_x u = f - \alpha u.$$

Hacemos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} (\sigma \nabla u \cdot \nabla v + \alpha u v) dx, \\ \tilde{f}(v) &:= \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \\ J(u) &:= \frac{1}{2}a(u, u) - \tilde{f}(u), \end{aligned}$$

donde identificamos que a es una forma bilineal simétrica sobre $H_0^1(\Omega)$ y \tilde{f} es una forma lineal en el mismo espacio y, por último J no es más que E .

Recordamos el proceso de cálculo de la ecuación de Euler–Lagrange, si \bar{u} es el mínimo de E (o J), entonces definimos la función real de variable real $g(s) := E[\bar{u} + s v]$ donde v es una función cualquiera en el mismo espacio $H_0^1(\Omega)$ y sabemos que g tiene un mínimo en $s = 0$, y entonces $g'(0) = 0$, obteniendo, para cada v :

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \bar{u} \cdot \nabla v + \alpha \bar{u} v - f v = 0,$$

que es lo mismo que decir

$$a(\bar{u}, v) - \tilde{f}(v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

Si pudiésemos integrar por partes (para lo que ya sabemos que basta que $u \in H^2(\Omega)$), y usando el Teorema 1 obtendríamos la ecuación diferencial anterior, pero queremos pararnos en este punto.

Reteniendo estos operadores en la retina, vamos a enunciar en un marco abstracto el Teorema de Lax–Milgram. Partimos de un espacio de Hilbert H real cuya norma y producto escalar denotamos como $\|\cdot\|_H$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ respectivamente. Tomamos entonces una forma bilineal y continua a definida sobre $H \times H$ y una aplicación lineal y continua \tilde{f} definida sobre H . Asimismo consideramos el operador cuadrático $J(u) := \frac{1}{2}a(u, u) - \tilde{f}(u)$ y nos planteamos los problemas siguientes

$$\begin{cases} \text{encontrar } \bar{u} \in H, \\ \text{tal que } a(\bar{u}, v) = \tilde{f}(v), \quad \forall v \in H. \end{cases} \quad (30.PD)$$

$$\begin{cases} \text{encontrar } \bar{u} \in H, \\ \text{tal que } J(\bar{u}) \leq J(v), \quad \forall v \in H. \end{cases} \quad (30.PV)$$

Ya estamos en condiciones de enunciar y entender el teorema de Lax–Milgram.

Teorema 30 (Lax–Milgram) Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y continua.

Parte 1: Si a es coerciva, esto es,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H,$$

entonces, para cada $\tilde{f} : H \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua, el problema (30.PD) tiene una única solución $u_{\tilde{f}}$ que cumple

$$\|u_{\tilde{f}}\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|\tilde{f}\|_{H'},$$

es decir, la aplicación lineal que a cada \tilde{f} le hace corresponder la única solución $u_{\tilde{f}}$, es continua.

Parte 2: Si, además, a es simétrica, entonces $u_{\tilde{f}}$ es la única solución de (30.PV), o sea, el mínimo de J en H .

Prueba. **(Parte 1)**. Primero hacemos la siguiente construcción. Dado $u \in H$, podemos definir una aplicación lineal sobre H como

$$a_u : H \rightarrow H, \quad a_u(v) := a(u, v).$$

Usando entonces el Teorema 27 de representación de Riesz, sabemos que existe un único elemento de H , que llamaremos Au , que representa a dicha aplicación lineal, es decir,

$$\langle Au, v \rangle = a_u(v) = a(u, v), \quad \forall v \in H.$$

Con ello hemos construido $A : H \rightarrow H$ lineal y continua, puesto que

$$\|Au\|_H \stackrel{\text{Teo. 27}}{=} \|a_u\|_{H'} = \sup \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_H} \leq C\|u\|,$$

donde C proviene de la continuidad de a , ya que: $|a(u, v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H$. Análogamente, para la aplicación lineal f , existe un único $\tilde{f} \in H$ tal que

$$\tilde{f}(v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Por lo tanto el problema débil (30.PD) equivale a

$$\text{encontrar } \bar{u} \in H, \text{ tal que } Au = f,$$

y, dado que $\tilde{f} \in H'$ es arbitraria, $f \in H$ también lo es, por lo que lo que hemos de probar es la sobreyectividad de A para tener existencia, e inyectividad para tener unicidad. La segunda nos la proporciona la coercividad como sigue:

$$\alpha\|v\|_H^2 \leq a(v, v) = \langle Av, v \rangle \leq \|Av\|_H\|v\|_H,$$

simplificando da

$$\|v\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|Av\|_H, \quad (31)$$

y, por lo tanto, inyectividad. Para la sobreyectividad usaremos el Teorema 29 sobre propiedades de los Hilbert. Concretamente, verificaremos que el conjunto imagen $A(H)$ es denso comprobando que su ortogonal es $\{0\}$. Luego comprobaremos que $A(H)$ es cerrado, y estos dos resultados combinados producirán la sobreyectividad de A .

Veamos primero que si $v_0 \in A(H)^\perp \Rightarrow v_0 = 0$.

$$v_0 \in A(H)^\perp \Leftrightarrow \langle Av, v_0 \rangle = 0 \quad \forall v \Leftrightarrow a(v, v_0) = 0 \quad \forall v,$$

de donde, tomando $v = v_0$ y usando la cohercividad, obtenemos

$$0 = |a(v_0, v_0)| \geq \alpha\|v_0\|_H^2 \Rightarrow v_0 = 0.$$

Veamos ahora que $A(H)$ es cerrado. Ya sabemos que A es continua e inyectiva y, usando (31), que su inversa es continua. Por lo tanto H (completo) y $A(H)$ son isomorfos, y como $A(H)$ es subespacio de un Hilbert, es cerrado (véase por sucesiones).

Por lo tanto, llamando $u_{\tilde{f}} := A^{-1}(f)$ tenemos la existencia y unicidad de (30.PD). Para la propiedad adicional, basta notar que:

$$\|u_{\tilde{f}}\|_H = \|A^{-1}(f)\|_H \stackrel{(31)}{\leq} \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H'} \stackrel{\text{Riesz}}{=} \frac{1}{\alpha}\|\tilde{f}\|_{H'}.$$

(Parte 2). Supongamos ahora que a es simétrica, y probemos la segunda parte del Teorema 30. Usando la simetría, deducimos

$$J(u + v) = J(u) + \left(a(u, v) - \tilde{f}(v)\right) + \frac{1}{2}a(v, v).$$

Tomando $u = u_{\tilde{f}}$, la solución de (30.PD), tenemos

$$J(u_{\tilde{f}} + v) = J(u_{\tilde{f}}) + \frac{1}{2}a(v, v), \quad \forall v \in H,$$

donde, usando la coercividad, obtenemos:

$$J(u_{\tilde{f}} + v) = J(u_{\tilde{f}}) + \frac{\alpha}{2}\|v\|_H^2 > J(u_{\tilde{f}}), \quad \forall 0 \neq v \in H,$$

por lo que $u_{\tilde{f}}$ es el único mínimo de J . \square

Nota 27 En realidad, en el caso en que a es simétrica y coerciva, lo que se tiene es que $a(\cdot, \cdot)$ define un producto escalar equivalente al del espacio de Hilbert, ya que:

$$\alpha\|v\|_H^2 \stackrel{\text{coerciva}}{\leq} a(v, v) \stackrel{\text{continua}}{\leq} C\|v\|_H^2.$$

Con esta lectura, el problema (30.PD) es exactamente lo que resuelve el Teorema 27 de representación de Hilbert usando el producto escalar asociado a a .

6.3.1. Formulación débil de ecuaciones

Retomamos otra vez el ejemplo (21) de la membrana para entender el uso del Teorema 30 de Lax–Milgram. Ahora partimos de la ecuación,

$$-\sigma\Delta_x u = f - \alpha u, \quad (32)$$

y nos planteamos buscar funciones u , no tan regulares, que las cumplan **en sentido distribucional**, es decir, que las derivadas de u que aparecen en la ecuación se cumplan en el sentido de la definición 1. Entonces se trata de buscar $u \in L_{loc}^1$ cumpliendo

$$\int_{\Omega} u(\sigma\Delta_x v - \alpha v + f)v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty. \quad (33)$$

Notamos que, formalmente, esta expresión se obtiene multiplicando la ecuación por v e integrando por partes.

Pero de algún modo sabemos que la ecuación está asociada al problema de minimizar el funcional de energía

$$E[u] \leq E[v] = \int_{\Omega} \left(\frac{\sigma}{2} |\nabla v|^2 + \frac{\alpha}{2} v^2 - f(x)v \right) dx, \quad (34)$$

que tiene sentido ser definido en $H_0^1(\Omega)$, ya que aparecen tanto las funciones como sus derivadas al cuadrado e integradas, y que han de ser cero en $\partial\Omega$. Por lo tanto, si buscamos $u \in H_0^1(\Omega)$, (33) puede quedar como

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \bar{u} \cdot \nabla v + \alpha \bar{u} v - f v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (35)$$

que es de nuevo el paso intermedio que dábamos al calcular la ecuación de Euler–Lagrange asociada a buscar el mínimo de E . Ahora bien, podemos pedir esta igualdad para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Definición 4 Respecto de la ecuación (32), diremos que admite solución

- clásica, si $u \in C^2$ cumple (32),
- distribucional, si $u \in L^1_{loc}$ cumple (33),
- variacional, si $u \in H^1_0$ cumple (34),
- débil, si $u \in H^1_0$ cumple (35).

Pues bien, con las definiciones anteriores:

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} (\sigma \nabla u \cdot \nabla v + \alpha u v) dx, \\ \tilde{f}(v) &:= \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \\ J(u) &:= \frac{1}{2} a(u, u) - \tilde{f}(u), \end{aligned}$$

y dado que se verifica tanto la propiedad de simetría como la coercividad:

$$a(v, v) \geq \min\{\alpha, \sigma\} \|u\|_{H^1}^2,$$

el Teorema 30 de Lax–Milgram dice que la ecuación (32) admite una única solución débil, y que coincide con el mínimo de J (es solución variacional).

Veamos un último ejemplo de aplicación, usando la desigualdad de Poincaré.

Ejemplo 32 Veamos que la ecuación

$$-\Delta_x u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

posee una única solución débil (y variacional) u en el Sobolev $H^1_0(\Omega)$. Para ello, definimos los siguientes operadores sobre $H = H^1_0(\Omega)$:

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \\ \tilde{f}(v) &:= \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Para aplicar el teorema 30 de Lax–Milgram, primero notamos que, claramente, a es bilineal, continua y simétrica y que f es lineal y continua. Además, como

$$\|\tilde{f}\| := \sup_{\|v\|_H \leq 1} \left| \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right| \leq \sup_{\|v\|_H \leq 1} \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

y claramente $\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_H$, entonces

$$\|\tilde{f}\| \leq \|f\|_{L^2}.$$

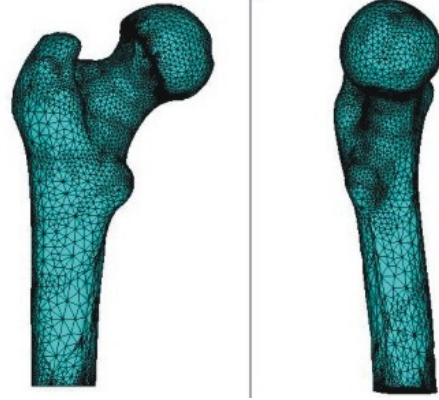
Sólo nos resta la coercividad de a , que es consecuencia directa de la desigualdad de Poincaré (Teorema 26 o Corolario 1 que lo sigue); veámoslo.

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1}^2 &= \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &= (1 + C) a(u, u), \end{aligned}$$

por lo que a es coerciva con constante $\alpha = 1/(1+C)$ siendo C la constante de Poincaré asociada a Ω .

6.3.2. Elementos finitos

INTRODUCCIÓN



Referencias

- [1] H.C. Berg, *Random Walks in Biology*, (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983).
- [2] H. Brézis, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, (Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984).
- [3] L. Edelstein-Keshet *Mathematical Models in Biology*, Random House, New York, 1988.
- [4] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, (Mir, Moscú, 1969).
- [5] L.C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations. Version 1.2.* <http://math.berkeley.edu/~evans/SDE.course.pdf>
- [6] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, (AMS, 2002).
- [7] G. Galiano, *Introducción al Cálculo Variacional*, (2003). <https://www.uniovi.es/galiano/>
- [8] G. Grimmet, D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, (Oxford University Press, Oxford, 2001).
- [9] P. Grindrod, *The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations. Patterns and Waves*, (Oxford University Press, Walton Street, Oxford OX2 6DP, 1996)
- [10] M.A. Herrero, *Reaction-diffusion Systems: a Mathematical Biology Approach. Cancer Modelling and Simulation*. (L. Preziosi, Chapman and Hall, 2003), 367–420.
- [11] P.G. Hoel, S.C. Port, C.J. Stone, *Introduction to Stochastic Processes*. (Houghton Mifflin Co., Boston, 1972).
- [12] F. John, *Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Volume 1, (Springer-Verlag New York, 1971).
- [13] J. Keener, J. Sneyd, *Mathematical Physiology. Systems Physiology, 2nd edition*. (Springer Science+Business Media, New York, 2009).
- [14] T. Miura and P.K. Maini, *Periodic pattern formation in reaction-diffusion systems: An introduction for numerical simulation*, (Anatomical Science International 79 (2004), 112–123.
- [15] J. D. Murray, *Mathematical Biology I. An introduction, 3rd Edition*. (Springer Verlag, New York, 2002).
- [16] J.D. Murray, *Mathematical Biology II. Spatial Models and Biomedical Applications, 3rd Edition*. (Springer Verlag, New York, 2002).
- [17] A.M. Turing, *The Chemical Basis of Morphogenesis*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, Vol. 237, No. 641. (Aug. 14, 1952), pp. 37-72.
- [18] E. Zuazua, *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. <http://exordio.qfb.umich.mx/archivos%20pdf%20de%20trabajo%20umsnh/aphilosofia/2007/ecudepa.pdf>