Modelos Matemáticos II

Antonio Gámiz Delgado
Universidad de Granada

24 de febrero de 2020

1. Cálculo de variaciones

1.1. Herramientas previas y repaso

Definición 1. Sea $f : X \longrightarrow Y$ con X, Y espacios normados. Se dice que f es **diferenciable** en un punto $a \in \mathring{A}$, si existe una aplicación lineal continua $T : X \longrightarrow Y$ verifiando:

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|}$$

T se denota por $Df(a)$ y se llama *diferencial de f*.

Definición 2. Dado I intervalo, se llama *espacio de funciones test* al conjunto:

$$\mathcal{D} = \{\phi \in C^\infty(a,b) : \ \exists J \subset (a,b) \text{ compacto: } \phi(x) = 0 \text{ si } x \in J\}$$

Lema 3. *Dado $x_0 \in (a,b)$ y $\varepsilon > 0$ tal que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a,b)$, existe $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$ tal que $\phi(x) > 0$ si $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ y $\phi(x) = 0$ en otro caso.*

Teorema 4. *Sea $f \in C[a,b]$ tal que*

$$\int f(x)\phi(x)dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Entonces $f(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b]$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in (a,b)$ y supongamos por reducción al absurdo que $f(\bar{x}) \neq 0$. Podemos suponer $f(\bar{x}) > 0$. Aplicando el teorema de conservación del signo, obtenemos $\varepsilon > 0$ $f(x) > 0$ si $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$.

Por el lema 3, existe una función test ϕ tal que $\phi(x) > 0$ si $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ y 0 en otro caso. Luego:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\phi(x)dx = \int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon} f(x)\phi(x)dx > 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$$

Como $\bar{x}$ era arbitrario, tenemos que $f(\bar{x}) = 0 \ \forall \bar{x} \in (a,b)$, y por la continuidad de f podemos extenderlo a los extremos también, es decir, $f(a) = f(b) = 0$.

□

1.2. Problema general del cálculo de variaciones

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, definamos $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x, y, p) \longmapsto F(x, y, p)$. Supongamos que $F \in C^1(\Omega)$ respecto de las dos últimas variables, es decir, existen $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial p}$, continuas.

Usando la función anterior, podemos definir el siguiente funcional:

$$L(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \tag{1}$$

Nuestro objetivo en este apartado será encontrar *extremales* de ese funcional, es decir, máximos o mínimos.

Notación 5. Normalmente, a las derivadas parciales las denotaremos por:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x$$

Los *extremales* los buscaremos entre los elementos de un conjunto de funciones cumpliendo ciertas propiedades:

Definición 6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional en las condiciones anteriores. Definimos entonces el siguiente conjunto:

$$D = \{y \in C(a, b) \cap C^1[a, b] : \text{ se cumplen (a),(b) y (c)}\} \tag{2}$$

(a) $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in (a, b)$

(b) $y(a) = b$ e $y(a) = b$ (*Condición de contorno*)

(c) $\displaystyle\int_a^x F(x, y(x), y'(x))dx < +\infty \quad \forall x \in (a, b)$

El siguiente teorema nos proporcionará una condición sobre las derivadas parciales de F, que nos ayudará a buscar *extremales*. Para su demostración necesitaremos el siguiente lema:

Lema 7. *Sea* $\{s_n\} \longrightarrow 0$ *una sucesión de números reales, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $y \in D$, *entonces* $y + s_n\phi \in D \quad \forall n \geq n_0$.

Lo que nos asegura este lema es que podamos sumar una perturbación *pequeña* a nuestro extremal sin *salirnos* de D.

Teorema 8. *Si* $\bar{y} \in D$ *es un extremal, entonces:*

$$\int_a^b F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\phi(x)dx + \int_a^b F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\phi'(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b)$$

A $\bar{y}$ *se le suele llamar* ***función crítica***.

Demostración. Sean $\bar{y} \in D$ extremal y $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$. Definimos el funcional $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(s) = L(\bar{y} + s\phi)$.

Por el lema anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que g está bien definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Ahora queremos derivar g respecto de s, pero necesitamos que esté definida en un intervalo cerrado (por el teorema de derivación). Para ello, tomamos un intervalo cerrado J de forma que soporte$(\phi) \subset J$. **(AQUI TENGO DUDAS MIRAR NOTAS CLASE)**

Derivamos g respecto de s:

$$g'(s) = \left(\int_{[a,b]\setminus J} F(x, \bar{y}, \bar{y}')dx + \int_J F(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))dx \right)' =$$

$$= \int_J \left(F_y(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi(x) + F_p(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi'(x)\right) dx =$$

$$\int_{[a,b]} \left(F_y(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi(x) + F_p(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi'(x)\right) dx$$

Si evaluamos ahora g' en 0, tenemos:

$$g'(0) = \int_a^b \left(F_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\phi + F_p(x, \bar{y}, \bar{y}')\phi'\right) dx = 0 \quad (\bar{y} \text{ extremal})$$

$\square$

El teorema anterior da pie a la siguiente definición:

Definición 9. Sea $\Omega \subset X$ un abierto de un espacio de Banach, X. Sean $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \in \Omega$, $\phi \in X$, se define la *derivada de Gateaux* como:

$$Dg(L(\bar{y}))(\phi) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\bar{y} + s\phi)$$

1.2.1. Ecuación de Euler

Usando el teorema anterior vamos a llegar a una ecuación diferencial de segundo orden que nos ayudará a resolver este problema. Supongamos que tenemos $y \in C^2$, función crítica y $F \in C^2(\Omega)$, definimos $Z(x) = F_p(x, y(x), y'(x)) \in C^1(x_0, x_1)$. Para continuar necesitamos un lema previo:

Lema 10. *Sea $Z \in C^1(x_0, x_1)$, entonces:*

$$\int_a^b Z(x)\phi'(x)dx = -\int_a^b Z'(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Este lema nos permite «intercambiar la derivada de sitio».

Usando ahora el Teorema 8 (podemos usarlo porque y es función crítica) y el lema anterior, tenemos:

$$0 = \int_a^b F_y(x, y, y')\phi(x)dx + \int_a^b F_p(x, y, y')\phi'(x)dx =$$

$$= \int_a^b F_y(x,y,y')\phi(x)dx + \int_a^b Z(x)\phi'(x)dx =$$

$$= \int_a^b F_y(x,y,y')\phi(x)dx - \int_a^b Z'(x)\phi(x)dx =$$

$$= \int_a^b \Big(F_y(x,y,y') - Z'(x)\Big)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Y usando ahora el Teorema 4 nos queda:

$$F_y(x,y,y') - Z'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Que denoteramos por:

$$\frac{d}{dx}F_p - F_y(x,y,y') = 0 \quad \textbf{(Ecuación de Euler)}$$

Las condiciones sobre F se pueden rebajar con el siguiente teorema:

Teorema 11. *Si $F \in C^1_{yp}$, $y' \in C^1$, función crítica, entonces:*

$$Z(x) = F_p(x, y(x), y'(x)) \in C^1$$

AHORA CREO QUE QUEREMOS RESOLVER LA ECUACION NO¿?¿?¿?

Lema 12. *Sea $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$, entonces:*

$$\phi \text{ admite primitiva } \Longleftrightarrow \int_a^b \phi(x)dx = 0$$

Lema 13. *Sea $f \in C(a,b)$ tal que $\int f\phi'(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b) \Longrightarrow f$ es constante.*