Ecuaciones lineales: teorema de existencia y unicidad

Dados un intervalo abierto $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, una función matricial $A : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ continua y una función vectorial $b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^d$ continua, consideramos la ecuación diferencial lineal:

$$(*) \qquad x' = A(t)x + b(t)$$

Teorema de existencia y unicidad de solución

Dados $t_0 \in (\alpha, \beta)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^d$, consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Entonces existe una única función $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^d$ de clase $\mathcal{C}^1$ que verifica:

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) \qquad \qquad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

y además $\varphi(t_0) = x_0$.

Ecuaciones lineales homogéneas: matriz fundamental

Si en la ecuación lineal suponemos que $b \equiv 0$:

$$(**) \qquad y' = A(t)y$$

podemos usar el teorema anterior y la linealidad de la ecuación para probar que el conjunto de soluciones de $(**)$ tiene la estructura de espacio vectorial de dimensión d.

Cada base del conjunto de soluciones de $(**)$ recibe el nombre de *sistema fundamental de soluciones*.

Si $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ es un sistema fundamental de soluciones de $(**)$ entonces la función matricial cuyas columnas son el sistema fundamenta de soluciones:

$$\Phi : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \ \Phi(t) := \big(\phi_1 | \cdots | \phi_d\big)$$

recibe el nombre de *matriz fundamental*.

Una única función $\Phi : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de clase $\mathcal{C}^1$ que verifica:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \qquad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

recibe el nombre de *matriz solución* de $(**)$.

Jacobi-Liouville

Si $\Phi : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ es matriz solución de $(**)$ y $t_0 \in (\alpha, \omega)$ entonces:

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \text{traza } A(s)\, ds} \qquad \forall t \in (\alpha, \beta).$$

Una matriz solución de $(**)$ que es regular recibe el nombre de *matriz fundamental* de $(**)$.

Una matriz fundamental que verifica $\Phi(t_0) = I$ (la matriz identidad) recibe el nombre de **matriz fundamental** principal en t_0.

Si $\Phi : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ es matriz fundamental de $(**)$ entonces

$$\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}$$

es matriz fundamental principal en t_0.

Conjunto de soluciones de la ecuación completa

El conjunto de soluciones de $(*)$ tiene la estructura de **espacio afín** y el espacio vectorial asociado es el conjunto de soluciones de $(**)$. Es decir: si φ es solución de $(*)$, y es solución de $(**)$ entonces

$$x : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^d, \; x(t) := \varphi(t) + y(t)$$

es solución de $(*)$.

Fórmula de variación de las constantes

Si $\Phi : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ es matriz fundamental de $(**)$ que es principal en t_0 entonces la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

es

$$x(t) = \Phi(t)[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds].$$

El caso de coeficientes constantes

Dada una EDO lineal homogénea con coeficientes constantes

$$(**) \qquad y' = Ay$$

la matriz fundamental principal en t_0 es $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$.

Para simplificar, supongamos que $t_0 = 0$.

Cálculo de la exponencial

¿Cómo se calcula $\Phi(t) = e^{At}$ cuando la matriz A es diagonalizable?

Cálculo de la exponencial

¿Cómo se calcula $\Phi(t) = e^{At}$ cuando la matriz A no es diagonalizable?

Estabilidad en el sentido de Liapunov

Sean $-\infty \leq \alpha \leq t_0 < +\infty$, $A : (\alpha, +\infty) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ continua y $b : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ continua. Se considera la ecuación diferencial lineal:

$$(*) \qquad x' = A(t)x + b(t)$$

Dada una solución $\varphi : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ de la ecuación $(*)$, diremos que es **estable** si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ es otra solución de $(*)$ y verifica

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$$

entonces

$$\|x(t) - \varphi(t)\| < \epsilon \qquad \forall t \geq t_0.$$

Estabilidad asintótica en el sentido de Liapunov

Dada una solución $\varphi : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ de la ecuación $(*)$, diremos que es un **atractor** si existe $\mu > 0$ tal que si $x : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ es otra solución de $(*)$ y verifica

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \mu$$

entonces

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0.$$

Dada una solución $\varphi : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ de la ecuación $(*)$, diremos que es **asintóticamente estable** si es estable y es un atractor.

Sean $-\infty \leq \alpha \leq t_0 < +\infty$, $A : (\alpha, +\infty) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ continua y $b : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}^d$ continua. Se considera la ecuación diferencial lineal:

$$(*) \qquad x' = A(t)x + b(t)$$

y su parte homogénea

$$(**) \qquad y' = A(t)y$$

Proposición 1

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Todas las soluciones de $(*)$ son estables.
2. Existe una solución de $(*)$ que es estable.
3. La solución trivial $y \equiv 0$ de $(**)$ es estable.
4. Todas las soluciones de $(**)$ son acotadas en $[t_0, +\infty)$.
5. La matriz fundamental de $(**)$ principal en t_0 es acotada en $[t_0, +\infty)$.

Proposición 2

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Todas las soluciones de $(*)$ son atractores.
2. Existe una solución de $(*)$ que es un atractor.
3. La solución trivial $y \equiv 0$ de $(**)$ es un atractor.
4. Todas las soluciones de $(**)$ convergen hacia el vector O cuando $t \to +\infty$.
5. La matriz fundamental de $(**)$ principal en t_0 converge hacia la matriz O cuando $t \to +\infty$.

Corolario

Los atractores de la ecuación $(*)$ son asintóticamente estables.

Definiciones

- Se dice que la ecuación $(*)$ es estable si todas sus soluciones son estables.
- Se dice que la ecuación $(*)$ es asintóticamente estable si todas sus soluciones son asintóticamente estables.

Estabilidad de ecuaciones lineales escalares

Sean $a,\ b : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ continuas. Se consideran la ecuación diferencial lineal escalar:

$$(*) \qquad x' = a(t)x + b(t)$$

y sea $t_0 \in (\alpha, +\infty)$.

La *matriz fundamental* principal en t_0 es $\Phi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$ y por tanto podemos caracterizar la estabilidad de $(*)$ controlando una primitiva del coeficiente $a(t)$.

Proposición 3

1. La ecuación $(*)$ es estable si y sólo si la función $a(t)$ tiene una primitiva acotada superiormente en $[t_0, +\infty)$.
2. La ecuación $(*)$ es asintóticamente estable si y sólo si la función $a(t)$ tiene una primitiva que converge hacia $-\infty$ cuando $t \to +\infty$.

Ejemplos

Clasifica las siguientes ecuaciones según sean asintóticamente estables, estables (no A.E.) o inestables:

1. $x' = 2x$
2. $x' = -6x + \operatorname{sen}(t)$
3. $x' = \cos(t)\, x + e^{-t}$
4. $x' = -2tx + e^{t^2}$
5. $x' = e^{t} x + t$
6. $x' = e^{-t} x + e^{t}$
7. $x' = \dfrac{1}{1+t^2} x + \dfrac{t}{1+t^2}$
8. $x' = \dfrac{2t}{1+t^2} x + \dfrac{4}{1+t^2}$

Estabilidad de ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Sea $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Usaremos la siguiente notación:

- El espectro de A: el conjunto de valores propios de A, tanto reales como complejos:
$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$$
- La multiplicidad de cada valor propio:
$$m(\lambda_j) \qquad\qquad \text{para cada } \lambda_j \in \sigma(A)$$
- La dimensión de cada subespacio propio E_{λ_j}:
$$\dim E_{\lambda_j} = \dim \ker(A - \lambda_j I) = d - \operatorname{rango}(A - \lambda_j I)$$
- Los valores propios de A cuya parte real es 0
$$\sigma_0(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \;:\; \operatorname{Re}(\lambda) = 0\}$$

Consideramos la EDO lineal homogénea y autónoma:

$$(*) \qquad x' = Ax \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^d$$

El principal indicador para determinar la estabilidad de $(*)$ es el máximo de las partes reales de los valores propios de A:

$$\mu(A) = \text{máx}\{\text{Re}(\lambda) \; : \; \lambda \in \sigma(A)\}$$

Teorema

1. Si $\mu(A) < 0$ entonces la EDO lineal $(*)$ es asintóticamente estable.
2. Si $\mu(A) = 0$ y $m(\lambda) = \dim E_\lambda$ para todo $\lambda \in \sigma_0(A)$, entonces la EDO lineal $(*)$ es estable (pero no asintóticamente estable).
3. Si $\mu(A) = 0$ y existe $\lambda \in \sigma_0(A)$ tal que $m(\lambda) \neq \dim E_\lambda$, entonces la EDO lineal $(*)$ es inestable.
4. Si $\mu(A) > 0$ entonces la EDO lineal $(*)$ es inestable.