Ejercicio 1. *Sea* $F : \mathcal{H}_0^1(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por*

$$F(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y'(x)^2 dx + y_0$$

Encontrar el mínimo de F *en* $\mathcal{H}_0^1(-1,1)$.

Sea $A : \mathcal{H}_0^1(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $A(u,u) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} u'(x)^2 dx$. Evidentemente, A es una forma cuadrática y es coerciva:

$$A(u,u) \geq \frac{1}{2}\|u\| \quad \forall u \in \mathcal{H}_0^1(-1,1)$$

Ahora sea $R : \mathcal{H}_0^1(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $R(y) = -y(\alpha) = y_0$, con $\alpha \in [-1,1]$. R es una aplicación lineal y continua, luego el funcional $F(y) = A(y,y) - R(y)$, es cuadrático. El teorema de Lax-Milgran nos dice que existe su mínimo absoluto y que debe cumplir:

$$A(\phi, y) - R(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_0^1(-1,1)$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \phi'(x)y'(x)dx = R(\phi) = -\phi(\alpha)$$

Si tomamos $\phi \in \mathcal{D}(-1,\alpha)$, obtenemos que

$$\int_{-1}^{\alpha} \phi'(x)y'(x)dx + \int_{-1}^{\alpha} 0\phi(x)dx = 0$$

Luego $z = y'$ tiene derivada débil 0 en $(-1,\alpha)$, es decir, $z \in \mathcal{H}_0^1(-1,\alpha)$. Hacemos lo mismo con la parte de la derecha, y obtenemos $z \in \mathcal{H}_0^1(\alpha,1)$. La función $z \notin \mathcal{C}[-1,1]$, pero se cumple $z \in \mathcal{C}[-1,\alpha] \cap \mathcal{C}[\alpha,1]$ y existen los límites laterales de z en α. Volviendo a la fórmula anterior:

$$\int_{-1}^{1} \phi'(x)z(x)dx = -2\phi(\alpha)$$

Como z no es continua en (a,b), hay que partir la integral en dos:

$$\int_{-1}^{1} \phi'(x)z(x)dx = \int_{-1}^{\alpha} \phi'(x)z(x)dx + \int_{\alpha}^{1} \phi'(x)z(x)dx$$

Desarrollando cada una por separado, usando la regla de la cadena en cada término:

$$\int_{-1}^{\alpha} z(x)\phi'(x)dx = z(x)\phi(x)\Big|_{-1}^{\alpha} - \int_{-1}^{\alpha} z'(x)\phi(x)dx = z(\alpha^-)\phi(\alpha) - \int_{-1}^{\alpha} z'(x)\phi(x)dx$$

$$\int_{\alpha}^{1} z(x)\phi'(x)dx = z(x)\phi(x)\Big|_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} z'(x)\phi(x)dx = z(\alpha^+)\phi(\alpha) - \int_{\alpha}^{1} z'(x)\phi(x)dx$$

Sumando ambos resultados y sustituyendo en la expresión del principio:

$$z(\alpha^-)\phi(\alpha) - z(\alpha^+)\phi(\alpha) = -\phi(\alpha)$$

Como ϕ es arbitraria, podemos tomarla de forma que $\phi(\alpha) = 1$, quedando:

$$z(\alpha^-) - z(\alpha^+) = -1$$

Ahora con estas condiciones, se puede calcular la expresión de y. En los intervalos, $[-1, \alpha), (\alpha, 1]$, y es una recta. La recta de la izquierda tiene que pasar por $(-1, 0)$ y la de la derecha debe pasar por $(1, 0)$. Además, la resta de sus pendientes tiene que ser -1. Serán de la forma:

$$y_1(x) = ax + a, \quad y_2(x) = bx - b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Como y debe ser continua en α, se tiene que cumplir $y_1(\alpha) = y_2(\alpha)$, luego nos queda el sistema:

$$\begin{aligned} &a\alpha + a = b\alpha + b \\ &a - b = -1 \end{aligned}$$

Y resolviendo el sistema, obtenemos: $a = \frac{-1+\alpha}{2}$, $b = \frac{1+\alpha}{2}$. Luego la función y buscada es:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{-1+\alpha}{2}(x+1) & x \in [-1, \alpha] \\ \frac{1+\alpha}{2}(x-1) & x \in (\alpha, 1] \end{cases}$$

Ejercicio 2. *Demostrar que el problema de contorno*

$$-y'' + 3xy = 2x, \quad y(0) = y(1) = 0$$

tiene una única solución.

Sean $K(x) = 3x$ y $q(x) = -2x$ y el funcional:

$$L(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 y'(x)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x)y(x)^2 dx + \int_0^1 q(x)y(x)dx$$

Lo anterior se puede expresar como: $F(x, y, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}K(x)y^2 + q(x)y$. Derivando respecto de p e y, y suponiendo que y es un punto extremal, se llega a:

$$\int_0^1 y'(x)\phi'(x)dx + \int_0^1 (K(x)y(x) + q(x))\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_0^1(0, 1)$$

Llamando $z = y'$, se tiene que la derivada débil de z es: $z' = K(x)y + q(x)$. Luego se tiene la siguiente ecuación diferencial igulando ambas expresiones:

$$-y'' + K(x)y + q(x) = 0 \Rightarrow -y'' + 3xy - 2x = 0$$

Al igual que se hizo en teoría, ahora solo se tiene que encontrar un producto escalar para ver que se tiene un espacio de Hilbert y usar el teorema de representación de Riesz. La proposición (3.12) dice justamente lo que necesitamos.

Ejercicio 3. *Sea*

$$p(x) = \begin{cases} 3 & si\ x \in (-3,0) \\ 1 & si\ x \in (0,2) \end{cases}$$

y consideramos $L : \mathcal{H}_0^1(-3,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por:*

$$L(y) = \frac{1}{2}\int_{-3}^{2} p(x)y'(x)^2dx - \int_{-3}^{2} y(x)dx$$

1. *Demuestra la existencia de mínimo.*
2. *Encuentra la expresión en casi todo punto de la función minimizante. Indicación:* $z(x) = p(x)y(x)$ *admite una extensión continua.*

Ejercicio 4. *Dado*

$$E = \{u \in \mathcal{H}^1(0,1) :\ u(0) = 0,\ u(1) = 1\}, \quad L(u) = \int_0^1 u'(x)^2dx + \int_0^1 u(x)dx$$

Encontrar $\min_{u\in E} L(u)$.

Ejercicio 5. *Sea E un espacio afín embebido en H, espacio de Hilbert. Supongamos que L es un funcional cuadrático coercivo y que E es cerrado. Demostrar que el problema*

$$\min_{u\in E} L(u)$$

tiene una única solución.

Ejercicio 6. *Encontrar* $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *tales que:*

$$f_n'(-1) = 1,\ f_n'(1) = 1,\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_n^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_n'(x)^2dx \longrightarrow 0$$

Ejercicio 7. *Demostrar que el problema de contorno*

$$-u'' + u = 0,\ u(-1) = 1,\ u(1) = 1$$

tiene una única solución.

Ejercicio 8. *Estudia y en su caso calcula:*

$$\min\{L(u) : u \in E\}$$

con $E = \{u \in \mathcal{H}^2(-1,1) : u'(-1) = u(1) = 1\}$