1. Ejercicios tema 1

Ejercicio 1.1. *Sean $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3), y(x) \in \mathcal{C}^2(a,b), y'(x) \neq 0$. Dado el funcional*

$$F[y] = \int_a^b \Phi(x, y(x), y'(x))dx$$

demuéstrese la equivalencia de las dos formas siguientes de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

- $\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$
- $\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dx}(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial p}) = 0$

Demostración. Comenzamos viendo el caso $a) \implies b)$. Para ello en primer lugar tenemos que comprobar que efectivamente podemos derivar Φ respecto al tercer parámetro. Del apartado $a)$ sabemos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

y del enunciado sabemos que Φ es de calse $\mathcal{C}^1$ luego $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ es de $\mathcal{C}^1$.

Cuando derivamos $\Phi(x, y(x), y'(x))$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y(x), y'(x))' &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y(x), y'(x)) \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y(x), y'(x))y'(x) \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial p}(x, y(x), y'(x))y''(x)
\end{aligned}$$

Recordemos que $\frac{\partial \Phi}{\partial p}(x, y(x), y'(x)) = z(x)$ luego

$$\frac{d}{dx}(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial p}) = \Phi_x + \Phi_y y' + \Phi_p y'' - y''z - y'z'$$

Tenemos que el 3º y 4º termino son iguales t el 2º y 4º son iguales entre ellos luego obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial p}) = \Phi_x$$

que es lo que queríamos.

$b) \implies a)$

Todos los pasos que hemos dado son reversibles pero necesitamos ver que $\frac{\partial \Phi}{\partial p}(x, y(x), y'(x))$ es $\mathcal{C}^1$.

Llamando $H(x) = \Phi - y'(x)z(x)$, por hipótesis tenemos que H es derivable. Despejando tenemos que

$$z = \frac{\Phi - H}{y'}$$

luego se verifica cómo queríamos.

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \Phi_x + \Phi_y y' + \Phi_p y'' - y''z - y'z' \\ &\implies y'(\Phi_Y - z') = 0\end{aligned}$$

e $y' \neq 0$ por hipótesis luego $\Phi_Y - z' = 0$. □

Ejercicio 1.2. *Obtengase la forma que adopta la ecuación de Euler-Lagrange en los siguientes casos particulares.*

a) *Demostración.* Φ solo depende de y' Aplicamos el Ejercicio 1 para resolver este apartado. Como Φ solo depende de y' tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi(y') \\ \Phi_x &= 0\end{aligned}$$

Del primer ejercicio tenemos que

$$\frac{d}{dx}\Phi = \Phi_p(y'(x))y''(x)$$

y además

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \Phi_x + \Phi_y y' + \Phi_p y'' - y''z - y'z' \\ &= y''\Phi + y'\frac{d}{dx}\Phi_p\end{aligned}$$

igualando las dos expresiones obtenemos

$$y'\frac{d}{dx}\Phi_p = 0 \implies \frac{d}{dx}\Phi_p = 0$$

De donde deducimos que $\Phi_p(y'(x))$ es una constante. □

Ejercicio 1.3 (5). *Aplíquense los resultados anteriores a los ejemplos siguientes:*

a) $\mathcal{F}[y(x)] = \int y(2x - y)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/2$

Definimos $F(x, y, p) = y(2x - y)$*. Se cumple*

$$\begin{aligned} F_p &= 0 \\ z(x) &= 0 \\ F_y(x, y(x)) &= 0 \end{aligned}$$

De aquí obtenemos $2x - 2y = 0 \implies y(x) = x$*. Ahora tenemos que comprobar que la solución cumple las condiciones de contorno.*

$$y(0) = 0y(\pi/2) = \pi/2$$

Luego se cumplen ambas condiciones.