[RELACIÓN DE EJERCICIOS I]

1.] Estudia la estabilidad de la ecuación lineal escalar $x' = a(t)x$ donde $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y verifica

$$\lim_{t \to +\infty} a(t) = 1.$$

Tomando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tenemos que

$$a(t) \geq \varepsilon \quad \forall t \in [n, +\infty) \quad \text{con} \quad \varepsilon \in (0,1)$$

Luego

$$\int_n^t a(s)\,ds \geq \int_n^t \varepsilon\, ds = \varepsilon(t-n) \xRightarrow[t \to +\infty]{\varepsilon \to 1} \int_n^t a(s)\,ds = +\infty$$

Es decir, no existe ninguna primitiva acotada $\Rightarrow$ inestable.

2.] Representa el diagrama de fases de la ecuación lineal

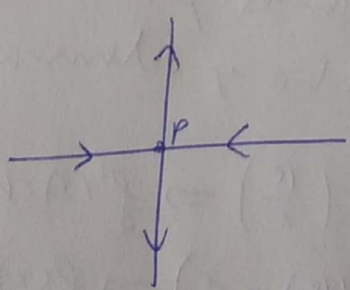
$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 \\ x_2' = -3x_2 \end{cases}$$

y clasifica el punto de equilibrio $p=(0,0)$.

Tenemos que $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-3-\lambda) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(A) = \{2, -3\} \Rightarrow x_1 = a e^{2t} \wedge x_2 = b e^{-3t}$

Luego el diagrama de fases es:



y vemos que p es un punto hiperbólico.

3.) Calcula todas las soluciones maximales del PVI:

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt[4]{x^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Por variables separadas $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt[4]{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^t \frac{dx}{2\sqrt[4]{x^2}} = \int_0^t dt \Rightarrow \sqrt[4]{x^2} = t + C \xRightarrow{x(0)=0} C = 0. \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Pero podemos obtener más soluciones maximales uniendo esta con la constante cero en un intervalo arbitrario que contenga al 0, es decir:

$$\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} -(t-a)^2 & \text{si } t \leq a \\ 0 & \text{si } a < t < b \\ (t+b)^2 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

4.) El modelo de Gompertz usa la EDO

$$P' = rP\ln\left(\frac{K}{P}\right)$$

donde r y K son constantes positivas. Estudia si $P = K$ es un punto de equilibrio y determina si es un atractor.

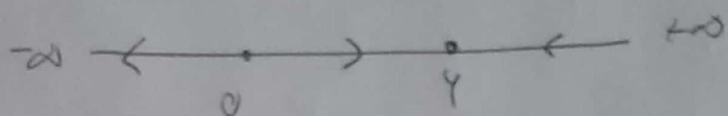
Tenemos que $f(x) = rx\ln\left(\frac{K}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = r\ln\left(\frac{K}{x}\right) +$

$+ rx\frac{x}{K}\cdot\left(-\frac{K}{x^2}\right) = r\left(\ln\left(\frac{K}{x}\right) - 1\right) \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{K}{x}\right) - 1 = 0 \Rightarrow$ si $x = K \Rightarrow f'(x) < 0.$

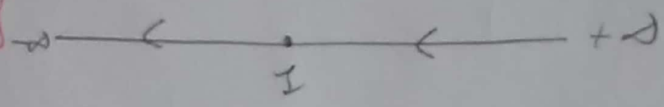
Como $x' = 0$ si $x = K$ y $f'(K) < 0 \Rightarrow x = K$ es un punto de equilibrio y un atractor.

5.] En cada caso proporciona un ejemplo explícito de una EDO escalar autónoma cuyo diagrama de fases sea el que se indica y calcula las regiones de atracción de los puntos de equilibrio:

a.] 

$R(0)=\{0\}$ $R(4)=(0,+\infty)$

$x' = -x(x-4)$

b.] 

$x' = -(x-1)^2$

$R(1) = [1, +\infty]$

c.] 

$x' = -e^t$

No hay puntos de equilibrio.