Modelos Matemáticos II

Antonio Gámiz Delgado
Universidad de Granada

7 de marzo de 2020

1. Cálculo de variaciones

1.1. Herramientas previas y repaso

Necesitaremos recordar algunas nociones y teoremas básicos sobre derivabilidad:

Teorema 1.1 (derivada de una integral respecto de un parámetro). *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible, I un intervalo cerrado y sea $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

(a) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ *es integrable.*

(b) $\forall x \in X$, *la función* $t \mapsto f(t,x)$ *es derivable en* $t \in I$.

(c) Existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq |g(x)| \quad \forall x \in X\ \forall t \in I$$

Entonces la función $F(t) = \int_X f(t,x)dx$ *es derivable en* t_0 *y la derivada es*

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)dx$$

1.2. Problema general del cálculo de variaciones

Primeramente definimos un tipo de funciones llamadas *funciones test* o *funciones de la clase de Schwartz*, junto con algunos resultados que usaremos bastante para trabajar con ellas.

Definición 1.2. Dado I intervalo, se llama *espacio de funciones test* al conjunto:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(a,b) = \{\phi \in C^\infty(a,b) :\ \exists J \subset (a,b) \text{ compacto: } \phi(x) = 0 \text{ si } x \notin J\}$$

Lema 1.3. *Dado* $x_0 \in (a,b)$ *y* $\varepsilon > 0$ *tal que* $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a,b)$, *existe* $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$ *tal que* $\phi(x) > 0$ *si* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ *y* $\phi(x) = 0$ *en otro caso.*

Demostración. La demostración la vamos a hacer por construcción. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Tenemos que $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 0$, luego g es continua. Veamos que de hecho $g \in C^\infty$. Su derivada es:

$$g'(x) = \begin{cases} e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Mediante un proceso iterativo llegamos a:

$$g^{n)}(x) = \begin{cases} e^{1/x}\frac{R(x)}{x^{2n}} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

donde $R(x)$ es un cierto polinomio que no nos interesa calcular. Queremos ver que $\lim_{x\to 0^-} g^{n)}(x) = 0$, con lo cual, $g \in C^n$. Haciendo el cambio $y = -\frac{1}{x}$, el anterior límite equivale a

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y^{2n}}{e^y} = 0 \Rightarrow g \in C^n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow g \in C^\infty$$

Con lo anterior, solo nos queda definir la función buscada de forma que sea una función test, es decir, la definimos como:

$$\phi(x) = g(x - (x_0 + \varepsilon))g((x_0 - \varepsilon) - x) \quad \varepsilon > 0$$

□

Teorema 1.4. *Sea $f \in C[a,b]$ tal que*

$$\int f(x)\phi(x)dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Entonces $f(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b]$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in (a,b)$ y supongamos por reducción al absurdo que $f(\bar{x}) \neq 0$. Podemos suponer $f(\bar{x}) > 0$. Aplicando el teorema de conservación del signo, obtenemos $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$ si $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$.

Por el lema 1.3, existe una función test ϕ tal que $\phi(x) > 0$ si $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ y 0 en otro caso. Luego:

$$0 = \int_a^b f(x)\phi(x)dx = \int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon} f(x)\phi(x)dx > 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$$

Como $\bar{x}$ era arbitrario, tenemos que $f(\bar{x}) = 0 \ \forall \bar{x} \in (a,b)$, y por la continuidad de f podemos extenderlo a los extremos también, es decir, $f(a) = f(b) = 0$.

□

1.2.1. Cálculo de extremales

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, definamos $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x,y,p) \longmapsto F(x,y,p)$. Supongamos que $F \in C^1(\Omega)$ respecto de las dos últimas variables, es decir, existen $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial p}$, continuas.

Usando la función anterior, podemos definir el siguiente funcional:

$$L(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \tag{1}$$

Nuestro objetivo en este apartado será encontrar *extremales* de ese funcional, es decir, máximos o mínimos.

Notación 1.5. Normalmente, a las derivadas parciales las denotaremos por:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x$$

Los *extremales* los buscaremos entre los elementos de un conjunto de funciones cumpliendo ciertas propiedades:

Definición 1.6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional en las condiciones anteriores. Definimos entonces el siguiente conjunto:

$$D = \{y \in C(a,b) \cap C^1[a,b] : \text{ se cumplen (a),(b) y (c)}\} \tag{2}$$

(a) $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in (a,b)$

(b) $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$ (*Condición de contorno*)

(c) $\displaystyle\int_a^b \Big|F(x, y(x), y'(x))\Big| dx < +\infty$

El siguiente teorema nos proporcionará una condición sobre las derivadas parciales de F, que nos ayudará a buscar *extremales*. Para su demostración necesitaremos el siguiente lema:

Lema 1.7. *Sea $\{s_n\} \longrightarrow 0$ una sucesión de números reales y $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $y \in D$, entonces $y + s_n\phi \in D \quad \forall n \geq n_0$.*

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$ y $K = \text{soporte}\, \phi$.Tenemos que comprobar que $y + s_n\phi$ cumple las condiciones de la definición 1.6.

(a) Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que hay infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $(x_n, y(x_n) + s_n\phi(x_n), y'(x_n) + s_n\phi'(x_n)) \notin \Omega$ para algún $x_n \in (a,b)$. Tomando una parcial si es necesario, podemos suponer una sucesión $\{x_n\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y(x_n) + s_n\phi(x_n), y'(x_n) + s_n\phi'(x_n)) \notin \Omega \Rightarrow x_n \in \text{soporte}\, \phi$, ya que si no estuviera, tendríamos que $\phi(x_n) = 0$ y $(x_n, y(x_n), y'(x_n)) \in \Omega$. Como el soporte es compacto, podemos suponer que $\{x_n\} \longrightarrow \bar{x} \in \text{soporte}\, \phi \in (a,b)$. Si tomamos límite:

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y(x_n) + s_n\phi(x_n), y'(x_n) + s_n\phi'(x_n)) = (\bar{x}, y(\bar{x}), y'(\bar{x})) \notin \Omega$$

porque el complementario de Ω es cerrado y el límite se queda fuera, llegando así a un absurdo. Por tanto, debe existir un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n, y(x_n) + s_n\phi(x_n), y'(x_n) + s_n\phi'(x_n)) \in \Omega \quad \forall n \geq n_0$.

(b) Evidente, ya que $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

(c) Tomando $n \geq n_0$,de (a) tenemos:

$$\int_a^b \Big|F(x, y(x) + s_n\phi(x), y'(x) + s_n\phi'(x))\Big| dx =$$

$$= \int_{(a,b)\setminus K} \Big|F(...)\Big| dx + \int_K \Big|F(...)\Big| dx < +\infty$$

El primer término es finito ya que, fuera de K, $\phi = 0$, luego ese término coincide con $\displaystyle\int_{(a,b)\setminus K} \Big|F(x, y(x), y'(x))\Big| dx$, que es finito porque $y \in D$. El segundo término lo es porque ser la integal de una función continua en un compacto.

$\square$

Lo que nos asegura este lema es que podamos sumar una perturbación *pequeña* a nuestro extremal sin *salirnos* de D.

Teorema 1.8. *Si $\bar{y} \in D$ es un extremal, entonces:*

$$\int_a^b F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\phi(x)dx + \int_a^b F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\phi'(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b)$$

*A $\bar{y}$ se le suele llamar **función crítica**.*

Demostración. Sean $\bar{y} \in D$ extremal y $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$. Definimos el funcional $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(s) = L(\bar{y} + s\phi)$.

Por el lema anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que g está bien definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Ahora queremos derivar g respecto de s, pero necesitamos que esté definida en un intervalo cerrado (por el teorema 1.1). Para ello, tomamos un intervalo cerrado J de forma que soporte(ϕ) $\subset J \subset [a, b]$.

Derivamos g respecto de s:

$$g'(s) = \left(\int_{[a,b]} F(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))dx \right)' =$$

$$= \left(\int_{[a,b]\setminus J} F(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))dx + \int_J F(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))dx \right)'$$

Usando que $\displaystyle\int_{[a,b]\setminus J} F(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))dx\phi(x)$ es una constante (por que $\bar{y} \in D$ y $\phi = 0$ en $[a, b]\setminus J$) cuya derivada es cero, obtenemos que:

$$g'(s) = \int_J \Big(F_y(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi(x) + F_p(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi'(x) \Big) dx$$

Como $\phi = 0 = \phi'$ fuera de J

$$g'(s) = \int_{[a,b]} \Big(F_y(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi(x) + F_p(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi'(x) \Big) dx$$

Si evaluamos ahora g' en 0 y usamos que $\bar{y}$ es extremal, tenemos:

$$g'(0) = \int_a^b \Big(F_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\phi + F_p(x, \bar{y}, \bar{y}')\phi' \Big) dx = 0$$

$\square$

1.2.2. Ecuación de Euler

Usando el teorema anterior vamos a llegar a una ecuación diferencial de segundo orden que nos ayudará a resolver este problema. Definimos $Z(x) = F_p(x, y(x), y'(x))$, nuestro objetivo ahora es imponer condiciones suficientes para que $Z(x) \in C^1(a,b)$, para poder derivarla y obtener una ecuación diferencial en y'.

Para continuar necesitamos un lema previo:

Lema 1.9. *Sea $Z \in C^1(x_0, x_1)$, entonces:*

$$\int_a^b Z(x)\phi'(x)dx = -\int_a^b Z'(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Demostración. Resolviendo la integal por partes tenemos:

$$\left.\begin{array}{cc} u = Z(x) & du = Z'(x)dx \\ dv = \phi'(x)dx & v = \phi \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b Z(x)\phi'(x)dx = Z(x)\phi(x)\Big|_a^b - \int_a^b Z'(x)\phi(x)dx =$$

$$= -\int_a^b Z'(x)\phi(x)dx$$

□

Este lema nos permite «intercambiar la derivada de sitio». Usando ahora el Teorema 1.8 (podemos usarlo porque y es función crítica) y el lema anterior, tenemos:

$$0 = \int_a^b F_y(x,y,y')\phi(x)dx + \int_a^b F_p(x,y,y')\phi'(x)dx =$$

$$= \int_a^b F_y(x,y,y')\phi(x)dx + \int_a^b Z(x)\phi'(x)dx =$$

$$= \int_a^b F_y(x,y,y')\phi(x)dx - \int_a^b Z'(x)\phi(x)dx =$$

$$= \int_a^b \Big(F_y(x,y,y') - Z'(x)\Big)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Y usando ahora el Teorema 1.4 nos queda:

$$F_y(x,y,y') - Z'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Que denoteramos por:

$$\frac{d}{dx}F_p - F_y(x,y,y') = 0 \quad \textbf{(Ecuación de Euler)}$$

Las condiciones sobre F se pueden rebajar con el siguiente teorema:

Teorema 1.10. *Si $F \in C^1_{yp}$, $y' \in C^1$, función crítica, entonces:*

$$Z(x) = F_p(x, y(x), y'(x)) \in C^1$$

$$Z'(x) = F_y(x, y(x), y'(x))$$

Ya tenemos la ecuación que queremos resolver. La demostración del teorema es consecuencia de los anteriores resultados.

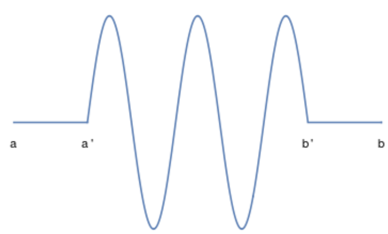
Lema 1.11. *Sea $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$, entonces:*

$$\phi \text{ admite primitiva } \iff \int_a^b \phi(x)dx = 0$$

Demostración.
($\Rightarrow$) Por hipótesis, supongamos que existe Ψ tal que $\phi = \Psi'$. Ahora solo tenemos que integrarla y usar que Ψ vale 0 en los extremos por ser una función de soporte compacto:

$$\int_a^b \phi(s)ds = \int_a^b \Psi'(s)ds = \Psi\Big|_a^b = 0$$

($\Leftarrow$) Si $\int_a^b \phi(s)ds = 0$, entonces tenemos la siguiente situación: soporte $\phi \subset [a', b']$ tal que $a < a' \leq b' < b$.



Definimos $\Psi(x) = \int_{a'}^x \phi(s)ds$ y tenemos $\Psi' = \phi$. Falta probar que $\Psi \in \mathcal{D}(a,b)$. Si $x \leq a'$, claramente $\Psi(x) = 0$ $\big(\phi(x) = 0 \quad \forall x \in (a, a')\big)$. Si $x \geq b'$,

$$\int_{a'}^x \phi(s)ds = \int_{a'}^{b'} \phi(s)ds = \int_a^b \phi(s)ds = 0$$

Por tanto soporte $\Psi \subset [a', b']$.

□

Lema 1.12. *Sea $f \in C(a,b)$ tal que $\int f\phi'(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b) \Longrightarrow f$ es constante.*

Demostración. Sea $x_0 \in (a,b)$, tomamos una función $\phi_{x_0} \in \mathcal{D}(a,b)$ cumpliendo la tesis del lema 1.3. Podemos tomarla de forma que $\int_a^b \phi_{x_0}(s)ds = 1$ (multiplicándola por cierta constante).

Definimos $\Psi(x) = \int_a^x \phi_{x_0}(s)ds$ y tomamos c de forma que:

$$\int_a^b f(s)\Psi'(s) = c\int_a^b \Psi'(s)ds = c\Psi\Big|_a^b = c$$

Tomamos $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$ y veamos que la función $\phi - \lambda\Psi'$ tiene primitiva para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que tiene media 0, y despejemos λ:

$$\int_a^b \phi(s) - \lambda\Psi'(s) = 0 \Longrightarrow \lambda = \int_a^b \phi(s)ds$$

Haciéndo esa elección de λ, $\phi - \lambda\Psi'$ tiene primitiva por el lema 1.11.

$$0 = \int_a^b f(s)(\phi(s) - \lambda\Psi'(s))ds = \int_a^b f(s)\phi(s)ds - \lambda\int_a^b f(s)\Psi'(s)ds =$$

$$= \int_a^b f(s)\phi(s)ds - c\int_a^b \phi(s)ds = \int_a^b (f(s)-c)\phi(s)ds \Rightarrow f(s) - c = 0 \Rightarrow f \equiv c$$

□

Lema 1.13. *Sean f,g funciones continuas en (a,b), entonces es equivalente:*

$$\int_a^b g\phi + \int_a^b f\phi' = 0 \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(a,b) \Longleftrightarrow f \in C^1(a,b), g = f'$$

Demostración. ($\Rightarrow$)Tomamos $x_0 \in (a,b)$ y definimos $\tilde{f}(x) = \displaystyle\int_a^x g(s)ds \Rightarrow \tilde{f} \in C^1$.

$$\int_a^b \tilde{f}(s)\phi'(s) + g(s)\phi(s)ds = \int_a^b \tilde{f}(s)\phi'(s) + \tilde{f}'(s)\phi(s)ds = \int_a^b (\tilde{f}\phi) = \tilde{f}\phi\Big|_a^b = 0$$

Restando la expresión de la hipótesis menos la anterior, obtenemos:

$$0 = \int_a^b f(s)\phi'(s)ds - \int_a^b \tilde{f}(s)\phi'(s)ds = \int_a^b (f - \tilde{f})(s)\phi'(s)ds$$

Y usnado el lema 1.12, tenemos que $f - \tilde{f}$ es constante, luego $f \in C^1$ ya que $\tilde{f}$ también pertenece a C^1.

($\Leftarrow$)

$$0 = f\phi(x)\Big|_a^b = \int_a^b (f(x)\phi(x))'dx = \int_a^b f(x)\phi'(x)dx + f'(x)\phi(x)dx$$

□

1.3. Ejemplos

A continuación veremos un ejemplo teórico y algunos ejemplos más prácticos de la teoría anterior.

1.3.1. Problema de Braquistocrona

Este problema se centra principalmente en averiguar que forma (curva) tenemos que darle a un tobogán para que este sea el más rápido.

A esa curva la vamos a denotar por $Y(t)$ y vamos a suponer que pertenece a $C^1(0, L)$, es decir, que no tenga picos. Además, vamos a suponer que el tobogán tiene altura máximo 1, y mínima 0, es decir, $Y(0) = 1$ e $Y(L) = 0$. También necesitamos que el tobogán tenga sentido, es decir, que no tenga subidas ni bajadas muy bruscas, luego necesitamos imponer $Y''(x) < 1 \quad \forall x \in (0, L)$.

Recordemos primero algunas nociones de física. Vamos a denotar por $(x(t), y(t))$ a la posición de una persona en el tobogán en el instante $t \in [0, L]$, por m a su masa y por g a la gravedad. Recordemos que la expresión de la energía es $mgy(t)$, la de la velocidad es $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ y la de la energía cinética es $\frac{mv(t)^2}{2}$.

Si hacemos el tobogán suficientemente suave, se tiene que verificar lo siguiente:

$$mgy(t) + \frac{m}{2}(x'(t)^2 + y'(t)^2) \equiv cte \tag{3}$$

En el primer momento nos dejamos caer, luego en $t = 0$, $(3) = mg$

Tenemos entonces $y(t) = Y(x(t)) \Rightarrow y'(t) = Y'(x(t))x'(t)$, sustituyendo en (3):

$$mgY(x(t)) + \frac{m}{2}x'(t)^2 + \frac{m}{2}(Y'(x(t))x'(t))^2 = mg$$

$$x'(t)^2 \left(1 + Y'(x(t))^2\right) = 2g\left(1 - Y(x(t))\right) \Rightarrow x'(t) = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{1 - Y(x(t))}{1 + Y'(x(t))^2}}$$

Estamos buscando el tiempo de llegada, T, ¿cómo lo hacemos? Aplicamos un truco típico de ecuaciones diferenciales:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{x'(t)}{x'(t)}dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^T \frac{\sqrt{1 + Y'(x(t))^2}}{\sqrt{1 - Y(x(t))}}x'(t)dt$$

Que tras el cambio de variable $x = x(t)$ nos queda:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^L \frac{\sqrt{1 + Y'(x)^2}}{\sqrt{1 - Y(x)}}dx$$

Definimos ahora el conjunto de funciones donde vamos a buscar nuestro mínimo:

$$D = \{y \in C^1(0, L), y(0) = 1, y(L) = 0, y'(x) < 1 \quad \forall x \in (0, L)\}$$

Y definimos nuestro funcional:

$$L(y) = \int_0^L \frac{\sqrt{1 + Y'(x)^2}}{\sqrt{1 - Y(x)}}dx$$

Usando la notación del principio, tenemos una función F tal que $F(x, y, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{1-y}}$

Usando el Teorema 1.10 podemos definir:

$$Z(x) = \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{1 - y(x)}} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \in C^1(0, T)$$

Ahora, en lugar de despejar $y'(x)$, vamos a ver que $y \in C^2$. Definiendo $\Psi(y') = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = Z(x)\sqrt{1 + y'^2}$. Como $\Psi(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ tiene inversa de clase 1, tenemos:

$$y'(x) = \Psi^{-1}(Z(x)\sqrt{1 - y(x)}) \Rightarrow y \in C^2$$

En general, tenemos que si F no depende de x, podemos hacer:

$$D(x) = F(y(x), y'(x)) - Z(x)y'(x) \Rightarrow D'(x) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y}(y(x), y'(x))y'(x) + \frac{\partial F}{\partial p}(y(X), y'(x))y''(x) - Z'(x)y'(x) - Z(x)y''(x) =$$
$$= y'(Z'(x) - Z'(x)) = 0$$

Es decir, para alguna constante $C \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$F(y(x), y'(x)) - Z(x)y' = C$$

En nuestro caso particular, nos quedaría:

$$\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{1 - y(x)} - \frac{1}{\sqrt{1 - y(x)}} \frac{y'(x)^2}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - y(x)}} \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = C$$

Esa ecuación diferencial, es de variables separadas, deberíamos resolverla con las condiciones iniciales $y(0) = 1, y(L) = 0$, pero la solución es trascendente, es decir, no tiene expresión explícita, es un cicloide.

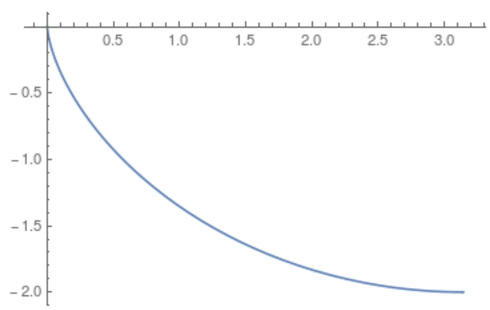


Figura 1: Ejemplo de cicloide

1.3.2. Ejercicios prácticos

Ejercicio. *Encontrar la curva en la que el siguiente funcional podría alcanzar su extremo:*

$$I(y) = \int_1^2 \Big(y'(x)^2 - 2xy(x)\Big)dx$$

con condiciones de contorno $y(1) = 0, y(2) = -1$.

Solución: Definimos $F(x, y, p) = p^2 - 2xy$ y obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 2p, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2x \Rightarrow Z(x) = 2y'(x), \quad Z'(x) = -2x$$

Resolviendo la ultima ecuación, obteniendo:

$$Z(x) = -x^2 + C \Rightarrow 2y'(x) = -x^2 + C \Rightarrow y'(x) = \frac{-x^2 + C}{2} \Rightarrow y(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{c}{2}x + D$$

Usando las condiciones de contorno, podemos calcular el valor de C y D, obteniendo:

$$y(x) = \frac{x - x^3}{6}$$

Ejercicio. *Encuentra las curvas que unen* $(1, 3)$ *con* $(2, 5)$*, que puedan ser extremos del funcional:*

$$I(y) = \int_1^2 \Big(y'(x) + x^2 y'(x)^2\Big)dx$$

Solución $y(x) = -\frac{4}{x} + 7$

1.4. Relación de ejercicios

Ejercicio 1.1. *Sean* $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3), y(x) \in \mathcal{C}^2(a, b), y'(x) \neq 0$. *Dado el funcional*

$$F[y] = \int_a^b \Phi(x, y(x), y'(x))dx$$

demuéstrese la equivalencia de las dos formas siguientes de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

- $\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$
- $\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dx}(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial p}) = 0$

Demostración. Comenzamos viendo el caso $a) \implies b)$. Para ello en primer lugar tenemos que comprobar que efectivamente podemos derivar Φ respecto al tercer parámetro. Del apartado $a)$ sabemos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

y del enunciado sabemos que Φ es de calse $\mathcal{C}^1$ luego $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ es de $\mathcal{C}^1$.

Cuando derivamos $\Phi(x, y(x), y'(x))$ obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi(x, y(x), y'(x))' &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y(x), y'(x)) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y(x), y'(x))y'(x) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial p}(x, y(x), y'(x))y''(x)\end{aligned}$$

Recordemos que $\frac{\partial \Phi}{\partial p}(x, y(x), y'(x)) = z(x)$ luego

$$\frac{d}{dx}(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial p}) = \Phi_x + \Phi_y y' + \Phi_p y'' - y''z - y'z'$$

Tenemos que el 3º y 4º termino son iguales t el 2º y 4º son iguales entre ellos luego obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial p}) = \Phi_x$$

que es lo que queríamos.

b) $\implies$ *a)*

Todos los pasos que hemos dado son reversibles pero necesitamos ver que $\frac{\partial \Phi}{\partial p}(x, y(x), y'(x))$ es $\mathcal{C}^1$.

Llamando $H(x) = \Phi - y'(x)z(x)$, por hipótesis tenemos que H es derivable. Despejando tenemos que

$$z = \frac{\Phi - H}{y'}$$

luego se verifica cómo queríamos.

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \Phi_x + \Phi_y y' + \Phi_p y'' - y''z - y'z' \\ &\implies y'(\Phi_Y - z') = 0\end{aligned}$$

e $y' \neq 0$ por hipótesis luego $\Phi_Y - z' = 0$. □

Ejercicio 1.2. *Obténgase la forma que adopta la ecuación de Euler-Lagrange en los siguientes casos particulares:*

a) Φ *sólo depende de* y'*.*

Demostración. Φ solo depende de y' Aplicamos el Ejercicio 1 para resolver este apartado. Como Φ solo depende de y' tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(y') \\ \Phi_x &= 0 \end{aligned}$$

Del primer ejercicio tenemos que

$$\frac{d}{dx}\Phi = \Phi_p(y'(x))y''(x)$$

y además

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \Phi_x + \Phi_y y' + \Phi_p y'' - y''z - y'z' \\ &= y''\Phi + y'\frac{d}{dx}\Phi_p \end{aligned}$$

igualando las dos expresiones obtenemos

$$y'\frac{d}{dx}\Phi_p = 0 \implies \frac{d}{dx}\Phi_p = 0$$

De donde deducimos que $\Phi_p(y'(x))$ es una constante. □

b) Φ *no depende de* y.

c) Φ *no depende explícitamente de* x.

d) $\Phi = G(x,y)\sqrt{1+y'^2}$.

Ejercicio 1.3. *Aplíquense los resultados anteriores a los ejemplos siguientes:*

a) $\mathcal{F}(y(x)) = \displaystyle\int y(2x-y)dx$, $y(0)=0$, $y(\pi/2)=\pi/2$.

b) $\mathcal{F}[y(x)] = \int y(2x-y)dx, \quad y(0)=0, \quad y(\pi/2)=\pi/2$

Definimos $F(x,y,p) = y(2x-y)$. *Se cumple*

$$\begin{aligned} F_p &= 0 \\ z(x) &= 0 \\ F_y(x,y(x)) &= 0 \end{aligned}$$

De aquí obtenemos $2x - 2y = 0 \implies y(x) = x$. *Ahora tenemos que comprobar que la solución cumple las condiciones de contorno.*

$$y(0) = 0y(\pi/2) = \pi/2$$

Luego se cumplen ambas condiciones.

c) $\mathcal{F}(y(x)) = \displaystyle\int (y^2 + 2xyy')dx$, $y(a) = A$, $y(b) = B$.

d) $\mathcal{F}(y(x)) = \displaystyle\int y'(1 + x^2y')dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = 5$.