Tema 3

El teorema de Picard-Lindelöf y el teorema de Cauchy-Peano

Ecuación integral de Volterra

Sean $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, $(t_0, x_0) \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^d$ una función continua. Se considera el P.V.I.

$$(P) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Integrando en la ecuación integral se obtiene la llamada *ecuación integral de Volterra*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \qquad (V)$$

Dados un intervalo $J \subset \mathbb{R}$ se dice que una función $\varphi : J \to \mathbb{R}^d$ es una solución de (V) si se cumple:

1. $t_0 \in J$,
2. $\varphi : J \to \mathbb{R}^d$ es continua,
3. Para todo $t \in J$ se cumple $\varphi(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$.

Proposición 0

Dados un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y una función $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$, son equivalentes:

1. $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ es una solución de (P).
2. $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ es una solución de (V).

Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ denotamos por $\mathcal{R}_{a,b}(t_0, x_0)$ o simplemente $\mathcal{R}_{a,b}$ al conjunto

$$\mathcal{R}_{a,b} = \left\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \ : \ |t - t_0| \leq a \ \wedge \ \|x - x_0\| \leq b\right\}$$

es decir: $\mathcal{R}_{a,b}(t_0, x_0) = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b)$.

Observa que la familia $\mathcal{R}_{a,b}(t_0, x_0)$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$, constituye una base de entornos del punto (t_0, x_0) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

El espacio de funciones continuas $C([t_0 - a, t_0 + a], \mathbb{R}^d)$ con la norma del máximo

$$\|\varphi\|_\infty := \max_{t \in [t_0 - a, t_0 + a]} \|\varphi(t)\|$$

es un espacio de Banach. En este espacio, consideramos la bola cerrada centrada en la función constante

$$\varphi_0 : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d, \ \varphi_0(t) = x_0$$

y de radio b a la que denotamos

$$E_{a,b}(t_0, x_0) = \left\{\varphi \in C([t_0 - a, t_0 + a], \mathbb{R}^d) \ : \ \|\varphi - \varphi_0\|_\infty \leq b\right\}$$

Por tanto, si $\varphi \in E_{a,b}(t_0, x_0)$ entonces su gráfica está contenida en $\mathcal{R}_{a,b}(t_0, x_0)$:

$$(t, \varphi(t)) \in \mathcal{R}_{a,b} \quad \forall t \in [t_0 - a, t_0 + a]$$

Puesto que $E_{a,b}(t_0, x_0)$ es un subconjunto cerrado de $C([t_0 - a, t_0 + a], \mathbb{R}^d)$, hereda la estructura de espacio métrico completo cuando consideramos la distancia inducida por la norma del máximo d_∞:

$$d_\infty(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|_\infty$$

Fijamos $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que $\mathcal{R}_{a,b} \subset D$ y para simplificar la notación, escribimos

$$E = E_{a,b}(t_0, x_0)$$

En este espacio de funciones definimos el *operador integral de Volterra*:

$$\begin{array}{rcl} V : E & \rightarrow & C([t_0 - a, t_0 + a], \mathbb{R}^d) \\ \varphi & \mapsto & V(\varphi) \end{array}$$

donde para cada $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ se define

$$V(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

Lema 1

Sea $M \geq 0$ tal que

$$\|f(t, x)\| \leq M \qquad \forall (t, x) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Entonces $\forall \varphi \in E$ se verifica que $\|V(\varphi)(t) - x_0\| \leq Ma$ $\forall t \in [t_0 - a, t_0 + a]$.

Corolario

Sea $M \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Si $Ma \leq b$ entonces $V(E) \subset E$.

Lema 2

Sea $M \geq 0$ tal que $Ma \leq b$ y

$$\|f(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Si $\varphi : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$ es solución de (V), entonces $\varphi \in E$.

Lema 3

Sea $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\| \qquad \forall (t,x),(t,y) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Si $\varphi, \psi \in E$ entonces $\|V(\varphi) - V(\psi)\|_\infty \leq La \|\varphi - \psi\|_\infty$.

Proposición 1

Sean $M, L \geq 0$ tales que

$$\|f(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

y

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\,\|x-y\| \qquad \forall (t,x),(t,y) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Si $Ma \leq b$ y $La < 1$ entonces existe una única función $\varphi : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$ que es solución de (V).

Basta aplicar el teorema del punto fijo de Banach:

Teorema del punto fijo de Banach

Si (E,d) es un espacio métrico completo y $F : E \to E$ es una aplicación contractiva, entonces existe un único $p \in E$ tal que $F(p) = p$.

Además, si tomamos cualquier $x_0 \in E$ y definimos por recurrencia

$$x_{n+1} = F(x_n) \qquad n \geq 0$$

entonces $x_n \to p$.

Norma de Bielecki

En el espacio de funciones

$$E = C([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B}(x_0, b))$$

y dada una constante $R > 0$ consideramos la siguiente norma (llamada *norma de Bielecki*) que es equivalente a la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$

$$\|\varphi\|_B := \max_{t \in [t_0 - a, t_0 + a]} e^{-R|t - t_0|} \|\varphi(t)\| .$$

Lema 4

Sea $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\| \qquad \forall (t,x), (t,y) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Si $\varphi, \psi \in E$ entonces $\|V(\varphi) - V(\psi)\|_B \leq \frac{L}{R} \|\varphi - \psi\|_B$.

Proposición 2

Sean $M, L \geq 0$ tales que

$$\|f(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

y

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\,\|x-y\| \qquad \forall (t,x),(t,y) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Si $Ma \leq b$ entonces existe una única función $\varphi : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$ que es solución de (V).

Funciones lipschitzianas

Sean $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un conjunto y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función continua.

Diremos que la función f es *(globalmente) lipschitziana respecto de la variable* x (en D) si existe una constante $L \geq 0$ tal que:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\| \qquad \forall (t,x),(t,y) \in D.$$

La constante L recibe el nombre de *constante de lipschitz*.

Diremos que la función f es *localmente lipschitziana respecto de la variable* x si para todo $(t_0, x_0) \in D$ existe un entorno $\mathcal{U}$ de (t_0, x_0) en D tal que $f|_{\mathcal{U}}$ es *lipschitziana respecto de la variable* x en $\mathcal{U}$.

Teorema de Picard-Lindelöf

Sean $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, $(t_0, x_0) \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^d$ una función continua. Se considera el P.V.I.

$$(P) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Teorema de Picard-Lindelöf [Versión local]

Si la función f es lipschitziana respecto de la variable x en un entorno del punto (t_0, x_0) entonces el PVI (P) tiene solución y verifica la propiedad de unicidad local.

Teorema de Picard-Lindelöf [Versión global]

Si la función f es localmente lipschitziana respecto de la variable x entonces el PVI (P) tiene una única solución maximal.

Iterantes de Picard

Calculamos $a, b, M, L > 0$ tales que:

1. $a \leq b/M$
2. $\mathcal{R}_{a,b} \subset D$
3. $\|f(t,x)\| \leq M$ para todo $(t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}$.
4. $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\,\|x-y\|$ para todo $(t,x),(t,y) \in \mathcal{R}_{a,b}$.

Definimos la sucesión de funciones $\phi_n : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$ (llamadas **iterantes de Picard**) como sigue:

$$\phi_0(t) = x_0\,,$$

$$\phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_k(s))\,ds, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Esta sucesión está bien definida y converge uniformemente hacia la única solución de $(*)$.

El contraejemplo de Müller (1927)

Se considera el P.V.I.

$$(*)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función

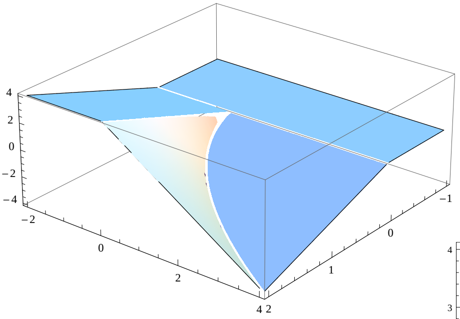
$$f(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2t & \text{si } t > 0 \quad \text{y} \quad x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t} & \text{si } t > 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t & \text{si } t > 0 \quad \text{y} \quad x > t^2 \,. \end{cases}$$

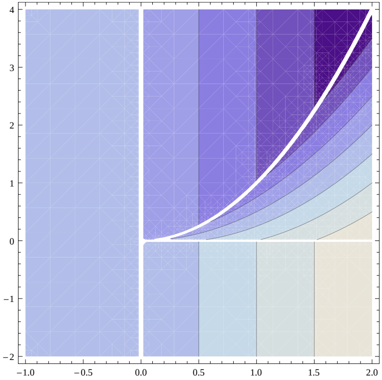
(i) Prueba que $(*)$ tiene una única solución.

(ii) Calcula dicha solución.

(iii) Calcula la sucesión de iterantes de Picard y responde: ¿es convergente?, ¿tiene alguna parcial convergente?, ¿alguna parcial converge hacia la solución del problema $(*)$?

Gráficas del contraejemplo de Müller (1927)





Lema 5

Sean $M \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Existe una sucesión de funciones $f_n : D \to \mathbb{R}^d$ localmente lispchitzianas tales que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$\|f_n(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

y ademas f_n converge uniformemente hacia f en $\mathcal{R}_{a,b}$

Proposición 3

Sea $M \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Si $Ma \leq b$ entonces existe una función $\varphi : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$ que es solución de (V).

Teorema de Cauchy-Peano

Si la función f es continua entonces el PVI (P) tiene solución.