

**Ejercicio 1.** Demuestra que la solución maximal del siguiente PVI está acotada (en el futuro y en el pasado):

$$\left. \begin{aligned} x' &= (1 - x^2 - y^2)(x + y) \\ y' &= (1 - x^2 - y^2)(x - y) \\ x(0) &= \frac{1}{3}, \quad y(0) = -\frac{2}{3} \end{aligned} \right\}$$

**Ejercicio 2.** En cada uno de los problemas de valores iniciales siguientes, demuestra que la solución maximal está acotada en el futuro.

Denotamos por  $\varphi$  a la solución maximal en cada uno de los respectivos apartados.

(a)  $\left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{x^2 - 25}{1 + t^2} \\ x(0) &= 4 \end{aligned} \right.$

Como  $f(t, x) \in \mathcal{C}^1$ , es localmente lipschitziana y por tanto verifica la propiedad de unicidad global. Los puntos de equilibrio de  $f$  son  $x_1 = -5$  y  $x_2 = 5$ . Como  $x_0 \in [-5, 5]$ , entonces  $\varphi$  cumple que  $\varphi(t) \in [-5, 5] \forall t \geq 0$ .

(b)  $\left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{16}{1 + t^2}x - x^3 \\ x(0) &= 3 \end{aligned} \right.$

Como  $f(t, x) \in \mathcal{C}^1$ , es localmente lipschitziana y por tanto verifica la propiedad de unicidad global. Los puntos de equilibrio de  $f$  son  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1$ . Como  $x_0 \notin [0, 1]$ , usamos:

$$\begin{aligned} x_3 = 5 : \quad & f(t, 5) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ x_4 = 0.1 : \quad & f(t, 0.1) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ahora se cumple que  $x_0 \in [0.1, 5]$ , siendo  $[0.1, 5]$  un conjunto invariante. Luego  $\varphi$  cumple que  $\varphi(t) \in [0.1, 5] \forall t \geq 0$ .

(c)  $\left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{1 - x^3}{1 + x^2} \\ x(0) &= 2 \end{aligned} \right.$

Como  $f(t, x) \in \mathcal{C}^1$ , es localmente lipschitziana y por tanto verifica la propiedad de unicidad global. Los puntos de equilibrio de  $f$  son  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 1$ . Como  $x_0 \notin [-1, 1]$ , usamos:

$$\begin{aligned} f(t, 0) &> 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ f(t, 2) &< 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego  $\varphi$  cumple que  $\varphi(t) \in (0, 2) \forall t \geq 0$ .

**Ejercicio 3.** Busca funciones guía que nos permitan asegurar que las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales están acotadas en el futuro:

(a)  $x' = \sin(t) - x^3$

Sea  $V(x) = x^2$ . Entonces:

$$\dot{V}(x) = 2x \sin(t) - 2x^4 \leq 0, \quad \forall x \geq n_0$$

Con  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Luego  $V$  es una función guía y coerciva, luego (a) está acotada en el futuro.

$$(b) \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\sin(x_1) - x_1 \end{cases}$$

Sea  $V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$ . Entonces:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = V_1'(x_1)x_2 - V_2'(x_2)(\sin(x_1) + x_1)$$

Para que  $\dot{V}(x_1, x_2) \equiv 0$  tiene que darse:

$$V_1'(x_1) = \sin(x_1) + x_1, \quad V_2'(x_2) = x_2$$

Luego, integrando:

$$V_1(x_1) = -\cos(x_1) + \frac{x_1^2}{2}, \quad V_2(x_2) = \frac{x_2^2}{2}$$

Luego  $V$  es una función guía y coerciva, luego (b) está acotada en el futuro.

$$(c) \begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_2 \end{cases}$$

Sea  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . Entonces:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(-x_2) = -x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2)^2 \leq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Luego  $V$  es una función guía y coerciva, luego (c) está acotada en el futuro.

**Ejercicio 4.** *Determina qué debe cumplir el parámetro  $a > 0$  para que:*

$$V(x, y) = x^2 + axy + y^2$$

*sea una función guía coerciva para el sistema plano:*

$$\begin{cases} x' = -x + 6y \\ y' = -20y \end{cases}$$

*(Debes indicar un intervalo). Además justifica la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(a) *Todas las soluciones del sistema están acotadas en el futuro.*

(b) *Todas las soluciones del sistema están acotadas en el pasado.*

(c) *Existe una solución que está acotada (en el pasado y en el futuro).*