Ejercicio 1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Denotamos*

$$I^* = \{t \in I : \exists f'(t)\}$$

Supongamos que existe una sucesión $t_n \in I^*$ tal que

$$|f'(t_n)| \longrightarrow \infty$$

Demuestra que la función f no es globalmente lipschitziana en I.

Como la derivada de f existe en I^*, f también es continua en I^*. Usando la definición de derivada con la sucesión t_n:

$$|f'(t_n)| = \lim_{h\to 0} \frac{|f(t_n + h) - f(t_n)|}{h} = \infty$$

Luego f no es globalmente lipschitziana porque no lo es localmente (como nos dice la caracterización).

Ejercicio 2. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es una función de clase uno a trozos y escribiremos $f \in \mathcal{C}^1_T(I)$, si existe un recubrimiento finito del intervalo I:*

$$I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$$

donde los subintervalos I_j son cerrados relativos a I y se cumple: $f_{|I_j} \in \mathcal{C}^1(I_j)$. Dada $f \in \mathcal{C}^1_T(I)$, si denotamos $I^* = \{t \in I : \exists f'(t)\}$, demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) La función f es globalmente lipschitziana en I.

(b) Existe $L \geq 0$ tal que $|f'(t)| \leq L \ \ \forall t \in I^*$

$(a) \Rightarrow (b)$ Si f es globalmente lipschitz se cumple que existe una constante L tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Como cada intervalo I_j es cerrado puedo encontrar una sucesión de puntos $x_n \longrightarrow y \ \ \forall y \in I_j \cap I^*$, luego:

$$\lim_{x_n \to y} \frac{|f(x_n) - f(y)|}{|x_n - y|} = |f'(y)| \leq L$$

Por lo tango, para todo t en I^* se cumple que $|f'(t)| \leq L$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Tomo x_n sucesión de forma que $x_0 = s$ y x_n sea el mayor valor dentro de cada I_j de manera que puedo ir enlazando entre los distintos I_j y $x_i \longrightarrow t$ de manera que

$$|f(t) - f(s)| \leq \int_s^t |f'(\tau)| d\tau \leq \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(\tau)| d\tau \leq L \sum |x_{i+1} - x_i| = L|t - s|$$

Ejercicio 3. *Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Suponemos que existe un recubrimiento finito del conjunto D formada por conjuntos cerrados:*

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \quad \bar{C}_i = C_i \ \ \forall i = 1, \cdots, n$$

tales que para cada $i = 1, \cdots, n$ la restricción $f_{|C_i}$, es lipschitziana (con constante de lipschitz L_i). Queremos demostrar que f es lipschitziana en D. Para ello:

(a) Dados $x, y \in D$ demuestra que existe una partición del segmento $[x, y]$ tal que los nodos consecutivos están en un mismo conjunto cerrado del recubrimiento:

$$\exists \{z_j\}_{j=1}^{m} \subset [x, y] \ \ z_1 = x, \ z_m = y \quad z_j, z_{j+1} \in C_i \quad \forall j = 1, \cdots, m-1$$

(b) Prueba que $\|f(x) - f(y)\| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} \|f(z_j) - f(z_{j+1}\|$

(c) Deduce que f es lipschitziana y determina su constante de Lipschitz.

Ejercicio 4. *Sea $D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^K$, $\bar{D} \subset \mathbb{R}^k$, $g : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tales que las funciones f y g son globalmente lipschitzianas y además $f(D) \subset \bar{D}$. Demuestra que la composición $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es globalmente lipschitziana.*

Sean L_1 y L_2 las constantes de lipschitz de f y g respectivamente. Tenemos:

$$\|f(g(x_1)) - f(g(x_2))\| \leq L_1 \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq L_1 L_2 \|x_1 - x_2\| \quad x_1, x_2 \in D$$

Luego $f \circ g$ es lipschitziana.

Ejercicio 5. *Sea $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ abierto y sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^d$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{R}^k$ continuas. Además $f(t, x)$ y $g(t, x)$ son localmente lipschitzianas (respecto de la variable $x \in \mathbb{R}^d$). Decide sobre la validez de las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $k = d$ entonces $f + g$ es localmente lipschitziana (respecto de la variable x).*
2. *Si $k = 1$ entonces $f \cdot g$ es localmente lipschitziana (respecto de la variable x).*

Existe un entorno $U = U^\circ \subset D$ donde f y g son localmente lipschitzianas.
(a)

$$\forall (t, x), (t, y) \in U \Rightarrow \|f(t, x) - f(t, y) + g(t, x) - g(t, y)\| \leq$$
$$\leq L_f \|x - y\| + L_g \|x - y\| \leq (L_f + L_g) \|x - y\| \Rightarrow f + g \text{ lipscihtz}$$

(b) De forma análoga al apartado anterior obtenemos:

$$\|g(t, x) f(t, x) - g(t, y) f(t, y)\| \leq (B L_f + A L_g) \|x - y\|$$

Donde A y B son las cotas de f y g respectivamente.

Ejercicio 6. *Sean I y J dos intervalos de $\mathbb{R}$ y sean $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones localmente lipschitzianas. Estudia si podemos asegurar que las siguientes funciones son localmente lipschitzianas:*

(a) $F : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = f(x) + g(y)$

Para ver que F es localmente lipschitziana, tenemos que encontrar un entorno U_{xy} de $(x, y) \in I \times J$ tal que existe una constante L_{xy} verificando:

$$|F(x, y) - F(x', y')| \leq L_{xy} \|(x, y) - (x', y')\| \quad \forall (x', y') \in U_{xy}$$

Si $(x, y) \in I \times J$, como f y g son localmente lipschitzianas, podemos encontrar dos entornos $U_x \subset I$, $U_y \subset J$ de x e y respectivamente, tal que se verifica la condición de lipschitz. Podemos tomar $U_{xy} = U_x \cap U_y$, teniendo:

$$|f(x) - f(y)| \leq L_x|x - y|, \quad |f(x) - g(y)| \leq L_y|x - y| \quad \forall x, y \in U_{xy}$$

Tenemos que ver que se verifica para F:

$$|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| = |f(x_1) + g(y_1) - f(x_2) - g(y_2)| \leq$$

$$\leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(y_1) - g(y_2)| \leq L_x|x_1 - x_2| + L_y|y_1 - y_2| \leq$$
$$\leq L_{xy}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \leq L_{xy} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$$

donde $L_{xy} = \text{máx}\, L_x, L_y$.

(b) $G : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $G(x, y) = f(x) \cdot g(y)$

Sean $[a, b] \subset I$, $[c, d] \subset J$ dos intervalos compactos. Como f y g son lipschitzianas, son continuas, por lo tanto, por el teorema de Weierstrass están acotadas en esos dos intervalos compactos por una constante C, que podemos suponerla común para ambas funciones.

Sean L_f y L_g las constantes de lipschitz de f y g en esos dos subintervalos. Entonces:

$$|f(x_1)g(y_1) - f(x_2)g(y_2)| \leq |f(x_1)g(y_1) - f(x_2)g(y_1)| + |f(x_2)g(y_1) - f(x_2)g(y_2)| \leq$$

$$\leq C|f(x_1) - f(x_2)| + C|g(y_1) - g(y_2)| \leq C\left(L_f|x_1 - x_2| + L_g|y_1 - y_2|\right) \leq$$
$$\leq K \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|, \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a, b] \times [c, d]$$

donde $K = 2C\, \text{máx}\, L_f, L_g$.