Ecuaciones escalares autónomas

Dados un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y una función continua $f : I \to \mathbb{R}^d$, un instante $t_0 \in \mathbb{R}$ y un valor $x_0 \in I$, consideramos PVI:

$$(P) \begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Teorema

1. El PVI (P) tiene solución.
2. Si $f(x_0) \neq 0$ entonces la solución es única en sentido local.
3. Si $f(x_0) = 0$ y f es derivable en x_0 entonces la solución es única en sentido global.
4. Si $f(x_0) = 0$ y existen un número $\delta \neq 0$ y una función $G \in \mathcal{C}(J)$ tales que $G(x_0) = 0$ y

   $$G'(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad\qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset I$$

   entonces la solución de (P) no es única en sentido local.

Demostración

1. Distinguimos dos casos:
   - Caso 1: $f(x_0) = 0$. La función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = x_0$ es solución.
   - Caso 2: $f(x_0) \neq 0$. Por continuidad existe un intervalo abierto $K \subset I$ tal que $x_0 \in K$ y $f(x) \neq 0 \qquad \forall x \in K$. Definimos

   $$G : K \to \mathbb{R}, G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(z)}\, dz.$$

   Se aplica el teorema de la función implícita a la ecuación:

   $$G(x) = t - t_0$$

2. Es consecuencia del teorema de la función implícita.
3. Sea $\varphi : J \to \mathbb{R}$ una solución de (P). Queremos probar que $\varphi \equiv x_0$. Supongamos que no; entonces existe $\tau \in I$ tal que $\varphi(\tau) \neq x_0$. Distinguimos dos casos:
   - Caso 1: $\tau > t_0$. Si definimos

   $$\tilde{t}_0 = \max\{t \in [t_0, \tau] \ : \ \varphi(t) = x_0\}.$$

   se cumple $\varphi(\tilde{t}_0) = x_0$ y $\varphi(t) \neq x_0 \; \forall t \in (\tilde{t}_0, \tau]$.

Definimos

$$y : (\tilde{t}_0, \tau] \to \mathbb{R}, \quad y(t) = \ln|\varphi(t) - x_0|\,.$$

Estudiamos esta función y llegamos a una contradicción.

- Caso 2: $\tau < t_0$. Demostración similar.

4. Una solución de (P) es $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(t) = x_0$.
   - Caso 1: Si $G(x_0 + \delta) > 0$ entonces otra solución es

$$\varphi_2 : (-\infty, t_0 + G(x_0 + \delta)) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si} \quad t \leq t_0 \\ G^{-1}(t - t_0) & \text{si} \quad t > t_0 \end{cases}$$

   - Caso 2: Si $G(x_0 + \delta) < 0$ entonces otra solución es

$$\varphi_2 : (t_0 + G(x_0 + \delta), +\infty) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(t) = \begin{cases} G^{-1}(t - t_0) & \text{si} \quad t < t_0 \\ x_0 & \text{si} \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

Notas

- Rebajar hipótesis del apartado 3.
- Aplicar a ecuaciones con variables separadas.

Ejercicio

Estudia la unicidad del PVI

$$\begin{cases} x' = |x|^p \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

según los valores de $p \in (0, +\infty)$.