Modelos Matemáticos II

Antonio Gámiz Delgado
Universidad de Granada

27 de febrero de 2020

1. Cálculo de variaciones

1.1. Herramientas previas y repaso

Necesitaremos recordar algunas nociones y teoremas básicos sobre derivabilidad:

Definición 1. Sea $f : X \longrightarrow Y$ con X, Y espacios normados. Se dice que f es **diferenciable** en un punto $a \in \overset{\circ}{A}$, si existe una aplicación lineal continua $T : X \longrightarrow Y$ verifiando:

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x - a\|}$$

T se denota por $Df(a)$ y se llama *diferencial de f*.

Teorema 2 (derivada de una integral respecto de un parámetro)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible, I un intervalo cerrado y sea $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

(a) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ es integrable.

(b) $\forall x \in X$, la función $t \mapsto f(t, x)$ es derivable en $t \in I$.

(c) Existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq |g(x)| \quad \forall x \in X \; \forall t \in I$$

Entonces la función $F(t) = \int_X f(t, x)dx$ es derivable en t_0 y la derivada es

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)dx$$

1.2. Problema general del cálculo de variaciones

Primeramente definimos un tipo de funciones llamadas *funciones test* o *funciones de la clase de Swartz*, junto con algunos resultados que usaremos bastante para trabajar con ellas.

Definición 3. Dado I intervalo, se llama *espacio de funciones test* al conjunto:

$$\mathcal{D} = \{\phi \in C^{\infty}(a,b) : \ \exists J \subset (a,b) \text{ compacto: } \phi(x) = 0 \text{ si } x \in J\}$$

Lema 4. *Dado $x_0 \in (a,b)$ y $\varepsilon > 0$ tal que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a,b)$, existe $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$ tal que $\phi(x) > 0$ si $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ y $\phi(x) = 0$ en otro caso.*

Demostración. La demostración la vamos a hacer por construcción. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Tenemos que $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 0$, luego g es continua. Veamos que de hecho $g \in C^{\infty}$. Su derivada es:

$$g'(x) = \begin{cases} e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Mediante un proceso iterativo llegamos a:

$$g^{n)}(x) = \begin{cases} e^{1/x}\frac{R(x)}{x^{2n}} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

donde $R(x)$ es un cierto polinomio que no nos interesa calcular. Queremos ver que $\lim\limits_{x \to 0^-} g^{n)}(x) = 0$. Haciendo el cambio $y = -\frac{1}{x}$, el anterior límite equivale a

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y^{2n}}{e^y} = 0 \Longrightarrow g \in C^{\infty}$$

Con lo anterior, solo nos queda definir la función buscada de forma que sea una función test, es decir, la definimos como:

$$\phi(x) = g(x - (x_0 + \varepsilon))g((x_0 - \varepsilon) - x) \quad \varepsilon > 0$$

$\square$

Teorema 5. *Sea $f \in C[a,b]$ tal que*

$$\int f(x)\phi(x)dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Entonces $f(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b]$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in (a,b)$ y supongamos por reducción al absurdo que $f(\bar{x}) \neq 0$. Podemos suponer $f(\bar{x}) > 0$. Aplicando el teorema de conservación del signo, obtenemos $\varepsilon > 0$ $f(x) > 0$ si $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$.

Por el lema 4, existe una función test ϕ tal que $\phi(x) > 0$ si $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ y 0 en otro caso. Luego:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\phi(x)dx = \int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon} f(x)\phi(x)dx > 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$$

Como $\bar{x}$ era arbitrario, tenemos que $f(\bar{x}) = 0$ $\forall \bar{x} \in (a,b)$, y por la continuidad de f podemos extenderlo a los extremos también, es decir, $f(a) = f(b) = 0$.

$\square$

1.2.1. Cálculo de extremales

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, definamos $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x,y,p) \longmapsto F(x,y,p)$. Supongamos que $F \in C^1(\Omega)$ respecto de las dos últimas variables, es decir, existen $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial p}$, continuas.

Usando la función anterior, podemos definir el siguiente funcional:

$$L(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \tag{1}$$

Nuestro objetivo en este apartado será encontrar *extremales* de ese funcional, es decir, máximos o mínimos.

Notación 6. Normalmente, a las derivadas parciales las denotaremos por:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x$$

Los *extremales* los buscaremos entre los elementos de un conjunto de funciones cumpliendo ciertas propiedades:

Definición 7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional en las condiciones anteriores. Definimos entonces el siguiente conjunto:

$$D = \{y \in C(a,b) \cap C^1[a,b] : \text{ se cumplen (a),(b) y (c)}\} \tag{2}$$

(a) $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in (a,b)$

(b) $y(a) = b$ e $y(a) = b$ (*Condición de contorno*)

(c) $\displaystyle\int_a^x F(x, y(x), y'(x))dx < +\infty \quad \forall x \in (a,b)$

El siguiente teorema nos proporcionará una condición sobre las derivadas parciales de F, que nos ayudará a buscar *extremales*. Para su demostración necesitaremos el siguiente lema:

Lema 8. *Sea $\{s_n\} \longrightarrow 0$ una sucesión de números reales, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $y \in D$, entonces $y + s_n\phi \in D \quad \forall n \geq n_0$.*

Lo que nos asegura este lema es que podamos sumar una perturbación *pequeña* a nuestro extremal sin *salirnos* de D.

Teorema 9. *Si $\bar{y} \in D$ es un extremal, entonces:*

$$\int_a^b F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\phi(x)dx + \int_a^b F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\phi'(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

*A $\bar{y}$ se le suele llamar **función crítica**.*

Demostración. Sean $\bar{y} \in D$ extremal y $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$. Definimos el funcional $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(s) = L(\bar{y} + s\phi)$.

Por el lema anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que g está bien definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Ahora queremos derivar g respecto de s, pero necesitamos que esté definida en un intervalo cerrado (por el teorema 2). Para ello, tomamos un intervalo cerrado J de forma que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset$ soporte$(\phi) \subset J \subset [a,b]$.

Derivamos g respecto de s:

$$g'(s) = \left(\int_{J \setminus [a,b]} F(x, \bar{y}, \bar{y}')dx\phi(x) + \int_{[a,b]} F(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))dx \right)' =$$

$$= \int_{[a,b]} \Big(F_y(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi(x) + F_p(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi'(x) \Big) dx =$$

Si evaluamos ahora g' en 0 y usamos que $\bar{y}$ es extremal, tenemos:

$$g'(0) = \int_a^b \Big(F_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\phi + F_p(x, \bar{y}, \bar{y}')\phi' \Big) dx = 0$$

□

El teorema anterior da pie a la siguiente definición:

Definición 10. Sea $\Omega \subset X$ un abierto de un espacio de Banach, X. Sean $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \in \Omega$, $\phi \in X$, se define la *derivada de Gateaux* como:

$$Dg(L(\bar{y}))(\phi) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\bar{y} + s\phi)$$

1.2.2. Ecuación de Euler

Usando el teorema anterior vamos a llegar a una ecuación diferencial de segundo orden que nos ayudará a resolver este problema. Supongamos que tenemos $y \in C^2$, función crítica y $F \in C^2(\Omega)$, definimos $Z(x) = F_p(x, y(x), y'(x))$. Nuestro objetivo ahora es imponer condiciones suficientes para que $Z(x) \in C^1(a,b)$, para poder derivarla y obtener una ecuación diferencial en y'.

Para continuar necesitamos un lema previo:

Lema 11. *Sea $Z \in C^1(x_0, x_1)$, entonces:*

$$\int_a^b Z(x)\phi'(x)dx = -\int_a^b Z'(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Este lema nos permite «intercambiar la derivada de sitio». Usando ahora el Teorema 9 (podemos usarlo porque y es función crítica) y el lema anterior, tenemos:

$$0 = \int_a^b F_y(x,y,y')\phi(x)dx + \int_a^b F_p(x,y,y')\phi'(x)dx =$$
$$= \int_a^b F_y(x,y,y')\phi(x)dx + \int_a^b Z(x)\phi'(x)dx =$$
$$= \int_a^b F_y(x,y,y')\phi(x)dx - \int_a^b Z'(x)\phi(x)dx =$$
$$= \int_a^b \Big(F_y(x,y,y') - Z'(x)\Big)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Y usando ahora el Teorema 5 nos queda:

$$F_y(x,y,y') - Z'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Que denoteramos por:

$$\frac{d}{dx}F_p - F_y(x,y,y') = 0 \quad \textbf{(Ecuación de Euler)}$$

Las condiciones sobre F se pueden rebajar con el siguiente teorema:

Teorema 12. *Si $F \in C^1_{yp}$, $y' \in C^1$, función crítica, entonces:*

$$Z(x) = F_p(x, y(x), y'(x)) \in C^1$$
$$Z'(x) = F_y(x, y(x), y'(x))$$

Ya tenemos la ecuación que queremos resolver. La demostración del teorema es consecuencia de los siguientes resultados.

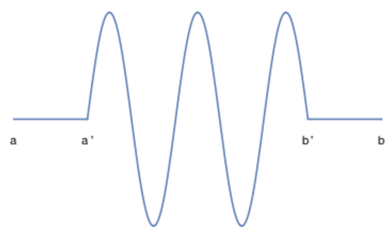
Lema 13. *Sea $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$, entonces:*

$$\phi \text{ admite primitiva} \iff \int_a^b \phi(x)dx = 0$$

Demostración.
($\Rightarrow$) Por hipótesis, supongamos que existe Ψ tal que $\phi = \Psi'$. Ahora solo tenemos que integrarla y usar que ϕ vale 0 en los extremos por ser una función de soporte compacto:

$$\int_a^b \phi(s)ds = \int_a^b \Psi'(s)ds = \Psi\Big|_a^b = 0$$

($\Leftarrow$) Si $\displaystyle\int_a^b \phi(s)ds = 0$, entonces tenemos la siguiente situación: soporte $\phi \subset [a', b']$ tal que $a < a' \leq b' < b$.



Definimos $\Psi(x) = \int_{a'}^{x} \phi(s)ds$ y tenemos $\Psi' = \phi$. Esta demostracion esta mal

$\square$

Lema 14. *Sea $f \in C(a,b)$ tal que* $\int f\phi'(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b) \Longrightarrow f$ *es constante.*

Demostración. Sea $x_0 \in (a,b)$, por el lema 4, podemos tomar $\phi_{x_0} \in \mathcal{D}(a,b)$, de forma que $\int_a^b \phi_{x_0}(s)ds = 1$ (multiplicándola por cierta constante).

Definimos $\Psi(x) = \int_a^x \phi_{x_0}(s)ds$ y tomamos c de forma que:

$$\int_a^b f(s)\Psi'(s) = c\int_a^b \Psi'(s)ds = c\Psi\Big|_a^b = c$$

Tomamos $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$ y veamos que la función $\phi - \lambda\Psi'$ tiene primitiva para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que tiene media 0, y despejemos λ:

$$\int_a^b \phi(s) - \lambda\Psi'(s) = 0 \Longrightarrow \lambda = \int_a^b \phi(s)ds$$

Haciéndo esa elección de λ, $\phi - \lambda\Psi'$ tiene primitiva por el lema 13.

$$0 = \int_a^b f(s)(\phi(s) - \lambda\Psi'(s))ds = \int_a^b f(s)\phi(s)ds - \lambda\int_a^b f(s)\Psi'(s)ds =$$

$$= \int_a^b f(s)\phi(s)ds - c\int_a^b \phi(s)ds = \int_a^b (f(s) - c)\phi(s)ds \Rightarrow f(s) - c = 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

$\square$

Lema 15. *Sean f,g funciones continuas en (a,b) tales que:*

$$\int g\phi + \int f\phi' = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Entonces $f \in C^1(a,b)$ y $g = f'$.

Demostración. Tomamos $x_0 \in (a,b)$ y definimos $\tilde{f}(x) = \int_a^x g(s)ds \Rightarrow \tilde{f} \in C^1$.

$$\int_a^b \tilde{f}(s)\phi'(s) + g(s)\phi(s)ds = \int_a^b \tilde{f}(s)\phi'(s) + \tilde{f}'(s)\phi(s)ds = \int_a^b (\tilde{f}\phi) = \tilde{f}\phi\Big|_a^b = 0$$

Restando la expresión de la hipótesis menos la anterior, obtenemos:

$$0 = \int_a^b f(s)\phi'(s)ds - \int_a^b \tilde{f}(s)\phi'(s)ds = \int_a^b (f - \tilde{f})(s)\phi'(s)ds$$

Y usnado el lema 14, tenemos que $f - \tilde{f}$ es constante, luego $f \in C^1$ ya que $\tilde{f}$ también pertenece a C^1.

□

1.3. Ejemplos

A continuación veremos un ejemplo teórico y algunos ejemplos más prácticas de la teoría anterior.

1.3.1. Problema de Braquistocrona

Este problema se centra principalmente en averiguar que forma (curva) tenemos que darle a un tobogán para que este sea el más rápido.

A esa curva la vamos a denotar por $Y(t)$ y vamos a suponer que pertenece a $C^1(0, L)$, es decir, que no tenga picos. Además, vamos a suponer que el tobogán tiene altura máximo 1, y mínima 0, es decir, $Y(0) = 1$ e $Y(L) = 0$. También necesitamos que el tobogán tenga sentido, es decir, que no tenga subidas ni bajadas muy bruscas, luego necesitamos imponer $Y'(x) < 1 \quad \forall x \in (0, L)$.

Recordemos primero algunas nociones de física. Vamos a denotar por $(x(t), y(t))$ a la posición de una persona en el tobogán en el instante $t \in [0, L]$, por m a su masa y por g a la gravedad. Recordemos que la expresión de la energía es $mgy(t)$, la de la velocidad es $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ y la de la energía cinética es $\frac{mv(t)^2}{2}$.

Si hacemos el tobogán suficientemente suave, se tiene que verificar lo siguiente:

$$mgy(t) + \frac{m}{2}(x'(t)^2 + y'(t)^2) \equiv cte \tag{3}$$

En el primer momento nos dejamos caer, luego en $t = 0$, $(3) = mg$

Tenemos entonces $y(t) = Y(x(t)) \Rightarrow y'(t) = Y'(x(t))x'(t)$, sustituyendo en (3):

$$mgY(x(t)) + \frac{m}{2}x'(t)^2 + \frac{m}{2}(Y'(x(t))x'(t))^2 = mg$$

$$x'(t)^2 \left(1 + Y'(x(t))^2\right) = 2g\left(1 - Y(x(t))\right) \Rightarrow x'(t) = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{1 - Y(x(t))}{1 + Y'(x(t))^2}}$$

Estamos buscando el tiempo de llegada, T, ¿cómo lo hacemos? Aplicamos un truco típico de ecuaciones diferenciales:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{x'(t)}{x'(t)}dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^T \frac{\sqrt{1 + Y'(x(t))^2}}{\sqrt{1 - Y(x(t))}}x'(t)dt$$

Que tras el cambio de variable $x = x(t)$ nos queda:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^L \frac{\sqrt{1+Y'(x)^2}}{\sqrt{1-Y(x)}} dx$$

Definimos ahora el conjunto de funciones donde vamos a buscar nuestro mínimo:

$$D = \{y \in C^1(0,L), y(0) = 1, y(L) = 0, y'(x) < 1 \quad \forall x \in (0,L)\}$$

Y definimos nuestro funcional:

$$L_y = \int_0^L \frac{\sqrt{1+Y'(x)^2}}{\sqrt{1-Y(x)}} dx$$