Modelos Matemáticos II

Antonio Gámiz Delgado
Universidad de Granada

5 de marzo de 2020

1. Cálculo de variaciones

1.1. Herramientas previas y repaso

Necesitaremos recordar algunas nociones y teoremas básicos sobre derivabilidad:

Definición 1.1. Sea $f : X \longrightarrow Y$ con X, Y espacios normados. Se dice que f es **diferenciable** en un punto $a \in \overset{\circ}{A}$, si existe una aplicación lineal continua $T : X \longrightarrow Y$ verifiando:

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

T se denota por $Df(a)$ y se llama *diferencial de* f.

Teorema 1.2 (derivada de una integral respecto de un parámetro)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible, I un intervalo cerrado y sea $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

(a) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ es integrable.

(b) $\forall x \in X$, la función $t \mapsto f(t,x)$ es derivable en $t \in I$.

(c) Existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| \leq |g(x)| \quad \forall x \in X \ \forall t \in I$$

Entonces la función $F(t) = \int_X f(t,x)dx$ es derivable en t_0 y la derivada es

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)dx$$

1.2. Problema general del cálculo de variaciones

Primeramente definimos un tipo de funciones llamadas *funciones test* o *funciones de la clase de Schwartz*, junto con algunos resultados que usaremos bastante para trabajar con ellas.

Definición 1.3. Dado I intervalo, se llama *espacio de funciones test* al conjunto:

$$\mathcal{D} = \{\phi \in C^\infty(a,b) : \ \exists J \subset (a,b) \text{ compacto: } \phi(x) = 0 \text{ si } x \in J\}$$

Lema 1.4. *Dado $x_0 \in (a,b)$ y $\varepsilon > 0$ tal que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a,b)$, existe $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$ tal que $\phi(x) > 0$ si $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ y $\phi(x) = 0$ en otro caso.*

Demostración. La demostración la vamos a hacer por construcción. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Tenemos que $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$, luego g es continua. Veamos que de hecho $g \in C^\infty$. Su derivada es:

$$g'(x) = \begin{cases} e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Mediante un proceso iterativo llegamos a:

$$g^{n)}(x) = \begin{cases} e^{1/x}\frac{R(x)}{x^{2n}} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

donde $R(x)$ es un cierto polinomio que no nos interesa calcular. Queremos ver que $\lim_{x\to 0^-} g^{n)}(x) = 0$. Haciendo el cambio $y = -\frac{1}{x}$, el anterior límite equivale a

$$\lim_{y\to +\infty} \frac{y^{2n}}{e^y} = 0 \Longrightarrow g \in C^\infty$$

Con lo anterior, solo nos queda definir la función buscada de forma que sea una función test, es decir, la definimos como:

$$\phi(x) = g(x - (x_0 + \varepsilon))g((x_0 - \varepsilon) - x) \quad \varepsilon > 0$$

□

Teorema 1.5. *Sea $f \in C[a,b]$ tal que*

$$\int f(x)\phi(x)dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Entonces $f(x) = 0 \;\; \forall x \in [a,b]$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in (a,b)$ y supongamos por reducción al absurdo que $f(\bar{x}) \neq 0$. Podemos suponer $f(\bar{x}) > 0$. Aplicando el teorema de conservación del signo, obtenemos $\varepsilon > 0$ $f(x) > 0$ si $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$.

Por el lema 1.4, existe una función test ϕ tal que $\phi(x) > 0$ si $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ y 0 en otro caso. Luego:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\phi(x)dx = \int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon} f(x)\phi(x)dx > 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$$

Como $\bar{x}$ era arbitrario, tenemos que $f(\bar{x}) = 0$ $\forall \bar{x} \in (a,b)$, y por la continuidad de f podemos extenderlo a los extremos también, es decir, $f(a) = f(b) = 0$.

□

1.2.1. Cálculo de extremales

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, definamos $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x, y, p) \longmapsto F(x, y, p)$. Supongamos que $F \in C^1(\Omega)$ respecto de las dos últimas variables, es decir, existen $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial p}$, continuas.

Usando la función anterior, podemos definir el siguiente funcional:

$$L(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \tag{1}$$

Nuestro objetivo en este apartado será encontrar *extremales* de ese funcional, es decir, máximos o mínimos.

Notación 1.6. Normalmente, a las derivadas parciales las denotaremos por:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x$$

Los *extremales* los buscaremos entre los elementos de un conjunto de funciones cumpliendo ciertas propiedades:

Definición 1.7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional en las condiciones anteriores. Definimos entonces el siguiente conjunto:

$$D = \{y \in C(a, b) \cap C^1[a, b] : \text{ se cumplen (a),(b) y (c)}\} \tag{2}$$

(a) $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in (a, b)$

(b) $y(a) = b$ e $y(a) = b$ (*Condición de contorno*)

(c) $\displaystyle\int_a^x F(x, y(x), y'(x))dx < +\infty \quad \forall x \in (a, b)$

El siguiente teorema nos proporcionará una condición sobre las derivadas parciales de F, que nos ayudará a buscar *extremales*. Para su demostración necesitaremos el siguiente lema:

Lema 1.8. *Sea $\{s_n\} \longrightarrow 0$ una sucesión de números reales y $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $y \in D$, entonces $y + s_n\phi \in D \quad \forall n \geq n_0$.*

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$ y $K =$ soporte ϕ.Tenemos que comprobar que $y+s_n\phi$ cumple las condiciones de la definición 1.7.

(a) Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x_n \in (a, b)$ tal que $(x_n, y(x_n) + s_n\phi(x_n), y'(x_n) + s_n\phi'(x_n)) \notin \Omega \Rightarrow x_n \in$ soporte ϕ, ya que si no estuviera, tendríamos que $\phi(x_n) = 0$, luego $(x_n, y(x_n), y'(x_n)) \in \Omega$. Como el soporte es compacto, podemos suponer que $\{x_n\} \longrightarrow \bar{x} \in$ soporte $\phi \in (a, b)$. Si tomamos límite:

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y(x_n) + s_n\phi(x_n), y'(x_n) + s_n\phi'(x_n)) = (x_n, y(x_n), y'(x_n)) \notin \Omega$$

porque el complementario de Ω es cerrado, luego el límite se queda fuera.

(b) Evidente, ya que $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

(c) Tomando $n \geq n_0$, tenemos:

$$\int_a^b \Big|F(x_n, y(x_n) + s_n\phi(x_n), y'(x_n) + s_n\phi'(x_n))\Big|dx =$$
$$= \int_{(a,b)\setminus K} \Big|F(...)\Big|dx + \int_K \Big|F(...)\Big|dx < +\infty$$

El primer término es finito ya que $F(x_n, y_n, y'_n) \in D(a,b)$ y el segundo término porque es la integal de una función continua en un compacto.

□

Lo que nos asegura este lema es que podamos sumar una perturbación *pequeña* a nuestro extremal sin *salirnos* de D.

Teorema 1.9. *Si $\bar{y} \in D$ es un extremal, entonces:*

$$\int_a^b F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\phi(x)dx + \int_a^b F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\phi'(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

*A $\bar{y}$ se le suele llamar **función crítica**.*

Demostración. Sean $\bar{y} \in D$ extremal y $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$. Definimos el funcional $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(s) = L(\bar{y} + s\phi)$.

Por el lema anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que g está bien definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Ahora queremos derivar g respecto de s, pero necesitamos que esté definida en un intervalo cerrado (por el teorema 1.2). Para ello, tomamos un intervalo cerrado J de forma que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \text{soporte}(\phi) \subset J \subset [a,b]$.

Derivamos g respecto de s:

$$g'(s) = \left(\int_{J\setminus[a,b]} F(x, \bar{y}, \bar{y}')dx\phi(x) + \int_{[a,b]} F(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))dx\right)' =$$
$$= \int_{[a,b]} \Big(F_y(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi(x) + F_p(x, \bar{y} + s\phi(x), \bar{y}' + s\phi'(x))\phi'(x)\Big)dx =$$

Si evaluamos ahora g' en 0 y usamos que $\bar{y}$ es extremal, tenemos:

$$g'(0) = \int_a^b \Big(F_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\phi + F_p(x, \bar{y}, \bar{y}')\phi'\Big)dx = 0$$

□

El teorema anterior da pie a la siguiente definición:

Definición 1.10. Sea $\Omega \subset X$ un abierto de un espacio de Banach, X. Sean $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \in \Omega$, $\phi \in X$, se define la *derivada de Gateaux* como:

$$Dg(L(\bar{y}))(\phi) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\bar{y} + s\phi)$$

1.2.2. Ecuación de Euler

Usando el teorema anterior vamos a llegar a una ecuación diferencial de segundo orden que nos ayudará a resolver este problema. Supongamos que tenemos $y \in C^2$, función crítica y $F \in C^2(\Omega)$, definimos $Z(x) = F_p(x, y(x), y'(x))$. Nuestro objetivo ahora es imponer condiciones suficientes para que $Z(x) \in C^1(a, b)$, para poder derivarla y obtener una ecuación diferencial en y'.

Para continuar necesitamos un lema previo:

Lema 1.11. *Sea* $Z \in C^1(x_0, x_1)$, *entonces:*

$$\int_a^b Z(x)\phi'(x)dx = -\int_a^b Z'(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b)$$

Demostración. Resolviendo la integal por partes tenemos:

$$\left.\begin{matrix} u = Z(x) & du = Z'(x)dx \\ dv = \phi'(x)dx & v = \phi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_a^b Z(x)\phi'(x)dx = Z(x)\phi(x)\Big|_a^b - \int_a^b Z'(x)\phi(x)dx =$$

$$= -\int_a^b Z'(x)\phi(x)dx$$

□

Este lema nos permite «intercambiar la derivada de sitio». Usando ahora el Teorema 1.9 (podemos usarlo porque y es función crítica) y el lema anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b F_y(x, y, y')\phi(x)dx + \int_a^b F_p(x, y, y')\phi'(x)dx = \\ &= \int_a^b F_y(x, y, y')\phi(x)dx + \int_a^b Z(x)\phi'(x)dx = \\ &= \int_a^b F_y(x, y, y')\phi(x)dx - \int_a^b Z'(x)\phi(x)dx = \\ &= \int_a^b \Big(F_y(x, y, y') - Z'(x)\Big)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b) \end{aligned}$$

Y usando ahora el Teorema 1.5 nos queda:

$$F_y(x, y, y') - Z'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Que denoteramos por:

$$\frac{d}{dx}F_p - F_y(x, y, y') = 0 \quad \textbf{(Ecuación de Euler)}$$

Las condiciones sobre F se pueden rebajar con el siguiente teorema:

Teorema 1.12. *Si $F \in C^1_{yp}$, $y' \in C^1$, función crítica, entonces:*

$$Z(x) = F_p(x, y(x), y'(x)) \in C^1$$

$$Z'(x) = F_y(x, y(x), y'(x))$$

Ya tenemos la ecuación que queremos resolver. La demostración del teorema es consecuencia de los siguientes resultados.

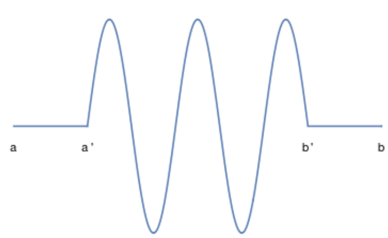
Lema 1.13. *Sea $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$, entonces:*

$$\phi \text{ admite primitiva} \iff \int_a^b \phi(x)dx = 0$$

Demostración.
($\Rightarrow$) Por hipótesis, supongamos que existe Ψ tal que $\phi = \Psi'$. Ahora solo tenemos que integrarla y usar que ϕ vale 0 en los extremos por ser una función de soporte compacto:

$$\int_a^b \phi(s)ds = \int_a^b \Psi'(s)ds = \Psi\Big|_a^b = 0$$

($\Leftarrow$) Si $\displaystyle\int_a^b \phi(s)ds = 0$, entonces tenemos la siguiente situación: soporte $\phi \subset [a', b']$ tal que $a < a' \leq b' < b$.



Definimos $\Psi(x) = \displaystyle\int_{a'}^x \phi(s)ds$ y tenemos $\Psi' = \phi$.

□

Lema 1.14. *Sea $f \in C(a, b)$ tal que $\displaystyle\int f\phi'(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b) \Longrightarrow f$ es constante.*

Demostración. Sea $x_0 \in (a, b)$, por el lema 1.4, podemos tomar $\phi_{x_0} \in \mathcal{D}(a, b)$, de forma que $\displaystyle\int_a^b \phi_{x_0}(s)ds = 1$ (multiplicándola por cierta constante).

Definimos $\Psi(x) = \displaystyle\int_a^x \phi_{x_0}(s)ds$ y tomamos c de forma que:

$$\int_a^b f(s)\Psi'(s) = c\int_a^b \Psi'(s)ds = c\Psi\Big|_a^b = c$$

Tomamos $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$ y veamos que la función $\phi - \lambda\Psi'$ tiene primitiva para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que tiene media 0, y despejemos λ:

$$\int_a^b \phi(s) - \lambda\Psi'(s) = 0 \Longrightarrow \lambda = \int_a^b \phi(s)ds$$

Haciéndo esa elección de λ, $\phi - \lambda\Psi'$ tiene primitiva por el lema 1.13.

$$0 = \int_a^b f(s)(\phi(s) - \lambda\Psi'(s))ds = \int_a^b f(s)\phi(s)ds - \lambda \int_a^b f(s)\Psi'(s)ds =$$

$$= \int_a^b f(s)\phi(s)ds - c\int_a^b \phi(s)ds = \int_a^b (f(s) - c)\phi(s)ds \Rightarrow f(s) - c = 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

$\square$

Lema 1.15. *Sean f,g funciones continuas en (a, b), entonces es equivalente:*

$$\int_a^b g\phi + \int_a^b f\phi' = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b) \Longleftrightarrow f \in C^1(a, b), g = f'$$

Demostración. ($\Rightarrow$)Tomamos $x_0 \in (a, b)$ y definimos $\tilde{f}(x) = \displaystyle\int_a^x g(s)ds \Rightarrow \tilde{f} \in C^1$.

$$\int_a^b \tilde{f}(s)\phi'(s) + g(s)\phi(s)ds = \int_a^b \tilde{f}(s)\phi'(s) + \tilde{f}'(s)\phi(s)ds = \int_a^b (\tilde{f}\phi) = \tilde{f}\phi\Big|_a^b = 0$$

Restando la expresión de la hipótesis menos la anterior, obtenemos:

$$0 = \int_a^b f(s)\phi'(s)ds - \int_a^b \tilde{f}(s)\phi'(s)ds = \int_a^b (f - \tilde{f})(s)\phi'(s)ds$$

Y usnado el lema 1.14, tenemos que $f - \tilde{f}$ es constante, luego $f \in C^1$ ya que $\tilde{f}$ también pertenece a C^1.

($\Leftarrow$)

$$0 = f\phi(x)\Big|_a^b = \int_a^b (f(x)\phi(x))'dx = \int_a^b f(x)\phi'(x)dx + f'(x)\phi(x)dx$$

$\square$

1.3. Ejemplos

A continuación veremos un ejemplo teórico y algunos ejemplos más prácticos de la teoría anterior.

1.3.1. Problema de Braquistocrona

Este problema se centra principalmente en averiguar que forma (curva) tenemos que darle a un tobogán para que este sea el más rápido.

A esa curva la vamos a denotar por $Y(t)$ y vamos a suponer que pertenece a $C^1(0, L)$, es decir, que no tenga picos. Además, vamos a suponer que el tobogán tiene altura máximo 1, y mínima 0, es decir, $Y(0) = 1$ e $Y(L) = 0$. También necesitamos que el tobogán tenga sentido, es decir, que no tenga subidas ni bajadas muy bruscas, luego necesitamos imponer $Y'(x) < 1 \quad \forall x \in (0, L)$.

Recordemos primero algunas nociones de física. Vamos a denotar por $(x(t), y(t))$ a la posición de una persona en el tobogán en el instante $t \in [0, L]$, por m a su masa y por g a la gravedad. Recordemos que la expresión de la energía es $mgy(t)$, la de la velocidad es $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ y la de la energía cinética es $\frac{mv(t)^2}{2}$.

Si hacemos el tobogán suficientemente suave, se tiene que verificar lo siguiente:

$$mgy(t) + \frac{m}{2}(x'(t)^2 + y'(t)^2) \equiv cte \tag{3}$$

En el primer momento nos dejamos caer, luego en $t = 0$, $(3) = mg$

Tenemos entonces $y(t) = Y(x(t)) \Rightarrow y'(t) = Y'(x(t))x'(t)$, sustituyendo en (3):

$$mgY(x(t)) + \frac{m}{2}x'(t)^2 + \frac{m}{2}(Y'(x(t))x'(t))^2 = mg$$

$$x'(t)^2\left(1 + Y'(x(t))^2\right) = 2g\left(1 - Y(x(t))\right) \Rightarrow x'(t) = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{1 - Y(x(t))}{1 + Y'(x(t))^2}}$$

Estamos buscando el tiempo de llegada, T, ¿cómo lo hacemos? Aplicamos un truco típico de ecuaciones diferenciales:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{x'(t)}{x'(t)}dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^T \frac{\sqrt{1 + Y'(x(t))^2}}{\sqrt{1 - Y(x(t))}}x'(t)dt$$

Que tras el cambio de variable $x = x(t)$ nos queda:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^L \frac{\sqrt{1 + Y'(x)^2}}{\sqrt{1 - Y(x)}}dx$$

Definimos ahora el conjunto de funciones donde vamos a buscar nuestro mínimo:

$$D = \{y \in C^1(0, L), y(0) = 1, y(L) = 0, y'(x) < 1 \quad \forall x \in (0, L)\}$$

Y definimos nuestro funcional:

$$L_y = \int_0^L \frac{\sqrt{1 + Y'(x)^2}}{\sqrt{1 - Y(x)}}dx$$

Usando la notación del principio, tenemos una función F tal que $F(x, y, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{1-y}}$

Usando el Teorema 1.12 podemos definir:

$$Z(x) = \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{1 - y(x)}}\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \in C^1(0, T)$$

Ahora, en lugar de despejar $y'(x)$, vamos a ver que $y \in C^2$. Definiendo $\Psi(y') = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = Z(x)\sqrt{1 + y'^2}$. Como $\Psi(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ tiene inversa de clase 1, tenemos:

$$y'(x) = \Psi^{-1}(Z(x)\sqrt{1-y(x)}) \Rightarrow y \in C^2$$

En general, tenemos que si F no depende de x, podemos hacer:

$$D(x) = F(y,y') - Z(x)y' \Rightarrow D'(x) = \frac{\partial F}{\partial y}(y,y')y' + \frac{\partial F}{\partial p}(y,y')y'' - Z'(x)y' - Z(x)y'' =$$

$$= y'(Z'(x) - Z'(x)) = 0$$

Es decir, para alguna constante $C \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$F(y,y') - Z(x)y' = C$$

En nuestro caso particular, nos quedaría:

$$\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{1-y(x)} - \frac{1}{\sqrt{1-y(x)}}\frac{y'(x)^2}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y(x)}}\frac{1}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = C$$

Esa ecuación diferencial, es de variables separadas, deberíamos resolverla con las condiciones iniciales $y(0) = 1, y(L) = 0$, pero la solución es trascendente, es decir, no tiene expresión explícita, es un cicloide.

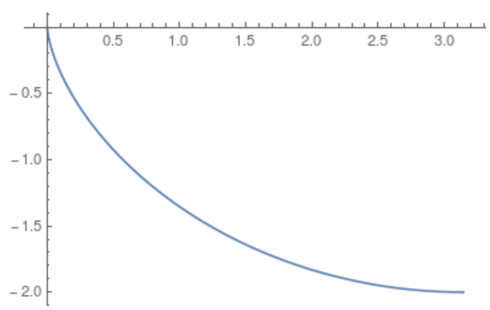


Figura 1: Ejemplo de cicloide

1.3.2. Ejercicios prácticos

Ejercicio. *Encontrar la curva en la que el siguiente funcional podría alcanzar su extremo:*

$$I(y) = \int_1^2 \Big(y'(x)^2 - 2xy(x)\Big)dx$$

con condiciones de contorno $y(1) = 0, y(2) = -1$.

Solucion:
Definimos $F(x,y,p) = p^2 - 2xy$ y obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 2p, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2x \Rightarrow Z(x) = 2y'(x), \quad Z'(x) = -2x$$

Resolviendo la ultima ecuación, obteniendo:

$$Z(x) = -x^2 + C \Rightarrow 2y'(x) = -x^2 + C \Rightarrow y'(x) = \frac{-x^2 + C}{2} \Rightarrow y(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{c}{2}x + D$$

Usando las condiciones de contorno, podemos calcular el valor de C y D, obteniendo:

$$y(x) = \frac{x - x^3}{6}$$

Ejercicio. *Encuentra las curvas que unen* $(1,3)$ *con* $(2,5)$, *que puedan ser extremos del funcional:*

$$I(y) = \int_1^2 \Big(y'(x) + x^2 y'(x)^2\Big)dx$$

Solución $y(x) = -\frac{4}{x} + 7$

1.4. Relación de ejercicios

Ejercicio 1.1. *Dado el funcional*

$$\mathcal{F}(y(x)) = \int_a^b \Phi(x, y(x), y'(x))dx$$

demuéstrese la equivalencia de las dos formas siguientes de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(\Phi - y'\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = 0$$

Ejercicio 1.2. *Obténgase la forma que adopta la ecuación de Euler-Lagrange en los siguientes casos particulares:*

a) Φ *sólo depende de* y'.

b) Φ *no depende de* y.

c) Φ *no depende explícitamente de* x.

d) $\Phi = G(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$.

Ejercicio 1.3. *Aplíquense los resultados anteriores a los ejemplos siguientes:*

a) $\mathcal{F}(y(x)) = \displaystyle\int y(2x - y)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = \pi/2$.

b) $\mathcal{F}(y(x)) = \displaystyle\int (y^2 + 2xyy')dx$, $y(a) = A$, $y(b) = B$.

c) $\mathcal{F}(y(x)) = \displaystyle\int y'(1 + x^2 y')dx$, $y(1) = 3$, $y(2) = 5$.

2. Derivadas débiles

Recordemos el espacio $L^1(a,b)$ de las funciones $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ que son Lebesgue integrables. Ese espacio estaba formado por clases de equivalencia, que normalmente llamamos clases de funciones. Que sea Lebesgue integrable, no quiere decir que sea continua, como nos indica la *función de Dirichlet*, que es Lebesgue integrable pero evidentemente no es continua.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Toda función continua no es integrable, necesitamos que esté acotada. Eso nos dice que todas las funciones continuas no están en $L^1(a,b)$. Para evitar eso, definimos el *espacio de funciones continuas localmente integrables*, que denotaremos por:

$$L^1_{loc}(a,b) = \{f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall J \text{ intervalo compacto}, f_{|J} \text{ es integrable}\}$$

Ese espacio soluciona el problema anterior ya que todas las funciones continuas sí son localmente integrables.

Definición 2.1. Sean $f, g \in L^1_{loc}(a,b)$, se dice que g es la derivada débil de f si se verifica que:

$$\int_a^b f\phi' + \int_a^b g\phi = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Cabe resaltar, que la definición anterior implica que la derivada débil de una función no es única, es decir, una función f puede admitir varias derivadas débiles. Sin embargo, como veremos en el siguiente corolario, serán iguales para casi todo punto.

Usando el espacio definido anteriormente, podemos generalizar el lema fundamental del cálculo de variciones:

Lema 2.2. *Si $f \in L^1_{loc}(a,b)$ cumpliendo:*

$$\int_a^b f\phi = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Entonces $f(x) = 0$ a.e $x \in (a,b)$.

Como consecuencia, tenemos:

Corolario 2.3. *Sea $f \in L^1_{loc}(a,b)$ y $g, \tilde{g} \in L^1_{loc}(a,b)$ dos derivadas débiles de f. Entonces $g(x) = \tilde{g}(x)$ a.e $x \in (a,b)$.*

Demostración. Simplemente usando la definición y el lema generalizado tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b f\phi' + \int_a^b g\phi = 0 \\ \displaystyle\int_a^b f\phi' + \int_a^b \tilde{g}\phi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b (g-\tilde{g})\phi = 0 \Rightarrow g = \tilde{g} \ a.e$$

□

Para la demostración del lema generalizado, necesitaremos algunas herramientos previas. Recordemos primeramente una propiedad de las funciones Lebesgue integrables:

Proposición 2.4. *Dado $f \in L^1_{loc}(a,b)$, existe una secuencia de funciones simples, $\{g_n\}$, tal que $\{g_n\} \longrightarrow f$.*

Lema 2.5. *Sea g una función simple, entonces existe una sucesión de funciones de soporte compacto $\phi_n \in \mathcal{D}(a,b)$ tal que $\{\phi_n\} \longrightarrow g$ a.e y además $|\phi_n(x)| \leq |g(x)|$.*

Ahora ya sí podemos demostrar el lema generalizado:

Demostración. Sea g una función simple. Por el lema anterior, puedo tomar una sucesión ϕ_n de funciones de soporte compacto convergiendo a g.Usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, podemos intercambiar el límite en la siguiente integral:

$$\lim_{n\to+\infty} \int \phi_n(x)f(x)dx = \int g(x)f(x)dx$$

Por la proposición anterior, nos podemos tomar una sucesión g_n de funciones simples de forma que $\{g_n\} \longrightarrow f$ *a.e.* De forma análoga:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \int g_n(x)f(x)dx = \int f(x)^2dx \Rightarrow f \equiv 0 \ a.e$$

□

La derivada débil tiene una propiedad parecida a la derivada clásica, ambas son conceptos locales, es decir:

Proposición 2.6. *Si f es una función que admite derivada débil $f' = g$ en (a,b), y tomamos $(a',b') \subset (a,b)$, entonces $f_{|(a',b')}$ admite derivada débil y vale $g_{|(a',b')}$.*

Demostración. Evidente usando el hecho de que $\mathcal{D}(a',b') \hookrightarrow \mathcal{D}(a,b)$. □

Toda función derivable no es derivable débil, como ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.7. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{|x|}$, es derivable débil pero no derivable.

Primero tenemos que ver que $g \in L^1_{loc}(a,b)$. Si el intervalo compacto J escogido no contiene al 0, entonces podemos integral sin problema. En caso contrario, tenemos que ver qué pasa con la siguiente integral:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g(x)|dx \overset{g\ simetrica}{=} 2\int_0^{\varepsilon} |g(x)|dx = 2\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^{\varepsilon} = 2\sqrt{\varepsilon} < +\infty$$

Ahora tenemos que comprobar que g es la derivada débil de f, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}} f\phi' + \int_{\mathbb{R}} g\phi = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx = \int_{|x|>\varepsilon} f(x)\phi'(x)dx + \underbrace{\int_{|x|<\varepsilon} f(x)\phi'(x)dx}_{f\phi' \leq 2\sqrt{\varepsilon}\,\text{máx}\,\phi' \to 0} = \int_{|x|>\varepsilon} f(x)\phi'(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\phi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx =$$

$$= \underbrace{f(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon}}_{=f(-\varepsilon)\phi(-\varepsilon)\to 0} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} g(x)\phi(x)dx + \underbrace{f\phi\Big|_{\varepsilon}^{+\infty}}_{=f(\varepsilon)\phi(\varepsilon)\to 0} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x)\phi(x)dx =$$

$$- \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)dx + \underbrace{\int_{|x|<\varepsilon} g(x)\phi(x)dx}_{\to 0} = - \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)dx$$

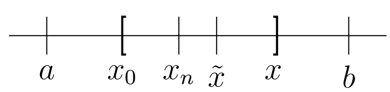
Vamos a ver que la derivada de una integral de una derivada débil, es la propia función (como es de esperar). Para ello vamos a tener que desarrollar una serie de pasos previos.

Proposición 2.8. *Sea* $g \in L^1_{loc}(a,b)$ *y tomo* $x_0 \in (a,b)$. *Defino* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *como*

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(x)ds$$

Entonces $f' = g$ *y* $f \in C[a,b]$.

Demostración. La integral en f tiene sentido ya que $[x_0, x] \subset (a,b)$. Comprobemos que $f \in C(a,b)$. Tomamos $\{x_n\}$ sucesión de puntos de (x_0, x) tal que $x_n \to \tilde{x} \in [x_0, x]$ (por ser compacto).



- Si $x \notin [x_0, \tilde{x}] \Rightarrow x \notin [x_0, x_n]$ para $n \geq n_0$.

- Si $x \in (x_0, \tilde{x}) \Rightarrow x \in [x_0, x_n]$ para $n \geq n_0$.

Y ese es la clave que nos va a permitir ver que $f(x_n) \to f(\tilde{x})$. Sea J un intervalo compacto de forma que $[x_0, x] \subset J \subset (a,b)$.

$$\int_{x_0}^{x_n} g(x)dx = \int_J g(x)\chi_{[x_0,x_n]}(x)dx$$

Usando lo anterior obtenemos la convergencia puntual de la sucesión $g(x)\chi_{[x_0,x_n]} \xrightarrow{cp} g(x)\chi_{(x_0,\tilde{x})}$. Lo que nos da la convergencia en integral también:

$$f(x_n) = \int_J g(x)\chi_{[x_0,x_n]}(x)dx \xrightarrow{cp} \int_J g(x)\chi_{(x_0,\tilde{x})}(x)dx = \int_{x_0}^{\tilde{x}} g(x)dx = f(\tilde{x})$$

Luego $f \in C(a,b) \Rightarrow f \in L^1_{loc}(a,b)$.

Ahora nos queda ver $f' = g$. Para ello tenemos que comprobar que:

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)dx + \int_a^b g(x)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a,b)$$

Tenemos el problema de que g no tiene por qué ser derivable (podría ser una función escalón, por ejemplo). Vamos a empezar suponiendo que $g \in L^1([a,b])$ (para que f esté bien definida) y que $x_0 = a$. Al final reduciremos esas hipótesis hasta llegar a que $g \in L^1_{loc}(a,b)$.

Paso 1: $g \in L^1([a,b])$ y $x_0 = a$. Para ver que

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)dx = -\int_a^b g(x)\phi(x)dx$$

vamos a tener que usar el Teorema de Fubini-Tonelli.

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)dx = \int_a^b \left(\int_a^x g(s)ds\right)\phi'(x)dx \overset{T^{\text{a}}FT}{=} \int_a^b \left(\int_s^b g(s)\phi'(x)dx\right)ds =$$

$$\int_a^b g(s)\left(\int_s^b \phi'(x)dx\right)ds = \int_a^b g(s)(\underbrace{\phi(b)}_{=0} - \phi(s))ds = -\int_a^b g(s)\phi'(s)ds$$

Paso 2: Reemplazamos la hipótesis $x_0 = a$ por $x_0 \in (a,b)$ y usamos el paso 1:

$$\int_a^b g(x)\phi(x)dx = -\int_a^b \left(\int_a^x g(s)ds\right)\phi'(x)dx$$

Vemos que la integral del interior se puede expresar como una constante más una función:

$$\int_a^x g(s)ds = \underbrace{\int_a^{x_0} g(s)ds}_{cte=C} + \underbrace{\int_{x_0}^x g(s)ds}_{funcion}$$

Luego:

$$-\int_a^b \left(\int_a^x g(s)ds\right)\phi'(x)dx = -\underbrace{\int_a^b B\phi'(x)dx}_{=B(\phi(b)-phi(a))=0} - \int_a^b \left(\int_{x_0}^x g(s)ds\right)\phi'(x)dx = -\int_a^b f(x)\phi(x)dx$$

Caso 3: Ahora sustituimos la hipótesis $g \in L^1([a,b])$ por $g \in L^1_{loc}(a,b)$. Tomamos un subintervalo compacto $[a'.b'] \subset (a,b)$ donde $g_{|[a'.b']} \in L^1([a',b'])$, de forma que soporte $\phi \subset [a',b']$. Sea $x_0 \in [a',b']$ y $x \in (a,b)$.

Ahora aplicamos el caso 2, usando que soporte $\phi \subset [a',b']$:

$$\int_a^b g(x)\phi(x)dx = \int_{a'}^{b'} g(x)\phi(x)dx = -\int_{a'}^{b'}\left(\int_{x_0}^x g(s)ds\right)\phi'(x)dx = -\int_a^b f(x)\phi'(x)dx$$

$\square$