Aproximación de funciones continuas

A estas alturas de tu formación matemática debes saber cualquier función continua f se puede aproximar mediante una sucesión de funciones regulares que converge uniformemente en compactos hacia f.

Por ejemplo, en el ámbito del Análisis Numérico, uno de los teoremas fundamentales es el Teorema de Stone-Weierstrass (que debes conocer aunque sea en su versión escalar). Usándolo se prueba que:

Lema 5

Dado un conjunto compacto no vacío $K \subset \mathbb{R}^m$ y una función continua $F : K \to \mathbb{R}^d$, existe una sucesión de funciones $F_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ cuyas componentes son funciones polinómicas cuyas restricciones a K convergen uniformemente hacia F.

El Análisis Funcional ofrece una alternativa interesante que es el *producto de convolución*. Si $\rho_n \in \mathcal{C}^\infty$ es una sucesión regularizante (mollifiers) entonces su convolución con f verifica:

$$\rho_n * f \in \mathcal{C}^\infty \qquad \text{y} \qquad \rho_n * f \to f \text{ uniformemente en compactos.}$$

Sean $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, $(t_0, x_0) \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^d$ una función continua. Se considera el P.V.I.

$$(P) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Lema 6

Sean $M \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Existe una sucesión de funciones $f_n : D \to \mathbb{R}^d$ localmente lispchitzianas tales que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$\|f_n(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{R}_{a,b} \tag{1}$$

y ademas f_n converge uniformemente hacia f en $\mathcal{R}_{a,b}$.

Para demostrar el lema basta usar el lema anterior y recordar que las funciones regulares son localmente lipschitzianas. Con más detalle:

Aplicamos el lema anterior al compacto $\mathcal{R}_{a,b}$ y a la función $f\big|_{\mathcal{R}_{a,b}}$. Existe una sucesión de funciones $F_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tales que

$$F_n\big|_{\mathcal{R}_{a,b}} \to f\big|_{\mathcal{R}_{a,b}} \qquad \text{uniformemente en } \mathcal{R}_{a,b}$$

y cuyas componentes son funciones polinómicas en las variables $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_d)$; en consecuencia $F_n \in \mathcal{C}^\infty$ y por tanto cada F_n es localmente lipschitziana.
No estamos seguros de que se verifique la desigualdad (1), por lo que consideramos la sucesión

$$H_n = \max_{(t,x)\in\mathcal{R}_{a,b}} \|F_n(t, x)\|$$

que converge hacia $H = \max_{(t,x)\in\mathcal{R}_{a,b}} \|f(t, x)\|$.
Ahora definimos $f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ como $f_n = \frac{H}{H_n+\frac{1}{n}} F_n$. Esta sucesión verifica:

- Cada $f_n \in \mathcal{C}^\infty$ y por tanto es localmente lipschitziana.
- Verifica la desigualdad (1).
- $f_n\big|_{\mathcal{R}_{a,b}} \to f\big|_{\mathcal{R}_{a,b}}$ uniformemente en $\mathcal{R}_{a,b}$.

Sobre sucesiones de funciones

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Sea $f_n : I \to \mathbb{R}^d$ una sucesión de funciones continuas ($n \in \mathbb{N}$).

Definición

Diremos que la sucesión f_n es **uniformemente acotada** si existe $M > 0$ tal que

$$\|f_n(t)\| \leq M \qquad \forall t \in I \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definición

Diremos que la sucesión f_n es **equicontinua** si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $t, s \in I$:

$$|t - s| < \delta \ \Rightarrow \ \|f_n(t) - f_n(s)\| < \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En particular, todas las funciones de una sucesión equicontinua son *uniformemente continuas*.

Teorema de Ascoli-Arzelà

Dado un intervalo compacto I y dada una sucesión de funciones continuas $f_n : I \to \mathbb{R}^d$ uniformemente acotada y equicontinua, existe una sucesión parcial de la anterior $f_{\sigma(n)}$ que converge uniformemente en I.

Esquema de la demostración

1. Elección de un subconjunto numerable y denso en I y definición de una parcial $f_{\sigma(n)}$ que converge puntualmente en ese conjunto denso.
2. Extensión de la convergencia puntual en I.
3. Comprobación de que el límite es una función continua.
4. Comprobación de que la convergencia es uniforme.

Proposición 3

Sea $M \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x)\| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}.$$

Si $Ma \leq b$ entonces existe una función $\varphi : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$ que es solución de (P).

Aplicamos el lema 6: $\exists f_n \in \mathcal{C}(D)$, LL y tal que $f_n\big|_{\mathcal{R}_{a,b}} \to f\big|_{\mathcal{R}_{a,b}}$ uniformemente en $\mathcal{R}_{a,b}$. A cada ecuación de Volterra

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_n(s, x(s))\, ds. \tag{2}$$

le aplicamos la proposición 2: existe una única función $\varphi_n : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$ que es solución de (2).
Comprobamos que la sucesión φ_n:

- Es uniformemente acotada.
- Es equicontinua.

Aplicamos el Teorema de Ascoli-Arzelà.

Paso al límite

Existe una sucesión parcial $\varphi_{\sigma(n)}$ que converge uniformemente hacia una función continua $\varphi : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$.

Usando que las funciones continuas en conjuntos compactos son uniformemente continuas comprobamos que la sucesión de funciones $f_n(s, \varphi_n(s))$ converge uniformemente en $[t_0 - a, t_0 + a]$ hacia $f_n(s, \varphi(s))$.

Ahora podemos tomar límite puntual en la identidad

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_n(s, \varphi_n(s))\, ds \qquad \forall t \in [t_0 - a, t_0 + a]$$

para deducir que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \qquad \forall t \in [t_0 - a, t_0 + a]$$

y probar la proposición 3.

El teorema fundamental

Sean $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, $(t_0, x_0) \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^d$ una función continua. Se considera el P.V.I.

$$(P) \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Teorema de Cauchy-Peano

Si la función f es continua entonces el PVI (P) tiene solución.

Tomamos un $\tilde{a}, b \in \mathbb{R}^+$ tales que $\mathcal{R}_{\tilde{a},b}(t_0, x_0) \in D$. Calculamos

$$M = \max_{(t,x) \in \mathcal{R}_{a,b}} \|F_n(t, x)\|$$

Tomamos $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $a \leq \tilde{a}$ y $aM \leq b$. Aplicamos la proposición 3.

Una demostración alternativa

El teorema de Ascoli-Arzelà es una herramienta tan poderosa que permite demostrar el teorema de Cauchy-Peano sin usar el teorema de Picard-Lindelöf. Además hay varias maneras de hacerlo.

Una de las demostraciones se basa en el método de Euler: se toma una sucesión de particiones del intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$:

$$t_0 + a < \cdots < t_0 - \frac{a}{n} < t_0 < t_0 + \frac{a}{n} < t_0 + 2\frac{a}{n} < \cdots < t_0 + a$$

y sobre esos nodos se construye la *poligonal de Euler* $p_n : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$.

Después hay que demostrar que $p_n : [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^d$ es uniformemente acotada y equicontinua, aplicar el teorema de Ascoli-Arzelà y tomar límite en la ecuación de Volterra.

La idea es sencilla pero existen algunos detalles técnicos que son un poco farragosos.