

Curvas y Superficies

Antonio Gámiz Delgado
Universidad de Granada

25 de febrero de 2020

Ejercicio 1. Sean $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular en el plano euclídeo \mathbb{R}^2 , $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un movimiento rígido directo y $\tilde{\alpha} := F \circ \alpha$. Prueba que las curvaturas K y \tilde{K} correspondientes a α y $\tilde{\alpha}$ cumplen

$$K(t) = \tilde{K}(t) \quad \forall t \in I$$

Demostración. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(x) = Ax + b$, con $A \in O(2)$ y $|A| = 1$. F es una isometría, luego tiene que ser un giro ya que no hay más isometrías directas en \mathbb{R}^2 . Podemos suponer que α está parametrizada por la longitud de arco. $\tilde{\alpha}$ también lo está ya que las isometrías convierten módulos:

$$|\tilde{\alpha}'(t)| = |(F \circ \alpha)'(t)| = |\alpha'(t)| = 1$$

Usando que $a_{12}(t) = \langle e_1'(t), e_2(t) \rangle$, una propiedad básica del producto escalar y que dos matrices de rotación conmutan si están centradas en el mismo punto, nos queda:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(t) &= \tilde{a}_{12}(t) = \langle \tilde{e}_1'(t), \tilde{e}_2(t) \rangle = \langle \tilde{e}_1'(t), J\tilde{e}_1(t) \rangle = \langle A\alpha''(t), JA\alpha'(t) \rangle = \\ &= \langle \alpha''(t), A^T A J \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha''(t), J \alpha'(t) \rangle = a_{12}(t) = K(t) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 2. Sean $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular en el plano euclídeo \mathbb{R}^2 , $\phi : J \longrightarrow I$ un difeomorfismo con $\phi' > 0$ y $\tilde{\gamma} : \gamma \circ \phi : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Prueba que las curvaturas K , \tilde{K} correspondientes a γ , $\tilde{\gamma}$ cumplen:

$$K(\phi(s)) = \tilde{K}(s) \quad \forall s \in J$$

Demostración. Tenemos que $\tilde{\gamma}'(s) = (\gamma \circ \phi(s))' = \gamma'(\phi(s))\phi'(s)$, luego $|\tilde{\gamma}'(s)| = |\gamma'(\phi(s))||\phi'(s)|$. Calculamos $\tilde{e}_1(s)$, que hay que normalizarlo ya que no sabemos si está parametrizado por la longitud de arco:

$$\tilde{e}_1(s) = \frac{\tilde{\gamma}'(s)}{|\tilde{\gamma}'(s)|} = \frac{\gamma'(\phi(s))\phi'(s)}{|\gamma'(\phi(s))||\phi'(s)|} = \frac{\gamma'(\phi(s))}{|\gamma'(\phi(s))|} = e_1(\phi(s))$$

Como consecuencia: $\tilde{e}_2(s) = e_2(\phi(s))$. Calculamos ahora $\tilde{a}_{12}(s)$:

$$\tilde{a}_{12}(t) = \langle \tilde{e}_1'(s), \tilde{e}_2(s) \rangle = \langle e_1'(\phi(s))\phi'(s), e_2(\phi(s)) \rangle = \phi'(s) \langle e_1'(\phi(s)), e_2(\phi(s)) \rangle = \phi'(s)a_{12}(\phi(s))$$

Por lo tanto:

$$\tilde{K}(s) = \frac{\tilde{a}_{12}(s)}{|\tilde{\gamma}'(s)|} = \frac{a_{12}(\phi(s))\phi'(s)}{|\gamma'(\phi(s))||\phi'(s)|} = \frac{a_{12}(\phi(s))}{|\gamma'(\phi(s))|} = K(\phi(s)) \quad \forall s \in J$$

□

Nota 3. En el primer ejercicio hemos modificado la imagen de la curva, mientras que en el segundo, hemos cambiado la parametrización. Ambos ejercicios tienen condiciones suficientes para que la curvatura no cambie de signo, que hemos usado en la resolución de los mismos ($|A| = 1$ y $\phi' > 0$).