UNIVERSIDAD DE GRANADA	**Ecuaciones Diferenciales II** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	Departamento de Matemática Aplicada
	Relación de ejercicios 2	

1. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y sea $f : I \to \mathbb{R}$. Denotamos

$$I^* = \{t \in I \ : \ \exists\, f'(t)\}$$

Supongamos que existe una sucesión $t_n \in I^*$ tal que

$$|f'(t_n)| \to \infty$$

demuestra que la función f **no** es globalmente lipschitziana en I.

2. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y sea $f : I \to \mathbb{R}$. Diremos que f es una función de clase uno a trozos, y escribiremos $f \in \mathcal{C}^1_T(I)$, si existe un recubrimiento finito del intervalo I:

$$I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$$

donde los subintervalos I_j son cerrados relativos a I y se cumple: $f|_{I_j} \in \mathcal{C}^1(I_j)$. Dada $f \in \mathcal{C}^1_T(I)$, si denotamos $I^* = \{t \in I \ : \ \exists\, f'(t)\}$, demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) La función f es globalmente lipschitziana en I.

   b) Existe $L \geq 0$ tal que $|f'(t)| \leq L \quad \forall t \in I^*$.

Pista: puedes usar que $f(t) - f(s) = \displaystyle\int_s^t f'(\tau)\, d\tau$.

3. Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo y cerrado y sea $f : D \to \mathbb{R}^d$. Suponemos que existe un recubrimiento finito del conjunto D formada por conjuntos cerrados:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \qquad \overline{C_i} = C_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

tales que para cada $i = 1, \ldots, n$ la restricción $f|_{C_i}$ es lipschitziana (con constante de lipschitz L_i). Queremos demostrar que f es lipschitziana en D. Para ello:

   a) Dados $x, y \in D$ demuestra que existe una partición del segmento $[x, y]$ tal que los nodos consecutivos están en un mismo conjunto cerrado del recubrimiento:

$$\exists\, \{z_j\}_{j=1}^m \subset [x, y] \qquad z_1 = x \qquad z_m = y \qquad\qquad z_j, z_{j+1} \in C_{i_j} \quad \forall j = 1, \ldots, m-1$$

   b) Prueba que $\|f(x) - f(y)\| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} \|f(z_j) - f(z_{j+1})\|$

   c) Deduce que f es lipschitziana y determina una constante de Lipschitz.

4. Sea $D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \to \mathbb{R}^k$, $\bar{D} \subset \mathbb{R}^k$ y $g : \bar{D} \to \mathbb{R}^m$ tales que las funciones f y g son globalmente lipschitzianas y además $f(D) \subset \bar{D}$. Demuestra que la composición $g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$ es globalmente lipschitziana.

5. Sea $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ abierto y sean $f : D \to \mathbb{R}^d$ y $g : D \to \mathbb{R}^k$ continuas. Además $f(t, x)$ y $g(t, x)$ son localmente lipschitzianas (respecto de la variable $x \in \mathbb{R}^d$). Decide sobre la validez de las siguientes afirmaciones:

   a) Si $k = d$ entonces $f + g$ es localmente lipschitziana (respecto de la variable x).

   b) Si $k = 1$ entonces $f \cdot g$ es localmente lipschitziana (respecto de la variable x).

6. Sean I y J dos intervalos de $\mathbb{R}$ y sean $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ dos funciones localmente lipschitzianas. Estudia si podemos asegurar que las siguientes funciones son localmente lipschitzianas:

   a) $F : I \times J \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) = f(x) + g(y)$.

   b) $G : I \times J \to \mathbb{R}, \quad G(x, y) = f(x) \cdot g(y)$.

Si f y g son además globalmente lipschitzianas, ¿lo es F o lo es G?