Antonio Gámiz Delgado

Ejercicio 1. *Sea* $F : \mathcal{H}_0^1(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por*

$$F(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y'(x)^2 dx + y(0)$$

Encontrar el mínimo de F *en* $\mathcal{H}_0^1(-1,1)$.

Sea $A : \mathcal{H}_0^1(-1,1) \times \mathcal{H}_0^1(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $A(u,u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u'(x)^2 dx$. Evidentemente, A es una forma cuadrática y es coerciva:

$$A(u,u) \geq \frac{1}{2}\|u\| \quad \forall u \in \mathcal{H}_0^1(-1,1)$$

Ahora sea $R : \mathcal{H}_0^1(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $R(y) = -y(0)$. R es una aplicación lineal y continua, luego el funcional $F(y) = A(y,y) - R(y)$, es cuadrático. El teorema de Lax-Milgran nos dice que existe su mínimo absoluto y que debe cumplir:

$$A(\phi, y) - R(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_0^1(-1,1)$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \phi'(x)y'(x)dx = R(\phi) = -\phi(0)$$

Si tomamos $\phi \in \mathcal{D}(-1,0)$, obtenemos que

$$\int_{-1}^{0} \phi'(x)y'(x)dx + \int_{-1}^{0} 0\phi(x)dx = 0$$

Luego $z = y'$ tiene derivada débil 0 en $(-1,0)$, es decir, $z \in \mathcal{H}_0^1(-1,0)$. Hacemos lo mismo con la parte de la derecha, y obtenemos $z \in \mathcal{H}_0^1(0,1)$. La función $z \notin \mathcal{C}[-1,1]$, pero se cumple $z \in \mathcal{C}[-1,0] \cap \mathcal{C}[0,1]$ y existen los límites laterales de z en 0. Volviendo a la fórmula anterior:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \phi'(x)z(x)dx = -\phi(0)$$

Como z no es continua en (a,b), hay que partir la integral en dos:

$$\int_{-1}^{1} \phi'(x)z(x)dx = \int_{-1}^{0} \phi'(x)z(x)dx + \int_{0}^{1} \phi'(x)z(x)dx$$

Desarrollando cada una por separado, usando la regla de la cadena en cada término:

$$\int_{-1}^{0} z(x)\phi'(x)dx = z(x)\phi(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} z'(x)\phi(x)dx = z(0^-)\phi(0) - \int_{-1}^{0} z'(x)\phi(x)dx$$

$$\int_0^1 z(x)\phi'(x)dx = z(x)\phi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 z'(x)\phi(x)dx = -z(0^+)\phi(0) - \int_0^1 z'(x)\phi(x)dx$$

Sumando ambos resultados y sustituyendo en la expresión del principio:

$$z(0^+)\phi(0) - z(0^-)\phi(0) = -\phi(0)$$

Como ϕ es arbitraria, podemos tomarla de forma que $\phi(\alpha) = 1$, quedando:

$$z(0^+) - z(0^-) = -1$$

Ahora con estas condiciones, se puede calcular la expresión de y. En los intervalos, $[-1, 0), (0, 1]$, y es una recta. La recta de la izquierda tiene que pasar por $(-1, 0)$ y la de la derecha debe pasar por $(1, 0)$. Además, la resta de sus pendientes tiene que ser -1. Serán de la forma:

$$y_1(x) = ax + a, \quad y_2(x) = bx - b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Como y debe ser continua en α, se tiene que cumplir $y_1(0) = y_2(0)$, luego nos queda el sistema:

$$\begin{array}{l} a\alpha + a = b\alpha + b \\ b - a = -1 \end{array}$$

Y resolviendo el sistema, obtenemos: $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{-1}{2}$. Luego la función y buscada es:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & x \in [-1, 0] \\ -\frac{1}{2}(x-1) & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Ejercicio 2. *Demostrar que el problema de contorno*

$$-y'' + 3xy = 2x, \quad y(0) = y(1) = 0$$

tiene una única solución.

Sean $K(x) = 3x$ y $q(x) = -2x$ y el funcional:

$$L(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 y'(x)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x)y(x)^2 dx + \int_0^1 q(x)y(x)dx$$

Lo anterior se puede expresar como: $F(x, y, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}K(x)y^2 + q(x)y$. Derivando respecto de p e y, y suponiendo que y es un punto extremal, se llega a:

$$\int_0^1 y'(x)\phi'(x)dx + \int_0^1 (K(x)y(x) + q(x))\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_0^1(0, 1)$$

Llamando $z = y'$, se tiene que la derivada débil de z es: $z' = K(x)y + q(x)$. Luego se tiene la siguiente ecuación diferencial igulando ambas expresiones:

$$-y'' + K(x)y + q(x) = 0 \Rightarrow -y'' + 3xy - 2x = 0$$

Al igual que se hizo en teoría, ahora solo se tiene que encontrar un producto escalar para ver que se tiene un espacio de Hilbert y usar el teorema de representación de Riesz. La proposición (3.12) dice justamente lo que necesitamos.

Ejercicio 3. *Sea*

$$p(x) = \begin{cases} 3 & si\ x \in (-3,0) \\ 1 & si\ x \in (0,2) \end{cases}$$

y consideramos $L : \mathcal{H}_0^1(-3,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por:*

$$L(y) = \frac{1}{2}\int_{-3}^{2} p(x)y'(x)^2dx - \int_{-3}^{2} y(x)dx$$

1. *Demuestra la existencia de mínimo.*

2. *Encuentra la expresión en casi todo punto de la función minimizante. Indicación:* $z(x) = p(x)y(x)$ *admite una extensión continua.*

Al igual que se hizo en el ejercicio 1, se toma $A : \mathcal{H}_0^1(-3,2) \times \mathcal{H}_0^1(-3,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $A(u,v) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-3}^{2} p(x)u'(x)v'(x)dx$. Al ser $p(x) > 0$ y estar acotada superiormente, A es evidentemente coercivo. Sea $R(y) = \displaystyle\int_{-3}^{2} y(x)dx$, es un funcional lineal continuo (por las propiedades de la integral). En resumen, L es un funcional cuadrático coercivo cuyo dominio es un espacio de Hilbert, luego el teorema de Lax-Milgram asegura la existe de un único mínimo.

Para ver su expresión, se usa la propiedad que proporciona el teorema de representación de Riesz. Sea $y \in \mathcal{H}_0^1(-3,2)$ dicha solución:

$$A(\phi, y) - R(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_0^1(-3,0)$$

Desarrollando esa expresión:

$$\int_{-3}^{2} p(x)y'(x)\phi'(x)dx + \int_{-3}^{2} -\phi(x)dx = 0$$

Luego $\widetilde{z} = py'$ tiene derivada débil -1 en $(-3,2)$. $\widetilde{z}$ admite una extensión continua en $(-3,2)$, z. Imponiendo ahora las condiciones que se tienen:

$$z'(x) = -1 \Rightarrow z(x) = y'(x) = -x + a$$

Al integrar esa ecuación en $(-3,2)$ y $(0,2)$:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\tfrac{x^2}{6} + \tfrac{k}{3}x + b \\ y_2(x) &= -\tfrac{x^2}{2} + ax + c \end{aligned}$$

Para resolver ese sistema, se usan las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y_1(-3) = 0 \\ y_2(2) = 0 \\ y_1(0^-) = y_2(0^+) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema resultante, se obtiene: $a = \frac{1}{6}$ y $b = c = \frac{5}{3}$. La expresión del mínimo es, por tanto:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{6} + \frac{x}{18} + \frac{5}{3} & x \in (-3,0) \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} & x \in (0,2) \end{cases}$$

Ejercicio 4. *Dado*

$$E = \{u \in \mathcal{H}^1(0,1) : \ u(0) = 0, \ u(1) = 1\}, \quad L(u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx + \int_0^1 u(x) dx$$

Encontrar $\min_{u \in E} L(u)$.

- E es un espacio afín embebido en $\mathcal{H}_0^1(0,1)$.

  Sea $\vec{\cdot} : E \times E \longrightarrow \mathcal{H}_0^1(0,1)$, definida por $\vec{uv} = v - u$ y cumple:

  - Si $p, q, r \in E$, entonces $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$. Esta condición se cumple trivialmente.
  - Dado $p \in E$ y $v \in \mathcal{H}_0^1(0,1)$, existe un único p_v tal que $\vec{pp_v} = v$. La unicidad se obtiene por definición ($p_v = v + p$).

Sea $p_v = v + x$ y $x \in E$ fijo. Como E está embebido en $\mathcal{H}_0^1(0,1)$, buscar el mínimo deseado es equivalente a encontrar el mínimo de $L(v + x)$ en $\mathcal{H}_0^1(0,1)$, donde:

$$L(p_v) = L(v+x) = \int_0^1 (v'(x)+1)^2 dx + \int_0^1 (v(x)+x) dx = \int_0^1 v'(x)^2 dx + 2\int_0^1 v'(x) dx + 1 + \int_0^1 v(x) dx + \int_0^1 x dx = \int_0^1 (v'(x)+1)^2 dx + \int_0^1 (v(x)+x) dx = \int_0^1 (v'(x))^2 dx + \int_0^1 v(x) dx + \frac{3}{2}$$

Minimizar el anterior funcional es equivalente a minimizar:

$$L(v) = \frac{1}{2} A(v,v) - R(v), \quad A(u,v) = 2\int_0^1 u'(x) v'(x) dx, \quad R(\phi) = -\int_0^1 \phi(x) dx$$

con A una forma lineal cuadrática y R un funcional lineal. Además, A es evidentemente coercivo, luego también L también lo es.

Ahora ya se tienen las condiciones necearias para aplciar el teorema de Lax-Milgram, el cual asegura la existencia de un único $y \in \mathcal{H}_0^1(0,1)$, cumpliendo:

$$A(y,\phi) = R(\phi) \Rightarrow \int_0^1 2y'(x)\phi'(x) dx + \int_0^1 \phi(x) dx = 0$$

Luego la derivada débil de $2y'$ es 1, luego:

$$y'' = \frac{1}{2} \Rightarrow y' = \frac{x}{2} + a \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + ax + b$$

Aplicando las condiciones de contornos se obtienen los valores de a y b: $a = -\frac{1}{4}$ y $b = 0$. Todavía queda sumarle el término x del principio a y, luego la solución final del problema es:

$$u(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + x = \frac{x^2 + 3x}{4}$$

Ejercicio 5. *Sea E un espacio afín embebido en H, espacio de Hilbert. Supongamos que L es un funcional cuadrático coercivo y que E es cerrado. Demostrar que el problema*

$$\min_{u \in E} L(u)$$

tiene una única solución.

Como E es un espacio afín embebido en H, debe existir una aplicacion $\vec{\cdot} : E \times E \longrightarrow H$ definida por $\overrightarrow{(p,q)} = \vec{pq} = q - p$. Sea $p \in E$ fijo y $p_v = v + p$. Usando el último ejercicio sobre espacios embebidos se tiene que:

$$\min_{u \in E} L(u) = \min_{v \in H} L(p_v) = \min_{v \in H} L(p+v)$$

Como $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es un coercivo, se expresará como:

$$L(u) = \frac{1}{2} A(u,u) - R(u)$$

donde $A : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática coerciva y $R : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal. Ahora, si se define:

$$\overline{L}(p_v) = L(v+p) = \frac{1}{2} A(p+v, p+v) - R(p+v) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{A(p,p)}_{constante} + 2A(p,v) + A(v,v) \right) - \underbrace{R(p)}_{constante} - R(v)$$

Al estar p fijo, esos dos términos son constantes, luego minimizar $\overline{L}$, equivale a minimizar $\widehat{L}$ dado por:

$$\widehat{L}(v) = \frac{1}{2} A(v,v) - (R(v) - A(v,v))$$

El último término es un funcional lineal continuo y A sigue siendo una forma cuadrática coerciva, luego $\widehat{L}$ es coercivo también. La clave ahora es que el dominio de $\widehat{L}$ es H, un espacio de Hilbert, es decir, se puede aplicar el teorema de Lax-Milgram que asegura la existencia de un único mínimo. Como todos los problemas de mínimo hasta aquí eran equivalentes, el del principio también tiene una única solución.

Ejercicio 6. *Encontrar $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tales que:*

$$f_n'(-1) = 1, \; f_n'(1) = 1, \; \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f_n^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f_n'(x)^2 dx \longrightarrow 0$$

Usando la indicación del ejercicio, sea $f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Evidentemente $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y se tiene $f_n'(x) = x^{2n}$ con $f_n'(-1) = f_n'(1) = 1$. Para la última condición:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^{4n} dx = \frac{x^{4n+3}}{2(2n+1)^2(4n+3)} \Bigg|_{-1}^{1} + \frac{x^{4n+1}}{2(4n+1)} \Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2(4n+3)} + \frac{1}{4n+1} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ya solo quedaría multiplifar la función f_n por una función meseta para que $\widetilde{f_n} = f_n \phi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 7. *Demostrar que el problema de contorno*

$$-u'' + u = 0,\ u'(-1) = 1,\ u'(1) = 1$$

tiene una única solución.

Este apartado puede resolverse fácilmente unando teoría de ecuaciones diferenciales. Se tiene que $u_1(x) = e^x$ y $u_2(x) = e^{-x}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea: $-u'' + u = 0$. Luego la solución que se tiene que buscar será de la forma $u(x) = au_1(x) + bu_2(x)$, cumpliendo:

$$\begin{aligned} u'(-1) &= ae^{-1} - be = 1 \\ u'(1) &= ae - be^{-1} = 1 \end{aligned}$$

Ese sistema tiene solución ya que el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de 0. La solución es única por ser un elemento de la base.

Ejercicio 8. *Estudia y en su caso calcula:*

$$\text{mín}\{L(u) : u \in E\}, \quad L(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(x)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u'(x)^2 dx$$

con $E = \{u \in \mathcal{H}^2(-1,1) : u'(-1) = u'(1) = 1\}$

Sea f_n una función cumpliendo las condiciones del ejercico 6. Es trivial comprobar que $f_n \in E\ \forall n \in \mathbb{N}$ y que $\{L(f_n)\} \longrightarrow 0$ (es de hecho lo que enuncia el ejercicio 6). Como $L(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{H}^2(-1,1)$, se tiene que $\text{ínf}\{L(u) : u \in E\} = 0$.

¿Es 0 el mínimo también, en caso de existir? Suponiendo que existe $f \in \mathcal{H}^2(-1,1)$ tal que:

$$L(f) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f'(x)^2 dx = 0$$

Como es suma de términos cuadráticos, la única opción posible es que ambos sean 0 para casi todo punto. Pero entonces, el representante continuo de f sería la función constante 0, cosa imposible ya que en -1 y 1 debe valer uno. En conclusión, no existe el mínimo.