Ejercicio 1. *Demuestra que la solución maximal del siguiente PVI está acotada (en el futuro y en el pasado):*

$$\left.\begin{array}{c} x' = (1 - x^2 - y^2)(x + y) \\ y' = (1 - x^2 - y^2)(x - y) \\ x(0) = \frac{1}{3}, \;\; y(0) = -\frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

Se tiene que $f(x, y) = ((1 - x^2 - y^2)(x + y), (1 - x^2 - y^2)(x - y))$. Además se da:

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) \in S(0, 1) \cup \{(0, 0)\}$$

La frontera de $B(0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$ está formada por puntos de equilibrio, luego ese conjunto es invariante. Como $x_0 = (x(0), y(0)) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ también pertenece a ese conjunto y f es localmente lipschitziana, la solución del PVI se queda dentro del conjunto, luego está acotada.

Ejercicio 2. *En cada uno de los problemas de valores iniciales siguientes, demuestra que la solución maximal está acotada en el futuro.*

Denotamos por φ a la solución maximal en cada uno de los respectivos apartados.

(a) $\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{x^2 - 25}{1 + t^2} \\ x(0) = 4 \end{array}\right.$

Como $f(t, x) \in \mathcal{C}^1$, es localmente lipschitziana y por tanto verifica la propiedad de unicidad global. Los puntos de equilibrio de f son $x_1 = -5$ y $x_2 = 5$. Como $x_0 \in [-5, 5]$, entonces φ cumple que $\varphi(t) \in [-5, 5]$ $\forall t \geq 0$.

(b) $\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{16}{1 + t^2} x - x^3 \\ x(0) = 3 \end{array}\right.$

Como $f(t, x) \in \mathcal{C}^1$, es localmente lipschitziana y por tanto verifica la propiedad de unicidad global. Los puntos de equilibrio de f son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$. Como $x_0 \notin [0, 1]$, usamos:

$$\begin{array}{ll} x_3 = 5: & f(t, 5) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ x_4 = 0.1: & f(t, 0.1) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ahora se cumple que $x_0 \in [0.1, 5]$, siendo $[0.1, 5]$ un conjunto invariante. Luego φ cumple que $\varphi(t) \in [0.1, 5]$ $\forall t \geq 0$.

(c) $\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1 - x^3}{1 + x^2} \\ x(0) = 2 \end{array}\right.$

Como $f(t, x) \in \mathcal{C}^1$, es localmente lipschitziana y por tanto verifica la propiedad de unicidad global. Como:

$$\begin{array}{l} f(t, 0) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ f(t, 2) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Luego φ cumple que $\varphi(t) \in (0, 2)$ $\forall t \geq 0$.

Ejercicio 3. *Busca funciones guía que nos permitan asegurar que las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales están acotadas en el futuro:*

(a) $x' = \sin(t) - x^3$

Sea $V(x) = x^2$. Entonces:

$$\dot{V}(x) = 2x\sin(t) - 2x^4 \leq 0, \quad \forall x \geq n_0$$

Con $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Luego V es una función guía y coerciva, luego (a) está acotada en el futuro.

(b) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\sin(x_1) - x_1 \end{cases}$

Sea $V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2)$. Entonces:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = V_1'(x_1)x_2 - V_2'(x_2)(\sin(x_1) + x_1)$$

Para que $\dot{V}(x_1, x_2) \equiv 0$ tiene que darse:

$$V_1'(x_1) = \sin(x_1) + x_1, \quad V_2'(x_2) = x_2$$

Luego, integrando:

$$V_1(x_1) = -\cos(x_1) + \frac{x_1^2}{2}, \quad V_2(x_2) = \frac{x_2^2}{2}$$

Luego V es una función guía y coerciva, luego (b) está acotada en el futuro.

(c) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_2 \end{cases}$

Sea $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Entonces:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(-x_2) = -x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2)^2 \leq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Luego V es una función guía y coerciva, luego (c) está acotada en el futuro.

Ejercicio 4. *Determina qué debe cumplir el parámetro $a > 0$ para que:*

$$V(x, y) = x^2 + axy + y^2$$

sea una función guía coerciva para el sistema plano:

$$\begin{cases} x' = -x + 6y \\ y' = -20y \end{cases}$$

(Debes indicar un intervalo). Además justifica la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Todas las soluciones del sistema están acotadas en el futuro.

(b) Todas las soluciones del sistema están acotadas en el pasado.

(c) Existe una solución que está acotada (en el pasado y en el futuro).

Primero se observa que tiene que cumplir a para que V sea coerciva. Como V es cuadrática, hay un resultado teórico que dice que V sólo será coerciva si se cumple:

$$a, c > 0 \quad b^2 < 4ac$$

En este caso $a = c = 1$ y $b = a$. Luego primeramente se tiene que dar $a \in [0, 2)$ para que V sea al menos coerciva.

Se tiene $f(t, (x, y)) = (-x + 6y, -20y)$ y $\nabla V(x, y) = (2x + ay, 2y + ax)$, luego:

$$\dot{V}_f(x, y) =< \nabla V(x, y), f(t, (x, y)) >=< (-x + 6y, -20y), (2x + ay, 2y + ax) >=$$

$$= -2x^2 - 40y^2 - 21axy + 12xy + a6y^2$$

Ahora se debe estudiar cuando esa expresión es menor igual que 0, es decir, $\dot{V}_f(x, y) \leq 0$. Sea:

$$g(x) = -2x^2 - 40y^2 - 21axy + 12xy + a6y^2 = -2x^2 - y(21a - 12)x - (6a - 40)y^2 = 0$$

El discriminanta es menor o igual que 0 para todo x, así que:

$$\Delta_x = y^2(21a - 12)^2 + 8y^2(6a - 40) \leq 0, \quad \forall y$$

Luego resolviendo $(21a - 12)^2 + 8(6a - 40) \leq 0$, obtenemos que $a \in [0, 4/3)$.

En resumen, si $a \in [0, 4/3)$, V es coerciva y $\dot{V}_f(x, y) \leq 0$, luego va a ser una función guía para el PVI anterior.

Cuestión (a)

Verdadero, por el teorema de caracterización mediante funciones guía.

Cuestión (c)

Si, la constante $(0, 0)$ por ejemplo.