Ejercicio 1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Denotamos*

$$I^* = \{t \in I : \exists f'(t)\}$$

Supongamos que existe una sucesión $t_n \in I^*$ tal que

$$|f'(t_n)| \longrightarrow \infty$$

Demuestra que la función f no es globalmente lipschitziana en I.

Como la derivada de f existe en I^*, f también es continua en I^*. Usando la definición de derivada con la sucesión t_n:

$$|f'(t_n)| = \lim_{h \to 0} \frac{|f(t_n + h) - f(t_n)|}{h} = \infty$$

Luego f no es globalmente lipschitziana porque no lo es localmente (como nos dice la caracterización).

Ejercicio 2. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es una función de clase uno a trozos y escribiremos $f \in \mathcal{C}^1_T(I)$, si existe un recubrimiento finito del intervalo I:*

$$I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$$

donde los subintervalos I_j son cerrados relativos a I y se cumple: $f_{|I_j} \in \mathcal{C}^1(I_j)$. Dada $f \in \mathcal{C}^1_T(I)$, si denotamos $I^* = \{t \in I : \exists f'(t)\}$, demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) La función f es globalmente lipschitziana en I.

(b) Existe $L \geq 0$ tal que $|f'(t)| \leq L \;\; \forall t \in I^*$

Ejercicio 3. *Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Suponemos que existe un recubrimiento finito del conjunto D formada por conjuntos cerrados:*

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \quad \bar{C}_i = C_i \;\; \forall i = 1, \cdots, n$$

tales que para cada $i = 1, \cdots, n$ la restricción $f_{|C_i}$, es lipschitziana (con constante de lipschitz L_i). Queremos demostrar que f es lipschitziana en D. Para ello:

(a) Dados $x, y \in D$ demuestra que existe una partición del segmento $[x, y]$ tal que los nodos consecutivos están en un mismo conjunto cerrado del recubrimiento:

$$\exists \{z_j\}_{j=1}^{m} \subset [x, y] \;\; z_1 = x, \; z_m = y \quad z_j, z_{j+1} \in C_i \quad \forall j = 1, \cdots, m-1$$

(b) Prueba que $\|f(x) - f(y)\| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} \|f(z_j) - f(z_{j+1})\|$

(c) Deduce que f es lipschitziana y determina su constante de Lipschitz.

Ejercicio 4. *Sea $D \subset \mathbb{R}^d$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^K$, $\bar{D} \subset \mathbb{R}^k$, $g : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tales que las funciones f y g son globalmente lipschitzianas y además $f(D) \subset \bar{D}$. Demuestra que la composición $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es globalmente lipschitziana.*

Sean L_1 y L_2 las constantes de lipschitz de f y g respectivamente. Tenemos:

$$\|f(g(x_1)) - f(g(x_2))\| \leq L_1 \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq L_1 L_2 \|x_1 - x_2\| \quad x_1, x_2 \in D$$

Luego $f \circ g$ es lipschitziana.

Ejercicio 5. *Sea $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ abierto y sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^d$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{R}^k$ continuas. Además $f(t, x)$ y $g(t, x)$ son localmente lipschitzianas (respecto de la variable $x \in \mathbb{R}^d$). Decide sobre la validez de las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $k = d$ entonces $f + g$ es localmente lipschitziana (respecto de la variable x).*
2. *Si $k = 1$ entonces $f \cdot g$ es localmente lipschitziana (respecto de la variable x).*

Ejercicio 6. *Sean I y J dos intervalos de $\mathbb{R}$ y sean $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones localmente lipschitzianas. Estudia si podemos asegurar que las siguientes funciones son localmente lipschitzianas:*

(a) $F : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = f(x) + g(y)$

Para ver que F es localmente lipschitziana, tenemos que encontrar un entorno U_{xy} de $(x, y) \in I \times J$ tal que existe una constante L_{xy} verificando:

$$|F(x, y) - F(x', y')| \leq L_{xy} \|(x, y) - (x', y')\| \quad \forall (x', y') \in U_{xy}$$

Si $(x, y) \in I \times J$, como f y g son localmente lipschitzianas, podemos encontrar dos entornos $U_x \subset I$, $U_y \subset J$ de x e y respectivamente, tal que se verifica la condición de lipschitz. Podemos tomar $U_{xy} = U_x \cap U_y$, teniendo:

$$|f(x) - f(y)| \leq L_x |x - y|, \quad |f(x) - g(y)| \leq L_y |x - y| \quad \forall x, y \in U_{xy}$$

Tenemos que ver que se verifica para F:

$$|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| = |f(x_1) + g(y_1) - f(x_2) - g(y_2)| \leq$$

$$\leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(y_1) - g(y_2)| \leq L_x |x_1 - x_2| + L_y |y_1 - y_2| \leq$$
$$\leq L_{xy}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \leq L_{xy} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$$

donde $L_{xy} = \text{máx}\, L_x, L_y$.

(b) $G : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, $G(x,y) = f(x) \cdot g(y)$

Sean $[a,b] \subset I$, $[c,d] \subset J$ *dos intervalos compactos. Como* f *y* g *son lipschitzianas, son continuas, por lo tanto, por el teorema de Weierstrass están acotadas en esos dos intervalos compactos por una constante* C*, que podemos suponerla común para ambas funciones.*

Sean L_f *y* L_g *las constantes de lipschitz de* f *y* g *en esos dos subintervalos. Entonces:*

$$|f(x_1)g(y_1) - f(x_2)g(y_2)| \leq |f(x_1)g(y_1) - f(x_2)g(y_1)| + |f(x_2)g(y_1) - f(x_2)g(y_2)| \leq$$

$$\leq C|f(x_1) - f(x_2)| + C|g(y_1) - g(y_2)| \leq C\left(L_f|x_1 - x_2| + L_g|y_1 - y_2|\right) \leq$$
$$\leq K\left\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\right\|, \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a,b] \times [c,d]$$

donde $K = 2C \max L_f, L_g$.