REPE 1

1 Utilizamos las caracterizaciones de estabilidad y estabilidad asintótica para ecuaciones lineales escalares: si $\mathcal{A}(t)$ es una primitiva de $a(t)$, entonces

$$x' = a(t)x \quad \text{estable} \Leftrightarrow \mathcal{A}(t) \text{ acotada en } [0,+\infty)$$
$$x' = a(t)x \quad A.E. \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} \mathcal{A}(t) = 0$$

Puesto que $\lim_{t\to+\infty} a(t) = 1$, podemos usar el lema de Barbalat (versión débil) para deducir que la EDO no es A.E. ya que si ocurriera que

$$\lim_{t\to+\infty} \mathcal{A}(t) = 0$$

debería existir una sucesión $t_n \to +\infty$ tal que

$$\mathcal{A}'(t_n) \to 0 \underset{\mathcal{A}'(t_n) = a(t_n)}{\Rightarrow} a(t_n) \to 0 \quad \# \quad \left(\text{contradice que } \lim_{t\to\infty} a(t) = 1\right).$$

Para probar que la EDO tampoco es estable usamos el siguiente razonamiento:

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 1 \Rightarrow \exists\, T \geq 0 \text{ tal que } \tfrac{1}{2} < a(t) < \tfrac{3}{2} \quad \forall t \geq T$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(T) + \int_T^t \mathcal{A}'(s)\,ds = \mathcal{A}(T) + \int_T^t a(s)\,ds \geq \mathcal{A}(T) + \int_T^t \tfrac{1}{2}\,ds$$
$$\geq \mathcal{A}(T) + \tfrac{1}{2}(t-T) \quad \forall t \geq T$$

En consecuencia, $\mathcal{A}(t)$ es no acotada en $[0,+\infty)$

$\Rightarrow x' = a(t)x$ es inestable.

$\boxed{2}$ Necesitamos calcular los valores propios y, tal vez, los vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal principal

$$\sigma(A) = \{2, -3\}$$

Se trata de un punto hiperbólico.

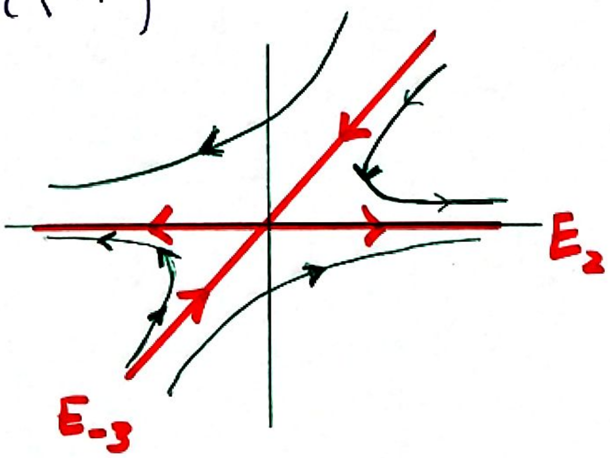
Vamos a calcular el subespacio estable y el subespacio inestable:

- $E_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -5y = 0 \right\}$

  $= \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow$ subespacio inestable

- $E_{-3} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x - 5y = 0 \right\}$

  $= \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow$ subespacio estable



$\boxed{3}$ $x' = 2\sqrt[4]{x^2} \iff x' = 2\sqrt{|x|}$

Observamos que $f(x) = 2\sqrt{|x|} \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow$ todas las soluciones son crecientes. De este modo, si $\varphi : (\alpha, \omega) \to \mathbb{R}$ es solución maximal ocurre que el conjunto de sus ceros Z_f es un intervalo cerrado y no vacío.

Sean:

$$a = \inf Z_f \qquad b = \sup Z_f$$

Con $-\infty \leq a \leq 0$ y $0 \leq b \leq +\infty$.

Analicemos las distintas posibilidades:

① $\boxed{-\infty = a}$ y $\boxed{b = +\infty} \Rightarrow \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi(t) \equiv 0$

② $\boxed{-\infty = a}$ y $\boxed{b < +\infty} \Rightarrow \varphi(t) > 0 \quad \forall t \in (b, \omega), \ \varphi(b) = 0.$

$$\varphi'(s) = 2\sqrt{\varphi(s)} \qquad \forall s \in (b, \omega)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi'(s)}{2\sqrt{\varphi(s)}} = 1 \quad \forall s \in (b, \omega) \Rightarrow \int_b^t \frac{\varphi'(s)}{2\sqrt{\varphi(s)}} ds = \int_0^t 1 \, ds$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{\varphi(s)}\right]_b^t = [s]_b^t \Rightarrow \sqrt{\varphi(t)} - \cancelto{0}{\sqrt{\varphi(b)}} = t - b \quad \forall t \in (b, \omega)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\varphi(t)} = t - b \Rightarrow \varphi(t) = (t-b)^2 \quad \forall t \in (b, \omega)$$

Por tanto, si suponemos que φ es sol. maximal tiene que ser

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq b \\ (t-b)^2 & \text{si } t > b \end{cases}$$

③ $\boxed{-\infty < a}$ y $\boxed{b = +\infty} \Rightarrow \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in (\alpha, a), \ \varphi(a) = 0.$

$$\varphi'(s) = 2\sqrt{-\varphi(s)} \qquad \forall s \in (\alpha, a)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi'(s)}{2\sqrt{-\varphi(s)}} = 1 \quad \forall s \in (\alpha, a) \Rightarrow \int_t^a \frac{\varphi'(s)}{2\sqrt{-\varphi(s)}} ds = \int_t^a 1 \, ds \quad \forall t \in (\alpha, a)$$

$$\Rightarrow \left[-\sqrt{-\varphi(s)}\right]_t^a = \left[s\right]_t^a \Rightarrow \cancelto{0}{-\sqrt{-\varphi(a)}} + \sqrt{-\varphi(t)} = a-t \quad \forall t\in(\alpha,a)$$

$$\Rightarrow -\varphi(t) = (a-t)^2 \underset{(a-t)^2=(t-a)^2}{\Rightarrow} \varphi(t) = -(t-a)^2 \quad \forall t\in(\alpha,a)$$

Y por tanto $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=\begin{cases} -(t-a)^2 & \text{si } t<a \\ 0 & \text{si } t\geq a\end{cases}$

④ $\boxed{-\infty<a}$ y $\boxed{b<+\infty}$ Se razona como en los casos ② y ③ para deducir:

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi(t)=\begin{cases} -(t-a)^2 & \text{si } t<a \\ 0 & \text{si } a\leq t\leq b \\ (t-b)^2 & \text{si } t>b\end{cases}$$

Un caso particular de ④: $a=b=0$ y entonces

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi(t)=t|t|$$

$\boxed{4}$ $f(x) = rx \ln\left(\frac{K}{x}\right) = rx\left(\ln(K) - \ln(x)\right)$

verifica que:

- $f(K) = 0$ $\Rightarrow$ luego $x=P$ es un punto de equilibrio
- $f \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$ con $f'(x) = r(\ln(K) - \ln(x) - r$

En consecuencia

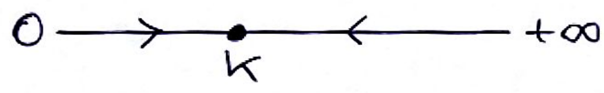
$$f'(K) = -r < 0 \Rightarrow x = K \text{ es un atractor}$$

(usando el criterio de la aproximación lineal o test de la derivada).

Nota: alternativamente podemos usar el método del diagrama de fases observando que

- $f(x) > 0 \quad \forall x \in (0, K)$
- $f(x) < 0 \quad \forall x \in (K, +\infty)$

y por tanto:



$\mathcal{R}(K) = (0, +\infty) \Rightarrow x = K$ es un atractor global

$\boxed{5}$ Hay muchas posibilidades. Tal vez las más sencillas sean:

(a) $x' = -x(x-4)$ $\mathcal{R}(0) = \{0\}$ $\mathcal{R}(4) = (0, +\infty)$

(b) $x' = -(x-1)^2$ $\mathcal{R}(1) = [1, +\infty)$

(c) $x' = -1$