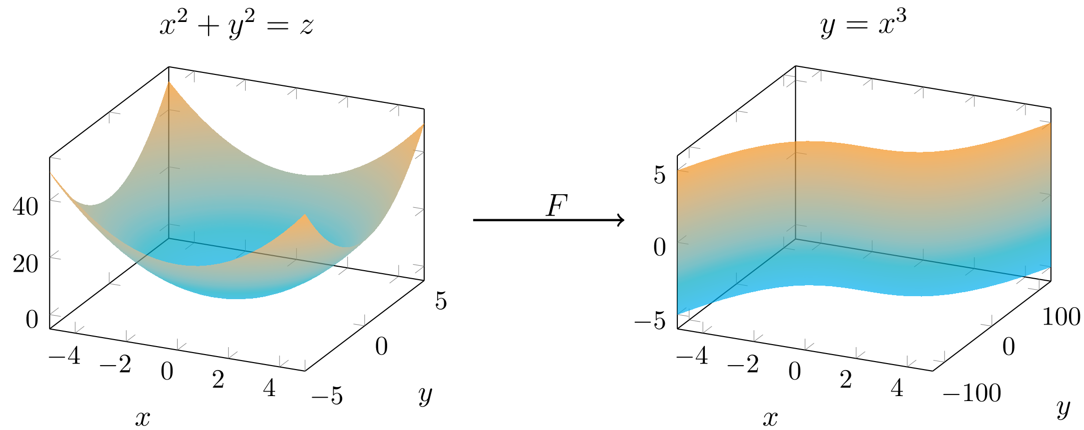
Ejercicio 5.- Prueba que la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ (paraboloide elíptico), es difeomorfa con la supercie $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^3\}$.

Para ver si C y S son difeomorfas, necesitamos encontrar una difeomorfismo $F : S \longrightarrow C$, es decir, que F sea diferenciable y biyectiva con $F^{-1} : S_2 \longrightarrow S_1$ diferenciable.



Para encontrar F, usamos una parametrización de cada una de las superficies:

$$\widetilde{x}_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S, \quad \widetilde{x}_1(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$\widetilde{x}_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow C, \quad \widetilde{x}_2(u, v) = (u, u^3, v)$$

$\widetilde{x}_1$ y $\widetilde{x}_2$ son parametrizaciones y son diferenciables (por serlo todas sus componentes) y sus diferenciales son inyectivas porque:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} = 2, \quad rango \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

El candidato a difeomorfismo será: $F = \widetilde{x}_2 \circ \widetilde{x}_1{}^{-1}$ con $F(x, y, z) = (u, u^3, v)$. Queda comprobar que F sea efectivamente un difeomorfismo. Como la extensión de F a $\mathbb{R}^3$, $\widetilde{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, es evidentemente diferenciable, tenemos que $F = \widetilde{F}_{|S}$ también lo es. Con un argumento análogo, se ve que $F^{-1} : C \longrightarrow S$, definida por $F^{-1}(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2)$, también lo es.

Para ver que $F : S \longrightarrow C$ es biyectiva solo hay que comprobar que sea inyectiva ya que $F(S) = C$: si $\widetilde{x}_1(u_1, v_1) = \widetilde{x}_2(u_2, v_2)$, entonces $(u_1, v_1, u_1^2 + v_1^2) = (u_2, v_2, u_2^2 + v_2^2)$, luego $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Por lo tanto, F es un difeomorfismo. También se podría haber argumentado usando que $\widetilde{x}_1$ y $\widetilde{x}_2$ son difeomorfismos ya que la composición de difeomorfismos también es un difeomorfismo.