# Comportamiento de las soluciones

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
Supongamos que $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times (a, b)$ el PVI

$$(P) \begin{cases} x' = f(x) \\ G(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución maximal a la que denotaremos

$$G(t; t_0, x_0) \qquad\qquad \forall t \in \big(\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0)\big)$$

Recuerda que la función $G$ recibe el nombre de *solución general*.

Denotemos por $Z_f$ el conjunto de ceros de la función $f$:

$$Z_f = \{p \in (a, b) : f(p) = 0\}$$

Existe una relación obvia entre los ceros de $f$ (llamados en este contexto *puntos de equilibrio*) y las soluciones constantes de la EDO x'=f(x):

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(t) = p \text{ es solución de } x' = f(x) \iff p \in Z_f$$

o usando la notación de solución general:

$$G(t; t_0, p) = p \qquad \forall t \in (-\infty, +\infty) \iff p \in Z_f.$$

# Órbitas

Dado $x_0 \in (a,b)$ se define la *órbita* asociada a la EDO $x' = f(x)$ que pasa por el punto $x_0$ como el conjunto

$$\mathcal{O}(x_0) = \left\{ G(t;0,x_0) \ : \ t \in \big(\alpha(0,x_0), \omega(0,x_0)\big) \right\}$$

Es decir: la imagen de la única solución maximal del PVI $\begin{cases} x' = f(x) \\ G(0) = x_0 \end{cases}$

**Propiedad 1**

1. Siempre $x_0 \in \mathcal{O}(x_0) \subset (a,b)$
2. Si $f(x_0) = 0$ entonces $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$.
3. Si $f(x_0) \neq 0$ entonces $\mathcal{O}(x_0)$ es un intervalo abierto.

Cuando $\mathcal{O}(x_0)$ es un conjunto unitario se representa en la recta real con un punto y cuando es un intervalo no degenerado se suele representar gráficamente como un segmento orientado (con una flecha).

## Propiedad 2

Sean $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ y $x_0, x_1 \in (a, b)$ tales que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [x_0, x_1]$.
Entonces:

1. $x_1 \in \mathcal{O}(x_0)$.
2. Existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que
$$G(t; t_1, x_1) = G(t + \tau; t_0, x_0) \qquad \forall t \in \big(\alpha(t_1, x_1), \omega(t_1, x_1)\big)$$
3. $\mathcal{O}(x_0) = \mathcal{O}(x_1)$.

## Ejemplo

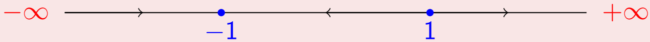
¿Cuántas órbitas distintas tiene la EDO $x' = e^x$?

# Diagrama de fases

Un *diagrama de fases* de la EDO $x' = f(x)$ es una representación gráfica con las órbitas de la ecuación.

## Ejemplo

El diagrama de fases de la EDO $x' = x^2 - 1$ es:




También se puede representar verticalmente.

## Algoritmo

1. Calculamos las raíces de $f(x)$.
2. Representamos un diagrama del signo de $f(x)$
3. Convertimos el diagrama del signo en el diagrama de fases.
4. Interpretamos el diagrama de fases.
5. Esbozamos las gráficas de algunas soluciones.
6. Indicamos la infinitud de algunos extremos de los intervalos de definición de las soluciones maximales.

# Región de atracción

Dada la EDO $x' = f(x)$ y dado un punto de equilibrio $p \in Z_f$ se define la *región de atracción* de $p$ como el conjunto

$$\mathcal{R}(p) = \left\{ x_0 \in (a, b) \ : \ \lim_{t \to \omega(0, x_0)} G(t; 0, x_0) = p \right\}$$

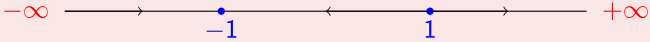
## Propiedad 3

Sea $p \in Z_f$. Entonces:

1. $p \in \mathcal{R}(p)$.
2. Si $x_0 \in \mathcal{R}(p)$ entonces $\omega(0, x_0) = +\infty$.
3. $\mathcal{R}(p)$ es un intervalo.

## Ejemplo

El diagrama de fases de la EDO $x' = x^2 - 1$ es:



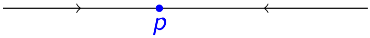

$\mathcal{R}(1) = \{1\}$ y $\mathcal{R}(-1) = (-\infty, 1)$

# Atractores

Dada la EDO $x' = f(x)$ y dado un punto de equilibrio $p \in Z_f$ se dice que $p$ es un *atractor* si está en el interior de su región de atracción.

Si además $\mathcal{R}(p) = (a, b)$ se dice que es un *atractor global*.

El diagrama de fases en el entorno de un atractor debe ser




## Propiedad 4 (aproximación lineal)

Sea $p \in Z_f$ y supongamos que $f$ es derivable en $p$.

1. Si $f'(p) < 0$ entonces $p$ es un atractor.
2. Si $f'(p) > 0$ entonces $p$ no es un atractor.

## Ejemplo

¿Qué debe cumplir el parámetro $a$ para que $p = 1$ sea un atractor de la EDO $x' = 3ax^2 + a^2x + 2$

# Propiedades de las soluciones

## Propiedad 5

Si $\varphi(t) = G(t; t_0, x_0)$ es una solución no constante de la EDO $x' = f(x)$ entonces es es estrictamente monótona.

## Propiedad 6

Si existe

$$\lim_{t \to \omega(t_0, x_0)} G(t; t_0, x_0) = L$$

y $L \in (a, b)$ entonces $\omega(t_0, x_0) = +\infty$ y $L \in Z_f$.

Análogamente:

## Propiedad 7

Si existe

$$\lim_{t \to \alpha(t_0, x_0)} G(t; t_0, x_0) = L$$

y $L \in (a, b)$ entonces $\alpha(t_0, x_0) = -\infty$ y $L \in Z_f$.

## Propiedad 8

Sean $p \in Z_f$ y $x_0 \in (a, b)$. Si $x_0 < p$, entonces

$$G(t; t_0, x_0) < p \qquad \forall t \in \big(\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0)\big).$$

Análogamente:

## Propiedad 9

Sean $p \in Z_f$ y $x_0 \in (a, b)$. Si $p < x_0$, entonces

$$G(t; t_0, x_0) > p \qquad \forall t \in \big(\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0)\big).$$

Se suele decir que *los ceros de $f$ son barreras infranqueables* para el resto de soluciones.

## Ejercicio

Justifica que todas las soluciones de la EDO $x' = \operatorname{sen}(x)$ están acotadas.

# Sigmoides

## Propiedad 10

Sean $p, q \in (a, b)$ tales que $p < q$, $f(p) = f(q) = 0$. Entonces, para cada $x_0 \in (p, q)$ se cumplen:

1. $G(t; t_0, x_0) \in (p, q) \quad \forall t \in \big(\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0)\big)$.
2. $\omega(t_0, x_0) = +\infty$.
3. $\alpha(t_0, x_0) = -\infty$.

Si además $f(x) > 0\ \forall x \in (p, q)$, entonces

4. $t \mapsto G(t; t_0, x_0)$ es estrictamente creciente.
5. $\lim\limits_{t \to +\infty} G(t; t_0, x_0) = q$.
6. $\lim\limits_{t \to -\infty} G(t; t_0, x_0) = p$.

En cambio, si $f(x) < 0\ \forall x \in (p, q)$, entonces

4. $t \mapsto G(t; t_0, x_0)$ es estrictamente decreciente.
5. $\lim\limits_{t \to +\infty} G(t; t_0, x_0) = p$.
6. $\lim\limits_{t \to -\infty} G(t; t_0, x_0) = q$.

**Propiedad 11**

Sea $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [x_0, b)$.

1. Si $f(x_0) > 0$ entonces $\displaystyle\lim_{t \to \omega(t_0, x_0)} G(t; t_0, x_0) = b$.
2. Si $f(x_0) < 0$ entonces $\displaystyle\lim_{t \to \alpha(t_0, x_0)} G(t; t_0, x_0) = b$.

Análogamente:

**Propiedad 12**

Sea $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, x_0]$.

1. Si $f(x_0) < 0$ entonces $\displaystyle\lim_{t \to \omega(t_0, x_0)} G(t; t_0, x_0) = a$.
2. Si $f(x_0) > 0$ entonces $\displaystyle\lim_{t \to \alpha(t_0, x_0)} G(t; t_0, x_0) = a$.