# Curvas y Superficies

Antonio Gámiz Delgado
Universidad de Granada

19 de marzo de 2020

**Ejercicio 1.**

Para cada función diferenciable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se considera la curva $\alpha_f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha_f(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$.

(a) Comprueba que $\alpha_f$ es regular. Tenemos que comprobar $\left|\alpha'_f(t)\right| \neq 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$:

$$\left|\alpha'_f(t)\right| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (f'(t))^2} = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

Que nunca puede dar 0 ya que es la suma de dos números positivos.

(b) Prueba que para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, con $t_1 < t_2$, se cumple $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \left|\alpha'_f(t)\right| dt \geq t_2 - t_1$.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left|\alpha'_f(t)\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \geq \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1$$

(c) Construye el triedro de Frenet.

Como $|\alpha_f(t)| \neq 1$, tenemos que el triedro viene dado por:

$$e_1(t) = \frac{\alpha'_f(t)}{\left|\alpha'_f(t)\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} \alpha'_f(t)$$

$$\alpha''_f(t) = (-\cos t, -\sin t, f''(t)) \Rightarrow \tilde{e_2}(t) = \alpha''_f(t) - < \alpha''_f(t), e_1(t) > e_1(t) =$$

$$= \alpha''_f(t) - \frac{f'(t) f''(t)}{1 + (f'(t))^2} \alpha'_f(t) = (-\cos t, -\sin t, f''(t)) - \frac{f'(t) f''(t)}{1 + (f'(t))^2} (-\sin t, \cos t, f'(t))$$

Calculemos $|\tilde{e_2}(t)|^2$, saltándonos las cuentas debido a su gran longitud:

$$|\tilde{e_2}(t)|^2 = \frac{1 + f'(t)^2 + f''(t)^2}{1 + f'(t)^2} \Rightarrow e_2(t) = \sqrt{\frac{1 + f'(t)^2 + f''(t)^2}{1 + f'(t)^2}} \tilde{e_2}(t)$$

$$e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t) = (\text{... cuentas ...}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + f'(t)^2 + f''(t)^2}} (f''(t) \cos t + f'(t) \sin t, f''(t) \sin t - f'(t) \cos t, 1)$$

(d) Calcula sus funciones curvatura y torsión.

Usando el ejercicio 3:

$$K(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \quad \tau(t) = \frac{det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (\cos t f''(t) + \sin t f'(t), \sin t f''(t) - \cos t f'(t), 1) \Rightarrow$$

$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2 = 1 + f'(t)^2 + f''(t)^2 \Rightarrow$$

$$K(t) = \frac{\sqrt{1 + f'(t)^2 + f''(t)^2}}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

$$\alpha'''(t) = (\sin t, -\cos t, f'''(t)) \Rightarrow$$

$$det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & f'(t) \\ -\cos t & -\sin t & f''(t) \\ \sin t & -\cos t & f'''(t) \end{vmatrix} = f'''(t) + f'(t)$$

(e) Determina las funciones $f$ para las cuales $\alpha_f$ es una curva plana.

Para que sea una curva plana, su torsión tiene que ser 0, es decir, $\tau(t) = 0$. La expresión solo será 0 si el numerador lo es, es decir, $f'''(t) + f'(t) = 0$. Cuya solución son las funciones $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.