Ejercicio 10.- Si $\mathbb{S}^2$ es la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1, comprueba que la aplicación $F:\mathbb{S}^2\longrightarrow\mathbb{S}^2$ dada por $F(x,y,z)=(x,y,-z)$ es un difeomorfismo de $\mathbb{S}^2$. Interprétalo geométricamente. Calcula $(dF)_{(0,0,1)}$ y $(dF)_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}$.

Para ver que F es un difeomorfismo primero tenemos que ver si es diferenciable. Lo es por ser una restricción (a una superficie regular) de la aplicación diferenciable $\widetilde{F}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ dada por $\widetilde{F}(x,y,z)=(x,y,-z)$.

Sea $(x,y,z)\in\mathbb{S}^2$, se tiene $x^2+y^2+z^2=1$. Si aplicamos F a ese punto, se sigue cumpliendo la condición ya que $F(x,y,z)=(x,y,-z)$, luego $x^2+y^2+(-z)^2=1$. Por lo tanto, $F(\mathbb{S}^2)=\mathbb{S}^2$.

Además podemos ver fácilmente que se da $F\circ F=Id_{\mathbb{S}^2}$, luego F coincide con su inversa, es decir, $F=F^{-1}$. Como F es diferenciable, F^{-1} también lo es y F es biyectiva. Tenemos así que F es un difeomorfismo.

Geométricamente, esta aplicación se puede ver como la simetría respecto al plano $z=0$ o como el giro de π radianes respecto del eje Y.

Calculamos ahora $T_p\mathbb{S}^2$ para los puntos que nos piden, ayudándonos de un ejercicio de clase, que nos dice lo siguiente:

$$T_p\mathbb{S}^2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :<(x,y,z),p>=0\right\}$$

Ahora solo tenemos que sustituir el valor de p por $(0,0,1)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$:

$$T_{(0,0,1)}\mathbb{S}^2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0\right\}$$

$$T_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}\mathbb{S}^2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y=0\right\}$$

Como $\widetilde{F}$ es lineal y $F=\widetilde{F}_{|\mathbb{S}^2}\longrightarrow\mathbb{S}^2$, se cumple que $dF_p(w)=\widetilde{F}(w)\ \forall p\in\mathbb{S}^2\ \forall w\in T_p\mathbb{S}^2$. Por lo tanto, se puede definir:

$$\begin{aligned} dF_{(0,0,1)}: \quad & T_{(0,0,1)}\mathbb{S}^2\longrightarrow T_{(0,0,-1)}\mathbb{S}^2 \\ & (x,y,0)\longrightarrow(x,y,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}: \quad & T_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}\mathbb{S}^2\longrightarrow T_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}\mathbb{S}^2 \\ & (x,x,0)\longrightarrow(x,x,-z)\end{aligned}$$