Problemas

Recopilación de L. M. Nieto

1 Dado el funcional $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^3),\ y \in C^2(a,b).$

$$\mathcal{F}[y(x)] = \int_a^b \Phi(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

demuéstrese la equivalencia de las dos formas siguientes de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$a)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0 \qquad\qquad b)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(\Phi - y'\,\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = 0.$$

2 Si la función $\Phi(x, y(x), y'(x))$ en el funcional $\mathcal{F}[y(x)]$ es del tipo

$$\Phi(x, y(x), y'(x)) = \Phi_1(x, y(x)) + \Phi_2(x, y(x))\, y'(x),$$

demuéstrese que la ecuación de Euler-Lagrange conduce a $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}$ ¿Qué implica este hecho sobre la dependencia de la integral respecto a la elección del camino?

4 Obténgase la forma que adopta la ecuación de Euler-Lagrange en los siguientes casos particulares:

a) Φ sólo depende de y'.

b) Φ no depende de y.

c) Φ no depende explícitamente de x.

d) $\Phi = G(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$.

5 Aplíquense los resultados anteriores a los ejemplos siguientes:

a) $\mathcal{F}[y(x)] = \int y(2x - y)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/2.$

b) $\mathcal{F}[y(x)] = \int (y^2 + 2xyy')dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$

c) $\mathcal{F}[y(x)] = \int (1 + y'^2)^{1/2}dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$ / Hecho en clase.

d) $\mathcal{F}[y(x)] = \int y'(1 + x^2y')dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 5.$

6 Encuéntrense los extremales de los siguientes funcionales:

a) $\mathcal{F}[y(x)] = \int_a^b [y^2 + y'^2 - 2y\sin x]dx.$

b) $\mathcal{F}[y(x)] = \int_a^b [y^2 - y'^2 - 2y\cosh x]dx.$

c) $\mathcal{F}[y(x)] = \int_a^b [y^2 + y'^2 + 2ye^x]dx.$

d) $\mathcal{F}[y(x)] = \int_a^b [y^2 - y'^2 - 2y\sin x]dx.$

7 Demuéstrese que dados dos puntos cualesquiera del plano de abscisas diferentes, en general no hay extremal del funcional

$$\mathcal{F}[y(x)] = \int_a^b (y^2 + \sqrt{1 + y'^2})dx$$

que pase por dichos puntos.