Recordatorio sobre la forma canónica de Jordan

Cualquier matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_d$ es semejante a una matriz $J \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ que es diagonal por bloques:

$$J = \operatorname{diag}\{J_1, \dots, J_r\} = \begin{pmatrix} J_1 & O & \cdots & O \\ O & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & J_r \end{pmatrix}$$

donde $J_k \in \mathcal{M}_{r_k}$. Además:

- Si $r_k = 1$ entonces $J_k = (\lambda_j)$ donde $\lambda_j \in \sigma(A)$.
- Si $r_k > 1$:

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_j & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \qquad \text{donde } \lambda_j \in \sigma(A)$$

Para calcular la matriz J tenemos en cuenta:

- La multiplicidad de cada valor propio:

$$m(\lambda_j) \qquad\qquad \text{para cada } \lambda_j \in \sigma(A)$$

- La dimensión de cada subespacio propio E_{λ_j}:

$$\dim E_{\lambda_j} = \dim \ker(A - \lambda_j I) = d - \text{rango}(A - \lambda_j I)$$

- El índice de cada valor propio:

$$\nu(\lambda_j) = \text{mín}\left\{ k \in \mathbb{Z}^+ \;:\; \ker(A - \lambda_j I)^k = \ker(A - \lambda_j I)^{k+1} \right\}$$

donde $\nu(\lambda_j) > 1$ sii $\dim E_{\lambda_j} < m(\lambda_j)$.

- El orden de J_k siempre es menor o igual que $\nu(\lambda_j)$
- Existe al menos un bloque cuyo orden es exactamente $\nu(\lambda_j)$
- Un valor propio λ_j puede aparecer en más de un bloque.
- La suma de los órdenes de los bloques asociados a λ_j coincide con $m(\lambda_j)$.

Puesto que A y J son semejantes, debe existir $P \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ invertible tal que

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1}$$

Entonces se cumple:

$$e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \qquad \text{donde } e^{Jt} = \operatorname{diag}\left\{e^{J_1 t}, \dots, e^{J_r t}\right\}$$

Y además

$$\left\|e^{Jt}\right\|_1 = \text{máx}\left\{\left\|e^{J_k t}\right\|_1 \ : \ k = 1, \dots, r\right\}$$

- Si $J_k = (\lambda_j)$ es simple (de orden 1) entonces $e^{J_k t} = \left(e^{\lambda_j t}\right)$ y por tanto:
$$\left\|e^{J_k t}\right\|_1 = \left|e^{\lambda_j t}\right| = e^{\mathrm{Re}(\lambda_j)t}$$
- Si el orden de J_k es $m > 1$ entonces $J_k = \lambda_j I + N_k$ donde N_k es nilpotente y es fácil deducir que

$$e^{J_k t} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & t & & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, para $t \geq 0$:

$$\left\|e^{J_k t}\right\|_1 = \left|e^{\lambda_j t}\right| \left(1+t+\cdots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right) = e^{\mathrm{Re}(\lambda_j)t}\left(1+t+\cdots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right)$$

Como consecuencia:

$$\left\|e^{Jt}\right\|_1 = \max\left\{e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\left(1 + t + \cdots + \frac{t^{\nu(\lambda)-1}}{(\nu(\lambda)-1)!}\right) \ : \ \lambda \in \sigma(A)\right\}$$

Si denotamos

$$\mu = \max\left\{\mathrm{Re}(\lambda) \ : \ \lambda \in \sigma(A)\right\}$$

y

$$\sigma_\mu(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \ : \ \mathrm{Re}(\lambda) = \mu\}$$

y

$$n = \max\left\{\nu(\lambda) - 1 \ : \ \lambda \in \sigma_\mu(A)\right\}$$

Podemos concluir:

Lema

Existe $T \geq 0$ tal que para todo $t \geq T$

$$\left\|e^{Jt}\right\|_1 = \left(1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right)e^{\mu t}$$

Demostración del teorema

Sea J una forma canónica de Jordan de A. Existe $P \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ invertible tal que:

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1}.$$

Entonces se cumple:

$$e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}.$$

Si consideramos la norma matricial en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$:

$$|||B||| := \left\| P^{-1} \cdot B \cdot P \right\|_1 \qquad\qquad B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$$

entonces

$$|||e^{At}||| = \left\| e^{Jt} \right\|_1 = \left(1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!} \right) e^{\mu t}$$

donde $\mu = \text{máx}\left\{ \text{Re}(\lambda) \ : \ \lambda \in \sigma(A) \right\}$ y donde

$$n = \text{máx}\left\{ \nu(\lambda) - 1 \ : \ \lambda \in \sigma_\mu(A) \right\}.$$

1. Si $\mu < 0$ entonces

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+t+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)e^{\mu t}=0$$

   Y ya sabemos que si $|||e^{At}|||\to 0$ la ecuación $(*)$ es asintóticamente estable.

2. Si $\mu = 0$ y $m(\lambda)=\dim E_\lambda$ para todo $\lambda\in\sigma_0(A)$ entonces $n=0$ y por tanto existe $T\geq 0$ tal que

$$|||e^{At}|||=1 \qquad\qquad \forall t\geq T$$

   y en consecuencia $|||e^{At}|||$ está acotada en $[0,+\infty)$, luego $(*)$ es estable. No es asintóticamente estable ya que

$$|||e^{At}|||\to 1\neq 0.$$

3. Si $\mu = 0$ y y existe $\lambda\in\sigma_0(A)$ tal que $m(\lambda)\neq\dim E_\lambda$, entonces $n\geq 1$ y por tanto existe $T\geq 0$ tal que

$$|||e^{At}|||\geq 1+t \qquad\qquad \forall t\geq T$$

   y en consecuencia $|||e^{At}|||\to+\infty$, luego $(*)$ es inestable.

4. Si $\mu > 0$ entonces

$$\lim_{t \to +\infty} \left(1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) e^{\mu t} = +\infty$$

Esto es, $|||e^{At}||| \to +\infty$ y en consecuencia $(*)$ es inestable.