Note per la Lezione 2

Ugo Vaccaro

Dati un intero $n \geq 1$ ed una generica sequenza $a = a[0]a[1]\cdots a[n-1]$ di numeri (che possono essere sia positivi o negativi), per ogni coppia di indici $0 \leq i \leq j \leq n-1$, denotiamo con $V(i,j)$ la quantità

$$V(i,j) = \sum_{k=i}^{j} a[k],$$

ovvero $V(i,j)$ è la somma degli elementi della sequenza a dall'i-esimo allo j-esimo, consecutivamente. Denotiamo con $V(a)$ la quantità

$$V(a) = \max_{0 \leq i \leq j \leq n-1} V(i,j),$$

in altre parole $V(a)$ è il *masssimo valore* che possiamo ottenere sommando sottosequenze di elementi *consecutivi* della sequenza a. Varrà quindi

$$\forall i,j \quad V(a) \geq V(i,j).$$

Siamo interessati a risolvere il seguente problema algoritmico.

Input: sequenza di numeri $a = a[0]a[1]\cdots a[n-1]$

Output: $V(a) = \max_{0 \leq i \leq j \leq n-1} V(i,j) = \max_{0 \leq i \leq j \leq n-1} \sum_{k=i}^{j} a[k].$

Prima possibile soluzione. Calcoliamo la somma di *tutte* le possibili sottosequenze di elementi consecutivi di a, ovvero calcoliamo tutti i possibili valori $V(i,j)$, per ogni coppia di indici (i,j) per cui $0 \leq i \leq j \leq n-1$, e diamo in output la somma massima. Il seguente algoritmo fà proprio questo.

```
MaxConsecutivaSomma1(a)
SommaMassima= a[0]
FOR(i = 0; i < n; i = i + 1){
    FOR(j = i; j < n; j = j + 1){
        SommaCorrente= 0
        FOR(k = i; k < j + 1; k = k + 1){
            SommaCorrente=SommaCorrente+a[k]
        }
        IF(SommaCorrente>SommaMassima){
            SommaMassima=SommaCorrente
        }
    }
}
RETURN SommaMassima
```

Il ciclo FOR delle istruzioni 6. e 7. calcola $V(i,j) = \sum_{k=i}^{j} a[k]$. Si vede immediatamente che le istruzioni all'interno del FOR$(k = i; k < j+1; k = k+1)$ possono essere eseguite al più n volte, così come il codice all'interno del ciclo FOR$(j = i; j < n; j = j+1)$ ed anche del ciclo FOR$(i = 0; i < n; i = i+1)$, per cui l'algoritmo MaxConsecutivaSomma1(a) eseguirà al più $c \times n \times n \times n = cn^3$ operazioni elementari,[1] per qualche costante c. In altri termini, la complessità dell'algoritmo MaxConsecutivaSomma1(a) su di un input composto da una sequanza di n numeri è $O(n^3)$.

Seconda possibile soluzione. Calcoliamo sempre la somma di tutte le possibili sottosequenze di elementi consecutivi di a, usando questa volta la seguente osservazione. Vale che:

$$V(i,j) = \sum_{k=i}^{j} a[k] = \sum_{k=i}^{j-1} a[k] + a[j] = V(i, j-1) + a[j]. \tag{1}$$

Daremo in output sempre il massimo di tutti i valori calcolati, ovvero $\max_{i,j} V(i,j)$. L'osservazione (1) di sopra ci permette di risparmiare tempo, in quanto con *una sola* somma ci possiamo ora calcolare $V(i,j)$ come $V(i,j) = V(i,j-1) + a[j]$, invece di eseguire il FOR$(k = i; k < j+1; k = k+1)$, come facevamo nel precedente algoritmo. L'algoritmo seguente fà uso dell'osservazione sopra fatta.

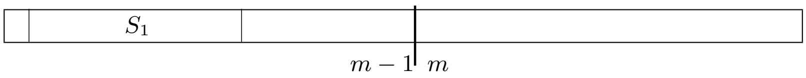
```
MaxConsecutivaSomma2(a)
SommaMassima= a[0]
FOR(i = 0; i < n; i = i + 1){
    SommaCorrente= 0
    FOR(j = i; j < n; j = j + 1){
        SommaCorrente=SommaCorrente +a[j]
        IF(SommaCorrente>SommaMassima){
         SommaMassima=SommaCorrente
         }
    }
}
RETURN SommaMassima
```

Si vede immediatamente che le istruzioni all'interno del FOR$(j = i; j < n; j = j+1)$ possono essere eseguite al più n volte, così come le istruzioni all'interno del FOR$(i = 0; i < n; i = i+1)$, per cui l'algoritmo MaxConsecutivaSomma2(a) eseguirà al più dn^2 operazioni elementari, per qualche costante d. Ovvero, la complessità di MaxConsecutivaSomma2(a) è $O(n^2)$.

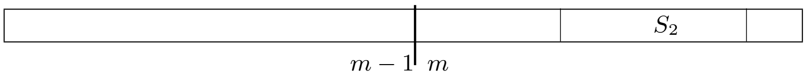
Terza possibile soluzione. Applichiamo la tecnica Divide-et-Impera

Idea: Data la sequenza input di n numeri $a = a[0a[1] \ldots a[n-1]$, poniamo $m = \lfloor n/2 \rfloor$. La massima somma consecutiva (MSC) della sequenza $a = a[0]a[1] \cdots a[n-1]$ deve necessariamente essere una delle seguenti:
S_1 = la MSC della sottosequenza $a[0]a[1] \cdots a[m-1]$

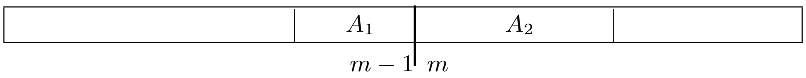
[1] Per il momento, per noi un'operazione fondamentale è una qualsiasi operazione nell'insieme {somma tra numeri, moltiplicazione tra numeri (se non troppo grandi...), assegnazione di valori ad una variabile, incremento o decremento di valori ad una variabile, controllo di valori di una variabile, ed operazioni simili...}. Di conseguenza, un'operazione elementare è una operazione che richiede un tempo *costante* per la sua esecuzione, ovvero il suo tempo di esecuzione *non* dipende dalla grandezza dei numeri coinvolti.



oppure S_2: la MSC della sottosequenza $a[m]a[m+1]\cdots a[n-1]$



oppure é a "cavallo" di $a[m-1]$, ovvero la massima somma consecutiva di a è della forma $A = A_1 \cup A_2$, con



Vediamo un esempio. Sia a rappresentata nella figura di sotto riportata:

1	-5	4	2	-7	3	6	-1	2	-4	7	-10	2	6	1	-3

In questo caso $S_1 = [3, 6]$ con valore $3 + 6 = 9$, e $S_2 = [2, 6, 1]$ con valore $2 + 6 + 1 = 9$.

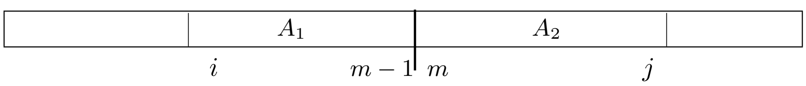
1	-5	4	2	-7	3	6	-1	2	-4	7	-10	2	6	1	-3

Ma abbiamo anche $A_1 = [3, 6, -1]$, $A_2 = [2, -4, 7]$, con $A = A_1 \cup A_2 = [3, 6, -1, 2, -4, 7]$, di valore totale $3 + 6 - 1 + 2 - 4 + 7 = 13$.

Dobbiamo quindi trovare S_1, S_2 e A ...

- il valore S_1 lo si trova determinando la MSC di $a[0]a[1]\cdots a[m-1]$, ovvero chiamando l'algoritmo ricorsivamente sulla parte sinistra $a[0]a[1]\cdots a[m-1]$ della sequenza $a[0]a[1]\cdots a[n-1]$
- il valore S_2 lo si trova determinando la MSC di $a[m]a[m+1]\cdots a[n-1]$, ovvero chiamando l'algoritmo ricorsivamente sulla parte destra $a[m]a[m+1]\cdots a[n-1]$ della sequenza $a[0]a[1]\cdots a[n-1]$
- Come trovare il valore A lo vediamo in un secondo ...
- La MSC dell'intera sequenza $a[0]a[1]\cdots a[n-1]$ sará quindi quel valore tra S_1, S_2, ed A, che ha valore *massimo*.

Come trovare A: la fase di Conquer



- A_1 é della forma $a[i]\ldots a[m-1]$ per qualche valore di $i \in \{0, \ldots, m-1\}$:

ci sono solo $m \leq n$ tali sequenze, tante quanti sono i corrispondenti valori di $i, 0 \leq i \leq m-1$. Pertanto la sequenza contigua A_1 di valore massimo puó essere trovata usando al piú $O(m) = O(n)$ operazioni, con un semplice ciclo `FOR`, con l'indice i del `FOR` che varia tra 0 e $m-1$.

- Analogamente, A_2 é della forma $a[m] \dots a[j]$. per qualche valore di $j \in \{m, \dots n-1\}$:

  ci sono solo $n-m \leq n$ tali sequenze, tante quanti sono i corrispondenti valori di $j, m \leq j \leq n-1$. Pertanto la sequenza contigua A_2 di valore massimo puó essere trovata in $O(n-m) = O(n)$ operazioni, sempre con un semplice ciclo `FOR`, con l'indice j del `FOR` che varia tra m ed $n-1$.

  Riassumendo

$$\boxed{A = A_1 \cup A_2 \text{ può essere trovato in } O(n) \text{ operazioni}}$$

L'Algoritmo Completo Divide-et-Impera sarà quindi il seguente:

`MaxConsecutivaSomma3`(a, i, j)
1. `IF` $i == j$ `RETURN` $a[i]$ `ELSE`
2. $S_1 =$ `MaxConsecutivaSomma3`$(a, i, \lfloor (i+j)/2 \rfloor)$
3. $S_2 =$ `MaxConsecutivaSomma3`$(a, \lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1, j)$
4. $A_1 = 0, B_1 = a[\lfloor (i+j)/2 \rfloor]$
5. `FOR`$(s = \lfloor (i+j)/2 \rfloor; s > i-1; s = s-1)\{$
6. $A_1 = A_1 + a[s]$
7. `IF`$(A_1 > B_1)$ $\{$
8. $B_1 = A_1$

   $\}$

   $\}$
9. $A_2 = 0, B_2 = a[\lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1]$
10. `FOR`$(t = \lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1; t < j+1; t = t+1)\{$
11. $A_2 = A_2 + a[t]$
12. `IF`$(A_2 > B_2)$ $\{$
13. $B_2 = A_2$

    $\}$

    $\}$
14. $S_3 = B_1 + B_2$
15. `RETURN MAX`(S_1, S_2, S_3)

Detto $T(n)$ il numero di operazioni di `MaxConsecutivaSomma3`$(a, 0, n-1)$, abbiamo:

l'istruzione 1. richiede tempo $O(1)$.

Le istruzioni 2. e 3. richiedono tempo $T(n/2)$, ciascheduna, in quanto in ciascuna di esse eseguiamo il nostro algoritmo MSC su di una sequenza lunga la metà di quella di partenza.

Le istruzioni 4-15 richiedono in totale tempo $O(n)$.

In totale

$$\boxed{T(n) = 2T(n/2) + O(n)} \Longrightarrow \boxed{T(n) = O(n \log n)}$$

Quarta possibile soluzione. Per un generico indice $0 \leq i < n$, denotiamo con $M(i)$ la seguente quantità:

$$M(i) = \text{ il valore della massima somma consecutiva che ha come } \textit{ultimo} \text{ termine uguale a } a[i].$$

Ovviamente vale che

$$V(a) = \max\{M(0), M(1), \ldots, M(n-1)\},$$

visto che la somma consecutiva di valore massimo da qualche parte deve pur terminare.

Inoltre, vale che

$$M(i) = \max\{M(i-1) + a[i], a[i]\}. \tag{2}$$

Infatti, se $M(i) = x + a[i]$, allora la somma x ha come ultimo termine il valore $a[i-1]$, e *necessariamente* vale che $x = M(i-1)$. Se non fosse così, ovvero se $x < y = M(i-1)$, allora esisterebbe un'altra somma che termina con $a[i]$, di valore $y + a[i] > x + a[i] = M(i)$, contro l'ipotesi che $M(i)$ è il valore della *massima* somma che ha come ultimo termine $a[i]$.

Il seguente algoritmo calcola $V(a)$, per un'arbitraria sequenza $a = a[0]a[1] \ldots a[n-1]$ di n numeri, utilizzando la importante identità (2).

```
MaxConsecutivaSomma4(a)
SommaMassima= a[0]
SommaMassimaFAQ= a[0]
FOR(i = 1; i < n; i = i + 1){
    IF(SommaMassimaFAQ+a[i] > a[i]){
       SommaMassimaFAQ=SommaMassimaFAQ+a[i]
       ELSE SommaMassimaFAQ= a[i]
       }
    IF(SommaMassimaFAQ>SommaMassima) {
       SommaMassima=SommaMassimaFAQ
       }
}
return SommaMassima
```

Dopo ogni esecuzione del ciclo `FOR`$(i = 1; i < n; i = i + 1)$, la variabile `SommaMassimaFAQ` contiene il valore $M(i)$. Visto che l'algoritmo consta di *un solo* ciclo `FOR`, esso eseguirà al più *en* operazioni elementari, per qualche costante e. In altri termini, la complessità di `MaxConsecutivaSomma4`(a) su input a di dimensione n è $O(n)$.

A mò di esempio numerico, supponiamo di eseguire i quattro algoritmo sopra elencati su di un calcolatore che esegue *un miliardo* di operazioni al secondo, per input di dimensione $10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^8$. Supponendo per semplicità che le costanti all'interno della notazione O siano tutte pari ad 1, avremmo i risultati seguenti:

	n	$n \log n$	n^2	n^3
10^3	0.000001s	0.00000996578s	0.001s	1s
10^4	0.00001s	0.00013287712s	0.1s	$\approx$16.6m
10^5	0.0001s	0.00166096404s	10s	11.5giorni
10^6	0.001s	0.01993156856s	$\approx$17m	$\approx$31 anni
10^8	0.1s	2.65754247591s	$\approx$6 mesi	troppo...

La morale della lezione consiste in:

- Uno stesso problema algoritmico può essere risolto attraverso varie e differenti tecniche, le quali produrranno vari e differenti algoritmi per la risoluzione dello stesso problema;
- É importante avere algoritmi efficienti.