Ejercicios 1

Antonio Jesús Martín Valverde

March 23, 2018

1 Calcula los cumulantes de la distribución de Poisson:

$$P_m(a) = \frac{1}{m!} a^m e^{-a}$$

con n definida en el rango de los enteros positivos o nulos, es decir, $n = 0, 1, 2, ...$ y siendo a una constante positiva.

Consideramos la función generadora de cumulantes:

$$K(t) = \ln < e^{tm} > = \ln \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} a^m e^{-a} e^{tm} \right] = \ln \left[e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(a\, e^t \right)^m \right] = \ln \left[e^{-a} e^{a\, e^t} \right] = a(e^t - 1)$$

Se tiene que el cumulante α-ésimo es:

$$\xi_\alpha = \left. \frac{d^\alpha K(t)}{dt^\alpha} \right|_{t=0}$$

En nuestro caso se tiene que:

$$\left. \frac{d^\alpha K(t)}{dt^\alpha} \right|_{t=0} = a\, e^t \quad \forall \alpha \geq 1 \Longrightarrow \xi_\alpha = a \quad \forall \alpha \geq 1$$

2 Calcula las relaciones entre cumulantes y momentos hasta orden 4.

Tenemos que el momento i-ésimo es de la forma:

$$\mu_i = < x^i >$$

Hallamos los cumulantes del mismo modo que en el ejercicio anterior:

$$\xi_i = \left. \frac{d^i K(t)}{dt^i} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^i \left[\ln < e^{tx} > \right]}{dt^i} \right|_{t=0}$$

Al estar derivando respecto de una variable de la cual nuestra distribución no depende, tenemos que la derivada y el valor esperado conmutan entre sí. De esta manera podemos calcular sencillamente la derivada i-ésima y dejarla en función de valores esperados.

Para la primera derivada se tiene:

$$\frac{dK(t)}{dt} = \frac{< x\, e^{tx} >}{< e^{tx} >} \Longrightarrow \xi_1 = < x > = \mu_1$$

Para la segunda derivada se tiene:

$$\frac{d^2K(t)}{dt^2} = \frac{< x^2\, e^{tx} >}{< e^{tx} >} - \left(\frac{< x\, e^{tx} >}{< e^{tx} >}\right)^2 \Longrightarrow \xi_2 =< x^2 > - < x >^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

Para la tercera derivada se tiene:

$$\frac{d^3K(t)}{dt^3} = \frac{< x^3 e^{tx} >}{< e^{tx} >} - 3\frac{< x^2 e^{tx} >< x\, e^{tx} >}{< e^{tx} >^2} + 2\left(\frac{< x\, e^{tx} >}{< e^{tx} >}\right)^3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \xi_3 =< x^3 > -3 < x^2 >< x > +2 < x >^3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3$$

Para la cuarta derivada se tiene:

$$\frac{d^4K(t)}{dt^4} = \frac{< x^4\, e^{tx} >}{< e^{tx} >} - \frac{4 < x^3 e^{tx} >< x\, e^{tx} > +3 < x^2 e^{tx} >^2}{< e^{tx} >^2} + 12\frac{< x^2 e^{tx} >< x\, e^{tx} >^2}{< e^{tx} >^3} - 6\left(\frac{< x\, e^{tx} >}{< e^{tx} >}\right)^4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \xi_4 =< x^4 > -4 < x^3 >< x > -3 < x^2 >^2 +12 < x^2 >< x >^2 -6 < x >^4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4$$

3 Estudiar analíticamente y por medio del ordenador, la serie temporal resultante de iterar el mapa mostrado en la relación. En particular, calcular analíticamente el valor del exponente de Lyapunov y mostrar que es positivo. ¿Qué implicaciones tiene este hecho? Dibujar un gráfico con x_i en el eje de abscisas y x_{i+1} en el eje de ordenadas. ¿Qué aspecto tiene? Verificar que aparece la forma ilustrada en la relación (esto es que hay un desplazamiento de los decimales).

$$x_{i+1} = T(x_i) = \begin{cases} 2x & for \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & for \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

El exponente de Lyapunov se define como:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)|\right]$$

En nuestro caso:

$$f\,(x) = T\,(x) \Longrightarrow f'(x_i) = T'(x_i) = 2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \ln(2)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n}\ln(2)\right] = \ln(2) > 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda > 0$$

Tenemos que el exponente de Lyapunov es necesariamente positivo, lo que implica que el sistema es caótico.

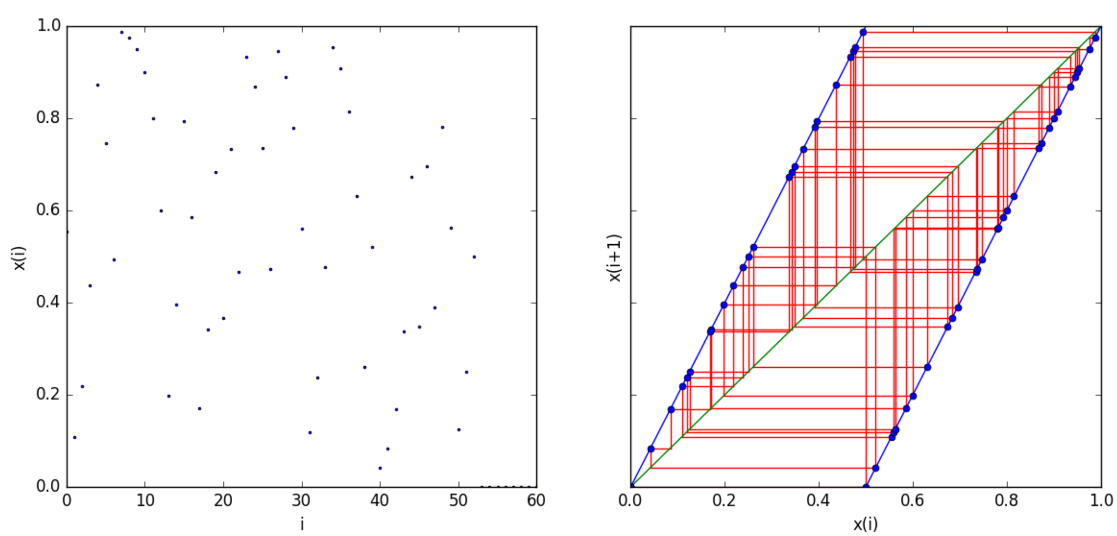
Tras escribir un programa en Python realizamos varias pruebas. Este programa toma una semilla e itera 60 veces esta serie, mostrando en la consola el valor de cada iteración en binario y mostrando finalmente 2 gráficas. La primera muestra los valores de x_i frente a i y la segunda muestra los valores de x_{i+1} frente a x_i.

Observando los resultados mostrados más adelante se observa claramente que el sistema es caótico y que, representados los valores en binario, esta serie corre una posición hacia la izquierda los decimales en cada iteración. Esto último tiene sentido de la misma manera que al multiplicar un número por 10 expresado en base decimal, se dice que "la coma se corre una posición hacia la derecha"; en este caso estamos haciendo lo mismo solo que en base binaria al multiplicar por 2, y restando una unidad en caso de que el resultado sobrepase al 1. Siendo que el ordenador funciona internamente con cifras binarias pero que no puede manejar infinitos decimales, se observa que en todos los casos, tarde o temprano, la serie cae a 0 al no haber más cifras decimales no nulas que correr hacia la izquierda.

Prueba 1

Iteraciones:

i	$x(i)$	i	$x(i)$
1	0.10001101111110011001010111011110001111010000101011001	31	0.10001111010000101011001
2	0.0001101111110011001010111011110001111010000101011001	32	0.0001111010000101011001
3	0.001101111110011001010111011110001111010000101011001	33	0.001111010000101011001
4	0.01101111110011001010111011110001111010000101011001	34	0.01111010000101011001
5	0.1101111110011001010111011110001111010000101011001	35	0.1111010000101011001
6	0.101111110011001010111011110001111010000101011001	36	0.111010000101011001
7	0.01111110011001010111011110001111010000101011001	37	0.11010000101011001
8	0.1111110011001010111011110001111010000101011001	38	0.1010000101011001
9	0.111110011001010111011110001111010000101011001	39	0.010000101011001
10	0.11110011001010111011110001111010000101011001	40	0.10000101011001
11	0.1110011001010111011110001111010000101011001	41	0.0000101011001
12	0.110011001010111011110001111010000101011001	42	0.000101011001
13	0.10011001010111011110001111010000101011001	43	0.00101011001
14	0.0011001010111011110001111010000101011001	44	0.0101011001
15	0.011001010111011110001111010000101011001	45	0.101011001
16	0.11001010111011110001111010000101011001	46	0.01011001
17	0.1001010111011110001111010000101011001	47	0.1011001
18	0.001010111011110001111010000101011001	48	0.011001
19	0.01010111011110001111010000101011001	49	0.11001
20	0.1010111011110001111010000101011001	50	0.1001
21	0.010111011110001111010000101011001	51	0.001
22	0.10111011110001111010000101011001	52	0.01
23	0.0111011110001111010000101011001	53	0.1
24	0.111011110001111010000101011001	54	0
25	0.11011110001111010000101011001	55	0
26	0.1011110001111010000101011001	56	0
27	0.011110001111010000101011001	57	0
28	0.11110001111010000101011001	58	0
29	0.1110001111010000101011001	59	0
30	0.110001111010000101011001	60	0



Prueba 2

Iteraciones:

i	$x(i)$	i	$x(i)$
1	0.0001100010101001100001011101010110110101011101011011	31	0.0110110101011101011011
2	0.001100010101001100001011101010110110101011101011011	32	0.110110101011101011011
3	0.01100010101001100001011101010110110101011101011011	33	0.10110101011101011011
4	0.1100010101001100001011101010110110101011101011011	34	0.0110101011101011011
5	0.100010101001100001011101010110110101011101011011	35	0.110101011101011011
6	0.00010101001100001011101010110110101011101011011	36	0.10101011101011011
7	0.0010101001100001011101010110110101011101011011	37	0.0101011101011011
8	0.010101001100001011101010110110101011101011011	38	0.101011101011011
9	0.10101001100001011101010110110101011101011011	39	0.01011101011011
10	0.0101001100001011101010110110101011101011011	40	0.1011101011011
11	0.101001100001011101010110110101011101011011	41	0.011101011011
12	0.01001100001011101010110110101011101011011	42	0.11101011011
13	0.1001100001011101010110110101011101011011	43	0.1101011011
14	0.001100001011101010110110101011101011011	44	0.101011011
15	0.01100001011101010110110101011101011011	45	0.01011011
16	0.1100001011101010110110101011101011011	46	0.1011011
17	0.100001011101010110110101011101011011	47	0.011011
18	0.00001011101010110110101011101011011	48	0.11011
19	0.0001011101010110110101011101011011	49	0.1011
20	0.001011101010110110101011101011011	50	0.011
21	0.01011101010110110101011101011011	51	0.11
22	0.1011101010110110101011101011011	52	0.1
23	0.011101010110110101011101011011	53	0
24	0.11101010110110101011101011011	54	0
25	0.1101010110110101011101011011	55	0
26	0.101010110110101011101011011	56	0
27	0.01010110110101011101011011	57	0
28	0.1010110110101011101011011	58	0
29	0.010110110101011101011011	59	0
30	0.10110110101011101011011	60	0