Estructuras 2024/25. Examen parcial

Profesor: Georgy Nuzhdin. Fecha: 05.11.2024

Teoremas

1. (0.3) En níngun grupo puede haber dos elementos neutros distintos.

   Supongamos que existen dos nuetros $e_1, e_2 \in G$, tal que $e_1 \neq e_2$

   $$\begin{cases} a \cdot e_1 = a \\ a \cdot e_2 = a \end{cases} \implies a \cdot e_1 = a \cdot e_2 \iff a^{-1}ae_1 = a^{-1}ae_2 \iff e_1 = e_2$$

   Contradicción: $e_1 \neq e_2$ y $e_1 = e_2$

2. (0.5) Cualquier grupo de orden primo es cíclico.

   Sea p el orden del grupo:

   - Si el orden del grupo es primo, sus elementos deberán tener orden 1 o p
   - El único elemento de orden 1 es el nuetro y solo puede haber uno por grupo.
   - Por lo tanto, todos los elementos menos el neutro tienen orden igual a p.
   - Como el grupo tiene generadores, se trata de un grupo cíclico

3. (0.7) Cualquier grupo es isomorfo a un subgrupo de algún grupo simétrico.

   Consideremos la acción $\varphi_g(x) = gx$ con $g \in G$ y $x \in G$. Sabemos que la acción de un elemento es una función biyectiva.

   Definamos ahora $\phi(g) = \varphi_g$, este isomorfismo formará el grupo de las biyecciones (subgrupo simétrico)

   Vamos a demostrar que $\{\phi(g) : g \in G\}$ con la operación composición de funciones es un subgrupo:

   - Cumple con la asociativa ya que la composición de funciones es asociativa
   - El elemento neutro es φ_e:

     $$(\varphi_e \circ \varphi_a)(x) = eax = ax = \varphi_a(x) \implies \varphi_e \circ \varphi_a = \varphi_a \implies \varphi_e \text{ es el neutro}$$

   - El inverso de φ_a es $\varphi_{a^{-1}}$

     $$(\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}})(x) = aa^{-1}x = ex = \varphi_e(x) \implies \varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \varphi_e \implies (\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$$

   Ahora tenemos que demostrar que $\phi(g)$ es un isomorfismo de G, es decir, un homomorfismo biyectivo. Primero veremos que es un homomorfismo:

   $$\phi(ab) = \varphi_{ab} = abx = \varphi_a \circ \varphi_b = \phi(a) \circ \phi(b) \implies \phi \text{ es un homomorfismo}$$

   Falta comprobar que es biyectivo:

   - Suprayectivo: La preimagen de φ_a siempre es a
   - Inyectivo:

     Supongamos que $\phi(a) = \phi(b)$ con $a \neq b$
     $\phi(a) = \varphi_a = \varphi_b = \phi(b)$
     $\varphi_a(x) = ax = \varphi_b(x) = bx \iff ax = bx \iff a = b$
     Contradicción: $a \neq b$ y $a = b$, por lo tanto es biyectivo

   Como conclusión, efectivamente cualquier grupo es isomorfo a un subgrupo de algún simétrico

4. (0.7) Las clases laterales izquierdas o coinciden o no tienen intersección.

   Supongamos $a, b \in G$ tal que $x \in aH$ y $x \in bH$ con $a \neq b$

   $$\begin{cases} x \in aH \implies x = ah_1 \\ x \in bH \implies x = bh_2 \end{cases} \implies ah_1 = bh_2 \iff ah_1(h_1)^{-1} = bh_2(h_1)^{-1} \iff$$

   $\iff a = bh_3 \implies a \in bH$

   $\forall a_1 \in aH \implies a_1 = ah = bh_3h \in bH \implies aH = bH$

   Por lo tanto, si x comparte clases laterales, estás coinciden

5. (1.0) $G/Kerf \cong Imf(f)$, siendo $f : G \to G'$ un homomorfismo.

   Primero, llamaremos $H = Kerf$

   La proyección $\pi(g) = gH$ asocia a cada elemento una clase lateral. Pero todas las imágenes de elementos del grupo G son equivalentes "módulo" clase lateral. En concreto, los elementos que pasan al neutro $\pi(g) = eH = H$ son precisamente los elementos del subgrupo H.

   Definamos ahora el homomorfismo $\bar{f}$ tal que $\bar{f}(gH) = f(g)$. De esta manera, a la clase lateral del elemento g le corresponde la imagen de g por el homomorfismo original f.

   - Necesitamos comprobar que es una definición correcta, es decir, no depende del representante de la clase lateral g.

   $$\text{Sea } g_1H = g_2H \implies g_2 = g_1h,\ h \in H \implies$$
   $$\implies f(g_2) = f(g_1) * f(h) = f(g_1) * e, \text{ ya que } h \in H \subset Kerf$$

   - También hay que tener en cuenta que $gH * hH = g(hH) * H = (gh)H * H = ghH$ porque H es normal.

   Vamos a demostrar que $\bar{f}$ es un isomorfismo (homomorfismo biyectivo)

   - $\bar{f}$ es un homomorfismo

   $$\bar{f}(gH * hH) = \bar{f}(ghH) = f(gh) = f(g) * f(h)$$

   - $\bar{f}$ es inyectivo. Hay que demostrar que $\bar{f}(aH) = \bar{f}(bH) \implies aH = bH$

   $$\bar{f}(aH) = \bar{f}(bH) \iff f(a) = f(b) \iff f(ab^{-1}) = f(bb^{-1}) \iff f(ab^{-1}) = e \iff$$
   $$\iff ab^{-1} \in Kerf = H \iff ab^{-1} \in eH \iff a \in Hb = bH \implies aH = bH$$

   - $\bar{f}$ es suprayectivo, ya que $Im\bar{f} = Imf$

Ejercicios

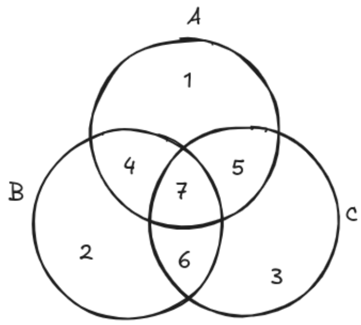
1. Averigua si es semigrupo, monoide o grupo el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto A con la operación:

   (a) (0.2) La unión ($\cup$)

   - Se cumple la propiedad asociativa ya que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   - El neutro sería el conjunto vacío $\emptyset$
   - No existe el inverso de ningún elemento ya que la unión nunca va a disminuir el cardinal de los conjuntos originales (la unión de conjuntos no vacíos nunca tiene cardinal nulo)

   $$|A \cup B| \geq |A|$$

   (b) (0.4) $A * B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

   - Cumple la asociativa:

   $$\begin{aligned}
   &A * B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = 1, 2, 5, 6 \\
   &B * C = (B \cup C) \setminus (B \cap C) = 2, 3, 4, 5 \\
   &(A * B) * C = (((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup C) \setminus (((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C) = \\
   &= ((1, 2, 5, 6) \cup (3, 5, 6, 7)) \setminus ((1, 2, 5, 6) \cap (3, 5, 6, 7)) = \\
   &= (1, 2, 3, 5, 6, 7) \setminus (5, 6) = (1, 2, 3, 7) \\
   &A * (B * C) = (A \cup ((B \cup C) \setminus (B \cap C))) \setminus (A \cap ((B \cup C) \setminus (B \cap C))) = \\
   &= ((1, 4, 5, 7) \cup (2, 3, 4, 5)) \setminus ((1, 4, 5, 7) \cap (2, 3, 4, 5)) = \\
   &= (1, 2, 3, 4, 5, 7) \setminus (4, 5) = (1, 2, 3, 7)
   \end{aligned}$$

   - El neutro es el conjunto vacío $\emptyset$

   $$A * \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$$

   - El inverso de un elemento es el mismo

   $$A * A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$$

2. (0.5) Averigua cuanto es $(124)^{20}(23)^{33}(1234)^{-1}$, su orden y signatura

   $$(124)^{20}(23)^{33}(1234)^{-1} = (124)^{-1}(23)^{1}(1234)^{-1} = (142)(23)(1432) = (12)(34)$$

   Su orden es $m.c.m.(2, 2) = 2$ y su signatura $(-1)^2 = 1$

3. Calcula los siguientes conmutadores:

   (a) (0.3) $[sr, sr^2]$ en Δ_4

$$[sr, sr^2] = sr * sr^2 * (sr)^{-1} * (sr^2)^{-1} = sr * sr^2 * sr * sr^2 =$$
$$= r^3 s * sr^2 * r^3 s * sr^2 = r^3 * r^2 * r^3 * r^2 = r^{3+2+3+2} = r^{10} = r^2$$

   (b) (0.4) $[(123), (24)]$ en S_4

$$[(123), (24)] = (123)(24)(132)(24) = (1)(234) = (234)$$

4. (0.9) Estudia en cada caso si el morfismo $f(x) = x^3$ es homomorfismo, isomorfismo, endomorfismo o automorfismo

   (a) $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$
   Todos los elementos de $\mathbb{Z}_3$ tienen como imagen el 0, ya que al ser todos generadores cuando los elevamos al orden del grupo dan el neutro.
   Por lo tanto, se cumplirá la propiedad del homomorfismo:

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b) = e \cdot e = e$$

   Al ser un homomorfismo de un conjunto así mismo, se trata de un endomorfismo.
   No será isomorfismo ni automorfismo ya que no es biyectivo (no es una función suprayectiva ni inyectiva).

$$\begin{cases} a \neq b \\ f(a) = e \\ f(b) = e \end{cases} \implies f \text{ no es inyectiva}$$

$$a \text{ no tiene preimagen} \implies f \text{ no es sobreyectiva}$$

   (b) $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$
   Si operamos todos los elementos de $\mathbb{Z}_6$ al cubo nos daremos cuenta de que los pares tienen como imagen el 0 y que los impares tienen como imagen el 3.

$$f(par) = 0 \quad f(impar) = 3$$

   Para ver si se cumple la propiedad de homomorfismo hay que estudiar las combinaciones de par e impar:

$$f(par + par) = f(par) = 0 \implies$$
$$\implies f(par + par) = f(par) + f(par) = 0 + 0 = 0$$

$$f(impar + par) = f(par + impar) = f(impar) = 3 \implies$$
$$\implies f(impar + par) = f(par + impar) = f(impar) + f(par) = 3 + 0 = 3$$

$$f(impar + impar) = f(par) = 0 \implies$$
$$\implies f(impar + impar) = f(impar) + f(impar) = 3 + 3 = 0$$

   Por lo tanto, es un endomorfismo. No es un endormofismo ya que no es biyectivo, por los mismos motivos de antes.

   (c) $\Delta_3 \to \Delta_3$
   No cumple la propiedad del homomorfismo:

$$\begin{cases} f(r) = r^3 = e \\ f(s) = s^3 = s \\ f(sr) = (sr)^3 = sr \end{cases} \implies f(sr) \neq f(s)f(r) \iff sr \neq se = s$$

   Por lo tanto, no es ni homomorfismo, ni endomorfismo, ni automorfismo, ni isomorfismo.

5. (1.0) Demuestra que no existe isomorfismo de grupo o constrúyelo para los siguientes cuatro grupos:
$$(\mathbb{Q},+) \quad (\mathbb{R},+) \quad (\mathbb{R}^+,\times) \quad (\mathbb{C}^*,\times)$$

   - $(\mathbb{Q},+)$ no es isomorfo a ningún otro ya que los racionales tienen menos números que los reales
   $$|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$
   - $(\mathbb{R},+) \cong (\mathbb{R}^+,\times)$, ya que tenemos:
   $$\begin{aligned} f &: (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^+,\times) \quad f(x) = e^x \\ g &: (\mathbb{R}^+,\times) \to (\mathbb{R},+) \quad g(x) = \ln(x) \end{aligned}$$
   - $(\mathbb{C},\times) \ncong (\mathbb{R},+)$, ya que en el primer grupo el elemento i tiene orden 4 ($ord(i) = 4$), pero en el segundo grupo todos los elementos menos el neutro son generadores, por lo que no hay ningún elemento de orden 4. Como en las isomorfías se conserva el orden , no son isomorfos.

6. (1.2) Comprueba que $\{e, sr\} \subset \Delta_3$ es un subgrupo. Indica sus clases laterales izquierdas (nombra sus elementos). ¿Forman un grupo? En el caso afirmativo, indica cuál es el subgrupo cociente.

   $H = \{e, sr\}$ es un subgrupo ya que:

   - Cumple la propiedad asociativa ya que son elementos de un grupo que si la cumplía con la misma operación
   - Contiene al neutro e
   - Cada elemento es su propio inverso
   - Al operar los dos elementos no nos salimos del subgrupo $e * sr = sr$

   Por lo tanto, es un subgrupo de Δ_3

   Las clases laterales izquierdas de H son las siguientes:
   $$eH = \{e, r^2s\} \quad rH = \{r, s\} \quad r^2H = \{r^2, rs\}$$

   Sabemos que no forman un grupo ya que el subgrupo H no es normal, esto lo podemos demostrar viendo que las clases laterales derechas no coinciden con las izquierdas:
   $$He = \{e, r^2s\} \quad Hr = \{r, rs\} \quad Hr^2 = \{r^2, s\}$$

7. Busca el grupo de automorfismo para los siguientes grupos:

   (a) (0.4) $\mathbb{Z}_8$
   En $\mathbb{Z}_8$ los generadores son 1, 3, 5 y 7, por lo que los automorfismos que podemos crear serán:

$$e_1 = x$$
$$e_3 = 3x$$
$$e_5 = 5x$$
$$e_7 = 7x$$

   Por lo tanto, el sugrupo de automorfismos de $\mathbb{Z}_8$ será:

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_8) = \{e_1, e_3, e_5, e_7\}$$

   Para ver a que grupo es isomorfo, consideremos el cuadrado de sus elementos:

$$\begin{aligned}
&e_1^2 = e_1 \circ e_1 = e_1 \\
&e_3^2 = e_3 \circ e_3 = 9x \equiv x \mod 8 \implies e_3^2 = e_1 \\
&e_5^2 = e_5 \circ e_5 = 25x \equiv x \mod 8 \implies e_5^2 = e_1 \\
&e_7^2 = e_7 \circ e_7 = 49x \equiv x \mod 8 \implies e_5^2 = e_1
\end{aligned}$$

   Como vemos el orden de todos los elementos de $\text{Aut}(\mathbb{Z}_8)$ es 2, por lo que $\text{Aut}(\mathbb{Z}_8) \cong V_4$

   (b) (0.4) $\mathbb{Z}_{11}$
   En este caso, todos los elementos menos el neutro son generadores. Por lo tanto los elementos del grupo de autormorfismos serán:

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_{11}) = \{e_1, e_2, e_2, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$$

   Por el Pequeño teorema de Fermat, sabemos que $a^{10} \equiv 1 \mod 11$, por lo que todos los elementos de $\text{Aut}(Z_{11})$, menos e_1, tendrán orden 10.
   Entonces, $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{11}) \cong \mathbb{Z}_{10}$

   (c) (1.0) Δ_4
   En Δ_4 el grupo es generado por r y s.

   - r solo puede pasar a r o a r^3, porque si pasase a e o a r^2 no podría generar el resto de rotaciones (un generador debe pasar a otro generador).
   - s puede pasar a cualquiera de las simetrías (s, sr, sr^2, sr^3)
   - Por lo tanto, tenemos $2 \cdot 4 = 8$ posibles automorfismos, lo que implica que $\text{ord}(\text{Aut}(\Delta_4)) = 8$

   Teniendo todo esto en cuenta, y viendo que los ordenes coinciden, sabemos que $\text{Aut}(\Delta_4) \cong \Delta_4$

8. (2.0) Busca los subgrupos normales del grupo de cuaterniones Q_8 y analiza los grupos cocientes. ¿A qué grupos son isomorfos?

   El subgrupo $\{1, -1\}$ es normal ya que coincide con el conmutador del grupo y con el centro del grupo.

   El subgrupo $\{1, i, i^2, i^3\} = \{1, -1, i, -i\}$ es normal ya que se trata de un subgrupo cíclico. También podemos crear los subgrupos cíclicos j y k que serán similiares.

   - $Q_8 \setminus \{1, -1, i, -i\} \cong \mathbb{Z}_2$ ya que el orden del grupo cociente es $\frac{\text{ord}(\mathbb{Q}_8)}{\text{ord}(\{1,-1,i,-i\})} = \frac{8}{4} = 2$ (El único grupo de orden 2 es $\mathbb{Z}_2$). Los subgrupos cocientes de $Q_8 \setminus \{1, -1, j, -j\}$ y $Q_8 \setminus \{1, -1, k, -k\}$ también serán isomorfos a $\mathbb{Z}_8$.
   - $Q_8 \setminus \{1, -1\} \cong V_4$. Primero, sabemos que orden de este grupo cociente es $\frac{8}{2} = 4$. Como tiene un elemento de orden 2 (el $i\{1, -1\}$), no puede ser isomorfo a $\mathbb{Z}_4$, ya que todos sus elementos tienen orden 1 o 4. Por descarte, el grupo cociente es isomorfo a V_4 ya que los únicos grupos de orden 4 son $\mathbb{Z}_4$ y V_4.

$$(i\{1, -1\})^2 = \{(i)^2, (-1)^2, i(-1)^2, (-1)i\} = 1\{1, -1\} \implies$$
$$\implies \text{ord}(i\{1, -1\}) = 2 \implies Q_8 \setminus \{1, -1\} \cong V_4$$