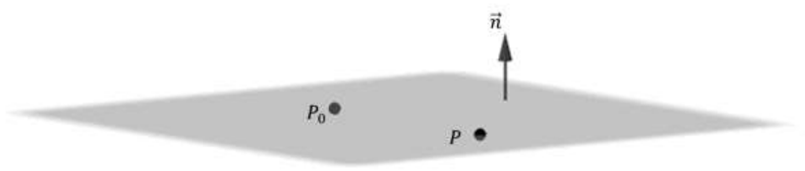
ÚLTIMA VEZ ACTUALIZADO 30 MAYO, 2017 POR **ISABEL PUSTILNIK Y FEDERICO GÓMEZ** 6 COMENTARIOS

Ecuaciones del plano

Deducción de la ecuación general del plano

Dada una dirección en $\mathbb{R}^3$, existen infinitos planos perpendiculares a la misma. Si conocemos además un punto del plano, éste queda determinado de forma única.

Nos proponemos hallar la ecuación del plano π que pasa por $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (a, b, c)$. El vector $\vec{n}$ se denomina *vector normal* del plano.



¿Qué condición debe cumplir un punto $P\,(x, y, z)$ para estar en el plano π? Si armamos el vector $\overrightarrow{P_0P}$, éste

$$(x-x_0\ ,\ y-y_0,\ z-z_0)\,.\,(a,b,c)=0$$

$$a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)+c\,(z-z_0)=0$$

$$ax+by+cz+\underbrace{(-ax_0-by_0-cz_0)}_{d}=0$$

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \textit{Ecuación general o implí}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{n}=(3,2,1)$ que pasa por el punto $P_0\,(1,1,-1)$.

Las componentes de $\vec{n}$ nos indican los coeficientes a, b y c de la ecuación del plano:

$$\pi:\quad 3x+2y+z+d=0$$

¿Cómo hallamos d?

El punto debe verificar la ecuación, entonces reemplazamos P_0 y obtenemos el coeficiente que faltaba:

$$3.1+2.1-1+d=0\ \Rightarrow d=-4$$

Así obtenemos la ecuación del plano:

$$\pi:\quad 3x+2y+z-4=0$$

RONY en Hipérbola

YANIS YULEISI PENATA BENITEZ en Espacios y subespacios vectoriales

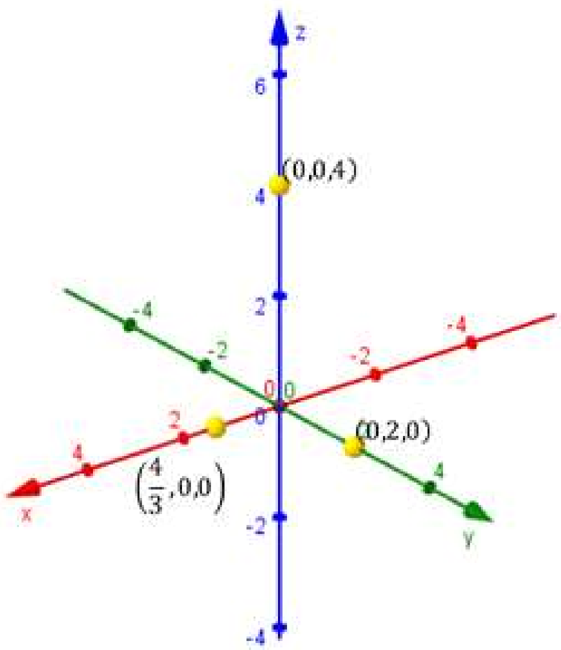
ARCHIVOS

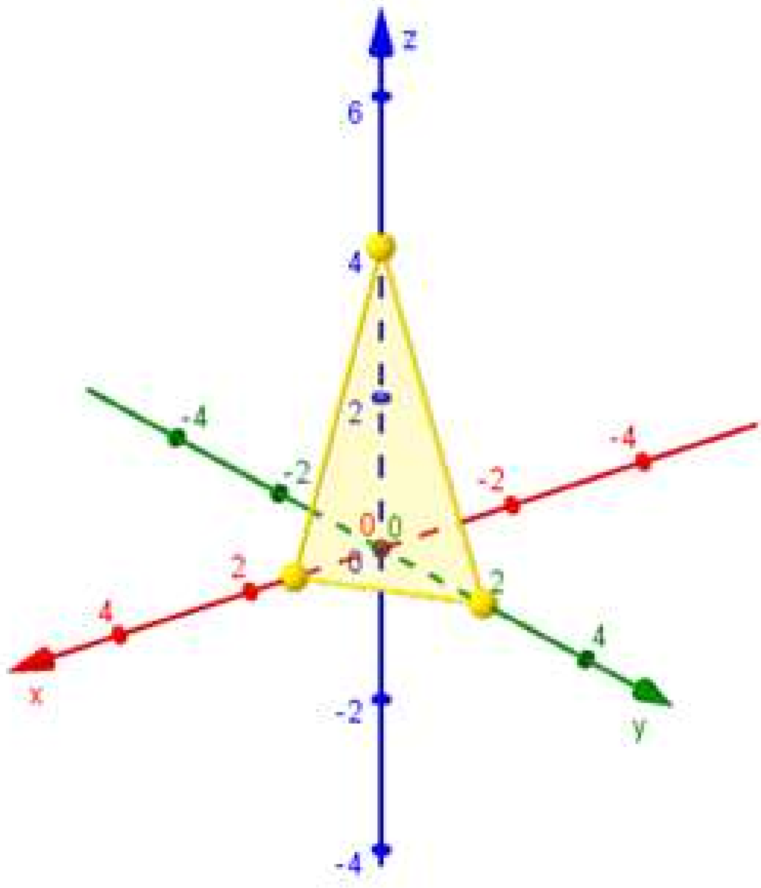
septiembre 2019
junio 2019
noviembre 2018
julio 2018
mayo 2018
noviembre 2017
septiembre 2017
junio 2017
abril 2017
diciembre 2016
noviembre 2016
octubre 2016
septiembre 2016
agosto 2016

ejes coordenados:

Para hallar la intersección con el eje x, debemos plantear $y = z = 0$ y despejar el valor de x. Análogamente para las otras intersecciones, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

Ejes coordenados	Punto de intersección del plano con el eje
Eje x: $y = z = 0$	$\left(\frac{4}{3}, 0, 0\right)$
Eje y: $x = z = 0$	$(0,2,0)$
Eje z: $x = y = 0$	$(0,0,4)$



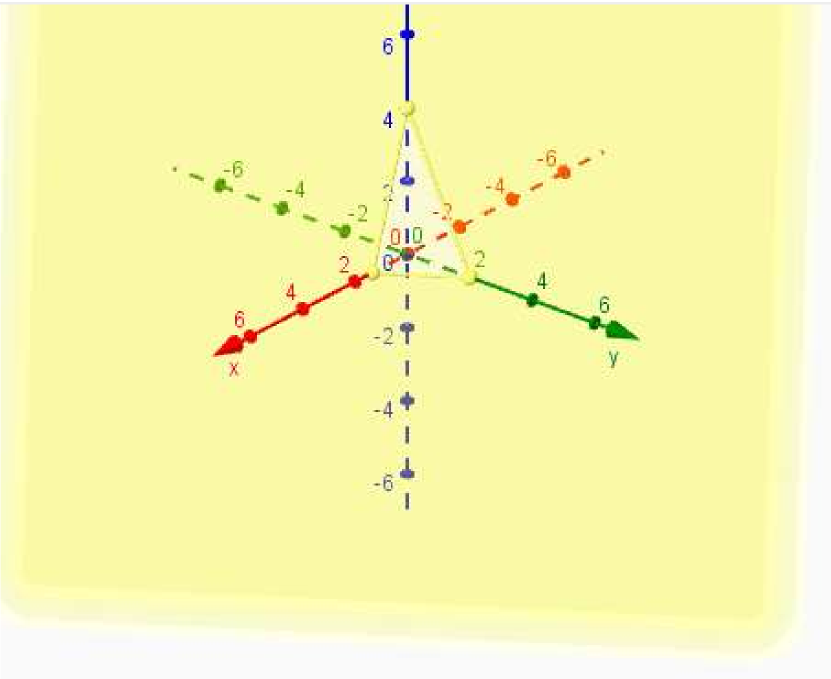


Mostramos una gráfica del plano realizada con GeoGebra:

UNIDAD 3

Espacios vectoriales

En las unidades anteriores vimos que el álgebra de vectores y el álgebra de matrices presentan similitudes. Pudimos observar que las propiedades de la suma (de vectores o de matrices) y del producto por un escalar son



concepto de *vector* a partir de estas propiedades en común que hemos señalado para vectores geométricos y matrices.

Las siguientes preguntas nos ayudarán a focalizar el eje de esta unidad:

¿En qué se parecen los vectores geométricos, las matrices y los polinomios? ¿Qué propiedades comunes pueden detectarse en estos objetos de diferente naturaleza y variadas aplicaciones?

De esto se trata nuestra tercera unidad, donde se desarrollan conceptos centrales del álgebra lineal: espacios vectoriales, base,

Ejemplo

Dados los puntos $R\,(1,2,3)$ y $S\,(3,-1,2)$, encontrar la ecuación del plano que corta perpendicularmente al segmento RS en su punto medio.

Resolución

Busquemos las coordenadas del punto medio:

$$M=\left(\frac{1+3}{2},\frac{2+(-1)}{2},\frac{3+2}{2}\right)=\left(2,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Como el plano corta perpendicularmente al segmento RS, podemos tomar $\overrightarrow{RS}$ como vector normal del

$$\beta: \quad 2x - 3y - 1z + d = 0$$

Para hallar d reemplazamos el punto M:

$$2.2 - 3.\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + d = 0 \ \Rightarrow d = 0$$

Y así obtenemos la ecuación buscada:

$$\beta: \quad 2x - 3y - z = 0$$

Este plano pasa por el origen, o sea que interseca a los tres ejes en $(0,0,0)$. Necesitamos al menos dos puntos más para graficarlo.

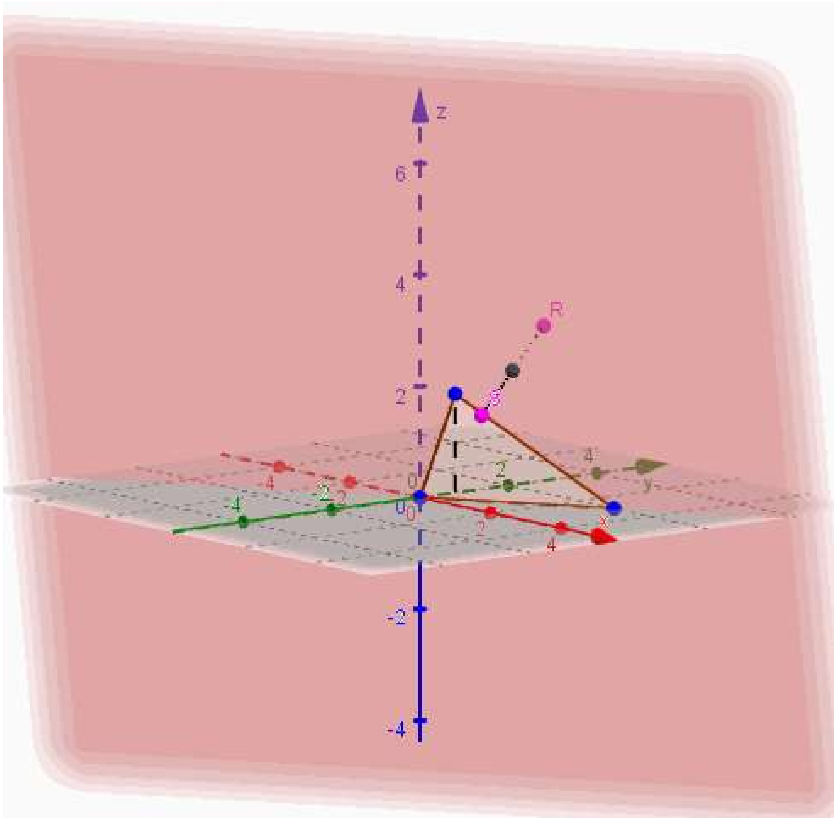
Para facilitar el gráfico podemos elegir puntos que estén sobre los planos coordenados. Por ejemplo $y = 0$:

$$\Rightarrow 2x - z = 0 \Rightarrow z = 2x$$

Entonces haciendo que $x = 1$ debe ser $z = 2$, y obtenemos el punto $P_1\ (1,0,2)$

Para tomar otro punto del plano podemos hacer que $z = 0$

$$\Rightarrow \ 2x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$



Ejemplo

Dados $A\,(4,5,2)$, $B\,(1,3,4)$, $C\,(2,2,5)$ hallar, si es posible, el plano que contiene a los tres puntos.

Habíamos dicho que tres puntos no alineados determinan un único plano que los contiene.

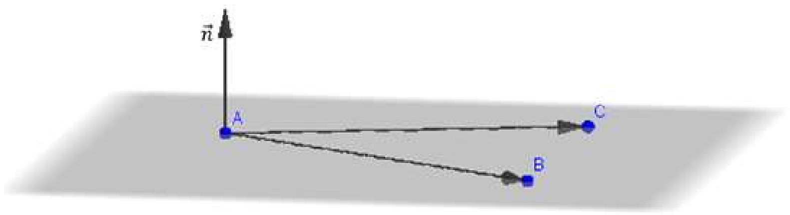
Hagamos una figura de análisis:

Con los tres puntos, podemos armar dos vectores, por ejemplo:

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, -3, 3)$$

El vector normal debe ser perpendicular a ambos vectores cómo muestra la siguiente figura:



¿Qué operación nos permite hallar un vector perpendicular a otros dos?

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 5, 5)$$

¿Qué resultado habríamos obtenido si A, B y C estuvieran alineados?

El vector $(0, 5, 5)$ es perpendicular al plano que buscamos, entonces podemos tomar $\vec{n} = (0, 5, 5)$ y escribir la ecuación del plano:

$$\alpha : \quad 5y + 5z + d = 0$$

Luego:

$$5y + 5z - 35 = 0$$

Podemos dividir por 5 ambos miembros:

$$\alpha : \quad y + z - 7 = 0$$

El lector puede comprobar que los puntos B y C verifican esta ecuación.

Busquemos las intersecciones con los ejes para graficar el plano:

$$y = z = 0 \Rightarrow -7 = 0 \quad Absurdo$$

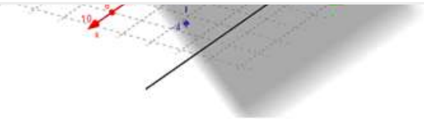
Entonces α no corta al eje x.

¿En qué punto corta al eje y? $(0, 7, 0)$

¿Y al eje z? $(0, 0, 7)$

Observemos que el plano contiene a todos los puntos de la forma $(x, 7, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$.

Lo mismo ocurre con los puntos del tipo $(x, 0, 7)$ con $x \in \mathbb{R}$.



Podemos observar entonces que:

$$a = 0 \Rightarrow el\ plano\ es\ \| \quad al\ eje\ x$$

Ecuación segmentaria del plano

Dada la ecuación general de un plano:

$$\pi : \quad ax + by + cz + d = 0$$

Si a, b, c, d son distintos de cero, es posible obtener otra ecuación del plano como sigue:

$$ax + by + cz = -d$$

$$\frac{a}{-d}x + \frac{b}{-d}y + \frac{c}{-d}z = 1$$

$$\frac{x}{\left(-\frac{d}{a}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{d}{b}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{d}{c}\right)} = 1$$

Si llamamos $p = -\frac{d}{a}$, $q = -\frac{d}{b}$, $r = -\frac{d}{c}$

Resulta:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \qquad Ecuación\ segmentaria\ del\ pla$$

¿Cuál es la intersección con el eje y?

$$(0, q, 0)$$

¿Y con el eje z?

$$(0, 0, r)$$

Podemos observar que p, q y r indican las intersecciones con los ejes.

Ejemplo

$$2x - 3y + z - 6 = 0$$

$$2x - 3y + z = 6$$

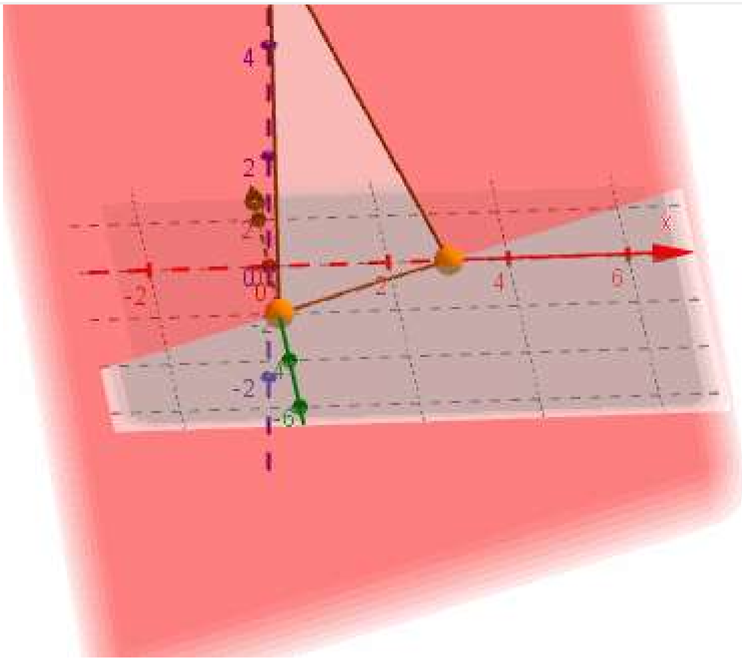
$$\frac{2x}{6} - \frac{3y}{6} + \frac{z}{6} = 1$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$$

Esta ecuación parece segmentaria pero no lo es por el signo negativo. La reescribimos así:

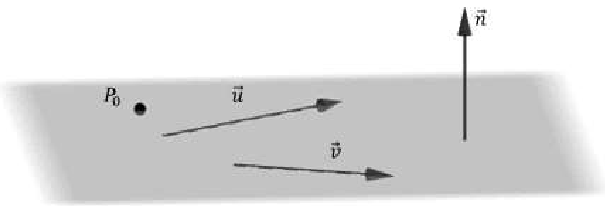
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 1 \qquad \textit{Ecuación segmentaria}$$

La ecuación segmentaria es práctica para graficar un plano porque muestra los tres puntos de corte con los ejes:



Ecuación vectorial paramétrica del plano

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ no paralelos y un punto $P_0\ \ (x_0,\ y_0,\ z_0)$, nos proponemos hallar la ecuación del plano π que pasa por P_0
y es paralelo a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.



Teniendo $\vec{n}$ y el punto P_0, podemos hallar la ecuación implícita o general del plano π como habíamos visto previamente.

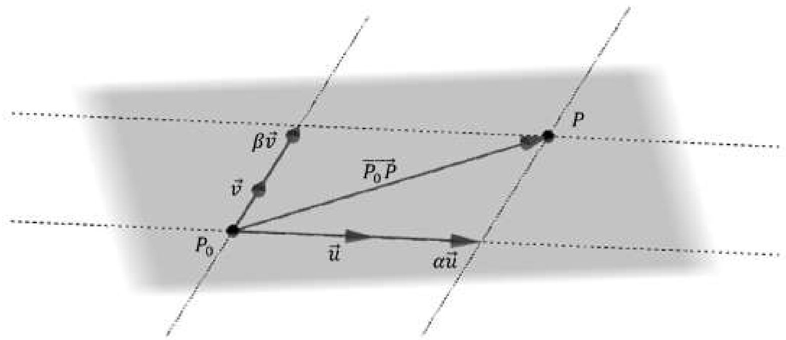
Obtendremos a continuación otro tipo de ecuación del plano, cuya deducción se basa en el concepto de combinación lineal de vectores, tal cómo vimos en el ejemplo.

Si $P\,(x,y,z)$ es un punto cualquiera del plano π, los vectores $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son coplanares

Entonces

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \mid \ \overrightarrow{P_0P} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$$

Esto significa que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ puede expresarse como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como se muestra en la figura:



$$(x - x_0\ ,\ y - y_0, z - z_0) = \alpha.\,(u_1, u_2, u_3)\ + \beta\ (v_1, v_2, v_3)$$

O en notación vectorial:

$$(x, y, z) = \overrightarrow{OP_0} + \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} \qquad \textit{Ecuación vectorial p}$$

Ejemplo

Armar la ecuación vectorial paramétrica del plano paralelo a $\vec{u} = (3, -1, 5)$ y $\vec{v} = (7, 3, 2)$ que pasa por el punto $P_0\,(0, -1, 8)$.

De acuerdo con lo que hemos visto, tenemos toda la información para escribir la ecuación vectorial paramétrica:

$$(x, y, z) = (0, -1, 8) + \alpha\,(3, -1, 5) + \beta\,(7, 3, 2) \quad , \quad con$$

Nota: Para cada $\alpha\ y\ \beta \in \mathbb{R}$ se obtiene un punto del plano. Por ejemplo si $\alpha = 1\ \ y\ \ \beta = -1$ se obtiene el punto $(x, y, z) = (-4,\ -5,\ 11)$.

Busquemos ahora la ecuación general de este plano.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (3, -1, 5) \times (7, 3, 2) = (-17,\ 29, 16)$$

Luego:

$$-17x + 29y + 16z + d = 0$$

Reemplazamos P_0 para obtener d:

$$-17.0 + 29.(-1) + 16.8 + d = 0 \Rightarrow\ d = -99$$

De la ecuación general a la ecuación vectorial paramétrica

Dada la ecuación general de un plano, ¿cómo puede obtenerse una ecuación vectorial paramétrica de dicho plano?

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\omega: \quad 2x - y + 3z + 9 = 0$$

Podemos despejar cualquiera de las variables, por ejemplo y:

$$y = 2x + 3z + 9$$

Entonces:

$$\omega: \quad (x, y, z) = (x,\ 2x + 3z + 9\ , z)$$

Reescribimos como suma de tres vectores, de forma tal que uno de ellos tenga los términos con x, otro los términos con z y otro los términos independientes:

$$(x, y, z) = (x, 2x, 0) + (0, 3z, z) + (0, 9, 0)$$

$$(x, y, z) = x\,(1, 2, 0) + z\,(0, 3, 1) + (0, 9, 0)\ \ ,\ con\ \ x, z$$

plano ω.

El lector puede comprobar que: i) los vectores $\vec{u}$ = (1,2,0) y $\vec{v}$ = (0,3,1) son perpendiculares a $\vec{n}$ = (2,-1,3), o sea que son paralelos al plano; ii) P_0(0,9,0) $\in \omega$.

Videos relacionados con ecuación del plano

Haz de Planos - Ejercicio Resuelto - PASO A

Recta y Plano en R3 - Ejercicio Resuelto - Pa

ARCHIVADO EN:VECTORES, RECTA Y PLANO.

Comentarios

Jaime Bolaños dice
23 agosto, 2017 en 9:17 am

Mi nombre es Jaime Bolaños
Este material que están presentando me parece espectacular, muy bonito. Me podrían comentar qué herramientas están utilizando además de Geogebra? Yo estoy desarrollan un material muy similar al de ustedes pero en una plataforma que se llama Jupyter Noetbook. En esta paltaforma se puede tener texto,

Jaime, muchas gracias!! Usamos GeoGebra (para applets y gráficos), MathJax (para representar escrutura matemática en web), WordPress (cómo CMS). Te escribimos por privado tamibén. Saludos!

tomas dice
22 abril, 2018 en 11:01 am

Les agradezco por la dedicacion y ayuda. Muchas gracias!!!

Campodonico marcos dice
12 mayo, 2019 en 9:56 pm

Soy de la UTN-FRH y la verdad me sorprende la dedicación que le dan a cada tema y su paso a paso, unos genios la verdad, me pareció muy útil todo, Gracias.

Jorge Sanchez dice
6 septiembre, 2019 en 11:05 pm

En el ejemplo en donde hace el producto vectorial entre AB x AC, el vector obtenido es (2, 5, 5), no (0, 5, 5) como dice el ejemplo.

Deja una respuesta

Lo siento, debes estar conectado para publicar un comentario.

PARTE 1 PARTE 2 EXÁMENES INFO 2021 (PRIMER CUATRIMESTRE) CONTACTANOS!
REPORTÁ UN ERROR

DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL DE MATRICES SIMÉTRICAS

Alan en PRODUCTO ESCALAR EN R3

RONY en HIPÉRBOLA

YANIS YULEISI PENATA BENITEZ en ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

REALIZADO EN UTN FRBA

UDB Matemática – Ciencias Básicas – Secretaría Académica

LOS GIFS DEL MATERIAL TEÓRICO

ARCHIVOS

SEPTIEMBRE 2019
JUNIO 2019
NOVIEMBRE 2018
JULIO 2018
MAYO 2018
NOVIEMBRE 2017
SEPTIEMBRE 2017
JUNIO 2017
ABRIL 2017
DICIEMBRE 2016
NOVIEMBRE 2016
OCTUBRE 2016
SEPTIEMBRE 2016
AGOSTO 2016

DESCARGAS EN PDF

PDF UNIDAD 1
PDF UNIDAD 1
PDF UNIDAD 2
PDF UNIDAD 2
PDF UNIDAD 3
PDF UNIDAD 3
PDF UNIDAD 4

DISTANCIAS
HAZ DE PLANOS
RECTA EN ({MATHBB{R}^3})
RECTA Y PLANO: INTERSECCIONES Y ÁNGULOS
DISTANCIAS Y PROYECCIONES

MATRICES Y DETERMINANTES
- MATRICES
- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ
- MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ESPACIOS VECTORIALES
- ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES
- CONJUNTO GENERADOR. LI Y LD.
- BASE. DIMENSIÓN.
- OPERACIONES CON SUBESPACIOS

WEBS RELACIONADAS

PARTE 1 PARTE 2 EXÁMENES INFO 2021 (PRIMER CUATRIMESTRE) CONTACTANOS!
REPORTÁ UN ERROR