APPUNTI PER IL CORSO DI COMUNICAZIONI NUMERICHE

Son Cafoni Trita Carni Emo Craccati ... non mi scocciare Foca Tritranciata!

13 novembre 2009

HANNO CONTRIBUITO

Antonio Macrì Ha scritto i capitoli 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Francesco Racciatti Ha contribuito per il capitolo 3.

Indice

Pı	refaz	ione		VII
Ι	\mathbf{Se}	gnali	deterministici	1
1	Seg	nali		3
	1.1		etti generali	
	1.2		ietà dei segnali deterministici	
	1.3	Segna	li tipici	. 8
		1.3.1	Costante	
		1.3.2	Sinusoide	. 8
		1.3.3	Gradino	. 9
		1.3.4	Rettangolo	. 10
		1.3.5	Esponenziale unilatera	. 11
		1.3.6	Esponenziale bilatera	. 12
		1.3.7	Segno*	. 12
	1.4	Relazi	ione tra P_x , $x_{\rm eff}$ e $x_{\rm m}$. 13
2	Ana	alisi di	segnali periodici	15
	2.1	Conce	etti generali	. 15
	2.2	Analis	si di Fourier	. 16
		2.2.1	Il Criterio di Dirichelet	. 16
		2.2.2	Sviluppo in serie di Fourier in forma complessa	. 17
	2.3	Spetti	ro di un segnale periodico	. 19
		2.3.1	Proprietà dello spettro di segnali periodici	. 21
		2.3.2	Segnali periodici pari, dispari e alternativi	
	2.4	Period	dicizzazione di un segnale aperiodico	. 23
3	Ana	alisi di	segnali aperiodici	2 5
	3.1	Dalla	serie all'integrale di Fourier	. 25
	3.2	Propr	ietà della Trasformata Continua di Fourier	
		3.2.1	Criteri di esistenza	. 27
		3.2.2	Simmetrie degli spettri	. 28
		3.2.3	Segnali pari e dispari	
	3.3	Teore	mi sulla Trasformata Continua di Fourier	. 29
		3.3.1	Linearità	. 29
		3.3.2	Dualità	. 30
		3.3.3	Ritardo	
		3.3.4	Cambiamento di scala	
		3.3.5	Modulazione	
		3.3.6	Teoremi di integrazione e derivazione	
		3.3.7	Prodotto di convoluzione	. 36
	3 /	Tracto	ormate di Fourier Ceneralizzate	30

INDICE

		3.4.1 Funzione impulsiva generalizzata o "delta" di Dirac	39
		3.4.2 Proprietà della "delta" di Dirac generalizzata	41
		3.4.3 Trasformata di Fourier della delta di Dirac generalizzata	43
		3.4.4 Trasformata della funzione $1/t$	43
		3.4.5 Trasformata della funzione gradino	45
		3.4.6 Teorema dell'integrazione completo	45
		3.4.7 Trasformata della $\delta(t-t_0)$	46
		3.4.8 Trasformate generalizzate di sinusoidi e cosinusoidi	46
		3.4.9 Biunivocità della trasformata continua di Fourier	47
	3.5	Periodicizzazione di segnali aperiodici e formule di Poisson	48
		3.5.1 Formule di Poisson	49
		3.5.2 Teorema di Parseval per segnali periodici	51
	3.6	Analisi energetica dei segnali aperiodici	53
4	Siste	emi lineari stazionari a tempo continuo	57
	4.1	Sistemi	57
	4.2	Sistemi lineari stazionari (SLS)	58
		4.2.1 Proprietà dei SLS	59
	4.3	La risposta in frequenza	61
	4.4	Risposta al gradino	64
	4.5		65
		4.5.1 Sistemi in cascata	65
		4.5.2 Sistemi in parallelo	65
	4.6	Proprietà dei filtri lineari**	66
	4.7	Filtri ideali	67
		4.7.1 Passa basso	67
		4.7.2 Passa banda	68
		4.7.3 Passa alto	69
		4.7.4 Considerazioni sull'utilizzo dei filtri	69
	4.8	Durata e banda	70
		4.8.1 Relazioni tra durata e banda	70
		4.8.2 Altre definizioni di durata e banda	72
	4.9	Distorsioni lineari	74
		4.9.1 Filtro fedele	74
	4.10	Filtraggio di segnali periodici	77
	4.11	Filtri e analisi energetica	77
		4.11.1 Segnali aperiodici	78
		4.11.2 Segnali periodici**	78
		4.11.3 Segnali aperiodici a potenza finita*	79
5	Siste	emi non lineari a tempo continuo	81
_	5.1	Concetti generali	81
	5.2	Non linearità essenziali	82
	J	5.2.1 Moltiplicatori di frequenza	82
	5.3	Non linearità parassite	85
		5.3.1 Distorsioni armoniche	87
c	Q.c.	aali aampianati	90
6	Seg 1 6.1	nali campionati Introduzione	89
	$6.1 \\ 6.2$	Sequenze notevoli	89 90
	6.2	Trasformata di Fourier di una Sequenza (TFS)	90
	0.0	6.3.1 Periodicità della TFS e intervallo di campionamento	93
		6.3.2 Condizione per l'esistenza della TFS	93
		6.3.3 Relazione tra la TCF di un segnale e la TFS di un suo campionamento	94
	6.4		96
	0.4	Conditions of Tryquist	σ

Indice

	$6.5 \\ 6.6$	Correlazione, autocorrelazione ed energia** Teorema di Parseval per Sequenze**	
	0.0	6.6.1 Applicazione per il calcolo dell'energia di una sequenza**	
	6.7	Interpolatori	
	0.1	6.7.1 Interpolatore a mantenimento	
		6.7.2 Trasformata di Fourier del segnale interpolato	
	6.8	Teorema del Campionamento	
	6.9	Filtraggio numerico	
		6.9.1 Filtri numerici e analisi energetica	
A			.05
		Operazioni algebriche	
	A.2	Funzioni complesse di variabile reale	106
II	S	egnali aleatori 1	07
7	Pro	ocessi stocastici 1	.09
	7.1	Dai segnali determinati ai segnali aleatori	109
		7.1.1 Definizione di processo aleatorio	
		7.1.2 Caratterizzazione statistica di un processo aleatorio	110
		7.1.3 Classi di variabili aleatorie	
	7.2	Indici statistici del I e II ordine di un processo aleatorio	
		7.2.1 Indici del I ordine: valor medio, potenza, varianza	
		7.2.2 Indici del II ordine: autocorrelazione e autocovarianza	
	7.3	Processi aleatori stazionari	
		7.3.1 Stazionarietà in senso stretto	
		7.3.2 Stazionarietà in senso lato	120
		7.3.3 Proprietà della funzione di autocorrelazione di un processo stazionario	101
		in senso lato	
	7.4	7.3.4 Processi parametrici	
	1.4	7.4.1 Relazione ingresso-uscita tra le statistiche semplificate	
	7.5	Densità spettrale di potenza di un processo stazionario*	
	1.0	7.5.1 Filtraggio di un processo aleatorio e densità spettrale di potenza* 1	
		7.5.2 Processo di rumore bianco	
	7.6	Processi aleatori Gaussiani	
		7.6.1 Filtraggio dei processi Gaussiani	
		7.6.2 Variabile gaussiana standard	
8	Sist	emi di comunicazione in banda base	3 1
	8.1	Introduzione	
	8.2	Struttura di un sistema di comunicazione	
	8.3	Sistemi numerici di comunicazione	
	8.4	Sistemi di comunicazione in banda base*	
	8.5	Sistema di comunicazione PAM binario	
	0.5	8.5.1 Interferenza intersimbolica	
	8.6	Sistema di comunicazione PAM M-ario	149
9	Sist	•	5 1
	9.1	Introduzione	
	9.2	Rappresentazione in banda base di un segnale deterministico	
	9.3	Inviluppo complesso di un segnale	
		9.3.1 Inviluppo complesso di un segnale passa banda	152

Prefazione

Questi Appunti nascono per esser la materia di una forma che si chiama L^AT_EX. Il loro scopo iniziale era fornire sostanza per un tempo e un esercizio appena sufficienti per consentire al sottoscritto di cominciare a usare questo strumento nel modo più efficace e pulito possibile.

Per quanto riguarda la prima parte, i capitoli 1, 4, 5, 6 sono stati scritti a partire dalle lezioni del professor Martorella integrando successivamente dal [2]. I capitoli 2, 3 sono stati invece ottenuti principalmente rielaborando il contenuto del libro, ignorando parti non utili ai fini del nostro corso e in ogni caso avendo come guida il programma svolto a lezione dal prof. Martorella.

La seconda parte di questi Appunti è stata ottenuta partendo dalle lezioni del prof. Berizzi e dal materiale che lo stesso ha messo in rete. Tuttavia, ampio spazio è stato dato a integrazioni dal [2] (per il capitolo 7) e dal [1] (per i restanti capitoli della seconda parte), nell'ottica di fornire un fondamentale impianto teorico agli argomenti trattati (totalmente assente nelle slide del professore).

Le <u>annotazioni a margine</u> indicano parti del testo che sarebbe meglio rivedere, o perché possono contenere imprecisioni o perché il contenuto non è espresso nel migliore dei modi. I capitoli e le sezioni contrassegnati con **un asterisco** (*) sono opzionali: il professore (Martorella o Berizzi) non li ha trattati esplicitamente a lezione. Infine, i capitoli e le sezioni contrassegnati con due asterischi (**) sono solamente delle bozze.

Antonio Macrì
9 luglio 2009 — 13 novembre 2009

Nota ai posteri

Avendo finalmente passato l'esame (12 novembre 2009), non metterò più mano a questi Appunti. Due note a chi vorrà continuare il lavoro.

Vanno convertite in IATEX (con PSTricks) alcune immagini, come la figura a pagina 6 e le varie figure nel paragrafo 3.5 (da pag. 48). Andrebbero approfonditi argomenti come l'autocorrelazione di segnali periodici (la sua TCF è la DSP?), il filtraggio di segnali campionati. Va riaggiustato l'appendice A. Inoltre, potrebbe essere utile un'ulteriore operazione di refactoring per il capitolo 7: nel paragrafo 7.4.1 forse è possibile togliere qualcosa e scremare un po'; che fare (pagina 125) della densità spettrale di potenza di un processo stazionario? Il prof. non ha detto praticamente nulla sui processi parametrici, che c'è da dire? Infine, gli altri capitoli della seconda parte sono sostanzialmente ancora delle bozze.

Come questa!

Acronimi

TSF	Trasformata Serie Di Fourier	18
ATSF	Antitrasformata Serie Di Fourier	. 17
TCF	Trasformata Continua Di Fourier	26
ATCF	Antitrasformata Continua Di Fourier	26
\mathbf{SLS}	Sistemi Lineari Stazionari	.58
віво	Bounded Input Bounded Output	60
TFS	Trasformata Di Fourier di una Sequenza	.91
SSS	Stazionario in Senso Stretto	119
\mathbf{SSL}	Stazionario in Senso Lato	120
PAM	Pulse Amplitude Modulation	139
ISI	InterSymbol Interference	145

Annotazioni

Queste sono considerazioni mie	77
Autocorrelazione di segnali periodici	79
Probabilità congiunta	112
Questa non l'ho capita!	152

Bibliografia

- [1] Aldo D'Andrea. *Comunicazioni elettriche*. Edizioni ETS, Pisa, 2002. (Citato alle pagine VII, 124, 125, 133, 136 e 139.)
- [2] Marco Luise e Giorgio M. Vitetta. *Teoria dei segnali*. McGraw-Hill, 1999. (Citato alle pagine VII, 28, 43, 54, 109, 111, 118 e 122.)

Parte I

SEGNALI DETERMINISTICI

SEGNALI

1.1 Concetti generali

Un segnale è una rappresentazione di una grandezza fisica a cui è associata informazione. Per esempio, un segnale audio o video, un elettrocardiogramma, l'uscita di un sensore di temperatura, umidità o pressione. Il segnale è quindi diverso dalla grandezza fisica rappresentata, rispetto alla quale ne è una astrazione, una rappresentazione in forma (spesso) matematica, utile a studiare e caratterizzare determinate proprietà del segnale stesso e poterlo elaborare.

CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALI. Una prima classificazione dei segnali è tra i segnali deterministici e quelli aleatori:

- determinati o deterministici, dei quali si conosce con esattezza il valore che assumono a un certo istante (in quanto rappresentati mediante una funzione analitica o un grafico);
- aleatori, dei quali non si può conoscere a priori il valore assunto a determinati istanti, ma si ha solamente una conoscenza di massima tramite dati statistici e alcune proprietà, motivo per cui possono essere rappresentati come un insieme di segnali.¹

DIMENSIONALITÀ. Un elettrocardiogramma o un sensore di temperatura forniscono segnali scalari, ma altri segnali possono avere dimensionalità maggiore, per esempio un segnale audio stereo, con i canali destro e sinistro. Peraltro, non solo il segnale può essere multidimensionale, ma anche la sua variabile indipendente. In generale un segnale è una funzione:

$$v(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
.

Un esempio di segnale con variabile indipendente multidimensionale è un $x(t_1, t_2)$ con (t_1, t_2) coordinate su uno schermo e $x(t_1, t_2)$ che rappresenta il livello di grigio del relativo pixel (televisione in bianco e nero).

Noi analizzeremo principalmente segnali (scalari ma) complessi di variabile reale.

Esempi. Ecco alcuni esempi di segnali:

• $elettrocardiogramma \ x(t)$, dove t è il tempo e x l'ampiezza;

¹L'alea è il grado di indeterminazione relativo alla conoscenza di questi segnali.

- audio stereo (x(t), y(t)), dove $x \in y$ sono le ampiezza dei canali destro e sinistro;
- immagine in B/N z(x,y), con (x,y) coordinate spaziali e z intensità di grigio;
- immagine a colori RBG z(x,y), dove $z=(z_1,z_2,z_3)$ è l'intensità dei colori.

TIPOLOGIA DI SEGNALI. Un'altra suddivisione dei segnali può esser fatta a seconda delle caratteristiche della variabile indipendente e della variabile dipendente:

• segnali a tempo continuo nei quali la variabile t assume con continuità tutti i valori reali contenuti in un certo intervallo (anche da $-\infty$ a $+\infty$):

$$x(t), y(t), \ldots$$

• $segnali\ a\ tempo\ discreto$ quando la variabile indipendente (n) assume solamente valori discreti:

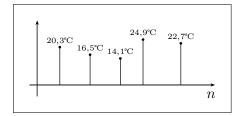
$$x[n], y[n], \ldots$$

- segnali ad ampiezza continua se la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori (reali o complessi) all'interno di un certo intervallo (anche illimitato);
- segnali ad ampiezza discreta nei quali la grandezza fisica del segnale assume solo valori discreti (reali o complessi) appartenenti a un certo alfabeto (il più semplice è un alfabeto binario).

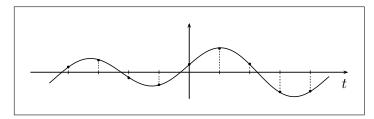
	tempo continuo	tempo discreto
ampiezza continua ampiezza discreta	analogici quantizzati	sequenza numerici

Segnali analogici tipici sono: il segnale audio analogico, video analogico, elettro-cardiogramma, eccetera.

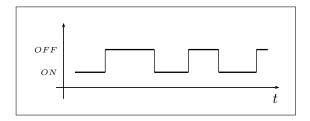
I segnali tempo discreti ad ampiezza discreta sono le sequenze e i segnali campionati. Esiste una differenza tra i due. Le sequenze possono essere ottenute da sorgenti che sono intrinsecamente discrete, come ad esempio il risultato di una misura periodica della temperatura



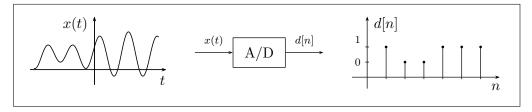
oppure per campionamento di segnali analogici:



Per i segnali quantizzati la variabile indipendente è continua, mentre la variabile dipendente (l'ampiezza del segnale) assume solo valori discreti, appartenenti a un certo alfabeto. Possono scaturire ad esempio da segnali di led luminosi (acceso/spento, come per una comunicazione in codice Morse):



I segnali digitali (detti anche sequenze numeriche) hanno sia variabile indipendente che variabile dipendente discreta, appartenente a un certo alfabeto (un insieme finito). Per questo motivo sono interamente rappresentabili tramite bit, e si ottengono infatti tipicamente come conversione analogico-digitale per il trattamento dell'informazione tramite calcolatori.



Durante il corso capiremo come funziona un sistema di codifica e decodifica dell'informazione, e come questa venga trasmessa, rendendola disponibile all'utente quasi uguale a come era stata trasmessa.

Un esempio è la codifica, trasmissione e decodifica di un sistema audio. Innanzitutto, un microfono funge da trasduttore, ossia converte il segnale acustico in un segnale elettrico. Questo segnale (analogico) viene campionato per ottenere una sequenza, che viene poi quantizzata, ossia si associa a ciascun valore della sequenza stessa il valore più vicino appartenente all'insieme finito di valori dell'alfabeto usato. All'uscita dal quantizzatore il segnale ha perciò subito una certa perdita di informazione. A questo punto, un codificatore fornisce in uscita stringhe di bit che rappresentano il segnale quantizzato. Il segnale digitale può esser quindi trattato dai calcolatori, ad esempio incidendo un CD o memorizzandolo su altri dispositivi.

Il segnale può essere trasferito tramite Internet a un altro calcolatore (sempre in forma digitale, e pertanto giunge al calcolatore destinatario così come il mittente l'aveva mandato). Questo calcolatore dovrà disporre di un sistema di decodifica, per ottenere i valori quantizzati a partire dal flusso di bit, e di un interpolatore, per ottiene il segnale analogico $\widetilde{x}(t)$.

Quest'ultimo non è esattamente x(t), ma è una replica più o meno fedele del segnale originario a seconda di come sono progettate le varie parti. Per esempio, come si vedrà più avanti, è molto importante l'intervallo di campionamento: se troppo grande non sarà possibile ricostruire fedelmente il segnale originario, ma al tempo stesso non è conveniente che sia troppo piccolo, per evitare di dover trasmettere una quantità eccessiva di bit. Altri elementi importanti sono ad esempio il numero

²Un trasduttore è un dispositivo che cambia la natura fisica del segnale senza alterarne la forma (e quindi l'informazione associata).

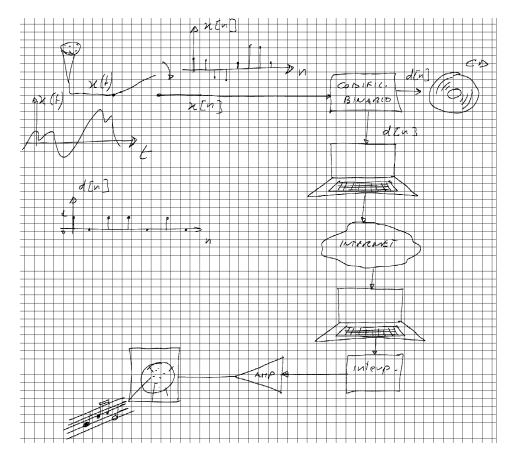


Figura 1.1: Un sistema di elaborazione e trasmissione dell'informazione.

di livelli in cui quantizzare la sequenza, come codificare l'informazione in modo da renderla robusta per la trasmissione tramite internet, e anche come dovrà essere effettuata l'interpolazione affinché si possa ricostruire esattamente (ciò è teoricamente possibile) il segnale originario.

1.2 Proprietà dei segnali deterministici

Analizziamo ora alcune proprietà dei segnali deterministici analogici. Dato un segnale x(t) (reale o complesso) ne definiamo innanzitutto la potenza istantanea:

$$P_x(t) \triangleq |x(t)|^2 \tag{1.1}$$

In ottica di rimanere astratti e indipendenti dalla realtà del fenomeno fisico rappresentato, la potenza definita in eq. (1.1) è indipendente dalla grandezza fisica cui si riferisce il segnale. Ciò significa che la potenza che definiamo non è effettivamente misurabile in watt, anzi non lo è quasi mai: sarà poi legata all'effettiva potenza tramite delle costanti.

L'energia di un segnale è definita come:

$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$
 (1.2)

Segnali fisici, ossia segnali che rappresentano le grandezze effettivamente osservabili in natura, hanno tutti energia finita $(E_x < \infty)$. Segnali ideali possono avere invece

anche energia infinita $(E_x = \infty)$. Questi ultimi sono delle astrazioni o idealizzazioni di alcuni sistemi, come ad esempio il generatore di tensione ideale, che genera una tensione costante V su tutto l'asse dei tempi:

$$x(t) = V \text{ per } -\infty < t < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad E_x = \infty$$

Ma in realtà nessun generatore viene costruito a $-\infty$ né dura fino a $+\infty$.

Per caratterizzare dal punto di visto energetico i segnali a energia infinita, si introduce il concetto di "segnale troncato nel tempo". Consideriamo due generatori ideali V_1 e V_2 che hanno entrambi energia (secondo la definizione appena data) infinita: a causa di ciò essi risulterebbero energeticamente equivalenti (pur essendo segnali diversi). Per evitare ciò e consentire confronti tra i due, si fa in realtà riferimento a versioni troncate dei segnali:

$$x_p(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

L'energia di un segnale troncato nel tempo è quindi:

$$E_{x_T} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_p(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$
 (1.3)

che è finita (si suppone che il segnale assuma solo valori finiti), mentre:

$$E_x = \lim_{T \to \infty} E_{x_T} = \infty.$$

La potenza del segnale troncato vale:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T} \tag{1.4}$$

e la potenza media è definita come:

$$P_x \triangleq \lim_{T \to \infty} P_{x_T} = \lim_{T \to \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt.$$
 (1.5)

Si osservi che tra energia e potenza valgono le seguenti implicazioni:

$$P_x = k$$
 \Rightarrow $E_x = \infty$
 $E_x < \infty$ \Rightarrow $P_x = 0$

ossia un segnale a potenza finita avrà necessariamente energia infinita, mentre un segnale a energia finita avrà sempre potenza nulla. La motivazione di ciò è semplice da capire:

$$\begin{split} P_x &= \lim_{T \to \infty} P_{x_T} = \lim_{T \to \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = k & \Rightarrow & \lim_{T \to \infty} E_{x_T} = \infty \\ E_x &= \lim_{T \to \infty} E_{x_T} = \lim_{T \to \infty} P_{x_T} T = k & \Rightarrow & \lim_{T \to \infty} P_{x_T} = 0. \end{split}$$

Per i segnali a potenza finita si definisce anche il *valore efficace* (è quel valore che dovrebbe assumere un segnale costante per avere lo stesso contenuto in potenza del segnale dato):

$$x_{\text{eff}} \triangleq \sqrt{P_x}$$
 (1.6)

L'ultimo parametro che definiamo è il valor medio temporale:

$$x_{\rm m} \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \, \mathrm{d}t. \tag{1.7}$$

1.3 Segnali tipici

1.3.1 Costante

$$x(t) = A$$
, con $A \in \mathbb{R}$

$$P_x(t) = A^2$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dt = \infty$$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{E_{xT}}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} A^2 T = A^2$$

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{A^2} = A$$

$$x_{\text{m}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} AT = A$$

1.3.2 SINUSOIDE

Prendiamo in esame un segnale sinusoidale

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

e calcoliamone i parametri energetici. Potenza istantanea e potenza media sono:

$$P_{x}(t) = A^{2} \cos^{2}(2\pi f_{0}t + \varphi)$$

$$P_{x} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{2} \cos^{2}(2\pi f_{0}t + \varphi) dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{A^{2}}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \frac{1}{2} dt + \lim_{T \to \infty} \frac{A^{2}}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_{0}t + 2\varphi) dt$$

e procedendo in modo non rigorosamente matematico, si può "sdoppiare" il secondo limite, scrivendo:

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{A^2}{T} \frac{T}{2} + \frac{A^2}{2} \frac{\lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) dt}{\lim_{T \to \infty} T} = \frac{A^2}{2}$$

Infatti il denominatore del secondo termine tende all'infinito, mentre il numeratore è una forma sì indefinita, ma comunque limitata:

$$\lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{4\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t + 2\varphi) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}$$

dovunque si calcoli il seno esso è sempre compreso tra -1 e 1.

L'energia

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt$$

1.3. Segnali tipici 9

$$= -A^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} dt}_{-\infty} + A^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) dt}_{0} = \infty$$

è infinita, come si poteva affermare già non appena era stata calcolata la potenza, che si era trovata finita non nulla.

Il valor efficace e il valor medio sono rispettivamente:

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$x_{\text{m}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt$$

$$= \frac{\lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt}{\lim_{T \to \infty} T} = 0$$

dove per il calcolo del valor medio abbiamo nuovamente sdoppiato un limite.

1.3.3 Gradino

La funzione gradino, indicata con u(t), è definita come:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Benché esistano in realtà altre definizioni di gradino, relativamente al valore che assume in 0 (ad esempio una per cui in 0 vale la metà del valore massimo), nulla cambia ai fini delle valutazioni energetiche.

La potenza istantanea e la potenza media sono:

$$P_x(t) = \mathbf{u}^2(t) = \mathbf{u}(t)$$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathbf{u}^2(t) \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

L'energia sarà quindi infinita:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^2(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(t) \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}t = \infty$$

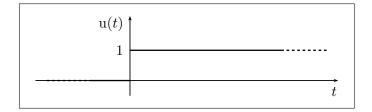


Figura 1.2: Rappresentazione grafica della funzione gradino.

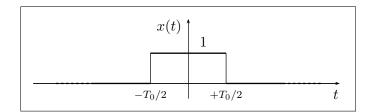


Figura 1.3: Rappresentazione grafica della funzione rettangolo.

Valore efficace e valor medio sono:

$$x_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_{\text{m}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathbf{u}(t) \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{+\frac{T}{2}} dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot t \Big|_{0}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2}$$

1.3.4 Rettangolo

La funzione rettangolo rect $\left(\frac{t}{T_0}\right)$ è definita nel seguente modo:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{T_0}{2} \le t \le \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove la t è la variabile indipendente, mentre T_0 è un parametro che indica la durata temporale della rect.

Notiamo innanzitutto che il quadrato della funzione rettangolo è uguale alla funzione stessa:

$$rect^2\left(\frac{t}{T_0}\right) = rect\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

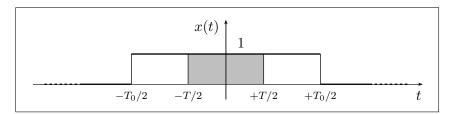
e pertanto otteniamo che la potenza istantanea vale:

$$P_x(t) = |x(t)|^2 = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

mentre la potenza media risulta uguale al valore medio ed è:

$$P_x = x_{\rm m} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) dt = 0$$

Quest'ultimo risultato lo si comprende considerando il seguente grafico:



Infatti:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) dt = \begin{cases} T & \text{se } T < T_0 \\ T_0 & \text{se } T \ge T_0 \end{cases}$$

1.3. Segnali tipici 11

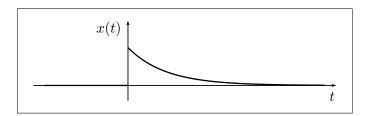


Figura 1.4: Grafico della funzione esponenziale unilatera.

e perciò, nella formula precedente, il limite del rapporto tra l'integrale (che tende a T_0) e T (che tende a infinito) vale zero.

L'energia vale invece:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) dt = T_0$$

Se prima della potenza si fosse calcolata l'energia, trovandola finita avremmo potuto concludere subito che la potenza è nulla. Infine:

$$x_{\text{eff}} = 0$$

1.3.5 Esponenziale unilatera

La funzione esponenziale unilatera è definita come:

$$x(t) = e^{-t} u(t).$$

Il suo grafico è riportato in figura 1.4. Potenza istantanea ed energia valgono:

$$P_x(t) = e^{-2t} u(t)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} u(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Di conseguenza la potenza media del segnale è nulla:

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-2t} u(t) dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt$$
$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2t} \Big|_{0}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \to \infty} -\frac{1}{2T} \left(e^{-T} - 1 \right) = 0$$

e lo stesso il suo valore efficace:

$$x_{\text{eff}} = 0$$

Anche il valor medio è nullo:

$$x_{\rm m} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-t} \, \mathrm{u}(t) \, \mathrm{d}t = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$
$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} (-1) e^{-t} \Big|_{0}^{\frac{T}{2}} = -\frac{1}{T} \left(e^{-\frac{T}{2}} - 1 \right) = 0$$

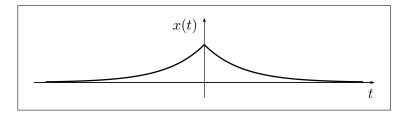


Figura 1.5: Rappresentazione grafica della funzione esponenziale bilatera.

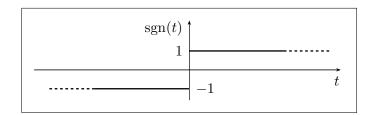


Figura 1.6: Rappresentazione della funzione segno.

1.3.6 Esponenziale bilatera

L'esponenziale bilatera è:

$$x(t) = e^{-|t|}.$$

$$P_x(t) = e^{-2|t|}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = 1$$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-2|t|} dt = \lim_{T \to \infty} \frac{2}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} e^{-2t} dt = 0$$

$$x_{\text{eff}} = 0$$

$$x_{\text{m}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-|t|} dt = \lim_{T \to \infty} \frac{2}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} e^{-t} dt = 0$$

1.3.7 Segno*

La funzione segno è definita come:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

$$P_x(t) = 1$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \, dt = \infty$$

$$P_x = 1$$

$$x_{\text{eff}} = 1$$

$$x_{\text{m}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \operatorname{sgn}(t) \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\right) = 0$$

1.4 Relazione tra potenza media, valore efficace e valor medio

Osservando i vari casi analizzati, si può constatare che laddove la potenza media sia nulla, anche il valor medio e il valore efficace sono risultati nulli. Si può dimostrare che questa proprietà è vera in generale.

Proposizione 1.1. Dato un qualsiasi segnale x(t), vale l'implicazione:

$$P_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{\text{eff}} = 0 \\ x_{\text{m}} = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. La dimostrazione per il valore efficace è banale. Per il valor medio, possiamo scomporre il generico segnale x(t) come

$$x(t) = x_{\rm m} + x'(t)$$

ossia come somma della sua media $x_{\rm m}$ più un segnale $x'(t) \triangleq x(t) - x_{\rm m}$ (il quale rappresenta le variazioni del segnale originario rispetto alla sua media). Il segnale x'(t) ha media nulla:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x'(t) dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [x(t) - x_{\rm m}] dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt - \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_{\rm m} dt$$

$$= x_{\rm m} - \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} x_{\rm m} T = x_{\rm m} - x_{\rm m} = 0.$$

La dimostrazione si effettua partendo dall'espressione della potenza media, riscrivendola in un determinato modo e imponendo infine che sia nulla.

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x_{\rm m} + x'(t)|^2 dt$$

ma poiché $|z|^2 = z \cdot z^*$ e $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$, otteniamo:

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} (x_{\mathrm{m}} + x'(t)) (x_{\mathrm{m}}^* + x'^*(t)) dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} [|x_{\mathrm{m}}|^2 + |x'(t)|^2 + x_{\mathrm{m}} x'^*(t) + x_{\mathrm{m}}^* x'(t)] dt$$

nella quale compare un'espressione del tipo $z_1z_2^*+z_1^*z_2$. Siccome $(z_1z_2)^*=z_1^*z_2^*$, allora:

$$z_1 z_2^* + z_1^* z_2 = z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* = z + z^*$$

$$= 2 \operatorname{Re} \{z\} = 2 \operatorname{Re} \{z_1 z_2^*\}.$$

$$(z \triangleq z_1 z_2^*)$$

Infatti, se $z = a + \mathrm{j}b$, allora $a = \mathbf{Re}\{z\} = \frac{1}{2}(z + z^*)$. Tornando quindi alla potenza scriviamo:

$$P_{x} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[|x_{\mathbf{m}}|^{2} + |x'(t)|^{2} + 2 \operatorname{\mathbf{Re}} \left\{ x_{\mathbf{m}}^{*} x'(t) \right\} \right] dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x_{\mathbf{m}}|^{2} dt + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x'(t)|^{2} dt$$

$$+ 2 \operatorname{\mathbf{Re}} \left\{ x_{\mathbf{m}}^{*} \underbrace{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x'(t) dt}_{0} \right\}$$

$$= |x_{\mathbf{m}}|^{2} + P_{x'}$$

Deve quindi essere:

$$P_x = |x_{\rm m}|^2 + P_{x'} = 0$$

dove sia $|x_{\rm m}|^2$ che $P_{x'}$ sono numeri non negativi (≥ 0) essendo integrali di funzioni ($|\cdot|^2$) sempre maggiori o uguali a zero. Affinché loro somma sia nulla, devono esser per forza nulli entrambi e pertanto, in particolare, è nullo il valor medio $x_{\rm m}$.

Quanto appena dimostrato può essere espresso in altri termini dicendo che condizioni necessarie affinché $P_x = 0$ sono che il segnale x(t) sia a media e a valore efficace nulli.

Analisi di segnali periodici

2.1 Concetti generali

Un segnale x(t) si dice periodico se esiste un T_0 tale che sia soddisfatta la relazione:

$$x(t) = x(t - kT_0) \tag{2.1}$$

per ogni k intero. Il valore T_0 è detto periodo del segnale ed è l'inverso della frequenza $f_0 \triangleq 1/T_0$.

È facile verificare che l'energia E_x di un segnale periodico (così come definita nel capitolo precedente) è in generale infinita:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2} + kT_0}^{+\frac{T_0}{2} + kT_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E_{x_k} = \infty.$$

In generale, invece, la potenza media è finita, e potrebbe essere calcolata usando l'eq. (1.5). Si dimostra che eseguendo il limite si giunge a un risultato più semplice:

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

e discretizzando la variabile $T = kT_0$, si ottiene:

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-\frac{kT_0}{2}}^{+\frac{kT_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

che equivale calcolare l'integrale su k periodi:

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{kT_0} k \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt.$$
(2.2)

Anche l'espressione del valor medio di un segnale periodico si semplifica:

$$x_m \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) dt.$$
 (2.3)

2.2 Analisi di Fourier

L'analisi fasoriale consente di analizzare circuiti lineari (ossia circuiti per i quali è valida la sovrapposizione degli effetti) quando il segnale applicato è una somma finita di componenti sinusoidali. L'analisi di Fourier consente di studiare circuiti ai quali sia applicato un generico segnale periodico (con andamento arbitrario, anche non sinusoidale).

Ciascun segnale periodico di periodo T_0 che soddisfi il "criterio di Dirichlet" (il criterio 2.1 definito più avanti) può essere scritto come la somma di infinite sinusoidi a frequenze multiple di $1/T_0$.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$
(2.4)

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$
 (2.5)

dove $f_0 = 1/T_0$ è la frequenza fondamentale. La relazione (2.5) costituisce l'espressione in forma polare dello sviluppo in serie di Fourier, nella quale un segnale periodico reale x(t) è rappresentato come somma di un termine costante A_0 (componente continua) e di una serie di termini sinusoidali, le oscillazioni armoniche (o semplicemente armoniche). L'n-esima armonica ha ampiezza $A_n > 0$, frequenza nf_0 e fase φ_n . La componente in continua coincide con il valor medio del segnale:

$$x_{m} = \frac{1}{T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} x(t) dt$$

$$= \frac{1}{T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} A_{0} dt + \underbrace{\frac{1}{T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} A_{1} \cos(2\pi f_{0}t + \varphi_{1}) dt}_{0}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} A_{2} \cos(4\pi f_{0}t + \varphi_{2}) dt + \dots = \frac{1}{T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} A_{0} dt = A_{0}$$

2.2.1 Il Criterio di Dirichelet

Dato un segnale periodico, affinché la serie di eq. (2.5) converga uniformemente e il segnale stesso sia rappresentabile secondo la forma polare di Fourier, devono essere soddisfatte determinate condizioni, racchiuse nel "Criterio di Dirichelet". Si tratta di un criterio sufficiente costituito da un insieme di tre condizioni.

Criterio 2.1 (di Dirichelet): Se

1. x(t) è assolutamente integrabile sul periodo T_0 , ossia

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)| \, \mathrm{d}t < \infty,$$

2. x(t) è continua o presenta un numero finito di discontinuità di prima specie nel periodo T_0 ,

¹Limite destro e sinistro devono cioè essere (diversi ma) finiti.

3. x(t) è derivabile su tutto il periodo escluso al più un numero finito di punti nei quali esistono finite le derivate destra e sinistra

oppure

3. x(t) ha un numero finito di massimi e minimi nel periodo,

allora la serie di Fourier converge al valore assunto dalla funzione x(t) nei punti in cui questa è continua e alla semisomma dei limiti destro e sinistro nei punti in cui x(t) presenta le eventuali discontinuità di prima specie.

Si noti che i segnali fisici verificano sempre questo criterio. Inoltre, anche segnali a dente di sega (o simili, con discontinuità) possono esser sviluppati in serie di Fourier.

2.2.2 Sviluppo in serie di Fourier in forma complessa

Usando le formule di Eulero² si può riscrivere l'equazione (2.5) nella forma:

 $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{e^{j(2\pi n f_0 t + \varphi_n)} + e^{-j(2\pi n f_0 t + \varphi_n)}}{2}$ $= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n} e^{-j2\pi n f_0 t}$ $= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n} e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{-\infty} \frac{A_{-n}}{2} e^{-j\varphi_{-n}} e^{j2\pi n f_0 t}$

Non è necessario conoscere questi calcoli per l'esame orale.

e definendo:

$$\begin{cases} X_0 \triangleq A_0, \\ X_n \triangleq A_n e^{j\varphi_n}/2 & \text{per } n = 1, 2, \dots, \\ X_n \triangleq A_{-n} e^{-j\varphi_{-n}}/2 & \text{per } n = -1, -2, \dots, \end{cases}$$

si ottiene:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$
(2.6)

che rappresenta l'espressione in forma complessa della serie di Fourier. (Notare che abbiamo continuato a considerare x(t) come segnale reale, ma la rappresentazione potrebbe essere estesa anche a segnali complessi.) Questa relazione viene anche detta Antitrasformata Serie Di Fourier (ATSF):

$$x(t) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

Antitrasformata Serie di Fourier (equazione di sintesi)

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2i}.$$

²Le formule di Eulero consentono di esprimere seno e coseno nella forma:

Teorema 2.1. Se x(t) è un segnale periodico esprimibile mediante serie di Fourier, allora i coefficienti X_n della serie possono essere ottenuti mediante la cosiddetta equazione di analisi:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$
 Transformata Serie di Fourier (Equazione di Analisi)

Dimostrazione. Infatti, sostituendo nella trasformata serie di Fourier il segnale x(t) espresso mediante l'equazione di sintesi, si ottengono esattamente i termini X_n :

$$TSF[x(t)] = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m e^{j2\pi m f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi (m-n)f_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \cos(2\pi (m-n)f_0 t) dt + j \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sin(2\pi (m-n)f_0 t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{T_0} \cdot X_n \cdot T_0 = X_n$$

dove le ultime uguaglianze si hanno in quanto:

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \cos(2\pi (m-n) f_0 t) dt = \begin{cases} T_0 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$$
 (2.7)

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sin(2\pi (m-n)f_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$
 (2.8)

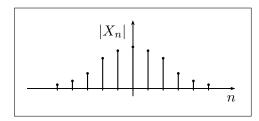
ossia l'integrale sul periodo di seno e coseno è sempre nullo. L'eq. (2.8) per m=n si riduce all'integrale (nullo) di una funzione identicamente nulla, mentre l'unico termine non nullo è quello di eq. (2.7) per m=n, che si riduce all'integrale di una funzione che vale costantemente 1.

La Trasformata Serie Di Fourier (TSF) è biunivoca, in quanto al segnale analogico x(t) corrisponde univocamente la sequenza complessa X_n e a questa corrisponde esattamente x(t). In breve si indicherà questa corrispondenza con la scrittura:

$$x(t) \quad \stackrel{\text{TSF}}{\Longleftrightarrow} \quad X_n.$$

Ciò comporta che le informazioni contenute nel segnale originario nel dominio del tempo x(t) sono contenute in modo equivalente anche nella sequenza di valori complessi X_n .

Si noti inoltre che, come già mostrato precedentemente, il termine $X_0 = A_0$ nella trasformata serie di Fourier è l'espressione del valor medio per un segnale periodico così come calcolato nell'equazione (2.3).



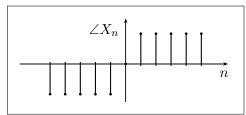


Figura 2.1: Spettro di ampiezza e fase di un segnale periodico.

2.3 Spettro di un segnale periodico

Lo spettro³ di un segnale periodico x(t) è una rappresentazione del contenuto frequenziale del segnale stesso. Essendo la X_n una sequenza complessa, per raffigurarla sono necessari in generale due grafici, uno per lo spettro di ampiezza ($|X_n|$) e l'altro per lo spettro di fase ($\angle X_n$).

Dall'espressione complessa (2.6) dello sviluppo in serie di Fourier risulta chiaramente che una condizione necessaria affinché la serie di Fourier converga è che l'ampiezza $|X_n|$ delle armoniche tenda a zero per $n \to \infty$, e in virtù di ciò le componenti più significative dello spettro sono quelle per n piccolo in modulo. Tipicamente, perciò, lo spettro di ampiezza decresce allontanandosi dall'asse delle ordinate, come rappresentato nella figura 2.1.

ESEMPIO 2.1 (spettro di un coseno). Si consideri un segnale cosinusoidale:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t).$$

La componente in continua è nulla, essendo coincidente col valor medio:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} A \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot f_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \cos(2\pi f_0 t) dt = 0.$$

La generica armonica di ordine n vale:

$$X_{n} = \frac{A}{T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} \cos(2\pi f_{0}t) e^{-j2\pi n f_{0}t} dt$$

$$= \frac{A}{2T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} e^{j2\pi f_{0}t} e^{-j2\pi n f_{0}t} dt + \frac{A}{2T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} e^{-j2\pi f_{0}t} e^{-j2\pi n f_{0}t} dt$$

$$= \frac{A}{2T_{0}} \underbrace{\int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} e^{-j2\pi (n-1)f_{0}t} dt}_{T_{0}} + \underbrace{\frac{A}{2T_{0}} \underbrace{\int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} e^{-j2\pi (n+1)f_{0}t} dt}_{T_{0}} + \underbrace{\frac{A}{2T_{0}} \underbrace{\int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} e^{-j2\pi (n+1)f_{0}t} dt}_{T_{0}}}_{T_{0}} + \underbrace{\frac{A}{2T_{0}} \underbrace{\int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} e^{-j2\pi (n+1)f_{0}t} dt}_{T_{0}}}_{T_{0}}}_{T_{0}} + \underbrace{\frac{A}{2T_{0}} \underbrace{\int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} e^{-j2\pi (n+1)f_{0}t} dt}_{T_{0}}}_{T_{0}} + \underbrace{\frac{A}{2T_{0}} \underbrace{\int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} e^{-j2\pi (n+1)f_{0}t} dt}_{T_{0}}}_{T_{0}}}_{T_{0}} + \underbrace{\frac{A}{2T_{0}} \underbrace{\int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} e^{-j2\pi (n+1)f_{0}t} dt}_{T_{0}}}_{T_{0}}}_{T_{0}}}_{T_{0}}}_{T_{0}}$$

dove sono state applicate le relazioni (2.7) e (2.8). Quindi $X_n \neq 0$ solo per $n = \pm 1$. Calcolando le armoniche per n = -1 e n = 1, troviamo:

³Il termine "spettro" si intende nel generico senso di "rappresentazione", "visione", e nasce nel campo della spettroscopia, in cui si analizza la composizione dei materiali attraverso le righe di emissione caratteristiche dei diversi elementi chimici. È usato in questo caso in analogia con le "righe" delle rappresentazioni di ampiezza o di fase delle componenti armoniche.

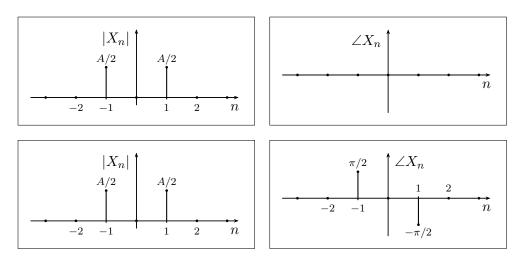


Figura 2.2: Spettri di ampiezza e fase rispettivamente del coseno e del seno.

$$\begin{cases} X_{-1} = \frac{A}{2T_0} \cdot 0 + \frac{A}{2T_0} \cdot T_0 = \frac{A}{2} \\ X_1 = \frac{A}{2T_0} \cdot T_0 + \frac{A}{2T_0} \cdot 0 = \frac{A}{2}. \end{cases}$$

In conclusione, sono presenti solo le armoniche $n=\pm 1$ e valgono $X_{1,-1}=A/2$ (hanno fase nulla). Si poteva anche semplicemente confrontare l'equazione di sintesi con la formula di Eulero di un coseno:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} \left[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}.$$

ESEMPIO 2.2 (spettro di un seno). Consideriamo ora un segnale nella forma

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t).$$

La generica armonica vale:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} A \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$= \frac{A}{j2T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t} dt - \frac{A}{j2T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$= \frac{A}{j2T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi (n-1)f_0 t} dt - \frac{A}{j2T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi (n+1)f_0 t} dt.$$

I due integrali sono unitari rispettivamente per n=1 e n=-1, mentre per tutti gli altri valori di n sono entrambi nulli. Pertanto esistono solo le armoniche per $n=\pm 1$. Entrambe hanno ampiezza uguale ai corrispondenti termini dello spettro del coseno, ma hanno fase uguale rispettivamente a $\mp \pi/2$. Infatti, poiché j = $e^{j\pi/2}$ e $-j = e^{-j\pi/2}$, esse valgono:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{A}{j2} = \frac{A}{2} e^{-j\pi/2} \\ X_{-1} = -\frac{A}{j2} = \frac{A}{2} e^{j\pi/2}. \end{cases}$$

2.3.1 Proprietà dello spettro di segnali periodici

Proprietà 2.1 (Simmetria Hermitiana). Se x(t) è un segnale periodico reale, allora

$$X_{-n} = X_n^*$$

Dimostrazione. Si ha:

$$X_{-n} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi(-n)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt$$

e, poiché $x(t) = x^*(t)$ essendo il segnale reale, facendo il complesso coniugato all'interno e all'esterno dell'integrale otteniamo:

$$= \frac{1}{T_0} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x^*(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right]^* = \left[\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right]^* = X_n^* \quad \Box$$

PROPRIETÀ 2.2 (Linearità). Si considerino due segnali periodici x(t) e y(t) entrambi di periodo T_0 aventi come spettro X_n e Y_n . Allora:

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$
 $\stackrel{\text{TSF}}{\Longleftrightarrow}$ $Z_n = aX_n + bY_n$.

Dimostrazione. La proprietà di linearità della TSF (valida solamente per segnali aventi lo stesso periodo T_0) discende direttamente dalla proprietà di linearità dell'integrale. Infatti, anche il segnale z(t) avrà periodo T_0 e perciò si ha:

$$Z_{n} = \frac{1}{T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} z(t) e^{-j2\pi n f_{0}t} dt = \frac{1}{T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} [ax(t) + by(t)] e^{-j2\pi n f_{0}t} dt$$

$$= a \underbrace{\frac{1}{T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_{0}t} dt}_{X_{n}} + b \underbrace{\frac{1}{T_{0}} \int_{-\frac{T_{0}}{2}}^{+\frac{T_{0}}{2}} y(t) e^{-j2\pi n f_{0}t} dt}_{Y_{n}}.$$

Dal teorema della linearità segue che lo sviluppo in serie di z(t) è una somma di oscillazioni aventi le stesse frequenze di quelle che compongono i segnali x(t) e y(t), senza l'introduzione di nuove armoniche.

2.3.2 Segnali periodici pari, dispari e alternativi

PROPRIETÀ 2.3 (Spettro di segnali pari). Se x(t) è un segnale periodico pari, ossia x(t) = x(-t), allora anche il suo spettro è una sequenza pari:

$$X_{-n} = X_n$$
.

Dimostrazione. Si considera:

$$X_{-n} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi(-n)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt$$

ed effettuando il cambio di variabile $\alpha = -t$:

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(-\alpha) e^{-j2\pi n f_0 \alpha} d\alpha = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(\alpha) e^{-j2\pi n f_0 \alpha} d\alpha = X_n \qquad \Box$$

Notare che se x(t) è una funzione reale, per la simmetria Hermitiana vale anche:

$$X_n = X_{-n} = X_n^*$$

ossia segnali periodici reali e pari hanno TSF reale e pari.

PROPRIETÀ 2.4 (Spettro di segnali dispari). Un segnale periodico dispari, ossia per cui x(t) = -x(-t), ha spettro dispari:

$$X_{-n} = -X_n.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$X_{-n} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(-\alpha) e^{-j2\pi n f_0 \alpha} d\alpha$$
$$= -\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(\alpha) e^{-j2\pi n f_0 \alpha} d\alpha = -X_n$$

Se è anche valida la simmetria Hermitiana

$$X_{-n} = -X_n = X_n^*$$

allora la X_n è una sequenza dispari immaginaria pura. Di conseguenza $X_0=0$.

Spettro di segnali alternativi. Un segnale periodico x(t) si dice alternativo se verifica la relazione

$$x(t) = -x\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$$

ossia se l'andamento del segnale in un qualsiasi semiperiodo è uguale all'opposto dell'andamento del segnale nel semiperiodo precedente.

Proprietà 2.5. Se x(t) è un segnale periodico alternativo, allora

$$X_n = \begin{cases} \frac{2}{T_0} \int_0^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt & \text{per } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Lo spettro del segnale è:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$
$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{0}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

e ponendo $t' = t + T_0/2$:

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{+\frac{T_0}{2}} x \left(t' - \frac{T_0}{2} \right) e^{-j2\pi n f_0 \left(t' - \frac{T_0}{2} \right)} dt' + \frac{1}{T_0} \int_0^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{+\frac{T_0}{2}} \left(-x(t') \right) e^{-j2\pi n f_0 t'} e^{j2\pi n f_0 \frac{T_0}{2}} dt' + \frac{1}{T_0} \int_0^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{+\frac{T_0}{2}} (-e^{j\pi n}) x(t') e^{-j2\pi n f_0 t'} dt' + \frac{1}{T_0} \int_0^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$
$$= (1 - e^{j\pi n}) \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

dove il termine $(1 - e^{j\pi n})$ è nullo per n pari e vale 2 per n dispari.

2.4 Periodicizzazione di un segnale aperiodico

Sia $x_0(t)$ un segnale aperiodico. Il segnale definito come

$$x(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT_0) \tag{2.9}$$

(somma di versioni traslate del segnale $x_0(t)$) è una periodicizzazione con periodo di ripetizione T_0 del segnale $x_0(t)$. Si dimostra subito, infatti, che il segnale di eq. (2.9) è periodico di periodo T_0 :

$$x(t - kT_0) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} x_0(t - kT_0 - nT_0) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} x_0(t - (n + k)T_0)$$
$$= \sum_{m = -\infty}^{+\infty} x_0(t - mT_0) = x(t)$$

avendo definito m = n + k.

Analisi di segnali aperiodici

3.1 Dalla serie all'integrale di Fourier

Nel capitolo precedente si è visto come sia possibile rappresentare un qualsiasi segnale periodico come una opportuna sovrapposizione di segnali periodici elementari (sinusoidi) con ampiezza, periodo e fase opportuni. Ma dato che per la maggior parte i fenomeni naturali non sono periodici, sorge la questione se sia possibile effettuare una scomposizione simile anche per segnali aperiodici.

Si consideri il segnale aperiodico

$$x(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right).$$
 (3.1)

Periodicizzandolo con periodo di ripetizione T_0 , si genera un segnale particolare detto treno di impulsi rettangolari:

$$x_p(t) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$
(3.2)

che, trattandosi di un segnale periodico, può essere studiato tramite la TSF. Il segnale aperiodico x(t) può essere considerato come un caso limite del segnale periodico $x_p(t)$ facendo tendere all'infinito il periodo di ripetizione. In questo modo, infatti, per $T_0 \to \infty$ si "allontanano" dall'origine tutte le repliche del segnale lasciando invariata unicamente quella per n=0, che coincide con x(t).

Le considerazioni fatte valgono ovviamente per un qualsiasi segnale aperiodico x(t). Se $x_n(t)$ ne è la periodicizzazione allora è vero in generale che

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t). \tag{3.3}$$

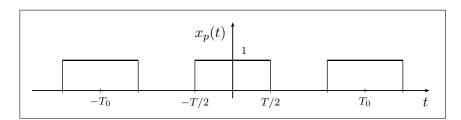


Figura 3.1: Rappresentazione grafica del segnale periodico ottenuto per periodicizzazione della funzione rettangolo di eq. (3.1).

Rappresentando il segnale $x_p(t)$ mediante la serie di Fourier, si scrive:

$$x_p(t) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$
(3.4)

nella quale $f_0 = 1/T_0$. I coefficienti della serie sono dati dalla:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt.$$
 (3.5)

All'aumentare del periodo di ripetizione T_0 diminuisce proporzionalmente la frequenza fondamentale f_0 e quindi la distanza tra due armoniche consecutive (che è proprio f_0). Ciò determina un *infittimento* dello spettro del segnale. Dalla eq. (3.5) si nota inoltre che l'ampiezza dei coefficienti tende a ridursi all'aumentare di T_0 . Al limite per $T_0 \to \infty$, quindi, lo spettro si infittisce progressivamente appiattendosi sull'asse delle ascisse.

Per ovviare al problema della riduzione delle ampiezze delle righe spettrali, si definisce, per ciascuna delle frequenze armoniche nf_0 , una sorta di "coefficiente di Fourier modificato":

$$X(nf_0) \triangleq T_0 X_n = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt.$$
 (3.6)

Alla luce di ciò, si può riscrivere l'equazione (3.4) come:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nf_0) e^{j2\pi nf_0 t} \cdot f_0$$
 (3.7)

e definendo¹ la variabile continua $f = \lim_{f_0 \to 0} n f_0$, se si effettua ad ambo i membri il limite per $T_0 \to \infty$, l'equazione precedente si trasforma nell'espressione della Antitrasformata Continua Di Fourier (ATCF):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$
 Antitrasformata Continua di Fourier (Equazione di Sintesi)

Il segnale aperiodico x(t) è dunque rappresentabile attraverso il cosiddetto integrale di Fourier.

L'espressione della X(f) si ottiene passando al limite per $T_0 \to \infty$ nell'eq. (3.6) dei coefficienti di Fourier modificati. Giungiamo così la formulazione della *Trasformata Continua Di Fourier* (TCF):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$
 Transformata Continua di Fourier (Equazione di Analisi)

¹Non si tratta di una vera e propria definizione: in maniera euristica, si può dire che la variabile continua f è, in un certo senso, il limite della variabile discreta nf_0 quando $f_0 \to 0$.

Mentre un segnale periodico può essere rappresentato, mediante serie di Fourier, con componenti sinusoidali ad ampiezza finita e a frequenze multiple di un'unica frequenza fondamentale, i segnali aperiodici sono rappresentabili, tramite integrale di Fourier, come sovrapposizione di componenti sinusoidali di ampiezza infinitesima $X(f)\,\mathrm{d}f$ e di frequenza f variabile con continuità su tutto l'asse reale.

In altre parole, il segnale aperiodico è visto come un segnale periodico di periodo illimitato e quindi con frequenza fondamentale infinitamente piccola, passando dall'insieme discreto di armoniche all'insieme continuo di componenti frequenziali.

La corrispondenza biunivoca tra segnale aperiodico e la sua TCF viene indicata mediante la scrittura:

$$x(t) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad X(f).$$

La trasformata e l'antitrasformata continue sono anche indicate con la notazione:

$$X(f) = \text{TCF}[x(t)], \quad x(t) = \text{TCF}^{-1}[X(f)].$$

Infine, essendo la X(f) una funzione complessa (di variabile reale), è comodo rappresentarla mediante il suo spettro di ampiezza (|X(f)|) e di fase $(\angle X(f))$.

3.2 Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

3.2.1 Criteri di esistenza

Due criteri consentono di affermare se esista o meno la trasformata continua di Fourier di un dato segnale x(t). La prima condizione sufficiente afferma che se x(t) ha energia finita

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$$

allora esiste la sua trasformata X(f) e il segnale è rappresentabile mediante l'integrale di Fourier.

Il secondo criterio sufficiente (meno restrittivo) è detto *Criterio di Dirichlet*, e può essere enunciato come segue.

Criterio 3.1 (di Dirichelet): Se

1. x(t) è assolutamente sommabile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \, \mathrm{d}t < \infty,$$

2. x(t) presenta un numero finito di discontinuità di prima specie e un numero finito di massimi e minimi in un qualunque intervallo finito $[t_1, t_2]$ (con t_1 e t_2 fissati arbitrariamente),

allora il segnale è rappresentabile come integrale di Fourier (cioè come antitrasformata della sua trasformata di Fourier) e nei punti di discontinuità l'integrale di Fourier converge alla semisomma dei limiti destro e sinistro del segnale.

3.2.2 Simmetrie degli spettri

Se poniamo $R(f) = \mathbf{Re}\{X(f)\}, I(f) = \mathbf{Im}\{X(f)\},$ possiamo rappresentare la X(f) in forma algebrica come

$$X(f) = R(f) + jI(f). \tag{3.8}$$

Similmente, se A(f) = |X(f)| e $\Phi(f) = \angle X(f)$, allora si può scrivere

$$X(f) = A(f) e^{j\Phi(f)}$$
.

Questa proprietà e le seguenti potrebbero esser dimostrate in modo analogo alle corrispondenti proprietà della TSF, tuttavia il professore si è rifatto al [2], dove sono contenute dimostrazioni diverse, qui riportate.

Questa proprietà e le Proprietà 3.1 (Simmetria Hermitiana). Se x(t) è una funzione reale, allora la sua seguenti potrebbero trasformata X(f) è Hermitiana, ossia:

$$X(f) = X^*(-f). (3.9)$$

Dimostrazione. Poiché per ipotesi x(t) è una funzione reale, le parti R(f) e I(f) dell'equazione (3.8) si possono ottenere immediatamente dall'espressione della TCF:

$$R(f) = \mathbf{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t} \,\mathrm{d}t \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) \,\mathrm{d}t \tag{3.10}$$

$$I(f) = \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right\} = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt.$$
 (3.11)

Da queste espressioni si ricava immediatamente che:

$$R(f) = R(-f)$$
 e $I(f) = -I(-f)$

ovvero la parte reale della trasformata di un segnale reale è una funzione pari della frequenza, mentre la parte immaginaria ne è una funzione dispari. Da ciò, la tesi:

$$X(-f) = R(-f) + jI(-f) = R(f) - jI(f) = X^*(f).$$

Queste proprietà si riflettono anche su ampiezza e fase: lo spettro di ampiezza è una funzione pari, mentre la fase è dispari:

$$A(-f) = \sqrt{R^2(-f) + I^2(-f)} = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} = A(f)$$

$$\Phi(-f) = \tan^{-1}\left(\frac{I(-f)}{R(-f)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-I(f)}{R(f)}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{I(f)}{R(f)}\right) = -\Phi(f).$$

3.2.3 Segnali pari e dispari

PROPRIETÀ 3.2 (segnali reali e pari). Se x(t) è un segnale reale e pari, allora anche la sua trasformata è reale e pari:

$$X(f) = X(-f) = X^*(f).$$

Dimostrazione. Possiamo procedere nel seguente modo:

$$X(f) = \text{TCF}[x(t)] = \text{TCF}[x(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-j2\pi f t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{j2\pi f t'} dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi (-f)t'} dt' = X(-f)$$

avendo effettuato la sostituzione t' = -t. Di conseguenza, la TCF trovata è una funzione pari e inoltre, unendo questo risultato alla (3.9), si ottiene

$$X(f) = X^*(f) \Leftrightarrow R(f) + jI(f) = R(f) - jI(f)$$

da cui:

$$I(f) = -I(f) = 0$$

ossia la parte reale della trasformata è una funzione pari, mentre la parte immaginaria è (insieme pari e dispari, cioè) nulla.

Si poteva giungere allo stesso risultato anche a partire dalle relazioni (3.10) e (3.11). Per la simmetria hermitiana, infatti, la funzione integrale nella (3.10) è pari nella frequenza (in quanto il coseno è pari). Inoltre, nella (3.11) compare come funzione integranda una funzione reale e dispari (in quanto è il prodotto di una funzione reale e pari con una funzione reale e dispari) nel tempo, il cui integrale su tutto l'asse dei tempi è nullo.

Proprietà 3.3 (segnali reali e dispari). Se x(t) è un segnale reale e dispari, allora la sua trasformata è immaginaria e dispari:

$$X(f) = -X(-f) = -X^*(f).$$

Dimostrazione. Anche in questo caso si possono fare ragionamenti a partire dalle relazioni (3.10) e (3.11), oppure si può procedere in questo modo:

$$X(f) = \text{TCF}[x(t)] = \text{TCF}[-x(-t)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-j2\pi f t} dt$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{j2\pi f t'} dt' = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi(-f)t'} dt' = -X(-f).$$

avendo effettuato il cambio di variabile t' = -t. Pertanto, la trasformata trovata è una funzione dispari. Inoltre, considerando anche la (3.9), si ottiene

$$X(f) = -X^*(f) \Leftrightarrow R(f) + jI(f) = -R(f) + jI(f)$$

da cui:

$$R(f) = -R(f) = 0$$

ossia la parte reale della trasformata è nulla, mentre la parte immaginaria (e quindi la trasformata, coincidente con la sua parte immaginaria) è dispari.

3.3 Teoremi sulla Trasformata Continua di Fourier

I teoremi dei quali gode la TCF sono estremamente utili nel calcolo delle trasformate dei segnali.

3.3.1 Linearità

TEOREMA 3.1 (della linearità). Si considerino i segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e siano $X_1(f)$ e $X_2(f)$ le rispettive trasformate. Allora

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad X(f) = aX_1(f) + bX_2(f).$$

Dimostrazione. Basta applicare la definizione di trasformata e sfruttare la proprietà di linearità dell'integrale. $\hfill\Box$

3.3.2 Dualità

TEOREMA 3.2 (della dualità). Si considerino il segnale temporale X(t) e il segnale x(f) nel dominio della frequenza. Se X(f) è la trasformata di x(t), allora:

$$X(t) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad x(-f).$$

Dimostrazione. Se nella definizione di antitrasformata di x(t) si scambiano formalmente le variabili t ed f si ottiene:

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{j2\pi t f} dt$$

ed effettuando un cambio di variabile, sostituendo f con -f, si ottiene:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi t f} dt.$$

Esempio 3.1. Si supponga di voler calcolare la trasformata del segnale $x(t) = A \operatorname{sinc}(Bt)$. Poiché:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \stackrel{\operatorname{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad T\operatorname{sinc}(fT),$$

utilizzando il teorema della dualità è possibile scrivere:

$$T\operatorname{sinc}(Tt) \quad \stackrel{\operatorname{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad \operatorname{rect}\left(-\frac{f}{T}\right).$$

Se scriviamo la x(t) come

$$x(t) = A\operatorname{sinc}(Bt) = \frac{A}{B}B\operatorname{sinc}(Bt),$$

allora, antitrasformando:

$$X(f) = \frac{A}{B}\operatorname{rect}\left(-\frac{f}{B}\right) = \frac{A}{B}\operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right).$$

3.3.3 RITARDO

Il segnale $x(t-t_0)$ corrisponde al segnale x(t) anticipato o ritardato, ossia traslato lungo l'asse temporale. L'operazione di traslazione corrisponde a un ritardo se $t_0>0$ e a un anticipo se $t_0<0$.

Teorema 3.3 (del ritardo). Si dimostra che:

$$x(t-t_0) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

Dimostrazione. Sia $y(t) = x(t - t_0)$, allora:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt$$

e con il cambiamento di variabile $\alpha=t-t_0,$ si ricava:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f(t_0 + \alpha)} d\alpha$$

$$= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = X(f) e^{-j2\pi f t_0}.$$

Questa proprietà mostra chiaramente che un ritardo temporale modifica lo spettro di fase della trasformata del segnale ma non cambia il suo spettro d'ampiezza.

$$\begin{cases} |Y(f)| = |X(f)| \\ \angle Y(f) = \angle X(f) - 2\pi f t_0 \end{cases}$$

Come si nota, lo sfasamento introdotto dal ritardo varia linearmente con la frequenza.

Esempio 3.2. Calcolare la trasformata del segnale

$$y(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right).$$

Poiché y(t) è un segnale ritardato, vale $y(t) = x(t-t_0)$ con x(t) = rect(t/T), e quindi:

$$Y(f) = X(f) e^{-j2\pi f t_0} = T \operatorname{sinc}(fT) e^{-j2\pi f t_0}.$$

3.3.4 Cambiamento di scala

Se due segnali y(t) e x(t) sono legati dalla relazione

$$y(t) = x(\alpha t)$$

con $\alpha \neq 0$, allora il segnale y(t) è una versione rallentata o accelerata del segnale di partenza x(t) (la forma dei due segnali è comunque la stessa). Il coefficiente α agisce infatti dilatando o contraendo la funzione sull'asse temporale: si parla perciò di cambiamento della scala temporale. Più precisamente, moltiplicando la variabile t per α si producono i seguenti effetti:

- se $|\alpha| > 1$ si ottiene una compressione della scala dei tempi (il segnale viene accelerato);
- se $|\alpha| < 1$ si ottiene una *dilatazione* della scala dei tempi (il segnale viene rallentato);
- se $\alpha < 0$, infine, si ottiene l'*inversione* della scala dei tempi (il segnale subisce un ribaltamento rispetto all'asse delle ordinate).

Teorema 3.4 (del cambiamento di scala). Per $\alpha \neq 0$, vale la trasformata:

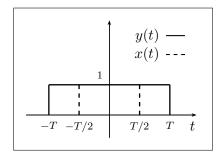
$$y(t) = x(\alpha t) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

Dimostrazione. La trasformata del segnale y(t) si calcola come:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt.$$
 (3.12)

Se $\alpha > 0$, tramite il cambiamento di variabile $\alpha t = t'$, l'equazione precedente diventa:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f t'/\alpha} \frac{dt'}{\alpha}$$
$$= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi (f/\alpha)t'} dt' = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$



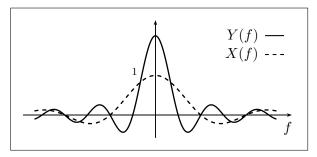


Figura 3.2: Esempio di applicazione del teorema del cambiamento di scala.

Se invece $\alpha < 0$, partendo sempre dalla 3.12 ed effettuando il cambiamento di variabile $\alpha t = t'$, si ottiene

$$Y(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f(t'/\alpha)} \frac{dt'}{\alpha}$$

dove il segno — tiene conto dell'inversione degli estremi di integrazione.² Proseguendo si giunge al risultato:

$$Y(f) = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi(f/\alpha)t'} dt' = -\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

In entrambi i casi ($\alpha > 0$ e $\alpha < 0$) il risultato ottenuto può essere scritto come:

$$Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right). \quad \Box$$

Si nota che una dilatazione dell'asse dei tempi comporta una compressione dell'asse delle frequenze così come una compressione dell'asse dei tempi comporta una dilatazione dell'asse delle frequenze.

Esempio 3.3. Calcolare la trasformata del segnale

$$y(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right).$$

Se x(t) = rect(t/T), allora $y(t) = x(\alpha t)$, con $\alpha = 1/2$. Per il teorema del cambiamento di scala si trova:

$$Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right) = 2T\operatorname{sinc}(2fT).$$

3.3.5 Modulazione

Analizziamo la modulazione di un segnale con oscillazioni di vario tipo: cosinusoidali o sinusoidali, con o senza fase e infine con un esponenziale complesso.

²Ogni volta che si fa un cambio di variabile in un integrale, bisogna effettuare tre sostituzioni: nella funzione integranda (ossia all' "interno" dell'integrale), nel termine differenziale (per cui in questo caso dt diventa d t'/α) e negli estremi di integrazione (in questo caso, se t va da $-\infty$ a $+\infty$, poiché $\alpha < 0$ allora $t' = \alpha t$ va da $+\infty$ a $-\infty$, da cui il segno "meno" per "raddrizzare" l'integrale).

Teorema 3.5 (della modulazione con coseno). Se X(f) è la TCF di x(t), allora:

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad Y(f) = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

Dimostrazione. Bisogna scrivere il coseno tramite le formule di Eulero:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right] e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi (f - f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi (f + f_0)t} dt$$

$$= \frac{1}{2} X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0).$$

Come prima conclusione, è immediato notare che moltiplicando un segnale analogico per un fattore esponenziale complesso $e^{j2\pi f_0t}$, la sua trasformata viene traslata lungo l'asse frequenziale intorno alla frequenza f_0 . Questa proprietà (che dimostreremo esplicitamente più avanti) è nota come proprietà di traslazione (o ritardo) in frequenza. Tornando alla modulazione con coseno, se

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t),$$

allora y(t) viene detto segnale modulato, mentre x(t) è il segnale modulante e $\cos(2\pi f_0 t)$ è l'oscillazione utilizzata. Lo spettro del segnale modulato y(t) è una versione duplicata e traslata dello spettro del segnale di partenza (il segnale modulante) attorno alle frequenze $-f_0$ e f_0 .

Esempio 3.4. Calcolare la trasformata del segnale

$$y(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t).$$

Possiamo applicare il teorema della modulazione a x(t) = rect(t/T), ricavando:

$$Y(f) = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$
$$= \frac{T}{2}\operatorname{sinc}(T(f - f_0)) + \frac{T}{2}\operatorname{sinc}(T(f + f_0)).$$

Teorema 3.6 (della modulazione con seno). Vale la trasformata:

$$y(t) = x(t)\sin(2\pi f_0 t)$$
 $\stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow}$ $Y(f) = \frac{X(f - f_0) - X(f + f_0)}{2j}.$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga al caso precedente (ed è per questo motivo omessa).

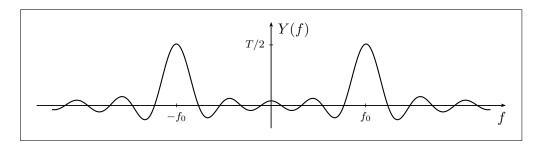


Figura 3.3: Trasformata continua di Fourier del segnale dell'esempio 3.4.

Teorema 3.7 (della modulazione con fase generica). Si dimostra che

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad Y(f) = \frac{e^{j\varphi}}{2}X(f - f_0) + \frac{e^{-j\varphi}}{2}X(f + f_0).$$

Dimostrazione. Come nei casi precedenti, la dimostrazione procede utilizzando le formule di Eulero:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}}{2} \right] e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j[2\pi (f_0 - f)t + \varphi]} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j[2\pi (f_0 + f) + \varphi]} dt$$

$$= \frac{e^{j\varphi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi (f - f_0)t} dt + \frac{e^{-j\varphi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi (f + f_0)} dt$$

$$= \frac{e^{j\varphi}}{2} X(f - f_0) + \frac{e^{-j\varphi}}{2} X(f + f_0).$$

TEOREMA 3.8 (della modulazione con esponenziale complesso). Si dimostra che:

$$y(t) = x(t) e^{j2\pi f_0 t} \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad Y(f) = X(f - f_0).$$

Dimostrazione. Si applica la definizione di trasformata:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi (f - f_0)t} dt = X(f - f_0).$$

Il teorema della modulazione con esponenziale complesso può essere letto come il teorema del ritardo in frequenza

$$X(f-f_0) \iff x(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

in analogia con il teorema del ritardo (temporale) già visto

$$x(t-t_0) \iff X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$
.

3.3.6 Teoremi di integrazione e derivazione

Nell'elaborazione di segnali a tempo continuo si effettuano spesso operazioni di derivazione temporale dei segnali stessi.

TEOREMA 3.9 (della derivazione). Se x(t) è derivabile, l'operazione di derivazione nel dominio del tempo corrisponde nel dominio della frequenza a un prodotto:

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \quad \stackrel{\mathrm{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad Y(f) = \mathrm{j}2\pi f X(f).$$

Dimostrazione. Si calcola:

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \,\mathrm{d}f$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \right] \,\mathrm{d}f$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (X(f) \,\mathrm{j}2\pi f) \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \,\mathrm{d}f$$

ossia $Y(f) = j2\pi f X(f)$ è la trasformata continua di Fourier del segnale y(t).

L'operazione di derivata temporale di un segnale si traduce, nel dominio della frequenza, in una semplice operazione algebrica, e cioè in un'alterazione di tutte le componenti frequenziali secondo un fattore j $2\pi f$ proporzionale al valore della frequenza stessa. Oltre a uno sfasamento di $\pm \pi/2$ (a seconda del segno di f), l'operazione di derivata comporta in particolare una esaltazione delle componenti alle alte frequenze, mentre si annulla la componente in continua (la derivata di una costante è zero).

Il duale del teorema della derivazione è il teorema dell'integrazione.

Teorema 3.10 (dell'integrazione). Si dimostra che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) d\alpha \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad Y(f) = \frac{X(f)}{i2\pi f}$$

purché sia

$$X(0) = 0.$$

Dimostrazione. Se y(t) è l'integrale della x(t), allora x(t) è la derivata della y(t) e perciò, per il teorema della derivazione, si ha

$$X(f) = j2\pi f Y(f). \tag{3.13}$$

Di conseguenza:

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}. (3.14)$$

Dal punto di vista puramente algebrico quest'ultima relazione è però equivalente alla (3.13) solo per $f \neq 0$. Quando f = 0, affinché la (3.13) possa essere verificata, si deve avere X(0) = 0, altrimenti l'uguaglianza è impossibile e la Y(f) tenderebbe a infinito (non sarebbe definita in f = 0). Affinché invece

$$\lim_{f \to 0} Y(f) = \frac{X(f)}{\mathrm{i}2\pi f} < \infty$$

deve essere

$$X(f)|_{f=0} = 0.$$

L'uguaglianza X(0) = 0 equivale ad affermare che il segnale x(t) sottende area nulla, infatti:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, \mathrm{d}t.$$

Alternativamente, questa condizione può essere espressa dicendo che la funzione y(t) deve tendere a zero per $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha = X(0). \tag{3.15}$$

Si noti che se la funzione y(t) tendesse a un valore non nullo, la sua energia non sarebbe finita e in generale potrebbe non esistere la sua trasformata di Fourier.

Dualmente al teorema di derivazione, il teorema dell'integrazione mostra come integrando un segnale siano esaltate le componenti a bassa frequenza del suo spettro e attenuate quelle ad alta frequenza.

Dei due teoremi seguenti si omettono le dimostrazioni, analoghe a quelle dei teoremi 3.9 e 3.10.

Teorema 3.11 (della derivazione in frequenza). Vale la trasformazione:

$$Y(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} X(f) \quad \stackrel{\mathrm{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad y(t) = -\mathrm{j} 2\pi t \, x(t).$$

Teorema 3.12 (dell'integrazione in frequenza). Vale la trasformazione:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{f} X(\alpha) d\alpha \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad y(t) = \frac{x(t)}{-j2\pi t}.$$

3.3.7 Prodotto di convoluzione

Dati due segnali x(t) e y(t), il prodotto di convoluzione

$$z(t) = x(t) \otimes y(t)$$

è definito mediante il seguente integrale (integrale di convoluzione):

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau.$$

Il prodotto di convoluzione ha un'importanza cardinale nella teoria dei sistemi lineari stazionari (vedi il capitolo 4 a partire da pag. 57) e sta alla base della teoria del filtraggio lineare.

Consideriamo di avere le funzioni $x(\tau)$ e $y(\tau)$ fatte come rappresentato nella figura 3.4 in alto. Il grafico della $y(-\tau)$ si ottiene dal grafico della $y(\tau)$ ribaltandolo rispetto all'asse delle ordinate. La $y(-\tau+t)$ avrà il grafico della $y(-\tau)$ traslato di un certo valore specificato da t (dato che stiamo considerando la y nel dominio della variabile τ , t è un semplice parametro).

Calcolare l'integrale di convoluzione all'istante \bar{t} , ossia calcolare $z(\bar{t})$, tra i due segnali significa pertanto eseguire l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ del risultato del prodotto

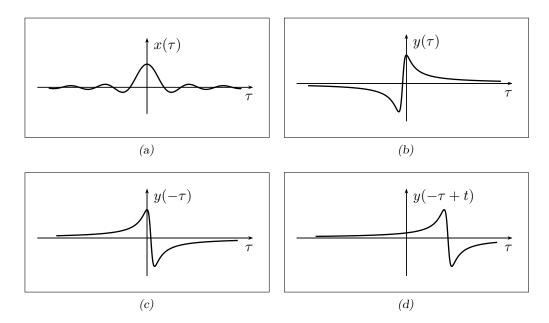


Figura 3.4: Per calcolare il prodotto di convoluzione tra le due funzioni x(t) e y(t), si applicano alla y(t) le trasformazioni grafiche rappresentate nelle due figure in basso.

tra il primo segnale (x) e il secondo segnale (y) ribaltato $(\operatorname{di} - \tau)$ e traslato di $+\bar{t}$. Per determinare l'andamento della z(t) su tutto l'asse dei tempi, basta eseguire questa procedura per ogni t. In realtà, in molti casi si semplifica di molto se si fanno considerazioni sui grafici.

Teorema 3.13 (di convoluzione). La TCF di un segnale z(t) ottenuto come convoluzione tra due segnali

$$z(t) = x(t) \otimes y(t)$$

è il prodotto delle singole trasformate:

$$Z(f) = X(f)Y(f).$$

Dimostrazione. Si considera la:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

e si sostituisce alla z(t) la sua espressione come integrale di convoluzione tra x(t) e y(t), ricavando:

$$\begin{split} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \, y(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau \, \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j} 2\pi f t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j} 2\pi f t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \, Y(f) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j} 2\pi f \tau} \, \mathrm{d}\tau \\ &= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j} 2\pi f \tau} \, \mathrm{d}\tau = Y(f) \, X(f). \end{split}$$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE. Il prodotto di convoluzione gode delle proprietà commutativa, distributiva e associativa.

• Commutativa: $x(t) \otimes y(t) = y(t) \otimes x(t)$ Infatti:

$$y(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\alpha) x(t - \alpha) d\alpha$$

ed effettuando il cambio di variabile $t - \alpha = \beta$:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\beta) x(\beta) d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta) y(t-\beta) d\beta$$
$$= x(t) \otimes y(t).$$

• Distributiva: $x(t) \otimes [y(t) + z(t)] = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t)$ Basta rifarsi alla proprietà di linearità dell'integrale:

$$x(t) \otimes [y(t) + z(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \left[y(t - \alpha) + z(t - \alpha) \right] d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) y(t - \alpha) d\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) z(t - \alpha) d\alpha$$
$$= x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t).$$

• Associativa: $x(t) \otimes [y(t) \otimes z(t)] = [x(t) \otimes y(t)] \otimes z(t)$ Per dimostrarlo si sfrutta la TCF della convoluzione:

$$TCF [x(t) \otimes [y(t) \otimes z(t)]] = X(f) [Y(f) Z(f)] = [X(f) Y(f)] Z(f)$$

e si antitrasforma la relazione ottenuta.

TEOREMA 3.14 (del prodotto). La TCF di un prodotto

$$z(t) = x(t) y(t)$$

è uguale al prodotto di convoluzione tra le singole trasformate:

$$Z(f) = X(f) \otimes Y(f).$$

Dimostrazione. Infatti:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) e^{j2\pi \alpha t} d\alpha \right] y(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi (f-\alpha)t} dt \right] d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) Y(f-\alpha) d\alpha$$

$$= X(f) \otimes Y(f).$$

Il teorema del prodotto è il duale del teorema della convoluzione. Se esistono trasformata e antitrasformata, conviene passare da un dominio all'altro in modo da ottenere un semplice prodotto anziché un integrale di convoluzione.

3.4 Trasformate di Fourier Generalizzate

3.4.1 Funzione impulsiva generalizzata o "delta" di Dirac

Consideriamo la funzione gradino unitario, introdotta già a pagina 9:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Se calcoliamo la derivata prima della funzione rispetto al tempo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \neq 0 \\ \nexists & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

troviamo che, a causa della discontinuità di prima specie, la funzione non è derivabile per t=0. Si potrebbe pensare di ovviare a questo problema operando come per una qualsiasi discontinuità eliminabile, ossia ridefinendo la derivata e associando un valore nullo nel punto di non derivabilità. Si otterrebbe in tal caso:

Di questo paragrafo il Martorella si è limitato a dire che la $\delta(t)$ è definita come la derivata della funzione gradino, che soddisfa le due relazioni

$$\delta(t) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{\varepsilon}(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha$$

e che non è una vera e propria funzione.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{u}(t) = 0 \quad \text{per ogni } t.$$

Ma questo approccio non è corretto poiché l'applicazione dell'integrale alla funzione "derivata" appena ridefinita non restituisce il segnale di partenza (il gradino), ma una funzione che è nulla ovunque.

Per cercare una soluzione alla questione osserviamo innanzitutto che la funzione gradino è un'astrazione matematica, in quanto i segnali fisici non possono presentare discontinuità. Una migliore approssimazione di una funzione gradino reale è la $u_{\varepsilon}(t)$:

$$\mathbf{u}_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0 & t < -\varepsilon \\ (1 + \frac{t}{\varepsilon})/2 & -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 1 & t > \varepsilon. \end{cases}$$

Il segnale $u_{\varepsilon}(t)$ è adesso ovunque derivabile, e la sua derivata

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{u}_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right)$$

è un rettangolo di base 2ε e altezza $1/(2\varepsilon)$ (e perciò di area unitaria).

Ora si può ottenere il segnale originario $\mathbf{u}(t)$ integrando il segnale $\delta(t)$:

$$\mathbf{u}_{\varepsilon}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_{\varepsilon}(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha.$$

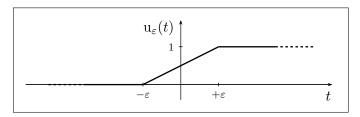


Figura 3.5: La funzione gradino può essere approssimata con una "rampa" con tempo di salita sufficientemente piccolo.

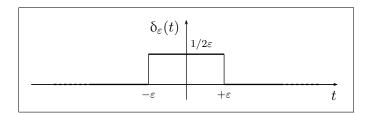


Figura 3.6: Derivata della funzione "rampa" rappresentata nella figura 3.5.

Riducendo il parametro ε si riduce il tempo di salita del segnale, ottenendo cioè un'approssimazione sempre più precisa del gradino ideale. Si può scrivere:

$$\mathbf{u}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{u}_{\varepsilon}(t)$$

da cui segue

$$\mathbf{u}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{t} \delta_{\varepsilon}(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha. \tag{3.16}$$

Considerando il comportamento del segnale δ_{ε} notiamo che per $\varepsilon \to 0$ la sua durata tende a valori sempre più piccoli mentre la sua ampiezza tende a valori sempre più grandi. L'aumento di tale valore avviene in maniera inversamente proporzionale a ε poiché l'area (o, meglio, l'integrale) del rettangolo deve sempre essere unitaria (unitaria in quanto abbiamo considerato all'inizio un gradino unitario e l'integrale deve essere uguale al valore del "salto" della funzione gradino).

Ora, se definissimo la $\delta(t)$ come

$$\delta(t) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{\varepsilon}(t) \tag{3.17}$$

e pensassimo al contempo che sia la derivata della funzione gradino, andremmo incontro a una inconsistenza. Infatti, la $\delta(t)$ definita in eq. (3.17) è una funzione che vale 0 dovunque tranne che in t=0. Ma affinché sia la derivata del gradino, il suo integrale dovrebbe essere non nullo (ma unitario, nello specifico). Una funzione che possiede entrambe queste caratteristiche non esiste (una qualsiasi funzione matematica nulla dovunque tranne che in un punto ha integrale nullo).

In realtà il limite della successione di funzioni $\delta_{\varepsilon}(t)$ non è una funzione nel senso ordinario dell'analisi matematica. Non è corretto quindi affermare che $\delta(t)$ è il limite della successione $\delta_{\varepsilon}(t)$.

Tuttavia, per estensione, si definisce la funzione generalizzata impulso unitario o "delta" di Dirac come:

$$\mathbf{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha \tag{3.18}$$

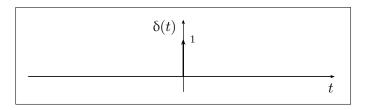


Figura 3.7: Grafico dell'"impulso di Dirac" $\delta(t)$. Si noti che il numero 1 non rappresenta un valore sull'asse delle ordinate, bensì l'area sottesa dall'impulso.

che la identifica come la derivata della funzione gradino, fondendo in un certo senso le equazioni (3.16) e (3.17). In ogni caso, si ribadisce che la delta di Dirac assume un significato solo quando se ne consideri una qualche proprietà di carattere integrale, come d'altronde nella definizione stessa (3.18).

Ogniqualvolta si incontra una funzione impulsiva $\delta(t)$, questa può essere intesa sì come limite della successione $\delta_{\varepsilon}(t)$, come nella (3.17), ma non direttamente: l'operazione di limite deve essere eseguita fuori dal segno di integrale stesso, come nella (3.16). Per esempio, in presenza di un caso pratico come l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, \delta(t) \, \mathrm{d}t$$

si dovrebbe procedere scrivendolo come:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, \delta_{\varepsilon}(t) \, \mathrm{d}t.$$

3.4.2 Proprietà della "delta" di Dirac generalizzata

Analizziamo ora alcune proprietà della delta di Dirac. Dimostriamo innanzitutto che Il passaggio col l'integrale della $\delta(t)$ è unitario:

limite all'intern

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right) dt$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right) dt}_{2\varepsilon} = 1.$$

Il passaggio col limite all'interno dell'integrale lo ha fatto il prof, ma in teoria, per quanto detto nei capoversi precedenti, non ha senso...

Una delle proprietà fondamentali della delta di Dirac è la proprietà campionatrice: tale è la sua importanza che si potrebbe definire la $\delta(t)$ proprio sfruttando questa sua proprietà.

PROPRIETÀ 3.4 (campionatrice). Dato un segnale x(t) continuo in t=0 si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, \delta(t) \, \mathrm{d}t = x(0).$$

Dimostrazione. Si può scrivere:

...e lo stesso discorso vale anche qui.

$$\begin{split} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, \delta(t) \, \mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \, \mathrm{rect} \left(\frac{t}{2\varepsilon} \right) \mathrm{d}t \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, \mathrm{rect} \left(\frac{t}{2\varepsilon} \right) \mathrm{d}t \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x(t) \, \mathrm{d}t \end{split}$$

e per il teorema della media integrale (applicabile in quanto la funzione è continua in t=0) esiste un \bar{t} appartenente all'intervallo $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ tale che:

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon x(\bar{t}).$$

Dato che $-\varepsilon < \bar{t} < \varepsilon$ e $\varepsilon \to 0$, ne risulta che anche $\bar{t} \to 0$ e quindi:

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} x(\bar{t}) = x(0).$$

Tutte le successive proprietà derivano dalla proprietà campionatrice. Come già precisato, esse valgono a patto di considerare la $\delta(t)$ all'interno di un integrale.

Proprietà 3.5 (di parità). La delta di Dirac è una funzione pari:

$$\delta(t) = \delta(-t).$$

Dimostrazione. Basta effettuare il cambio di variabile t'=-t, ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \,\delta(-t) \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t') \,\delta(t') \,\mathrm{d}t' = x(0). \quad \Box$$

La proprietà campionatrice può essere estesa considerando la funzione impulsiva traslata $\delta(t-t_0)$.

Proprietà 3.6 (campionatrice traslata). Vale la seguente relazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \,\delta(t-t_0) \,\mathrm{d}t = x(t_0).$$

Dimostrazione. Si effettua il cambio di variabile $t' = t - t_0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \,\delta(t-t) \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t'+t_0) \,\delta(t') \,\mathrm{d}t' = x(t_0). \quad \Box$$

Dalla 3.6 deriva la proprietà seguente. È da intendersi nel senso che, dopo un'operazione di integrazione, i termini ad ambo i membri danno lo stesso risultato.

Proprietà 3.7. Vale la relazione:

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0).$$

Dimostrazione.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) \,\delta(t - t_0) \,\mathrm{d}t = x(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \,\mathrm{d}t = x(t_0)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \,\delta(t - t_0) \,\mathrm{d}t.$$

Proprietà 3.8 (elemento neutro). La delta di Dirac è l'elemento neutro dell'integrale di convoluzione:

$$x(t) \otimes \delta(t) = x(t).$$

Dimostrazione. Si sfrutta la proprietà campionatrice:

$$x(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \, \delta(t - \alpha) \, d\alpha = x(t).$$

Proprietà 3.9.

$$x(t) \otimes \delta(t - t_0) = x(t - t_0).$$

Dimostrazione. Per la proprietà campionatrice:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \,\delta((t-t_0) - \alpha) \,\mathrm{d}\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \,\delta(\alpha - (t-t_0)) \,\mathrm{d}\alpha = x(t-t_0). \quad \Box$$

Proprietà 3.10. Dato un $a \neq 0$, si ha:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \, \delta(t) \quad ossia \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, \delta(at) \, \mathrm{d}t = \frac{x(0)}{|a|}.$$

Dimostrazione. Se a > 0 allora, ponendo $at = \alpha$, scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \,\delta(at) \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{\alpha}{a}\right) \delta(\alpha) \frac{\mathrm{d}\alpha}{a} = \frac{x(0)}{a}.$$

Se invece a < 0, ponendo sempre $at = \alpha$, bisogna tener conto dell'inversione di segno degli estremi di integrazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, \delta(at) \, \mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{\alpha}{a}\right) \delta(\alpha) \frac{\mathrm{d}\alpha}{a} = -\frac{x(0)}{a}.$$

In entrambi i casi, per $a \neq 0$, vale la seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \,\delta(at) \,\mathrm{d}t = \frac{x(0)}{|a|}.$$

3.4.3 Trasformata di Fourier della delta di Dirac generalizzata

TEOREMA 3.15. Si dimostra che:

$$\delta(t) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad 1.$$

Dimostrazione. Si sfrutta la proprietà campionatrice:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=0} = 1.$$

La peculiarità della funzione $\delta(t)$ è riflessa anche nella peculiarità della sua Tre capoversi estratti trasformata: in pratica, lo spettro della funzione $\delta(t)$ contiene componenti a qualunque da [2] a pag. 128. frequenza arbitrariamente grande, e tutte con la medesima ampiezza.

La trasformata $\Delta(f)$ del segnale generalizzato $\delta(t)$ può anche essere ricavata con un procedimento al limite a partire dalla trasformata $\Delta_{\varepsilon}(f) = \text{sinc}(2\varepsilon f)$ della funzione ordinaria $\delta_{\varepsilon}(t)$: lo spettro "piatto" della $\delta(t)$ deve intendersi come limite di una sinc con periodo crescente tendente a infinito $(\varepsilon \to 0)$, che dunque si avvicina a una funzione costante pari al valore che la sinc stessa assume per f = 0.

Questo risultato mostra che l'introduzione delle funzioni generalizzate permette di calcolare la trasformata di Fourier di un segnale a energia infinita come il segnale costante. Evidentemente, questa trasformata deve intendersi in senso generalizzato visto che contiene una funzione generalizzata.

3.4.4 Trasformata della funzione 1/t

Una trasformata notevole che è imparentata con le trasformate generalizzate, è quella del segnale x(t) = 1/t.

Teorema 3.16. Si dimostra che è valida la seguente trasformata:

$$x(t) = \frac{1}{t} \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad X(f) = -j\pi \operatorname{sgn}(f).$$

Dimostrazione. Procediamo con il calcolo applicando la definizione della trasformata:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} [\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{t} \cos(2\pi ft)}_{C(t)} dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} \sin(2\pi ft) dt$$

dove abbiamo definito la funzione C(t) per svolgere alcune considerazioni su di essa. Si tratta di una funzione dispari, che viene integrata tra $-\infty$ e $+\infty$: intuitivamente si capisce come quest'integrale sia nullo. A rigore bisogna però tener presente a discontinuità in t=0. La funzione $\cos(2\pi ft)/t$ è infatti infinita nell'origine, e non ammette integrale generalizzato ordinario. Dell'integrale generalizzato nella trasformata bisogna considerare il cosiddetto valore principale di Cauchy (VPC), ossia quel valore che si ottiene considerando sempre intervalli di integrazione simmetrici attorno al punto di singolarità (eventualmente all'infinito), cioè, nel nostro caso:

$$\operatorname{VPC}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} C(t) \, \mathrm{d}t\right] = \lim_{T \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-T} C(t) \, \mathrm{d}t + \int_{T}^{+\infty} C(t) \, \mathrm{d}t\right] = 0$$

che è nullo proprio per la antisimmetria della funzione integranda. Tornando alla trasformata, si ricava:

$$X(f) = -\mathrm{j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{t} \,\mathrm{d}t = -\mathrm{j} 2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(2ft) \,\mathrm{d}t.$$

Ricordando che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \, \mathrm{d}t = Y(0)$$

e che

$$\operatorname{sinc}(2Bt) \quad \stackrel{\operatorname{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2B}\operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(2Bt) \, \mathrm{d}t = \left. \frac{1}{2B} \operatorname{rect} \left(\frac{f}{2B} \right) \right|_{f=0} = \frac{1}{2B}.$$

In realtà bisogna tenere in conto anche il caso B < 0, che non deve alterare l'espressione della trasformata perché la funzione $\operatorname{sinc}(\cdot)$ è pari. Se B < 0 si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(2Bt) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(-2|B|t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(2|B|t) dt = \frac{1}{2|B|}$$

che vale anche per B>0. In conclusione si ricava la trasformata notevole cercata:

$$X(f) = -\frac{\mathrm{j}2\pi f}{2|f|} = -\mathrm{j}\pi\,\mathrm{sgn}(f)$$

che deve intendersi ancora in senso generalizzato per l'aver considerato i valori principali di Cauchy degli integrali coinvolti nella trasformazione.

3.4.5 Trasformata della funzione gradino

Consideriamo di nuovo il segnale gradino unitario ideale $\mathbf{u}(t)$; è immediato verificare. che la sua trasformata di Fourier in senso ordinario non esiste. Alla luce dei risultati ottenuti con le funzioni generalizzate, si dimostra che è possiamo calcolare questa trasformata per altra via.

Teorema 3.17.

$$\mathbf{u}(t) \quad \stackrel{\mathrm{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad U(f) = \frac{1}{2} \, \delta(f) + \frac{1}{\mathrm{j} 2\pi f}$$

Dimostrazione. Si può esprimere il gradino tramite la funzione "segno":

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + sgn(t)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t).$$

Ricordando che

$$\frac{1}{t} \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad -\mathrm{j}\pi \,\mathrm{sgn}(f)$$

per il teorema della dualità:

$$-j\pi \operatorname{sgn}(t) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad -\frac{1}{f}.$$

In definitiva, poiché:

$$\frac{1}{2} \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2} \, \delta(f) \quad \text{e} \quad \operatorname{sgn}(t) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{\mathrm{j} \pi f},$$

si ottiene la tesi:

$$U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{i2\pi f}.$$

3.4.6 Teorema dell'integrazione completo

Utilizzando i risultati ottenuti è ora possibile rimuovere l'ipotesi X(0) = 0 che è alla base dell'applicabilità del teorema di integrazione nella sua forma "incompleta" ricavata nel paragrafo 3.3.6 (a pag. 35).

TEOREMA 3.18 (dell'integrazione completo).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) d\alpha \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad Y(f) = \frac{X(0)}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{i2\pi f}$$

Dimostrazione. Applicando la definizione di integrale di convoluzione si può scrivere:

$$y(t) = x(t) \otimes \mathbf{u}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \, \mathbf{u}(t - \alpha) \, d\alpha = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) \, d\alpha.$$

Andando a trasformare (e applicando la proprietà (3.7) a pag. 42) si ottiene:

$$Y(f) = X(f) U(f) = X(f) \left[\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{\mathrm{i}2\pi f} \right] = \frac{X(0)}{2} \delta(f) + \frac{X(f)}{\mathrm{i}2\pi f}.$$

Il termine aggiuntivo comprende una funzione generalizzata, e naturalmente scompare nell'ipotesi di applicabilità del teorema incompleto, cioè quando X(0) = 0. Se invece il segnale x(t) non sottende area nulla, la funzione integrale y(t) non tende a zero quando $t \to \infty$, bensì verso il valore finito X(0). Il secondo termine rende conto allora della "componente continua" (cioè del valore medio diverso da zero) pari a X(0)/2 che è presente per questo in y(t).

3.4.7 Trasformata della $\delta(t-t_0)$

Come visto nei paragrafi precedenti, la funzione generalizzata $\delta(t)$ permette di calcolare trasformate di Fourier non esistenti in senso ordinario. Altri risultati utili di questo tipo si possono ottenere applicando i teoremi del ritardo e della traslazione in frequenza alle trasformate generalizzate già ottenute. Vediamoli.

Il teorema del ritardo applicato alla $\delta(t)$ afferma che

$$\delta(t - t_0) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad e^{-j2\pi f t_0} \tag{3.19}$$

e la dimostrazione utilizza semplicemente la proprietà campionatrice:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t_0}.$$

D'altro canto, per dualità (e considerando che la $\delta(t)$ è una funzione pari):

$$e^{-j2\pi f_0 t} \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \delta(f - f_0).$$
 (3.20)

Anche i teoremi stessi del ritardo e della modulazione possono esser rivisti alla luce delle trasformate generalizzate. Infatti, se

$$x(t-t_0) = x(t) \otimes \delta(t-t_0)$$

allora trasformando ambo i membri si ottiene:

$$TCF[x(t - t_0)] = X(f) e^{-j2\pi f t_0}.$$

Analogamente, risulta:

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad X(f - f_0).$$

3.4.8 Trasformate generalizzate di sinusoidi e cosinusoidi

La relazione generalizzata (3.20) consente di calcolare trasformate continue di Fourier per segnali periodici in generale e per oscillazioni sinusoidali e cosinusoidali in particolare.

Trasformata di un coseno. Si consideri un'oscillazione cosinusoidale nella forma:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t).$$

La relativa trasformata continua di Fourier vale:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f - f_0)t} dt + \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f + f_0)t} dt$$

$$= \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0).$$

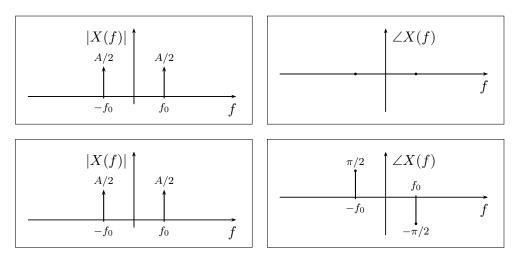


Figura 3.8: Spettro di un coseno (in alto) e di un seno (in basso).

Graficamente, questa trasformata viene rappresentata con due impulsi di area A/2 centrati in f_0 e $-f_0$, con fase costantemente nulla.

Trasformata di un seno. Presa un'oscillazione sinusoidale

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$$

la sua trasformata è:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f - f_0)t} dt - \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f + f_0)t} dt$$

$$= \frac{A}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{A}{2j} \delta(f + f_0)$$

$$= \frac{A}{2} \left[e^{-j\pi/2} \delta(f - f_0) + e^{j\pi/2} \delta(f + f_0) \right].$$

3.4.9 Biunivocità della trasformata continua di Fourier

Se X(f) è la trasformata continua di Fourier di un segnale x(t) ottenuta tramite l'equazione di analisi

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

il segnale x(t) è ottenibile in maniera univoca applicando l'equazione di sintesi:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Infatti, si ha:

$$TCF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

e scrivendo la X(f) come trasformata di x(t), otteniamo:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha \right] e^{j2\pi f t} df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f (\alpha - t)} df d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \delta(\alpha - t) d\alpha = x(t).$$

3.5 PERIODICIZZAZIONE DI SEGNALI APERIODICI E FORMULE DI POISSON

Riconsideriamo la periodicizzazione di un segnale aperiodico trattata nel paragrafo 2.4 (a pag. 23). Sia y(t) il segnale ottenuto per periodicizzazione con periodo T_0 del segnale x(t) secondo la formula (2.9). Il segnale y(t) può essere sviluppato in serie di Fourier, come un qualsiasi segnale periodico.

TEOREMA 3.19. Tra i coefficienti Y_n dello sviluppo in serie del segnale periodico y(t) e la trasformata X(f) del segnale base aperiodico x(t) vale la relazione:

$$Y_n = \frac{1}{T_0} X \left(\frac{n}{T_0}\right). \tag{3.21}$$

Dimostrazione. Si scrive Y_n mediante la relazione di analisi della TSF:

$$Y_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$
$$= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t - kT_0) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

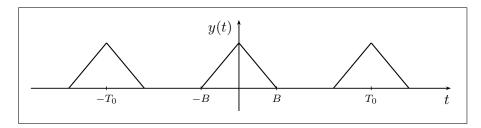
effettuando il cambiamento di variabile $\alpha = t - kT_0$:

$$=\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}-kT_0}^{+\frac{T_0}{2}-kT_0}x(\alpha)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nf_0\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nf_0kT_0}}_{1}.$$

La funzione integranda a secondo membro non dipende dall'indice della serie k: tale indice agisce infatti solo sugli estremi di integrazione. Ci si rende allora conto facilmente che, al variare di k tra $-\infty$ e $+\infty$ gli intervalli di integrazione $(-T_0/2-kT_0,T_0/2-kT_0)$ della stessa funzione integranda ricoprono tutto l'asse reale senza sovrapposizioni. Quindi:

$$Y_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi n f_0 \alpha} d\alpha = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right).$$

I coefficienti della serie di Fourier del segnale periodico y(t) sono dunque, a meno del fattore $1/T_0$, i valori della trasformata continua del segnale base x(t) in corrispondenza delle frequenze armoniche $n/T_0 = nf_0$, ossia un campionamento della X(f) pesato con un fattore $1/T_0$. Per questo motivo la relazione trovata viene detta di campionamento in frequenza.



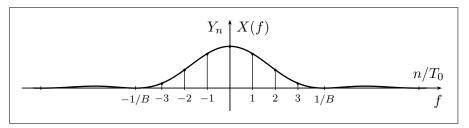


Figura 3.9: Relazione in frequenza tra un segnale aperiodico e il segnale ottenuto per periodicizzazione con determinato periodo di ripetizione.

3.5.1 Formule di Poisson

Dimostriamo ora le cosiddette formule di Poisson. La prima coinvolge il tempo, mentre nella seconda compare la frequenza: si tratta in effetti di due formule duali.

Teorema 3.20 (prima formula di Poisson).

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi kt/T_0}$$

Dimostrazione. Si usa la relazione (3.21) sostituendola nell'espressione della trasformata serie del segnale periodicizzato:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi kt/T_0}$$
$$= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi kt/T_0}.$$

Teorema 3.21 (seconda formula di Poisson). Applicando il teorema della dualità alla prima formula di Poisson di ottiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_0) e^{-j2\pi f kT_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_0}\right).$$
 (3.22)

Dimostrazione.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} x \left(-\frac{k}{T_0} \right) e^{j2\pi kt/T_0}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} x \left(\frac{k}{T_0} \right) e^{-j2\pi kt/T_0}$$

da cui, cambiando segno all'indice della sommatoria e ponendo $T = 1/T_0$:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(t - \frac{n}{T}\right) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) e^{-j2\pi ktT}.$$

Si giunge poi alla tesi cambiando, dal punto di vista puramente formale, il nome alla variabile corrente da t a f.

Considerando che x(t) sia una delta di Dirac, si scrivono la prima formula di Poisson applicata alla delta:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kt/T_0}$$
 (3.23)

e la seconda formula di Poisson applicata alla delta:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f k T_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right).$$
 (3.24)

Il segnale periodicizzato

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

è detto treno di delta di Dirac. Si dimostra il seguente.

TEOREMA 3.22. La TCF di un treno di delta di Dirac è:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right).$$

Dimostrazione. Si applicano in sequenza la proprietà campionatrice e la seconda formula di Poisson:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f kT_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right).$$

Si poteva anche semplicemente notare che la relazione (3.24) si può ottenere esattamente come trasformata membro a membro della (3.23).

TEOREMA 3.23. Se y(t) è ottenuto per periodicizzazione dal segnale x(t), allora:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad Y(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right).$$

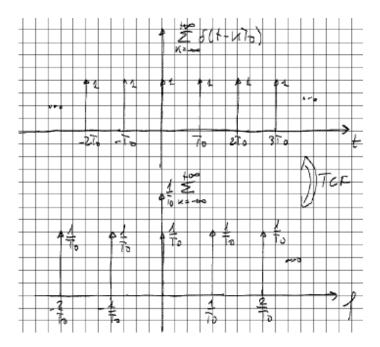


Figura 3.10: Rappresentazione grafica di un treno di delta di Dirac e della sua trasformata.

Dimostrazione.

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0) e^{-j2\pi f t} dt$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha \right] e^{-j2\pi f kT_0}$$
$$= X(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f kT_0}$$

avendo posto $\alpha = t - kT_0$. Applicando ora la (3.24), ottiamo:

$$Y(f) = X(f) \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f)|_{f=k/T_0} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

si ottiene cioè in frequenza un treno di delta di Dirac pesate con dei fattori Y_k . \square

3.5.2 Teorema di Parseval per segnali periodici

Teorema 3.24 (di Parseval per segnali periodici con TSF).

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) y^*(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^*$$

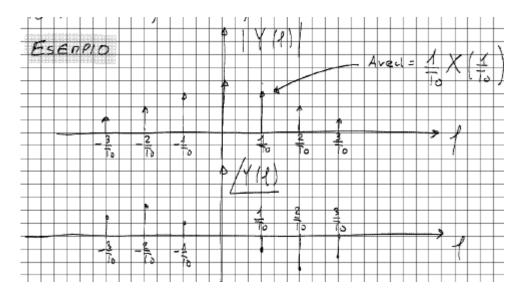


Figura 3.11

Dimostrazione.

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) \, y^*(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t} \, y^*(t) \, \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cdot \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} y^*(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k f_0 t} \, \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \left[\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} y(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k f_0 t} \, \mathrm{d}t \right]^* = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* \qquad \square$$

Se indichiamo $x_0(t)$ e $y_0(t)$ i segnali aperiodici dai quali, per periodicizzazione, si ottengono x(t) e y(t):

$$x_0(t) = x(t) \operatorname{rect}(t/T_0)$$

$$y_0(t) = y(t) \operatorname{rect}(t/T_0)$$

possiamo riscrivere il teorema di Parseval per segnali periodici utilizzando la TCF.

TEOREMA 3.25 (di Parseval per segnali periodici con TCF).

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_0 \left(\frac{k}{T_0}\right) Y_0^* \left(\frac{k}{T_0}\right)$$

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene applicando la relazione (3.21) alla formulazione del teorema di Parseval con TSF. \Box

Utilizzando queste due formulazioni del teorema di Parseval, si può scrivere la potenza media P_x di un segnale periodico come:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| X_0 \left(\frac{k}{T_0} \right) \right|^2.$$
 (3.25)

Definiamo, per il segnale periodico x(t), la densità spettrale di potenza:

$$S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0^2} \left| X_0 \left(\frac{k}{T_0} \right) \right|^2 \delta \left(f - \frac{k}{T_0} \right).$$

TEOREMA 3.26. La potenza media di un segnale periodico eguaglia l'area sottesa dalla densità spettrale di potenza:

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \, \mathrm{d}f.$$

Dimostrazione.

$$P_{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_{0}^{2}} \left| X_{0} \left(\frac{k}{T_{0}} \right) \right|^{2} \delta \left(f - \frac{k}{T_{0}} \right) df$$

$$= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_{0}^{2}} \left| X_{0} \left(\frac{k}{T_{0}} \right) \right|^{2}}_{P_{x}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{k}{T_{0}} \right) df}_{1} = P_{x}.$$

3.6 Analisi energetica dei segnali aperiodici

La densità spettrale di energia di un segnale aperiodico x(t) è definita come il modulo quadro della sua trasformata:

$$S_x(f) = \left| X(f) \right|^2.$$

Si verifica facilmente, perciò, che l'energia media di un segnale periodico può essere calcolata come l'integrale della densità spettrale di energia. La densità spettrale di potenza per segnali aperiodici viene definita come:

$$S_x(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

dove $X_T(f)$ è la trasformata continua del segnale

$$x_T(t) = x(t) \operatorname{rect}(t/T).$$

La potenza media è quindi l'area sottesa dalla densità spettrale di potenza.

CORRELAZIONE E AUTOCORRELAZIONE Dati x(t) e y(t) due segnali aperiodici, si definiscono la funzione di correlazione tra i due

$$C_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt$$
 (3.26)

e la funzione di autocorrelazione per ciascuno di essi:

$$C_x(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, x^*(t-\tau) \, \mathrm{d}t. \tag{3.27}$$

(si noti che la variabile di integrazione è t mentre la variabile che caratterizza la funzione di (auto)correlazione è τ). Fisicamente τ è un ritardo: per segnali reali,

la funzione di autocorrelazione è l'integrale del prodotto del segnale con se stesso ritardato di un certo τ .

Questi due capoversi

La funzione di autocorrelazione fornisce informazioni utili sulla rapidità di vasono estratti dal riazione del segnale x(t). Dati due differenti segnali reali x(t) e y(t) aventi stessa libro [2, pag. 191] (il energia ma due diverse "velocità di variazione", il segnale più "veloce", supponiamo professore non ne ha x(t), presenta un valore della funzione di autocorrelazione minore di quello relativo parlato), all'altro segnale, y(t), a parità di ritardo τ . Il nome di "autocorrelazione" suggerisce considerando segnali infatti che questa funzione è un indice di "somiglianza" del segnale con se stesso, o reali. meglio, con una sua replica ritardata.

> Se inoltre supponiamo che il segnale x(t) sia a durata rigorosamente limitata, si riesce a visualizzare immediatamente che quando la variabile au assume valori crescenti si riduce l'ampiezza dell'intervallo in cui sia x(t) che $x(t-\tau)$ assumono valori non nulli e, di conseguenza, tende a diminuire il valore di $R_x(\tau)$. Ancora, come è facilmente intuibile, il segnale x(t) è massimamente correlato con se stesso per $\tau = 0$, e pertanto $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$. Infine, si ha $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.

> Proprietà 3.11 (correlazione e convoluzione). La funzione di correlazione tra due segnali può essere scritta come la convoluzione tra il primo segnale e il complesso coniugato del secondo con l'asse delle ascisse invertito:

$$C_{xy}(\tau) = x(\tau) \otimes y^*(-\tau). \tag{3.28}$$

Dimostrazione. Infatti, dalla definizione di prodotto di convoluzione:

$$x(\tau) \otimes y^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, y^*(-(\tau - t)) \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, y^*(t - \tau) \, \mathrm{d}t = C_{xy}(\tau). \quad \Box$$

Proprietà 3.12 (autocorrelazione e convoluzione). La funzione di autocorrelazione di un segnale può essere scritta come la convoluzione del segnale stesso e il suo complesso coniugato con l'asse delle ascisse invertito:

$$C_r(\tau) = x(\tau) \otimes x^*(-\tau). \tag{3.29}$$

Proprietà 3.13. La funzione di autocorrelazione gode della proprietà di simmetria Hermitiana:

$$C_x(\tau) = C_x^*(-\tau).$$

Dimostrazione.

$$C_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t - (-\tau)) dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t + \tau) dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t' - \tau) x^*(t') dt' = C_x^*(\tau)$$

dove è stata effettuata la sostituzione $t' = t + \tau$.

Lemma 3.27. Sia dato un segnale aperiodico x(t). Allora:

$$x^*(-t) \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} X^*(f).$$
 (3.30)

Dimostrazione. Per la dimostrazione, basta applicare la definizione di trasformata:

$$\begin{aligned} \text{TCF}[x^*(-t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(-t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t') \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t'} \, \mathrm{d}t' \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t'} \, \mathrm{d}t' \right]^* = X^*(f). \end{aligned}$$

Proposizione 3.28. La trasformata continua della funzione di autocorrelazione è la densità spettrale di energia:

$$C_x(\tau) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad |X(f)|^2 = S_x(f).$$

Dimostrazione. La dimostrazione può esser fatta molto semplicemente trasformando secondo Fourier la formula (3.29) tenendo conto della relazione (3.30). Volendo procedere tramite integrali di convoluzione:

$$TCF[C_{x}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{x}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^{*}(t-\tau) dt \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{*}(t-\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{*}(\alpha) e^{-j2\pi f(t-\alpha)} d\alpha dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^{*}(\alpha) e^{j2\pi f \alpha} d\alpha$$

$$= X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha \right]^{*} = X(f)X^{*}(f) = |X(f)|^{2}$$

dove si è fatto il cambio di variabile $\alpha = t - \tau$.

È immediato notare che la funzione di autocorrelazione calcolata in $\tau=0$ fornisce l'energia del segnale:

$$C_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x.$$

Si dimostra infine il seguente teorema, di fondamentale importanza.

Teorema 3.29 (di Parseval).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df$$

Dimostrazione.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \cdot y^*(t) dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t) e^{j2\pi f t} dt df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df \qquad \Box$$

Esempio 3.5. Calcolare l'energia del segnale:

$$x(t) = A\operatorname{sinc}(Bt).$$

In generale, si può calcolare l'energia di un segnale in due modi: a partire dall'espressione del segnale stesso o a partire dalla sua trasformata. Nel primo caso, avremmo:

 $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2(Bt) dt$

che, però non è di facile risoluzione. È conveniente invece procedere considerando la trasformata continua

 $X(f) = \frac{A}{B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$

ottenendo:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{A^2}{B^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right) df = \frac{A^2}{B}.$$

SISTEMI LINEARI STAZIONARI A TEMPO CONTINUO

4.1 Sistemi

Un sistema monodimensionale è rappresentabile con un blocco che applica una trasformazione sul segnale in ingresso x(t) per dare in uscita un segnale y(t).



Questa trasformazione la indichiamo con:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)].$$

Quello che faremo è caratterizzare questo tipo di sistemi e definire delle proprietà che ci torneranno utili per dire qualcosa sull'uscita del sistema noto l'ingresso.

In generale, il valore del segnale di uscita y all'istante \bar{t} non dipende solo dall'ingresso x all'istante \bar{t} ma da x(t) per $-\infty < t < \infty$. Per poter calcolare y(t) è necessario conoscere x(t) su tutto l'asse del tempo, in istanti passati, presenti, futuri.

LINEARITÀ. Un sistema è lineare se è valida la sovrapposizione degli effetti. Affinché ciò sia verificato, a fronte di un ingresso x(t) combinazione lineare di due segnali:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) (4.1)$$

deve essere presentato in uscita il segnale:

$$y(t) = a \mathcal{T}[x_1(t)] + b \mathcal{T}[x_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t). \tag{4.2}$$

STAZIONARIETÀ. Un sistema si dice stazionario se la sua trasformazione non cambia nel tempo (è tempo-invariante) e applicando lo stesso ingresso a istanti diversi si ottiene esattamente la stessa uscita.

Supponiamo di avere un segnale x(t) con un'uscita $y(\bar{t})$ quando l'ingresso è $x(\bar{t})$:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$$

allora il sistema è stazionario se:

$$y(t - t_0) = \mathcal{T}[x(t - t_0)]. \tag{4.3}$$

Se in ingresso si dà il segnale x(t) traslato nel tempo di t_0 allora in uscita si avrà semplicemente il segnale y(t) traslato nel tempo di t_0 .

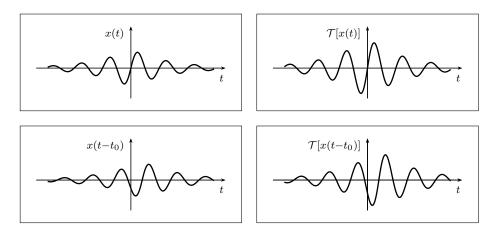


Figura 4.1: Esemplificazione di un sistema stazionario.

4.2 Sistemi lineari stazionari (SLS)

I Sistemi Lineari Stazionari (SLS) hanno la caratteristica di poter essere rappresentati completamente da una funzione h(t). Il termine "completamente" significa che se si conosce h(t) (è una funzione del tempo) allora è possibile calcolare l'uscita y(t) per un qualsiasi ingresso x(t).

Per definizione:

$$h(t) \triangleq \mathcal{T}\left[\delta(t)\right]. \tag{4.4}$$

La funzione h(t) coincide con l'uscita del sistema quando in ingresso c'è una delta di Dirac, e infatti viene detta $risposta\ impulsiva$.

$$\delta(t) \longrightarrow \mathcal{T}[\cdot] \longrightarrow h(t)$$

Teorema 4.1 (uscita di un SLS). Per un sistema lineare e stazionario si può scrivere:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$
.

Dimostrazione. Infatti, utilizzando la proprietà di neutralità della $\delta(t)$ nell'integrale di convoluzione, si scrive:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = \mathcal{T}[x(t) \otimes \delta(t)]$$
$$= \mathcal{T}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \, \delta(t - \alpha) \, d\alpha\right]$$

e siccome la trasformazione $\mathcal{T}[\cdot]$ e l'integrale sono entrambi operatori lineari, è possibile scambiarne l'ordine:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T} \left[x(\alpha) \, \delta(t - \alpha) \right] d\alpha.$$

Poiché la trasformazione $\mathcal{T}[\,\cdot\,]$ opera rispetto al tempo, $x(\alpha)$ è, per essa, una costante. Si ha così:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \mathcal{T} \left[\delta(t - \alpha) \right] d\alpha$$

da cui, sfruttando l'ipotesi di stazionarietà per cui $h(t - \alpha) = \mathcal{T}[\delta(t - \alpha)]$, si giunge infine alla tesi:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h(t - \alpha) d\alpha = x(t) \otimes h(t).$$

4.2.1 Proprietà dei SLS

Causalità. Questa proprietà è riferibile a tutti i sistemi, non solo ai SLS. In generale, un sistema si dice causale quando l'uscita all'istante \bar{t} dipende dal segnale in ingresso ma solo a istanti temporali precedenti o al più uguali a \bar{t} . L'uscita, in altri, termini deve soddisfare il principio di causa-effetto, e non può pertanto dipendere dall'ingresso a istanti futuri. Tutti i sistemi fisici in natura sono sistemi causali, e un sistema che non sia causale non è neanche fisicamente realizzabile.

Per formalizzare questo concetto, quando un SLS è anche causale, si scrive:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(\alpha), \alpha \le t]. \tag{4.5}$$

Per sistemi lineari stazionari, completamente rappresentati dalla loro risposta impulsiva, si può controllare se siano o meno causali semplicemente guardando h(t). In particolare, un SLS è causale se e solo se è causale sua h(t), dove per h(t) "causale" si intende nel senso di "identicamente nulla per t < 0":

$$h(t) = 0 \quad \text{per } t < 0 \tag{4.6a}$$

o anche:

$$h(t) = h(t) \mathbf{u}(t). \tag{4.6b}$$

L'impulso viene infatti applicato all'istante t=0 e la risposta non può partire prima che l'impulso sia applicato.

Proviamo a vedere cosa significa questa condizione per un qualunque segnale in ingresso. Per quanto detto prima, l'uscita può essere scritta come:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h(t - \alpha) d\alpha$$

e applicando la condizione di eq. (4.6b), risulta:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h(t-\alpha) u(t-\alpha) d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)h(t-\alpha) d\alpha.$$

L'integrale (e quindi l'uscita) non è influenzato dai valori dell'ingresso posteriori a t. Si dimostra così che se la risposta impulsiva di un SLS è causale, allora è causale il SLS stesso. Non facciamo la dimostrazione dell'implicazione inversa, che pure potrebbe essere ottenuta ragionando per assurdo in modo analogo.

Consideriamo invece cosa accade graficamente. Supponiamo di voler calcolare $y(\bar{t})$. La h(t) vale certamente 0 per t<0. Il prodotto $x(\alpha)h(\bar{t}-\alpha)$ pertanto è nullo per $\alpha>\bar{t}$, per cui $y(\bar{t})$, essendo l'integrale del prodotto, non può dipendere da valori dell'ingresso x(t) posteriori a \bar{t} .

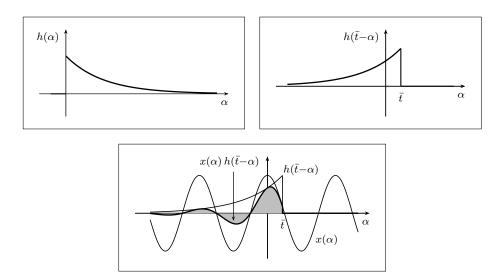


Figura 4.2: Considerazioni grafiche per il calcolo dell'uscita di un sistema lineare stazionario: se h() è nulla per t < 0 allora il sistema è causale.

Un sistema che produce il segnale di uscita contestualmente al segnale di ingresso è detto sistema in tempo reale. Se invece l'uscita viene fornita dal sistema solo dopo l'acquisizione completa del segnale d'ingresso, allora si parla di sistema in tempo virtuale. In quest'ultimo caso, si dice anche che il sistema è predittivo.

STABILITÀ. Esistono diverse forme di stabilità, noi consideriamo in particolare quella cosiddetta *Bounded Input Bounded Output* (BIBO). Questo criterio afferma che a fronte di un segnale in ingresso finito (ad ampiezza limitata), ossia tale che:

$$|x(t)| \le M \quad \forall t$$

si avrà un'uscita anch'essa ad ampiezza limitata:

$$|y(t)| \leq K \quad \forall t.$$

Per sistemi lineari stazionari si può affermare se godano o meno della stabilità BIBO guardando la risposta impulsiva.

TEOREMA 4.2. Un sistema lineare stazionario è stabile secondo il criterio BIBO se e solo se la risposta impulsiva è assolutamente integrabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = H < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad |y(t)| \le K \quad \forall t.$$

Quest'anno il Martorella ha fatto solo la dimostrazione della parte sufficiente.

Quest'anno il Dimostrazione. Consideriamo la condizione sufficiente, ossia se h(t) è assolutamente Martorella ha fatto integrabile allora per il sistema vale la stabilità BIBO. Si calcola:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h(t-\alpha) d\alpha \right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\alpha)| |h(t-\alpha)| d\alpha$$

ma poiché $|x(t)| \leq M$ per ogni t

$$\leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\alpha)| d\alpha = M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\alpha')| d\alpha' = MH$$

di conseguenza, l'uscita è limitata:

$$|y(t)| \le K$$
, con $K = MH$.

Per dimostrare la condizione necessaria (se sistema è stabile BIBO allora la h(t) è assolutamente integrabile), si consideri per assurdo che la risposta impulsiva non sia assolutamente integrabile nonostante il sistema sia stabile. Poiché il sistema è stabile (per ipotesi), dando in ingresso al sistema un segnale limitato arbitrario, il segnale di uscita corrispondente deve avere ampiezza limitata, e questo deve accadere in particolare per il segnale di ingresso (ovviamente limitato) x(t) = sgn(h(-t)) (il cosiddetto segnale del caso peggiore). L'uscita all'istante t = 0 vale:

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) x(t - \alpha) d\alpha \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) x(-\alpha) d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \operatorname{sgn}(h(\alpha)) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\alpha)| d\alpha = +\infty$$

che è un assurdo: avendo supposto per ipotesi che la risposta impulsiva del sistema non sia assolutamente integrabile, poiché il segnale di uscita non ha ampiezza limitata, il sistema in realtà non è stabile, in contraddizione con l'ipotesi fatta. \Box

MEMORIA. Nei sistemi senza memoria (detti anche istantanei), l'uscita $y(\bar{t})$ dipende solo dall'ingresso calcolato all'istante \bar{t} :

$$y(t) = \mathcal{T}[x(\alpha), \alpha = t].$$

I sistemi istantanei sono un caso particolare dei sistemi causali. Due segnali diversi ma coincidenti a un certo istante provocano, in quell'istante, esattamente la stessa uscita, indipendentemente dal loro andamento in tutti gli altri istanti.

I sistemi con memoria sono tutti i sistemi che non soddisfano questa condizione. Non coincidono con i sistemi causali perché potrebbe aversi un'uscita che dipende anche dall'ingresso a istanti futuri (sistema con memoria ma non causale).

INVERTIBILITÀ. Se $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$, allora il sistema si dice invertibile se esiste una trasformazione $\mathcal{T}^{-1}[\cdot]$ tale che:

$$x(t) = \mathcal{T}^{-1} \left[y(t) \right].$$

Ovviamente non tutti i sistemi sono invertibili, ad esempio perché esistono due ingressi che danno la stessa uscita (ma non è questa l'unica condizione).

4.3 La risposta in frequenza

D'ora in poi prenderemo in considerazione solamente i sistemi lineari stazionari.

$$x(t) \longrightarrow h(t) \longrightarrow y(t)$$

La risposta impulsiva di un sistema potrebbe essere ricavata applicando in ingresso al sistema stesso un segnale che approssimi la funzione $\delta(t)$ e misurando l'uscita

corrispondente. Il segnale $\delta(t)$ è un'astrazione matematica che può solo essere approssimata quando si effettua una misurazione nella pratica. Se però si ha un'idea dei tempi di risposta del sistema, una buona approssimazione della sollecitazione impulsiva è un impulso rettangolare di durata sufficientemente più piccola della costante di tempo intrinseca al sistema e di ampiezza sufficientemente elevata. Ciò che si ottiene in questo modo è la caratterizzazione del sistema nel tempo.

Spesso però non è possibile applicare al sistema una sollecitazione impulsiva, per l'impossibilità di generare un segnale che sia una buona approssimazione di un impulso di Dirac, ma anche perché una sollecitazione di ampiezza elevata come l'impulso (o meglio, la sua approssimazione pratica) può danneggiare il sistema stesso. Cambiamo dunque tipo di eccitazione, e forniamo al sistema un segnale di ingresso sinusoidale o, meglio, per semplicità di calcolo, un segnale nella forma:

$$x(t) = e^{j2\pi ft}$$

ossia un'oscillazione sinusoidale complessa alla frequenza f (che per ora consideriamo un parametro). L'uscita corrispondente sarà:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f\alpha} h(t - \alpha) d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t - \beta)} h(\beta) d\beta$$

$$= e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) e^{-j2\pi f \beta} d\beta$$

$$= x(t) H(f)$$
(4.8)

dove abbiamo posto $t - \alpha = \beta$ e definito:

$$H(f) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} \quad h(t).$$

La risposta a un'oscillazione di frequenza f assegnata è a sua volta un'oscillazione alla stessa frequenza f, ma modificata in ampiezza e fase rispetto all'ingresso di un fattore a valori complessi dipendente dalla frequenza: H(f). Chiamiamo la funzione H(f) risposta in frequenza (o risposta armonica). Poiché c'è una corrispondenza biunivoca tra risposta impulsiva e risposta in frequenza, allora anche la risposta in frequenza di un sistema lo caratterizza completamente.

Si può, in realtà, definire la risposta in frequenza H(f) in tre modi.

Prima definizione:	$H(f) \triangleq \frac{y(t)}{x(t)}\Big _{x(t) = e^{j2\pi ft}}$
Seconda definizione:	$H(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$
Terza definizione:	$H(f) \triangleq \frac{Y(f)}{X(f)}$

La prima definizione deriva dall'equazione (4.8) e consente di misurare la risposta in frequenza attraverso segnali di prova (oscillazioni a frequenza variabile). La risposta in frequenza di un sistema lineare stazionario è, cioè, data dal rapporto y(t)/x(t) quando in ingresso c'è un segnale del tipo $x(t) = e^{j2\pi ft}$.

Anche la seconda definizione deriva dalla (4.8), ed è utilizzabile quando si conosca l'andamento temporale della risposta impulsiva.

Per la terza definizione si parte invece dalla $y(t) = x(t) \otimes h(t)$ e se ne considera la trasformata continua, ottenendo:

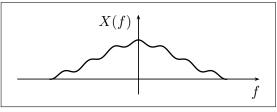
$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad \Rightarrow \quad H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}.$$

Tale relazione non può essere applicata a frequenze per cui si annulla lo spettro del segnale in ingresso, poiché a tali frequenze si annulla anche lo spettro dell'uscita e la risposta in frequenza risulta indeterminata. Pertanto, se la si vuole usare per determinare la H(f) è necessario usare segnali in ingresso con estensione in frequenza infinita e che non si annullino mai. Se si considera $x(t) = \delta(t)$ (il cui spettro non si annulla mai: è sempre unitario), la risposta in frequenza è data proprio dallo spettro del segnale in uscita.

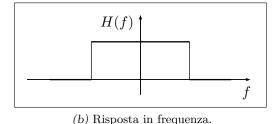
I vantaggi nel definire tale funzione della frequenza (la risposta in frequenza) sono nel poter capire "al volo" come è fatta l'uscita, anche se in termini spettrali (ad esempio capire come è fatta la banda e per quali intervalli frequenziali esiste). Noto lo spettro del segnale di ingresso e nota la risposta in frequenza del sistema, l'uscita non è altro che il loro prodotto.

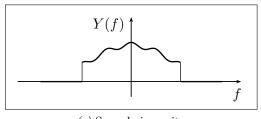
ESEMPIO 4.1. Prendiamo in considerazione un segnale come quello rappresentato nella figura 4.3a. Supponiamo di volerlo trasmettere attraverso un canale trasmissivo con una certa banda (ossia che fa passare solo una certa parte del segnale). Il canale potrebbe essere un sistema lineare stazionario: lineare perché vale il principio di sovrapposizione degli effetti (in un sistema elettrico vale sicuramente), stazionario se il canale rimane invariato (quantomeno in un certo intervallo di tempo). Se quindi il canale è lineare e stazionario allora è rappresentabile come un SLS (figura 4.3b).

Per sapere come è fatto il segnale in uscita, si potrebbe considerare la risposta impulsiva del canale e fare la convoluzione con il segnale. Oppure si considera lo spettro del segnale e notando come è fatto il canale si potrà scrivere direttamente un'uscita del tipo raffigurato nella 4.3c.



(a) Segnale di ingresso.





(c) Segnale in uscita.

Figura 4.3: Esempio 4.1.

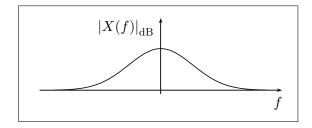
RISPOSTA IN AMPIEZZA E RISPOSTA IN FASE. La risposta in frequenza di un filtro, essendo la TCF di una funzione temporale, sarà in generale una funzione complessa e si può pertanto distinguere tra risposta in ampiezza (che è il modulo della H(f)) e risposta in fase (la fase di H(f)):

$$H(f) = \begin{cases} A(f) = |H(f)| \\ \Phi(f) = \angle H(f). \end{cases}$$

Le denominazioni "risposta in ampiezza" e "risposta in fase" rivelano che effettivamente, noto lo spettro del segnale di ingresso, si può separare il calcolo del modulo e della fase dello spettro del segnale in uscita:

$$Y(f) = \begin{cases} |Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)| \\ \angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f). \end{cases}$$

DECIBEL. Spesso la risposta in ampiezza di segnali fisici (esempio tipico sono quelli acustici) può variare di molti ordini di grandezza. Si preferisce perciò rappresentarla su scala logaritmica, in decibel (dB):



La misura in decibel dello spettro viene calcolata come:

$$|X(f)|_{(dB)} = 10 \log_{10} |X(f)|.$$
 (4.9)

4.4 RISPOSTA AL GRADINO

Se in ingresso a un sistema lineare stazionario si dà un gradino $\mathbf{u}(t)$ in uscita si ha una risposta, detta per l'appunto "risposta al gradino", che viene indicata con g(t):

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\alpha) h(t - \alpha) d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) \mathbf{u}(t - \beta) d\beta = \int_{-\infty}^{t} h(\beta) d\beta.$$

E pertanto:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\beta) d\beta$$
 $h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$

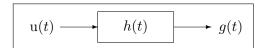


Figura 4.4: La risposta al gradino q(t) di un sistema lineare stazionario.

Per capire l'importanza di questi risultati, consideriamo un caso pratico: torniamo al problema di misurare la risposta impulsiva di un sistema. Se ad esempio si tratta di un sistema elettrico allora bisognerebbe generare tra i due morsetti di ingresso un delta di Dirac e collegare i due morsetti di uscita a un oscilloscopio, e misurare così la risposta impulsiva.

In realtà, come già detto, non è possibile realizzare una funzione, come la delta di Dirac, che va all'infinito, ma se anche si riuscisse a farla, sicuramente si brucerebbe tutto il circuito. Quello che si fa in pratica è mettere in ingresso un gradino o qualcosa che sale molto rapidamente (da 0 a 1 o da 0 a una certa costante) e misurare quindi la risposta al gradino. Operare in tal modo è molto più fattibile dal punto di vista sperimentale.

4.5 Collegamenti tra sistemi

4.5.1 SISTEMI IN CASCATA

Due sistemi si dicono in cascata quando l'uscita del primo è ingresso del secondo. Un collegamento di questo tipo è rappresentato nella figura 4.5. Si calcola:

$$z(t) = y(t) \otimes h_2(t) = [x(t) \otimes h_1(t)] \otimes h_2(t)$$

= $x(t) \otimes [h_1(t) \otimes h_2(t)] = x(t) \otimes h(t)$

dove

$$h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t).$$

Nel dominio della frequenza:

$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f).$$

Due sistemi in cascata sono equivalenti a un unico sistema con risposta impulsiva data dalla convoluzione delle due risposte impulsive e (quindi) con risposta in frequenza pari al prodotto delle risposte in frequenza dei due sottosistemi.

4.5.2 Sistemi in parallelo

Due sistemi sono in parallelo se vengono alimentati dallo stesso ingresso e le uscite dei due vengono poi sommate. L'uscita del sistema equivalente vale:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t)$$

= $x(t) \otimes [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) \otimes h(t)$

dove

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

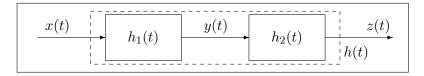


Figura 4.5: Due sistemi lineari stazionari in cascata.

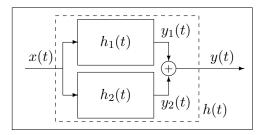


Figura 4.6: Due sistemi lineari stazionari in parallelo.

e similmente

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f).$$

Due sistemi lineari stazionari in parallelo sono equivalenti a un unico sistema con risposta impulsiva data dalla somma delle due risposte impulsive e (quindi) con risposta in frequenza pari alla somma delle risposte in frequenza dei due sottosistemi.

4.6 Proprietà dei filtri lineari**

INTEGRAZIONE.

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) \, d\alpha$$

$$(t) \qquad b(t) \qquad y(t)$$

$$w(t) = x(t) \otimes u(t) = u(t) \otimes x(t)$$

$$z(t) = w(t) \otimes h(t) = [u(t) \otimes x(t)] \otimes h(t)$$

$$= u(t) \otimes [x(t) \otimes h(t)] = u(t) \otimes y(t)$$

$$= y(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\alpha) d\alpha = z(t)$$

DERIVAZIONE. La proprietà di derivazione si può dedurre da quella di integrazione facendo un ragionamento inverso.

$$\begin{array}{c|c} w(t) \\ \hline x(t) \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} h(t) \\ \hline y(t) \end{array}$$

Se

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha$$

allora

$$x(t) = \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}.$$

4.7. FILTRI IDEALI 67

4.7 FILTRI IDEALI

La teoria sui sistemi lineari stazionari si applica direttamente al problema del filtraggio dei segnali. Filtrare un segnale x(t) significa trasformarlo in un altro segnale y(t) avente le stesse caratteristiche di x(t) (se ad esempio l'ingresso è monodimensionale e a tempo continuo, anche l'uscita lo sarà). Il sistema che effettua il filtraggio viene detto filtro. Ci soffermeremo in particolare sul filtraggio lineare (la trasformazione che viene fatta sul segnale è lineare), considerando sempre sistemi lineari stazionari. Un filtro quindi (per noi) non è altro che un sistema lineare stazionario, per il quale è definita una risposta impulsiva o, equivalentemente, una risposta in frequenza.

Consideriamo un segnale costituito dalla sovrapposizione di altri due segnali

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

dei quali il primo è un segnale *utile* (in quanto contiene informazioni), mentre il secondo è solo un *disturbo*. Operando nel dominio del tempo non è affatto semplice eliminare il disturbo separandolo dal segnale utile. Se però passiamo a considerare i loro spettri, può accadere che questi insistano su intervalli frequenziali disgiunti e che, di conseguenza, siano separabili con dei sistemi opportuni. Questi sistemi (che noi supponiamo lineari) sono per l'appunto i filtri, chiamati in questo modo proprio poiché presentano caratteristiche di *selettività* nei confronti delle varie componenti frequenziali che compongono il segnale.

Vediamo ora dei filtri che vengono tipicamente utilizzati nelle comunicazioni. Nello specifico, vedremo solo dei filtri ideali, per cui sono definite h(t) e H(f) in maniera ideale, senza considerare come possono essere effettivamente realizzati.

4.7.1 Passa basso

Un filtro passa basso ideale è caratterizzato da una risposta in frequenza

$$H_{\rm LP}(f) = {
m rect} \left(rac{f}{2B}
ight)$$

o equivalentemente da una risposta impulsiva

$$h_{LP}(t) = 2B\operatorname{sinc}(2Bt).$$

(Il pedice "LP" sta per *Low Pass.*) Graficamente viene rappresentato nella figura 4.7. Un filtro passa basso ideale lascia passare inalterate le componenti frequenziali all'interno di una certa banda (cioè intervallo di frequenze) vicino alla frequenza nulla (quindi basse frequenze). Questa zona infatti viene chiamata *banda passante*,

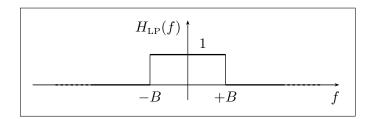


Figura 4.7: Risposta in frequenza di un filtro passa passo ideale.

in contrapposizione alla cosiddetta banda oscura, dove le componenti frequenziali vengono completamente eliminate. La frequenza B rappresenta il cosiddetto limite di banda. Per convenzione, B è anche la banda del filtro passa basso (pur essendo in effetti l'ampiezza della banda passante considerata solamente sul semiasse positivo delle frequenze).

4.7.2 Passa banda

La risposta in frequenza e la risposta impulsiva di un filtro passa banda sono rispettivamente:

$$H_{\mathrm{BP}}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f + f_0}{B}\right)$$
$$h_{\mathrm{BP}}(t) = B \operatorname{sinc}(Bt) e^{\mathrm{j}2\pi f_0 t} + B \operatorname{sinc}(Bt) e^{-\mathrm{j}2\pi f_0 t}$$
$$= 2B \operatorname{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_0 t).$$

(Il pedice "BP" sta per Band Pass.) Graficamente è rappresentato nella figura 4.8.

La frequenza f_0 è detta frequenza di centro banda. La banda B è definita come l'intervallo di frequenze positive dove lo spettro è non nullo. Da notare che nel filtro bassa basso l'intervallo in cui esiste la rect è 2B mentre la banda è B, e pertanto in banda base, ovvero intorno all'origine, un filtro passa basso è di banda B se la rect va tra B e B. Per un passa banda, la banda è invece tutto l'intervallo della rect.

Questi filtri sono quelli tipicamente usati per i segnali modulati emessi dalle stazioni di radiodiffusione. I vari segnali hanno infatti spettri non sovrapposti in ambito frequenziale e posti a cavallo delle cosiddette frequenze portanti su cui i radioricevitori vengono poi sintonizzati.

Per i filtri passa banda si definisce il fattore di qualità:

$$Q \triangleq \frac{f_0}{B}$$
.

Valori di Q molto alti sono propri di filtri più selettivi, tecnologicamente avanzati e più costosi. Filtri di alta qualità hanno bande relativamente strette rispetto alla frequenza cui sono centrati. Questo rispecchia le difficoltà tecnologiche nella realizzazione di questi filtri (che possono essere pensati come un passa-basso seguito da un passa alto): un filtro di banda B è più semplice realizzarlo a una frequenza f_0 piuttosto che a una frequenza (ad esempio) $10f_0$. Aumentando la frequenza f_0 diventa sempre più difficile fare filtri a banda stretta.

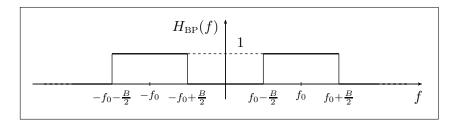


Figura 4.8: Risposta in frequenza di un filtro passa banda ideale.

4.7. FILTRI IDEALI 69

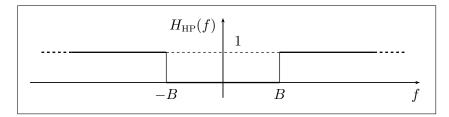


Figura 4.9: Risposta in frequenza di un filtro passa alto ideale.

4.7.3 Passa alto

Il filtro passa alto (indicato con il pedice "HP", *High Pass*) è caratterizzato dalle seguenti relazioni:

$$H_{\mathrm{HP}}(f) = 1 - \mathrm{rect}\Big(\frac{f}{2B}\Big)$$

$$h_{\mathrm{HP}}(t) = \delta(t) - 2B\operatorname{sinc}(2Bt)$$

La banda passante di un filtro passa alto è quella "al di là" dell'intervallo [-B, B] e la banda di un filtro passa alto, di conseguenza, è in realtà infinita. Comunque, si dice "di banda B" o "di frequenza di taglio B" per indicare il limite di banda (dove il filtro va a zero).

4.7.4 Considerazioni sull'utilizzo dei filtri

I tre filtri visti sono in effetti irrealizzabili. Consideriamo ad esempio un filtro passa basso: poiché la sua risposta impulsiva è $h_{\rm LP}(t) \neq 0$ per t < 0, il filtro è non causale. Ciò significa che non è fisicamente realizzabile, e lo stesso vale per i filtri passa banda e passa alto.

Essi permettono di fare semplici operazioni sui segnali. Ad esempio, è importante avere un filtro passa banda all'uscita di un sistema di trasmissione. Infatti, il segnale da noi generato (ad esempio con la voce o musica) ha uno spettro le cui frequenze dipenderanno dalle frequenze audio della modulazione della voce o della musica. Questo spettro non è noto a priori (dipende dalla persona che parla o dalla musica che si ascolta). Al momento della trasmissione viene allocato un canale di trasmissione che potrebbe essere una banda o un intervallo di frequenze (assegnato ad esempio a una emittente radio). Questo canale ha delle caratteristiche ben precise: sarà centrato a una certa frequenza f_0 e avrà una certa banda. In trasmissione bisogna evitare assolutamente di trasmettere segnali con spettri che andrebbero a invadere i canali adiacenti. Per evitare questo, appena prima di arrivare all'antenna, il segnale deve passare attraverso un filtro di questo tipo che ci assicura che il segnale non fuoriesca dalla banda allocata.

Ovviamente bisogna già all'inizio fare in modo che il segnale stia nella banda stessa, perché altrimenti quando lo si taglia si distrugge informazione (e modificare lo spettro del segnale significa modificare automaticamente anche il segnale stesso).

In ogni caso i filtri devono essere presenti, per non violare il sistema globale di telecomunicazione.

4.8 Durata e banda

Mentre per i filtri ideali visti nel paragrafo 4.7 si è potuto definire in maniera precisa la banda, per i filtri realizzabili in pratica la differenza tra banda passante e banda oscura non è così netta. Per essi, come vedremo, è necessario definire la banda in maniera convenzionale.

Inoltre, il concetto di banda è estendibile anche a segnali. Dato un generico segnale x(t), si definisce sullo stesso un parametro T detto durata del segnale e sul suo spettro X(f) un altro parametro duale B detto banda del segnale. La durata di un segnale x(t) è l'ampiezza dell'intervallo temporale all'intervallo positivo di frequenze all'interno del quale il suo spettro (di ampiezza) assume valori non nulli.

Analogamente alla banda dei filtri "reali" (nel senso di "fisicamente realizzabili"), definire in maniera pratica banda e durata per i segnali non è così ovvio. Bisognerà trovare delle definizioni precise cui attenersi per quantificare T e B. Diamo per ora due definizioni.

DEFINIZIONE 4.1 (segnale di durata rigorosamente limitata): Si dice che un segnale x(t) ha durata T rigorosamente limitata se x(t) ha valore arbitrario all'interno dell'intervallo [-T/2, +T/2] e identicamente nullo altrove, ossia:

$$x(t) = 0$$
 per $|t| > T/2$.

DEFINIZIONE 4.2 (segnale a banda rigorosamente limitata): Un segnale x(t) si dice a banda B rigorosamente limitata se ha spettro arbitrario all'interno dell'intervallo [-B, +B] e identicamente nullo altrove, ossia:

$$X(f) = 0$$
 per $|f| > B$.

4.8.1 Relazioni tra durata e banda

Seguono due proprietà che caratterizzano la relazione tra durata e banda di un segnale: in particolare, si può pensare che tra di esse sussista come una proporzionalità

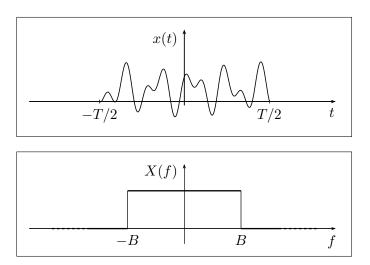


Figura 4.10: Un segnale a durata rigorosamente limitata (sopra), e un segnale a banda rigorosamente limitata (sotto).

inversa. Non è possibile, infatti, ridurre arbitrariamente la banda di un segnale senza aumentarne in proporzione la durata: il prodotto di queste due grandezze è *limitato inferiormente*.

TEOREMA 4.3. Se il segnale x(t) ha durata T rigorosamente limitata allora il suo spettro X(f) ha banda infinita.

Dimostrazione. Moltiplicando un segnale a durata rigorosamente limitata per una rect centrata nell'intervallo del segnale e con la stessa durata del segnale, ottengo il segnale stesso. Perciò:

$$X(f) = \text{TCF}[x(t)] = \text{TCF}\left[x(t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right]$$

= $X(f) \otimes T \operatorname{sinc}(Tf)$.

Facciamo l'ipotesi (per assurdo) che X(f) abbia banda rigorosamente limitata. Facendone la convoluzione con una sinc nel dominio della frequenza, si ottiene come risultato un segnale che ha una banda che è la somma di quelle dei segnali originari (può essere intuito in modo molto semplice facendo considerazioni geometriche sul prodotto di convoluzione). Siccome la sinc ha componenti frequenziali fino all'infinito e quindi banda infinita, si ottiene un segnale a banda infinita. Si arriva pertanto a dire che X(f) ha banda infinita, contraddicendo l'ipotesi iniziale.

I segnali generati a partire da una voce o da una canzone hanno una certa durata. Secondo quanto appena visto, questi segnali hanno banda infinita, e in realtà tutti i segnali che generiamo avrebbero banda infinita, utilizzando questa definizione. Il meccanismo usato nei sistemi di telecomunicazione di suddividere lo spettro in bande non potrebbe funzionare (a patto di modificare il segnale stesso, con un filtro). Dovremo definire quindi la banda in un modo più pratico per poter caratterizzare i vari segnali proprio in termini di banda. È intuitivo che un segnale audio e un segnale video hanno banda diversa (e quello video ha banda molto maggiore di quello audio), ma secondo questa definizione hanno entrambi ugualmente banda infinita.

TEOREMA 4.4. Se X(f) è lo spettro a banda rigorosamente limitata B di un segnale x(t), allora x(t) ha durata infinita.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella vista nella proprietà precedente:

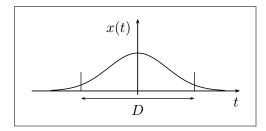
$$x(t) = \text{TCF}^{-1}[X(f)] = \text{TCF}^{-1}\left[X(f) \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\right]$$
$$= x(t) \otimes 2B \operatorname{sinc}(2Bt).$$

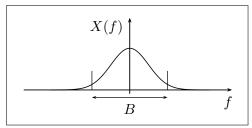
La convoluzione nel dominio del tempo tra due segnali restituisce un segnale di durata pari alla somma delle durate dei segnali originari. Dato che la sinc ha durata infinita anche x(t) deve avere durata infinita.

Anche questa definizione, per quanto semplice, non è poi pratica. Infatti, se si genera un segnale (a durata limitata) e lo si fa passare attraverso un filtro passa banda ideale, si ottiene un segnale che (secondo questa definizione) ha durata infinita.

4.8.2 Altre definizioni di durata e banda

Come già specificato, le definizioni di durata e banda date precedentemente non sono utili in pratica. È necessario definire una misura della durata e della banda in modo da ottenere valori finiti di entrambe. Così facendo, un segnale a banda limitata potrà avere durata limitata e sarà possibile fare confronti quantitativi tra queste grandezze di due segnali.





DURATA AL 99% DELL'ENERGIA. La durata al 99% dell'energia viene indicata con D_{99} ed è definita come l'ampiezza di quell'intervallo temporale tale che l'energia del segnale all'interno dello stesso è pari al 99% dell'energia totale:

$$\int_{-D_{99}/2}^{+D_{99}/2} |x(t)|^2 dt = 0.99E_x \tag{4.10}$$

Ciò equivale, in altri termini, a definire la D_{99} come la durata del segnale troncato la cui energia è pari al 99% dell'energia del segnale originario.

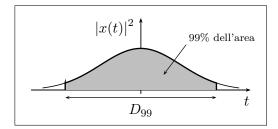
BANDA AL 99% DELL'ENERGIA. La definizione di banda al 99% dell'energia viene data sfruttando il teorema di Parseval. È quel valore B_{99} tale che:

$$\int_{-B_{99}}^{+B_{99}} |X(f)|^2 df = 0.99E_x \tag{4.11}$$

DURATA A $-3\,\mathrm{dB}$ E BANDA A $-3\,\mathrm{dB}$. Queste definizioni di durata e banda sono più utilizzate rispetto alle definizioni basate sull'energia viste precedentemente. Hanno senso però solo per determinate tipologie di segnali. Nello specifico, si considerano trascurabili i contributi inferiori alla metà del valore massimo, ovvero quelli di $3\,\mathrm{dB}$ al di sotto del massimo su scala logaritmica.

La durata a $-3\,\mathrm{dB}$ (spesso detta anche "durata a metà ampiezza") è definita come la differenza:

$$D_{-3\,\mathrm{dB}} = t_{\mathrm{max}} - t_{\mathrm{min}}$$



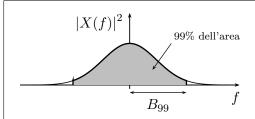
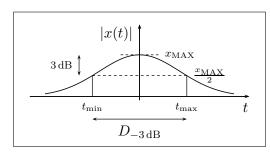


Figura 4.11: Durata e banda al 99% dell'energia.



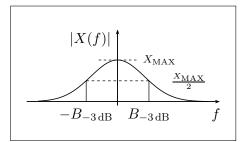


Figura 4.12: Durata e banda a -3 dB.

dove t_{\min} e t_{\max} (con $t_{\min} < t_{\max}$) sono gli istanti in cui il segnale assume in valore assoluto la metà del valore massimo |x(0)| e nell'intervallo $[t_{\min}, t_{\max}]$ si ha $|x(t)| \ge x_{\max}/2$.

Se consideriamo segnali reali, per i quali la risposta in ampiezza |X(f)| è una funzione pari (confronta proprietà 3.1 a pag. 28), la banda a $-3\,\mathrm{dB}$ è l'ampiezza dell'intervallo di frequenze positive entro il quale lo spettro $|X(f)|_{(\mathrm{dB})}$ non scende di oltre $3\,\mathrm{dB}$ rispetto al suo massimo (il valore di picco).

Considerando che

$$X(0) = X_{\text{MAX}}$$
 e $X(B_{-3 \text{ dB}}) = \frac{X(0)}{2} = \frac{X_{\text{MAX}}}{2}$

e ragionando in termini di decibel (applicando l'eq. (4.9) a pag. 64), si può scrivere:

$$\begin{split} \left| \frac{X_{\text{MAX}}}{2} \right|_{\text{(dB)}} &= 10 \log_{10} \left(\frac{X_{\text{MAX}}}{2} \right) \\ &= 10 \log_{10} (X_{\text{MAX}}) - 10 \log_{10} (2) \end{split}$$

e poiché $10 \log_{10}(2) = 3.0103 \,dB$, allora:

$$\simeq |X_{\text{MAX}}|_{\text{(dB)}} - 3 \, \text{dB}.$$

In definitiva:

$$|X(B_{-3\,\mathrm{dB}})|_{(\mathrm{dB})} \simeq |X(0)|_{(\mathrm{dB})} - 3\,\mathrm{dB}$$

ed ecco il motivo per cui la differenza tra X_{MAX} e $X_{\text{MAX}}/2$ è effettivamente 3 dB.

Come anticipato, queste definizioni non sono però applicabili a segnali qualsiasi. Il motivo è semplice. Per un segnale con lo spettro oscillante possono essere diversi i punti in cui si incontrano i 3 dB al di sotto del massimo, e pertanto sarebbe un po' problematico definire la banda in questo modo. Durata e banda a -3 dB hanno quindi senso solo se si hanno segnali o spettri che decrescono monotonicamente. Nella pratica, queste definizioni sono difficilmente applicabili agli usuali segnali nel tempo. Un segnale vocale, ad esempio, oscilla nel tempo molto velocemente (dipende dall'intensità della voce, che si alza e si abbassa...). Sono invece generalmente applicabili purché si ragioni in termini di banda (notare che gli spettri tipici che vengono generati dai segnali utilizzati di solito nelle telecomunicazioni sono spettri con il modulo simmetrico, perché ottenuti da segnali reali).

Si noti che non è essenziale che intensità del segnale o spettro decrescano monotonicamente allontanandosi dall'origine, bensì è essenziale che decrescano monotonicamente allontanandosi da una frequenza f_0 (per la banda) o da un istante t_0

(per la durata). Nell'esempio, per semplicità, abbiamo considerato $t_0=0$ e $f_0=0$, ossia segnali e spettri cosiddetti "passa basso". Per i segnali e spettri "passa banda", d'altronde, valgono discorsi simili, con la differenza che ad esempio lo spettro sarà centrato intorno a una certa frequenza f_0 e non più nell'origine. In tal caso, come per i filtri, il valore della banda è l'ampiezza di tutto l'intervallo (delle frequenze positive) e non la metà.

Banda di un SLS. Le definizioni date di banda valgono anche per i SLS dove si può definire la H(f). Ad esempio, per un filtro reale (per i quali il modulo della risposta in frequenza è una funzione pari), la banda a $-3\,\mathrm{dB}$ è l'ampiezza dell'intervallo di frequenze positive entro il quale la risposta in frequenza $|H(f)|_{\mathrm{(dB)}}$ non scende di oltre $3\,\mathrm{dB}$ rispetto al suo massimo.

4.9 Distorsioni lineari

Trasmettere un segnale analogico senza alterarne il contenuto informativo significa ottenere all'altro capo del sistema di comunicazione una *replica fedele* del segnale originario.

DEFINIZIONE 4.3 (replica fedele): Si dice che il segnale y(t) è una replica fedele del segnale x(t) se

$$y(t) = kx(t - t_0) (4.12)$$

o equivalentemente:

$$Y(f) = kX(f) e^{-j2\pi f t_0}$$
(4.13)

dove $k, t_0 \in \mathbb{R}$ e X(f) e Y(f) sono le traformate rispettivamente di x(t) e y(t).

Ciò significa che un segnale è una replica fedele di un altro se e solo se è ne una versione attenuata o amplificata (di un valore k) e ritardata o anticipata (di t_0). La forma del segnale deve invece rimanere la stessa.

Quando un trasmettitore invia un segnale, questo giungerà al ricevitore con un certo ritardo, dovuto alla distanza fisica tra i due, e indebolito, perché ovviamente non tutta la potenza trasmessa giunge al ricevitore (anzi se ciò accadesse il ricevitore si brucerebbe subito, in quanto la potenza trasmessa è molto più grande di quella che un ricevitore può sopportare).

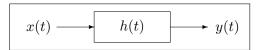
4.9.1 Filtro fedele

Analizziamo ora quali sono le condizioni per un SLS affinché l'uscita sia una replica fedele dell'ingresso. Queste condizioni saranno relative alla risposta impulsiva o alla risposta in frequenza.

Quando si parla di fedeltà dell'uscita, si parla anche *indifferentemente* di sistemi che non introducono distorsioni lineari. (Esistono distorsioni lineari e non lineari, ma facendo riferimento a sistemi lineari ci si riferisce sempre alle prime, in quanto un SLS non può introdurre distorsioni non lineari.)

¹Uno spettro si dice passa-basso se la sua ampiezza assume il valore massimo per $f_0 = 0$. Se lo spettro è passa-alto allora $f_0 = +\infty$, altrimenti lo spettro è di tipo passa-banda e f_0 è finita e diversa da zero.

Per un sistema lineare stazionario:



il segnale di uscita y(t) è una versione non distorta dell'ingresso x(t) se ne differisce solo per una costante moltiplicativa e un ritardo:

$$y(t) = k x(t - t_0). (4.14)$$

Nel caso più generale, affinché ciò si verifichi la risposta impulsiva h(t) deve essere nella forma:

$$h(t) = k \,\delta(t - t_0) \tag{4.15}$$

Infatti, facendone la convoluzione con l'ingresso x(t) si ottiene esattamente il segnale di eq. (4.14). Questa condizione si traduce nel dominio della frequenza nella:

$$H(f) = k e^{-j2\pi f t_0}$$
 (4.16)

come ci si poteva aspettare facendo il rapporto tra ingresso e uscita nella eq. (4.13). In termini di ampiezza di spettro e di fase risulta:

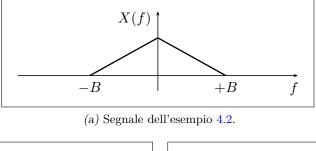
$$|H(f)| = |k|$$
 e $\angle H(f) = -2\pi f t_0 + \angle k$

(dove si tiene conto di modulo e fase di k in quanto in generale k può essere un reale sia positivo che negativo: $\angle k=0$ se $k\in\mathbb{R}^+$, e $\angle k=\pi$ se $k\in\mathbb{R}^-$). Per un filtro fedele, il modulo della risposta in frequenza deve essere costante su tutto l'asse delle frequenze (un filtro con una risposta in ampiezza di questo tipo passa tutto), mentre la risposta in fase deve essere lineare con la frequenza (in termini temporali corrisponde a un ritardo). Se non è rispettata la condizione sulla risposta in ampiezza, si dice che il segnale in ingresso subisce distorsione di ampiezza; se invece non è rispettata la condizione sulla risposta in fase, si dice che il segnale subisce distorsione di fase.

I sistemi lineari che soddisfano la condizione di eq. (4.15) o la (4.16) non introducono mai distorsioni lineari. Ciò non significa che i sistemi che non le soddisfano introducano sempre distorsioni lineari: è sufficiente che siano soddisfatte solo alle frequenze in cui è presente lo spettro del segnale in ingresso. Ad esempio, i filtri tipici già visti (passa alto, passa basso e passa banda) non sono, in generale, filtri fedeli, ma in generale non lo è nessun filtro fisico, non potendo garantire una risposta in ampiezza costante su tutto l'asse delle frequenze. In realtà, per sapere se un filtro introduce effettivamente distorsioni bisogna conoscere il segnale di ingresso, e nulla si può dire a priori.

Esempio 4.2. Consideriamo il segnale rappresentato nella figura 4.13a.

Un filtro come $H_1(f)$ non distorce il segnale 4.13a, in quanto l'ampiezza è costante nell'intervallo frequenziale all'interno del quale esiste il segnale di ingresso e la fase è lineare con la frequenza $(t_0 > 0)$. Il filtro $H_2(f)$ introduce invece distorsioni di ampiezza, in quanto la sua risposta in ampiezza non è costante su tutto l'intervallo in cui il segnale in ingresso possiede componenti frequenziali. Al contrario si comporta il filtro $H_3(f)$, che introduce invece distorsioni di fase, ma non distorsioni di ampiezza. L'ultimo filtro, $H_4(f)$, introduce distorsioni sia di ampiezza che di fase.



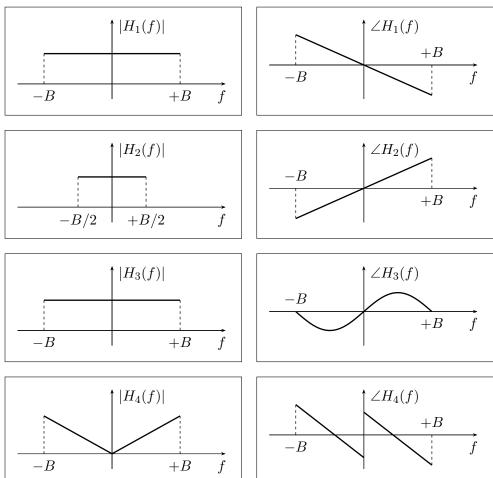


Figura 4.13: Esempio 4.2.

4.10 Filtraggio di segnali periodici

Come già dimostrato (vedi teorema 3.23 a pagina 50), la trasformata continua di un segnale periodico è costituita da una successione di impulsi di area pari ai coefficienti della serie di Fourier. Facendo riferimento alla seguente figura

$$x(t) \longrightarrow h(t) \longrightarrow y(t)$$

supponiamo che x(t) sia un segnale periodico. Allora l'uscita è:

$$Y(f) = X(f)H(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \,\delta\bigg(f - \frac{k}{T_0}\bigg)H(f).$$

Se H(f) è (per esempio) un filtro passa basso ideale, allora in uscita saranno riportati solamente alcuni degli impulsi presenti nell'ingresso.

Si può dimostrare che il segnale in uscita a un filtro lineare quando in ingresso è presente un segnale periodico è ancora un segnale periodico.

Uno spettro continuo X(f) costituito da sole delta di Dirac corrisponde nel tempo a una somma di oscillazioni esponenziali complesse. Se tutte queste oscillazioni hanno frequenze multiple di una frequenza fondamentale, allora il segnale risultante è periodico. Infatti, una somma di due segnali periodici è ancora un segnale periodico solamente se il rapporto f_1/f_2 tra le frequenze dei due segnali di partenza è un numero razionale. Poiché un filtro lineare può solamente modificare in ampiezza o tagliare impulsi in ingresso, ma non aggiungerne, se in ingresso si ha un segnale periodico allora certamente le delta sono posizionate in frequenze multiple di una frequenza fondamentale f_0 , quindi anche gli impulsi riportati in uscita lo sono. Di conseguenza il segnale in uscita è periodico.

Queste sono considerazioni mie

4.11 FILTRI E ANALISI ENERGETICA

Vogliamo, ora, trovare dei metodi che consentano di fare valutazioni energetiche sul segnale in uscita senza dover calcolare il segnale di uscita stesso (in funzione del

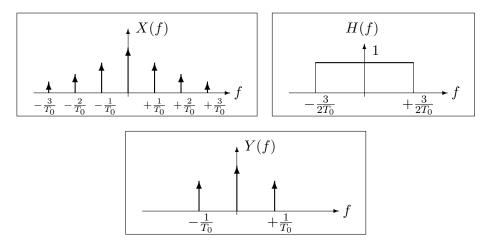


Figura 4.14: Il filtraggio di un segnale periodico fornisce in uscita un segnale anch'esso periodico.

tempo o della frequenza). Due importanti parametri energetici sono la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di energia.

$$x(t) \longrightarrow h(t) \qquad y(t)$$

Ad esempio, noto il segnale in ingresso anche solo tramite la sua funzione di autocorrelazione o la sua densità spettrale di energia, è possibile ottenere informazioni sul segnale di uscita quali la sua funzione di autocorrelazione e la sua densità di energia.

4.11.1 Segnali aperiodici

Richiamiamo brevemente alcuni concetti relativi agli aspetti energetici di segnali aperiodici. Dati due segnali a energia finita x(t) e y(t), sono definite le rispettive funzioni di autocorrelazione, ciascuna scrivibile come convoluzione tra il segnale stesso e il suo complesso coniugato con l'asse delle ascisse invertito:

$$R_x(\tau) = x(\tau) \otimes x^*(-\tau)$$

$$R_y(\tau) = y(\tau) \otimes y^*(-\tau).$$

Inoltre, la TCF della funzione di autocorrelazione è la densità spettrale di energia:

$$TCF[R_x(\tau)] = X(f) X^*(f) = |X(f)|^2 = S_x(f).$$

Giungiamo ora a dimostrare un risultato molto importante, che ci consente di fare valutazioni energetiche relativamente al segnale di uscita senza conoscere il segnale di uscita stesso.

Teorema 4.5. La funzione di autocorrelazione del segnale in uscita vale:

$$R_{u}(\tau) = R_{x}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h^{*}(-\tau).$$

Dimostrazione. La dimostrazione, anziché farla nel dominio del tempo (bisognerebbe trattare tre integrali di convoluzione), la si fa sfruttando la TCF. Si considera inizialmente la densità spettrale di energia del segnale in uscita, che è:

$$S_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)|^2 \cdot |H(f)|^2 = S_x(f) H(f) H^*(f)$$

e antitrasformando si ottiene la tesi.

4.11.2 Segnali periodici**

I segnali aperiodici che abbiamo considerato hanno energia finita e potenza nulla. I segnali periodici, invece, hanno energia infinita e potenza finita. Per questo motivo, essi vanno caratterizzati sulla base della potenza e non più dell'energia.

Come già visto, se si pone in ingresso a un SLS un segnale periodico, anche in uscita ci sarà un segnale periodico (questo è garantito, in particolare, dall'ipotesi di stazionarietà del sistema, non di linearità). Per tale motivo la definizione della funzione di autocorrelazione si applica sia al segnale in ingresso che a quello in uscita:

$$R_x(\tau) \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) \, x^*(t-\tau) \, \mathrm{d}t \tag{4.17}$$

$$R_y(\tau) \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} y(t) y^*(t-\tau) dt.$$
 (4.18)

Per segnali periodici, la funzione di autocorrelazione calcolata in $\tau=0$ restituisce la potenza media del segnale:

$$|R_x(\tau)|_{\tau=0} = R_x(0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) \, x^*(t) \, dt = P_x$$

Teorema 4.6. La funzione di autocorrelazione del segnale in uscita vale:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella fatta per i segnali aperiodici.

$$S_y(f) = |X(f)|^2 \cdot |H(f)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \,\delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) |H(f)|^2$$
$$= S_x(f)H(f)H^*(f)$$

Antitrasformando, otteniamo la tesi.

4.11.3 Segnali aperiodici a potenza finita*

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) x^*(t - \tau) dt$$

$$S_x(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

$$X_T(f) = \text{TCF} [x_T(t)] \qquad x_T(t) = x(t) \operatorname{rect} \left(\frac{t}{T}\right)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Vedere sul libro il paragrafo 4.4 e il sommario a pagina 212-213. Che senso ha usare la TCF se ho definito $R_x(\tau)$ e $R_y(\tau)$ per segnali periodici come integrali sul periodo?

SISTEMI NON LINEARI A TEMPO CONTINUO

5.1 Concetti generali

I sistemi non lineari sono per definizione tutti quei sistemi che non soddisfano la condizione di linearità. Essi sono il risultato di due tipi di non linearità:

- non linearità essenziali che sono non linearità volute che risultano essenziali per il corretto funzionamento di un sistema;
- non linearità parassite che sono invece non linearità non volute, sono spurie, legate a problemi di costruzione di sistemi che si vorrebbero lineari (nominalmente lineari) ma non lo sono completamente.

Vediamo alcuni esempi.

QUADRATORE. Il quadratore è un esempio classico di non linearità essenziale. Fornisce in uscita il quadrato dell'ingresso e viene utilizzato in particolare per raddoppiare la frequenza di un'oscillazione.

$$y(t) = x^2(t)$$
 $x(t) \longrightarrow y(t)$

Amplificatore
 NON IDEALE. Un amplificatore ideale con un guadagno pari a
d ${\cal A}$ è caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita

$$y(t) = Ax(t)$$
.

Ma tutti gli amplificatori reali introducono delle distorsioni, che vengono rappresentate tramite un termine d(t).

$$y(t) = Ax(t) + d(t)$$
 $x(t) \longrightarrow y(t)$

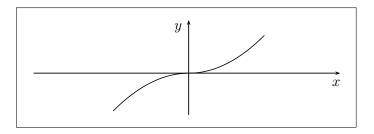
Peraltro, entro un certo intervallo di valori dell'ingresso l'amplificatore può supportare l'uscita correttamente amplificata, ma all'esterno dell'intervallo stesso si

giunge a una situazione di saturazione, per cui l'uscita non supera un valore limite (introducendo così ulteriori distorsioni non lineari).

Notare che queste distorsioni sono completamente diverse da quelle lineari (introdotte dai sistemi lineari). I sistemi lineari non introducono distorsioni lineari se e solo se generano in uscita una replica fedele del segnale in ingresso. Per sistemi non lineari, invece, non vale la mutua esclusione tra distorsione e replica fedele.



Prenderemo in considerazione sistemi non lineari monodimensionali a tempo continuo e in particolare quelli *stazionari* e *senza memoria*. Tali sistemi si possono descrivere molto semplicemente tramite la propria *caratteristica ingresso-uscita*, che è una semplice funzione rappresentabile graficamente su un piano cartesiano con l'ingresso e l'uscita sui due assi:



Notare che il tempo non è rappresentato, dato che il sistema è istantaneo e stazionario e la t non influisce sull'uscita.

Per i sistemi non lineari non ha senso definire una risposta impulsiva. L'uscita da un sistema non lineare si può ottenere tramite la caratteristica ingresso-uscita g:

$$y(t) = g[x(t)].$$

5.2 Non linearità essenziali

Molti sistemi non lineari vengono utilizzati per realizzare componenti di sistemi complessi. Infatti, hanno la caratteristica di produrre contributi frequenziali nel segnale di uscita che non erano presenti nel segnale di ingresso e questo viene sfruttato per realizzare, ad esempio, i raddrizzatori a doppia semionda (g(x) = |x|) dei circuiti alimentatori degli apparati elettronici, o i moltiplicatori di frequenza.

5.2.1 Moltiplicatori di frequenza

RADDOPPIATORE DI FREQUENZA. Si è già visto un quadratore, che fornisce in uscita il quadrato del segnale in ingresso e ne raddoppia la frequenza. Ma affinché funzioni correttamente come raddoppiatore di frequenza, bisogna utilizzare a valle del quadratore stesso un filtro passa banda.

Posta in ingresso una oscillazione del tipo:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

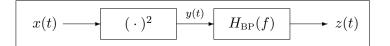


Figura 5.1: Schema di un raddoppiatore di frequenza.

si ottiene in uscita:

$$y(t) = x^{2}(t) = A^{2} \cos^{2}(2\pi f_{0}t) = \frac{A^{2}}{2} [1 + \cos(4\pi f_{0}t)].$$

Facendo il quadrato del segnale x(t) si ottengono due componenti, una alla continua e una alla frequenza $2f_0$ (distorsione di seconda armonica): il secondo blocco serve proprio a eliminare la componente continua. Nel dominio della frequenza l'uscita è:

$$Y(f) = \frac{A^2}{2} \delta(f) + \frac{A^2}{4} \left[\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0) \right]$$

rappresentata graficamente in figura 5.2. Il filtro passa banda dovrà quindi prelevare le componenti di area $A^2/2$, tagliando la continua.

$$H_{\mathrm{BP}}(f) = \mathrm{rect}\!\left(\frac{f - 2f_0}{\Delta f}\right) + \mathrm{rect}\!\left(\frac{f + 2f_0}{\Delta f}\right)$$

L'uscita Z(f) del raddoppiatore di frequenza è:

$$Z(f) = H_{\text{BP}}(f) \cdot Y(f) = \frac{A^2}{4} \left[\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0) \right]$$

(notare che ora abbiamo usato la risposta in frequenza, perché il secondo blocco è un filtro lineare, mentre prima per calcolare l'uscita del quadratore abbiamo dovuto operare nel dominio del tempo). Antitrasformando, risaliamo alla z(t):

$$z(t) = \frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_0 t) = B\cos(4\pi f_0 t).$$

MOLTIPLICATORE DI FREQUENZA DI UN FATTORE 3. Analizziamo cosa accade se invece di un quadratore si mette come primo blocco un sistema non lineare che restituisce in uscita il cubo del segnale in ingresso.

Supponiamo sempre che in ingresso ci sia un segnale del tipo:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t).$$

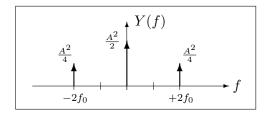


Figura 5.2: Spettro di uscita di un raddoppiatore di frequenza.

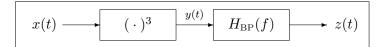


Figura 5.3: Triplicatore di frequenza.

L'uscita (da calcolarsi nel dominio del tempo) è:

$$y(t) = x^{3}(t) = A^{3} \cos^{3}(2\pi f_{0}t)$$

$$= A^{3} \cdot \frac{1}{2} \left[1 + \cos(4\pi f_{0}t) \right] \cdot \cos(2\pi f_{0}t)$$

$$= \frac{A^{3}}{2} \left[\cos(2\pi f_{0}t) + \cos(4\pi f_{0}t) \cos(2\pi f_{0}t) \right]$$

ma poiché $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$, otteniamo:

$$= \frac{A^3}{2} \left[\cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} \cos(6\pi f_0 t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t) \right]$$

$$= \frac{A^3}{2} \left[\frac{3}{2} \cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} \cos(6\pi f_0 t) \right]$$

$$= \frac{3A^3}{4} \cos(2\pi f_0 t) + \frac{A^3}{4} \cos(6\pi f_0 t).$$

Si ottiene in uscita un segnale con una componente alla stessa frequenza del segnale originario e una componente a frequenza tripla. Bisogna prelevare quest'ultima utilizzando sempre un filtro passa banda, centrato questa volta a $3f_0$:

$$H_{\mathrm{BP}}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f - 3f_0}{\Delta f}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f + 3f_0}{\Delta f}\right).$$

Infine l'uscita sarà:

$$z(t) = \frac{A^3}{4}\cos(6\pi f_0 t) = B\cos(6\pi f_0).$$

MOLTIPLICATORE DI FREQUENZA DI UN FATTORE N. Si potrebbe dimostrare che i risultati ottenuti sono generalizzabili per una generica potenza.

Facendo passare un ingresso nella forma

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

attraverso un sistema che lo eleva alla N-esima potenza, si ottiene come uscita y(t) una sommatoria di N termini cosinusoidali a frequenze multiple di f_0 :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N} B_k \cos(2\pi k f_0 t).$$

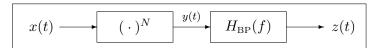


Figura 5.4: Moltiplicatore di frequenza di un fattore N.

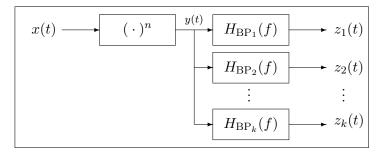


Figura 5.5: Usando un unico sistema che eleva il segnale di ingresso all'*n*-esima potenza si può realizzare una serie di moltiplicatori di frequenza.

Alcuni dei termini B_k potrebbero essere nulli, ma certamente (lo si potrebbe dimostrare) il termine B_N è diverso da zero. Con questo tipo di schema si riesce a realizzare un moltiplicatore N-esimo di frequenza, purché il filtro passa banda sia centrato intorno alla frequenza Nf_0 :

$$H_{\mathrm{BP}}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f - Nf_0}{\Delta f}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f + Nf_0}{\Delta f}\right)$$

ottenendo pertanto:

$$z(t) = B_N \cos(2\pi N f_0 t).$$

Laddove le applicazioni lo richiedano, si potrebbe, noto ovviamente il segnale di ingresso e l'esponente, e studiando il comportamento di y(t), realizzare un sistema che da una frequenza di ingresso f_0 ne preleva un certo numero in uscita, tutte multiple della f_0 . Si deriva il segnale y(t) e lo si invia a una barriera di filtri passa banda prelevando le frequenze di interesse, come rappresentato nella figura 5.5.

5.3 Non linearità parassite

Vediamo ora come caratterizzare le non linearità parassite, in modo tale da quantificarle e garantire che un sistema abbia una determinata fedeltà.

Come già visto da esempi, le distorsioni lineari deformano lo spettro del segnale di ingresso, ma non possono creare delle componenti spettrali che stanno al di fuori delle componenti spettrali del segnale in ingresso. Questo perché laddove X(f)=0 (il segnale in ingresso non ha componenti) anche Y(f)=H(f)X(f)=0 (neanche il segnale di uscita avrà componenti).

I sistemi non lineari invece possono anche introdurre componenti frequenziali che non erano presenti nel segnale di ingresso.

Consideriamo di operare su sistemi non lineari



che siano anche istantanei e stazionari, rappresentabili con un grafico sul piano cartesiano in cui u rappresenta l'uscita, i l'ingresso e la relazione tra ingresso e uscita è data da una funzione g dell'ingresso:

$$u = g[i].$$

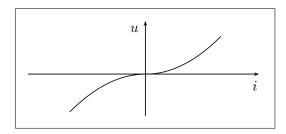


Figura 5.6: Rappresentazione greafica di un generico sistema non lineare stazionario istantaneo.

Si tratta di capire come una generica funzione g vada a influire sul grado di non linearità del sistema, dove per grado di non linearità si intende una misura quantitativa della distorsione che il sistema introduce sul segnale. Queste distorsioni dipendono esclusivamente da g, essendo il sistema stazionario istantaneo. Scriviamo la g[x] sviluppandola come un polinomio di Taylor di grado N intorno a un certo punto di lavoro (potrebbe essere uno qualunque, ma per semplicità noi facciamo lo sviluppo per un intorno dello zero):

$$g[x(t)] = g_0 + g'x(t) + \frac{1}{2}g''x^2(t) + \frac{1}{6}g'''x^3(t) + \dots$$

$$\simeq g_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} g^{(k)} x^k(t)$$

dove $g' = \frac{d}{dx} g[x]$, $g'' = \frac{d^2}{dx^2} g[x]$ e così via, da calcolarsi nel punto iniziale (che abbiamo supposto sia zero). Sono proprio i coefficienti g', $\frac{g''}{2}$, $\frac{g'''}{6}$, ... a dare una misura quantitativa della distorsione introdotta, e dipendono, come avevamo anticipato, solamente dalla funzione g. In particolare sono dei pesi, e le varie distorsioni saranno pesate da questi coefficienti.

Intuitivamente, più la g varia nel punto intorno al quale la si sviluppa e più termini polinomiali sono necessari per rappresentarla correttamente. Viceversa più è simile a una retta e più i termini sono piccoli. Un sistema quindi è più lineare di un altro se i suoi termini di grado superiore al primo sono piccoli.

Se l'ingresso è una cosinusoide

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \tag{5.1}$$

allora l'uscita sarà una sovrapposizione di cosinusoidi a frequenze multiple:

$$y(t) = g[x(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(2\pi n f_0 t).$$

I coefficienti B_n dipendono dai $g^{(k)}/k!$ (B_n può dipendere da $g^{(k)}/k!$ per più k, non solo da $g^{(n)}/n!$) e alcuni di essi possono naturalmente esser nulli, e in tal caso non si introduce un termine di distorsione alla frequenza relativa.

Da qui si evince che uno dei metodi per caratterizzare le non linearità parassite è quello di misurare le distorsioni armoniche (il termine "armoniche" specifica che le componenti frequenziali sono multiple l'una dell'altra o, meglio, che si tratta di componenti in relazione armonica con la frequenza del segnale d'ingresso). Quindi:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(2\pi n f_0 t)$$

= $B_0 + B_1 \cos(2\pi f_0 t) + d(t)$ (5.2)

dove abbiamo definito il termine di distorsione armonica come "residuo" del segnale di uscita tolta la componente utile e quella (ininfluente) continua:

$$d(t) \triangleq \sum_{n=2}^{\infty} B_n \cos(2\pi n f_0 t).$$

Il termine in B_1 non è distorsione in quanto è una componente frequenziale alla stessa frequenza del segnale in ingresso (è parte "utile" del segnale di uscita perché replica fedele del segnale di ingresso). La componente continua non viene considerata come distorsione nelle comuni applicazioni (in quanto spesso è ininfluente).

5.3.1 DISTORSIONI ARMONICHE

Consideriamo ora segnali in ingresso sinusoidali, nella forma di equazione (5.1) che producono in uscita segnali come in eq. (5.2), e introduciamo dei parametri di distorsione armonica. Il primo che definiamo è la potenza dell'n-esima armonica, ossia della n-esima cosinusoide in uscita (che fa parte del termine d(t), quindi stiamo considerando $n \geq 2$):

$$P_n = \frac{B_n^2}{2}. (5.3)$$

Il valore efficace V_n dell'n-esima armonica è definito come:

$$V_n \triangleq \sqrt{P_n} = \frac{B_n}{\sqrt{2}}. (5.4)$$

Il coefficiente di distorsione armonica di ordine n-esimo vale:

$$D_n \triangleq \frac{V_n}{V_1} = \sqrt{\frac{P_n}{P_1}}. (5.5)$$

Il rapporto indica la potenza che viene dispersa sulle armoniche superiori rispetto all'armonica fondamentale (la prima), ed è indipendente dall'ampiezza del segnale in ingresso. È importante infatti notare che si tratta di un rapporto, perché i coefficienti V_n non dipendono solo dai valori $g^{(k)}$, ma anche dall'ampiezza del segnale di ingresso: aumentando quest'ultima aumentano anche i V_n , ma ciò non significa che aumenta la distorsione.

Il coefficiente di distorsione armonica totale è invece definito come il rapporto tra la potenza del residuo di distorsione d(t) e quella della componente utile:

$$D_T \triangleq \sqrt{\frac{P_D}{P_1}} = \frac{V_D}{V_1} = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} P_n}{P_1}} = \sqrt{\frac{P_T - P_0 - P_1}{P_1}}$$

dove P_D è la potenza della distorsione:

$$P_D = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |d(t)|^2 dt.$$

Calcolare in tal modo la potenza della distorsione non sarebbe banale. Si potrebbe sfruttare invece il teorema di Parseval, che afferma che possiamo calcolarla a partire dalla somma delle potenze delle varie componenti in questo modo:

$$P_D = \sum_{n=2}^{\infty} P_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|B_n|^2}{2}$$

dove dividiamo per due in quanto facciamo la somma solo per valori positivi. Ma un modo ancora migliore di calcolare la potenza della distorsione (anziché una somma di infiniti termini) è tramite la differenza:

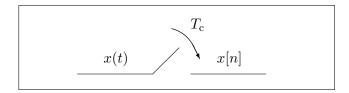
$$P_D = P_T - P_0 - P_1 = P_T - B_0^2 - \frac{B_1^2}{2}. (5.6)$$

La potenza della distorsione è potenza che viene distribuita sulle armoniche superiori a quella fondamentale, e può esser vista come una perdita, perché non finisce sulla componente di interesse ma su altre componenti. Oltre che essere una perdita crea anche delle componenti spurie. Affinché un sistema sia il più possibile lineare, il termine P_D deve quindi essere il più piccolo possibile.

SEGNALI CAMPIONATI

6.1 Introduzione

Come già anticipato nel capitolo 1, tra i segnali a tempo discreto si annoverano sia segnali la cui natura è intrinsecamente discreta, sia segnali ottenuti per "campionamento" di segnali continui nel tempo. Quest'ultimo è il caso più tipico che si presenta nell'elaborazione dei segnali. L'operazione di campionamento viene eseguita da un apposito strumento detto *campionatore*, avente in ingresso un segnale a tempo continuo e in uscita una sequenza. Viene rappresentato graficamente come una sorta di interruttore:



dove $T_{\rm c}$ è l'intervallo di campionamento o tempo di campionamento, che indica la periodicità con cui l'interruttore si apre e si chiude (in un tempo infinitesimo). Nell'istante in cui l'interruttore si chiude viene prelevato il valore del segnale. Campionare un segnale significa quindi costruire una sequenza i cui campioni sono i valori del segnale analogico in ingresso prelevati a intervalli temporali spaziati di $T_{\rm c}$:

$$x[n] \triangleq x(nT_{\rm c}).$$

L'inverso dell'intervallo di campionamento è la frequenza di campionamento:

$$f_{\rm c} = 1/T_{\rm c}$$
.

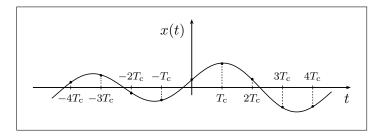


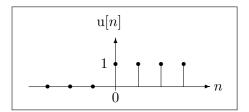
Figura 6.1: Esempio di campionamento di un segnale.

6.2 Sequenze notevoli

Consideriamo ora esempi di segnali a tempo discreto di particolare rilevanza e utilità. Alcuni di essi possono essere derivati dalle rispettive controparti a tempo continuo per semplice campionamento, altri necessitano invece di importanti precisazioni.

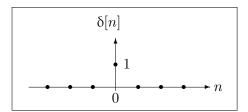
Gradino unitario.

$$\mathbf{u}[n] = \begin{cases} 1 & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



SEQUENZA IMPULSIVA O DELTA DI KRONECKER.

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

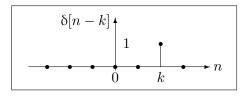


Non ha senso pensare di ottenere la sequenza $\delta[n]$ per campionamento del segnale analogico $\delta(t)$. Infatti il valore di $\delta(0)$ non è limitato e quindi sarebbe privo di senso definire $\delta[0] = \delta(0)$. Le sequenze u[n] e $\delta[n]$ sono legate da relazioni simili a quelle che legano u(t) e $\delta(t)$. Infatti, come il segnale a gradino è la funzione integrale della $\delta(t)$, nell'ambito del tempo discreto l'integrale diventa una sommatoria e si ha:

$$\mathbf{u}[n] = \sum_{i=-\infty}^{n} \delta[i] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k].$$

In matematica Infatti la $\delta[n-k]$ è graficamente:

 $\delta_{n,k} = \delta[n-k] \ \dot{e}$ detto "simbolo di Kronecker".



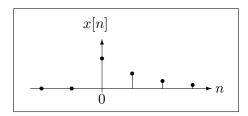
e sommandone infinite, una per ogni $k \geq 0$, si ottiene proprio la funzione gradino. È altresì vero che la delta di Kronecker si può scrivere come differenza di gradini:

$$\delta[n] = \mathbf{u}[n] - \mathbf{u}[n-1]$$

È la cosiddetta e può esser vista anche come un rettangolo con un solo campione non nullo. Compare "differenza qui una differenza a ricalcare la proprietà che, nel tempo continuo, la delta di Dirac all'indietro del primo è la derivata temporale della funzione gradino.

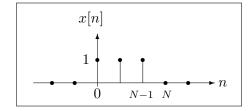
incremento. Esponenziale unilatera. Per 0 < a < 1 si definisce la sequenza esponenziale unilatera come:





RETTANGOLO DI DURATA N. La sequenza rettangolo è definita come differenza tra due gradini:

$$x[n] = \mathbf{u}[n] - \mathbf{u}[n-N]$$



Il termine $-\mathbf{u}[n-N]$ è un gradino traslato di N (che parte cioè in n=N) e con segno negativo.

OSCILLAZIONE DISCRETA. La sequenza oscillazione discreta è definita come:

$$x[n] = e^{j2\pi F_0 n}$$

dove F_0 è una frequenza normalizzata (cioè adimensionale). È un'oscillazione com- Si parla di frequenza plessa (la versione a tempo discreto dell'oscillazione complessa analogica $e^{j2\pi f_0 t}$) normalizzata perché che potrebbe sembrare periodica, essendo $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$. In realtà non ottenuta come è così. Affinché sia una sequenza periodica (rispetto alla variabile temporale n) è rapporto di necessario che la frequenza normalizzata F_0 sia un numero razionale, scrivibile cioè frequenze e quindi come rapporto di interi:

adimensionale.

$$F_0 = \frac{p}{q}$$
 $p, q \in \mathbb{Z}$.

In tal caso il periodo della sequenza è $N_0 = q'$ dove q' si ottiene partendo da una coppia di numeri p' e q' che siano interi primi tra loro e il cui rapporto valga:

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$$

(che siano interi primi fra loro significa che la frazione p'/q' non è ulteriormente semplificabile).

Trasformata di Fourier di una Sequenza (TFS) 6.3

La Trasformata Di Fourier di una Sequenza (TFS) è uno strumento utile ad analizzare spettralmente le sequenze, potendo capire pertanto cosa succede allo spettro di un segnale quando questo viene campionato. In particolare si vuole determinare, se esiste, una relazione tra il contenuto spettrale definito sulle sequenze e quello originario del segnale analogico. Questo consentirebbe di ottenere informazioni sul contenuto spettrale del segnale originario a partire dai suoi campioni ed eventualmente di ricostruirlo.

La Trasformata di Fourier di Sequenze viene indicata con $\bar{X}(f)$

$$x[n] \stackrel{\mathrm{TFS}}{\Longleftrightarrow} \bar{X}(f)$$

ed è definita come:

$$\bar{X}(f) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi f nT}$$

Trasformata di Fourier di una Sequenza

dove T è il tempo di campionamento usato per ottenere x[n] da x(t).

Trasformando una sequenza tramite questa definizione di TFS, si ottiene uno spettro periodico. In particolare, vale la seguente proprietà.

PROPRIETÀ 6.1 (di periodicità della TFS). La funzione $\bar{X}(f)$ è periodica di periodo pari alla frequenza di campionamento $f_c = 1/T$, ossia:

$$\bar{X}(f) = \bar{X}\left(f + \frac{k}{T}\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\bar{X}\left(f + \frac{k}{T}\right) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi n\left(f + \frac{k}{T}\right)T}$$
$$= \sum_{n = -\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi nfT} \underbrace{e^{-j2\pi nk}}_{1} = \bar{X}(f)$$

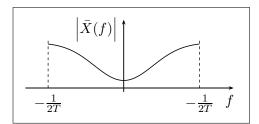
dove il termine $e^{-j2\pi nk}$ vale 1 in quanto $nk \in \mathbb{Z}$.

RAPPRESENTAZIONE DELLA TFS. Trattandosi di uno spettro periodico, $\bar{X}(f)$ è pienamente nota se è noto il suo andamento in un intervallo di frequenze di ampiezza 1/T. La rappresentazione può quindi limitarsi al periodo da -1/2T a +1/2T o anche da 0 a 1/T (a volte è preferibile la prima rappresentazione perché si esaltano alcune caratteristiche del segnale, ad esempio l'assenza di componenti alla continua).

ESEMPIO 6.1 (TFS di una $\delta[n]$). Poiché la $\delta[n]$ è nulla per ogni $n \neq 0$ l'unico termine della sommatoria che sopravvive è quello con n=0 e pertanto:

$$\bar{\Delta}(f) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j2\pi n f T} = 1$$

Il modulo della $\bar{\Delta}(f)$ è quindi unitario e la sua fase è nulla.



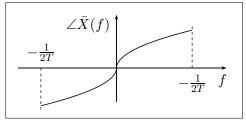
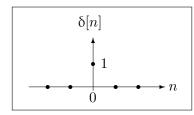


Figura 6.2: Esempio degli spettri di ampiezza e fase di una sequenza.



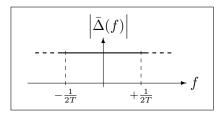


Figura 6.3: Trasformata di Fourier di una "delta" di Kronecker.

TEOREMA 6.1 (antitrasformata). Se si conosce la TFS X(f) di una sequenza x[n], allora la sequenza stessa si ottiene mediante la

$$x[n] \triangleq T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi f n T} df$$
 Antitrasformata di Fourier di una Sequenza

Dimostrazione. Si parte dalla

TFS⁻¹[
$$\bar{X}(f)$$
] = $T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi f n T} df$

sostituendo alla X(f) la sua espressione come trasformata di Fourier di sequenza:

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j2\pi kfT} e^{j2\pi nfT} df$$

$$= T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \underbrace{\int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} e^{j2\pi(n-k)fT} df}_{\text{nullo per ogni } k \neq n} = Tx[n] \frac{1}{T} = x[n]. \quad \Box$$

Il risultato appena ottenuto consente di affermare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i due domini (tempo e frequenza) e che conoscere il segnale (sotto forma di sequenza) nel dominio del tempo o nel dominio della frequenza è invariante.

Periodicità della TFS e intervallo di campionamento

La periodicità della TFS e la limitatezza dell'intervallo frequenziale significativo nello spettro del segnale sono conseguenze di un unico fenomeno: nell'ambito dei segnali a tempo discreto, due oscillazioni complesse (campionate con lo stesso periodo T) che abbiano rispettivamente frequenza f_0 e $f_0 + k/T$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono indistinguibili.

Per capire a fondo questo aspetto consideriamo le due oscillazioni discrete:

$$\begin{cases} x_1[n] = e^{j2\pi n f_0 T} \\ x_2[n] = e^{j2\pi n (f_0 + k/T)T}. \end{cases}$$
(6.1)

Un'oscillazione discreta è un'oscillazione che è stata campionata a partire da un segnale oscillatorio continuo nel tempo. Nel caso delle oscillazioni (6.1) le due oscillazioni originarie continue nel tempo sono:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{j2\pi f_0 t} \\ x_2(t) = e^{j2\pi (f_0 + k/T)t}. \end{cases}$$

Si può vedere facilmente come le due oscillazioni discrete siano indistinguibili. Infatti, considerandole nel dominio del tempo:

$$x_2[n] = e^{j2\pi n f_0 T} e^{j2\pi n \frac{k}{T}T} = x_1[n] \underbrace{e^{j2\pi n k}}_{1} = x_1[n].$$

Come anticipato, si conclude che partendo da due oscillazioni tempo continue diverse, una alla frequenza f_0 e un'altra alla frequenza $f_0 + k/T$, con $k \in \mathbb{Z}$, e campionandole con passo di campionamento pari a T si ottengono sequenze identiche. Non ha quindi senso pensare a componenti significative nello spettro del segnale discreto al di fuori di un intervallo-base di ampiezza pari alla frequenza di campionamento, poiché tali componenti sono repliche indistinguibili di quelle già presenti nel periodo-base. È proprio per questo che la trasformata $\bar{X}(f)$ è periodica.

Come ovvio, per la biunivocità della TFS, anche gli spettri sono uguali:

$$\begin{cases} \bar{X}_{1}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{1}[n] e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi nf_{0}T} e^{-j2\pi nfT} \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n(f-f_{0})T} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - f_{0} - \frac{n}{T}\right) \\ \bar{X}_{2}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{2}[n] e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n(f_{0} + \frac{k}{T})T} e^{-j2\pi nfT} \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n(f-f_{0} - \frac{k}{T})T} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - f_{0} - \frac{k}{T} - \frac{n}{T}\right) \\ = \frac{1}{T} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - f_{0} - \frac{n'}{T}\right) \end{cases}$$

dove si è sfruttata in entrambi i casi la formula di Poisson.

Quanto detto comporta, inoltre, che la scelta dell'intervallo di campionamento è fondamentale al fine di poter ricostruire il segnale originario a partire dai suoi campioni. È ovvio che in un caso come questo il segnale non è ricostruibile dai suoi campioni, perché abbiamo già visto due segnali che hanno esattamente la stessa sequenza se campionati con lo stesso passo di campionamento.

6.3.2 Condizione per l'esistenza della TFS

Esistono diversi criteri per stabilire se una sequenza è trasformabile secondo Fourier. Quello che vediamo noi è un criterio di sufficienza molto semplice (detto della assoluta sommabilità).

Teorema 6.2. Se la sequenza x[n] è assolutamente sommabile

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty,$$

allora essa ammette Trasformata di Fourier di Sequenza.

Dimostrazione. Dire che la TFS esiste equivale a dire che il suo modulo è finito:

$$\left| \bar{X}(f) \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi nfT} \right| \le \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

Si è semplicemente sfruttata la relazione che afferma che il modulo di una somma algebrica è minore o uguale della somma dei moduli.

6.3.3 RELAZIONE TRA LA TCF DI UN SEGNALE E LA TFS DI UN SUO CAMPIONAMENTO

TEOREMA 6.3. Sia x[n] la sequenza ottenuta per campionamento di x(t) con intervallo di campionamento T e siano $\bar{X}(f)$ e X(f) rispettivamente TFS di x[n] e la TCF di x(t), allora:

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n = -\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right).$$

Dimostrazione. Poiché vale la relazione x[n] = x(nT), la trasformata di Fourier della sequenza x[n] può essere scritta come:

$$\bar{X}(f) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j2\pi nfT}$$

$$= \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) e^{j2\pi\alpha nT} d\alpha \right] e^{-j2\pi nfT}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) \sum_{n = -\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f - \alpha)nT} d\alpha$$

e utilizzando la seconda formula di Poisson applicata alla delta di Dirac (vedi eq. (3.24) a pag. 50), si ottiene:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \alpha - \frac{n}{T} \right) \right] d\alpha$$
$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) \delta \left(\left(f - \frac{n}{T} \right) - \alpha \right) d\alpha$$

e sfruttando la proprietà campionatrice della $\delta(t)$ si ottiene infine:

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X\bigg(f-\frac{n}{T}\bigg).$$

La formula appena dimostrata si interpreta dicendo che la trasformata della sequenza è pari alla trasformata della funzione replicata a intervalli pari a 1/T e moltiplicata per 1/T. Lo spettro di una sequenza è quindi la periodicizzazione dello spettro segnale che ha originato la sequenza.

ESEMPIO 6.2. Si consideri la funzione sinc che ha come TCF una rect. Lo spettro della sequenza viene ottenuto semplicemente moltiplicando lo spettro del segnale per 1/T e replicandolo.

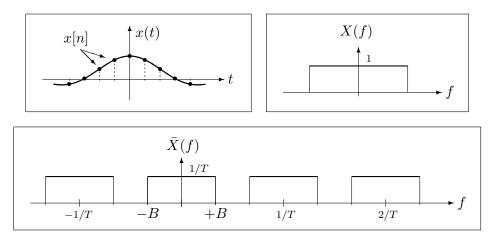


Figura 6.4: Spettro di una sequenza ottenuta per campionamento di una sinc.

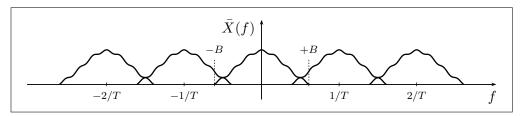
6.4 Condizione di Nyquist

Si supponga di avere un segnale x(t) a banda rigorosamente limitata. Campionandolo con un tempo di campionamento T per ottenere una sequenza x[n], lo spettro $\bar{X}(f)$ della sequenza può presentarsi come rappresentato nella figura 6.5a.

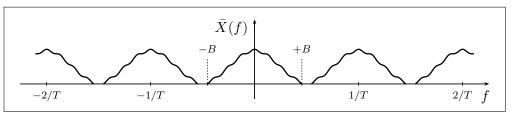
Se lo spettro della sequenza è soggetto a una situazione di questo tipo, ossia le repliche dello spettro del segnale originario si intersecano fra di loro, allora il fenomeno che si presenta è detto "aliasing". In realtà, negli intervalli in cui due repliche si intersecano lo spettro sarà la somma delle varie repliche.

In assenza di aliasing il periodo frequenziale di base [-1/2T, 1/2T] contiene una replica non distorta della trasformata X(f) del segnale a tempo continuo originario (vedi figura 6.5b). In una situazione di aliasing, invece, il segnale viene distorto a causa del cosiddetto errore di aliasing, creato proprio dalle repliche ("alias" appunto) dello spettro-base.

La condizione di Nyquist fornisce un criterio che consente di affermare se lo spettro della sequenza è affetto da aliasing o no.



(a) Spettro di una sequenza affetto da "aliasing".



(b) Spettro di una sequenza non affetto da "aliasing".

CONDIZIONE 6.1 (di Nyquist): Dato un segnale x(t) a banda rigorosamente limitata B, se la frequenza di campionamento F = 1/T è

$$F \ge 2B \tag{6.2a}$$

o, equivalentemente, il tempo di campionamento è

$$T \le \frac{1}{2B},\tag{6.2b}$$

allora lo spettro della sequenza non è affetto da aliasing.

Se si vuole evitare l'aliasing, bisogna scegliere la frequenza di campionamento in funzione della banda del segnale analogico. Come vedremo questa di Nyquist sarà la condizione fondamentale alla base del teorema del campionamento e della possibilità, in assenza di aliasing, di ricostruire il segnale originario a banda limitata elaborando il segnale campionato.

6.5 Correlazione, autocorrelazione e densità spettrale di energia

La correlazione tra sequenze è definita come:

$$R_{xy}[k] \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] y^*[n-k]$$

e l'autocorrelazione

$$R_x[k] \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] x^*[n-k].$$

La densità spettrale di energia la si ottiene come trasformata della funzione di autocorrelazione:

$$S_x(f) = \text{TFS}\left[R_x[k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_x[k] e^{-j2\pi kfT}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] x^*[n-k] e^{-j2\pi kfT}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[n-k] e^{-j2\pi kfT}$$

che, con la sostituzione k' = n - k, diventa:

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} x^*[k'] e^{-j2\pi(n-k')fT}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi nfT} \left[\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} x[k'] e^{-j2\pi k'fT} \right]^*$$

$$= \bar{X}(f) \bar{X}^*(f) = \left| \bar{X}(f) \right|^2.$$

6.6 Teorema di Parseval per Sequenze**

Teorema 6.4.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] y^*[n] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) \bar{Y}^*(f) df$$

Dimostrazione.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \, y^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) \, e^{j2\pi f n T} \, df \, y^*[n]$$

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^*[n] \, e^{j2\pi f n T} \right] df$$

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \, e^{-j2\pi f n T} \right]^* df$$

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) \bar{Y}^*(f) \, df$$

6.6.1 Applicazione per il calcolo dell'energia di una sequenza**

L'energia E_x di una sequenza può essere ottenuta calcolando il valore che la R_x assume in 0:

$$E_x = R_x[0] = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$
(6.3)

Se la serie di equazione 6.3 converge, allora la sequenza ha energia finita (noi tratteremo soltanto sequenze a energia finita).

Teorema 6.5. Se si conosce lo spettro della sequenza, si può calcolare la sua energia anche come integrale sul periodo della densità spettrale di energia:

$$E_x = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} S_x(f) df$$

Dimostrazione. Si applica il teorema di Parseval, sostituendo y[n] con x[n]:

$$E_x = R_x[0] = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

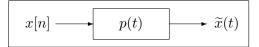
$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} |\bar{X}(f)|^2 df \qquad \text{(per Parseval)}$$

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} S_x(f) df \qquad \Box$$

6.7 Interpolatori

L'interpolatore è lo strumento che opera in modo duale rispetto al campionatore, ossia fornisce in uscita un segnale a tempo continuo $\tilde{x}(t)$ (il segnale *interpolato*) che è una ricostruzione del segnale (tempo continuo) a partire dal quale la sequenza è stata ottenuta.

6.7. Interpolatori 99



A caratterizzare l'interpolatore è una funzione del tempo p(t) (la risposta dell'interpolatore) che determina le proprietà che esso ha rispetto alla ricostruzione del segnale. In segnale interpolato viene infatti ottenuto come la sommatoria dei campioni della sequenza moltiplicati per versioni ritardate della p(t):

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} x[n] p(t - nT)$$
(6.4)

Da notare che la p(t) non è la risposta impulsiva di un SLS, infatti ha in ingresso una sequenza e in uscita un segnale analogico (i sistemi, non solo quelli lineari, hanno sia in ingresso che in uscita segnali continui).

6.7.1Interpolatore a mantenimento

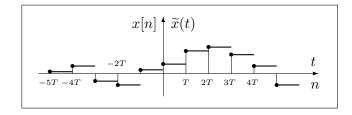
Nell'interpolatore a mantenimento (detto anche interpolatore di ordine zero) la p(t)è una rect:

$$p(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

$$1$$

$$T$$

Poiché si moltiplica l'n-esimo campione per una rect traslata nel tempo di nT e di durata T, in uscita viene presentato ciascun campione all'istante nT e per un tempo pari a T (si tratta di impulsi rettangolari). Il segnale $\tilde{x}(t)$ viene pertanto mantenuto a livello costante per un intervallo pari a T per poi variare istantaneamente al valore del campione successivo. In uscita a un interpolatore a mantenimento si ha quindi una forma d'onda costante a tratti:



I due principali svantaggi di un interpolatore a mantenimento sono la banda Cose non dette dal illimitata del segnale interpolato, dovuta in sostanza agli infiniti punti di discontinuità Martorella. che esso presenta per effetto degli impulsi rettangolari, e il fatto che anche all'interno della banda "utile", o meglio all'interno dell'intervallo base [-1/2T, 1/2T], lo spettro del segnale ricostruito differisce dallo spettro del segnale di partenza, subendo una distorsione di ampiezza (infatti, vedi il paragrafo seguente, la trasformata della p(t)è una sinc, non costante in ampiezza).

6.7.2 Trasformata Continua di Fourier del segnale interpolato

Poiché il segnale interpolato, così come definito nella 6.4, è una sommatoria di infiniti termini, potrebbe non essere agevole calcolarne la Trasformata Continua di Fourier a partire dall'espressione dell' $\widetilde{x}(t)$ stessa.

$$x[n] \longrightarrow p(t) \longrightarrow \widetilde{x}(t) \qquad \overline{X}(f) \longrightarrow P(f) \longrightarrow \widetilde{X}(f)$$

Lo spettro del segnale in uscita può essere calcolato in realtà conoscendo solamente la P(f) e la $\bar{X}(f)$.

TEOREMA 6.6. La TCF dell'uscita di un interpolatore può essere calcolata come:

$$\widetilde{X}(f) = \overline{X}(f)P(f).$$

Dimostrazione. Lo spettro del segnale interpolato è:

$$\widetilde{X}(f) = \text{TCF}\left[\widetilde{x}(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \, p(t-nT) \, e^{-j2\pi f t} \, dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-nT) \, e^{-j2\pi f t} \, dt$$

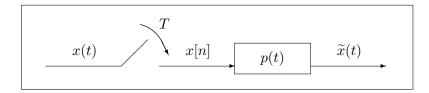
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] P(f) \, e^{-j2\pi n f T}$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \, e^{-j2\pi n f T}\right] P(f) = \bar{X}(f) P(f).$$

Da ciò si vede che problemi di interpolazione si risolvono bene nel dominio della frequenza perché basta fare delle moltiplicazioni, proprio come per i filtri lineari stazionari. Lo spettro del segnale campionato si ottiene semplicemente moltiplicando lo spettro della sequenza per lo spettro della risposta dell'interpolatore. Ma è importante ribadire che l'interpolatore non è un sistema lineare stazionario. Il comportamento analogo ai SLS, peraltro, lo si riscontra a patto di utilizzare come spettro del segnale in ingresso la Trasformata di Fourier della Sequenza (in ingresso non c'è un segnale a tempo continuo).

6.8 Teorema del Campionamento

Ponendo in serie un campionatore e un interpolatore



è possibile, scegliendo opportunamente T e p(t), ottenere una $\tilde{x}(t)$ che sia uguale al segnale originario x(t)?

In realtà non è importante riottenere esattamente il segnale x(t) bensì una sua replica fedele, ossia un segnale nella forma $kx(t-t_0)$: può presentarsi un ritardo e/o un coefficiente a moltiplicare, perché quello che conta è che si ottenga un segnale $\tilde{x}(t)$ con la stessa forma dell'x(t) originario. L'informazione è infatti associata alla forma del segnale: è normale che ci siano ritardi durante una trasmissione e sono altrettanto normali amplificazioni/attenuazioni, ma questo non inficia la trasmissione dell'informazione.

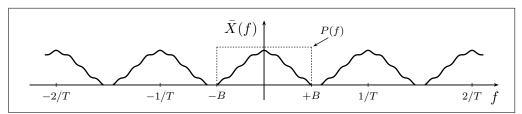
La risposta alla domanda posta sopra viene dal Teorema del Campionamento.

TEOREMA 6.7 (del campionamento). Un segnale x(t) a banda rigorosamente limitata B può essere ricostruito esattamente dai suoi campioni se e solo se è rispettata la condizione di Nyquist, ossia se la frequenza di campionamento non è inferiore a 2B.

TEOREMA 6.8. L'interpolatore che permette di ricostruire perfettamente il segnale è detto interpolatore cardinale, ed ha la seguente forma:¹

$$p(t) = 2B\operatorname{sinc}(2Bt), \quad P(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right).$$

Dimostrazione. Effettuiamo la dimostrazione per via grafica. Si basa sul criterio di Nyquist. Siccome il segnale è a banda rigorosamente limitata e inoltre è soddisfatta la condizione di Nyquist, la TFS $\bar{X}(f)$ è data dalla somma di infinite repliche della X(f) non sovrapposte (non c'è aliasing):



L'impulso interpolante p(t) è scelto in modo che la sua trasformata sia un rettangolo che vale costantemente 1 in [-B, +B] e zero altrove. Di conseguenza, essendo

$$\widetilde{X}(f) = \overline{X}(f)P(f) = \overline{X}(f)\operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

la $\tilde{X}(f)$ è nulla al di fuori dell'intervallo [-B,+B]. L'unica replica del segnale $\bar{X}(f)$ che rimane nell'uscita $\tilde{X}(f)$ è pertanto quella centrata in zero. Questa "replica" vale in realtà 1/T volte la X(f), infatti:

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n = -\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right).$$

In conclusione:

$$\widetilde{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = \frac{1}{T}X(f)$$

e antitrasformando:

$$\widetilde{x}(t) = \frac{1}{T}x(t).$$

¹Il nome sinc(·) assegnato a suo tempo alla funzione $\sin(\pi x)/\pi x$ significa infatti "seno cardinale", con riferimento all'interpolazione cardinale stessa.

Si noti che è presente il coefficiente 1/T, ma come detto ciò che interessa è ottenere una replica fedele del segnale originario. Il fattore 1/T può essere facilmente tolto.

Il segnale interpolato coincide ovviamente (a parte coefficienti a moltiplicare) con il segnale di partenza negli istanti di campionamento. In un qualunque altro istante non coincidente con quelli di campionamento, il segnale originario, a banda rigorosamente limitata, viene ricostruito combinando linearmente tutti gli infiniti campioni x[n] del segnale x(t), in questo modo:

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} x[n] p(t - nT)$$

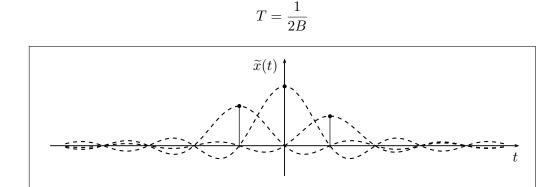
$$= 2B \sum_{n = -\infty}^{+\infty} x[n] \operatorname{sinc} (2B(t - nT)) = \frac{1}{T} x(t).$$
(6.5)

In particolare, quando T = 1/2B si ha:

$$x(t) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} x[n] \operatorname{sinc} (2B(t - nT)).$$
(6.6)

In altre parole, come si vede chiaramente nelle equazioni (6.5) e (6.6), la ricostruzione di un segnale a banda limitata a un certo istante richiede la conoscenza di tutta la sequenza di campioni del segnale stesso, in istanti sia antecedenti quello considerato, sia successivi. Pertanto la formula di interpolazione cardinale, di grande rilevanza teorica, è inutilizzabile nella sua forma esatta nelle applicazioni pratiche per due motivi: in primo luogo, sono in teoria richiesti infiniti termini di una sommatoria per ricostruire il segnale originario; secondariamente, una ricostruzione in tempo reale è impossibile perché si richiederebbe la conoscenza di valori di segnale in istanti successivi a quello di interpolazione (interpolatore non causale).

Esempio 6.3 (ricostruzione grafica da tre campioni con interpolatore cardinale).



6.9 FILTRAGGIO NUMERICO

Molti dei concetti e delle proprietà dei sistemi monodimensionali a tempo continuo viste nel capitolo 4 (da pag. 57) possono essere adattate al caso dei sistemi a tempo discreto. Per tutte le proprietà possedute dai sistemi a tempo discreto (linearità, stazionarietà, causalità, stabilità, memoria, invertibilità) non ci sono sostanziali differenze rispetto al caso a tempo continuo, salvo piccoli adattamenti (come sostituire,

ad esempio, integrali con sommatorie). Anche per il caso dei sistemi lineari e stazionari a tempo discreto valgono le stesse considerazioni: i concetti di risposta impulsiva, risposta in frequenza, convoluzione ecc. sono analoghi ai corrispondenti a tempo continuo.

Mostriamo ora come in pratica alcuni di questi concetti dei SLS si riadattino al *Più che di "filtri"* filtraggio numerico.

Più che di "filtri" numerici (termine usato dal Martorella) qui parliamo di sistemi

a tempo discreto.

Il filtraggio numerico è il filtraggio operato su una sequenza da un sistema lineare stazionario non analogico, ma numerico (discreto).

$$x[n] \longrightarrow h[n] \longrightarrow y[n]$$

Innanzitutto il prodotto di convoluzione tra sequenze è definito (in modo analogo a quello nel tempo continuo) mediante una somma (somma di convoluzione):

$$x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] y[n-k].$$

La somma di convoluzione gode naturalmente delle stesse proprietà commutativa, associativa e distributiva già dimostrate per l'integrale di convoluzione tra segnali analogici.

Il sistema può essere caratterizzato per mezzo della h[n], che come per i SLS tempo continui è la risposta impulsiva del sistema:

$$h[n] \triangleq \mathcal{T} [\delta[n]].$$

Teorema 6.9. La sequenza in uscita a un sistema lineare stazionario numerico si calcola come:

$$y[n] = x[n] \otimes h[n]. \tag{6.7}$$

Dimostrazione. Intanto, (come l'analoga per i segnali tempo continui) per i segnali tempo discreti vale la relazione:

$$x[n] \otimes \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] = x[n]$$

in quanto la δ vale 1 solo dove l'argomento si annulla $(n-k=0 \Rightarrow k=n)$ e zero altrove e dunque l'unico termine della sommatoria che sopravvive è quello per k=n. Quindi:

$$y[n] = \mathcal{T}[x[n]] = \mathcal{T}[x[n] \otimes \delta[n]] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]\right]$$

ma poiché \mathcal{T} è un operatore lineare che opera sulla variabile n:

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \mathcal{T} [\delta[n-k]].$$

Infine, per l'ipotesi di stazionarietà del sistema, per cui $\mathcal{T}\left[\delta[n-k]\right]=h[n-k]$, si giunge alla:

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = x[n] \otimes h[n].$$

TEOREMA 6.10. L'uscita nel dominio della frequenza può essere calcolata come:

$$\bar{Y}(f) = \bar{X}(f)\bar{H}(f). \tag{6.8}$$

Dimostrazione. Infatti:

$$\bar{Y}(f) = \text{TFS}\left[y[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j2\pi f nT}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] e^{-j2\pi f nT}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k] e^{-j2\pi f nT}$$

ponendo n' = n - k, otteniamo:

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} h[n'] e^{-j2\pi f n'T} e^{-j2\pi f kT} = \bar{X}(f)\bar{H}(f).$$

La risposta in frequenza è una funzione periodica di periodo 1/T. Data la risposta in frequenza, definiamo anche per i sistemi a tempo discreto la risposta in ampiezza, che permette di stabilirne le caratteristiche di selettività, e la sua risposta in fase.

6.9.1 FILTRI NUMERICI E ANALISI ENERGETICA

Si tratta di capire come è fatta la funzione di autocorrelazione dell'uscita, nota quella in ingresso e la risposta impulsiva del sistema. Così come avevamo fatto per i sistemi lineari a tempo continuo, consideriamo di trattare h[n] reale.

Teorema 6.11. La funzione di autocorrelazione della sequenza in uscita è data dalla:

$$R_y[k] = R_x[k] \otimes h[k] \otimes h[-k].$$

Dimostrazione. La densità spettrale di energia è:

$$S_y(f) = |\bar{Y}(f)|^2 = |\bar{X}(f)|^2 |\bar{H}(f)|^2 = S_x(F)\bar{H}(f)\bar{H}^*(f)$$

e antitrasformando otteniamo

$$R_n[k] = R_x[k] \otimes h[k] \otimes h[-k].$$

Si può, pertanto, calcolare l'energia E_x della sequenza in uscita senza conoscere la y[n] stessa:

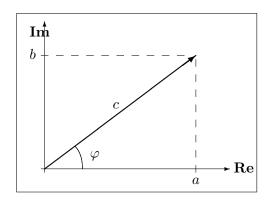
$$E_x = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S_y(f) \, \mathrm{d}f.$$

APPENDICE A

RICHIAMI SUI NUMERI COMPLESSI**

$$z=a+jb$$
 $a=\mathbf{Re}\{z\}$: parte reale $b=\mathbf{Im}\{z\}$: parte immaginaria

$$z = ce^{j\varphi} \qquad c = \text{modulo}$$
$$\varphi = \text{fase}$$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = c \cos \varphi$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad b = c \sin \varphi$$

$$z = a + jb = c\cos\varphi + jc\sin\varphi = ce^{j\varphi}$$

$$(e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$\mathbf{Re}\{z\} = a = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

 $\mathbf{Im}\{z\} = b = \frac{1}{2}(z - z^*)$

A.1 OPERAZIONI ALGEBRICHE

$$z_1 = a_1 + jb_1 = c_1 e^{j\varphi_1}$$

$$\begin{split} z_2 &= a_2 + jb_2 = c_2 e^{j\varphi_2} \\ z &= z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \\ z &= z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1c_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ |z|^2 &= z \cdot z^* = c e^{j\varphi} \cdot c e^{-j\varphi} = c^2 e^{j(\varphi - \varphi)} = c^2 \\ z^2 &= z \cdot z = c e^{j\varphi} \cdot c e^{j\varphi} = c^2 e^{j2\varphi} = (a^2 - b^2) + j2ab \\ z &= \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{c_1 e^{j\varphi_1}}{c_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{c_1}{c_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{split}$$

A.2 Funzioni complesse di variabile reale

$$z(t), z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$$

$$z(t) = a(t) + jb(t) = c(t)e^{j\varphi(t)}$$

$$\int_{a}^{b} z(t) dt = \int_{a}^{b} a(t) dt + j \int_{a}^{b} b(t) dt$$

$$\frac{d}{dt}[z(t)] = \frac{d}{dt}[a(t)] + j\frac{d}{dt}[b(t)]$$

Parte II

SEGNALI ALEATORI

Processi Stocastici

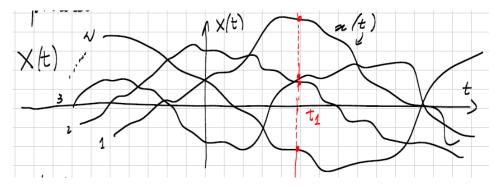
7.1 Dai segnali determinati ai segnali aleatori

Già nel capitolo 1 abbiamo introdotto due importanti classi distinte di segnali: determinati e aleatori. Alla prima classe appartengono segnali di cui è possibile conoscere a priori l'andamento. L'unica maniera di conoscere l'andamento di un segnale aleatorio, invece, è quella di osservarlo e registrarlo sotto forma di grafico. Il segnale non è dunque determinato, cioè non è predicibile, ed è noto solo a posteriori. Questa è la caratteristica fondamentale dei segnali aleatori: non sono noti a priori.

In questo capitolo si vedrà come modellizzare un segnale aleatorio attraverso la teoria dei processi aleatori (o stocastici), utilizzando come strumento matematico basilare la teoria della probabilità, i cui risultati fondamentali saranno riportati di volta in volta nel testo.

7.1.1DEFINIZIONE DI PROCESSO ALEATORIO

Un segnale aleatorio, detto anche processo stocastico, può esser definito come una Il prof. Berizzi ha collezione o insieme di un numero finito, infinito numerabile o infinito di segnali de- dato questa semplice terministici, i quali rappresentano tutte le possibili osservazioni, misure, realizzazioni definizione di o funzioni campione del processo. Un segnale aleatorio si indica con X(t), ma, come processo aleatorio, già anticipato, è noto solo dopo la sua misurazione, che consiste in tutte le possibili ignorando la osservazioni dell'esperimento.



definizione più precisa e rigorosa data al capoverso seguente, estratto dal [2].

Volendo dare una definizione più precisa e matematicamente rigorosa di processo aleatorio, è necessario innanzitutto considerare un esperimento aleatorio o, meglio, uno spazio di probabilità caratterizzato da uno spazio campione $\Omega = \{\omega_i\}$ (qui per semplicità discreto), da una classe degli eventi S e dalla legge di probabilità $\Pr\{\cdot\}$ definita su S. Si deve poi individuare un insieme di funzioni del tempo $x_i(t)$ (le funzioni campione) in numero pari a quello dei risultati dell'esperimento ω_i . Infine, si deve istituire una corrispondenza che associa a ciascun risultato ω_i dell'esperimento una delle possibili funzioni campione $x_i(t)$:

$$X(\omega_i; t) = x_i(t). \tag{7.1}$$

Questa corrispondenza costituisce appunto il processo aleatorio, il quale si indica comunemente con X(t) omettendo per semplicità la dipendenza dal risultato ω_i dello spazio campione Ω . Tale dipendenza, in ogni caso, va sempre considerata implicita. Quando si effettua una prova dell'esperimento (una misura di un elettrocardiogramma), si ha un risultato dello spazio campione (un paziente) cui è associata una funzione campione (un elettrocardiogramma), cioè il segnale che effettivamente viene osservato, e che prende il nome di realizzazione del processo. 1

Fissare nel processo aleatorio $X(\omega_i;t)$ il risultato dell'esperimento, ad esempio ω_i , significa selezionare quella tra le varie funzioni campione che si è realizzata in una data prova; non c'è più alcuna aleatorietà e il processo diventa a posteriori il segnale determinato $X(\omega_i;t)$, cioè la funzione campione $x_i(t)$.

Viceversa, se fissiamo arbitrariamente un certo istante di tempo \bar{t} , il valore del processo $X(\omega_i; \bar{t})$ all'istante fissato è un insieme di valori ottenuti "campionando" le funzioni campione a quell'istante: in una parola, è una variabile aleatoria, in accordo con il concetto elementare che segnale aleatorio è un segnale il cui valore a un dato istante non è esattamente determinabile. (I processi stocastici, d'altro canto, possono esser visti come variabili aleatorie che dipendono anche dal tempo.)

7.1.2 Caratterizzazione statistica di un processo aleatorio

E chiaro a questo punto che, contrariamente al caso di un segnale determinato, non ha senso parlare dell'andamento di un processo. D'altronde, l'elencazione esaustiva di tutte le funzioni campione del processo è un procedimento impensabile nella grande maggioranza dei casi. Si pone quindi il problema della caratterizzazione delle proprietà di un processo dal punto di vista statistico.

Fissato l'istante $t = t_1$, il valore del processo $X(t_1)$ a quell'istante è una variabile aleatoria, il cui comportamento statistico può essere descritto mediante la sua funzione distribuzione di probabilità. Si definisce perciò la funzione distribuzione di probabilità del I ordine del processo mediante la relazione

$$F_X(x;t_1) \triangleq \Pr\{X(t_1) \le x\} \tag{7.2}$$

dove la legge di probabilità $\Pr\{\cdot\}$ è per definizione uguale a sua volta al limite per $n \to \infty$ del rapporto tra il numero di osservazioni per cui $X(t_1) \le x$ e il numero totale delle osservazioni:

$$F_X(x;t_1) \triangleq \lim_{n \to \infty} \frac{n_{X(t_1) \le x}}{n}.$$
 (7.3)

$$F_X(x) \triangleq \Pr\{X \le x\}$$

dove con $\Pr\{\cdot\}$ si è indicata la legge di probabilità, che associa a ogni evento una misura della sua probabilità di presentazione, e dove x è un valore reale generico ma fissato (una sorta di valore di "sonda") che identifica l'evento $\{X \leq x\}$ di cui si deve calcolare la probabilità.

¹Normalmente, realizzazione viene usata come sinonimo di funzione campione. In realtà, le funzioni campione sono tutti i possibili segnali del processo, mentre la realizzazione è quello tra i possibili segnali che viene effettivamente osservato in una data prova dell'esperimento.

²La funzione distribuzione di probabilità $F_X(x)$ di una variabile aleatoria X è definita come:

professore.

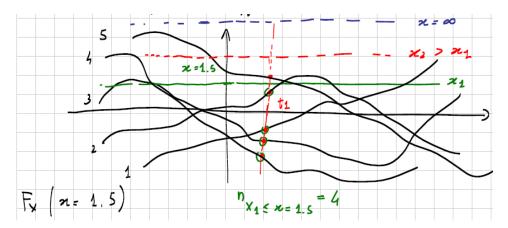


Figura 7.1: Funzione distribuzione di probabilità del primo ordine di un processo aleatorio. Essendo il numero totale degli esperimenti fatti n=5, la $F_X(x;t)$ valutata all'istante t_1 per x=1.5 vale 4/5=0.8.

Da questa formulazione seguono direttamente alcune proprietà della distribuzione di probabilità $F_X(x;t)$:

1. Il limite per $x \to +\infty$ è unitario:

$$F_X(+\infty) = 1$$
 o meglio $\lim_{x \to +\infty} F_X(x;t) = 1$ per ogni t .

2. Il limite per $x \to -\infty$ è nullo:

$$F_X(-\infty) = 0$$
 o meglio $\lim_{x \to -\infty} F_X(x;t) = 0$ per ogni t .

3. È compresa tra 0 e 1:

$$0 \le F_X(x;t) \le 1$$
 per ogni x, t .

4. È una funzione monotona non decrescente, ovvero:

$$x_2 > x_1 \implies F_X(x_2;t) \ge F_X(x_1;t).$$

5. La probabilità dell'evento $\{x_1 < X(t) \le x_2\}$ può essere calcolata mediante la Proprietà riportata relazione: in [2, pag. 383] ma $\Pr\{x_1 < X(t) \le x_2\} = F_X(x_2;t) - F_X(x_1;t)$. non citata dal

Una descrizione completa del tutto equivalente (e anche più usata in pratica) si basa sulla funzione densità di probabilità del I ordine del processo:

$$f_X(x;t) \triangleq \frac{\partial F_X(x;t)}{\partial x}$$
 (7.4)

da cui si ricava immediatamente la relazione inversa:

$$F_X(x;t) = \int_{-\infty}^x f_X(\alpha;t) d\alpha.$$

La funzione densità di probabilità $f_X(x;t)$ gode delle seguenti proprietà:

1. È non negativa, ovvero:

$$f_X(x;t) \ge 0$$

poiché la funzione distribuzione di probabilità è monotona non decrescente.

2. L'integrale su tutto l'asse reale della funzione densità è unitario:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x;t) \, \mathrm{d}x = 1$$

in quanto questo integrale rappresenta la probabilità dell'evento certo (deriva dalla proprietà 1 della distribuzione di probabilità).

3. La probabilità dell'evento $\{x_1 < X(t) \le x_2\}$ può essere calcolata mediante la relazione:

$$\Pr\{x_1 < X(t) \le x_2\} = F_X(x_2; t) - F_X(x_1; t) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x; t) \, \mathrm{d}x.$$

La funzione $f_X(x;t)$ (o equivalentemente la $F_X(x;t)$) non è sufficiente a caratterizzare completamente le proprietà del processo. Consente di caratterizzare variabili aleatorie estratte dal processo purché considerate singolarmente, ma da essa non si può ricavare una probabilità come ad esempio

$$\Pr\{X(t_2) \ge X(t_1)\},\,$$

che richiede la considerazione congiunta di due variabili aleatorie estratte dallo stesso processo in istanti distinti. Se c'è un'influenza reciproca tra i valori assunti dalle due variabili, le sole funzioni $F_X(x;t_1)$ e $F_X(x;t_2)$ non bastano, poiché non danno alcuna informazione sul comportamento congiunto delle due variabili aleatorie, ma riguardano solo una grandezza senza minimamente tener conto anche dell'altra.

Estraendo dal processo X(t) le due variabili aleatorie $X(t_1)$ e $X(t_2)$, il comportamento statistico di questa coppia di variabili aleatorie è completamente descritto dalla loro funzione distribuzione di probabilità del II ordine del processo:

$$F_x(x_1, x_2; t_1, t_2) \triangleq \Pr\{(X(t_1) \le x_1) \cap (X(t_2) \le x_2)\}$$
 (7.5)

(la quale, come vedremo, determina anche le proprietà statistiche marginali, cioè relative a una sola variabile della coppia). Essa misura la probabilità che si verifichino congiuntamente i due eventi $X(t_1) \leq x_1$ e $X(t_2) \leq x_2$.

La funzione distribuzione di probabilità del II ordine gode delle seguenti proprietà:

- 1. La funzione $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$, comunque si scelga il valore x_1 è monotona non decrescente al variare di x_2 ; analogamente, comunque si scelga il valore x_2 , è monotona non decrescente al variare di x_1 .
- 2. Soddisfa le uguaglianze:

$$F_X(-\infty, x_2) = 0$$
 e $F_X(x_1, -\infty) = 0$.

3. Il limite per $x_1, x_2 \to +\infty$ è unitario:

$$F_X(+\infty, +\infty) = 1$$

Ma anche avendo la densità di ordine *n*-esimo, come si fa a calcolare questa probabilità?

4. È compresa tra 0 e 1:

$$0 \le F_X(x_1, x_2) \le 1.$$

5. Le funzioni distribuzione marginali delle variabili aleatorie $X(t_1)$ e $X(t_2)$ si ricavano dalla congiunta come segue:

$$F_X(x_1) = F_X(x_1, +\infty) F_X(x_2) = F_X(+\infty, x_2).$$
 (7.6)

La funzione densità di probabilità del II ordine di un processo è espressa dalla:

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \triangleq \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$
 (7.7)

da cui la relazione inversa:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_X(\alpha_1, \alpha_2; t_1, t_2) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2$$
 (7.8)

e gode di proprietà simili a quelle già viste per la densità di probabilità del I ordine, ad esempio:

• È non negativa:

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \ge 0.$$

• L'integrale è unitario:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\alpha_1, \alpha_2; t_1, t_2) d\alpha_1 d\alpha_2 = 1.$$

Come è chiaro, il ragionamento che ha portato a estendere la descrizione dal primo al secondo ordine può essere iterato a piacere. La conclusione è che la descrizione statistica di un processo è completa solo quando si è in grado di caratterizzare il comportamento statistico congiunto di un numero n arbitrario di variabili aleatorie $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ estratte da X(t) a n istanti diversi, comunque grande sia il numero intero n e comunque si scelga la n-upla di istanti (t_1, t_2, \ldots, t_n) . Ciò richiede, quindi, la conoscenza della funzione distribuzione di probabilità dell'n-esimo ordine:

$$F_X(\underline{x};\underline{t}) \triangleq \Pr\{(X(t_1) \le x_1) \cap \dots \cap (X(t_n) \le x_n)\}$$
(7.9)

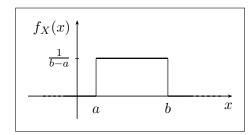
o, equivalentemente, la funzione densità di probabilità di ordine n:

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) \triangleq \frac{\partial^n F_X(\underline{x};\underline{t})}{\partial x_1 \dots \partial x_n},\tag{7.10}$$

avendo definito i vettori $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$.

7.1.3 Classi di variabili aleatorie

Classifichiamo ora le variabili aleatorie in alcune classi, a seconda del comportamento che presentano.



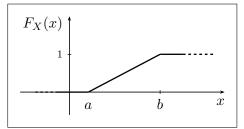


Figura 7.2: Densità e distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria uniforme.

• Variabili aleatorie uniformemente distribuite. Una variabile aleatoria X si dice uniforme sull'intervallo [a,b], e si scrive $X \in \mathcal{U}[a,b]$, se la sua densità di probabilità $f_X(x)$ è costante in tale intervallo e si annulla al di fuori di esso. Poiché l'integrale deve essere unitario, il valore della funzione su [a,b] deve essere evidentemente pari a 1/(b-a):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Ogni evento del tipo $\{X \leq x\}$ ha sempre la medesima probabilità di verificarsi indipendentemente dalla posizione di x, purché $x \in [a, b]$.

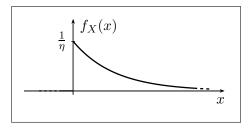
• Variabile esponenziale unilatera. Una variabile aleatoria X è esponenziale unilatera se la sua densità di probabilità $f_X(x)$ è espressa dalla relazione

$$f_X(x) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{x}{\eta}} u(x)$$

ove η è un parametro reale positivo. La funzione distribuzione $F_X(x)$ è allora:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\eta} e^{-\frac{\alpha}{\eta}} u(\alpha) d\alpha$$
$$= \int_0^x \frac{1}{\eta} e^{-\frac{\alpha}{\eta}} d\alpha$$
$$= -e^{-\frac{\alpha}{\eta}} \Big|_0^x = (1 - e^{-\frac{x}{\eta}}) u(x).$$

Le variabili aleatorie appartenenti a questa classe si indicano con $\mathcal{E}[\eta]$.



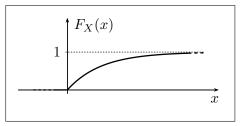


Figura 7.3: Densità e distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria esponenziale unilatera.

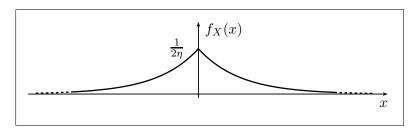


Figura 7.4: Funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria esponenziale bilatera.

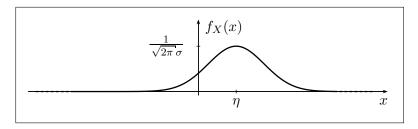


Figura 7.5: Funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria gaussiana.

• Variabile esponenziale bilatera. Una variabile aleatoria X è esponenziale unilatera se la sua densità di probabilità $f_X(x)$ è espressa dalla relazione

$$f_X(x) = \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{|x|}{\eta}} u(x).$$

Le variabili aleatorie appartenenti a questa classe si indicano con $\mathcal{E}_2[\eta]$.

• Variabili aleatorie gaussiane o normali. Si denotano con la scrittura $\mathcal{N}(\eta, \sigma^2)$ e sono caratterizzate da una densità di probabilità a forma di "campana di Gauss":

$$f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}.$$

7.2 Indici statistici del I e II ordine di un processo aleatorio

È abbastanza chiaro che, assegnato un processo X(t), è impresa disperata pervenire alla sua conoscenza statistica completa. In alcuni casi è sufficiente in realtà conoscere la distribuzione (o densità) di probabilità del primo ordine, raramente si cerca di misurare o calcolare quella del secondo. Molto più spesso ci si accontenta di parametri statistici semplificati, discussi in questo paragrafo.

7.2.1 Indici del I ordine: valor medio, potenza, varianza

Una grandezza particolarmente significativa nella descrizione statistica semplificata di un processo aleatorio X(t) è la sua funzione valor medio statistico $\eta_X(t)$. Per definizione, il valore di questa funzione a un istante t è il valor medio della variabile

aleatoria X(t), estratta dal processo all'istante stesso:³

$$\eta_X(t) \triangleq \mathrm{E}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x;t) \,\mathrm{d}x.$$
 (7.11)

Può esser vista come l'integrale di tutti i valori della x che il processo può assumere pesato ciascuno con la relativa probabilità di presentazione: $\eta_X(t)$ rappresenta in certo senso un valore "baricentrico" attorno al quale si distribuiscono i valori della variabile aleatoria X(t) stessa (perciò è un indice di posizione).

La funzione valor medio è una statistica del primo ordine di X(t) poiché il suo calcolo prevede la considerazione di una sola variabile aleatoria estratta dal processo, e quindi richiede la conoscenza della sola densità di probabilità del primo ordine.

Un'altra grandezza statistica del primo ordine utile per caratterizzare statisticamente il processo X(t) è la funzione potenza media statistica istantanea $P_X(t)$ (detta brevemente, potenza media):

$$P_X(t) \triangleq \mathrm{E}\{|X(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 f_X(x;t) \,\mathrm{d}x.$$
 (7.12)

Per i segnali aleatori si definisce anche la funzione varianza del processo:

$$\sigma_X^2(t) \triangleq \mathrm{E}\{|X(t) - \eta_X(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \eta_X(t)|^2 f_X(x;t) \,\mathrm{d}x$$
 (7.13)

cioè la varianza della variabile aleatoria ottenuta fissando l'istante t. Può anche essere espressa come la potenza media istantanea del $processo\ di\ scarto$, definito come il processo di partenza a meno del valor medio:

$$L_X(t) = X(t) - \eta_X(t).$$

Questa relazione vale in generale anche per segnali complessi, scrivendo come ovvio: $\sigma_X^2(t) = P_X(t) - |\eta_X(t)|^2$.

esta relazione vale Nelle (7.12) e (7.13) spesso scompare il modulo, avendo a che fare con segnali in generale anche reali. Proprio considerando segnali reali, sviluppando la (7.13) si ricava facilmente la per segnali relazione tra potenza media e varianza:

$$\sigma_X^2(t) = P_X(t) - \eta_X^2(t). \tag{7.14}$$

Infatti, tenendo conto che la $\eta_X(t)$ è una funzione deterministica, si ha:

$$\sigma_X^2(t) = \mathrm{E}\{(X(t) - \eta_X(t))^2\}$$

$$= \mathrm{E}\{X^2(t)\} - 2\,\mathrm{E}\{\eta_X(t) \cdot X(t)\} + \mathrm{E}\{\eta_X^2(t)\}$$

$$= P_X(t) - 2\eta_X(t)\,\mathrm{E}\{X(t)\} + \eta_X^2(t)$$

$$= P_X(t) - \eta_X^2(t).$$

$$E\{g(X)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

che può esser visto come una somma dei valori g(x) pesata dalla densità di probabilità di X. La lettera "E" è l'iniziale della parola inglese expectation, traducibile in italiano con "aspettativa". Si noti che, essendo un integrale, gode della proprietà di linearità.

³Quando si ha a che fare con un problema di trasformazione di una variabile aleatoria Y = g(X) (o anche di un processo aleatorio), si introduce il cosiddetto operatore valor medio:

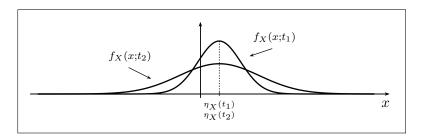


Figura 7.6: La varianza fornisce un indice di dispersione, che rappresenta quanto poco i valori sono concentrati attorno al valor medio.

Si può anche dire, in certi termini, che la varianza equivale alla differenza tra l'aspettazione del quadrato e il quadrato dell'aspettazione.

La radice quadrata $\sigma_X(t) \geq 0$ della varianza è la deviazione standard, che è un indice di dispersione, poiché rappresenta di quanto ci si discosta dal valore medio. A maggiore varianza corrispondono valori molto dispersi attorno al valor medio, e viceversa. Al limite, una variabile aleatoria con varianza nulla ha valori per niente dispersi attorno al valor medio e la sua densità di probabilità diventa "infinitamente appuntita" (una delta di Dirac) attorno a η_X : in pratica la variabile aleatoria "collassa" in un valore certo.

Si consideri il grafico nella figura 7.6. Si noti, innanzitutto, che si è supposto che il valor medio $\eta_X(t_2)$ della variabile aleatoria $X(t_2)$ coincida con $\eta_X(t_1)$. Si ha una situazione in cui $\sigma_X(t_2) > \sigma_X(t_1)$, ossia la densità di probabilità $f_X(x;t_2)$ ha una dispersione maggiore attorno al suo valor medio rispetto alla dispersione della $f_X(x;t_1)$ attorno a $\eta_X(t_1)$.

7.2.2 Indici del II ordine: autocorrelazione e autocovarianza

Introduciamo adesso due parametri statistici del *secondo ordine* di fondamentale importanza per lo studio dei segnali aleatori.

Fissiamo due istanti di tempo arbitrari t_1 e t_2 sul nostro processo, ottenendo le due variabili aleatorie $X(t_1)$ e $X(t_2)$. La funzione di autocorrelazione del processo si calcola come correlazione⁴ tra queste due variabili aleatorie:

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq \mathrm{E}\{X(t_1)X^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2.$$

Naturalmente, il valore di questa correlazione risulterà funzione dei due istanti t_1 e t_2 ai quali le variabili sono state estratte, e potrà essere calcolata solo conoscendo la funzione densità di probabilità del secondo ordine del processo. Inoltre, si chiama funzione di autocorrelazione perché le due variabili aleatorie di cui si calcola la correlazione sono estratte dallo stesso processo aleatorio.

DEFINIZIONE 7.1: Due variabili aleatorie si dicono ortogonali quando la loro correlazione è nulla.

$$r_{XY} \triangleq \mathrm{E}\{XY^*\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

 $^{^4}$ La correlazione tra due variabili aleatorie X e Y si calcola come:

Se invece tra le due variabili aleatorie $X(t_1)$ e $X(t_2)$ calcoliamo la covarianza⁵ otteniamo la funzione di autocovarianza di X(t):

$$C_X(t_1, t_2) \triangleq \mathbb{E} \left\{ \left(X(t_1) - \eta_X(t_1) \right) \left(X(t_2) - \eta_X(t_2) \right)^* \right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_1 - \eta_X(t_1) \right) \left(x_2 - \eta_X(t_2) \right) f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2$$

che equivale alla funzione di autocorrelazione del processo di scarto:

$$C_X(t_1, t_2) = R_{L_X}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\{L_X(t_1)L_X^*(t_2)\}.$$

Da [2, pag. 412].

La covarianza è un parametro statistico molto importante che tende ad accertare se tra le due variabili $X(t_1)$ e $X(t_2)$ esiste una relazione di dipendenza di tipo lineare, e che comunque misura la tendenza di variazione congiunta (perciò co-varianza) delle due. Se la covarianza è grande e positiva, le due variabili aleatorie $X(t_1)$ e $X(t_2)$ tendono a discostarsi dal rispettivo valor medio nella stessa direzione, cioè le due quantità $(X(t_1) - \eta_X(t_1))$ e $(X(t_2) - \eta_X(t_2))$ tendono ad avere lo stesso segno.

Definizione 7.2: Due variabili aleatorie si dicono incorrelate quando la loro covarianza è nulla.

È facile verificare che se due variabili aleatorie $X(t_1)$ e $X(t_2)$ sono ortogonali e inoltre $\eta_X(t) = 0$, allora esse sono anche incorrelate.

Il professore quasi sempre in

questa forma.

Le funzioni di autocorrelazione e autocovarianza possono essere espresse anche in preferisce scriverle una forma leggermente diversa. Ponendo $t_2 = t$ e $t_1 = t + \tau$, sono:

$$R_X(t+\tau,t) = E\{X(t+\tau)X^*(t)\}$$
(7.15)

$$C_X(t+\tau,t) = \mathbb{E}\left\{ (X(t+\tau) - \eta_X(t+\tau))(X(t) - \eta_X(t))^* \right\}.$$
 (7.16)

Da queste definizioni si ricava immediatamente la relazione:

$$C_X(t+\tau,t) = R_X(t+\tau,t) - \eta_X(t+\tau)\eta_X(t).$$
 (7.17)

Infatti, se consideriamo segnali reali:

$$C_X(t + \tau, t) = E \{ (X(t + \tau) - \eta_X(t + \tau)) (X(t) - \eta_X(t))^* \}$$

$$= E \{ X(t + \tau)X(t) - X(t + \tau)\eta_X(t) - \eta_X(t + \tau)X(t) + \eta_X(t + \tau)\eta_X(t) \}$$

$$= E \{ X(t + \tau)X(t) \} - \eta_X(t) E \{ X(t + \tau) \}$$

$$- \eta_X(t + \tau) E \{ X(t) \} + \eta_X(t + \tau)\eta_X(t)$$

$$= R_X(t + \tau, t) - \eta_X(t)\eta_X(t + \tau)$$

Se fissiamo gli istanti $t_1 = t_2 = t$ (o equivalentemente $\tau = 0$), la funzione di autocorrelazione fornisce la potenza media del processo:

$$R_X(t,t) = R_X(\tau)|_{\tau=0} = \mathbb{E}\{X(t)X^*(t)\} = \mathbb{E}\{X^2(t)\} = P_X(t)$$

mentre la funzione di covarianza restituisce la varianza:

$$C_X(t,t) = C_X(\tau)|_{\tau=0} = \mathbb{E}\{(X(t) - \eta_X(t))^2\} = \sigma_X^2(t).$$

cosicché la relazione (7.17) diventa uguale alla (7.14).

$$c_{XY} \triangleq \mathrm{E}\{(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)(y - \eta_Y) f_{XY}(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

⁵La covarianza tra due variabili aleatorie è definita come:

7.3 Processi Aleatori Stazionari

7.3.1 Stazionarietà in senso stretto

Come già visto nei precedenti paragrafi, gli indici statistici di un processo, ad esempio la funzione valor medio o la funzione di autocorrelazione e, a maggior ragione, le funzioni densità di probabilità, dipendono in generale dalla scelta degli n istanti di tempo t_1, \ldots, t_n in corrispondenza dei quali viene valutato il processo. Se spostiamo rigidamente tutti gli istanti temporali, cioè consideriamo la nuova n-upla di istanti $t_1 + \Delta t, \ldots, t_n + \Delta t$, con Δt arbitrario, in generale, otteniamo un diverso valore della funzione densità di probabilità di ordine n. Se, viceversa, il valore della funzione densità resta invariato qualunque sia Δt e per ogni ordine n, allora il processo si dice Stazionario in Senso Stretto (SSS):

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t, \dots, t_n + \Delta t) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad \text{per ogni } n, \Delta t.$$
(7.18)

La stazionarietà in senso stretto richiede dunque che le funzioni densità di probabilità del processo di qualunque ordine siano invarianti rispetto a una traslazione rigida degli istanti temporali, e ciò significa che i processi X(t) e $X(t+\Delta t)$ hanno le stesse statistiche e quindi sono equivalenti dal punto di vista statistico. Ma questo non significa che $X(t+\Delta t)$ sia uguale a X(t); infatti, le funzioni campione di $X(t+\Delta t)$ sono ottenute da quelle di X(t) per traslazione temporale, e quindi i due processi sono differenti, benché indistinguibili con misure statistiche.

Discutiamo ora le conseguenze di questa definizione. Se consideriamo la densità del primo ordine del processo, la definizione (7.18) ci dice che deve valere l'uguaglianza

$$f_X(x;t) = f_X(x;t + \Delta t)$$
, per ogni Δt .

Poiché Δt è arbitrario, se ne conclude che la densità di probabilità del primo ordine $f_X(x;t)$ non dipende dal tempo:

$$f_X(x;t) \equiv f_X(x). \tag{7.19}$$

In tal caso il processo è detto *stazionario del I ordine*, e tutte le grandezze statistiche del primo ordine del processo sono a loro volta indipendenti dal tempo:

$$\eta_X(t) \equiv \eta_X, \quad P_X(t) \equiv P_X, \quad \sigma_X^2(t) \equiv \sigma_X^2.$$

Consideriamo ora le implicazioni della stazionarietà sulle statistiche del secondo ordine. Immaginiamo, allora, di osservare il processo aleatorio X(t) a due istanti arbitrari t_1 e t_2 , estraendo da esso le variabili aleatorie $X(t_1)$ e $X(t_2)$: il comportamento statistico congiunto di tali variabili è descritto dalla funzione $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$. Se consideriamo, poi, la coppia di variabili aleatorie $X(t_1 + \Delta t)$ e $X(t_2 + \Delta t)$ estratte agli istanti $t_1 + \Delta t$ e $t_2 + \Delta t$, deve essere

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t).$$

Considerando che anche in questo caso Δt è arbitrario, è chiaro che la funzione $f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$ non può dipendere da t_1 e t_2 separatamente, ma deve dipendere soltanto dalla differenza $t_1-t_2=\tau$ tra gli istanti temporali, che resta appunto

invariata in una traslazione rigida dei tempi. La condizione per la *stazionarietà del II ordine* può cioè esser scritta come:

$$f_X(x_1, x_2; t + \tau, t) \equiv f_X(x_1, x_2; \tau).$$
 (7.20)

Tutte le statistiche del *secondo ordine*, e in particolare la funzione di autocorrelazione e la funzione di autocovarianza, godono evidentemente di questa stessa proprietà:

$$R_X(t+\tau,t) \equiv R_x(\tau), \quad C_X(t+\tau,t) \equiv C_X(\tau).$$

Generalizzando, è chiaro che la densità di probabilità (e tutte le statistiche) di ordine n di un processo SSS dipendono soltanto dalle (n-1) differenze (distanze) tra gli n istanti. La relazione (7.18) può esser perciò riscritta proprio esplicitando le differenze tra gli istanti temporali:

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t, t + \tau_1, \dots, t + \tau_{n-1})$$

$$= f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \quad \text{per ogni } n.$$
(7.21)

Attraverso le "regole marginali" (vedi le relazioni (7.6) a pag. 113) non è difficile verificare che se un processo è stazionario di ordine n, allora è stazionario anche di ordine $k \leq n$, mentre se non è stazionario di ordine k, allora non sarà stazionario neanche per ogni $m \geq k$.

7.3.2 Stazionarietà in senso lato

La verifica della stazionarietà in senso stretto di un processo è, in generale, estremamente difficoltosa (salvo casi particolari come i processi gaussiani, che studieremo nel paragrafo 7.6 a pag. 127). Di solito nelle applicazioni si considera una definizione di stazionarietà molto meno restrittiva e più facile da verificare della precedente: la stazionarietà in senso lato.

Un processo aleatorio X(t) è *Stazionario in Senso Lato* (SSL) se è stazionario in valor medio (ossia $\eta_X(t)$ è *costante*) e se è stazionario in autocorrelazione (ovvero $R_X(t_1, t_2)$ non dipende separatamente dai due istanti ma solo dalla differenza τ):

$$\begin{cases} \eta_X(t) = \eta_X \\ R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau). \end{cases}$$
 (7.22)

La definizione di stazionarietà in senso lato coinvolge solo due *particolari* statistiche semplificate, una del primo e l'altra del secondo ordine, e *non* richiede alcuna proprietà di invarianza delle densità di probabilità. Infatti, un processo stazionario in senso stretto è anche stazionario in senso lato, mentre la stazionarietà in senso lato non implica quella in senso stretto.

Inoltre, se un processo è stazionario del I ordine è anche stazionario in valor medio e analogamente se è stazionario del II ordine è anche stazionario in autocorrelazione, mentre non valgono le implicazioni inverse. Ancora, data la stazionarietà in autocorrelazione, nulla si può sapere sulla stazionarietà in valor medio, e viceversa (d'altronde se così non fosse le due condizioni (7.22) si ridurrebbero a una sola).

La stazionarietà in senso lato implica la stazionarietà in autocovarianza:

$$C_X(t+\tau,t) = R_X(t+\tau,t) - \eta_X(t+\tau)\eta_X(\tau)$$

= $R_X(\tau) - \eta_X^2 = C_X(\tau)$.

7.3.3 Proprietà della funzione di autocorrelazione di un processo stazionario in senso lato

Per quanto già detto, se il processo X(t) è stazionario almeno in senso lato, la funzione di autocorrelazione dipende soltanto dalla differenza τ tra i due istanti:

$$R_X(t+\tau,t) = R_X(\tau).$$

La funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$ gode di alcune proprietà fondamentali, non specifiche, in realtà, dei processi, ma comuni alle funzioni di autocorrelazione dei segnali determinati e aleatori. Vediamo, ora, queste proprietà per una processo SSL.

1. La funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$ è pari:

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau).$$

Per dimostrare questa relazione, basta osservare che, per la stazionarietà del processo, la correlazione tra le variabili aleatorie $X(t+\tau)$ e X(t) assume il medesimo valore della correlazione tra le variabili X(t) e $X(t-\tau)$ ottenute per traslazione rigida della quantità $-\tau$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}\{X(t+\tau)X(t)\} = \mathbb{E}\{X(t)X(t-\tau)\} = R_X(-\tau).$$

2. Il valore assunto nell'origine eguaglia la potenza media statistica del processo:

$$R_X(0) = \mathbb{E}\{X(t)^2\} = P_X \ge 0.$$

3. È massima in modulo nell'origine:

$$R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$$
.

4. La funzione di autocorrelazione è semidefinita positiva, cioè:

$$TCF[R_X(\tau)] \ge 0.$$

5. Se $R_X(\tau)$ non contiene componenti periodiche, il valore limite di $R_X(\tau)$ per Il professore non ha $\tau \to \infty$ è pari al quadrato del valore medio:

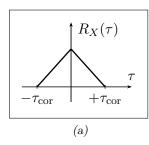
citato questa proprietà...

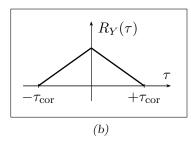
$$\lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = \eta_X^2.$$

Per giustificare questa proprietà partiamo dalla relazione:

$$R_X(\tau) = C_X(\tau) + \eta_X^2$$

Al crescere di τ , la distanza tra gli istanti t e $t-\tau$ aumenta e quindi le ...che però è funzioni campione del processo hanno "tempo" per variare sensibilmente. Questo concettualmente comporta che i valori delle variabili aleatorie X(t) e $X(t-\tau)$ tendono a diventare significativa. incorrelati, cioè la loro covarianza $C_X(\tau)$ si riduce. Al limite, quando $\tau \to \infty$ la covarianza si annulla e la funzione di autocorrelazione tende a coincidere con il quadrato del valor medio.





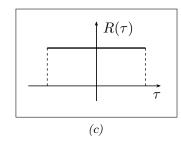


Figura 7.7: Due esempi di funzione di autocorrelazione con i rispettivi tempi di correlazione sono rappresentati a sinistra e al centro. Il grafico a destra non può essere quello di una funzione di autocorrelazione in quanto la sua TCF assume valori negativi.

Questi argomenti trattati dal prof., ma concettual menteVedi [2] a pagina 460 e seguenti.

Per chiarire qual è il significato della funzione di autocorrelazione di un processo non sono stati stazionario, consideriamo proprio due processi stazionari X(t) e Y(t). Supponiamo che abbiano stesse statistiche del primo ordine (valor medio, potenza, densità del primo ordine), ma che differiscano nella rispettiva velocità media di variazione delle funzioni campione: le prime più rapide e le seconde più lente. Se fissiamo sul processo Y(t) due istanti $Y(\bar{t}+\tau)$ e $Y(\bar{t})$ alla distanza τ , le funzioni campione, piuttosto lente, hanno avuto poco tempo per variare, e quindi le variabili aleatorie $Y(\bar{t}+\tau)$ e $Y(\bar{t})$ sono molto correlate. Viceversa, nello stesso lasso di tempo τ le funzioni campione del processo X(t), assai più veloci, sono variate considerevolmente, e i valori delle due variabili aleatorie $X(\bar{t}+\tau)$ e $X(\bar{t})$ sono molto meno correlati. In conclusione, la funzione $R_X(\tau)$ decresce velocemente a zero quando τ aumenta (figura 7.7a), mentre la funzione $R_Y(\tau)$ decresce più lentamente (figura 7.7b).

Dunque, considerando un processo aleatorio stazionario, la funzione di autocorrelazione ne misura la rapidità di variazione.

Si veda il

Per quantificare con un singolo parametro la "velocità" del segnale si introduce paragrafo 7.5.2. il tempo di correlazione $\tau_{\rm cor}$ definito come la minima distanza che deve intercorrere tra due istanti di osservazione affinché le variabili aleatorie estratte dal processo siano incorrelate. Evidentemente, il tempo di correlazione è pari alla semidurata della funzione di autocorrelazione, eventualmente definita in modo convenzionale se l'autocorrelazione non ha durata rigorosamente limitata. A tempo di correlazione grande corrispondono funzioni campione che variano lentamente, mentre a tempo di correlazione piccolo corrispondono funzioni campione aventi veloci variazioni.

7.3.4Processi parametrici

Quanto l'andamento delle funzioni campione di un processo X(t) dipende dal valore di un numero finito di variabili aleatorie (parametri), allora si dice che X(t) è un processo parametrico, e si scrive:

$$X(t) = \mathcal{Z}(t; \Theta)$$

dove Θ è il vettore dei parametri (variabili aleatorie). Queste variabili aleatorie servono in un certo senso da "intermediario" tra lo spazio campione e le funzioni campione: l'associazione tra i risultati dell'evento e la funzione campione non è diretta, bensì passa attraverso il particolare valore che la variabile aleatoria prende nella prova dell'esperimento.

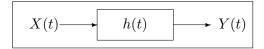
Quando Θ si riduce a un unico parametro, il processo è detto monoparametrico.

7.4 FILTRAGGIO DI UN SEGNALE ALEATORIO

Un caso tipico dell'elaborazione dei segnali è quello in cui il processo osservato X(t) è costituito da una componente determinata s(t) (il segnale "utile") accompagnata da un disturbo aleatorio a valor medio nullo D(t) (chiamato anche rumore):

$$X(t) = s(t) + D(t).$$
 (7.23)

Naturalmente, si cercherà di elaborare X(t) in modo da preservare la componente utile s(t) e reiettare il più possibile il disturbo D(t), usando a tal scopo un filtro, cioè un SLS. Abbiamo già studiato il comportamento dei SLS riguardo ai segnali determinati. In questo paragrafo studieremo il filtraggio di un segnale aleatorio.



7.4.1 Relazione ingresso-uscita tra le statistiche semplificate

Inviamo dunque un processo aleatorio X(t) in ingresso a un SLS. L'uscita Y(t) è un processo le cui funzioni campione vengono messe in corrispondenza con le funzioni campione di X(t) tramite la già nota:

$$y_i(t) = x_i(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(\alpha) h(t - \alpha) d\alpha$$

dove h(t) è la risposta impulsiva del sistema in esame. Questo vale per qualunque realizzazione $x_i(t)$ del processo X(t), e quindi scriveremo per riassumere ciò:

$$Y(t) = X(t) \otimes h(t)$$

ricordando che non va intesa come convoluzione tra segnali aleatori, ma tra coppie di funzioni campione determinate $x_i(t)$ e $y_i(t)$. In altri termini, filtrare un processo aleatorio X(t), insieme di funzioni $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, significa filtrare le singole realizzazioni, ottenendo le realizzazioni $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ costituenti il processo Y(t).

Purtroppo il problema di ricavare le densità di probabilità del processo di uscita a partire da quelle del processo d'ingresso è, salvo casi particolari, *insolubile*. Si possono però ricavare la funzione valor medio e la funzione di autocorrelazione del processo Y(t) supponendo di conoscere le stesse statistiche di X(t). Il valor medio di Y(t) è:

$$\eta_Y(t) = \mathbf{E}\{Y(t)\} = \mathbf{E}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)X(t-\alpha) \,d\alpha\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\{h(\alpha)X(t-\alpha)\} \,d\alpha$$

in cui l'operazione di media statistica $E\{\cdot\}$ agisce solo sul segnale aleatorio X(t) e non sul segnale determinato h(t), che perciò può essere estratto dall'operatore stesso:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \operatorname{E}\{X(t-\alpha)\} d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \, \eta_X(t-\alpha) \, d\alpha = \eta_X(t) \otimes h(t).$$

Calcoliamo ora in modo analogo la funzione di autocorrelazione $R_Y(t_1, t_2)$:

$$R_{Y}(t_{1}, t_{2}) = \mathbb{E}\{Y(t_{1})Y(t_{2})\} = \mathbb{E}\{(X(t_{1}) \otimes h(t_{1}))(X(t_{2}) \otimes h(t_{2}))\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) X(\beta) h(t_{1} - \alpha) h(t_{2} - \beta) d\alpha d\beta\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{X(\alpha) X(\beta)\} h(t_{1} - \alpha) h(t_{2} - \beta) d\alpha d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} R_{X}(\alpha, \beta) h(t_{1} - \alpha) d\alpha\right] h(t_{2} - \beta) d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[R_{X}(t_{1}, \beta) \otimes h(t_{1})\right] h(t_{2} - \beta) d\beta$$

$$= R_{X}(t_{1}, t_{2}) \otimes h(t_{1}) \otimes h(t_{2}).$$

La funzione di autocorrelazione può essere cioè calcolata tramite una doppia convoluzione:

$$R_Y(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2). \tag{7.24}$$

La prima operazione di convoluzione coinvolge solo la variabile t_1 e, nello svolgimento di essa, la variabile t_2 viene considerata come una costante. Nello svolgimento del secondo prodotto di convoluzione, invece, i ruoli delle variabili t_1 e t_2 si scambiano.

Consideriamo un processo d'ingresso al filtro che sia stazionario in valor medio. Con semplici calcoli si trova la funzione valor medio del processo in uscita:

$$\eta_Y = \eta_X H(0).$$

Il processo d'ingresso contiene, cioè, una "componente continua" che viene modificata in ragione del guadagno in continua del filtro H(0).

Supponiamo ora che il processo di ingresso sia stazionario in autocorrelazione:

$$R_X(t+\tau,t) = R_X(\tau).$$

La dimostrazione, Si può dimostrare che anche il processo di uscita è stazionario in autocorrelazione: analoga a quella

della (7.24), è

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau). \tag{7.25}$$

riportata in [1, Il calcolo della $R_Y(\tau)$ in questo modo è però spesso di non facile applicazione. È pag. 44]. preferibile allora operare in frequenza:

$$S_Y(f) = S_X(f) H(f) H^*(f) = S_X(f) H(f) H(-f).$$

Ricapitolando, un SLS conserva sia la stazionarietà in valor medio che la stazionarietà in autocorrelazione. Se quindi in ingresso si pone un processo SSL, anche in uscita si otterrà un processo SSL. Ancora, se in ingresso si pone un processo gaussiano, anche in uscita si avrà un processo gaussiano. Infine, se il processo in ingresso è SSS anche il processo di uscita sarà SSS.

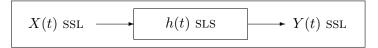


Figura 7.8: Un sistema lineare stazionario con in ingresso un processo SSL fornisce anche in uscita un processo SSL.

7.5 Densità spettrale di potenza di un processo sta-ZIONARIO*

Ci limiteremo qui ad alcuni cenni di analisi spettrale solo per processi aleatori SSL. La caratterizzazione frequenziale dei processi aleatori stazionari in termini di spettri di ampiezza e fase è poco usuale. Dal punto di vista concettuale, anche un segnale aleatorio può essere scomposto in una sovrapposizione di oscillazioni armoniche, le cui ampiezze e fasi variano parimenti in maniera aleatoria al variare della frequenza. Tuttavia, è più comune è limitarsi alla descrizione dello spettro di potenza di un processo aleatorio, sul quale ci concentreremo.

Cominciamo con l'osservare che le funzioni campione di un processo stazionario non possono essere segnali a energia finita. I segnali a energia finita, infatti, tendono necessariamente a zero quando $t \to \infty$. Se tutte le funzioni campione del processo tendessero a zero, necessariamente tenderebbe a zero anche la funzione valor medio del processo, che quindi non potrebbe risultare in generale costante (eccetto che per processi a media nulla). Le funzioni campione di un processo stazionario sono segnali in generale a potenza finita, e perciò il segnale aleatorio stesso ammetterà densità spettrale di potenza.

Si potrebbe ottenere come definizione di densità spettrale di potenza per processi aleatori la diretta estensione di quella per segnali determinati, ossia come media statistica della densità spettrale di potenza delle varie funzioni campione:

$$S_X(f) \triangleq \mathrm{E}\{S_X(\omega_i; f)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{\mathrm{E}\{|X_T(f)|^2\}}{T}$$
 (7.26)

dove $X_T(f)$ è la trasformata di Fourier della generica funzione campione troncata. Sfortunatamente, questa definizione, utilizzabile in teoria anche per processi non stazionari, è quasi sempre di difficile applicazione pratica (perché richiede ovviamente la conoscenza di tutte le realizzazioni del processo). Per i processi stazionari, si usa allora una diversa definizione: la densità spettrale di potenza per segnali (determinati Questo risultato è e) aleatori stazionari è definita come la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$:

noto come "teorema

Wiener-Khintchine".

$$S_X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau.$$
 (7.27) In [1, pag. 33] è riportata una

riportata una definizione diversa.

Comunque vanga definita, essa gode delle stesse proprietà elencate a suo tempo per i segnali determinati:

- È una funzione reale e pari, in quanto trasformata di Fourier della funzione $R_X(\tau)$, anch'essa reale e pari.
- L'integrale su tutto l'asse delle frequenze fornisce la potenza media statistica:

$$P_X = \mathbf{E}\{X^2(t)\}.$$

È una funzione non negativa. Questa proprietà si ricava facilmente se si considera la definizione (7.26), mentre la dimostrazione è piuttosto complessa nel caso della definizione (7.27).

7.5.1 Filtraggio di un processo aleatorio e densità spettrale di potenza*

Cerchiamo di mettere in relazione le caratteristiche spettrali dei processi di ingresso X(t) e di uscita Y(t), entrambi stazionari in senso lato. La densità spettrale di potenza $S_Y(f)$ di quest'ultimo è

$$S_Y(f) = \text{TCF}[R_Y(\tau)] = \text{TCF}\left[R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)\right]$$

= $S_X(f)H(f)H(-f)$.

Poiché la risposta impulsiva h(t) del sistema è un segnale reale, la sua trasformata gode della proprietà di simmetria Hermitiana, e la relazione precedente diventa:

$$S_Y(f) = S_X(f)H(f)H^*(f) = S_X(f)|H(f)|^2$$
(7.28)

esattamente come per i segnali determinati. Lo spettro di potenza del processo di uscita Y(t) può essere ricavato da quello del processo d'ingresso note le caratteristiche di selettività in frequenza del sistema, che sono riassunte nella risposta in ampiezza al quadrato $|H(f)|^2$. Ancora una volta, la risposta in fase nel sistema non influenza il contenuto di potenza del processo di uscita. Osserviamo incidentalmente che la potenza media statistica P_Y del processo di uscita Y(t) può essere calcolata in ambito frequenziale come segue:

$$P_Y = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) |H(f)|^2 df.$$

La relazione del filtraggio (7.28) è importante perché permette di dimostrare che la densità spettrale di potenza di un processo stazionario è una funzione non negativa e, inoltre, che la funzione $S_X(f)$, definita come trasformata di Fourier della $R_X(\tau)$, descrive la distribuzione della potenza sulle varie componenti frequenziali nello spettro del segnale aleatorio X(t).

7.5.2 Processo di rumore bianco

Nel paragrafo 7.3.3 abbiamo introdotto la nozione di tempo di correlazione per misurare la rapidità media di variazione delle funzioni campione di un processo. La corrispondente grandezza in ambito frequenziale è naturalmente la banda dello spettro di potenza del processo, che dà la stessa indicazione del tempo di correlazione. Se la funzione di autocorrelazione di un processo decresce rapidamente, cioè il tempo di correlazione è piccolo, la densità spettrale corrispondente ha una banda grande, viceversa se il tempo di correlazione è grande. Quindi, come era lecito aspettarsi, quanto maggiore è la rapidità di variazione delle realizzazioni di un processo, tanto più grande è la banda del suo spettro di potenza. Prese tre funzioni campione di tre processi aleatori $X_1(t)$, $X_2(t)$ e $X_3(t)$ con banda progressivamente crescente, cresce la rapidità di variazione, così come l'ampiezza delle escursioni del segnale (per effetto dell'incremento della potenza del segnale stesso).

Se la banda dello spettro di potenza tende a crescere illimitatamente, mantenendo lo spettro sempre il medesimo valore per f=0, evidentemente la densità spettrale di potenza del processo X(t) tende a diventare costante mentre il tempo di correlazione $\tau_{\rm cor}$ tende a ridursi sempre più. Al limite, si arriva a una situazione in cui la funzione di autocorrelazione è impulsiva e la densità è costante.

Un processo aleatorio stazionario (almeno) in senso lato che presenta queste caratteristiche statistiche viene chiamato processo di rumore bianco.⁶

Evidentemente, un processo bianco è solo un'astrazione matematica: lo spettro di potenza costante comporta che la potenza di questo segnale sia infinita, condizione impossibile per un segnale fisico. Deve intendersi come un "caso-limite", pensando di aumentarne ulteriormente (e illimitatamente) l'ampiezza e la velocità di variazione di un segnale.

7.6 Processi Aleatori Gaussiani

Tutti i disturbi reali nei sistemi di telecomunicazione sono modellabili come processi gaussiani. Un processo X(t) è gaussiano se la sua densità di ordine n è un proporzionale a un esponenziale il cui argomento è una forma quadratica non positiva:

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) = C \cdot e^{-g(\underline{x})}$$

con $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$ vettori e $g(\underline{x})$ funzione non negativa del valor medio e dell'autocorrelazione. Un processo aleatorio gaussiano X(t), infatti, è completamente caratterizzato dal punto di vista statistico quando sono note la sua funzione valor medio e la sua funzione di autocorrelazione:

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) = \mathcal{Z}(\underline{x};\eta_X(t);R_X(t_1,t_2)).$$

La funzione densità di probabilità del primo ordine di un processo gaussiano $X(t) \in \mathcal{N}(\eta_X(t), \sigma_X^2(t))$ vale:

$$f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X(t)} e^{-\frac{(x-\eta_X(t))^2}{2\sigma_X^2(t)}}.$$

Se il processo gaussiano è stazionario, allora la sua densità di probabilità di ordine n si riduce a

$$f_X(\underline{x};\underline{t}) = \mathcal{Z}(\underline{x};\eta_X;R_X(\tau))$$

e la densità di probabilità del I ordine non dipende dal tempo:

$$f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Proprietà dei processi gaussiani:

- Se un processo gaussiano è SSL, allora è anche SSS.
- La densità di probabilità di ordine n del processo dipende soltanto dai due indici $\eta_X(t)$ e $R_X(t_1, t_2)$.
- La trasformazione lineare di processi gaussiani dà luogo a processi gaussiani.

Si noti che la funzione distribuzione di probabilità di un processo gaussiano:

$$F_X(x;t) = \int_{-\infty}^x f_X(\alpha;t) d\alpha$$

è un integrale non esprimibile in forma chiusa.

⁶L'appellativo "bianco" deriva dall'analogia dello spettro di potenza di questo processo con quello della luce bianca: il rumore bianco contiene componenti a tutte le frequenze con la stessa intensità, così come la luce bianca "contiene tutti i colori".

7.6.1 FILTRAGGIO DEI PROCESSI GAUSSIANI

Come abbiamo visto nel paragrafo 7.4, il problema del filtraggio di un processo aleatorio non è completamente risolubile, nel senso che è in generale impossibile ottenere la descrizione completa del processo d'uscita Y(t) nota quella del processo d'ingresso X(t). I processi Gaussiani sono l'eccezione che conferma la regola, nel senso che per questi è possibile dare una descrizione statistica completa del processo all'uscita di un SLS, quando siano note le caratteristiche del processo d'ingresso.

La proprietà di "conservazione della Gaussianità" è valida per tutti i sistemi lineari (stazionari o no). Come è chiaro, se il processo (gaussiano) d'ingresso a un SLS è SSL (e quindi anche SSS), allora il processo di uscita è anch'esso stazionario. Se il sistema lineare non è stazionario, il processo di uscita è ancora Gaussiano ma in generale perde la proprietà di stazionarietà.

7.6.2 Variabile gaussiana standard

La variabile aleatoria gaussiana *standard* è una variabile aleatoria gaussiana avente valor medio nullo e varianza unitaria. Si indica con:

$$Z \in \mathcal{N}(0,1)$$
.

La sua funzione densità di probabilità è:

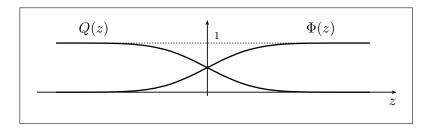
$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$
 (7.29)

Per essa si indicano in modo particolare la funzione distribuzione di probabilità

$$\Phi(z) \equiv F_Z(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(\alpha) \, d\alpha \qquad (7.30)$$

e la cosiddetta funzione "residuo di probabilità", definita come:

$$Q(z) \triangleq 1 - \Phi(z) = \Pr[Z \ge z]. \tag{7.31}$$



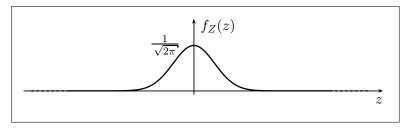


Figura 7.9: Funzione densità di probabilità di una variabile gaussiana standard.

Le due funzioni $\Phi(z)$ e Q(z) sono caratterizzate dalle seguenti proprietà:

• In 0 valgono 1/2:

$$\Phi(0) = Q(0) = \frac{1}{2}.$$

• Godono di una sorta di parità dell'una rispetto all'altra:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = Q(z)$$

 $Q(-z) = 1 - Q(z) = \Phi(z)$

- Con z sufficientemente grande, $\Phi(z)\simeq 1$ e $Q(z)\simeq 0.$ In particolare, si può usare l'approssimazione

$$Q(z) \simeq \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

commettendo un piccolo errore (per eccesso) inferiore al 9% se z>3, oppure, se z>>3, può essere usata la formula

$$Q(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

L'analisi dei sistemi di comunicazioni comporta spesso la valutazione dell'integrale di una gaussiana, come ad esempio per gli errori o il rumore termico:

$$F_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^x e^{-(\alpha - \eta_X)^2/(2\sigma_X^2)} d\alpha.$$
 (7.32)

Purtroppo si tratta di integrali che non possono essere espressi in forma chiusa e quindi, per calcolare queste distribuzioni di probabilità, è necessario fare ricorso a grafici o tabelle. Fortunatamente, si può esprimere la funzione distribuzione di probabilità di una qualsiasi variabile aleatoria gaussiana in funzione della distribuzione di probabilità della variabile gaussiana standard.

A ben notare, neanche l'integrale (7.29), e quindi neppure la (7.30) e la (7.31), sono esprimibili in forma chiusa. Essi però, in particolare la Q(z), si trovano spesso in forma tabulata.

Mostriamo allora come per una qualsiasi variabile gaussiana $X \in \mathcal{N}(\eta_X, \sigma_X)$ si possa scrivere:

$$X = aZ + b$$

con a e b opportuni. Intanto, risulta immediatamente che X è gaussiana perché trasformazione lineare di Z che è gaussiana. Si calcola:

$$\begin{cases} \eta_X = E[X] = E[aZ + b] = a E[Z] + E[b] = b \\ \sigma_X^2 = E[(X - \eta_X)^2] = E[(aZ + b - b)^2] = a^2 E[Z^2] = a^2 \end{cases}$$

ottenendo così

$$X = \sigma_X Z + \eta_X.$$

La funzione distribuzione di un qualsiasi processo aleatorio gaussiano è esprimibile quindi in termini del processo gaussiano standard nella forma:

$$F_X(x) = \Pr[X \le x] = \Pr[\sigma_X Z + \eta_X \le x]$$
$$= \Pr\left[Z \le \frac{x - \eta_X}{\sigma_X}\right] = \Phi\left(\frac{x - \eta_X}{\sigma_X}\right).$$

SISTEMI DI COMUNICAZIONE IN BANDA BASE

8.1 Introduzione

Un sistema di telecomunicazione è l'insieme di tecniche, apparati e infrastrutture per "comunicare a distanza" (telecomunicare) mediante l'impiego di segnali elettrici, elettromagnetici, ottici...

L'aspetto cruciale nella teoria delle comunicazioni, che motiva il ricorso alla teoria della probabilità, è rappresentato dall'*incertezza* che il destinatario ha nei confronti dell'*informazione* effettivamente trasmessa. Questa incertezza dipende in parte dal fatto che, per essere tale, l'informazione deve essere imprevedibile, e in parte dal fatto che il segnale ricevuto è sempre accompagnato da *rumore*, cioè da disturbi non voluti che tendono ad alterare l'informazione trasmessa.

Una prima classificazione dei sistemi di comunicazione può esser fatta sulla base del tipo di connessione:

- punto-punto (unicast) quando sorgente e destinatario sono utenti singoli;
- punto-multipunto (multicast) quando la sorgente comunica con diversi utenti;
- circolare (broadcast) quando la sorgente comunica a tutti gli utenti che "ascoltano" sullo stesso canale di comunicazione.

I sistemi di comunicazione possono esser suddivisi, inoltre, in sistemi che operano in banda base e sistemi che operano in banda passante. La distinzione tra le due classi è spesso legata al canale fisico a disposizione. È infatti evidente che su un canale fisico passa banda, come quello tipicamente impiegato nelle radiotrasmissioni, si devono impiegare sistemi di comunicazione in banda passante, mentre su un canale fisico passa basso, ad esempio un cavo coassiale, si possono impiegare sia i sistemi di comunicazione in banda base che quelli in banda passante.

Un'altra classificazione viene fatta in base al tipo di tecniche e segnali impiegati:

- analogici, ad ampiezza e tempo continui;
- digitali, ad ampiezza quantizzata e tempo discreto.

Un sistema di comunicazione viene detto *analogico* quando consente il trasferimento di segnali che possono assumere *qualunque* valore in un intervallo prefissato, mentre è detto *numerico* se può trasferire segnali che possono assumere solo valori *discreti*,

appartenenti a un alfabeto $\mathcal{A} = \{m_0, \dots, m_{M-1}\}$ costituito da un numero limitato (M) di elementi. Un segnale vocale è un esempio di segnale analogico, mentre una pagina di testo dà luogo a un segnale numerico.

8.2 Struttura di un sistema di comunicazione

Consideriamo un sistema generico di telecomunicazione e analizziamone la struttura. Lo schema a blocchi è rappresentato nella figura 8.1.

SORGENTE. La sorgente genera l'informazione da trasmettere. Data la sua intrinseca imprevedibilità, l'informazione è generalmente caratterizzata in termini statistici. Può essere:

- analogica (per esempio un segnale vocale), quando il segnale emesso può assumere qualunque valore in un intervallo prefissato;
- digitale o numerica (come un testo o l'uscita di un RS232), quando il segnale emesso può assumere solo valori discreti.

Spesso si suppone che la sorgente numerica renda disponibili i segnali numerici nella forma di parole di n cifre binarie, cioè in blocchi di n simboli binari, anche quando il sistema di trasmissione trasmetterà poi simboli M-ari (ossia appartenenti a un alfabeto di M elementi): è poi il codificatore a occuparsi di convertire ciascuno di questi blocchi di bit in un simbolo M-ario.

TRASDUTTORE DI INGRESSO. Ha il compito di convertire l'informazione emessa dalla sorgente in un opportuno segnale, elettrico o luminoso. Esempio di trasduttori in ingresso sono: un microfono, uno scanner, un lettore ottico, eccetera.

Se la sorgente è analogica e il sistema di comunicazione è numerico, è necessario provvedere alla numerizzazione del segnale di sorgente, che viene prima campionato e poi quantizzato.

CODIFICATORE. Viene utilizzato solo nei sistemi numerici di comunicazione ed ha il compito di modificare la ridondanza del segnale (numerico) prodotto dal trasduttore. In alcuni casi esso agisce riducendo la ridondanza del messaggio da trasmettere (codifica di sorgente), come ad esempio accade tipicamente per le immagini (compressione JPEG, MPEG), mentre in altri casi esso aggiunge ridondanza al messaggio (codifica di canale) in modo da migliorarne l'immunità ai disturbi.

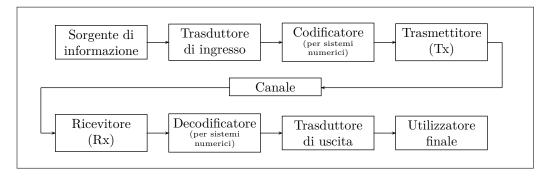


Figura 8.1: Schema a blocchi di un generico sistema di comunicazione.

Per quest'ultimo scopo, sono molto usati i codici a blocco. Un codice a blocco di Estratto da [1, tipo (n,k) è ottenuto aggiungendo n-k simboli binari di codice ogni k simboli binari pag. 6]. di sorgente. Perché non si verifichi perdita di informazione, è necessario aumentare la velocità di segnalazione del fattore n/k in modo da trasmettere, nello stesso intervallo di tempo, n simboli invece di k. (Il rapporto k/n è detto code rate.)

Una forma elementare di codice a blocco è il codice a ripetizione. Esso consiste nel trasmettere 2m+1 volte ciascun simbolo binario di sorgente (è quindi un codice a blocco di tipo (2m+1,1)) in modo che il ricevitore possa decidere a maggioranza.

Vi sono poi dei codici che consentono di individuare e correggere gli errori, e sono detti per l'appunto a correzione d'errore. A questo scopo possono essere utilizzati dei bit di parità. Un blocco di k^2 simboli di sorgente viene disposto ordinatamente in una matrice, alla quale si aggiungono una riga e una colonna, contenenti rispettivamente i bit di parità per ciascuna colonna e per ciascuna riga. Si ottiene così una matrice di lato k+1: si tratta quindi di un codice a blocco di tipo $((k+1)^2, k^2)$.

La ridondanza così introdotta può essere usata per la correzione di singoli errori (e va usato perciò in sistemi dove la probabilità di errore è relativamente bassa). Infatti se un blocco contiene un solo simbolo errato, quest'ultimo è individuato dall'intersezione della riga e della colonna aventi bit di parità non consistente.

Trasmettitore. Ha il compito di convertire il segnale elettrico all'uscita del trasduttore (o il segnale numerico all'uscita del codificatore) in un segnale adatto a essere trasmesso sul canale di comunicazione disponibile. Fondamentalmente esso effettua due operazioni: amplifica e modula il segnale.

L'amplificazione si rende necessaria per consentire al segnale di giungere al ricevitore con potenza sufficiente a essere riconosciuto correttamente. E normale infatti che il segnale sia attenuato durante il suo tragitto lungo il canale.

L'operazione di modulazione, ad esempio nel caso di un segnale trasmesso via onde radio, consiste nel far variare ampiezza, fase o frequenza di una sinusoide in funzione del segnale da trasmettere.

Nel caso della modulazione d'ampiezza (Amplitute Modulation, AM), il segnale trasmesso sarà nella forma:

$$x_{\rm AM}(t) = Aa(t)\cos(2\pi f_0 t + \vartheta)$$

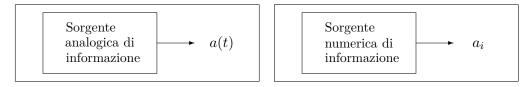


Figura 8.2: Il trasmettitore di occupa di trasformare il segnale di uscita della sorgente di comunicazione (numerica o digitale) in un segnale che può essere trasmesso sul canale a disposizione.

mentre per la modulazione di frequenza (FM) e fase (PM) si avrà rispettivamente:

$$f(t) = f_0 + k_f a(t)$$
$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + k_p a(t).$$

La modulazione in frequenza implica, poi, un processo di traslazione in frequenza del segnale. Questo si rende necessario sia per far sì che il segnale occupi la banda che il gestore delle telecomunicazioni ha allocato all'utente stesso, sia per motivi di ordine pratico. Infatti, le dimensioni dell'antenna utilizzata devono essere comparabili con quelle della lunghezza d'onda λ . Il valore di quest'ultima è pari allo spazio percorso dall'onda in un tempo pari a un periodo: $\lambda = c \cdot T = c/f$, dove $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ è la velocità della luce e f è la frequenza dell'onda. Se si vogliono contenere le dimensioni dell'apparecchio trasmittente, bisogna allora cambiare la frequenza del segnale e trasmettere a frequenze opportune. Un segnale di frequenza $f = 10 \text{kHz} = 10^4 \text{Hz}$ richiederebbe ad esempio un'antenna dalle dimensioni spropositate:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{m/s}}{10^4 \text{s}^{-1}} = 30 \text{km}!$$

I discorsi fatti si riferiscono al caso di modulazione analogica. Si possono avere anche modulazioni di tipo numerico (o digitale).

Nel caso che il sistema di comunicazione sia numerico, in uscita alla sorgente si avrà un sequenza a_i di simboli appartenenti a un opportuno alfabeto $\mathcal{A} = \{m_0, \dots, m_{M-1}\}$ costituito da M elementi. Il trasmettitore si occupa allora di associare a ciascuno dei possibili simboli un diverso segnale:

$$m_0 \longrightarrow s_0(t), \quad m_1 \longrightarrow s_1(t), \quad \dots, \quad m_{M-1} \longrightarrow s_{M-1}(t).$$

Per esempio, può associare ai simboli impulsi di diversa ampiezza, come avviene nel caso di una segnalazione di tipo PAM (vedi paragrafo 8.5 a pag. 139):

$$s_{\mathrm{T}}(t) = \sum_{i} a_{i} g_{\mathrm{T}}(t - iT), \quad a_{i} \in \mathcal{A}.$$

In ogni caso, i segnali effettivamente trasmessi sul canale sono di tipo analogico.

CANALE. Il canale fisico è il mezzo trasmissivo utilizzato per la trasmissione del segnale. Può essere di svariati tipi:

- cavo elettrico: coppia bifilare (cavo telefonico, kHz), cavo coassiale (antenna televisore, MHz), guida d'onda (radar, GHz);
- spazio libero;
- fibra ottica...

Il canale di comunicazione è una porzione (spettrale o temporale) di un certo canale fisico. Su uno stesso canale fisico possono infatti coesistere diversi canali Si parla di comunicazione. Per esempio è possibile allocare sullo stesso canale fisico diversi rispettivamente di segnali passa banda, ognuno dei quali occupa una certa porzione spettrale o è anche multiplazione a possibile avere più comunicazioni gestendo il canale a suddivisione di tempo.

 $suddivisione\ di$

¹La situazione ideale si ha quando l'antenna è lunga la metà della lunghezza d'onda. In tal modo, \hat{f} requenza (FDM) o di l'antenna "risuona" esattamente alla frequenza f. Antenne più corte sono ancora buone, benché tempo (TDM). meno efficienti: se così non fosse la radio AM (540-1600kHz) necessiterebbe un'antenna di 300 metri!

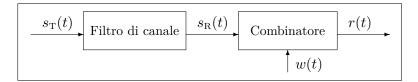


Figura 8.3: Schema generale di un canale di trasmissione.

La distorsione prodotta dal canale sul segnale trasmesso può quasi sempre assimilarsi a quella prodotta da un SLS. Se le caratteristiche del canale variano nel tempo (come ad esempio per stazioni radio mobili o un canale radio che sfrutta la propagazione per riflessione ionosferica) il modello di canale è invece un sistema lineare non stazionario. Noi faremo l'ipotesi che il canale sia lineare stazionario, e sarà dunque caratterizzato da una risposta impulsiva c(t).

Un altro elemento fondamentale, purtroppo ineliminabile, di qualunque sistema di comunicazione è rappresentato dal rumore termico. Esso è generato dal moto casuale dei portatori di carica presenti nel mezzo trasmissivo e nei dispositivi utilizzati (amplificatori, filtri, antenne...). Naturalmente sono presenti anche disturbi di altro tipo, come rumore captato dalle antenne, le interferenze prodotte dai segnali trasmessi sullo stesso canale da altri utenti, eccetera. Il rumore può combinarsi con il segnale utile sostanzialmente in due modi:

- tramite *combinazione additiva*, come avviene nel caso di cavi coassiali e in genere di segnali elettrici, oppure
- tramite combinazione moltiplicativa, come avviene invece per le fibre ottiche.

Normalmente si fa l'ipotesi che il contributo *complessivo* delle sorgenti di rumore, riportato all'ingresso del ricevitore, sia un processo gaussiano che si *somma* al contributo dovuto al segnale trasmesso:

$$r(t) = s_{\mathbf{R}}(t) + w(t).$$

Nel nostro modello di rumore, il combinatore sarà quindi un semplice sommatore. Più precisamente, il nostro modello di rumore sarà un processo SSL di tipo gaussiano bianco additivo² a valor medio nullo, dove l'aggettivo bianco sta a indicare che il rumore è uniformemente distribuito su tutte le frequenze (nel caso reale lo è almeno sulla banda occupata dal segnale), ossia che la densità spettrale di potenza è costante su tutto l'asse delle frequenze. Schematizzando:

$$w(t) := \begin{cases} \text{gaussiano SSL} \\ \eta_w = 0 \\ S_w(f) = \frac{N_0}{2}. \end{cases}$$
(8.1)

Nelle ipotesi fatte che il filtro di canale sia assimilabile a un SLS e che il rumore di combini sol segnale in modo additivo, il canale che useremo come modello è schematizzato nella figura seguente figura.

RICEVITORE. Il ricevitore *amplifica* il segnale ricevuto e ne estrae il messaggio trasmesso. Per fare ciò, svolge un'operazione di demodulazione, inversa a quella di

²Si parla perciò di *Additive White Gaussian Noise*, AWGN.

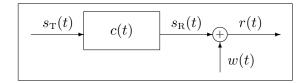


Figura 8.4: Modello del nostro canale di trasmissione.

modulazione effettuata dal trasmettitore o, meglio, "coerente". Per esempio, nel caso di modulazione analogica, la demodulazione deve avvenire con la stessa frequenza e fase dell'oscillazione in trasmissione.

Viene utilizzato nei sistemi numerici di comunicazione per DECODIFICATORE. estrarre dalla sequenza di simboli ricevuti il segnale numerico applicato al codificatore, eliminando le ridondanze introdotte dal codificatore.

TRASDUTTORE DI USCITA. Converte il segnale (elettrico) ricevuto in un segnale adatto a essere utilizzato dall'utente finale. Un altoparlante, una stampante, uno schermo televisivo sono esempi di trasduttore di ricezione.

8.3 Sistemi numerici di comunicazione

Un sistema numerico di comunicazione presenta caratteristiche abbastanza diverse da quelle di un sistema analogico, in virtù della particolare natura dei segnali numerici, rappresentabili come sequenze di valori discreti appartenenti a un alfabeto finito.

In conseguenza di ciò, i sistemi di comunicazione di tipo numerico presentano innumerevoli vantaggi nei confronti dei sistemi analogici, tra i quali vi è la possibilità di rigenerare il segnale, separandolo dal rumore, di controllare la ridondanza, eccetera.

Il principale svantaggio dei sistemi numerici è invece costituito dalla maggiore prof, ma estratte banda richiesta, a parità di segnale analogico di sorgente. Si osservi infatti che la da [1, pagg. 13–14]. frequenza minima di campionamento di un segnale analogico di banda $B \geq 2B$. D'altra parte, se ogni campione del segnale viene codificato con n cifre binarie, in un intervallo di tempo pari all'intervallo di campionamento 1/(2B) devono esser trasmetti n simboli binari. Pertanto, nel caso di PAM binaria, la velocità di segnalazione è pari a 2Bn. Poiché la banda minima di un canale numerico è pari alla metà della velocità di segnalazione, si conclude che il canale deve avere una banda Bn. La banda minima occupata dal segnale numerico è perciò n volte quella del corrispondente segnale analogico (che poteva essere ovviamente inviato con banda B).

Analizziamo ora la struttura di un sistema numerico di comunicazione.

SORGENTE. Faremo riferimento a una sorgente che emette una sequenza a_i di simboli appartenenti all'alfabeto $\mathcal{A} = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$ di dimensione M. Il valore T,

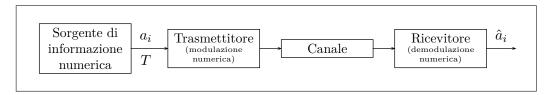


Figura 8.5: Schema a blocchi di un sistema numerico di comunicazione.

Cose non dette dal

l'intervallo di segnalazione, è il tempo che intercorre tra le emissioni di due simboli consecutivi. Il suo reciproco 1/T, rappresenta la velocità o frequenza di segnalazione e viene misurata in baud o in simboli al secondo.

La sequenza a_i dei simboli emessi è un processo aleatorio a tempo discreto, per il quale vale l'ipotesi di stazionarietà (in senso stretto). Calcoliamone gli indici classici. Si definisce probabilità di massa dei simboli o probabilità "a priori", la probabilità che a_i sia uguale al k-esimo simbolo dell'alfabeto:

$$\Pr_k \triangleq \Pr[a_i = m_k].$$

Ovviamente la sommatoria di tutte le probabilità deve dare 1:

$$\sum_{k=0}^{M-1} \Pr_k = 1.$$

La funzione densità di probabilità è data da un'insieme di delta di Dirac centrate sui valori m_k ciascuna di area pari a Pr_k :

$$f_{ai}(a) = \sum_{k=0}^{M-1} \operatorname{Pr}_k \delta(a - m_k).$$

Il valor medio del processo a_i è allora

$$\eta_a = \operatorname{E}[a_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot f_{ai}(a) \, \mathrm{d}a = \int_{-\infty}^{+\infty} a \sum_{k=0}^{M-1} \operatorname{Pr}_k \delta(a - m_k) \, \mathrm{d}a$$
$$= \sum_{k=0}^{M-1} \operatorname{Pr}_k \int_{-\infty}^{+\infty} a \, \delta(a - m_k) \, \mathrm{d}a = \sum_{k=0}^{M-1} m_k \operatorname{Pr}_k$$

e in modo analogo si dimostra che la sua potenza media istantanea può essere calcolata come:

$$P_a = E[a_i^2] = \sum_{k=0}^{M-1} |m_k|^2 \Pr_k.$$

La varianza del processo è:

$$\sigma_a^2 = P_a - \eta_a^2.$$

La funzione di autocorrelazione $R_a(m)$ del processo discreto è definita come la correlazione tra il simbolo i-esimo e il simbolo (i+m)-esimo. Inoltre, poiché il processo a_i è SSS è allora anche stazionario in autocorrelazione, quindi:

$$R_a(i+m,i) = \mathbb{E}[a_{i+m} \cdot a_i] = R_a(m).$$

Definendo

$$Pr_{k,l} = Pr[a_i = m_k, a_i = m_l]$$

$$R_a(m) = R_a(i+m,i) = E[a_{i+m} \cdot a_i] = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} m_{k+m} m_l \Pr_{k+m,l}$$

Noi faremo riferimento ai simboli della sorgente che siano equiprobabili, cioè

$$\Pr_k = \frac{1}{M}$$
 per ogni $k = 0, 1, \dots, M - 1$

Figura 8.6

Facendo corrispondere i simboli ai numeri in modo che i simboli siano antipodali (se esiste un simbolo cui è associato n allora esisterà un altro simbolo associato a -n: se sono equiprobabili allora $\eta_a = 0$), allora i simboli della sorgente sono incorrelati se la funzione di autocovarianza è una delta di Kronecker $\delta[n]$

$$C_a(m) = \mathbb{E}[a_i^2] \,\delta(m) = \sigma_a^2 \,\delta(m)$$
$$R_a(m) = \mathbb{E}[a_i^2] \,\delta(m) = \sigma_a^2 \,\delta(m)$$

Trasmettitore. Compito di

- amplificazione
- modulazione numerica

Modulazione numerica: associa un segnale distinto a ciascun elemento dell'alfabeto.

$$m_0 \longrightarrow s_0(t), \quad m_1 \longrightarrow s_1(t), \quad \dots, \quad m_{M-1} \longrightarrow s_{M-1}(t).$$

Questi segnali possono essere passa basso o passa banda. In base al tipo si segnale $s_k(t)$ avremo sistemi di telecomunicazione numerica di tipo bassa basso (o in banda base) e sistemi di telecomunicazione numerica di tipo in banda passante.

Canale. Facciamo riferimento alla figura 8.4.

il canale avrà una sua risposta impulsiva c(t), che introduce un disturbo: segnale aleatorio gaussiano bianco.

il canale è un canale non distorcente nella banda del segnale

$$c(t) = \alpha \delta(t - \tau)$$

ovvero il canale introdurrà un'attenuazione $\alpha < 0$ e un ritardo τ . componente utile del segnale:

$$s_{\rm R} = \alpha s_{\rm T} (t - \tau)$$

il segnale uscente dal canale sarà:

$$r(t) = \alpha s_{\rm T}(t - \tau) + w(t)$$

in cui teniamo in considerazione il disturbo.

RICEVITORE E DECISORE. Ha il compito di

- amplificare
- demodulare il segnale

Demodulare il segnale: decidere a ogni istante k-esimo qual è il segnale trasmesso tra gli M possibili, ovvero decidere qual è il k-esimo simbolo emesso dalla sorgente.

Ad esempio con k = 5 arriverà

$$r_5(t) = \alpha s_{R5}(t) + w(t).$$

Bisogna isolare $s_{\rm R5}(t)$ e tramutarlo di nuovo in simbolo.

In sintesi, il ricevitore funziona da decisore, interpreta il segnale analogico e lo tramuta in digitale.

8.4 Sistemi di comunicazione in banda base*

Un sistema di comunicazione in banda base è sostanzialmente costituito da un *Cfr.* [1, pagg. 69–70]. trasmettitore, da un canale *bassa basso* di comunicazione e da un ricevitore. Il trasmettitore si occupa di trasformare l'informazione di uscita dalla sorgente in un segnale elettrico, e di fornire allo stesso la necessaria potenza, provvedendo inoltre a limitare l'emissione fuori banda ai valori previsti dalle normative. Il ricevitore ha il compito di amplificare il segnale e di eliminare la potenza di rumore al di fuori della banda del segnale. Deve inoltre provvedere alla corretta sagomatura degli impulsi da applicare al campionatore.

Le risposte in frequenza degli amplificatori di trasmissione e ricezione devono essere scelte in modo da contenere l'occupazione di banda, ridurre l'effetto del rumore e consentire una corretta ricostruzione del segnale, eventualmente compensando le distorsioni introdotte dal canale. A questo proposito si osservi che, per eliminare le distorsioni introdotte dal canale, basta fare in modo che il segnale z(t) all'uscita dell'amplificatore di ricezione sia, a meno del rumore, una replica del segnale $s_{\rm T}(t)$ applicato al filtro di trasmissione, cioè:

$$z(t) = As_{\mathrm{T}}(t - t_0) + n(t)$$

dove A e t_0 sono due costanti legate al sistema di comunicazione. Si deduce facilmente che la condizione di assenza di distorsione implica che la risposta in frequenza complessiva del sistema di comunicazione sia ideale sulla banda B del segnale $s_{\rm T}(t)$ e cioè:

$$G(f) = \begin{cases} A e^{-j2\pi f t_0} & \text{per } |f| \le B \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

8.5 SISTEMA DI COMUNICAZIONE PAM BINARIO

Un sistema di comunicazione di tipo *Pulse Amplitude Modulation* (PAM) (ossia "Modulazione d'ampiezza a impulso") ha come caratteristica fondante il fatto che il segnale è costituito da una ripetizione infinita di impulsi di ampiezza diversa a seconda dall'informazione da trasmettere.

SORGENTE. In un sistema PAM di tipo binario i simboli emessi dalla sorgente sono, per l'appunto, dei bit (è per questo che si è indicato l'intervallo di segnalazione con il pedice "b"), ossia:

$$a_i \in \mathcal{A} = \{m_0, m_1\}.$$

La rappresentazione grafica dei simboli di un alfabeto è detta "costellazione" dell'alfabeto. Indicheremo le probabilità di massa dei simboli rispettivamente con P_0 e P_1 . Ovviamente in un PAM binario $P_0 = 1 - P_1$.

Nella trattazione dei sistemi PAM faremo le seguenti ipotesi:

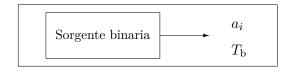


Figura 8.7: In un sistema PAM di tipo binario la sorgente emette una sequenza di bit a_i .



Figura 8.8: Costellazione dei simboli di un sistema PAM binario.

- I simboli sono antipodali e valgono -1 e +1. La costellazione dell'alfabeto usato è riportata nella figura 8.8.
- I simboli a_i emessi dalla sorgente sono equiprobabili:

$$P_0 = P_1 = 1/2.$$

• I simboli sono incorrelati:

$$C_a(m) = R_a(m) = \sigma_a^2 \delta[m] = \delta[m].$$

Come già accennato, la sequenza in uscita dalla sorgente può essere vista come un processo a tempo discreto (supposto stazionario): se ne può perciò calcolare il valor medio, potenza e varianza. Per simboli binari antipodali e equiprobabili:

$$\eta_a = \mathbf{E}[a_i] = \sum_{k=0}^{1} m_k P_k = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$P_a = \sigma_a^2 = \mathbf{E}[a_i^2] = \sum_{k=0}^{1} |m_k|^2 P_k = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

TRASMETTITORE. Il segnale trasmesso $s_{\rm T}(t)$ viene generato modificando, tramite gli a_i , l'ampiezza della portante, costituita da una sequenza infinita di impulsi $g_{\rm T}(t)$ (vedi figura 8.9). Uno schema del trasmettitore è riportato nella figura 8.10a. Si può altresì modellizzare l'uscita della sorgente come una successione di impulsi di Dirac di area a_i . Allora, se il trasmettitore è costituito da un filtro avente risposta impulsiva $g_{\rm T}(t)$ (vedi figura 8.10a), il segnale PAM in trasmissione, ossia l'uscita del filtro in trasmissione $g_{\rm T}(t)$, è:

$$s_{\mathrm{T}}(t) = \sum_{i} a_{i} g_{\mathrm{T}}(t - iT_{\mathrm{b}}).$$

Il segnale $s_{\rm T}(t)$ applicato al canale di comunicazione è costituito da una ripetizione infinita di *impulsi* $g_{\rm T}(t)$ modulati in ampiezza dai simboli a_i . Come vedremo, l'andamento di $g_{\rm T}(t)$ determina le caratteristiche del segnale trasmesso e, in particolare, la sua banda che, nell'ipotesi di simboli indipendenti, coincide con quella di $g_{\rm T}(t)$.

CARATTERIZZAZIONE DEL SEGNALE TRASMESSO. Energia media trasmessa per simbolo. Energia trasmessa per il simbolo m_k :

$$E_k = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_k(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

Energia media trasmessa per simbolo è la media statistica dell'energia

$$\overline{E}_{\mathrm{T}} \triangleq \sum_{k=0}^{M-1} E_k \operatorname{Pr}_k.$$

$$s_0(t) = -g_{\mathrm{T}}(t), s_1(t) = g_{\mathrm{T}}(t)$$

$$E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_0(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T^2(t) dt = E_{g_T}$$

analogamente

$$E_1 = E_{q_{\mathrm{T}}}$$

Quindi

$$\overline{E}_{\mathrm{T}} = E_{g_{\mathrm{T}}} \operatorname{Pr}_0 + E_{g_{\mathrm{T}}} \operatorname{Pr}_1 = \left(\operatorname{Pr}_0 + \operatorname{Pr}_1 \right) E_{g_{\mathrm{T}}} = E_{g_{\mathrm{T}}}$$

Energia media trasmessa per bit:

$$\overline{E}_{\mathrm{T_b}} = \overline{E}_{\mathrm{T}} = E_{g_{\mathrm{T}}}$$

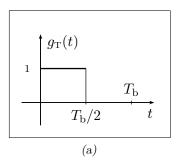
Banda del segnale trasmesso

$$s_{\mathrm{T}}(t) = \sum_{i} a_{i} g_{\mathrm{T}}(t - iT_{\mathrm{b}})$$

Se a_i è un processo aleatorio a tempo discreto, allora $s_{\rm T}(t)$ è un processo aleatorio a tempo continuo.

Valor medio del segnale trasmesso:

$$\eta_{s_{\mathrm{T}}} = \mathrm{E}[s_{\mathrm{T}}(t)] = \mathrm{E}\left[\sum_{i} a_{i} g_{\mathrm{T}}(t - iT_{\mathrm{b}})\right]$$



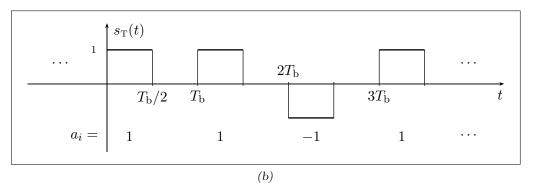


Figura 8.9: In alto, la risposta impulsiva del filtro in trasmissione $g_{\rm T}(t)$. La portante è una sequenza infinita di impulsi $g_{\rm T}(t)$. La trasmissione delle informazioni avviene modulando in ampiezza tali impulsi secondo i valori a_i .

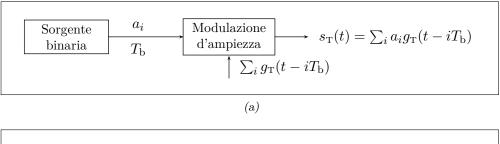


Figura 8.10: Trasmettitore di un sistema PAM binario.

$$= \sum_{i} \mathrm{E}[a_i] g_{\mathrm{T}}(t - iT_{\mathrm{b}}) = 0$$

perché sono equiprobabili

Densità spettrale di potenza

$$S_{s_{\mathrm{T}}}(f) = rac{\mathrm{E}[a_{i}^{2}]}{T_{\mathrm{b}}} \cdot \left|G_{\mathrm{T}}(f)\right|^{2}$$

poiché $\mathrm{E}[a_i^2] = P_a = \sigma_a^2$

$$S_{s_{\mathrm{T}}}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_{\mathrm{b}}} \cdot |G_{\mathrm{T}}(f)|^2$$

$$S_{\rm T}(f) = {
m TCF}[s_{
m T}(t)] = \sum_i a_i G_{
m T}(f) \, {
m e}^{-{
m j} 2\pi f i T_{
m b}}$$

= $G_{
m T}(f) \sum_i a_i \, {
m e}^{-{
m j} 2\pi f i T_{
m b}}$

$$|S_{\mathrm{T}}(f)|^2 = |G_{\mathrm{T}}(f)|^2 \cdot \mathcal{J}(f)$$

Quindi la banda del segnale trasmesso $B_{\rm T}$ coincide con la banda di $g_{\rm T}(t)$

$$B_{\rm T} = B_{q_{\rm T}}$$

Efficienza in banda del segnale trasmesso:

$$\rho_{\rm T} \triangleq \frac{R_{\rm b}}{B_{\rm T}} = \frac{1}{T_{\rm b} \cdot B_{\rm T}}$$

dove con $R_{\rm b}$ si intende la velocità di informazione (bit/sec), quindi: $R_{\rm b}=1/T_{\rm b}$.

Canale. Se definiamo l'impulso ricevuto

$$g_{\mathrm{TC}}(t) = g_{\mathrm{T}}(t) \otimes c(t),$$

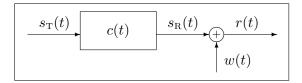


Figura 8.11: Canale di trasmissione.

il segnale PAM in ricezione è

$$s_{\mathrm{R}}(t) = s_{\mathrm{T}}(t) \otimes c(t) = \sum_{i} a_{i} g_{\mathrm{T}}(t - iT_{\mathrm{b}}) \otimes c(t) = \sum_{i} a_{i} g_{\mathrm{TC}}(t - iT_{\mathrm{b}}).$$

Posto:

$$g_{\mathrm{TC}}(t) = g_{\mathrm{T}}(t) \otimes c(t),$$

il segnale PAM in ricezione, ovvero il segnale all'ingresso del filtro in ricezione $g_{\rm R}(t)$, è dato da:

$$s_{\rm R}(t) = \sum_i a_i g_{\rm TC}(t - iT_{\rm b}).$$

Energia dell'impulso in ricezione:

$$\overline{E}_{\rm R} = E_{g_{\rm TC}}$$

La banda del segnale ricevuto è:

$$S_{s_{\mathrm{R}}}(f) = rac{\sigma_a^2}{T_{\mathrm{b}}} \cdot |G_{\mathrm{TC}}(f)|^2$$

$$G_{TC}(f) = G_{T}(f) \cdot C(f)$$

$$B_{s_{\mathrm{R}}} = B_{g_{\mathrm{TC}}} = \begin{cases} B_{\mathrm{C}} & \text{se } B_{\mathrm{C}} \leq B_{g_{\mathrm{T}}} \\ B_{g_{\mathrm{T}}} & \text{se } B_{\mathrm{C}} > B_{g_{\mathrm{T}}} \end{cases}$$

Noi supporremo che $B_{\rm C} > B_{g_{\rm T}}$, quindi $B_{s_{\rm R}} = B_{g_{\rm T}}$. Efficienza in banda del segnale ricevuto:

$$\rho_{\rm R} \triangleq \frac{R_{\rm b}}{B_{s_{\rm R}}}$$

Il segnale ricevuto:

$$r(t) = s_{\rm R} + w(t) = \sum_{i} a_i g_{\rm TC}(t - iT_{\rm b}) + w(t)$$

dove w(t) è un processo gaussiano bianco, a valor medio nullo $(\eta_w = 0)$ e con densità spettrale di potenza costante $(S_w(f) = N_0/2)$.

RICEVITORE. Se $g_{\rm R}(t)$ è la risposta impulsiva del filtro in ricezione. Infine, indicando la risposta impulsiva complessiva del sistema PAM con

$$g(t) = g_{TC}(t) \otimes g_{R}(t),$$

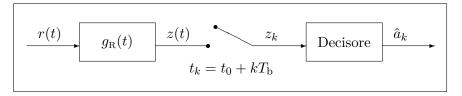


Figura 8.12: La decisione viene fatta simbolo a simbolo, perché abbiamo ipotizzato che i simboli siano incorrelati.

il segnale z(t) all'uscita del filtro in ricezione $g_{\rm R}(t)$ può scriversi nella forma:

$$z(t) = \sum_{i} a_{i}g(t - iT_{b}) + n(t) = z_{R}(t) + n(t)$$

essendo

$$z_{\rm R}(t) \triangleq s_{\rm R}(t) \otimes g_{\rm R}(t)$$

 $n(t) \triangleq w(t) \otimes g_{\rm R}(t)$

il contributo in uscita dovuto al rumore: resta un processo gaussiano a media nulla $\eta_n = \eta_w \cdot G_{\rm R}(0) = 0$.

Dobbiamo

- limitare il rumore presente all'ingresso solo nella banda del segnale utile $s_{\rm R}(t)$
- immunizzare il segnale utile rispetto al rumore rimanente in banda

L'energia media del segnale di uscita è

$$\overline{E} = E_q$$
.

La densità spettrale di potenza è

$$S_{z_{\mathbf{R}}}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_{\mathbf{b}}} \cdot |G(f)|^2$$

La banda è:

$$B_{z_{\rm R}} = B_{g_{\rm TC}} = B_{s_{\rm R}}$$

Efficienza in banda del segnale in uscita (o del sistema):

$$\rho \triangleq \frac{R_{\rm b}}{B_{\rm zp}} = \rho_{\rm R} \stackrel{*}{=} \rho_{\rm T}$$

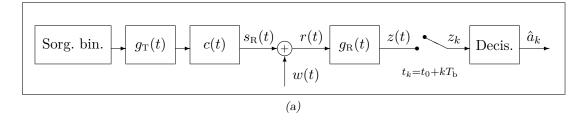
l'uguaglianza * è valida se $B_{\rm C} > B_{g_{\rm T}}$.

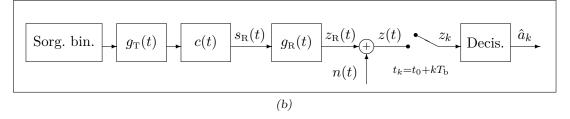
La densità spettrale di potenza è

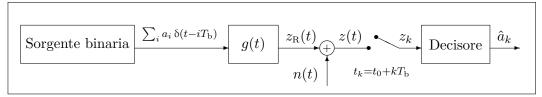
$$S_n(f) = S_w(f) \cdot |G_{\rm R}(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot |G_{\rm R}(f)|^2$$

La varianza è:

$$\sigma_n^2 = P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) \,\mathrm{d}f$$







(c) Schema equivalente del sistema PAM.

Figura 8.13: La decisione viene fatta simbolo a simbolo, perché abbiamo ipotizzato che i simboli siano incorrelati.

$$= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{\mathbf{R}}(f)|^2 df$$
$$= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathbf{R}}^2(t) dt$$
$$= \frac{N_0}{2} E_{g_{\mathbf{R}}} = \sigma_n^2$$

Agli istanti di campionamento $t_k = t_0 + kT_b$ si trova:

$$z(t_k) = a_k g(t_0) + \sum_{i \neq k} a_i g(t_0 + (k-i)T_b) + n(t_k)$$

O

$$z_k = a_k g(t_0) + \sum_{i \neq k} a_i g(t_{k-i}) + n_k$$
(8.2)

essendo $z_k = z(t_k)$, $t_{k-i} = t_k - iT_b$ e $n_k = n(t_k)$. Si osservi che solo il primo addendo al secondo membro della (8.2) dipende dal simbolo sotto decisione a_k , mentre gli altri ne sono indipendenti e rappresentano quindi un disturbo che si somma al segnale utile. In particolare, il secondo addendo rappresenta l'interferenza intersimbolica, in inglese InterSymbol Interference (ISI), così denominata in quanto prodotta dagli altri simboli, mentre il terzo addendo, che rappresenta il disturbo dovuto al rumore termico, è una variabile aleatoria gaussiana a media nulla e varianza

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{\mathbf{R}}(f)|^2 \,\mathrm{d}f.$$

[[[Servendosi dei campioni z(kT), il decisore effettua infine la stima del k-esimo simbolo trasmesso seguendo la regola

$$\hat{a}_k = \begin{cases} +1 & \text{se } z(kT_b) \ge 0\\ -1 & \text{se } z(kT_b) < 0. \end{cases}$$

Si sceglie, quindi, come soglia di decisione il valore $\lambda=0$. In assenza di interferenza intersimbolica e con simboli equiprobabili e indipendenti, questa scelta rende minima la probabilità di errore ed è quindi ottima.

Approfondiamo ora le caratteristiche di un sistema PAM binario e i diversi aspetti di progettazione finalizzati a migliorarne le prestazioni.

- Il rumore w(t) all'ingresso del ricevitore è una realizzazione di un processo a media nulla, gaussiano, bianco e stazionario con densità spettrale di potenza $N_0/2$.
- Il canale e i filtri utilizzati nel sistema di comunicazione non introducono alcun ritardo e sono quindi non causali. Questa ipotesi non ha alcuna conseguenza sul dimensionamento del sistema di comunicazione, poiché i ritardi effettivamente presenti in una realizzazione pratica vengono comunque compensati dal circuito di recupero del sincronismo di campionamento.

8.5.1 Interferenza intersimbolica

Come si è già accennato, e come indica chiaramente la (8.2), per migliorare le prestazioni di un sistema PAM è necessario ridurre il disturbo prodotto dall'interferenza intersimbolica e dal rumore termico. In questo paragrafo si mostrerà che, fissato il sistema di comunicazione (ossia il canale e i filtri di trasmissione e ricezione), è possibile agire sul ritardo di campionamento t_0 per ridurre l'ISI e che una opportuna scelta della risposta in frequenza del sistema consente, almeno in linea teorica, di annullarne completamente l'effetto agli istanti di campionamento.

Il valore ottimo di t_0 , cioè quello che minimizza l'ISI, dipende naturalmente dal canale e dai filtri di trasmissione e ricezione impiegati. La scelta di t_0 non ha invece alcuna influenza sul contributo dovuto al rumore termico n(t), essendo quest'ultimo un processo stazionario. Il valore ottimo t_0 viene valutato modulo T.

Nella pratica, in conseguenza della tempo-varianza del canale e dell'invecchiamento dei componenti, la scelta del ritardo ottimo di campionamento non può essere fatta una volta per tutte all'atto dell'installazione del ricevitore, ma viene affidata a un sistema adattativo, che ricava il sincronismo di simbolo direttamente dal segnale ricevuto.

Nel caso di una PAM a M livelli, la scelta di t_0 avviene esattamente come nel caso binario.

CONDIZIONE DI NYQUIST. Riconsideriamo l'espressione del segnale in ricezione agli istanti di campionamento:

$$z_k = a_k g(t_0) + \sum_{i \neq k} a_i g(t_0 + (k-i)T_b) + n_k.$$
(8.3)

Almeno da un punto di vista teorico, è possibile scegliere $g_{\rm TC}(t)$ e $g_{\rm R}(t)$ in modo che il sistema di comunicazione sia *ideale*, cioè che l'interferenza intersimbolica sia nulla e il contributo dovuto al rumore termico sia minimo.

Per annullare l'ISI agli istanti di campionamento $t_0 + kT_b$, è sufficiente che g(t) sia un *impulso di Nyquist* traslato in t_0 :

$$g(t) = g_{\rm N}(t - t_0)$$

dove si definisce l'impulso di Nyquist $g_{\rm N}(t)$, così caratterizzato:

$$g_{\rm N}(mT_{\rm b}) = \begin{cases} 1 & \text{per } m = 0\\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
 (8.4)

In tal modo, infatti, i termini per $i \neq k$ nella (8.3) sono tutti nulli, poiché $g_N((k-i)T_b)$ è nullo per $k \neq i$. La (8.4) rappresenta la condizione di Nyquist nel tempo agli istanti kT_b . Applicando alla funzione $g_N(t)$ la relazione

$$T\sum_{k} x(kT) e^{-j2\pi fkT} = \sum_{m} X\left(f - \frac{m}{T}\right),$$

si ottiene la condizione di Nyquist espressa in termini spettrali:

$$T_{\rm b} = \sum_{m} G_{\rm N} \left(f - \frac{m}{T_{\rm b}} \right). \tag{8.5}$$

IMPULSI DI NYQUIST A BANDA LIMITATA A COSENO RIALZATO. Poiché la (8.5) non può essere soddisfatta da funzioni di banda inferiore a $1/(2T_{\rm b})$, si conclude che le funzioni di Nyquist (cioè quelle che non creano ISI) devono avere banda non inferiore a $1/(2T_{\rm b})$ che, per questo, viene detta banda di Nyquist. In altri termini, affinché non si abbia interferenza intersimbolica al campionatore, è necessario (ma non sufficiente) che la banda del segnale ricevuto, e quindi quella del canale di comunicazione, sia almeno pari alla metà della frequenza di segnalazione.

La funzione $G_{\rm N}(f)$ di banda minima che soddisfa la (8.5) è una funzione rettangolare in frequenza di banda $1/(2T_{\rm b})$. Purtroppo, per l'estrema ripidità dei fianchi, essa non risulta facilmente sintetizzabile nemmeno in forma approssimata, e inoltre errori di temporizzazione anche molto piccoli danno luogo a elevatissimi valori di interferenza intersimbolica residua. Per contenere l'ISI residua entro valori accettabili e, al contempo, rendere più semplice la sintesi dei filtri di trasmissione e ricezione, si è soliti fare ricorso a funzioni del tipo a coseno rialzato, così definite per la particolare sagomatura in frequenza che le caratterizza:

$$G_{\mathrm{N}}(f;\alpha) = \begin{cases} T_{\mathrm{b}} & \text{per } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_{\mathrm{b}}} \\ \frac{T_{\mathrm{b}}}{2} \left(1 + \cos\frac{\pi T_{\mathrm{b}}}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_{\mathrm{b}}}\right)\right) & \text{per } \frac{1-\alpha}{2T_{\mathrm{b}}} < |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_{\mathrm{b}}} \\ 0 & \text{per } |f| > \frac{1+\alpha}{2T_{\mathrm{b}}}. \end{cases}$$

Non dovrebbe essere necessario per l'esame ricordarsi l'espressione analitica generale qui riportata.

Dove α è un parametro compreso tra 0 e 1, detto *rolloff*, che fissa la banda dell'impulso. La quantità $\alpha/(2T_{\rm b})$ rappresenta l'eccesso di banda dell'impulso, cioè la differenza

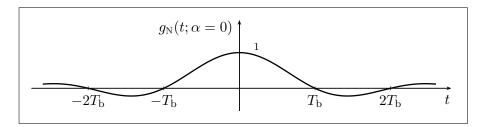


Figura 8.14: Caso a rolloff nullo.

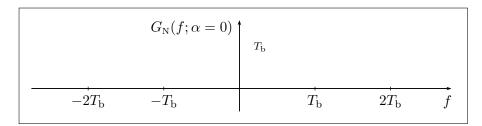


Figura 8.15: Caso a rolloff nullo.

tra la banda $(1 + \alpha)/(2T_b)$ di quest'ultimo e la banda di Nyquist $1/(2T_b)$. Spesso l'eccesso di banda è misurato in percento rispetto alla banda di Nyquist, ad esempio se $\alpha = 1$ l'eccesso di banda è del 100%. Si osservi infine che l'area sottesa dalla $G_N(f)$ è unitaria qualunque sia il valore del rolloff e di conseguenza risulta $g_N(0) = 1$.

CASO A ROLLOFF NULLO. Per $\alpha = 0$, $G_{\rm N}(f)$ è una rect di banda $1/(2T_{\rm b})$ e ampiezza $T_{\rm b}$. Si può vedere facendo la prova che è un impulso di Nyquist in quanto

$$\sum_{m} G_{\rm N} \left(f - \frac{m}{T_{\rm b}} \right) = T_{\rm b}$$

Se la banda della rect fosse inferiore a $1/(2T_b$ non si riuscirebbe più a rispettare la condizione di Nyquist. Pertanto, se si vuole trasmettere informazione con un rate T_b si deve usare una banda maggiore o uguale alla banda minima $B_m = 1/(2T_b)$.

CASO A ROLLOFF UNITARIO. Il grafico risulta essere un pezzo di coseno traslato verso l'alto di $T_{\rm b}/2$ e troncato in $[-1/T_{\rm b},1/T_{\rm b}]$. Sempre graficamente si vede che soddisfa la condizione di Nyquist.

$$G_{\rm N}(f;1) = \frac{T_{\rm b}}{2} \left(1 + \cos(\pi f T_{\rm b})\right) \cdot \operatorname{rect}\left(f\frac{T_{\rm b}}{2}\right)$$

Nel tempo:

$$\begin{split} g_{\mathrm{N}}(t;1) &= \frac{T_{\mathrm{b}}}{2} \left(\frac{2}{T_{\mathrm{b}}} \operatorname{sinc}\left(t\frac{2}{T_{\mathrm{b}}}\right) \otimes \left(\delta(t) + \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{T_{\mathrm{b}}}{2}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(t + \frac{T_{\mathrm{b}}}{2}\right)\right) \right) \\ &= \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_{\mathrm{b}}/2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{t - T_{\mathrm{b}}/2}{T_{\mathrm{b}}/2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{t + T_{\mathrm{b}}/2}{T_{\mathrm{b}}/2}\right) \end{split}$$

Lo smorzamento dei lobi laterali dell'impulso dipende dal valore del rolloff che, viceversa, influenza molto debolmente l'andamento del lobo centrale. Per valori di $\alpha \geq 0.5$ lo smorzamento è abbastanza accentuato e questo, oltre a ridurre a pochi

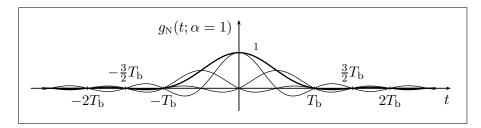


Figura 8.16: Caso a rolloff unitario.

intervalli di segnalazione la durata effettiva dell'impulso, e quindi a semplificare la sintesi dei filtri di trasmissione e ricezione, implica ovviamente valori contenuti per l'interferenza intersimbolica residua dovuta a errori di temporizzazione. A piccoli valori di rolloff corrisponde invece una situazione più critica dal punti di vista degli errori di temporizzazione, a causa di un minore smorzamento dei lobi laterali.

Prestazioni di un sistema numerico di comunicazione viene generalmente effettuata in termini di probabilità di errore. Essa può essere misurata sperimentalmente come frazione delle decisioni errate sul totale dei simboli emessi, ovvero valutata per via teorica come probabilità dell'evento errore di decisione.

In quest'ultimo caso si fa ricorso al teorema delle probabilità totali, che consente di esprimere la probabilità dell'evento errore di decisione tramite le probabilità di errore condizionate ai valori m_i assunti dai simboli emessi. Se $P_k = \Pr[a_i = m_k]$ rappresentano le probabilità a priori di emissione dei simboli, si trova facilmente:

$$P(e) = \sum_{k=0}^{M-1} \Pr[e \mid a_i = m_k] \cdot P_k.$$

MASSIMIZZAZIONE DEL RAPPORTO SEGNALE RUMORE. Per ridurre il più possibile il rapporto segnale rumore è necessario che il filtro in ricezione sia *adattato* all'impulso ricevuto:

$$G_{\rm R}(f) = G_{\rm TC}^*(f).$$

Indicato con E_b/N_0 il rapporto tra l'energia per simbolo binario valutata all'ingresso del filtro in ricezione e la densità spettrale di potenza monolatera di rumore, la probabilità di errore di un sistema binario è espressa dalla:

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{\rm b}}{N_0}}\right).$$

8.6 Sistema di comunicazione pam M-ario

I simboli a_i sono indipendenti e assumono i valori appartenenti a un certo alfabeto $\mathcal{A} = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$ costituito da un numero pari M di elementi. Se i simboli sono antipodali allora viene scelto:

$$A = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm (M-1)\}$$

ossia $m_i = 2i + 1 - M$, per i = 0, ..., M - 1.

. . .

La regola di decisione utilizzata può porsi nella forma:

$$\hat{a}_k = \{$$

dove λ_i sono le soglie di decisione. Se i simboli sono equiprobabili le soglie di decisione vengono scelte secondo la regola:

$$\lambda_i = \frac{m_i + m_{i+1}}{2}, \text{ per } i = 0, 1, \dots, (M-2).$$

In assenza di interferenza intersimbolica e con simboli equiprobabili e indipendenti, questa scelta rende minima la probabilità di errore ed è quindi ottima.

SISTEMI DI COMUNICAZIONE IN BANDA PASSANTE

9.1 Introduzione

Un sistema di comunicazione in banda passante è sostanzialmente costituito da un trasmettitore, da un canale passa banda di comunicazione e da un ricevitore. Il trasmettitore e il ricevitore, oltre alle funzioni già descritte in relazione ai sistemi in banda base, devono svolgere anche funzioni specifiche dei sistemi in banda passante: il trasmettitore deve provvedere a traslare il segnale, generato in banda base, alla frequenza del canale di trasmissione assegnato, mentre il ricevitore deve effettuare una conversione di frequenza per riportare il segnale dalla frequenza della portante alla banda base.

9.2 Rappresentazione in banda base di un segnale deterministico

Verrà ora descritta una rappresentazione complessa che consente di analizzare i sistemi di comunicazione in banda passante come se fossero in banda base, a tutto vantaggio della compattezza e della semplicità di notazione.

9.3 Inviluppo complesso di un segnale

Si consideri un segnale reale x(t) non necessariamente a banda limitata, ma a media temporale nulla (in caso contrario è sempre possibile scomporre il segnale nella somma della sua componente continua e di un segnale a media temporale nulla).

$$x(t) = \mathbf{Re}\{\tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t}\}$$

La proprietà che caratterizza un inviluppo complesso riferito ad una certa frequenza f_0 è di avere TCF nulla per le frequenze inferiori a $-f_0$:

$$\tilde{X}(f) = \text{TCF}[\tilde{x}(t)] = 0 \quad \text{per } f < -f_0.$$
(9.1)

Dal punto di vista spettrale, il legame tra un segnale e il suo inviluppo complesso è espresso dalle relazioni

$$\tilde{X}(f) = \begin{cases}
2X(f+f_0) & \text{per } f \ge -f_0 \\
0 & \text{per } f < -f_0
\end{cases}$$

$$X(f) = \frac{\tilde{X}(f-f_0) + \tilde{X}^*(-f-f_0)}{2}$$
(9.2)

Componenti in fase e in quadratura di un segnale. Definite con

$$x_c(t) = \mathbf{Re}\{\tilde{x}(t)\}, \quad x_s(t) = \mathbf{Im}\{\tilde{x}(t)\}\$$

le componenti in fase e quadratura del segnale x(t), il suo inviluppo complesso può scriversi nella forma

$$\tilde{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t).$$

mentre il segnale x(t) può essere ricostruito come

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Questa relazione giustifica la denominazione di componenti in fase e in quadratura adottata per i segnali $x_c(t)$ e $x_s(t)$. Se il segnale è scritto in questa forma, è possibile determinare immediatamente le sue componenti in fase e in quadratura: tali componenti infatti sono individuabili nei segnali che moltiplicano, rispettivamente, le funzioni $\cos(2\pi f_0 t)$ e $-\sin(2\pi f_0 t)$, purché la TCF del segnale $x_c(t) + jx_s(t)$ sia nulla per $f < -f_0$.

$$\tilde{X}(f) = X_c(f) + iX_s(f)$$

avendo indicato con

$$X_c(f) = \frac{\tilde{X}(f) + \tilde{X}^*(-f)}{2}$$
(9.3)

$$X_s(f) = \frac{\tilde{X}(f) - \tilde{X}^*(-f)}{i2}$$
(9.4)

le parti a simmetria hermitiana pari e a simmetria hermitiana dispari di $\tilde{X}(f)$. Si noti che le espressioni (9.3) e (9.4) presentano simmetria hermitiana, in quanto TCF di segnali reali. Si osservi infine che, pur valendo per $\tilde{X}(f)$ la (9.1), altrettanto non può dirsi per le $X_c(f)$ e $X_s(f)$.

Questa non l'ho capita!

9.3.1 Inviluppo complesso di un segnale passa banda

Come si è già accennato, i segnali utilizzati nei sistemi di comunicazione sono spesso ti tipo passa banda, intendendo dire che la loro TCF è prevalentemente concentrata attorno ad una certa frequenza f_0 . Più precisamente, si definisce passa banda rispetto alla frequenza f_0 ogni segnale reale x(t) a media nulla che soddisfi la condizione

$$X(f) = 0 \text{ per } |f| > 2f_0.$$
 (9.5)

Per i segnali passa banda continua a valere ovviamente quanto detto riguardo l'inviluppo complesso di un generico segnale. L'unica caratteristica di rilievo consiste

nel fatto che l'inviluppo complesso di un segnale, riferito alla stessa frequenza f_0 rispetto alla quale il segnale è passa banda, è un segnale passa basso di banda non superiore a f_0 . Infatti, se vale la (9.5), risulta $X(f + f_0) = 0$ per $f > f_0$ e quindi la (9.2) diventa:

$$\tilde{X}(f) = \begin{cases} 2X(f+f_0) & \text{per } |f| < f_0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$
(9.6)

Facendo uso di questa relazione nelle (9.3)–(9.4), si trova:

$$X_c(f) = \begin{cases} X(f + f_0) + X(f - f_0) & \text{per } |f| < f_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
(9.7)

$$jX_s(f) = \begin{cases} X(f + f_0) - X(f - f_0) & \text{per } |f| < f_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
 (9.8)

ossia anche le componenti in fase e in quadratura sono segnali passa basso di banda non superiore a f_0 .

È interessante osservare che se x(t) non è un segnale passa banda, la (9.6) e le (9.7)–(9.8) forniscono l'inviluppo complesso e le componenti in fase e in quadratura della porzione passa banda di x(t).