MAC008 - Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Lista 1

Antonio José de Medeiros Filho - 201965502B

1 Exercício 1

Utilize o método da projeção para determinar a aproximação da função $f = sen(z\pi)$ no intervalo $-2 < x < 2$ utilizando as funções 1, x^2, x^3, x^4, x^5. Considere $z = 1 + \frac{0.5N}{19}$. Apresente os gráficos da aproximação junto com a função dada.

1.1 Resolução

A função que iremos aproximar é da forma:

$$f = sen(z\pi x)$$

Temos que:

$$z = 1 + \frac{0.5N}{19} N = 0 \Rightarrow z = 1$$

Portanto:

$$f = sen(\pi x)$$

1.1.1 Calculando Coeficientes

Para calcular os coeficientes devemos resolver o sistema linear na forma:

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}$$

onde:

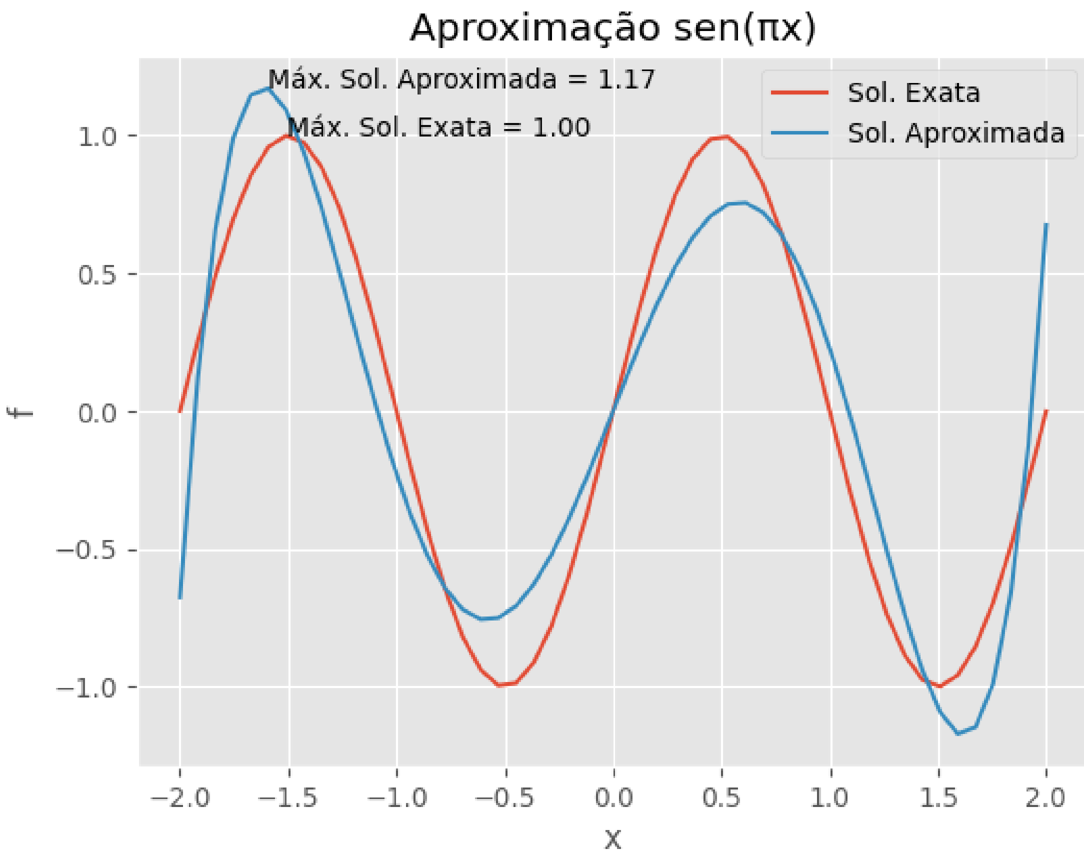
- A é a matriz tal que $A_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle$;
- $\mathbf{b}$ é o vetor dado por $\langle f, \phi_i \rangle$;
- $\mathbf{c}$ é o vetor de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2.0081971637608 \\ 0 \\ -2.23285228459836 \\ 0 \\ 0.453821069426289 \end{bmatrix}$$

1.1.2 Aproximação

$0.453821069426289x^5 - 2.23285228459836x^3 + 2.0081971637608x$

1.2 Resultados



2 Exercício 2

Dada a função $f(x) = -1 - \frac{N}{19}\ \forall\ -\pi < x < 0$ e $f(x) = 1 + \frac{N}{19}\ \forall\ 0 < x < \pi$ use o método da projeção para determinar as componentes desta função neste intervalo $-\pi < x < \pi$ na "base" composta pelas funções 1, *sen kx*, *cos kx* com k = 1 até 5.

2.1 Resolução

Temos que $N = 0$, logo:

$$f(x) = -1, \forall - \pi < x < 0$$

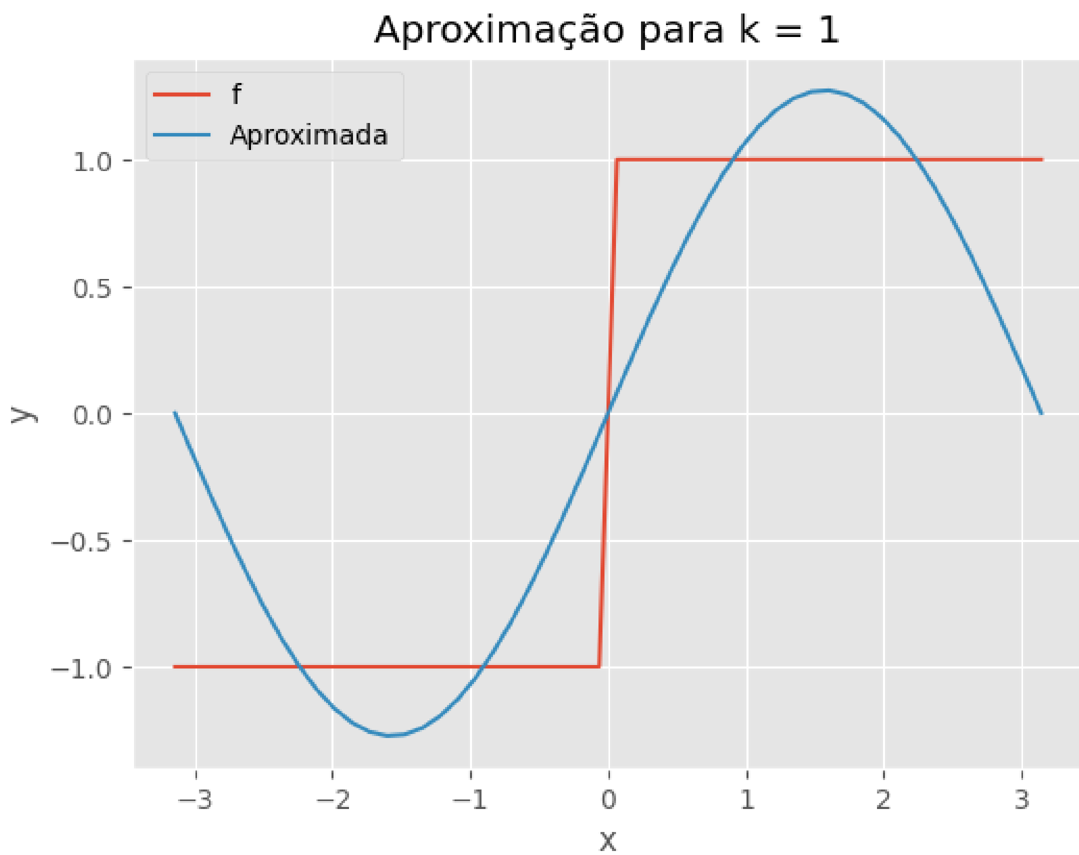
e,

$$f(x) = 1, \forall 0 < x < \pi$$

2.2 Resultados

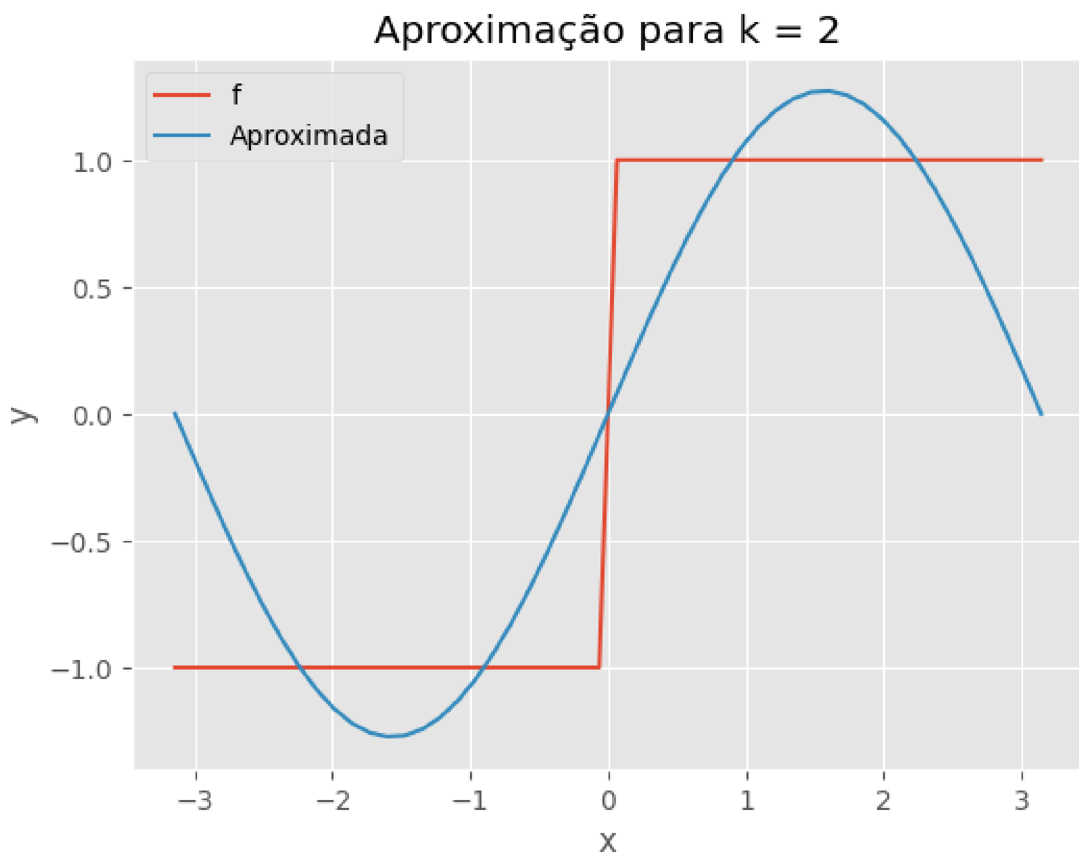
2.2.1 k = 1

```
Coeficientes:  [7.06789929e-17 1.27280336e+00 1.23688238e-16]
```



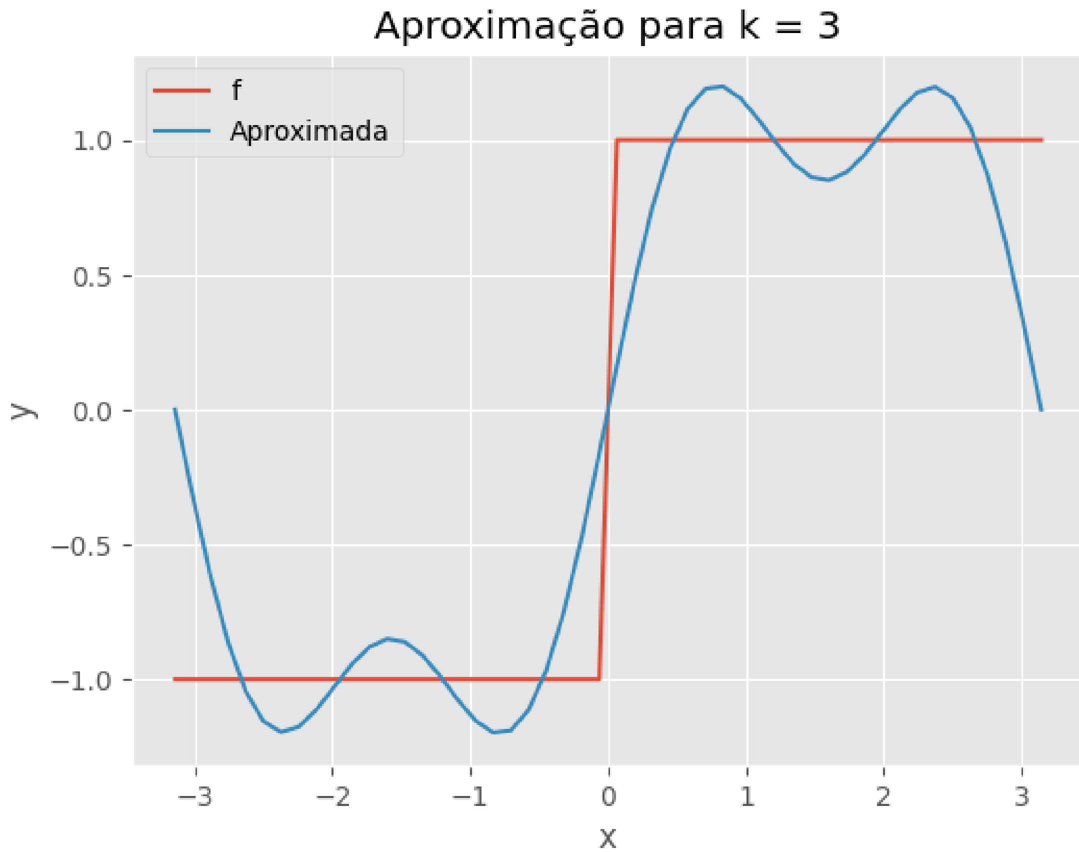
2.2.2 k = 2

```
Coeficientes:  [7.06789929e-17 1.27280336e+00 2.62049511e-03 1.23688238e-16
 1.14853363e-16]
```



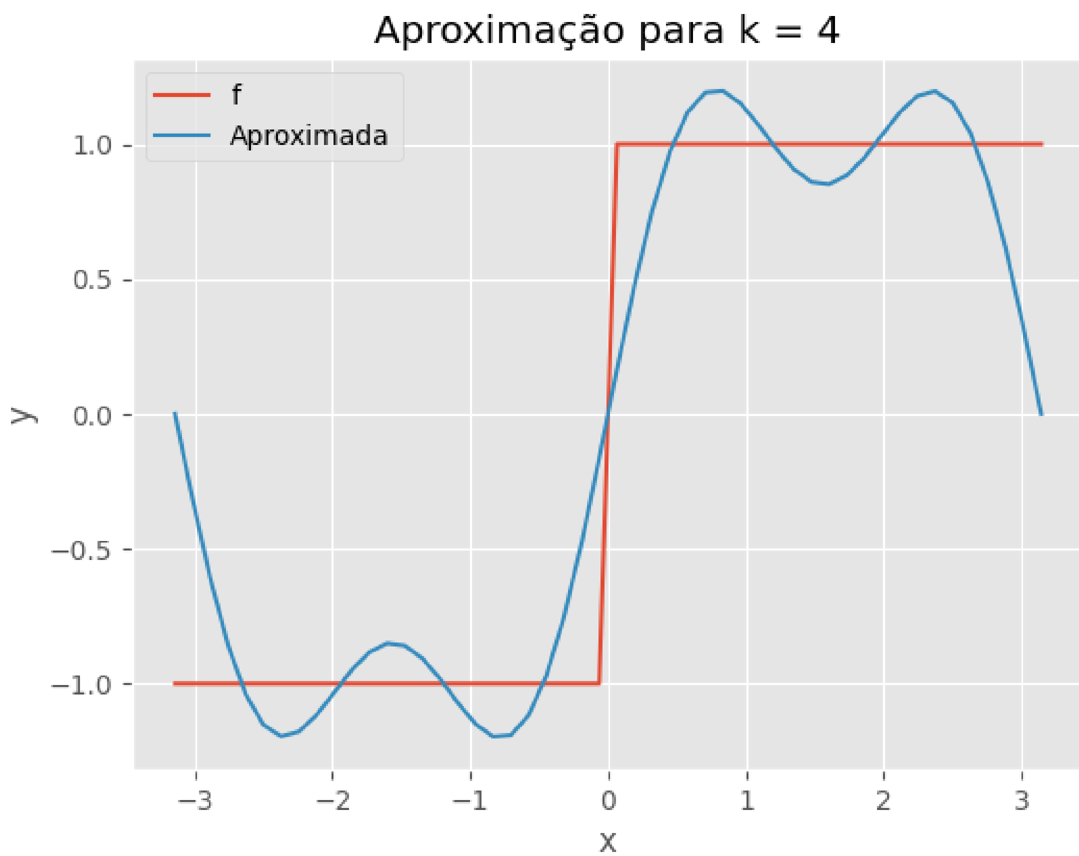
2.2.3 $\mathbf{k = 3}$

```
Coeficientes:  [7.06789929e-17 1.27280336e+00 2.62049511e-03 4.23103922e-01
 1.23688238e-16 1.14853363e-16 1.76697482e-16]
```



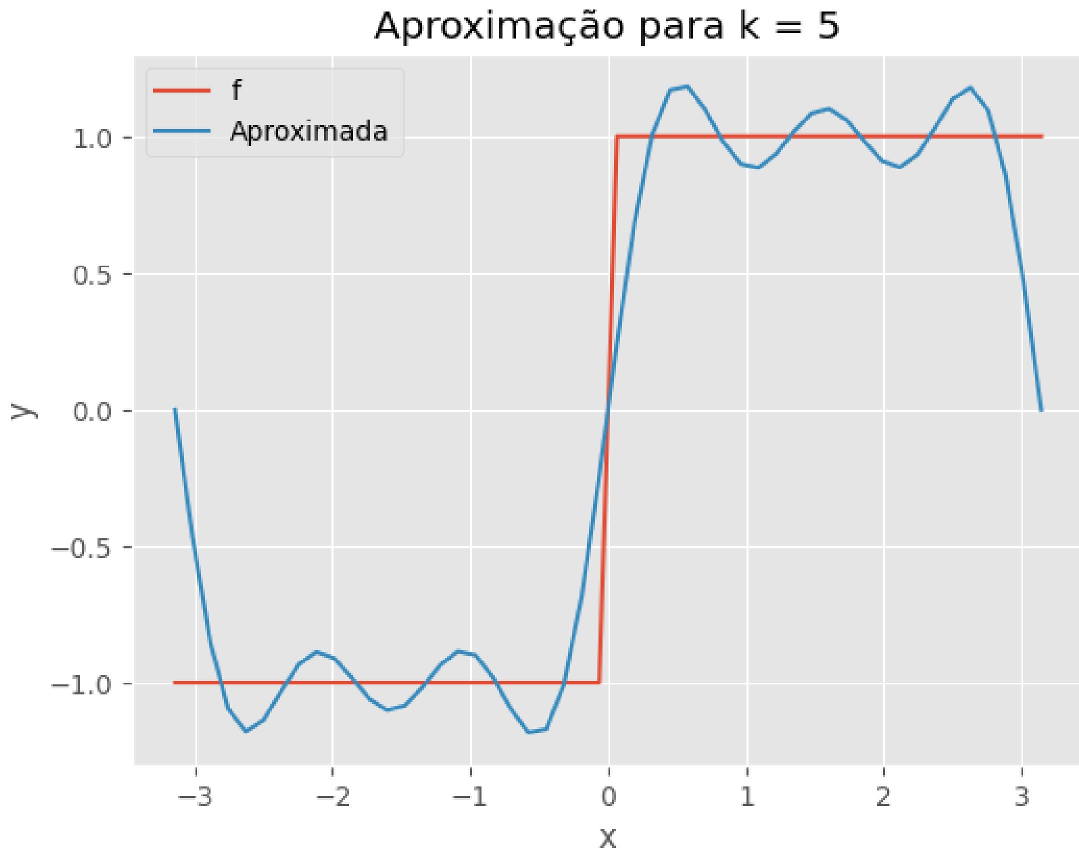
2.2.4 k = 4

```
Coeficientes:  [7.06789929e-17 1.27280336e+00 2.62049511e-03 4.23103922e-01
 5.26268254e-03 1.23688238e-16 1.14853363e-16 1.76697482e-16
 1.32523112e-16]
```



2.2.5 k = 5

```
Coeficientes:  [7.06789929e-17 1.27280336e+00 2.62049511e-03 4.23103922e-01
 5.26268254e-03 2.52463412e-01 1.23688238e-16 1.14853363e-16
 1.76697482e-16 1.32523112e-16 2.65046223e-16]
```



3 Exercício 3

Dada a barra a esforço axial com secção constante ($b \times h$) engastada e livre com uma carga distribuída dada por q pede-se calcular o deslocamento em sua extremidade livre utilizando o MEF com aproximações linear e quadrática utilizando, respectivamente, 1 elemento e 5 elementos. Apresente a dedução da matriz do elemento quadrático para este caso. Na solução numérica indique claramente a numeração dos nós e dos elementos utilizados em sua discretização e apresentando a numeração dos nós e dos elementos utilizados em sua discretização e apresentado a matriz global e o campo de deslocamento aproximado comparado com a solução exata do problema. Dados:

- $b = 0,10m$
- $E = 10^8 \cdot T(Pa)$
- $h = 0,5 \cdot T(m)$
- $q(x) = 10 \cdot T(kN/m)$
- $l = 10 \cdot T(m)$

Com $T = \frac{20-N}{19}$

3.1 Resolução

3.1.1 Substituindo N

Inicialmente, substituiremos os valores de N e T:

$$N = 0 \Rightarrow T = \frac{20}{19}$$

Logo, temos que:

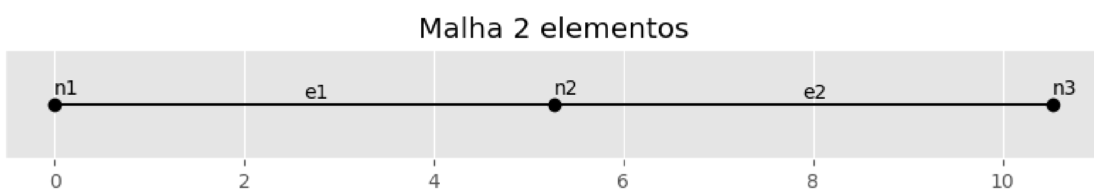
- $b = 0,10m$
- $E = 10^8 \cdot \frac{20}{19}(Pa)$
- $h = 0,5 \cdot \frac{20}{19}(m)$
- $q(x) = 10 \cdot \frac{20}{19}(kN/m)$
- $l = 10 \cdot \frac{20}{19}(m)$

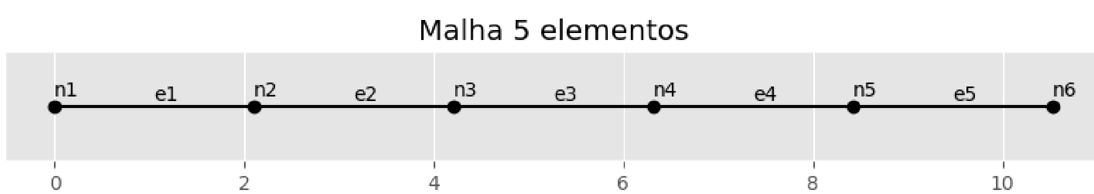
3.1.2 Equação do problema

$$-EA\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = q(x)$$

Onde $0 < x < L$, $A = bh$ é a área transversal e u é o vetor deslocamento.

3.1.3 Malhas dos elementos e nós





3.1.4 Condições de Contorno

Do enunciado, temos que a barra possui uma extremidade engastada e outra livre, portanto:

$$u(0) = 0$$

3.1.5 Aproximação Linear (1 elemento)

Fazendo uma aproximação linear, temos:

$u = u_1\phi_1 + u_2\phi_2$

Sendo as funções bases de Lagrange:

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{h}$$

$$\phi_2 = \frac{x}{h}$$

Calculando Matriz de Rigidez para cada elemento

$$K^i = EA \begin{bmatrix} \int_0^h \phi_1'\phi_1' dx & \int_0^h \phi_1'\phi_2' dx \\ \int_0^h \phi_2'\phi_1' dx & \int_0^h \phi_2'\phi_2' dx \end{bmatrix}$$

$\frac{AE}{h}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Calculando Vetor Fonte por elemento

$$f^i = \begin{bmatrix} \int_0^h \phi_1 q(x) dx \\ \int_0^h \phi_2 q(x) dx \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \frac{hq}{2} \\ \frac{hq}{2} \end{bmatrix}$

Substituição dos valores

Para o caso linear, como temos apenas 1 elemento, a Matriz Global de Rigidez e o Vetor Fonte Global serão os mesmos já calculados:

$\begin{bmatrix} 526315.789473684 & -526315.789473684 \\ -526315.789473684 & 526315.789473684 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 55.4016620498615 \\ 55.4016620498615 \end{bmatrix}$

Aplicando Condições de Contorno de Dirichlet ($u(0) = 0$)

Conhecendo o valor em $u(0)$, podemos utilizar o método de eliminação:

Calculando Vetor de Deslocamentos u

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.000105263157894737 \end{bmatrix}$

3.1.6 Aproximação Quadrática (5 elementos)

Fazendo uma aproximação quadrática, temos que:

$$u = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3$$

Sendo as funções bases de Lagrange para este caso:

$$\phi_1 = 1 - \frac{3x}{h} + \frac{2x^2}{h^2}$$

$$\phi_2 = \frac{4x}{h} - \frac{4x^2}{h^2}$$

$$\phi_3 = -\frac{x}{h} + \frac{2x^2}{h^2}$$

Calculando Matriz de Rigidez para cada elemento

$$K^i = EA \begin{bmatrix} \int_0^h \phi'_1\phi'_1 dx & \int_0^h \phi'_1\phi'_2 dx & \int_0^h \phi'_1\phi'_3 dx \\ \int_0^h \phi'_2\phi'_1 dx & \int_0^h \phi'_2\phi'_2 dx & \int_0^h \phi'_2\phi'_3 dx \\ \int_0^h \phi'_2\phi'_1 dx & \int_0^h \phi'_3\phi'_2 dx & \int_0^h \phi'_3\phi'_3 dx \end{bmatrix}$$

$$\frac{AE}{h} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Calculando Matriz de Rigidez Global

Para aproximações quadráticas e considerando que serão utilizados 5 elementos, temos que a matriz de rigidez global K será dada por:

$$K = \begin{bmatrix} K^1_{11} & K^1_{12} & K^1_{13} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ K^1_{21} & K^1_{22} & K^1_{23} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ K^1_{31} & K^1_{32} & K^1_{33}+K^2_{11} & K^2_{12} & K^2_{13} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^2_{21} & K^2_{22} & K^2_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^2_{31} & K^2_{32} & K^2_{33}+K^3_{11} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & K^4_{33}+K^5_{11} & K^5_{12} & K^5_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & K^5_{21} & K^5_{22} & K^5_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & K^5_{31} & K^5_{32} & K^5_{33} \end{bmatrix}$$

$$AE \begin{bmatrix} 1.108 & -1.267 & 0.158 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.267 & 2.533 & -1.267 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.158 & -1.267 & 2.217 & -1.267 & 0.158 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.267 & 2.533 & -1.267 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.158 & -1.267 & 2.217 & -1.267 & 0.158 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.267 & 2.533 & -1.267 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.158 & -1.267 & 2.217 & -1.267 & 0.158 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.267 & 2.533 & -1.267 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.158 & -1.267 & 2.217 & -1.267 & 0.158 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.267 & 2.533 & -1.267 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.158 & -1.267 & 1.108 \end{bmatrix}$$

Calculando Vetor Fonte para cada elemento

Temos que:

$$f^i = \begin{bmatrix} \int_0^h \phi_1 q(x) dx \\ \int_0^h \phi_2 q(x) dx \\ \int_0^h \phi_3 q(x) dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{hq}{6} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{hq}{6} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{3} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{3} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{3} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{3} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{6} \end{bmatrix}$$

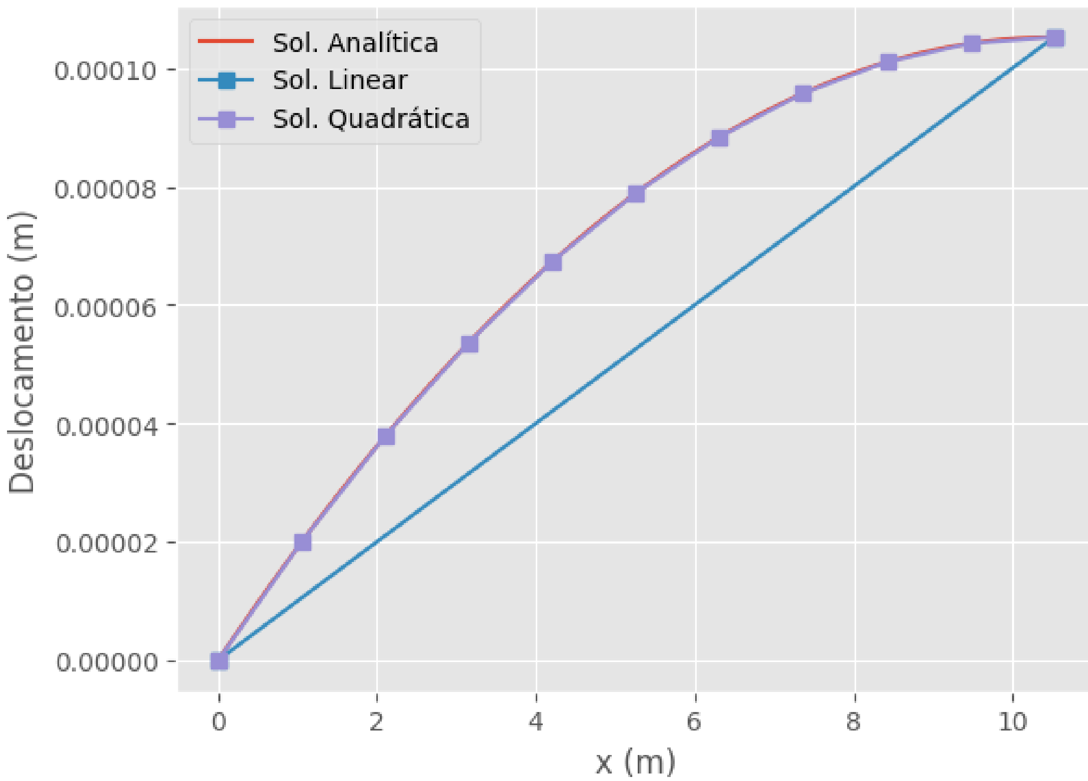
Aplicando Condições de Contorno

Substituindo os valores

Calculando Matriz de Deslocamentos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1.99999999999998 \cdot 10^{-5} \\ 3.7894736842105 \cdot 10^{-5} \\ 5.36842105263153 \cdot 10^{-5} \\ 6.7368421052631 \cdot 10^{-5} \\ 7.89473684210519 \cdot 10^{-5} \\ 8.84210526315781 \cdot 10^{-5} \\ 9.57894736842097 \cdot 10^{-5} \\ 0.000101052631578946 \\ 0.000104210526315789 \\ 0.000105263157894736 \end{bmatrix}$$

3.1.7 Resultados



4 Exercício 4

Dada uma barra com uma carga P aplicada no meio do seu vão, conforme indicado na Figura, pede-se, utilizando elementos finitos lineares, calcular os deslocamentos da mesma adotando-se uma divisão de 2, 4 e 6 elementos lineares. Comparar os campos de deslocamentos obtidos com os deslocamentos exatos para o problema em questão. Considere:

- $EA = 10^5 \cdot (N + 1)$ (Newton)
- $P = (N + 1) \cdot 10^3$ (Newton)
- $l = 2 + \frac{N+1}{20}$ (metro)

Resolução

4.0.1 Substituindo N

Substituindo $N = 0$, temos:

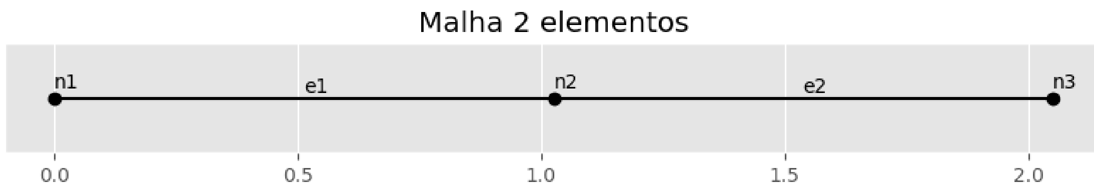
- $EA = 10^5$ (Newton)
- $P = 10^3$ (Newton)
- $l = \frac{41}{20}$ (metro)

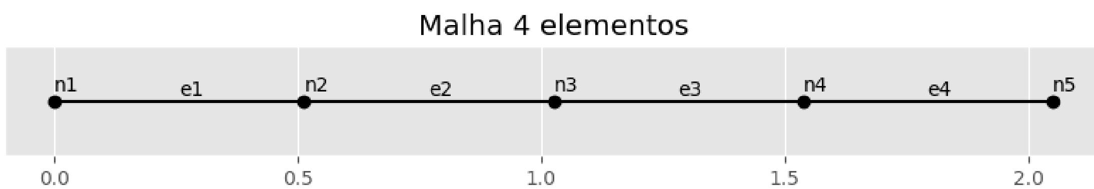
4.0.2 Equação do problema

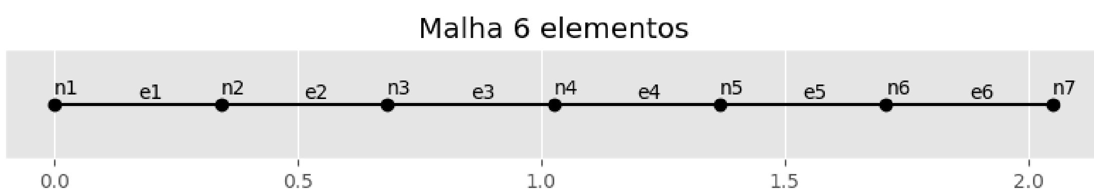
$$-EA\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = P\delta\left(x - \frac{L}{2}\right), 0 \le x \le L$$

onde δ é a função delta de Dirac.

4.0.3 Malhas







4.0.4 Condições de Contorno

Da figura, temos que $u(0) = 0$ (condição de Dirichlet).

4.0.5 Aproximação Linear

Neste problema utilizaremos somente a aproximação linear, na forma:

$$u = u_1\phi_1 + u_2\phi_2$$

4.1 Aproximação com 2 Elementos

4.1.1 Definindo variáveis e calculando h

4.1.2 Matriz de Rigidez por elemento

Inicialmente, calculamos a matriz de rigidez conforme calculado no exercício anterior:

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & -\frac{2EA}{L} \\ -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.1.3 Matriz de Rigidez Global

Diferentemente da aproximação linear abordada anteriormente, neste caso como temos mais do que apenas 1 elemento, será necessário calcular a Matriz de Rigidez Global conforme:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{12}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix}$$

onde e é o número de elementos.

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & -\frac{2EA}{L} & 0 \\ -\frac{2EA}{L} & \frac{4EA}{L} & -\frac{2EA}{L} \\ 0 & -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.1.4 Vetor Fonte Global

$$\begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.1.5 Aplicando Condições de Contorno

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EA}{L} & -\frac{2EA}{L} \\ 0 & -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.1.6 Substituindo valores

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 195121.951219512 & -97560.9756097561 \\ 0 & -97560.9756097561 & 97560.9756097561 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.1.7 Calculando u

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \end{bmatrix}$$

4.2 Aproximação com 4 elementos

Neste caso iremos repetir os mesmos passos porém utilizando 4 elementos:

4.2.1 Calculando h

4.2.2 Matriz de Rigidez por elemento

Inicialmente, calculamos a matriz de rigidez conforme calculado no exercício anterior:

$$\begin{bmatrix} \frac{4EA}{L} & -\frac{4EA}{L} \\ -\frac{4EA}{L} & \frac{4EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.2.3 Matriz de Rigidez Global

Diferentemente da aproximação linear abordada anteriormente, neste caso como temos mais do que apenas 1 elemento, será necessário calcular a Matriz de Rigidez Global conforme:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{12}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix}$$

onde e é o número de elementos.

$$\begin{bmatrix} \frac{4EA}{L} & -\frac{4EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4EA}{L} & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{4EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.2.4 Vetor Fonte Global

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.5 Aplicando Condições de Contorno

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{4EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.6 Substituindo valores

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 390243.902439024 & -195121.951219512 & 0 & 0 \\ 0 & -195121.951219512 & 390243.902439024 & -195121.951219512 & 0 \\ 0 & 0 & -195121.951219512 & 390243.902439024 & -195121.951219512 \\ 0 & 0 & 0 & -195121.951219512 & 195121.951219512 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.7 Calculando u

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.005125 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \end{bmatrix}$$

4.3 Aproximação com 6 elementos

4.3.1 Calculando h

4.3.2 Matriz de Rigidez por elemento

Inicialmente, calculamos a matriz de rigidez conforme calculado no exercício anterior:

$$\begin{bmatrix} \frac{6EA}{L} & -\frac{6EA}{L} \\ -\frac{6EA}{L} & \frac{6EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.3.3 Matriz de Rigidez Global

Diferentemente da aproximação linear abordada anteriormente, neste caso como temos mais do que apenas 1 elemento, será necessário calcular a Matriz de Rigidez Global conforme:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{12}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix}$$

onde e é o número de elementos.

$$\begin{bmatrix} \frac{6EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{6EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.3.4 Vetor Fonte Global

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3.5 Aplicando Condições de Contorno

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{6EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3.6 Substituindo valores

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 585365.853658537 & -292682.926829268 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -292682.926829268 & 585365.853658537 & -292682.926829268 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -292682.926829268 & 585365.853658537 & -292682.926829268 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -292682.926829268 & 585365.853658537 & -292682.926829268 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -292682.926829268 & 585365.853658537 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -292682.926829268 \end{bmatrix}$$

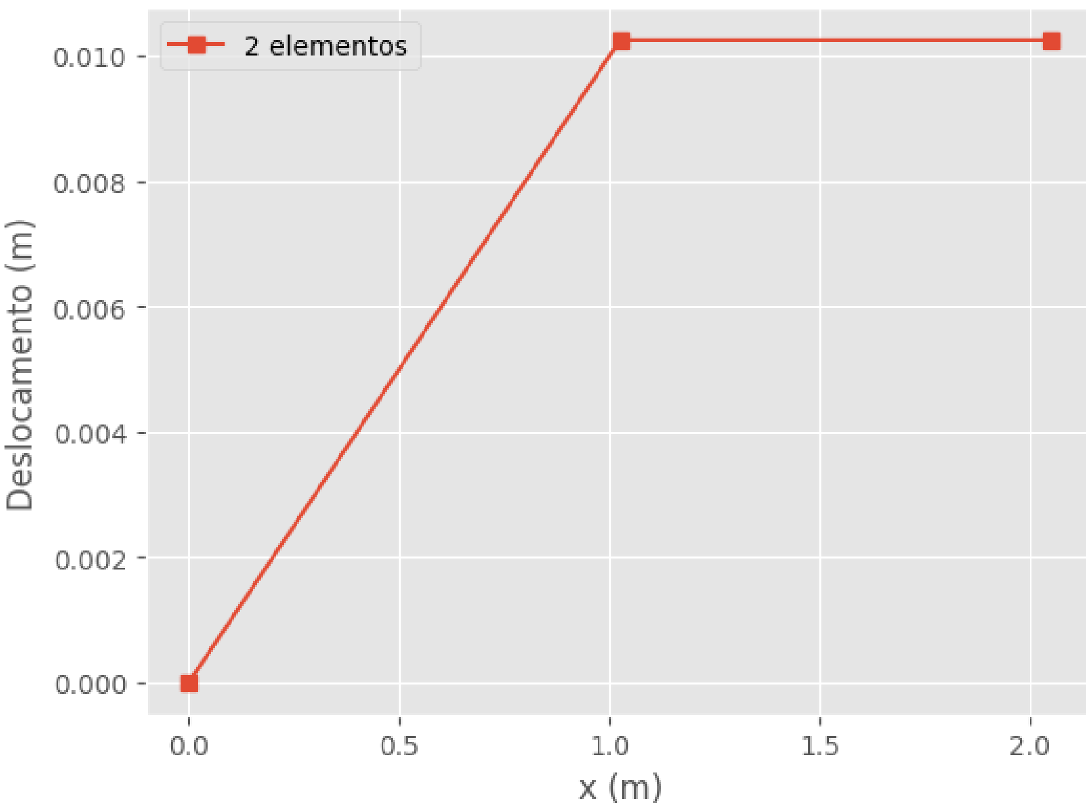
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3.7 Calculando u

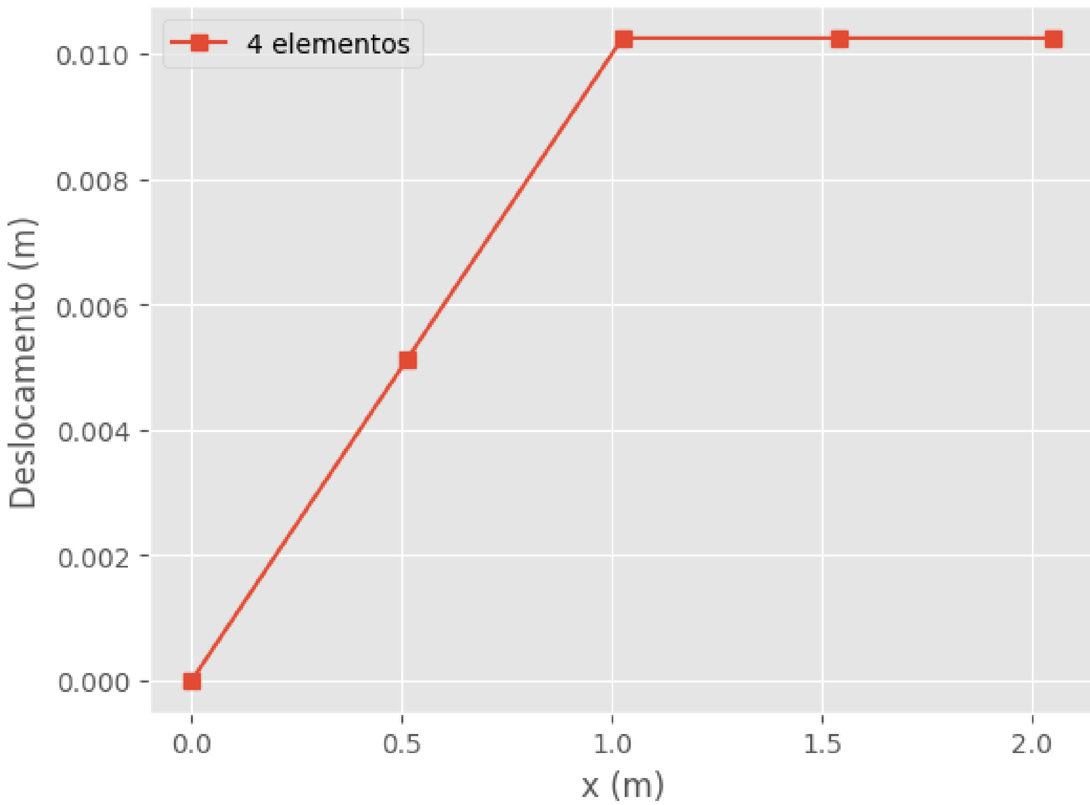
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.0034166666666667 \\ 0.0068333333333333 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \end{bmatrix}$$

4.4 Resultados

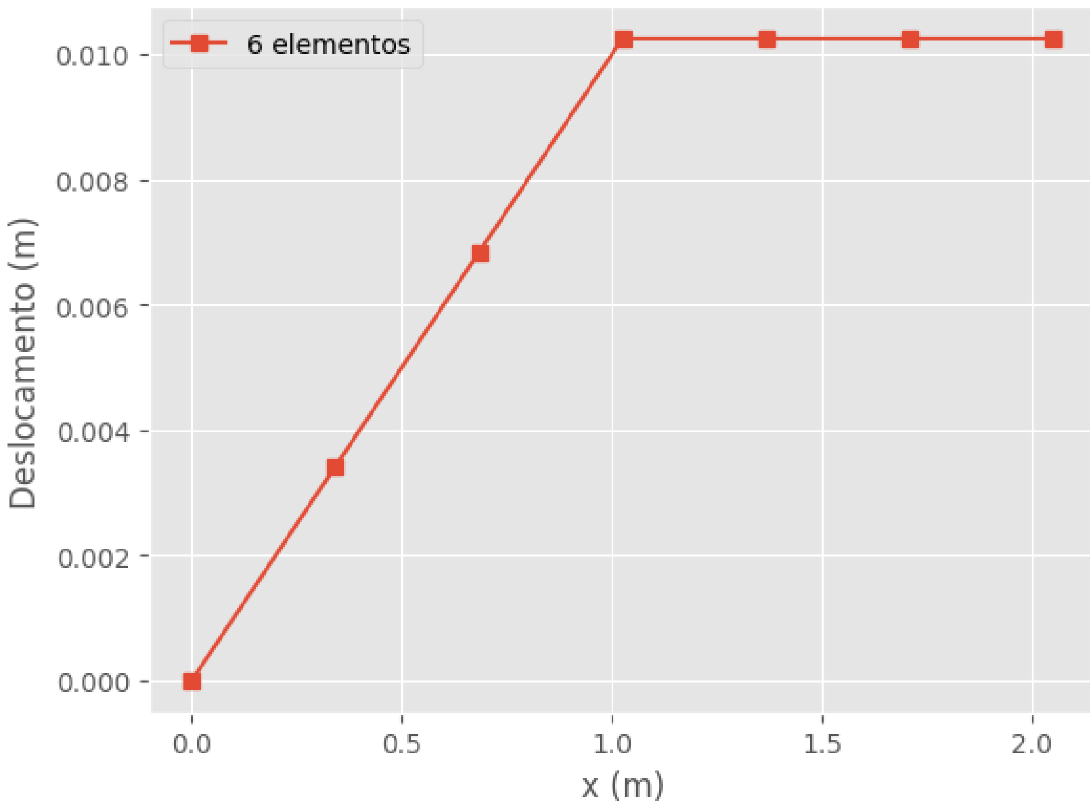
4.4.1 2 elementos



4.4.2 4 elementos



4.4.3 6 elementos



5 Exercício 5

Considerando a barra do exercício anterior com a carga P aplicada na sua extremidade livre, com EA igual a deste exercício, utilizando-se uma divisão com 7 elementos finitos com aproximações lineares, cada um com um comprimento diferente denominados por h_1 a h_7, sendo $h_1 = \frac{l}{10}$ e $h_i = h_1 + \frac{i*l}{70}$ para $i = 2$ a 7 pede-se montar a matriz de rigidez global para a numeração conforme indicado abaixo. Cada aluno deve adotar uma numeração dos nós dependente do valor de N, associado conforme a tabela fornecida em função do seu número de ordem na lista de chamada. Determine também a matriz de rigidez para uma numeração sequencial dos nós da malha.

1 - Apresente as matrizes de cada elemento para o valor de N associado ao seu caso.

2 - Apresente a matriz de conectividade adotada para a numeração escolhida

3 - Apresente as matrizes globais resultante da composição das matrizes individuais

4 - Apresente a solução obtida e compare graficamente com a solução exata do problema

5.1 Resolução

5.1.1 Equação do Problema

Temos que o problema é descrito pela equação:

$$EA\frac{d^2u(x)}{dx^2} = P\delta(x-a), 0 \leq x \leq L$$

onde $a = L$.

5.1.2 Numeração dos nós

A numeração para $N = 0$ será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

5.1.3 Cáculo dos comprimentos dos elementos

Consideraremos o parâmetro $l = 20$ para o cálculo do tamanho dos elementos:

$h_1 = 2.0$
$h_2 = 2.28571428571429$
$h_3 = 2.57142857142857$
$h_4 = 2.85714285714286$
$h_5 = 3.14285714285714$
$h_6 = 3.42857142857143$
$h_7 = 3.71428571428571$

5.1.4 1- Matrizes de cada elemento

$$\frac{EA}{h}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 \quad \begin{bmatrix} 0.5EA & -0.5EA \\ -0.5EA & 0.5EA \end{bmatrix}$$

$$k_2 \quad \begin{bmatrix} 0.4375EA & -0.4375EA \\ -0.4375EA & 0.4375EA \end{bmatrix}$$

$$k_3 \quad \begin{bmatrix} 0.388888888888889EA & -0.388888888888889EA \\ -0.388888888888889EA & 0.388888888888889EA \end{bmatrix}$$

$$k_4 \quad \begin{bmatrix} 0.35EA & -0.35EA \\ -0.35EA & 0.35EA \end{bmatrix}$$

$$k_5 \quad \begin{bmatrix} 0.318181818181818EA & -0.318181818181818EA \\ -0.318181818181818EA & 0.318181818181818EA \end{bmatrix}$$

$$k_6 \quad \begin{bmatrix} 0.291666666666667EA & -0.291666666666667EA \\ -0.291666666666667EA & 0.291666666666667EA \end{bmatrix}$$

$$k_7 \quad \begin{bmatrix} 0.269230769230769EA & -0.269230769230769EA \\ -0.269230769230769EA & 0.269230769230769EA \end{bmatrix}$$

5.1.5 2- Matriz de conectividade

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 5 & 7 \\ 7 & 2 \\ 2 & 6 \\ 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Malha com índices dos nós e elementos