

MAC008 - Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Lista 1

Antonio José de Medeiros Filho - 201965502B

1 Exercício 1

Utilize o método da projeção para determinar a aproximação da função $f = \text{sen}(z\pi)$ no intervalo $-2 < x < 2$ utilizando as funções $1, x^2, x^3, x^4, x^5$. Considere $z = 1 + \frac{0.5N}{19}$. Apresente os gráficos da aproximação junto com a função dada.

1.1 Resolução

A função que iremos aproximar é da forma:

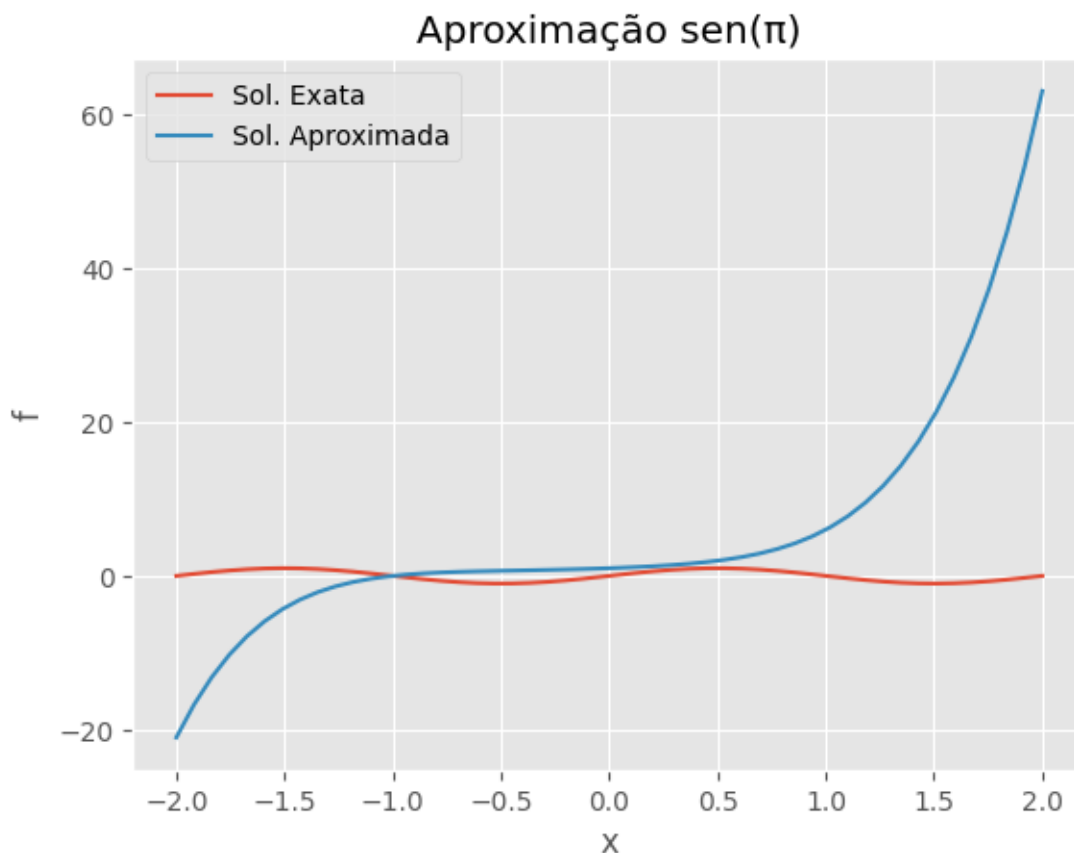
$$f = \text{sen}(z\pi x)$$

Temos que:

$$z = 1 + \frac{0.5N}{19}N = 0 \Rightarrow z = 1$$

Portanto:

$$f = \text{sen}(\pi x)$$



2 Exercício 2

Dada a função $f(x) = -1 - \frac{N}{19} \forall -\pi < x < 0$ e $f(x) = 1 + \frac{N}{19} \forall 0 < x < \pi$ use o método da projeção para determinar as componentes desta função neste intervalo $-\pi < x < \pi$ na “base” composta pelas funções 1 , $\sin kx$, $\cos kx$ com $k = 1$ até 5 .

2.1 Resolução

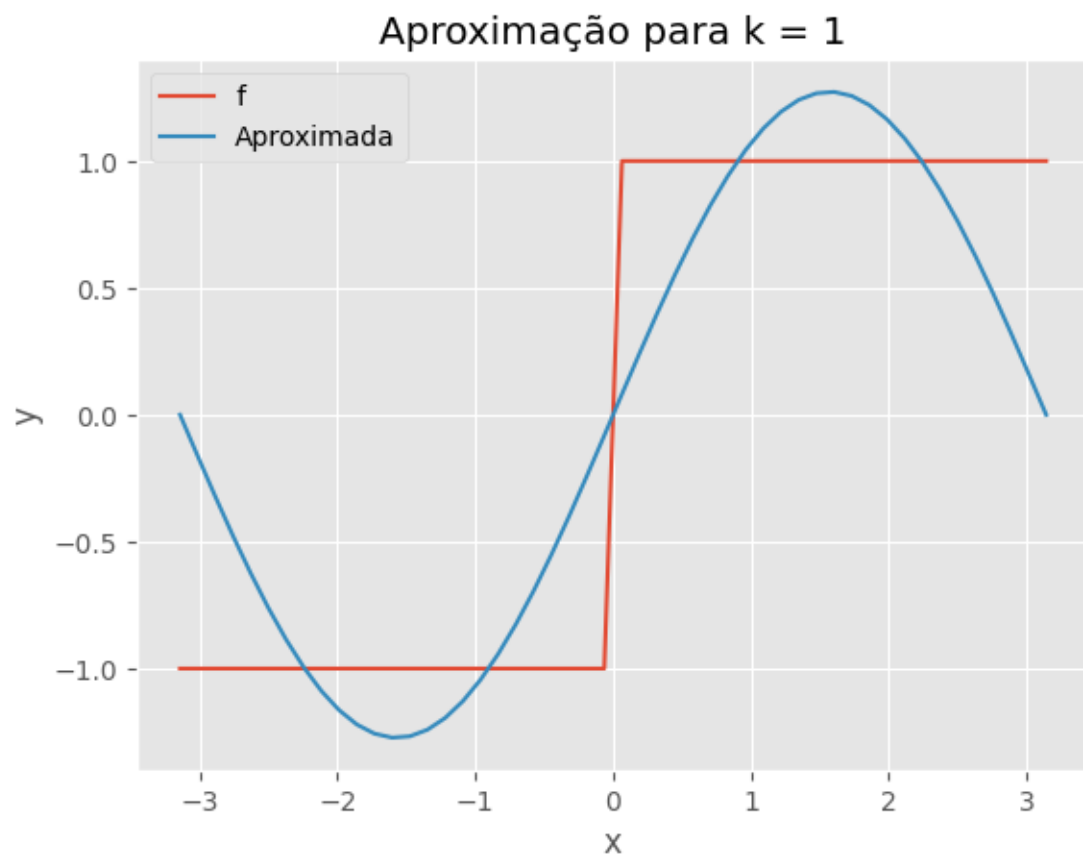
Temos que $N = 0$, logo:

$$f(x) = -1, \forall -\pi < x < 0$$

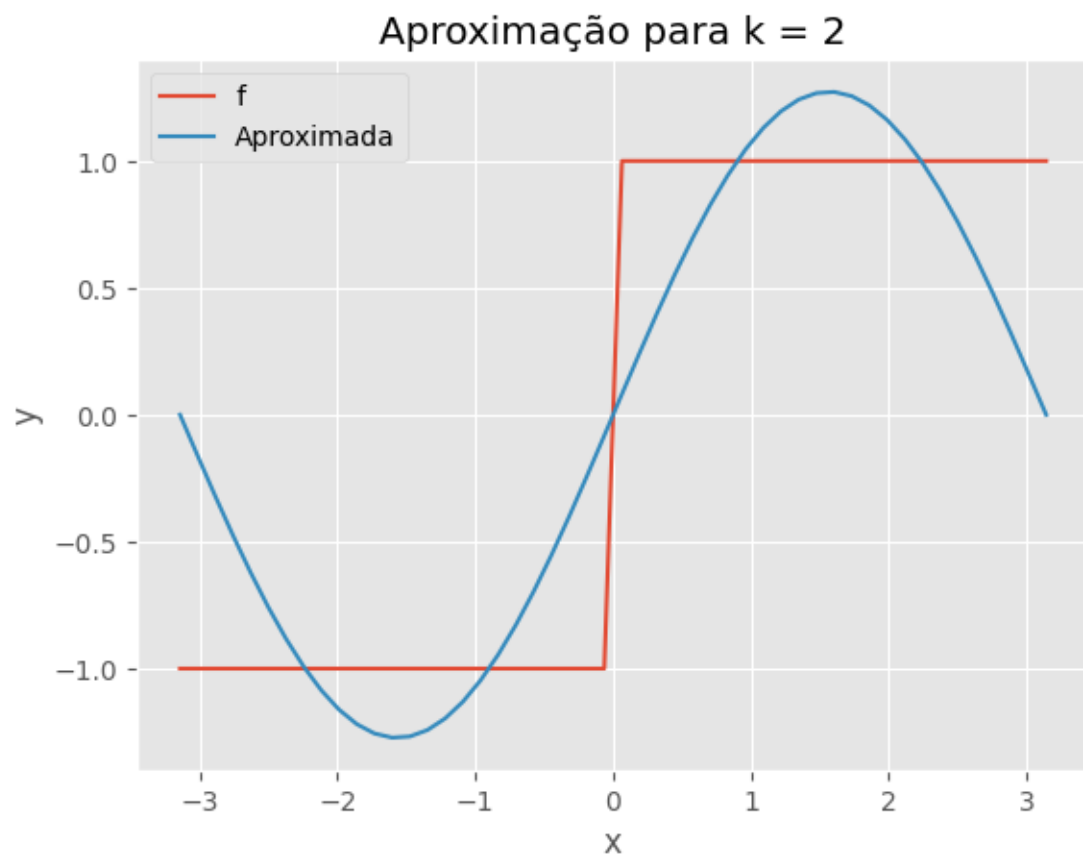
e,

$$f(x) = 1, \forall 0 < x < \pi$$

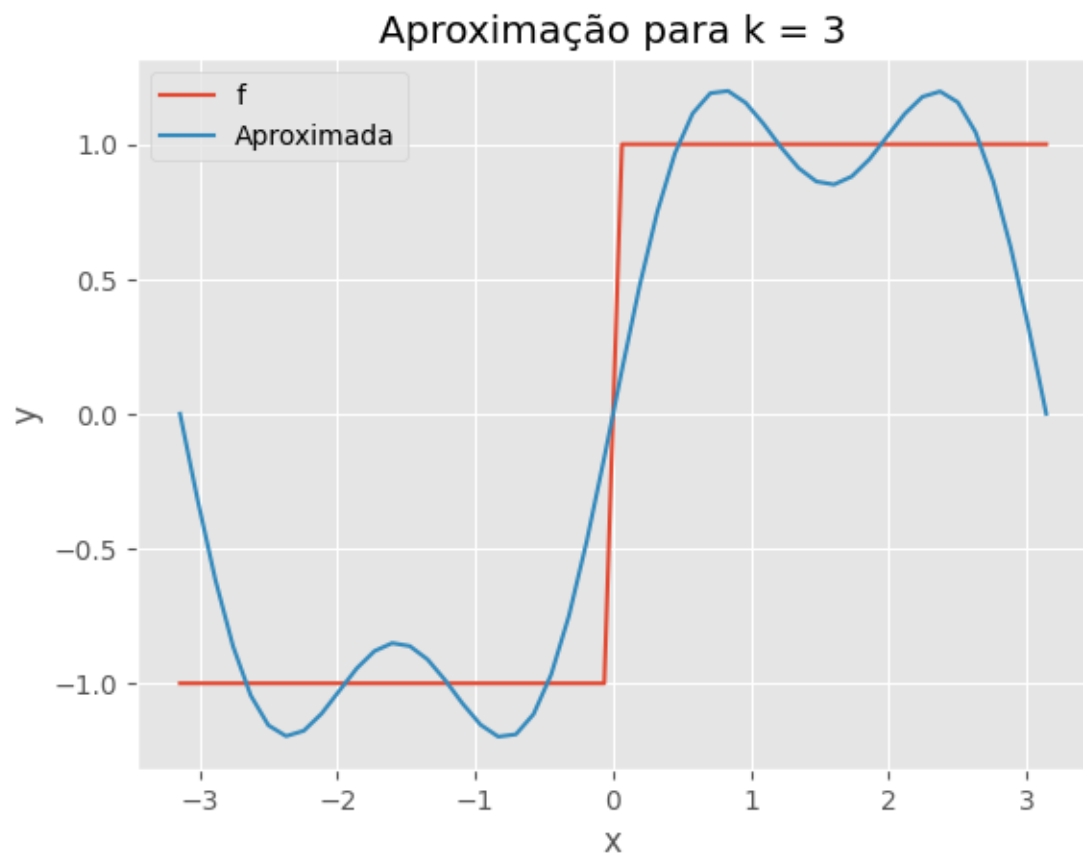
2.1.1 $k = 1$



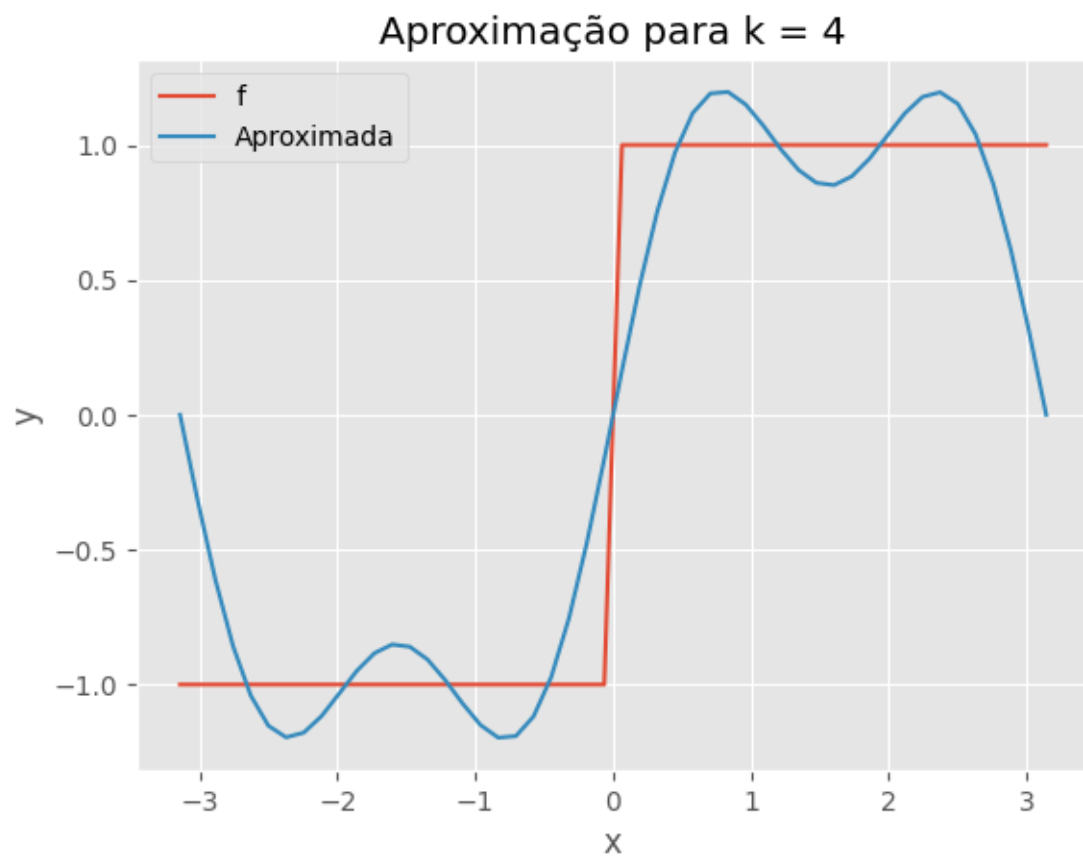
2.1.2 $k = 2$



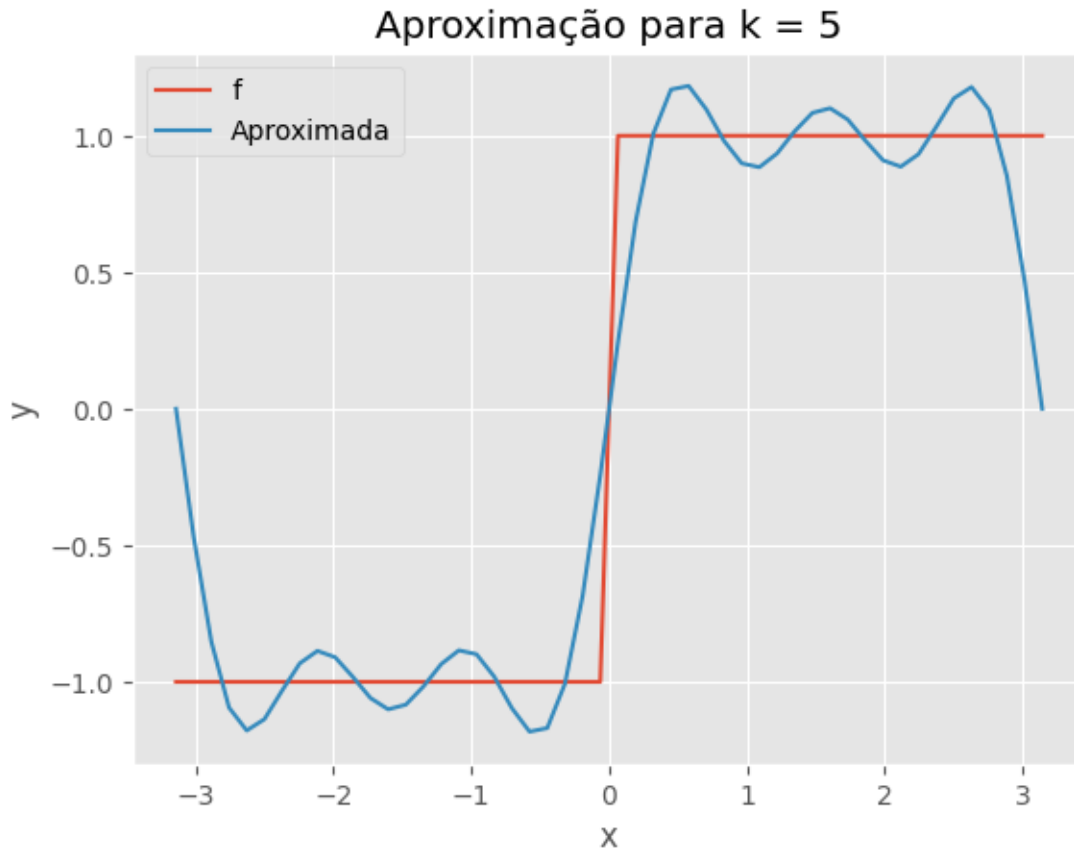
2.1.3 $k = 3$



2.1.4 $k = 4$



2.1.5 $k = 5$



3 Exercício 3

Dada a barra a esforço axial com secção constante ($b \times h$) engastada e livre com uma carga distribuída dada por q pede-se calcular o deslocamento em sua extremidade livre utilizando o MEF com aproximações linear e quadrática utilizando, respectivamente, 1 elemento e 5 elementos. Apresente a dedução da matriz do elemento quadrático para este caso. Na solução numérica indique claramente a numeração dos nós e dos elementos utilizados em sua discretização e apresentando a numeração dos nós e dos elementos utilizados em sua discretização e apresentando a matriz global e o campo de deslocamento aproximado comparado com a solução exata do problema. Dados:

- $b = 0,10m$
- $E = 10^8 \cdot T(Pa)$
- $h = 0,5 \cdot T(m)$
- $q(x) = 10 \cdot T(kN/m)$
- $l = 10 \cdot T(m)$

Com $T = \frac{20-N}{19}$

3.1 Resolução

3.1.1 Substituindo N

Inicialmente, substituiremos os valores de N e T :

$$N = 0 \Rightarrow T = \frac{20}{19}$$

Logo, temos que:

- $b = 0,10m$
- $E = 10^8 \cdot \frac{20}{19}(Pa)$
- $h = 0,5 \cdot \frac{20}{19}(m)$
- $q(x) = 10 \cdot \frac{20}{19}(kN/m)$
- $l = 10 \cdot \frac{20}{19}(m)$

3.1.2 Equação do problema

$$-EA \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = q(x)$$

Onde $0 < x < L$, $A = bh$ é a área transversal e u é o vetor deslocamento.

3.1.3 Condições de Contorno

Do enunciado, temos que a barra possui uma extremidade engastada e outra livre, portanto:

$$u(0) = 0$$

3.1.4 Aproximação Linear (1 elemento)

Fazendo uma aproximação linear, temos:

$$u = u_1\phi_1 + u_2\phi_2$$

Sendo as funções bases de Lagrange:

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{h}$$

$$\phi_2 = \frac{x}{h}$$

Calculando Matriz de Rigidez para cada elemento

$$K^i = EA \begin{bmatrix} \int_0^h \phi_1' \phi_1' dx & \int_0^h \phi_1' \phi_2' dx \\ \int_0^h \phi_2' \phi_1' dx & \int_0^h \phi_2' \phi_2' dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{h} & -\frac{AE}{h} \\ -\frac{AE}{h} & \frac{AE}{h} \end{bmatrix}$$

Calculando Vetor Fonte por elemento

$$f^i = \begin{bmatrix} \int_0^h \phi_1 q(x) dx \\ \int_0^h \phi_2 q(x) dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{hq}{2} \\ \frac{hq}{2} \end{bmatrix}$$

Substituição dos valores

Para o caso linear, como temos apenas 1 elemento, a Matriz Global de Rigidez e o Vetor Fonte Global serão os mesmos já calculados:

$$\begin{bmatrix} 526315.789473684 & -526315.789473684 \\ -526315.789473684 & 526315.789473684 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 55.4016620498615 \\ 55.4016620498615 \end{bmatrix}$$

Aplicando Condições de Contorno de Dirichlet ($u(0) = 0$)

Conhecendo o valor em $u(0)$, podemos utilizar o método de eliminação:

Calculando Vetor de Deslocamentos u

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.000105263157894737 \end{bmatrix}$$

3.1.5 Aproximação Quadrática (5 elementos)

Fazendo uma aproximação quadrática, temos que:

$$u = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3$$

Sendo as funções bases de Lagrange para este caso:

$$\phi_1 = 1 - \frac{3x}{h} + \frac{2x^2}{h^2}$$

$$\phi_2 = \frac{4x}{h} - \frac{4x^2}{h^2}$$

$$\phi_3 = -\frac{x}{h} + \frac{2x^2}{h^2}$$

Calculando Matriz de Rigidez para cada elemento

$$K^i = EA \begin{bmatrix} \int_0^h \phi_1' \phi_1' dx & \int_0^h \phi_1' \phi_2' dx & \int_0^h \phi_1' \phi_3' dx \\ \int_0^h \phi_2' \phi_1' dx & \int_0^h \phi_2' \phi_2' dx & \int_0^h \phi_2' \phi_3' dx \\ \int_0^h \phi_3' \phi_1' dx & \int_0^h \phi_3' \phi_2' dx & \int_0^h \phi_3' \phi_3' dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7AE}{3h} & -\frac{8AE}{16h} & \frac{AE}{3h} \\ -\frac{8AE}{3h} & \frac{16AE}{16h} & -\frac{8AE}{3h} \\ \frac{AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & \frac{7AE}{3h} \end{bmatrix}$$

Calculando Matriz de Rigidez Global

Para aproximações quadráticas e considerando que serão utilizados 5 elementos, temos que a matriz de rigidez global K será dada por:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{11}^3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{33}^4 + K_{11}^5 & K_{12}^5 & K_{13}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{21}^5 & K_{22}^5 & K_{23}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{31}^5 & K_{32}^5 & K_{33}^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.10833333333333AE & -1.26666666666667AE & 0.15833333333333AE & & & & & & \\ -1.26666666666667AE & 2.53333333333333AE & -1.26666666666667AE & & & & & & \\ 0.15833333333333AE & -1.26666666666667AE & 2.21666666666667AE & -1.26666666666667AE & 0.15833333333333AE & & & & \\ 0 & 0 & -1.26666666666667AE & 2.53333333333333AE & -1.26666666666667AE & 2.21666666666667AE & & & \\ 0 & 0 & 0.15833333333333AE & -1.26666666666667AE & 2.21666666666667AE & -1.26666666666667AE & 2.21666666666667AE & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.26666666666667AE & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Calculando Vetor Fonte para cada elemento

Temos que:

$$f^i = \begin{bmatrix} \int_0^h \phi_1 q(x) dx \\ \int_0^h \phi_2 q(x) dx \\ \int_0^h \phi_3 q(x) dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{hq}{6} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{6} \\ \frac{hq}{6} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{6} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{6} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{6} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{6} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{6} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{6} \\ \frac{2hq}{3} \\ \frac{hq}{6} \end{bmatrix}$$

Aplicando Condições de Contorno

Substituindo os valores

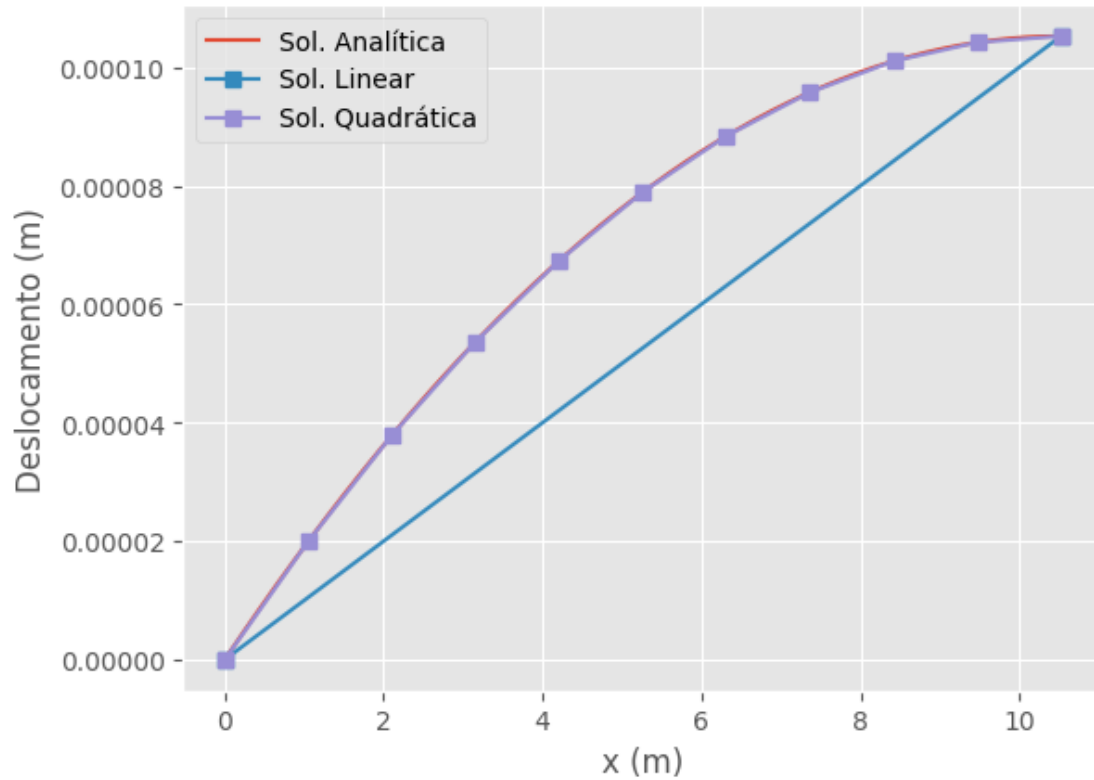
$$\begin{bmatrix}
1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{16AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{8AE}{3h} & \frac{14AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & \frac{AE}{3h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{8AE}{3h} & \frac{16AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & \frac{14AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & \frac{AE}{3h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8AE}{3h} & \frac{16AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & \frac{14AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & \frac{AE}{3h} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8AE}{3h} & \frac{16AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & \frac{14AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & \frac{AE}{3h} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8AE}{3h} & \frac{16AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{3h} & -\frac{8AE}{3h} & \frac{14AE}{3h}
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 \\
14.7737765466297 \\
7.38688827331486 \\
14.7737765466297 \\
7.38688827331486 \\
14.7737765466297 \\
7.38688827331486 \\
14.7737765466297 \\
7.38688827331486 \\
14.7737765466297 \\
3.69344413665743
\end{bmatrix}$$

Calculando Matriz de Deslocamentos

$$\begin{bmatrix}
0 \\
1.99999999999998 \cdot 10^{-5} \\
3.7894736842105 \cdot 10^{-5} \\
5.36842105263153 \cdot 10^{-5} \\
6.7368421052631 \cdot 10^{-5} \\
7.89473684210519 \cdot 10^{-5} \\
8.84210526315781 \cdot 10^{-5} \\
9.57894736842097 \cdot 10^{-5} \\
0.000101052631578946 \\
0.000104210526315789 \\
0.000105263157894736
\end{bmatrix}$$

3.1.6 Resultados



4 Exercício 4

Dada uma barra com uma carga P aplicada no meio do seu vão, conforme indicado na Figura, pede-se, utilizando elementos finitos lineares, calcular os deslocamentos da mesma adotando-se uma divisão de 2, 4 e 6 elementos lineares. Comparar os campos de deslocamentos obtidos com os deslocamentos exatos para o problema em questão. Considere:

- $EA = 10^5 \cdot (N + 1)$ (Newton)
- $P = (N + 1) \cdot 10^3$ (Newton)
- $l = 2 + \frac{N+1}{20}$ (metro)

Resolução

4.0.1 Substituindo N

Substituindo $N = 0$, temos:

- $EA = 10^5$ (Newton)
- $P = 10^3$ (Newton)
- $l = \frac{41}{20}$ (metro)

4.0.2 Equação do problema

$$-EA \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = P \delta \left(x - \frac{L}{2} \right), 0 \leq x \leq L$$

onde δ é a função delta de Dirac.

4.0.3 Condições de Contorno

Da figura, temos que $u(0) = 0$ (condição de Dirichlet).

4.0.4 Aproximação Linear

Neste problema utilizaremos somente a aproximação linear, na forma:

$$u = u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2$$

4.1 Aproximação com 2 Elementos

4.1.1 Definindo variáveis e calculando h

4.1.2 Matriz de Rigidez por elemento

Inicialmente, calculamos a matriz de rigidez conforme calculado no exercício anterior:

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & -\frac{2EA}{L} \\ -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.1.3 Matriz de Rigidez Global

Diferentemente da aproximação linear abordada anteriormente, neste caso como temos mais do que apenas 1 elemento, será necessário calcular a Matriz de Rigidez Global conforme:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{12}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix}$$

onde e é o número de elementos.

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & -\frac{2EA}{L} & 0 \\ -\frac{2EA}{L} & \frac{4EA}{L} & -\frac{2EA}{L} \\ 0 & -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.1.4 Vetor Fonte Global

$$\begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.1.5 Aplicando Condições de Contorno

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EA}{L} & -\frac{2EA}{L} \\ 0 & -\frac{2EA}{L} & \frac{4EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.1.6 Substituindo valores

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 195121.951219512 & -97560.9756097561 \\ 0 & -97560.9756097561 & 97560.9756097561 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.1.7 Calculando u

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \end{bmatrix}$$

4.2 Aproximação com 4 elementos

Neste caso iremos repetir os mesmos passos porém utilizando 4 elementos:

4.2.1 Calculando h

4.2.2 Matriz de Rigidez por elemento

Inicialmente, calculamos a matriz de rigidez conforme calculado no exercício anterior:

$$\begin{bmatrix} \frac{4EA}{L} & -\frac{4EA}{L} \\ -\frac{4EA}{L} & \frac{4EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.2.3 Matriz de Rigidez Global

Diferentemente da aproximação linear abordada anteriormente, neste caso como temos mais do que apenas 1 elemento, será necessário calcular a Matriz de Rigidez Global conforme:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{12}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix}$$

onde e é o número de elementos.

$$\begin{bmatrix} \frac{4EA}{L} & -\frac{4EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4EA}{L} & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{4EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.2.4 Vetor Fonte Global

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.5 Aplicando Condições de Contorno

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{8EA}{L} & -\frac{4EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4EA}{L} & \frac{4EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.6 Substituindo valores

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 390243.902439024 & -195121.951219512 & 0 & 0 \\ 0 & -195121.951219512 & 390243.902439024 & -195121.951219512 & 0 \\ 0 & 0 & -195121.951219512 & 390243.902439024 & -195121.951219512 \\ 0 & 0 & 0 & -195121.951219512 & 195121.951219512 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.7 Calculando u

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.005125 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \end{bmatrix}$$

4.3 Aproximação com 6 elementos

4.3.1 Calculando h

4.3.2 Matriz de Rigidez por elemento

Inicialmente, calculamos a matriz de rigidez conforme calculado no exercício anterior:

$$\begin{bmatrix} \frac{6EA}{L} & -\frac{6EA}{L} \\ -\frac{6EA}{L} & \frac{6EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.3.3 Matriz de Rigidez Global

Diferentemente da aproximação linear abordada anteriormente, neste caso como temos mais do que apenas 1 elemento, será necessário calcular a Matriz de Rigidez Global conforme:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{12}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix}$$

onde e é o número de elementos.

$$\begin{bmatrix} \frac{6EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{6EA}{L} \end{bmatrix}$$

4.3.4 Vetor Fonte Global

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3.5 Aplicando Condições de Contorno

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{12EA}{L} & -\frac{6EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EA}{L} & \frac{6EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3.6 Substituindo valores

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 585365.853658537 & -292682.926829268 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -292682.926829268 & 585365.853658537 & -292682.926829268 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -292682.926829268 & 585365.853658537 & -292682.926829268 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -292682.926829268 & 585365.853658537 & -292682.926829268 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -292682.926829268 & 585365.853658537 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -292682.926829268 \end{bmatrix}$$

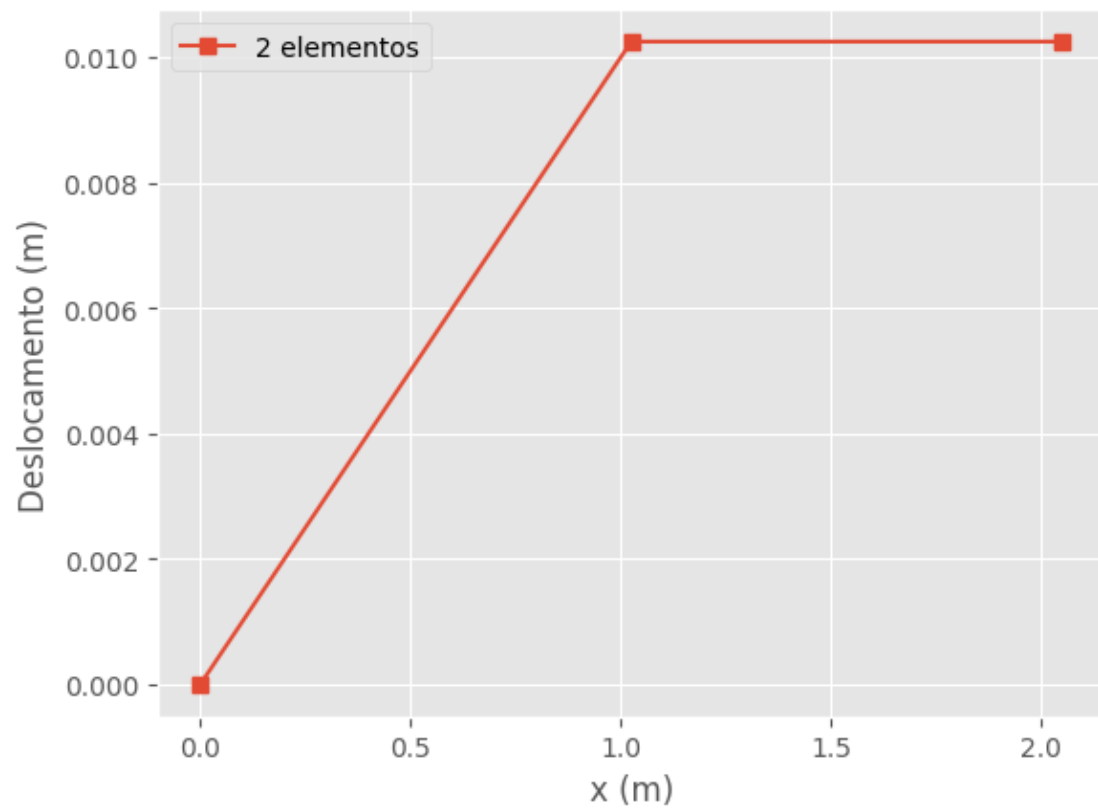
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3.7 Calculando u

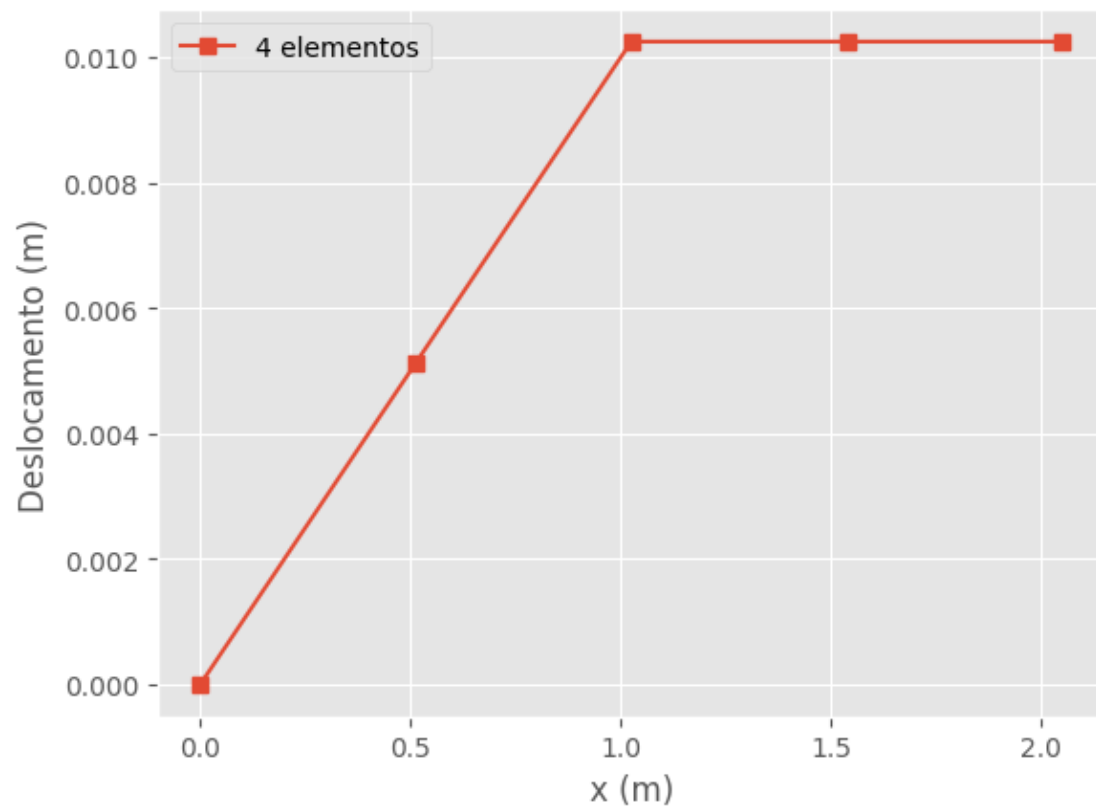
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.00341666666666667 \\ 0.006833333333333333 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \\ 0.01025 \end{bmatrix}$$

4.4 Resultados

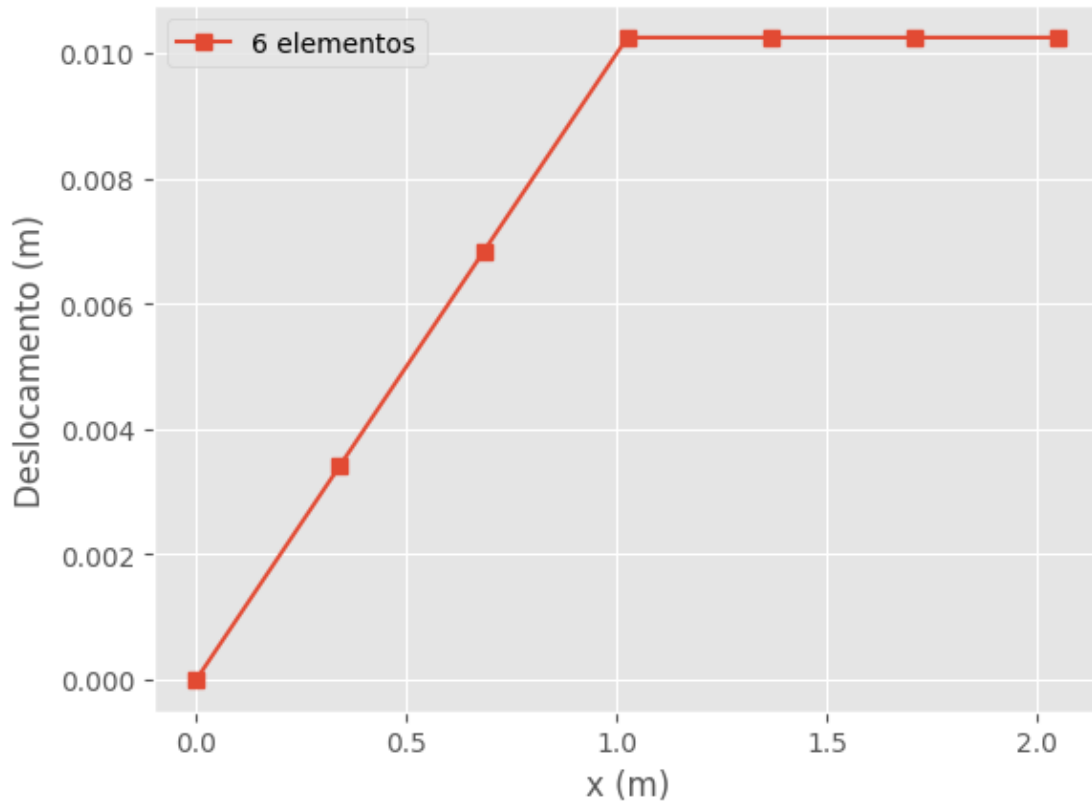
4.4.1 2 elementos



4.4.2 4 elementos



4.4.3 6 elementos



5 Exercício 5

Considerando a barra do exercício anterior com a carga P aplicada na sua extremidade livre, com EA igual a deste exercício, utilizando-se uma divisão com 7 elementos finitos com aproximações lineares, cada um com um comprimento diferente denominados por h_1 a h_7 , sendo $h_1 = \frac{l}{10}$ e $h_i = h_1 + \frac{i \cdot l}{70}$ para $i = 2$ a 7 pede-se montar a matriz de rigidez global para a numeração conforme indicado abaixo. Cada aluno deve adotar uma numeração dos nós dependente do valor de N , associado conforme a tabela fornecida em função do seu número de ordem na lista de chamada. Determine também a matriz de rigidez para uma numeração sequencial dos nós da malha.

- 1 - Apresente as matrizes de cada elemento para o valor de N associado ao seu caso.
- 2 - Apresente a matriz de conectividade adotada para a numeração escolhida
- 3 - Apresente as matrizes globais resultante da composição das matrizes individuais
- 4 - Apresente a solução obtida e compare graficamente com a solução exata do problema

5.1 Resolução

5.1.1 Equação do Problema

Temos que o problema é descrito pela equação:

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = P\delta(x - a), 0 \leq x \leq L$$

onde $a = L$.

5.1.2 Numeração dos nós

A numeração para $N = 0$ será:

$$[1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 2 \quad 6 \quad 4]$$

5.1.3 Cálculo dos comprimentos dos elementos

Consideraremos o parâmetro $l = 20$ para o cálculo do tamanho dos elementos:

$$\begin{aligned} h_1 &= 2.0 \\ h_2 &= 2.28571428571429 \\ h_3 &= 2.57142857142857 \\ h_4 &= 2.85714285714286 \\ h_5 &= 3.14285714285714 \\ h_6 &= 3.42857142857143 \\ h_7 &= 3.71428571428571 \end{aligned}$$

5.1.4 1- Matrizes de cada elemento

$$\begin{aligned} k_1 & \begin{bmatrix} 0.5EA & -0.5EA \\ -0.5EA & 0.5EA \end{bmatrix} \\ k_2 & \begin{bmatrix} 0.4375EA & -0.4375EA \\ -0.4375EA & 0.4375EA \end{bmatrix} \\ k_3 & \begin{bmatrix} 0.38888888888889EA & -0.38888888888889EA \\ -0.38888888888889EA & 0.38888888888889EA \end{bmatrix} \\ k_4 & \begin{bmatrix} 0.35EA & -0.35EA \\ -0.35EA & 0.35EA \end{bmatrix} \\ k_5 & \begin{bmatrix} 0.31818181818181EA & -0.31818181818181EA \\ -0.31818181818181EA & 0.31818181818181EA \end{bmatrix} \\ k_6 & \begin{bmatrix} 0.29166666666667EA & -0.29166666666667EA \\ -0.29166666666667EA & 0.29166666666667EA \end{bmatrix} \\ k_7 & \begin{bmatrix} 0.269230769230769EA & -0.269230769230769EA \\ -0.269230769230769EA & 0.269230769230769EA \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.1.5 2- Matriz de conectividade

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 5 & 7 \\ 7 & 2 \\ 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

5.1.6 3- Matrizes globais

5.1.7 4- Resultados