MAC008 - Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Lista 2

Antonio José de Medeiros Filho - 201965502B

1 Exercício 1

1.1 Enunciado

Seja o seguinte problema de propagação de calor transiente por condução em uma barra (Problema de valor inicial e contorno em um domínio unidimensional):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Com as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$T(x, t = 0) = 200°C \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t) = 0 T(x = L, t) = 0°C$$

A solução analítica deste problema é dada por:

$$T(x, t) = \frac{200 \cdot 4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - 1} \cdot \exp\left(-\alpha \lambda_n^2 t\right) \cdot \cos\left(\lambda_n x\right)$$

Onde:

- $\lambda_n = \frac{(2n-1)\cdot\pi}{2L}$ são os autovalores da solução exata.
- $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$ é o coeficiente de difusividade térmica.

Consideramos as seguintes propriedades físicas:

- $\kappa = 10 * q \frac{W}{m \cdot K}$ é o coeficiente de condutividade térmica.
- $L = 2cm$ é o comprimento do domínio.
- $\rho c = 10^6 * q \frac{J}{m^3 \cdot K}$ é a capacidade calorífica por unidade de volume do material que constitue a barra.

A variável q é dada por

$$q = 10 + \frac{N - 1}{20}$$

Resolver este problema pelo método dos elementos finitos empregando interpolações lineares utilizando uma discretização espacial com uma malha de 3 elementos de mesmo comprimento. Para a solução no tempo utilize o método da diferença central usando passo de tempo o valor de $\Delta t = 1s$. Compare gráficamente (no mesmo gráfico!) as soluções numéricas com a solução exata para os tempos $t = 80s$, $t = 100s$ e $t = 120s$.

1.2 Resolução

1.2.1 Substituindo N

Temos que $N = 1$, logo:

$$q = 10$$

1.2.2 Discretização Espacial

Vamos dividir o domínio (a barra de comprimento L) em 3 elementos de mesmo comprimento. Cada elemento terá dois nós, um em cada extremidade.

1.2.3 Formulação do Método dos Elementos Finitos

Função de Interpolação Para cada elemento, usamos funções de interpolação lineares $N_i\ (x)$ para representar a temperatura T dentro do elemento:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x)T_i$$

onde n é o número de nós por elemento e T_i é temperatura e no nó i.

Montagem da Equação de Elemento Para cada elemento, aplicamos a equação diferencial. Através da integração por partes (ou método dos resíduos ponderados), obtemos a formulação fraca do problema. Para um elemento genérico, temos:

$$\int_{x_{e-1}}^{x_e} \rho c N_i \rho \frac{\partial T}{\partial t} dx + \int_{x_{e-1}}^{x_e} \kappa \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dx = 0$$

Montagem da Matriz Global As equações dos elementos individuais são então montadas em uma matriz global que representa o sistema inteiro.

Aplicação das Condições de Contorno As condições de contorno são aplicadas na matriz global. A condição $T(x = L, t) = 0°C$ é uma condição de Dirichlet e é aplicada diretamente na matriz. A condição $\frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t) = 0$ é uma condição de Neumann e afeta a formulação da equação de elemento do nó correspondente.

1.3 Implementação

```
Posições dos nós:
  x0 = 0.0000 m
  x1 = 0.0067 m
  x2 = 0.0133 m
  x3 = 0.0200 m
```

1.3.1 Cálculo das Matrizes Globais

As matrizes globais de massa M e rigidez K para o sistema são:
Matriz de massa M:

$$\begin{bmatrix} 22222.22 & 11111.11 & 0 & 0 \\ 11111.11 & 44444.44 & 11111.11 & 0 \\ 0 & 11111.11 & 44444.44 & 11111.11 \\ 0 & 0 & 11111.11 & 22222.22 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez K:

$$\begin{bmatrix} 15000 & -15000 & 0 & 0 \\ -15000 & 30000 & -15000 & 0 \\ 0 & -15000 & 30000 & -15000 \\ 0 & 0 & -15000 & 15000 \end{bmatrix}$$

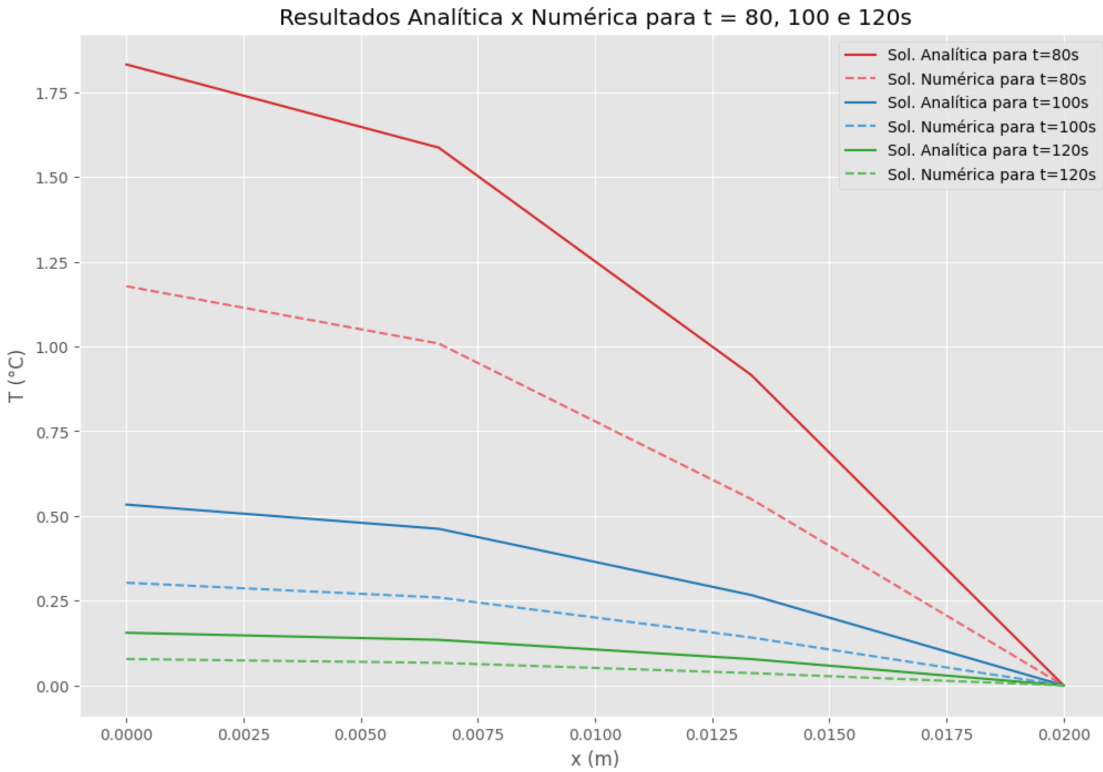
`Matriz de massa global:`

$$\begin{bmatrix} 22222.2222222222 & 11111.1111111111 & 0 & 0 \\ 11111.1111111111 & 44444.4444444444 & 11111.1111111111 & 0 \\ 0 & 11111.1111111111 & 44444.4444444444 & 11111.1111111111 \\ 0 & 0 & 11111.1111111111 & 22222.2222222222 \end{bmatrix}$$

`Matriz de rigidez global:`

$$\begin{bmatrix} 15000.0 & -15000.0 & 0 & 0 \\ -15000.0 & 30000.0 & -15000.0 & 0 \\ 0 & -15000.0 & 30000.0 & -15000.0 \\ 0 & 0 & -15000.0 & 15000.0 \end{bmatrix}$$

1.4 Resultados



No gráfico podemos visualizar o resultado para os tempos $80s$ (vermelho), $100s$ (azul) e $120s$ (verde), com as soluções exatas representadas através de linhas contínuas e as soluções numéricas com linhas tracejadas.

2 Exercício 2

2.1 Enunciado

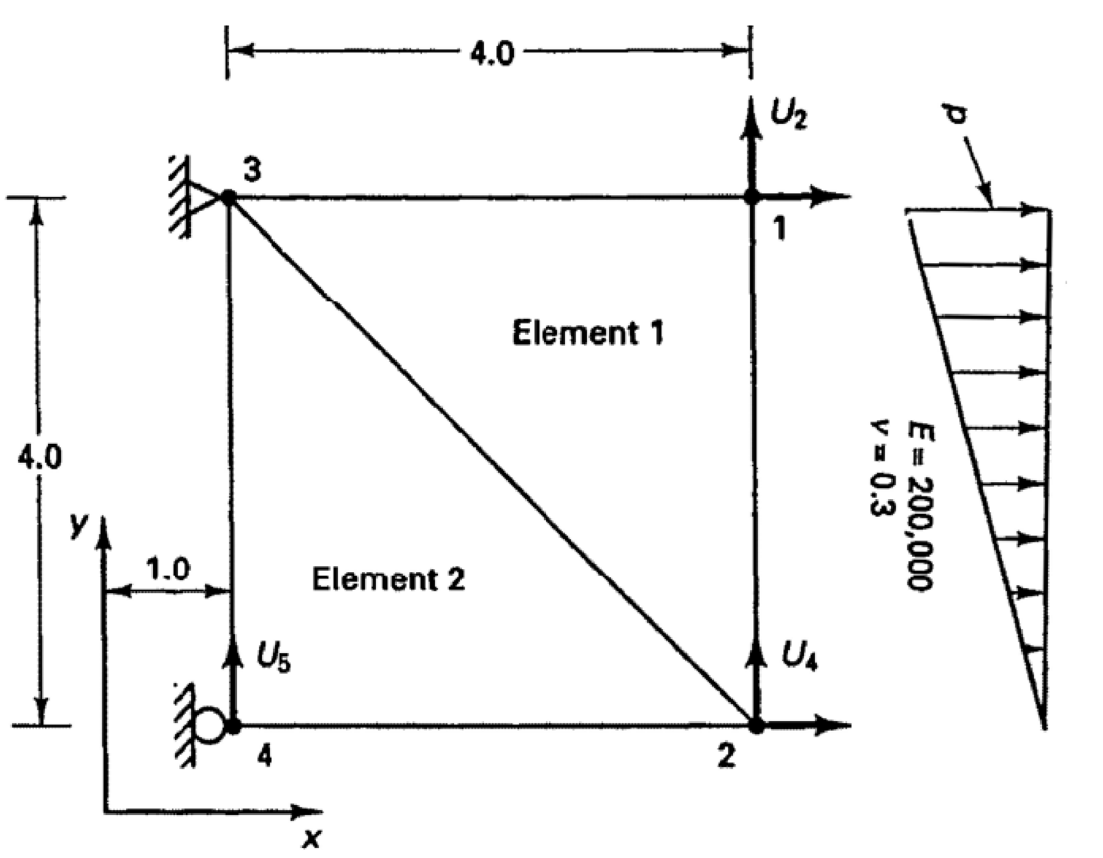
Para a viga em balanço da figura abaixo tratada como um problema de Estado Plano de Tensões determine a matriz de rigidez e o vetor de forças para as seguintes discretizações:

a) Com 2 elementos triangulares lineares conforme mostrado nesta figura.

b) Com 1 elemento retangular com os nós 1,2,3 e 4.

Determine os deslocamentos livres considerando os nós 3 e 4 presos(deslocamentos nulos).

Determine também os valores das tensões, segundo o sistema de eixos indicado nos pontos nodais e nos pontos centrais dos elementos considerados. Considere o carregamento indicado nesta figura com a distribuição de carga onde p = 150*(N+1)/20 . Adotar E (200.000) e Poisson(0.3) indicados na figura. Atente para trabalhar com unidades coerentes e que a espessura também está dada (t = 1). Utilize para as medidas do domínio o valor a = b = 4 + (N-1)/20.



2.2 Resolução

2.2.1 Substituindo N

Temos que $N = 1$, logo as dimensões do domínio serão:

$$a = b = 4$$

2.2.2 Coordenadas dos nós

- Nó 1: $(4, 4)$
- Nó 2: $(4, 0)$
- Nó 3: $(0, 4)$
- Nó 4: $(0, 0)$

2.2.3 Nós dos elementos

- Elemento 1: (1, 2, 3)
- Elemento 2: (2, 3, 4)

2.2.4 a) Elementos Triangulares

Funções de Forma Claro, vamos detalhar melhor os passos 2 e 3 para a formulação da matriz de rigidez de elementos triangulares em estado plano de tensões, focando nas funções de forma e nas relações de deformação e tensão.

Para um elemento triangular com três nós (nós 1, 2, e 3), as funções de forma lineares $ N_1 $, $ N_2 $, e $ N_3 $ podem ser definidas em termos das coordenadas dos nós. Sejam $ (x_i, y_i) $ as coordenadas dos nós $ i = 1, 2, 3 $, as funções de forma são:

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y$$

Onde $ a_i $, $ b_i $, e $ c_i $ são constantes determinadas pela geometria do elemento e podem ser calculadas usando a fórmula:

$$a_i = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2A}, \quad b_i = \frac{y_j - y_k}{2A}, \quad c_i = \frac{x_k - x_j}{2A}$$

Aqui, $ (j, k) $ é um par de índices que são diferentes de $ i $, e $ A $ é a área do elemento triangular.

Deformação e Tensão A deformação em um elemento plano pode ser expressa em termos dos deslocamentos nodais. Para um elemento triangular, os deslocamentos nodais são $ u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 $, onde $ u $ e $ v $ são os deslocamentos nos eixos $ x $ e $ y $, respectivamente. A matriz de deformação $ [B] $ relaciona a deformação com os deslocamentos nodais:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

As tensões são relacionadas às deformações pela lei de Hooke para materiais isotrópicos e homogêneos. A matriz de elasticidade $ [D] $ para estado plano de tensões é:

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Onde $ E $ é o módulo de elasticidade e $ $ é o coeficiente de Poisson.

A relação entre tensão e deformação é dada por:

$$[\sigma] = [D][\epsilon]$$

Onde $ [ ] $ é a matriz de tensão e $ [ ] $ é a matriz de deformação.

Combinando essas relações, podemos calcular a matriz de rigidez local para o elemento. É importante notar que, na prática, a aplicação destas fórmulas e a integração necessária para calcular a matriz de rigidez podem exigir um conhecimento detalhado de métodos numéricos, especialmente para elementos de formas mais complexas ou materiais não homogêneos.

Montagem da Matriz de Rigidez A matriz de rigidez K de um elemento triangular em estado plano de tensões é expressa por:

$$[K] = \int_A [B]^T [D][B] dA$$

$$K = tAB^T DB$$

onde:

- t é a espessura do elemento,
- A é a área do elemento triangular,
- B é a matriz de gradiente de deslocamento
- D é a matriz de elasticidade plana.

A matriz de elasticidade D é dada por:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

A matriz de deformação B para um elemento triangular é derivada das coordenadas dos nós do elemento e é dada por:

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

onde b_i e c_i são as coordedanas do nó i do elemento.

```
Matriz B do elemento [1 2 3]:
```

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}$$

```
Matriz D do elemento [1 2 3]:
```

$$\begin{bmatrix} 219780.21978022 & 65934.0659340659 & 0 \\ 65934.0659340659 & 219780.21978022 & 0 \\ 0 & 0 & 76923.0769230769 \end{bmatrix}$$

```
Matriz de Rigidez para o elemento 1:
```

$$\begin{bmatrix} -1.48 \cdot 10^5 & -7.14 \cdot 10^4 & 3.85 \cdot 10^4 & 3.3 \cdot 10^4 & 1.1 \cdot 10^5 & 3.85 \cdot 10^4 \\ -7.14 \cdot 10^4 & -1.48 \cdot 10^5 & 3.85 \cdot 10^4 & 1.1 \cdot 10^5 & 3.3 \cdot 10^4 & 3.85 \cdot 10^4 \\ 3.85 \cdot 10^4 & 3.85 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -3.85 \cdot 10^4 \\ 3.3 \cdot 10^4 & 1.1 \cdot 10^5 & 0 & -1.1 \cdot 10^5 & -3.3 \cdot 10^4 & 0 \\ 1.1 \cdot 10^5 & 3.3 \cdot 10^4 & 0 & -3.3 \cdot 10^4 & -1.1 \cdot 10^5 & 0 \\ 3.85 \cdot 10^4 & 3.85 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -3.85 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

```
Matriz B do elemento [2 3 4]:
```

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & -0.25 & -0.25 \end{bmatrix}$$

```
Matriz D do elemento [2 3 4]:
```

$$\begin{bmatrix} 219780.21978022 & 65934.0659340659 & 0 \\ 65934.0659340659 & 219780.21978022 & 0 \\ 0 & 0 & 76923.0769230769 \end{bmatrix}$$

```
Matriz de Rigidez para o elemento 2:
```

$$\begin{bmatrix} 1.1 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 3.3 \cdot 10^4 & -1.1 \cdot 10^5 & -3.3 \cdot 10^4 \\ 0 & 3.85 \cdot 10^4 & 3.85 \cdot 10^4 & 0 & -3.85 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 \\ 0 & 3.85 \cdot 10^4 & 3.85 \cdot 10^4 & 0 & -3.85 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 \\ 3.3 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 1.1 \cdot 10^5 & -3.3 \cdot 10^4 & -1.1 \cdot 10^5 \\ -1.1 \cdot 10^5 & -3.85 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 & -3.3 \cdot 10^4 & 1.48 \cdot 10^5 & 7.14 \cdot 10^4 \\ -3.3 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 & -1.1 \cdot 10^5 & 7.14 \cdot 10^4 & 1.48 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez Global

```
Matriz B do elemento [1 2 3]:
```

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}$$

```
Matriz D do elemento [1 2 3]:
```

$$\begin{bmatrix} 219780.21978022 & 65934.0659340659 & 0 \\ 65934.0659340659 & 219780.21978022 & 0 \\ 0 & 0 & 76923.0769230769 \end{bmatrix}$$

```
Matriz B do elemento [2 3 4]:
```

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & -0.25 & -0.25 \end{bmatrix}$$

```
Matriz D do elemento [2 3 4]:
```

$$\begin{bmatrix} 219780.21978022 & 65934.0659340659 & 0 \\ 65934.0659340659 & 219780.21978022 & 0 \\ 0 & 0 & 76923.0769230769 \end{bmatrix}$$

```
Matriz de rigidez global:
```

$$
\begin{bmatrix}
-1.48 \cdot 10^5 & -7.14 \cdot 10^4 & 3.85 \cdot 10^4 & 3.3 \cdot 10^4 & 1.1 \cdot 10^5 & 3.85 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\
-7.14 \cdot 10^4 & -1.48 \cdot 10^5 & 3.85 \cdot 10^4 & 1.1 \cdot 10^5 & 3.3 \cdot 10^4 & 3.85 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\
3.85 \cdot 10^4 & 3.85 \cdot 10^4 & 7.14 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -5.5 \cdot 10^3 & -1.1 \cdot 10^5 & -3.3 \cdot 10^4 \\
3.3 \cdot 10^4 & 1.1 \cdot 10^5 & 0 & -7.14 \cdot 10^4 & 5.5 \cdot 10^3 & 0 & -3.85 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 \\
1.1 \cdot 10^5 & 3.3 \cdot 10^4 & 0 & 5.5 \cdot 10^3 & -7.14 \cdot 10^4 & 0 & -3.85 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 \\
3.85 \cdot 10^4 & 3.85 \cdot 10^4 & -5.5 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 7.14 \cdot 10^4 & -3.3 \cdot 10^4 & -1.1 \cdot 10^5 \\
0 & 0 & -1.1 \cdot 10^5 & -3.85 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 & -3.3 \cdot 10^4 & 1.48 \cdot 10^5 & 7.14 \cdot 10^4 \\
0 & 0 & -3.3 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 & -3.85 \cdot 10^4 & -1.1 \cdot 10^5 & 7.14 \cdot 10^4 & 1.48 \cdot 10^5
\end{bmatrix}
$$

Vetor de Forças O vetor de forças para cada nó devido a uma carga distribuída é calculado integrando a carga sobre o elemento:

$$[F] = \int_A [S]^T p dA$$

onde:

$$S = \begin{bmatrix} S_i & 0 & S_j & 0 & S_k & 0 \\ 0 & S_i & 0 & S_j & 0 & S_k \end{bmatrix}$$

$S_i = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})$
$S_j = \frac{x}{a}(1 - \frac{y}{b})$
$S_k = \frac{x}{a}\frac{y}{b}$

```
Vetor de forças externas:
```

$$\begin{bmatrix} 120.0 \\ 0 \\ 120.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando Condições de Contorno Conforme o enunciado, consideraremos os nós 3 e 4 como fixos.

Deslocamentos Resolvendo o sistema para determinar u, chegamos em:

```
Deslocamentos:
Nó 1: (0.00156000, -0.00713143)
Nó 2: (0.00468000, -0.01025143)
Nó 3: (0.00000000, 0.00000000)
Nó 4: (0.00000000, 0.00000000)
```

Cálculo das Tensões

```
Tensões nos elementos:
Elemento 1: (137.14, 197.14, -197.14) Pa
Elemento 2: (257.14, 77.14, -197.14) Pa
```

2.2.5 b) Elemento Retangular

Funções de Forma As funções de forma para elementos retangulares são bilineares e dependem das coordenadas dos nós.

Deformação e Tensão: Para um elemento retangular em análise de elementos finitos, as funções de forma são tipicamente bilineares. Supondo um elemento retangular com quatro nós, as funções de forma podem ser expressas em termos das coordenadas locais ξ e η, que variam de -1 a 1. Para cada nó i, a função de forma $N_i(\xi, \eta)$ é definida como:

- Para o nó 1 (canto inferior esquerdo): $N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$
- Para o nó 2 (canto inferior direito): $N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$
- Para o nó 3 (canto superior direito): $N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$
- Para o nó 4 (canto superior esquerdo): $N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

A relação entre tensão e deformação em um estado plano de tensões é dada pela lei de Hooke. Para um material isotrópico linear elástico, a matriz de elasticidade $[D]$ é usada para relacionar a tensão σ à deformação ε:

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson do material. A tensão σ é então calculada como $\sigma = [D]\varepsilon$.

A relação deformação-deslocamento é expressa como $\varepsilon = [B]\{d\}$, onde $\{d\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais.

Cálculo das Matrizes de Rigidez A formulação é similar:

$$[K] = \int_A [B]^T [D][B]\, dA$$

```
Matriz de rigidez para um elemento retangular:
```

$$\begin{bmatrix} 1.78 & 0.889 & -0.444 & -0.889 & -0.889 & -0.444 & -0.444 & 0 \\ 0.889 & 1.78 & 0 & -0.444 & -0.444 & -0.889 & -0.889 & -0.444 \\ -0.444 & 0 & 1.78 & 0.889 & 0.444 & 0 & -0.889 & -0.444 \\ -0.889 & -0.444 & 0.889 & 1.78 & 0 & 0.444 & -0.444 & -0.889 \\ -0.889 & -0.444 & 0.444 & 0 & 1.78 & 0.889 & -0.444 & 0 \\ -0.444 & -0.889 & 0 & 0.444 & 0.889 & 1.78 & 0 & -0.444 \\ -0.444 & -0.889 & -0.889 & -0.444 & -0.444 & 0 & 1.78 & 0.889 \\ 0 & -0.444 & -0.444 & -0.889 & 0 & -0.444 & 0.889 & 1.78 \end{bmatrix}$$

Deslocamentos

```
Deslocamentos no elemento retangular:
Nó 1: (-41.14285714, -7.71428571)
Nó 2: (46.28571429, -113.14285714)
Nó 3: (0.00000000, 0.00000000)
Nó 4: (0.00000000, 0.00000000)
```

Tensões

```
Tensões no elemento retangular: (3397959.18, 4040816.3265306125, -1063186.8131868134)
```