UNIVERSIDADE FUMEC

Cálculo I

DERIVADAS

PARTE 3

APRESENTAÇÃO

Caro(a) aluno(a), com este módulo encerramos os estudos sobre derivadas. Nele você aprenderá a derivar vários tipos de funções transcendentes.

Além de aprender as fórmulas de derivadas é importante que você se atenha às demonstrações dessas fórmulas, pois são elas que vão lhe ensinar como raciocinar e operar com esses tipos de funções.

Você irá aprender como derivar as funções logarítmicas, exponenciais, trigonométricas e trigonométricas inversas.

Aprenderá como utilizar as propriedades de logaritmos e as relações trigonométricas para efetuar cálculos de derivadas daquelas funções.

É necessário que você leia com muita atenção os textos apresentados.

Lembre-se de ter sempre à mão um caderno de anotações ao qual você possa recorrer sempre que tiver dúvida sobre algum desenvolvimento algébrico ou para anotar conceitos importantes ou dúvidas que lhe tenham ocorrido

Vamos lá? Bons estudos e boa aprendizagem!

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao final deste módulo você será capaz de:

- Conhecer as demonstrações de fórmulas de derivadas e calcular as derivadas de funções logarítmicas e exponenciais;
- Relembrar as relações trigonométricas;
- Conhecer as demonstrações de fórmulas de derivadas e calcular derivadas de todas as funções trigonométricas;
- Conhecer as demonstrações de fórmulas de derivadas e calcular as derivadas das funções trigonométricas inversas.

FICHA TÉCNICA

UNIVERSIDADE FUMEC

FUMEC VIRTUAL - SETOR DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Gestão Pedagógica
Coordenação
Gabrielle Nunes P. Araújo
Transposição Pedagógica
Flávia Juliana da Silva

Produção de Design Multimídia
Coordenação
Rodrigo Tito M. Valadares
Design Multimídia
Dennis Henrique Dias Peçanha
Paulo Roberto Rosa Junior
Raphael Gonçalves Porto Nascimento

Infra-Estrututura e Suporte
Coordenação
Anderson Peixoto da Silva

AUTORIA DA DISCIPLINA

Prof. Ronaldo Abrão Pimentel e
Profa. Valéria Cunha Figueiredo

BELO HORIZONTE - 2013

DERIVADAS - PARTE 3

A Derivada das funções logarítmica e exponencial

Já estudamos as funções logarítmicas e exponenciais e agora vamos estudar suas derivadas. Primeiramente devemos achar o valor de um limite fundamental para as exponenciais e logaritmos $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Na verdade esse limite já foi visto no módulo sobre logaritmos, só que não foi tratado como limite, pois você ainda não conhecia limite. Este "número muito especial" é o resultado do limite.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2{,}718281828459... = e$$

Outra coisa que você precisará muito serão as propriedades dos logaritmos. Lembra-se quando as estudamos no módulo: **Funções Inversas, Funções logarítmicas e exponenciais?** Vamos lembrá-las!

RELEMBRANDO

Propriedades dos logaritmos:

1. $\log_a 1 = 0$ pois $a^0 = 1$
2. $\log_a a = 1$ pois $a^1 = 0$
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ pois $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
4. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ pois $a^{b-c} = a^b : a^c$
5. $\log_a x^y = y\log_a x$ pois $(a^b)^c = a^{b\cdot c}$
6. $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ pois $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$
7. $a^{\log_a x} = x$

A DERIVADA DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Seja a função $f(x) = \log_a x$. Para aplicarmos a definição de derivada – $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$ – precisamos de $f(x) = \log_a x$ e de $f(x+\Delta x) = \log_a(x+\Delta x)$.

Teremos então: $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x}\right)$

Usando a propriedade nº 4 dos logaritmos, temos

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\log_a\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right]$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

Como o domínio da função $f(x)=\log_a x$ é $D_f=\{x\in R\,/\,x>0\}$, então podemos multiplicar o limite por $\frac{x}{x}$, e teremos

$$f'(x)=\frac{x}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

$$f'(x)=x\cdot\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

Como a variável do limite é Δx, então, para o limite o x é constante. Podemos então levar o x para dentro do limite, e teremos

$$f'(x)=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[x\cdot\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

Aplicando a propriedade nº 5 dos logaritmos, temos

$$f'(x)=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

e como "$\lim_{x\to k}\left(\log_a u(x)\right)=\log_a\left(\lim_{x\to k}u(x)\right)$", então

$$f'(x)=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

Mas $\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=e$, como foi visto no início deste módulo, e teremos então que

Fórmula 1: Se $f(x)=\log_a x$**, então** $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$

Ex.: Achar a derivada da função $f(x) = \log_{10} x$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_{10} e.$$

Se você jogar na calculadora, verá que $\log_{10} e$ vale aproximadamente $0{,}4342944...$, ou seja, é uma constante. Mas você não precisa calcular este valor. É melhor deixar indicado.

Como já conhecemos a regra da cadeia para derivar funções compostas, então podemos derivar a função $f(x) = \log_a u(x)$, onde $u(x)$ é uma função de x.

Como: $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$,

Então: $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{u}\log_a e \cdot \dfrac{du}{dx}$

ou $f'(x) = \dfrac{1}{u}\log_a e \cdot u'$,

ou $f'(x) = \dfrac{u'}{u}\log_a e.$

Temos então que:

Fórmula 2: se $f(x) = \log_a u(x)$, então $f'(x) = \dfrac{u'}{u}\log_a e.$

Ex.: achar a derivada da função $f(x) = \log_2 (x^2 - 5)$:

$$f'(x) = \frac{(x^2-5)'}{x^2-5}\log_2 e. \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2-5}\log_2 e.$$

Se a função for $f(x) = \ln x$, que é equivalente a $f(x) = \log_e x$

Teremos então que $f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_e e$, mas $\log_a e = 1$ (Propriedade nº 2) e, portanto,

Fórmula 3: Se $f(x) = \ln x$, então, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Da mesma forma, se $f(x) = \ln u(x)$, então sua derivada será $f'(x) = \dfrac{u'}{u}\ln e$, ou seja,

Fórmula 4: Se $f(x) = \ln u(x)$, então, $f'(x) = \dfrac{u'}{u}$.

Exemplo 1: Calcular as derivadas das funções abaixo:

1. $f(x) = \ln(x^3 - 4)$

Veja que esta função é composta, onde $u(x) = x^3 - 4$.

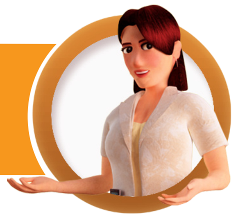
Então, $f'(x) = \dfrac{(x^3 - 4)'}{x^3 - 4} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3 - 4}$

2. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$

Esta função é composta, onde $u(x) = x^2 - 4x + 5$.

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x - 2)}{x^2 - 4x + 5}$$

Nos exemplos que veremos agora, observe como serão importantes as propriedades dos logaritmos.



3. $f(x) = \ln\sqrt{x^3 - 4}$

Devemos escrever a raiz na forma de expoente fracionária

$$f(x) = \ln(x^3 - 4)^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando a propriedade nº 5 dos logaritmos, temos

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^3 - 4)$$

Derivando

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2}{x^3 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2(x^3 - 4)}$$

4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x - 3}{5x - 1}\right)$

Ao invés de aplicarmos a fórmula da derivada, vamos antes aplicar a propriedade nº 4 dos logaritmos, e teremos:

$$f(x) = \ln(x - 3) - \ln(5x - 1)$$

Derivando

$$f(x) = \frac{1}{(x - 3)} - \frac{5}{(5x - 1)}$$

Tirando o m.m.c.

$$f(x) = \frac{5x - 1 - 5(x - 3)}{(x - 3)(5x - 1)}$$

$$f(x) = \frac{-16}{(x - 3)(5x - 1)}$$

5. $f(x) = \ln \sqrt[3]{\dfrac{(x^4-2)^2}{(x^2+1)^4}}$

$$f(x) = \ln\left[\frac{(x^4-2)^2}{(x^2+1)^4}\right]^{\frac{1}{3}}$$

Aplicando as propriedades dos logaritmos temos:

$$f(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{(x^4-2)^2}{(x^2+1)^4}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[\ln(x^4-2)^2 - \ln(x^2+1)^4\right]$$

$$f(x) = -\left[2\ln(x^4-2) - 4\ln(x^2+1)\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\ln(x^4-2) - \frac{4}{3}\ln(x^2+1)$$

Derivando:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4x^3}{x^4-2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{8x^3}{3(x^4-2)} - \frac{8x}{3(x^2+1)}$$

$$f'(x) = \frac{8x^3(x^2+1) - 8x(x^4-2)}{3(x^4-2)(x^2+1)}$$

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 16x}{3(x^4-2)(x^2+1)}$$

$$f'(x) = \frac{8x(x^2-2)}{3(x^4-2)(x^2+1)}$$

Exemplo 2: Sabendo que $y = \ln\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}} - \ln\sqrt{x^2+x-6}$, mostre que $y' = -\dfrac{1}{x-2}$

Resolução:

Fatorando o termo $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$, temos

$$y = \ln\sqrt{\frac{x+3}{x-2}} - \ln\sqrt{(x+3)(x-2)}$$

$$y = \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} - \ln\left[(x+3)(x-2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)-\frac{1}{2}\ln(x+3)(x-2)$$

$$y=\frac{1}{2}\left[\ln(x+3)-\ln(x-2)\right]-\frac{1}{2}\left[\ln(x+3)+\ln(x-2)\right]$$

$$y=\cancel{\frac{1}{2}\ln(x+3)}-\frac{1}{2}\ln(x-2)-\cancel{\frac{1}{2}\ln(x+3)}-\frac{1}{2}\ln(x-2)$$

$$y=-\frac{1}{2}\ln(x-2)-\frac{1}{2}\ln(x-2)$$

$$y=-\ln(x-2)$$

$$y'=-\frac{1}{x-2}$$

A DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vamos agora estudar a derivada da função exponencial $y=a^x$

Como $a^x>0$, então podemos tomar o logaritmo neperiano nos dois lados da equação e teremos:

$$\ln y=\ln a^x,$$

ou

$$\ln y=x\ln a$$

Derivando implicitamente temos:

$$\frac{y'}{y}=\ln a$$

$$y'=y\ln a$$

Como $y=a^x$, então

$$y'=a^x\ln a\,.$$

Fórmula 5: Se $y=a^x$, então, $y'=a^x\ln a$

Vejamos agora a derivada da função composta $y=a^{u(x)}$.

Pela regra da cadeia temos que

$$\frac{dy}{dx}=a^u\cdot\ln a\cdot\frac{du}{dx}$$

ou

$$y'=a^u\ln a\cdot u'$$

ou

$$y' = u' a^u \ln a.$$

Fórmula 6: Se $y = a^{u(x)}$ **, então,** $y' = u' a^u \ln a.$

Se $y = e^x$, então $y' = e^x \cdot \ln e$. Como $\ln e = 1$, então $y' = e^x$

Fórmula 7: Se $y = e^x$ **, então,** $y' = e^x$

Se $y = e^{u(x)}$, então $y' = u' e^u \ln e$. Como $\ln e = 1$, então, $y' = u' e^u$

Fórmula 8: Se $y = e^{u(x)}$ **, então** $y' = u' e^u$

Exemplo 1: Ache a derivada de $y = e^{x^3 - 2}$.

Veja que esta função é composta, onde $u(x) = x^3 - 2$. Então,

$$y = \left(x^3 - 2\right)' \cdot e^{x^3 - 2} \quad \Rightarrow \quad y' = 3x^2 \cdot e^{x^3 - 2}$$

Exemplo 2: Ache a derivada de $y = \ln\left(e^x - 3\right)$.

$$y' = \frac{\left(e^x - 3\right)'}{\left(e^x - 3\right)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{e^x}{e^x - 3}$$

IMPORTANTE

Um resumo das fórmulas de derivadas das funções logarítmicas e exponenciais:

1. Se $y = \log_a x$, então $y' = \frac{1}{x} \log_a e$
2. Se $y = \log_a u(x)$, então $y' = \frac{u'}{u} \log_a e.$
3. Se $y = \ln x$, então $y' = \frac{1}{x}$
4. Se $y = \ln u(x)$, então $y' = \frac{u'}{u}$
5. Se $y = a^x$, então $y' = a^x \ln a$
6. Se $y = a^{u(x)}$, então $y' = u' a^u \ln a$
7. Se $y = e^x$, então $y' = e^x$
8. Se $y = e^u$, então $y' = u' e^u$

Derivadas das funções trigonométricas

Trataremos agora das funções trigonométricas e de suas derivadas.

É importante que você volte ao módulo 8 e recorde-se das funções trigonométricas, suas propriedades e as Relações Trigonométricas.

Apresentamos aqui o quadro, que usamos no módulo 8, das principais relações trigonométricas:

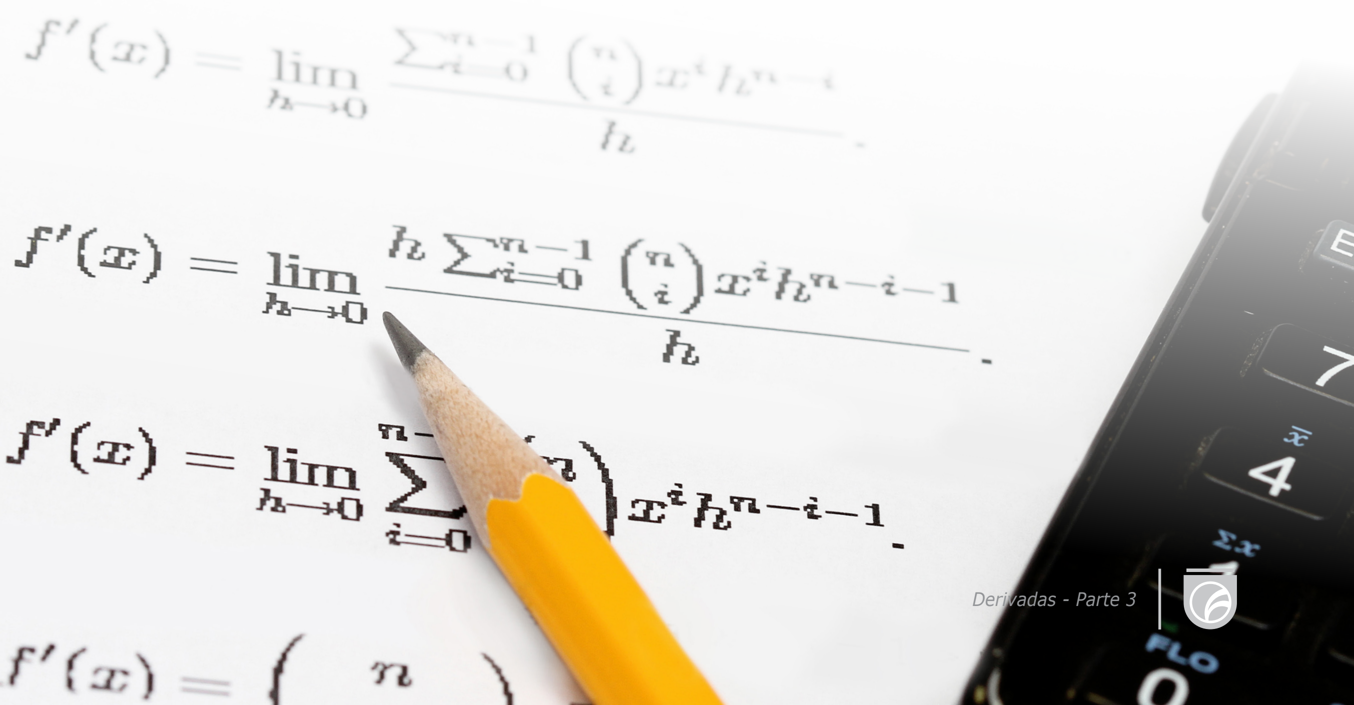
TABELA 1: RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS – FORMULÁRIO

1) $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$	2) $tg\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$
3) $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	4) $1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$
5) $\cot g\theta = \dfrac{\cos\theta}{sen\theta}$	6) $\cot g\theta = \dfrac{1}{tg\theta}$
7) $\mathrm{cosec}\,\theta = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}$	8) $1 + \cot g^2\theta = \mathrm{cosec}^2\,\theta$

TABELA 2: OUTRAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS IMPORTANTES

1) $\mathrm{sen}(\alpha+\theta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\alpha$	2) $\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta$
3) $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$	4) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta$
5) $\mathrm{sen}^2\,\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$	6) $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

Agora sim, podemos trabalhar com as derivadas.



A derivada da função $y = senx$

Para usarmos a definição de derivada, devemos ter:

$y = \text{sen}x$

$y = \text{sen}\,(x + \Delta x)$

Aplicando o limite da definição de derivada, temos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\text{sen}(x+\Delta x) - \text{sen}x}{\Delta x}\right]$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\text{sen}x\cos\Delta x + \text{sen}\Delta x\cos x - \text{sen}x}{\Delta x}\right]$$

Colocando $\text{sen}x$ em evidência, temos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\text{sen}x(\cos\Delta x - 1) + \text{sen}\Delta x\cos x}{\Delta x}\right]$$

Dividindo ambas as parcelas por Δx,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\text{sen}x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\text{sen}\Delta x\cos x}{\Delta x}\right]$$

Mas "limite de uma soma é a soma dos limites", então

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\text{sen}x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\text{sen}\Delta x\cos x}{\Delta x}\right]$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\text{sen}x\frac{(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x}\cos x\right]$$

E "limite de um produto é o produto dos limites", então

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}(\text{sen}x)\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x}\right)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}(\cos x)$$

Mas $\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x}\right] = 0$ e $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x}\right) = 1$ (*)

Então

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}(\text{sen}x)\cdot 0 + 1\cdot\lim_{\Delta x \to 0}(\cos x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}(\cos x)$$

$$y' = \cos x$$

ATENÇÃO

(*) Esses dois limites,

$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x}\right] = 0$ e

$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\text{sen}\Delta x}{\Delta x}\right) = 1$, são considerados limites fundamentais na trigonometria.

Fórmula 9: Se $y = \text{sen}\ x$**, então** $y' = \cos x$

Entretanto, por limitações de tempo não apresentaremos essas demonstrações agora. Mas em qualquer um dos livros de Cálculo da nossa bibliografia apresentada no fim do módulo essa demonstração é feita, e sugerimos ao aluno que procure lê-las e compreendê-las.

Se a função for composta, é só usar a regra da cadeia:

Fórmula 10: Se $y = \text{sen}\ u(x)$**, então,** $y' = u' \cos u$

Ex.: Calcule as derivadas de:

a. $y = \text{sen}(x^2 - 3)$

A função é composta, onde $u(x) = x^2 - 3$ e $u' = 2x$, então

$$y' = 2x \cos(x^2 - 3)$$

b. $y = \text{sen}(\ln x)$

Veja que $\boldsymbol{u(x)} = \ln x$ e $\boldsymbol{u'(x)} = \frac{1}{x}$. Então

$$y' = \frac{1}{x}\cos(\ln x)$$

c. $y = \text{sen}x^3$.

Veja que $\boldsymbol{u(x)} = x^3$ e $\boldsymbol{u'(x)} = 3x^2$. Então

$$y' = 3x^2 \cos x^3$$

d. $y = \text{sen}^3 x$

Essa função é diferente da anterior e equivale a $y = (\text{sen}x)^3$. Então é uma função composta da forma $y = u^n$, e, portanto $y' = nu^{n-1}u'$. Mas $u = \text{sen}\ x$ e $u' = \cos x$.

Teremos então que se $y = (\text{sen}x)^3$, então

$$y' = 3(\text{sen}x)^2(\text{sen}\ x)' \Rightarrow y' = 3(\text{sen}x)^2 \cdot \cos x \Rightarrow y' = 3\cos x(\text{sen}x)^2$$

ou

$$y' = 3\cos x \cdot \text{sen}^2 x$$

e. $y = \sqrt{5 - \text{sen}^4 x}$

Escrevendo na forma de expoente fracionário, temos $y = (5 - \text{sen}^4 x)^{\frac{1}{2}}$.

Essa é uma função composta da forma $y = u^n$, onde $u = 5 - \text{sen}^4 x$, que, por sua vez, também é uma função composta.

Teremos

$$y' = \frac{1}{2}\left(5-\operatorname{sen}^4 x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(5-\operatorname{sen}^4 x\right)' \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(5-\operatorname{sen}^4 x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-4\operatorname{sen}^3 x\cdot\left(\operatorname{sen} x\right)'\right) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\cancel{2}}\left(5-\operatorname{sen}^4 x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\cancel{4}\operatorname{sen}^3 x.\cos x\right) \Rightarrow$$

$$y' = -2\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x\left(5-\operatorname{sen}^4 x\right)^{-\frac{1}{2}}$$

A derivada de $y = \cos x$

Usando a relação trigonométrica 1 da tabela 1, temos que

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\theta = 1-\operatorname{sen}^2 x \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$$

no primeiro quadrante.

Então podemos dizer que $\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$. Portanto, a função que queremos derivar torna-se

$$y=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x},$$

que trataremos como o exercício e) do exemplo visto anteriormente:

$$y=\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)' \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\operatorname{sen} x\cos x\right) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{2\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{2}}} \quad\Rightarrow\quad y' = -\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$$

Mas

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}=\cos x.$$

Substituindo

$$y' = -\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$y' = -\operatorname{sen} x$$

Fórmula 11: Se $y=\cos x$**, então** $y' = -\operatorname{sen} x$

Se for a função composta $y = \cos u(x)$, basta usar a regra da cadeia, e teremos $y' = -u' \operatorname{sen} u$

Fórmula 12: Se $y = \cos u$**, então** $y' = -u' \operatorname{sen} u$

Ex.: Calcule a derivada de:

a. $y = \cos\left(x^5 + 4\right)$

É uma função composta, da forma $y = \cos u(x)$, onde $u = x^5 + 4$. Então

$$y' = -\left(x^5 + 4\right)' \operatorname{sen}\left(x^5 + 4\right) \Rightarrow y' = -5x^4 \operatorname{sen}\left(x^5 + 4\right)$$

b. $y = \cos^5 x$

É uma função composta da forma $y = u^5$, cuja derivada é $y' = 5u^4 \cdot u'$

$$y' = 5\cos^4 x(\cos x)' \Rightarrow y' = 5\cos^4 x(-\operatorname{sen} x) \Rightarrow y' = -5 \operatorname{sen} x \cos^4 x$$

c. $y = \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

Essa é uma função produto, da forma $y = u \cdot v$, onde $y' = u'v + uv'$

Temos que

$$u = \operatorname{sen}^2 x \qquad u' = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$
$$v = \cos^2 x \qquad v' = -2 \cos x \operatorname{sen} x$$

$$y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x \cdot \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x \operatorname{sen} x$$

$$y' = 2 \operatorname{sen} x \cos^3 x - 2 \operatorname{sen}^3 x \cos x$$

Colocando em evidência $2 \operatorname{sen} x \cos x$.

$$y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)$$

Usando as fórmulas 11 e 12 das relações trigonométricas temos:

$$y' = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x$$

A derivada de $y = tg\, x$

Considere a fórmula 2 da Tabela 1.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}.$$

Então podemos afirmar que

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Essa é uma função divisão, da forma

$$y=\frac{u}{v}\text{, onde } y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\ .$$

Temos que

$$u=\text{sen}x \qquad u'=\cos x$$
$$v=\cos x \qquad v'=-\text{sen}x$$

$$y'=\frac{\cos x\cos x-(-\text{sen}x\text{sen}x)}{\cos^2 x}$$
$$y'=\frac{\cos^2 x+\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

Mas

$$\cos^2 x+\text{sen}^2 x=1$$

Substituindo

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$y'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$$

Mas

$$\frac{1}{\cos x}=\sec x\ ,$$

Logo

$$y'=\sec^2 x$$

Fórmula 13: Se $y=\text{tg}\, x$**, então** $y'=\sec^2 x$

Se a função for composta, $y=\text{tg}\, u$, então é só aplicar a regra da cadeia e $y'=-u'\sec^2 u$

Fórmula 14: Se $y=\text{tg}\, u$ **, então** $y'=u'\sec u$

A derivada de $y = cotg\ x$

Considere que $\text{cotg}\, x=\dfrac{\cos x}{\text{sen}x}$ e desenvolva um raciocínio análogo ao da Fórmula 13. Prove você mesmo essa derivada!

Fórmula 15: Se $y=\text{cotg}\, x$**, então** $y'=-\text{cosec}^2 x$

Se a função for composta, $y = \text{cotg } x$, derive usando a regra da cadeia.

Fórmula 16: Se $y = \text{cotg } u$**, então** $y' = -u' \text{cosec}^2 u$

A derivada de $y = sec\ x$

Considere a fórmula 3 da Tabela 1:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Então

$$y = \frac{1}{\cos x}$$

Ou

$$y = (\cos x)^{-1}$$

Então

$$y' = -(\cos x)^{-2}(\cos x)'$$

Ou

$$y' = \frac{-(-\text{sen}\, x)}{(\cos x)^2} \Rightarrow$$
$$y' = \frac{\text{sen}\, x}{(\cos x)^2} \Rightarrow$$
$$y' = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x . \cos x} \Rightarrow$$
$$y' = \frac{1}{\cos x .}\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \Rightarrow$$
$$y' = \sec x \cdot \text{tg}\, x$$

Fórmula 17: Se $y = \sec x$**, então** $y' = \sec x \cdot \text{tg } x$

Se a função for composta, $y = \sec u$, derive usando a regra da cadeia, para obter $y' = u' \sec u \cdot \text{tg}\, u$.

Fórmula 18: Se $y = \sec u$**, então** $y' = \sec xu \cdot \text{tg } u$

A derivada de $y = cosec\, x$

Considere a fórmula 7 da Tabela 1, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, e faça você mesmo uma demonstração análoga à da Fórmula 17 e prove que $y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$

Fórmula 19: Se $y = \operatorname{cosec} x$**, então** $y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$

Se a função for composta, $y = \operatorname{cosec} u$, derive usando a regra da cadeia, para obter $y' = -u' \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u$.

Fórmula 20: Se $y = \operatorname{cosec} u$**, então** $y' = -u' \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u$

Ex.: Encontre a derivada da função:

a. $y = \operatorname{cotg}(4 - 3x^2)$

$$y' = -\operatorname{cosec}(4 - 3x^2)(4 - 3x^2)' \Rightarrow$$

$$y' = -(-6x)\operatorname{cosec}(4 - 3x^2) \Rightarrow y' = 6x\operatorname{cosec}(4 - 3x^2)$$

b. $y = \frac{1}{2}\sec^4 x$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 4\sec^3 x \cdot (\sec x)' \Rightarrow y' = 2\sec^3 x \cdot (\sec x \cdot \operatorname{tg} x) \Rightarrow y' = 2\sec^4 x \cdot \operatorname{tg} x$$

c. $y = \operatorname{tg}(\ln x)$

$$y' = \sec^2(\ln x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{x}\sec^2(\ln x)$$

d. $y = \sqrt{\operatorname{cotg} 2x}$

$$y = (\operatorname{cotg} 2x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} 2x)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{cotg} 2x)' \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} 2x)^{-\frac{1}{2}}(-2\operatorname{cosec}^2 2x) \Rightarrow$$

$$y' = -\operatorname{cosec}^2 2x(\operatorname{cotg} 2x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = -\frac{\operatorname{cosec}^2 2x}{\sqrt{\operatorname{cotg} 2x}}$$

e. $y = \operatorname{cosec}(\operatorname{tg} x)$

$$y' = -\operatorname{cosec}(\operatorname{tg} x)\operatorname{cotg}(\operatorname{tg} x) \cdot (\operatorname{tg} x)' \Rightarrow y' = -\sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}(\operatorname{tg} x)\operatorname{cotg}(\operatorname{tg} x)$$

f. $y = \ln\left(\sqrt{\sec x}\right)$

$$y = \ln(\sec x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln(\sec x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\frac{(\sec x)'}{\sec x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\frac{\cancel{\sec x}\ \operatorname{tg} x}{\cancel{\sec x}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

As derivadas das funções trigonométricas inversas

Vamos agora aprender sobre derivadas das funções trigonométricas inversas, que desempenharão papel importante em discussões posteriores, principalmente em integrações.

A DERIVADA DA FUNÇÃO ARCO SENO

Seja a função

$$y \quad \text{arcsen}\, x$$

Para chegarmos à sua derivada, a melhor estratégia é trabalhar com a sua inversa

$$x = \text{sen}\, y$$

Derivando-a implicitamente teremos

$$1 = \cos y \cdot y'$$

Ou

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

Mas

$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2\, y}$$

E

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\, y}}$$

Mas

$$\text{sen}\, y = x$$

Logo

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Fórmula 21: Se $y = \text{arcsen}\, x$ **, então** $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Se a função for composta, da forma $y = \text{arcsen}\, u$, aplicando a regra da cadeia teremos

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Fórmula 22: Se $y = \operatorname{arcsen} u$, então $y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Ex.: Encontre a derivada de:

$$y = \operatorname{arcsen} 5x^3$$

$$y' = \frac{15x^2}{\sqrt{1-\left(5x^3\right)^2}} \Rightarrow y' = \frac{15x^2}{\sqrt{1-25x^6}}$$

A DERIVADA DA FUNÇÃO ARCO TANGENTE

A função $y = \operatorname{arctg} x$, é essencialmente definida da mesma forma, ou seja, $y = \operatorname{arctg} x$ e sua inversa $x = \operatorname{tg} y$ significam exatamente a mesma coisa.

Então, derivar

$$y = \operatorname{arctg} x$$

é o mesmo que derivar

$$x = \operatorname{tg} y$$

E teremos

$$1 = \sec^2 y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Mas da fórmula 4 da Tabela 1 temos:

$$1 + tg^2\theta = \sec^2 \theta$$

Ou, de forma equivalente,

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$$

Então

$$y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$$

Mas

$$\operatorname{tg} y = x$$

Logo

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Fórmula 23: Se $y = \text{arctg}\, x$, então $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

E

Fórmula 24: Se $y = \text{arctg}\, u$, então $y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

Ex.: Encontre a derivada de $y = \text{arctg}(\cos x)$

$$y' = \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x} \Rightarrow y' = -\frac{\text{sen}\, x}{1+\cos^2 x}$$

A DERIVADA DA FUNÇÃO ARCO SECANTE

Seja

$$y = \text{arc}\sec x ,$$

que é equivalente a

$$x = \sec y$$

Derivando essa segunda equação, temos

$$1 = y' \sec y \cdot \text{tg}\, y$$

Ou

$$y' = \frac{1}{\sec y \cdot \text{tg}\, y}$$

Mas

$$\text{tg}\, y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$$

E

$$y' = \frac{1}{\sec y \cdot \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

Como

$$\sec y = x$$

Então

$$y' = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

Fórmula 25: Se $y = \text{arc}\sec x$, então $y' = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$

E

Fórmula 26: Se $y = \text{arc}\sec u$, então $y' = \dfrac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}}$

Ex.: Ache a derivada de $y = \text{arcsec}(\text{tg}\, x)$

$$y' = \frac{(\text{tg}\, x)'}{\text{tg}\, x\sqrt{\text{tg}^2 x - 1}} \Rightarrow y' = \frac{\sec^2 x}{\text{tg}\, x\sqrt{\text{tg}^2 x - 1}}$$

ALGUNS EXEMPLOS DE DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1. Encontre a derivada da função $y = \frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{2x}{3}\right)$, dando o resultado na forma mais fatorada e simplificada possível.

$$y = \frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{2x}{3}\right)$$

$$y' = \frac{1}{3}\frac{\left(\frac{2x}{3}\right)'}{1 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2}$$

$$y' = \frac{1}{3}\frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{4x^2}{9}}$$

$$y' = \frac{1}{3}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{9 + 4x^2}{9}}$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{9 + 4x^2}$$

$$y' = \frac{2}{9 + 4x^2}$$

2. Se $y = 4\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{4-x^2}$, mostre que $y' = 2\sqrt{4-x^2}$

$$y = 4\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + x\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = 4\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} + \left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + x\cdot\frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$y' = 4\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} + \left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x^2\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{2}{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} + \left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x^2\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{2}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} + \left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x^2\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} + \left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x^2\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = 4\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x^2\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Colocando $\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ em evidência, teremos

$$y' = \left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left[4 + \left(4-x^2\right) - x^2\right]$$

$$y' = \left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(4+4-x^2-x^2\right)$$

$$y' = \left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(8-2x^2\right)$$

$$y' = \left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}2\left(4-x^2\right)$$

$$y' = 2\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = 2\sqrt{4-x^2}$$

3. Sabendo que $y = x\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \ln\left(4+x^2\right)$, prove que $y' = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$

$$y = x\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \ln\left(4+x^2\right),$$

$$y' = \text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + x \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{2x}{4+x^2}$$

$$y' = \text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + x \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}} - \frac{2x}{4+x^2}$$

$$y' = \text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + x \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4+x^2}{4}} - \frac{2x}{4+x^2}$$

$$y' = \text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + \cancel{\frac{2x}{4+x^2}} - \cancel{\frac{2x}{4+x^2}}$$

$$y' = \text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

ATENÇÃO

Um resumo das fórmulas de derivadas de funções trigonométricas e trigonométricas inversas

- Se $y = \text{sen}\, x$, então $y' = \cos x$
- Se $y = \text{sen}\, u$, então, $y' = u'\cos u$
- Se $y = \cos x$, então $y' = -\text{sen}\, x$
- Se $y = \cos u$, então $y' = -u'\text{sen}\, u$
- Se $y = \text{tg}\, x$, então $y' = \sec^2 x$
- Se $y = \text{tg}\, u$, então $y' = u'\sec^2 u$
- Se $y = \text{cotg}\, x$, então $y' = -\text{cosec}^2 x$
- Se $y = \text{cotg}\, u$, então $y' = -u'\text{cosec}^2 u$
- Se $y = \sec x$, então $y' = \sec x \cdot \text{tg}\, x$
- Se $y = \sec u$, então $y' = \sec xu \cdot \text{tg}\, u$
- Se $y = \text{cosec}\, x$, então $y' = -\text{cosec}\, x \cdot \text{cotg}\, x$
- Se $y = \text{cosec}\, u$, então $y' = -u'\text{cosec}\, u \cdot \text{cotg}\, u$
- Se $y = \text{arcsen}\, x$, então $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Se $y = \text{arcsen}\, u$, então $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- Se $y = \text{arctg}\, x$, então $y' = \frac{1}{1+x^2}$
- Se $y = \text{arctg}\, u$, então $y' = \frac{u'}{1+u^2}$
- Se $y = \text{arcsec}\, x$, então $y' = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$
- Se $y = \text{arcsec}\, u$, então $y' = \frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$

Chegamos ao final do módulo sobre derivada de funções logarítmicas, exponenciais, trigonométricas e trigonométricas inversas, encerrando assim nosso estudo sobre derivadas.

Síntese

Caro(a) aluno(a),

Com este módulo nós encerramos os estudos sobre derivadas. Nele você aprendeu a derivar vários tipos de funções transcendentes.

É importante que você, ao acompanhar os raciocínios desenvolvidos nas demonstrações das fórmulas das derivadas e dos exercícios resolvidos, tenha aprendido um pouco sobre a arte de raciocinar e operar com essas funções.

Aprendeu a derivar as funções logarítmicas, exponenciais, trigonométricas e trigonométricas inversas.

Você aprendeu também que, para trabalhar com essas funções, foi necessário saber se utilizar das propriedades dos logaritmos e das relações trigonométricas.

Espero que você tenha se familiarizado com as ideias que lhe foram apresentadas nesse texto. Refaça os exemplos do módulo e garanta a sua aprendizagem com a prática destes e de outros exemplos que você poderá encontrar nas referências bibliográficas do módulo.

Após o estudo deste módulo, avalie se você conseguiu entender bem os assuntos aqui abordados. Se não, você deve retornar ao texto e estudar novamente os tópicos que não ficaram claros, ou pedir ajuda ao seu professor.

Saudações e continue seus estudos!

Referências

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica: volume 1**. 3. ed.. São Paulo: Harbra, c1994.. xii, 685[64] p.: ISBN 8529400941.

STEWART, James. **Cálculo: volume 1**. 5. ed.. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.. 581p., [204]p. ISBN 8522104794.

THOMAS, George Brinton; FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo: volume 1**. 10. ed.. São Paulo: Addison-Wesley, c2001.. xvi, 660[4]p. ISBN 8588639068.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl.; DAVIS, Stephen. **Cálculo: volume 1**. 8. ed.. Porto Alegre: Bookman, 2007.. xx, 581[64]p. ISBN 9788560031634.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração.** 6. ed. rev. amp.. São Paulo: Pearson Prentice Hall, c2007.. ix, 448p. ISBN 857605115X

LARSON, Roland E.; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com aplicações.** 4.ed.. Rio de Janeiro: LTC Ed., c1998.. xxii, 711p. ISBN 8521611447.

SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com geometria analítica: volume 1**. São Paulo: McGraw-Hill, c1987.. xxii, 829p. ISBN 0074504118.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica. 2**. ed. São Paulo: Makron Books, c1994.. xxvi, 744p. ISBN 8534603081.