UNIVERSIDADE FUMEC

# Cálculo I

## DERIVADAS

$$m_s(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_s(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- **RETA TANGENTE A UMA CURVA EM UM PONTO DADO**
- **COEFICIENTE ANGULAR E A EQUAÇÃO DESSA RETA TANGENTE**
- **EQUAÇÃO DE UMA RETA NORMAL A UMA CURVA**

**E MUITO MAIS...**

## APRESENTAÇÃO

Caro(a) aluno(a), vamos iniciar o estudo de derivadas, que é um dos conceitos mais importantes do Cálculo e a espinha dorsal desse curso de Cálculo I.

Nesse módulo você vai aprender o que é reta tangente a uma curva em um ponto dado e como calcular o coeficiente angular dessa reta e sua equação.

Vai aprender também o que é reta normal a uma curva e como calcular sua equação.

Irá conhecer a interpretação geométrica da derivada e compreender sua definição.

Aprenderá também a calcular derivadas de funções algébricas através das regras de derivação.

Vamos lá?

Bons estudos e boa aprendizagem!

## OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao final deste módulo você será capaz de:

- Entender o que é reta tangente a uma curva em um ponto dado;
- Calcular o coeficiente angular e a equação dessa reta tangente;
- Encontrar a equação de uma reta normal a uma curva;
- Compreender o conceito geométrico de derivada como coeficiente angular de reta tangente a uma curva;
- Entender a definição de derivada;
- Saber usar as regras de derivação para calcular derivadas.


FICHA TÉCNICA

UNIVERSIDADE FUMEC

**FUMEC VIRTUAL - SETOR DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA**

***Gestão Pedagógica***
*Coordenação*
Gabrielle Nunes P. Araújo
*Transposição Pedagógica*
Ediane Cardoso

***Produção de Design Multimídia***
*Coordenação*
Rodrigo Tito M. Valadares
*Design Multimídia*
Dennis Henrique Dias Peçanha
Raphael Gonçalves Porto Nascimento

***Infra-Estrututura e Suporte***
*Coordenação*
Anderson Peixoto da Silva

**AUTORIA DA DISCIPLINA**

Prof. Ronaldo Abrão Pimentel e
Profa. Valéria Cunha Figueiredo

BELO HORIZONTE - 2013

# DERIVADAS

## Introdução

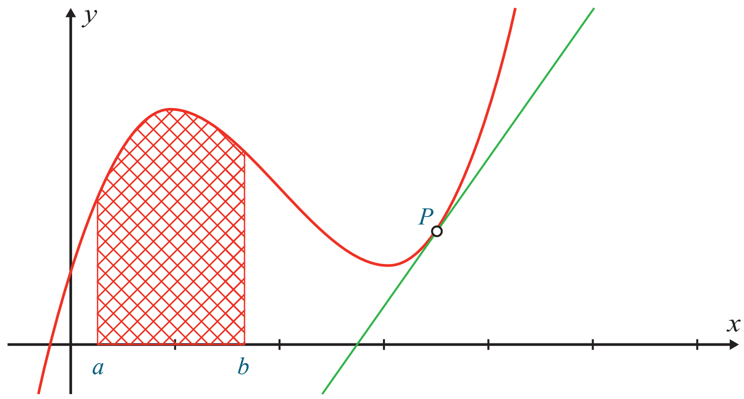
Você sabia que o Cálculo tem nome e sobrenome? Ele é chamado de Cálculo Diferencial e Integral e esses dois nomes, Diferencial e Integral, dizem respeito às duas questões fundamentais que compõem o Cálculo.

Quase todas as ideias do Cálculo giram em torno de duas questões geométricas, e ambas se referem ao gráfico da função $y = f(x)$. Vamos aprender um pouco mais sobre elas.

A primeira questão geométrica diz respeito ao cálculo diferencial (e às derivadas). É o estudo das retas tangentes à curva dada pela função, em um determinado ponto $P(x_1, f(x_1))$. Mais especificamente, ao estudo dos coeficientes angulares dessas retas tangentes.

A segunda questão diz respeito ao cálculo integral, que é o estudo de áreas de regiões delimitadas pela curva dada por $y = f(x)$, o eixo $0x$ e as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Veja o gráfico.

**GRÁFICO 1: ESTUDO DAS TANGENTES E DAS ÁREAS**




**Fonte:** próprio autor

## A Derivada

Primeiramente vamos fazer um estudo das retas tangentes. Para isso é importante que tenhamos claro o que é reta tangente a uma curva dada por $y = f(x)$ em um ponto $P$.

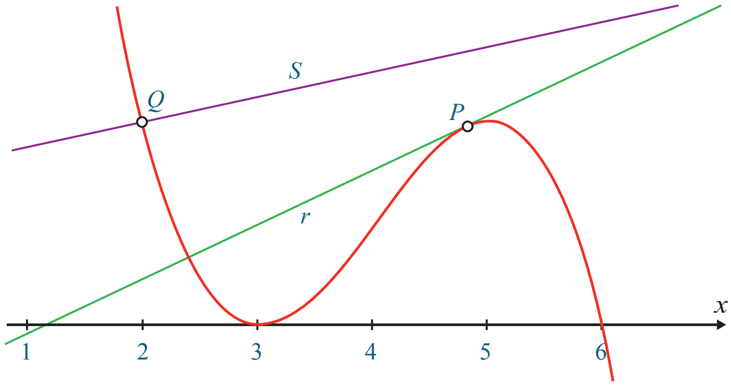
### A RETA TANGENTE

Apesar da maioria dos estudantes terem uma ideia gráfica do que seja uma reta tangente a uma curva, na hora de dizer o que é, a coisa complica.

É porque temos algumas ideias equivocadas a esse respeito. Por exemplo: “Reta tangente a uma curva é a reta que 'toca' a curva em um único ponto”.

Isto não é verdade, pois, olhando a figura a seguir você perceberá que a reta $s$ que toca a curva em um único ponto ($Q$) não é tangente e a reta $r$, que toca a curva em mais de um ponto é tangente em $P$.

**GRÁFICO 2: RETAS TANGENTE E NÃO TANGENTE**



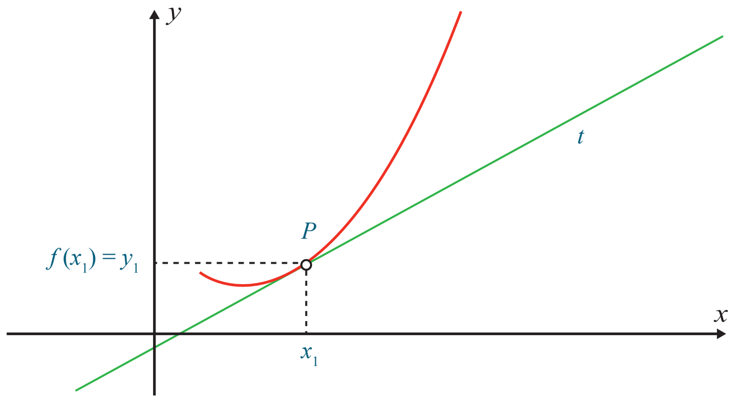

**Fonte:** próprio autor

Na realidade, esta afirmação serve apenas para a circunferência e algumas outras curvas especiais. Mas não serve para todo tipo de curva dada por uma função.

Temos então que, primeiramente, definir melhor o que é reta tangente a uma curva dada por $y = f(x)$ em um ponto $P$.

Seja uma função dada por $y = f(x)$, contínua em um ponto $P\,(x_1\,, f(x_1))$. Tracemos por este ponto $P$ uma reta tangente $t$, como no gráfico 3. Devemos então determinar esta reta tangente.

**GRÁFICO 3: RETA TANGENTE A UMA CURVA**



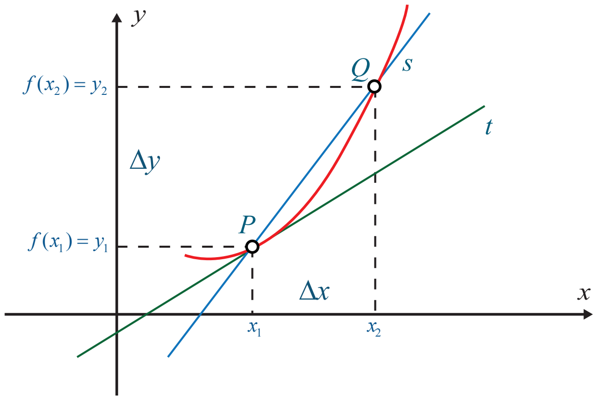

**Fonte:** próprio autor

Para determinarmos uma reta precisamos de dois pontos ou de um ponto e seu coeficiente angular. No caso da reta $t$, só temos o ponto $P$, que é o ponto de tangência e, portanto, é da curva.

Vamos então encontrar o coeficiente angular da reta $t$.

Para isso vamos tomar um segundo ponto, $Q\,(x_2\,, f(x_2))$, próximo a $P$, na curva. Tracemos por $P$ e $Q$ uma reta $s$, secante à curva, como no gráfico 4.

**GRÁFICO 4: CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR DA RETA SECANTE**




**Fonte:** próprio autor

O coeficiente angular dessa reta secante é:

$$m_s(x_1)=\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ ou } m_s(x_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ ou ainda } m_s(x_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Como $\Delta x = x_2 - x_1$, então $x_2 = x_1 + \Delta x$, e podemos escrever que:

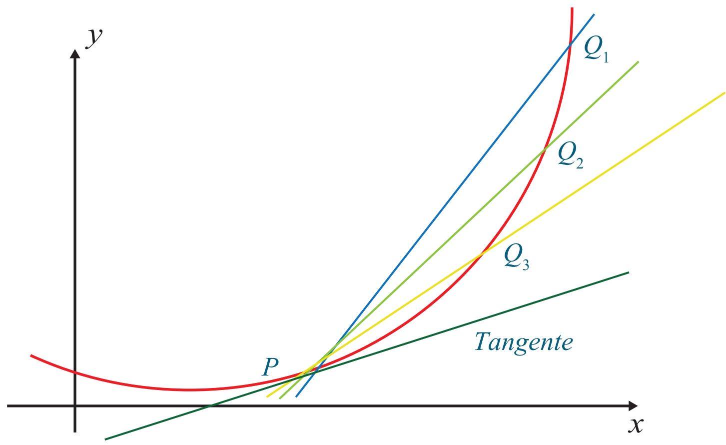
$$m_s(x_1)=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

Temos então o coeficiente angular da reta secante. Mas queremos encontrar o coeficiente angular da reta tangente.

Vamos fazer o ponto $Q$ se aproximar do ponto $P$ deslizando sobre a curva, como se fosse uma "conta deslizando ao longo de um fio curvo" (Simmons, 1987, p.72).

Quando isto acontece, a reta secante muda de direção e começa a se aproximar cada vez mais da reta tangente. Veja o gráfico 5.

**GRÁFICO 5: RETA SECANTE TENDENDO À RETA TANGENTE ENQUANTO $Q$ TENDE A $P$**




**Fonte:** próprio autor

Mas essa é a ideia de limite!

Podemos então afirmar que a reta tangente é o limite da reta secante quando $Q$ tende a $P$.

E também que $m_t(x_1) = \lim_{P \to Q} m_s(x_1)$, ou seja, o coeficiente angular de $t$ é o limite do coeficiente angular de $s$, quando $Q$ tende a $P$.

Veja que se $Q$ tende a $P$, então $x_2$ tende a $x_1$ e $\Delta x_2$ tende a $0$. Podemos então afirmar que

$$m_t(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}\right)$$

Se conseguirmos calcular este limite, então encontramos o coeficiente angular da reta tangente que procurávamos.

Vamos então definir esta reta tangente?

## TOME NOTA

Reta tangente a uma curva dada por $y = f(x)$ em um ponto $P(x_1, f(x_1))$ é a reta que passa por $P$ e tem como coeficiente angular:

$$m_t(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}\right)$$

Se este limite existir.

### Exemplo 1

Encontre a equação da reta tangente à curva dada por $f(x) = x^2 - 1$, no ponto $(2, 3)$.

A primeira coisa que temos que fazer é verificar se o ponto dado pertence à curva, pois ele tem que ser o ponto de tangência. $f(2) = 3$, logo ele pertence à curva.

Agora temos que calcular o limite dado na definição, para encontrarmos o coeficiente angular da reta tangente. Para calcularmos o limite teremos que saber $x_1$, $f(x_1)$ e $f(x_1 + \Delta x)$.

Temos que:

* $x_1 = 2$;

* $f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 - 1$

$$f(2 + \Delta x) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 1$$

$$f(2 + \Delta x) = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 1$$

* $f(2 + \Delta x) = 3 + 4\Delta x + (\Delta x)^2$

Então $m_t(2) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}\right)$

$$m_t(2) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{3 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 3}{\Delta x}\right)$$

$$m_t(2) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}\right)$$

Colocando $\Delta x$ em evidência no numerador e cancelando-o com o denominador, temos:

$$m_t(2) = \lim_{\Delta x \to 0}(4 + \Delta x)$$

$$m_t(2) = 4$$

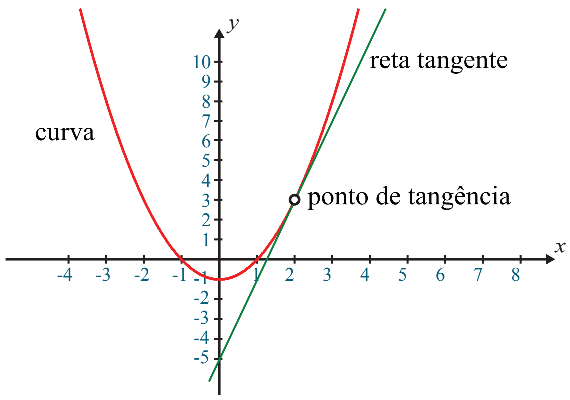
Encontramos então, o coeficiente angular da reta tangente. Como temos o ponto $(2\,,3)$, então podemos usar a fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

$$y - 3 = 4\,(x - 2)$$

$y = 4x - 5$ que é a equação da reta tangente à curva dada por $f(x) = x^2 - 1$, no ponto $(2\,,3)$

Veja o gráfico:

**GRÁFICO 6: RETA TANGENTE**




**Fonte:** próprio autor

# A RETA NORMAL A UMA CURVA

A reta normal a uma curva dada por $y = f(x)$ em um ponto $P\,(x_1\,,f(x_1))$ é a reta que é perpendicular à reta tangente a essa curva, no ponto de tangência.

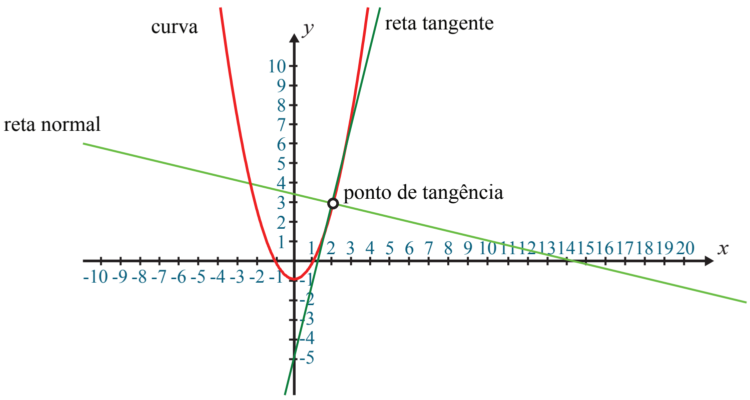
Se $m_t$ é o coeficiente da reta tangente à curva e $m_n$ o coeficiente da reta normal, então $m_n = -\dfrac{1}{m_t}$.

No exemplo anterior achamos que o coeficiente angular da reta tangente à curva dada por $f(x) = x^2 - 1$, no ponto $(2\,,3)$ é $m_t = 4$. Então $m_n = -\dfrac{1}{4}$. Para acharmos a equação da reta normal, basta agora usarmos a fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$$

Veja as retas tangente e normal.

**GRÁFICO 7 : RETAS TANGENTE E NORMAL**




**Fonte:** próprio autor

## A definição de derivada

Podemos agora definir o que é derivada de uma função.

### TOME NOTA

A derivada da função $y = f(x)$ em um ponto $P\,(x_1\,, f\,(x_1))$ , denotada por $\dfrac{df}{dx}$; $\dfrac{dy}{dx}$ ; $f\,'(x)$ ou $y'$ é dada por:

$$\frac{df}{dx}(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f\,(x_1 + \Delta x) - f\,(x_1)}{\Delta x}\right),$$

Se este limite existir.

Diante dessa definição e do que vimos anteriormente, podemos então dizer que:

A derivada da função $y = f\,(x)$ em um ponto $P\,(x_1\,, f\,(x_1))$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva dada por $y = f\,(x)$ no ponto $P$.

**Exemplo 2**

Encontre, por definição, a derivada da função $f\,(x) = x^3 - 1$.

A derivada dessa função nos dará, então, o coeficiente angular de qualquer reta tangente à curva dada pela função.

É como se achássemos o coeficiente angular em um ponto genérico da curva, $(x, f\,(x))$, ou seja, no ponto genérico, $(x,\, x^3 - 1)$.

Primeiro encontramos:

$$x_1 = x$$

$$f(x) = x^3 - 1$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 - 1 \Rightarrow \quad f(x+\Delta x) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 1$$

Depois encontramos

$$f(x+\Delta x) - f(x) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 1 - (x^3 - 1) \Rightarrow$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

E agora calculamos o limite

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x}\right)$$

Cancelando o $\Delta x$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)$$

$\frac{df}{dx} = 3x^2$, que é a derivada da função $f(x) = x^3 - 1$.

A interpretação é a de que $\frac{df}{dx} = 3x^2$ é o coeficiente angular de qualquer reta tangente à curva dada por $f(x) = x^3 - 1$, dependendo do ponto da curva onde se toma a tangente.

Suponhamos o ponto $(2, 7)$, que pertence à curva.

$\frac{df}{dx}(2) = 3(2)^2 \quad \frac{df}{dx}(2) = 12$, que é o coeficiente angular da reta tangente à curva dada por $f(x) = x^3 - 1$, no ponto $(2, 7)$.

Se quisermos encontrar a equação dessa reta tangente, é só usar a fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$, onde $m = 12$ e $(x_1, y_1)$ é $(2, 7)$.

Teremos então:

$$y - 7 = 12(x - 2)$$

$$y = 12x - 24 + 7$$

$y = 12x - 17$, que é a equação da reta tangente à curva dada por $f(x) = x^3 - 1$, no ponto $(2, 7)$.

**Exemplo 3**

Encontre a derivada da função $f(x) = \sqrt{2x+5}$. Encontre também a equação da reta tangente à curva dada por essa função, no ponto $(2, 3)$.

Veja que o ponto pertence à curva, pois $f(2) = \sqrt{2.2+5} = 3$.

Calculemos $f(x)$ e $f(x+\Delta x)$.

$$f(x)=\sqrt{2x+5} \quad \text{e} \quad f(x+\Delta x)=\sqrt{2(x+\Delta x)+5}$$

Calculemos também

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{2(x+\Delta x)+5}-\sqrt{2x+5}\,.$$

Agora podemos calcular o limite

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sqrt{2(x+\Delta x)+5}-\sqrt{2x+5}}{\Delta x}\right]$$

Como o limite dá indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, devemos multiplicar pelo conjugado do numerador.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+5}-\sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{2(x+\Delta x)+5-(2x+5)}{\Delta x\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{2x+2\Delta x+5-2x-5}{\Delta x\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{2\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{2}{\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+5}+\sqrt{2x+5}\right)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x+5}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2\sqrt{2x+5}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$, que é a derivada da função.

Para encontrarmos a equação da reta tangente à curva no ponto $(2,3)$, devemos achar:

$m(2)=\dfrac{1}{\sqrt{2.2+5}}=\dfrac{1}{3}$ e usarmos a fórmula $y-y_1=m(x-x_1)$.

$y-3=\dfrac{1}{3}(x-3)\Rightarrow \quad y=\dfrac{1}{3}x-1+3\Rightarrow \quad y=\dfrac{1}{3}x+2$, que é a equação da reta tangente.

# Regras de derivação

Até o momento o cálculo de derivadas tem se dado através da definição de derivada, ou seja, pelo limite.

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right),\text{ se este limite existir.}$$

Mas esse processo não é muito prático e é demorado. Ao se fazer derivada por definição percebeu-se que para cada tipo de função havia um tipo de derivada. Ou seja, havia um padrão. E se havia um padrão, ele poderia ser desvendado e poder-se-ia chegar a métodos mais simples de derivar funções.

E é isso que vamos ver aqui. Vamos desenvolver um pequeno número de regras formais que nos permitirão derivar, com rapidez, grandes classes de funções, usando fórmulas.

### I. A derivada de uma constante é igual a zero.

Se $f(x)=K\Rightarrow \dfrac{df}{dx}=0$

Prova: $\dfrac{df}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$, como $f(x)=K$, então

$$\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{K-K}{\Delta x}\right)\Rightarrow\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{0}{\Delta x}\right)\Rightarrow\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}0\Rightarrow\frac{df}{dx}=0\,.$$

Podemos dar também uma interpretação geométrica para essa derivada.

A primeira coisa que devemos perceber é que a reta tangente a uma reta é a própria reta. Logo, a sua derivada é o seu coeficiente angular.

A função constante é representada graficamente por uma reta paralela ao eixo $0x$, cujo coeficiente angular é zero. Logo, a sua derivada é zero.

### II. A derivada de $x$ é igual a um.

Se $f(x)=x\Rightarrow \dfrac{df}{dx}=1$

Prova: $\dfrac{df}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$. Como $f(x)=x$, então $f(x+\Delta x)=x+\Delta x$ e

teremos $\dfrac{df}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{x+\Delta x-x}{\Delta x}\right)\Rightarrow\dfrac{df}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta x}\right)\Rightarrow\dfrac{df}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1\Rightarrow\dfrac{df}{dx}=1$.

A interpretação geométrica é a de que o coeficiente angular da reta dada por $f(x)=x$ é 1.

**III. A derivada da função $f(x) = mx + b$ é $\dfrac{df}{dx} = m$**

A explicação é bem simples: O gráfico da função $f(x) = mx + b$ é uma reta cujo coeficiente angular é $m$, e como a reta tangente a uma reta é a própria reta, então a derivada da função é o próprio $m$.

Ex. A derivada de $f(x) = -5x + 6$ é $\dfrac{df}{dx} = -5$

**IV. A derivada da função $f(x) = x^n$ é $\dfrac{df}{dx} = nx^{n-1}$, se $n$ for um inteiro positivo.**

Prova:

$f(x) = x^n$ e

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n$$

E

$$f(x+\Delta x) - f(x) = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x) - x^n$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n$$

Calculando o limite:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x}\right)$$

Veja que todo termo do numerador está multiplicado por $\Delta x$. Colocando-o em evidência e cortando-o teremos:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\right)$$

O que nos dá:

$$\frac{df}{dx} = nx^{n-1}$$

A derivada de $f(n) = x^n$ foi provada para $n$ inteiro positivo. Prova-se também que ela é verdadeira para todo $n \in R$, mas não veremos aqui essas demonstrações por falta de tempo hábil.

**Exemplos**:

Encontre a derivada de cada uma das funções abaixo:

a. $f(x) = x^5 \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = 5x^4$.

b. $f(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

c. $f(x)=\dfrac{1}{x^4} \Rightarrow f(x)=x^{-4} \Rightarrow \dfrac{df}{dx}=-4x^{-4-1} \Rightarrow \dfrac{df}{dx}=-4x^{-5} \Rightarrow \dfrac{df}{dx}=\dfrac{-4}{x^5}$

d. $f(x)=\dfrac{x^5}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^5}{x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow f(x)=x^{5-\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{9}{2}}$

$\dfrac{df}{dx}=\dfrac{9}{2}x^{\frac{9}{2}-1} \Rightarrow \dfrac{df}{dx}=\dfrac{9}{2}x^{\frac{7}{2}}$.

Observe que, se for necessário, ainda podemos escrever essa derivada como sendo:

$$\frac{df}{dx}=\frac{9}{2}\sqrt{x^7} \Rightarrow \frac{df}{dx}=\frac{9}{2}\sqrt{x^6x} \Rightarrow \frac{df}{dx}=\frac{9}{2}x^3\sqrt{x}$$

A partir de agora vamos admitir como verdadeiras as afirmações a seguir, sem necessidade de demonstrações. Sugerimos que o aluno procure as demonstrações em qualquer um dos livros de cálculo relacionados na bibliografia e que se encontram disponíveis na biblioteca da FEA-Fumec.

Vale lembrar que todas as demonstrações de derivada passam pela sua definição.

**V. A derivada de uma constante multiplicada por uma função é igual à constante multiplicada pela derivada da função.**

Se $f(x)=Kv(x)$, onde $K$ é uma constante não nula e $v(x)$ é uma função de $x$, então $\dfrac{df}{dx}=K\dfrac{dv}{dx}$.

Podemos usar a notação de "linha" e escrever que $f'(x) = Kv'(x)$

**Exemplos:**

Encontre a derivada de:

a. $f(x) = 7x^4$

$f'(x)=7\cdot 4x^3 \Rightarrow f'(x)=28x^3$

b. $f(x)=\dfrac{3x^5}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow f(x)=\dfrac{3x^5}{2x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}x^{5-\frac{3}{2}} \Rightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{7}{2}}$

$f'(x)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{21}{4}x^{\frac{5}{2}}$

Se necessário: $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{21}{4}\sqrt{x^5} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{21}{4}x^2\sqrt{x}$ .

**VI. A derivada de uma soma é a soma das derivadas.**

Se $f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ u_n$ , onde $u_i = u(x)$,

Então

$$\frac{df}{du}=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\frac{du_3}{dx}+\ldots+\frac{du_n}{dx}$$

Ou

$$f' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots\ u_n'$$

**Exemplos:**

Encontre a derivada de:

**a.** $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\left(3x^2\right)}{dx} - \frac{d\left(4x\right)}{dx} + \frac{d\left(5\right)}{dx} \quad \text{ou} \quad f'(x) = (3x^2)' - (4x)' + 5'$$

$$f'(x) = 6x - 4$$

Qualquer polinômio agora poderá ser derivado facilmente, veja:

**b.** $f\left(x\right) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 7x + 9$

$$f'\left(x\right) = 10x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 10x - 7$$

**c.** $y = \left(x^2 - 2\right)^3$

$$y = x^6 - 3.x^4.2 + 3.x^2.4 - 8 \Rightarrow y = x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$$

$$y' = 6x^5 - 24x^3 + 24x\ .$$

Deve-se colocar $6x$ em evidência:

$$y' = 6x\left(x^4 - 4x^2 + 4\right) \Rightarrow y' = 6x\left(x^2 - 2\right)^2 .$$

A partir de agora toda derivada deverá ser dada na forma mais fatorada e simplificada possível.

Não só funções polinomiais podem ser derivadas de forma simples com a fórmula dada em vi), mas qualquer tipo de soma.

**d.** $f\left(x\right) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 2x - 5}{x^2} \Rightarrow f\left(x\right) = \left(x^3 - 4x^2 + 2x - 5\right) \cdot x^{-2} \Rightarrow$

$$f\left(x\right) = x - 4 + 2x^{-1} - 5x^{-2}$$

$$f'\left(x\right) = 1 - 0 - 2x^{-2} + 10x^{-3} \Rightarrow f'\left(x\right) = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{10}{x^3} = \frac{x^3 - 2x + 10}{x^3}$$

**e.** $y = \left(3\sqrt{x^3} - \dfrac{2}{x^2}\right)^2 \Rightarrow y = \left(3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-2}\right)^2 \Rightarrow y = 9x^3 - 12x^{\frac{3}{2}-2} + 2x^{-4} \Rightarrow$

$$y = 9x^3 - 12x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-4}$$

$$y' = 27x^2 - 12\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} - 8x^{-5} \Rightarrow y' = 27x^2 + 6x^{-\frac{3}{2}} - 8x^{-5} \Rightarrow y' = x^{-5}\left(27x^7 + 6x^{\frac{7}{2}} - 8\right)$$

**VII. A derivada de um produto. Se $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, onde $u$ e $v$ são funções de $x$, então**

$$\frac{df}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \quad \text{ou} \quad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

**Exemplo:**

Encontre a derivada de $y = (x^2 - 5)(2 - x^3)$

Primeiramente nomeamos quem é $u$ e quem é $v$.

Sejam

$$u = x^2 - 5 \Rightarrow u' = 2x$$
$$v = 2 - x^3 \Rightarrow v' = -3x^2$$

Então

$$y' = 2x\left(2 - x^3\right) - 3x^2\left(x^2 - 5\right) \Rightarrow y' = 4x - 2x^4 - 3x^4 + 15x^2 \Rightarrow$$
$$y' = 4x - 5x^4 + 15x^2 \Rightarrow y' = x\left(-5x^3 + 15x + 4\right)$$

**OBS**: Se $f(x) = u.v.w \Rightarrow f'(x) = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$

A derivada de um quociente. Se $f(x) = \dfrac{u}{v}$, onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ e $v \neq 0$, então $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

**Exemplo:**

Calcule a derivada de $y = \dfrac{x^3 + 5}{x^4 + 1}$.

Primeiro identifiquemos $u$ e $v$ e achemos suas derivadas

$$u = x^3 + 5 \Rightarrow u' = 3x^2$$
$$v = x^4 + 1 \Rightarrow v' = 4x^3$$

Então

$$y' = \frac{3x^2\left(x^4 + 1\right) - 4x^3\left(x^3 + 5\right)}{\left(x^4 + 1\right)^2} \Rightarrow y' = \frac{3x^6 + 3x^2 - 4x^6 - 20x^3}{\left(x^4 + 1\right)^2} \Rightarrow$$
$$y' = \frac{-x^6 - 20x^3 + 3x^2}{\left(x^4 + 1\right)^2} \Rightarrow y' = \frac{x^2\left(-x^4 - 20x + 3\right)}{\left(x^4 + 1\right)^2}$$

# Síntese

Caro(a) estudante

Nesse módulo você aprendeu o que é reta tangente a uma curva em um ponto dado e como calcular o coeficiente angular dessa reta e sua equação.

Aprendeu também o que é reta normal a uma curva e como calcular sua equação.

Conheceu a interpretação geométrica da derivada e compreendeu sua definição.

Aprendeu também a calcular derivadas de funções algébricas através das regras de derivação.

Espero que você tenha se familiarizado com as ideias que lhe foram apresentadas neste texto. Refaça os exemplos do módulo e garanta a sua aprendizagem com a prática destes e de outros exemplos que você poderá encontrar nas referências bibliográficas do módulo.

Após o estudo deste módulo, avalie se você conseguiu entender bem os assuntos aqui abordados. Se não, você deve retornar ao texto e estudar novamente os tópicos que não ficaram claros, ou pedir ajuda ao seu professor.

Saudações e continue seus estudos!

# Referências

### Bibliografia Básica

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica: volume 1**. 3ªed. São Paulo: Harbra, c1994. xii, 685[64] p.: ISBN 8529400941.

STEWART, James. **Cálculo: volume 1**. 5ª ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. 581p. [204]p. ISBN 8522104794.

THOMAS, George Brinton; FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo: volume 1**. 10ª ed. São Paulo: Addison-Wesley, c2001.. xvi, 660[4]p. ISBN 8588639068.

### Bibliografia Complementar:

ANTON, Howard; BIVENS, Irl.; DAVIS, Stephen. **Cálculo: volume 1**. 8ª ed.. Porto Alegre: Bookman, 2007. xx, 581[64]p. ISBN 9788560031634.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração**. 6ª ed. rev. amp. São Paulo: Pearson Prentice Hall, c2007.. ix, 448p. ISBN 857605115X

LARSON, Roland E.; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com aplicações.** 4ªed. Rio de Janeiro: LTC Ed., c1998. xxii, 711p. ISBN 8521611447.

SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com geometria analítica: volume 1**. São Paulo: McGraw-Hill, c1987. xxii, 829p. ISBN 0074504118.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, c1994. xxvi, 744p. ISBN 8534603081.