UNIVERSIDADE FUMEC

Cálculo I

FUNDAMENTOS ALGÉBRICOS

CONCEITOS DE OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS E EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS, NAS SUAS VÁRIAS MODALIDADES

PRODUTOS NOTÁVEIS BÁSICOS

E MAIS...

APRESENTAÇÃO

Caro(a) aluno(a), vamos trabalhar, nesse módulo, com a revisão de alguns fundamentos algébricos que são básicos para que você alcance um bom desempenho no cálculo.

No ensino à distância a sua relação com o conhecimento se dará fundamentalmente através da leitura, e é necessário que você leia com muita atenção os textos apresentados.

E a leitura em matemática exige um caderno de anotações ao qual você possa recorrer sempre que tiver dúvida sobre algum desenvolvimento algébrico ou para anotar conceitos importantes ou dúvidas que lhe tenham ocorrido.

Outra coisa importante é a sua postura na hora de ler. Sua postura deve ser proativa: lembre-se que é você que constrói o seu conhecimento, e, portanto, é você o responsável por ele.

Procure ser sempre um leitor investigativo, procurando acompanhar o raciocínio do autor do texto; sempre perguntando o por quê das coisas, e tentando antecipar as conclusões do autor.

O nosso propósito, nesse módulo, será o de levá-lo a se recordar de algumas questões algébricas dos ensinos fundamental e médio, os chamados "algebrismos", dos quais o aluno tanto apanha!

Então vamos lá? Bons estudos!

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao final deste módulo você deverá ser capaz de:

- Calcular expressões numéricas, sabendo usar corretamente as regras de eliminação de sinais de pontuação; de prioridade de resolução de operações e fazer operações com potências;
- Entender os conceitos de e realizar operações com polinômios e expressões algébricas. Usar o dispositivo prático de Briot-Ruffini;
- Desenvolver os produtos notáveis básicos;
- Fatorar expressões algébricas, nas suas várias modalidades.

FICHA TÉCNICA

UNIVERSIDADE FUMEC

FUMEC VIRTUAL - SETOR DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Gestão Pedagógica
Coordenação
Gabrielle Nunes P. Araújo
Transposição Pedagógica
Flávia Juliana da Silva

Produção de Design Multimídia
Coordenação
Rodrigo Tito M. Valadares
Design Multimídia
Nathan Ackerman Chagas de Souza
Raphael Gonçalves Porto Nascimento

Infra-Estrututura e Suporte
Coordenação
Anderson Peixoto da Silva

AUTORIA DA DISCIPLINA

Prof. Ronaldo Abrão Pimentel e
Profa. Valéria Cunha Figueiredo

BELO HORIZONTE - 2013

FUNDAMENTOS ALGÉBRICOS

Introdução

Antes de iniciamos o nosso estudo é preciso que você entenda algumas questões:

Uma das características da matemática é que ela é uma linguagem. É uma forma de comunicação entre os seres humanos. Você, provavelmente já ouviu falar que a matemática é uma “linguagem universal”, que uma expressão matemática pode ser entendida em qualquer parte do mundo. E isto é verdade!

Na nossa comunicação no dia-a-dia precisamos de uma linguagem para nosso entendimento mútuo. E ela é um código de sons e símbolos que precisam ser combinados para produzir palavras, frases e discursos que façam sentido.

Os símbolos e seus sons são as letras e os sinais gráficos, que devem ser combinados de forma que possam transmitir ideias a serem compreendidas por todos.

Essas combinações são organizadas e a **sintaxe** consiste num conjunto de regras que definem a forma da linguagem, isto é, designam como as sentenças podem ser formadas como sequências de componentes básicos, chamados letras e palavras.

E é essa combinação das letras e palavras, organizadas segundo a sintaxe que darão sentido a esses amontoados de símbolos. É a **semântica** que descreve o significado dessas construções sintáticas válidas.

Na matemática ocorre uma questão similar. Temos os numerais; os sinais operatórios; os expoentes; os parênteses, colchetes e chaves; os sinais de ordenamento ($=$, $>$, $<$,) etc.

Tais sinais devem ser organizados segundo regras da sintaxe para que, agrupados, se tornem sentenças e discursos que poderão ser avaliados, entendidos e aceitos como proposições verdadeiras ou falsas.

Resumindo: para você produzir um texto - oral ou escrito - para se comunicar com um interlocutor, é necessário entender e saber usar as regras para se fazer compreender. Da mesma forma, na matemática, é necessário que você entenda e saiba usar a sintaxe que rege toda a simbologia para chegar a construções que façam sentido. Para você e para os outros.

ATENÇÃO

E preste atenção em uma questão fundamental:

Nenhuma regra é válida por si somente. Todas elas têm uma razão de ser, uma explicação que justifica sua existência! Pergunte sempre: – Por que?.

Expressões numéricas

Você sabe resolver uma expressão numérica como essa apresentada abaixo?

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} - \frac{\left\{-27^{\frac{1}{3}} - \left[\left(\frac{1}{2}-1\right)^{2} + \frac{3}{4}\right] + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left[\frac{5}{2} - \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{-1}{2}} + 1\frac{9}{10}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}}{-2+3^{-1}.\left(\frac{1}{-2}\right)^{-2}+3.3^{-1}} - 3.(-2)^{-3}}$$

Dá até um frio na espinha, não é?

Veja que a expressão é composta de operações e sintaxes que, em geral, o aluno odeia trabalhar. E odeia porque não sabe trabalhar com elas, e não sabe porque não se arrisca, se não se arrisca não aprende! Vamos quebrar esse círculo vicioso?

São elas: frações, expoentes negativos, expoentes fracionários (que em geral caem em raízes), além de operações com números negativos. Sem contar os parênteses, colchetes e chaves e a hierarquia das operações a serem realizadas.

Vamos tomar um exemplo mais simples. Lápis e papel na mão, que nós iremos resolver juntos esse exercício:

$$1-\left\{\frac{\left[\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}+(-3)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{19}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}=$$

Comecemos pelo começo: olhe o exercício e analise o que ele tem de operações e quais delas você domina.

ELIMINAÇÃO DE SINAIS DE PONTUAÇÃO

Olhou? Analisou? A operação “maior” é uma subtração: O número “1” está sendo subtraído por uma série de operações que estão dentro de um par de chaves.

Não há como subtrair do número 1 um valor que ainda não sabemos! Temos, então, que resolver o que está entre as chaves para sabermos o valor que vamos tirar do número 1. Mas dentro das chaves existem ainda colchetes e parênteses. Seguindo um raciocínio análogo ao das chaves chegamos a uma regra simples com relação à ordem de eliminação dos sinais de pontuação:

IMPORTANTE

Devemos eliminar os sinais de pontuação na seguinte ordem:

Parênteses $\rightarrow$ **Colchetes** $\rightarrow$ **Chaves**

Observe a estrutura abaixo e a sequência de eliminação indicada pelas cores:

$$\{\ldots[\ldots(\ldots\ldots.)\ldots]\ldots\}$$

1 - Parênteses:

$$\{\ldots[\ldots(\ldots\ldots.)\ldots]\ldots\}$$

2 - Colchetes:

$$\{\ldots[\ldots\ldots]\ldots\}$$

3 - Chaves:

$$\{\ldots\ldots.\}$$

Observe que essa ordem descreve um trabalho sobre a expressão que acontece **de dentro para fora**!

PRIORIDADE DE OPERAÇÕES

Existe também uma ordem **prioritária** para se resolver as operações:

1º - Potenciações e radiciações;

2º - Multiplicações e divisões;

3º - Somas e subtrações

Algumas regras operacionais também devem ser lembradas!

OPERAÇÕES COM EXPOENTES

Produto de potências de mesma base: conserva-se a base e somam-se os expoentes

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

Divisão de potências de mesma base: conserva-se a base e subtraem-se os expoentes

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Potência de potência: conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes

$$\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$$

Expoente negativo: Inverte-se a base e troca-se o sinal do expoente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Expoente fracionário: Transforma-se em uma raiz da base, onde o denominador do expoente é o índice da raiz e o numerador é o expoente da base.

$$\left(a\right)^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$$

Produto de frações: Multiplicam-se os numeradores entre si e os denominadores entre si.

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

Divisão de frações: Multiplica-se a primeira fração pela inversa da segunda.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.d}$$

Voltemos à expressão:

Dentro das chaves a operação "maior" é uma divisão, cujo dividendo é uma série de operações que estão dentro de um par de colchetes, cujo resultado está elevado a um expoente; e o denominador é uma potenciação.

$$1 - \left\{ \frac{\left[\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} + \left(-3\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} . \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{19}{6}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}} \right\} = \Rightarrow$$

Resolvendo as operações conforme as regras vistas anteriormente, temos que eliminar primeiramente os parênteses.

$$=1-\left\{\frac{\left[(27)^{\frac{1}{3}}+9-(-2)^{3}.\left(\frac{9-4+19}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{4}{9}}}\right\}= \;\Rightarrow$$

$$=1-\left\{\frac{\left[\sqrt[3]{27}+9-(-8)\;.\left(\frac{24}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}}\right\}= \;\Rightarrow$$

Não fique só na leitura! Calcule a expressão na folha que o acompanha! Se cometer erro, volte e tente corrigir!

$$=1-\left\{\frac{\left[\sqrt[3]{3^{3}}+9+8.\;(4)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}}\right\}= \;\Rightarrow\; 1-\left\{\frac{\left[3+9+8.\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}}\right\}= \;\Rightarrow$$

Agora passamos para a eliminação dos colchetes:

$$=1-\left\{\frac{\left[3+9+8.\sqrt{\frac{1}{4}}\right]^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}}\right\}= \;\Rightarrow\; 1-\left\{\frac{\left[3+9+8.\;\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}}\right\}= \;\Rightarrow$$

$$=1-\left\{\frac{[12+4]^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}}\right\}= \;\Rightarrow\; 1-\left\{\frac{[12+4]^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}}\right\}= \;\Rightarrow$$

$$1-\left\{\frac{[16]^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}}\right\}= \;\Rightarrow\; =1-\left\{\frac{\left[\frac{1}{16}\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3}}\right\}= \;\Rightarrow$$

E finalmente para a eliminação das chaves que é uma divisão de frações:

$$1-\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{16}}}{\frac{2}{3}}\right\}= \Rightarrow \quad 1-\left\{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}\right\}= \Rightarrow \quad 1-\left\{\frac{1}{4}:\frac{2}{3}\right\}= \Rightarrow \quad 1-\left\{\frac{1}{4}:\frac{2}{3}\right\}= \Rightarrow$$

$$1-\left\{\frac{1}{4}.\frac{3}{2}\right\}= \Rightarrow \quad 1-\left\{\frac{3}{8}\right\}= \Rightarrow \quad =1-\frac{3}{8}$$

Enfim sabemos que é $1-\frac{3}{8}$ logo, $\frac{8-3}{8}=\frac{5}{8}$, que é a resposta da expressão.

Desafio:
Que tal agora você resolver a seguinte expressão:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}-\frac{\left\{(-27)^{\frac{1}{3}}-\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)^{2}+\frac{3}{4}\right]+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}:\left[\frac{5}{2}-\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}+1\frac{9}{10}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}}{-2+3^{-1}.\left(\frac{1}{-2}\right)^{-2}+3.3^{-1}}-3.(-2)^{-3}}$$

A resposta é zero!

Polinômios e expressões algébricas

Nesta unidade vamos recordar um pouco de polinômios e de operações com eles. É aconselhável que antes recordemos o que é um monômio.

MONÔMIO E TERMO ALGÉBRICO

Monômio ou **termo algébrico** é toda expressão determinada por um produto de números e variáveis. O monômio ou termo algébrico é então composto por duas partes: um número, que é chamado de **coeficiente** e uma ou um produto de letras chamadas **variáveis** que compõem a **parte literal**.

No termo algébrico as variáveis podem ser elevadas a qualquer número real. No monômio essas letras têm que estar elevadas a expoentes inteiros não negativos.

O **grau de um monômio** é obtido através da soma dos expoentes de todas as variáveis. A expressão $-5x^3y^2z$ é um exemplo de monômio cujo coeficiente vale -5 e cuja parte literal é x^3y^2z, formada pelas variáveis x, y e z. O grau deste monômio é 6.

Um monômio pode também ser composto apenas por um número, sem parte literal. Ele será um monômio de grau zero.

Dois ou mais monômios ou termos algébricos são **semelhantes** quando suas partes literais são iguais.

Operações com monômios

Adição/subtração de monômios e/ou termos algébricos: Para adicionarmos monômios semelhantes, adicionamos/subtraímos os coeficientes entre si e mantemos a parte literal.

$$3a^5bc^3 - 7a^5bc^3 = -4a^5bc^3$$

Multiplicação de monômios e/ou termos algébricos: Para multiplicarmos monômios e/ou termos algébricos, multiplicamos entre si os coeficientes, assim como, a parte literal.

$$3x^3y^2z\,.\,2x^2yw^3 = 3.2x^{3+2}y^{2+1}zw^3 = 6x^5y^3yw^3$$

Divisão de monômios e/ou termos algébricos: Para dividirmos monômios e/ou termos algébricos, dividimos entre si os coeficientes, bem como, a parte literal.

$$-5a^7b^2c^3d : 3a^2c^3d^5e^2 = \frac{-5}{3}a^{7-2}b^{2-0}c^{3-3}d^{1-5}e^{0-2} = -\frac{5}{3}a^5b^2d^{-4}e^{-2}$$

Potenciação de monômios e/ou termos algébricos: Elevamos o coeficiente e cada variável da parte literal ao expoente indicado

$$\left(-2x^2y^3z^{-2}w\right)^3 = (-2)^3.\left(x^2\right)^3.\left(y^3\right)^3.\left(z^{-2}\right)^3.(w)^3 = -8x^6y^9z^{-6}w^3$$

Agora podemos então trabalhar com Polinômios propriamente ditos.

POLINÔMIOS E EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

ATENÇÃO

Uma expressão algébrica é definida como uma soma de monômios e/ou termos algébricos.

Podemos definir um polinômio como uma soma de monômios. Cada monômio passa a se chamar **termo do polinômio.**

O grau de um polinômio será o **grau de seu termo de maior grau**. Podemos também considerar o grau de um polinômio relativo a uma certa variável, que será o maior grau dessa variável.

A expressão $P(x,y) = -5x^3y^5 + -2x^4y - 2x^2y^2 + 3xy - 2x + 4y - 9$ é um exemplo de um polinômio com variáveis x e y, e de grau 8. Já o grau desse polinômio relativo à variável y será 5.

A expressão $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ é um polinômio com apenas a variável x, de grau 4.

Se um polinômio possui alguns termos semelhantes, estes termos podem ser somados ou subtraídos, como se soma ou subtrai monômios. Tal processo se chama **redução dos termos semelhantes** do polinômio.

Um polinômio pode ser chamado de **monômio** (mono = 1), quando possui apenas um termo. Pode ser chamado de **binômio** (bi = 2), quando possui apenas dois termos e **trinômio** (tri = 3) quando possui apenas três termos. Quando possui mais de três termos é chamado indistintamente de **polinômio** (poli = muitos).

Operações com polinômios

Agora vejamos como ocorrem as operações com polinômios.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE POLINÔMIOS

Basta reduzirmos seus termos semelhantes:

Sejam $P(a,b)=2a^3b^5+3a^2b-4a+7$ e $Q(a,b)=-4a^3b^5+2a^2b+4a-2b$

$$P(a,b)+Q(a,b)=\left(2a^3b^5+3a^2b-4a+7\right)+\left(-4a^3b^5+2a^2b+4a-2b\right)$$

$$P(a,b)+Q(a,b)=(2-4)a^3b^5+(3+2)a^2b+(-4+4)a-2b+7$$

$$P(a,b)+Q(a,b)=-2a^3b^5+5a^2b+0a-2b+7$$

$$P(a,b)+Q(a,b)=-2a^3b^5+5a^2b-2b+7$$

$$P(a,b)-Q(a,b)=\left(2a^3b^5+3a^2b-4a+7\right)-\left(-4a^3b^5+2a^2b+4a-2b\right)$$

$$P(a,b)-Q(a,b)=(2+4)a^3b^5+(3-2)a^2b+(-4-4)a+2b+7$$

$$P(a,b)-Q(a,b)=6a^3b^5+a^2b-8a+2b+7$$

Essas regras também se aplicam da mesma forma para expressões algébricas.

MULTIPLICAÇÃO DE MONÔMIO POR POLINÔMIO

Multiplicamos o monômio por cada um dos termos do polinômio usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Sejam o monômio $P(a,b)=-2a^4b^3$ e o polinômio $Q(a,b)=-4a^3b^5+2a^2b+4a-2b$.

$$P(a,b)\,.\,Q(a,b)=-2a^4b^3\,.\,\left(-4a^3b^5+2a^2b+4a-2b\right)$$

$$P(a,b)\,.\,Q(a,b)=\left(-2a^4b^3\right).\left(-4a^3b^5\right)+\left(-2a^4b^3\right).\left(2a^2b\right)+\left(-2a^4b^3\right).\,(4a)+\left(-2a^4b^3\right).\,(-2b)$$

$$P(a,b).Q(a,b)=8a^7b^8-4a^6b^4-8a^5b^3+4a^4b^4$$

Essas regras também se aplicam da mesma forma para expressões algébricas.

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIO POR POLINÔMIO

Multiplicamos cada termo do primeiro polinômio por cada termo do segundo polinômio e reduzimos os termos semelhantes, caso existam.

Sejam $P(x)=3x^2-2x+5$ e $Q(x)=2x^4-5x\ +3$

$$P(x)\,.\,Q(x)=\left(3x^2-2x+5\right).\left(2x^4-5x+3\right)$$

$$P(x).\,Q(x)=(3x^2).\,(2x^4)+(3x^2).\,(-5x)+(3x^2).\,(3)+(-2x\ ).\,(2x^4)+(-2x).\,(-5x)+$$
$$+(-2x\ ).(3)+(5).\,(2x^4)+(5).\,(5x)+(5).\,(3)$$

$$P(x)\,.\,Q(x)=6x^6-15x^3+9x^2-4x^5+10x^2-6x+10x^4+25x+15$$

$$P(x)\,.\,Q(x)=6x^6-4x^5+10x^4-15x^3+19x^2+19x+15$$

Essas regras também se aplicam da mesma forma para expressões algébricas.

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

O processo de divisão de polinômios é muito parecido com o método de divisão de números.

$Q(x)=2x^3-5x^2+3x-4$ e $P(x)=x^2-2x+2$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -5x^2 & +3x & -4 & x^2-2x+2 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & -4x & & 2x-1 \\ \cline{1-3}
0 & -x^2 & -x & -4 & \\
 & +x^2 & -2x & +2 & \\ \cline{1-4}
 & 0 & -3x & -2 &
\end{array}$$

Ou seja, $\dfrac{Q(x)}{P(x)}=2x-1$ e sobrou: resto $-3x-2$ ou

$Q(x)=P(x).\,(2x-1)-3x-2$ ou ainda

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=2x-1+\frac{-3x-2}{x^2-2x+2}$$

MATERIAL COMPLEMENTAR

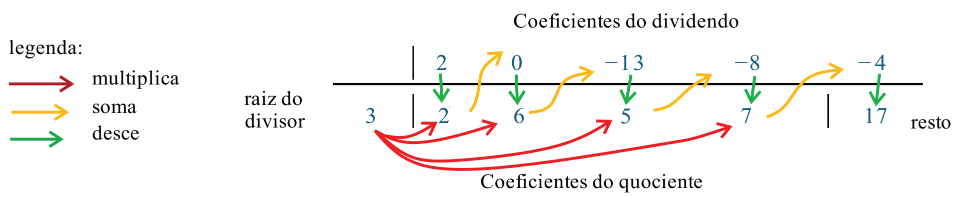
Todas as operações com polinômios são tratadas aqui de forma mais superficial. Para uma abordagem um pouco mais detalhada, sugerimos que você acesse o site Matemática Didática (http://www.matematicadidatica.com.br/Polinomios.aspx)

O DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI

Se dividirmos um polinômio por um binômio da forma $x-a$, podemos usar o dispositivo prático de Briot-Ruffini, que facilita bem os cálculos. Veja:

Vamos dividir $P(x)=2x^4-13x^2+8x-4$ por $Q(x)=x-3$

Primeiramente completamos $P(x)$, acrescentando os termos que faltam, multiplicados pelo coeficiente zero $P(x)=2x^4+0x^3-13x^2-8x-4$ e tomemos a raiz de $Q(x)$, que é 3 e montamos o seguinte algoritmo:



Teremos então que $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 7$ e sobrou resto 17, ou

$$P(x) = \left(2x^3 + 6x^2 + 5x + 7\right).\left(x - 3\right) + 17, \text{ ou}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 7 + \frac{17}{x-3}$$

Vamos agora a mais um desafio?

Que tal dividir $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ por $Q(x) = x + 1$?

Vamos lá! É praticando que você irá compreender tudo que foi explicado acima. Caso não se lembre, retome a leitura com mais cautela e observe os exemplos! Bom trabalho!

Produtos notáveis

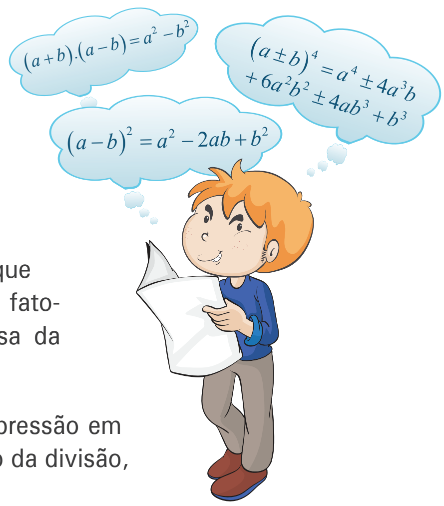
Os produtos notáveis são produtos de polinômios que possuem uma forma geral para sua resolução. Os produtos notáveis merecem uma atenção especial, pois seu uso facilita cálculos, reduz o tempo de resolução e agiliza o aprendizado. Esses produtos são chamados de notáveis por serem dignos de atenção, ou de nota.

Eis alguns:

- Produto da soma pela diferença .... $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$
- Quadrado da soma.......................... $(a+b)^2 = a^2 + 2ab +$
- Quadrado da diferença .... $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Cubo da soma/diferença .... $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- Quádruplo da soma/diferença........... $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^3$

Fatoração

Fatorar um polinômio ou expressão algébrica é decompô-la na forma de um produto de fatores. Podemos ainda afirmar que fatorar é transformar a soma e/ou subtração de várias parcelas em um produto de fatores.



Para escrevermos uma expressão como um produto de fatores, precisamos usar a divisão.

É através da divisão de um número ou de uma expressão que conseguimos decompô-la em um produto de fatores. Portanto, a fatoração sempre trabalha com a divisão, que é a operação inversa da multiplicação.

O que veremos a seguir são alguns modos de decompor uma expressão em um produto de fatores sem, necessariamente usarmos o algoritmo da divisão, mas por caminhos que facilitam essas operações.

Além disso, saber fatorar uma expressão algébrica é muito importante para que você consiga simplificar expressões.

Antes de partir para as fatorações de expressões, vamos recordar o que são M.D.C. e m.m.c. de expressões algébricas.

- **M.D.C.** – Máximo Divisor Comum de expressões algébricas é o produto dos fatores comuns com os menores expoentes.
- **m.m.c.** – mínimo múltiplo comum de expressões algébricas é o produto de fatores comuns e não comuns com os maiores expoentes.

Existem vários métodos para fatorar uma expressão algébrica.
Vejamos alguns deles:

FATOR COMUM

É o método mais elementar de fatoração. Basta colocarmos o M.D.C. dos termos comuns em evidência. Essa operação é a inversa da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Exemplo 1:

$$6x^2y^6 - 15x^3y^5 = 3x^2y^5\left(\frac{6x^2y^6}{3x^2y^5} - \frac{15x^3y^5}{3x^2y^5}\right) = 3x^2y^5\left(2y - 5x\right)$$

Exemplo 2:

$$8a^3b^{-2}c^5 + 6ab^2c^{-3} - 10a^2c^{-2}d^3 = 2ac^{-3}\left(4a^2b^{-2}c^8 + 3b^2 - 5acd^3\right)$$

Exemplo 3:

$$3x^{\frac{5}{2}}y^{-\frac{2}{3}} + 6x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}} = 3x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{2}{3}}\left(x + 2y\right)$$

Exemplo 4:

$$\frac{4}{3}m^3n^{-2} + \frac{8}{15}m^2n^{-1} - \frac{6}{5}m^{-1}n^2 = \frac{2}{15}m^{-1}n^{-2}\left(10m^4 + 4m^3n - 9n^4\right)$$

ATENÇÃO

Caro(a) aluno(a) atenção! No exemplo 4 temos um caso em que os coeficientes dos termos são frações. Uma sugestão é você colocar em evidência uma fração com as seguintes características: O numerador da fração a ser colocada em evidência é o M.D.C. dos numeradores dos coeficientes. E o denominador é o m.m.c dos denominadores dos coeficientes.

$$\left(\frac{MDC}{mmc}\right)$$

Exemplo 5:

$$15x^3\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}+18x^4\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}=3x^3\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\left[5\left(x^2+3\right)+6x\right]=$$

$$3x^3\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\left(5x^2+6x+15\right)$$

Exemplo 6:

$$2x^2\left(x^3-3\right)^{-\frac{1}{3}}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}-x\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x^3-3\right)^{\frac{2}{3}}=$$

$$x\left(x^3-3\right)^{-\frac{1}{3}}\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[2x\left(x^2+1\right)-\left(x^3-3\right)\right]=x\left(x^3-3\right)^{-\frac{1}{3}}\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[2x^3+2x-x^3+3\right]=$$

$$x\left(x^3-3\right)^{-\frac{1}{3}}\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x^3+2x+3\right)$$

O desafio agora é para você: Que tal escrever a expressão abaixo na forma mais fatorada possível? Veja se você consegue chegar à resposta correta!

$$\frac{15}{2}(5x-2)^{\frac{1}{2}}.\left(2x^5+1\right)^{-\frac{1}{3}}-\frac{10}{3}x^4\left(5x-2\right)^{\frac{3}{2}}.\left(2x^5+1\right)^{-\frac{4}{3}}=$$

A resposta é $\frac{5}{6}(5x-2)^{\frac{1}{2}}\left(2x^5+1\right)^{-\frac{4}{3}}\left(-2x^5+8x^4+9\right)$

POR AGRUPAMENTO

No tipo de fatoração por agrupamento temos fatores que são comuns a alguns termos e outros fatores que são comuns a outros termos apesar de não possuirmos um M.D.C. de todos os termos. O que devemos fazer é agrupar os termos de modo que cada grupo tenha um M.D.C. específico. Depois devemos verificar se é possível fazer nova fatoração.

Veja os exemplos:

Exemplo 1:

$$\underbrace{3x^3-6x^2}_{grupo\,1}+\underbrace{5x-10}_{grupo\,2}=\underbrace{3x^2\left(x-2\right)+5\left(x-2\right)}_{\substack{(x-2)\,agora\,é\,M.D.C\,e\,será\\ colocado\,em\,evidência}}=\left(x-2\right)\left(3x^2+5\right)$$

Exemplo 2:

$$6a^2-4ab-9ac+6bc=2a(3a-2b)-3c(3a-2b)=\left(3a-2b\right)(2a-3c)$$

Exemplo 3:

$$2x^5-3x^4y+4x^3y^2-6x^2y^3-6xy^4+9y^5=$$

$$=x^4\left(2x-3y\right)+2x^2y^2\left(2x-3y\right)-3y^4\left(2x-3y\right)=$$

$$=\left(2x-3y\right)\left(x^4+2x^2y^2-3y^4\right)$$

DESFAZENDO OS PRODUTOS NOTÁVEIS

Vimos no item 3 as fórmulas dos produtos notáveis, que nos dão os resultados de alguns produtos de forma mais rápida e eficaz. Pois bem, como a fatoração é a operação inversa da multiplicação, então podemos fatorar os resultados de produtos notáveis através da sua fórmula.

- Diferença de dois quadrados: $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$

Se você olhar o produto da soma pela diferença, verá que o resultado foi uma diferença de dois quadrados. Logo, pela operação inversa, a diferença de dois quadrados dará um produto da soma pela diferença.

Exemplo 1:

$$4x^2 - 9y^2 = \underbrace{\underbrace{4x^2}_{raiz\,quadrada}}_{2x} - \underbrace{\underbrace{9y^2}_{raiz\,quadrada}}_{3y} = (2x+3y)(2x-3y)$$

Exemplo 2:

$$16a^4 - 25b^6 = (4a^2 + 5b^3)(4a^2 - 5b^3)$$

- Trinômio quadrado perfeito: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Os quadrados da soma e da diferença, ao serem desenvolvidos, tiveram como resultado um trinômio que chamamos de “trinômio quadrado perfeito” por ser resultado desses produtos notáveis. Então, pela operação inversa, a fatoração de um trinômio quadrado perfeito é um quadrado da soma (ou da diferença).

Exemplo 1:

$$4a^2 \pm 12ab + 9b^2 = \underbrace{\underbrace{4a^2}_{raiz\,quadrada}}_{2a} \pm \underbrace{\underbrace{12ab}_{2\,vezes\,o\,1^\circ\,pelo\,2^\circ}}_{2.2a.3b} + \underbrace{\underbrace{9b^2}_{raiz\,quadrada}}_{3b} = (2a \pm 3b)^2$$

Exemplo 2:

$$\underbrace{x^2}_{x} - \underbrace{12x}_{2.x.6} + \underbrace{36}_{6} = (x-6)^2$$

Exemplo 3:

$$81 + 36a^2 + 4a^4 = (9)^2 + 2.(9).(2a^2) + (2a^2)^2 = (9 + 2a^2)^2$$

MATERIAL COMPLEMENTAR

Para um maior aprofundamento nas questões que envolvem produtos notáveis e fatoração sugerimos a leitura do material: “**Produtos Notáveis e Fatoração**” que está disponível na biblioteca do módulo.

Continua também nossa sugestão de consulta ao site Matemática Didática. (http://www.matematicadidatica.com.br/Fatoracao.aspx)

Síntese

Caro(a) estudante

Nesse módulo você realizou uma revisão dos principais tópicos sobre "algebrismos" que são necessários para que um estudante de Cálculo tenha um bom desempenho operacional.

Revisou como calcular expressões numéricas, sabendo usar corretamente as regras de eliminação de sinais de pontuação; de prioridade de resolução de operações e fazer operações com potências.

Recordou-se dos conceitos de polinômios e expressões algébricas. Recordou também de como realizar operações com polinômios e expressões algébricas e a usar o dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Revisou o que são os produtos notáveis e recordou-se de como desenvolvê-los.

Tornou-se um *expert* em fatorar expressões algébricas, nas suas várias modalidades.

Espero que você tenha revisado se familiarizado com as ideias que lhe foram apresentadas neste texto. Refaça os exemplos do módulo e garanta a sua aprendizagem com a prática destes e de outros exemplos que você poderá encontrar nas referências bibliográficas do módulo!

Após o estudo deste módulo, avalie se você conseguiu entender bem os assuntos aqui abordados. Se não, você deve retornar ao texto e estudar novamente os tópicos que não ficaram claros.

Saudações e continue seus estudos!

Referências

BOULOS, Paulo, **Pré-Cálculo**. São Paulo:Makron Books, 1999. ISBN 85.346.1041 - X

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração**. 6. ed. rev. amp.. São Paulo: Pearson Prentice Hall, c2007.. ix, 448p. ISBN 857605115X.

IEZZI, Gelson. Et al. **Matemática e Realidade**. 4ª ed. Ed Atual, São Paulo, 2000.

SAFIER, FRED. **Teorias e problemas de pré-cálculo.** Fred Safier; trad. Adonai S. Sant'Anna. – Port Alegre: Bookman, 2003. (Coleção Schaum). ISBN 85-363-0181-3

SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com geometria analítica: volume 1**. São Paulo: McGraw-Hill, c1987.. xxii, 829p. ISBN 0074504118.

THOMAS, George Brinton; FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo: volume 1**. 10. ed.. São Paulo: Addison-Wesley, c2001.. xvi, 660[4]p. ISBN 8588639068.