



UNIVERSIDADE  
FUMEC

# Cálculo I

## LIMITES PARTE 2

**LIMITES "INFINITOS" E SUAS  
EXPRESSÕES ALGÉBRICA E GRÁFICA**

**LIMITES "NO INFINITO" E  
"INFINITOS NO INFINITO"**

**E MUITO MAIS**

## APRESENTAÇÃO

**C**aro(a) aluno(a), vamos iniciar mais um módulo de limites. Analisaremos funções com crescimento infinito ou crescimentos infinitos de variáveis e as consequências disso para as funções.

Para a compreensão sobre as aproximações infinitas, vamos conhecer um dos “Paradoxos de Zenon”. **Zênon** de Eléia foi um filósofo grego que viveu no século V a.C.

Segundo Zenon, se houvesse uma corrida entre o herói mais rápido da antiguidade, Aquiles, e uma tartaruga, e este desse uma distância de vantagem à vagarosa encouraçada, Aquiles jamais a alcançaria.

Absurdo?

Então pensemos juntos! Suponhamos que Aquiles desse uma distância de 64m à tartaruga. Esta, de tão cansada, ao atingir tal distância, parou para descansar.

Então Aquiles começou a correr. Veja que, ao chegar aos 32m, o corredor notou que faltavam 32m para chegar à tartaruga. Quando percorreu a metade dos 32m restantes, percebeu que faltava a metade do que faltava antes para chegar à tartaruga, que estava lá paradinha, morta de cansaço.

Mas então, para seu desespero, Aquiles percebeu que, por mais que corresse, sempre faltaria a metade do que faltava antes para que o herói alcançasse a tartaruguinha.

Conclusão: Quando Aquiles alcançaria a tartaruga? Nunca!!!

Você deve estar intrigado, pensando: “Pô, mas é claro que ele vai alcançar a tartaruga!”, pois isso é que o seu senso-comum lhe diz.

Entretanto, você há de convir que a sua razão lhe diz que isso pode acontecer. É por isso que se chama paradoxo.

São esses modos distintos de pensar que diferenciam o senso-comum, que é regido pelos conhecimentos adquiridos pelos nossos sentidos, do pensamento científico, que é regido pela razão.

É sobre essas questões sofisticadas e intrigantes que tratamos quando trabalhamos com os limites.

Vamos lá?

Bons estudos e boa aprendizagem!



## OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao final deste módulo você será capaz de:

- Conceituar limites “infinitos” e compreender suas expressões algébrica e gráfica;
- Calcular limites “infinitos”;
- Conceituar e calcular limites “no infinito”;
- Conceituar e calcular limites “infinitos no infinito”;
- Resolver indeterminações da forma  $\frac{\infty}{\infty}$

# LIMITES - PARTE 2

## Limites “infinitos”

Vamos analisar agora funções cujos valores aumentam ou diminuem infinitamente quando a variável independente aproxima-se de um determinado valor.

Seja a função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , cujo domínio é  $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ . Vamos ver o que acontece com a imagem dessa função quando os valores de  $x$  aproxima-se cada vez mais de  $x = 0$ .

A tabela a seguir nos fornece os valores de  $f(x)$  para valores de  $x$  cada vez mais próximos de 0.



TABELA 1

| $x < 0$  |                | $x > 0$ |                |
|----------|----------------|---------|----------------|
| -1,0     | 1              | 1       | 1              |
| -0,5     | 4              | 0,5     | 4              |
| -0,1     | 100            | 0,1     | 100            |
| -0,01    | 10.000         | 0,01    | 10.000         |
| -0,001   | 1.000.000      | 0,001   | 1.000.000      |
| -0,0001  | 100.000.000    | 0,0001  | 100.000.000    |
| -0,00001 | 10.000.000.000 | 0,00001 | 10.000.000.000 |

Fonte: Próprio autor

Nossa função é uma fração,  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , cujo numerador é fixo e o denominador aproxima-se cada vez mais de zero.

Veja que quanto mais o  $x$  se aproxima de 0, tanto pela esquerda quanto pela direita, maior se torna o valor da imagem da função ( $f(x)$ ), sem se aproximar de um valor. Em outras palavras, podemos tornar a imagem dessa função tão grande quanto desejarmos, bastando que para isso tomemos valores de  $x$  cada vez mais próximos de 0.

## TOME NOTA

Para indicar que  $f(x)$  cresce indefinidamente quando  $x$  se aproxima de  $0$ , escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

E se lê: O limite de  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  quando  $x$  tende a  $0$  é “mais infinito”

Observe que para fazermos esta afirmação foi preciso fazer duas aproximações, uma com valores de  $x$  menores que  $0$  e outra com valores de  $x$  maiores do que  $0$  (veja a tabela 1). É porque foi preciso encontrar os limites laterais para fazermos essa afirmação.

Temos então que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$ .

É importante você perceber que não existem os limites laterais da função e muito menos o limite da função quando  $x$  tende a  $0$ . O que esses limites nos informam é que a imagem dessa função pode se tornar infinitamente grande quando  $x$  assume valores cada vez mais próximos de  $0$ , uma vez que a imagem não se aproxima de nenhum valor.

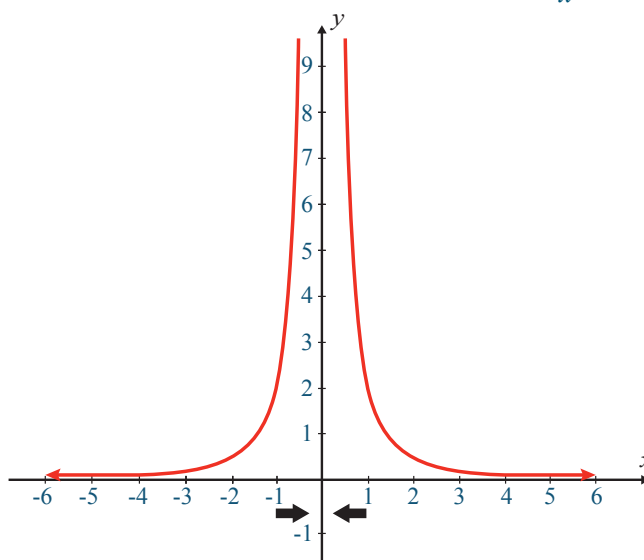
## TOME NOTA

Não podemos dizer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$  porque os limites laterais são iguais, uma vez que estes não existem.

Infinito não é um número, mas, como a própria palavra nos explica, é algo sem fim!

Vamos analisar o gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Veja que a curva está assumindo valores cada vez maiores quando  $x$  vai assumindo valores cada vez mais próximos de zero, tanto pela esquerda quanto pela direita.

GRÁFICO 1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = \frac{1}{x^2}$



Fonte: Próprio autor

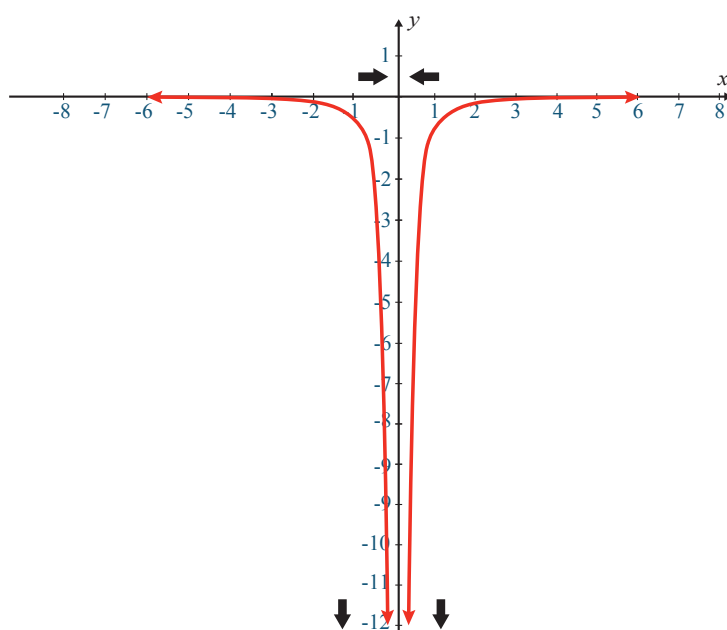
Como  $x$  pode se aproximar de  $0$  quanto queiramos, sem nunca chegar lá, então a curva (em vermelho) vai crescer cada vez mais. Além disso, a curva nunca vai tocar o eixo  $0y$ , apesar de estar se aproximando cada vez mais dela. Tanto pela esquerda quanto pela direita.



A esse fenômeno chamamos de **aproximação assintótica da curva em relação à reta**, e a reta  $x = 0$  (o eixo  $0y$ ) se chama **assíntota vertical do gráfico de  $f$** .

Vamos observar agora a função  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ , cujo gráfico se apresenta a seguir:

GRÁFICO 2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$



Fonte: Próprio autor

Esse é um caso muito parecido com o anterior, mas a imagem da função assume valores cada vez menores (infinitamente pequenos) quando  $x$  se aproxima de  $0$ , tanto pela esquerda quanto pela direita.

Podemos então afirmar que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ .

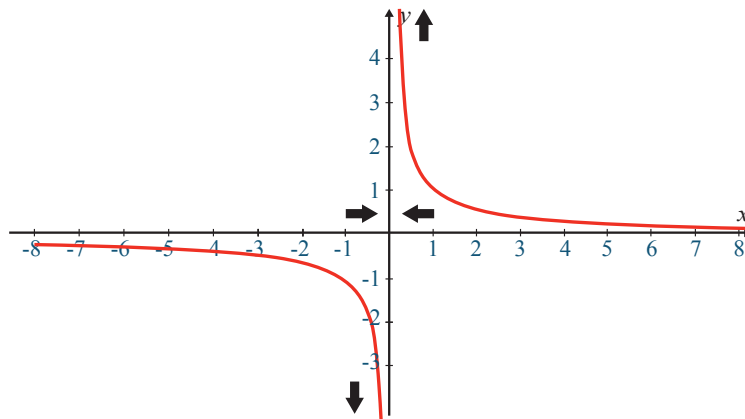
Lê-se: O limite da função, quando  $x$  tende a zero "menos infinito".

Veja que estão ocorrendo aproximações assintóticas da curva em relação à reta, só que agora com valores infinitamente pequenos de  $f$ . E a reta  $x = 0$  (eixo  $0y$ ) é assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

Novamente, é importante frisar que não existe o limite da função quando  $x$  se aproxima de zero, e tampouco os laterais. Infinito não é um número!

Vejamos agora a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , cujo gráfico é:

GRÁFICO 3 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = \frac{1}{x}$



Fonte: Próprio autor

Neste caso, quando  $x$  se aproxima de  $0$  pela esquerda, a imagem da função decresce infinitamente. Então  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x} \right) = -\infty$ .

E ocorre uma aproximação assintótica da curva em relação à reta  $x = 0$ .

E quando  $x$  se aproxima de  $0$  pela direita, a imagem da função cresce infinitamente, ou seja,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right) = +\infty$ . E ocorre outra aproximação assintótica da curva em relação à reta  $x = 0$ .

Afirmamos então que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right) = \pm\infty$ . Mas este limite nos interessa muito pouco. O que importa mesmo são os laterais, como veremos adiante.

Podemos então generalizar o seguinte:

## IMPORTANTE

### GENERALIZAÇÃO 1

Se  $n$  for um inteiro positivo qualquer, então:

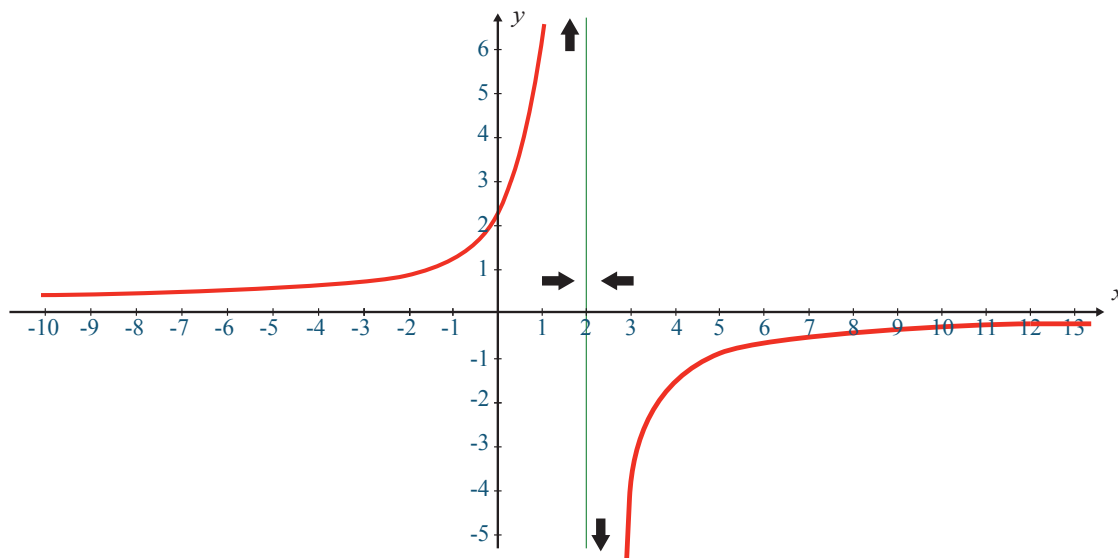
- I.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^n} \right) = +\infty$
- II.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x^n} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ for par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$

Vejamos alguns exemplos:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^8} \right) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^{33}} \right) = +\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x^8} \right) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x^{33}} \right) = -\infty$

Vejam a função  $f(x) = \frac{-5}{x-2}$  e seu gráfico:

GRÁFICO 4 GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = \frac{-5}{x-2}$



Fonte: Próprio autor

Veja que  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{-5}{x-2} \right) = +\infty$ , pois há uma aproximação assintótica em relação à reta  $x = 2$  pela esquerda, para cima.

Note também que  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{-5}{x-2} \right) = -\infty$ , pois há uma aproximação assintótica em relação à reta  $x = 2$  pela direita, para baixo.

Podemos então afirmar que  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{-5}{x-2} \right) = \pm \infty$

## IMPORTANTE

### GENERALIZAÇÃO 2

- I.  $\lim_{x \rightarrow a^+} \left( \frac{K}{f(x)} \right) = \pm \infty$  se  $K \neq 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
- II.  $\lim_{x \rightarrow a^-} \left( \frac{K}{f(x)} \right) = \pm \infty$  se  $K \neq 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Veja no exemplo a seguir como calcular um limite quando não temos o gráfico da função, ou seja, algebricamente:

**Ex. 1)** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x-1} \right) =$

A primeira coisa a se observar é que se pudéssemos aplicar a regra do limite de uma divisão, o denominador daria 0. Então não podemos!

Vamos calcular os limites laterais:

- I.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{2}{x-1} \right)$ . O numerador é constante e o denominador tende a zero. Então, pela

**generalização 2**, esse limite dará ou mais ou menos infinito.

Vamos fazer a análise de sinal da fração: O numerador é constante e é positivo. Vejamos o denominador. Se  $x$  tende a 1 pela esquerda, então  $x < 1$  e  $x - 1$  será sempre menor que zero ( $x - 1 < 0$ ).

Assim, nossa fração terá um numerador positivo e um denominador negativo  $\left( \frac{+}{-} \right)$

sempre que  $x < 1$  e, portanto, a fração será negativa. Então  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{2}{x-1} \right) = -\infty$

- II.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{2}{x-1} \right)$ . A forma de analisar é análoga à anterior. Sabemos que esse limite dará infinito e teremos que saber se dará positivo ou negativo.

O numerador é positivo. Se  $x$  tende a 1 pela direita, então  $x > 1$  e, portanto,  $x - 1$  será positivo, ou seja,  $x - 1 > 0$ . Logo, a fração será positiva pois o numerador e o

denominador serão positivos  $\left( \frac{+}{+} \right)$ , sempre que  $x > 1$ . Portanto,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{2}{x-1} \right) = +\infty$

Podemos então afirmar que  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x-1} \right) = \pm \infty$

**Ex 2)** Calcular  $\lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{-5}{(x+3)^2} \right)$

Como o numerador é uma constante não nula e o denominador tende a zero, então caímos na **generalização 2** e esse limite dá infinito. Precisamos analisar o sinal, através dos limites laterais.

- I.  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left( \frac{-5}{(x+3)^2} \right)$ . O numerador é negativo. Vejamos o denominador.

Como  $x$  é menor que  $-3$  (por ex.  $-3,001$ ), então  $x + 3 < 0$ , mas  $(x + 3)^2 > 0$  e o denominador será positivo. Teremos então que a fração será negativa, pois  $\frac{-}{+} = -$  e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \left( \frac{-5}{(x+3)^2} \right) = -\infty$$

- II.  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \left( \frac{-5}{(x+3)^2} \right)$ . O numerador é negativo e o denominador sempre será positivo,

pois está elevado ao quadrado. Teremos então  $\frac{-}{+}$  e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \left( \frac{-5}{(x+3)^2} \right) = -\infty$$

Podemos afirmar então que  $\lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{-5}{(x+3)^2} \right) = -\infty$ .

## IMPORTANTE

### GENERALIZAÇÃO 3

Se  $a$  for um número real e se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ , onde  $K$  é uma constante não nula, e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , então:

- I. Se  $K > 0$  e se  $g(x) \rightarrow 0$  com valores maiores que zero, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = +\infty$ ;
- II. Se  $K > 0$  e se  $g(x) \rightarrow 0$  com valores menores que zero, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = -\infty$ ;
- III. Se  $K < 0$  e se  $g(x) \rightarrow 0$  com valores maiores que zero, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = -\infty$ ;
- IV. Se  $K < 0$  e se  $g(x) \rightarrow 0$  com valores menores que zero, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = +\infty$ .

Essa generalização também será válida se " $x \rightarrow a$ " for substituído por " $x \rightarrow a^+$ " ou por " $x \rightarrow a^-$ ".

Veja os exemplos para essa generalização.

**Exemplo 1** - Ache  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{x+1}{2-x} \right)$

A generalização 3 é aplicável pois  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x) = 0$ . Sabemos que esse limite dará infinito, resta saber o sinal.

O numerador é positivo. O denominador será positivo, pois 2 menos um número menor que ele dará positivo. Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x) = 0^+$ . Então a fração será positiva e

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{x+1}{2-x} \right) = +\infty.$$

**Exemplo 2** - Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x+1}{2-x} \right)$

Veja que a única mudança que vai ocorrer, em relação ao exemplo 1, é no denominador.

Se  $x \rightarrow 2^+$ , então temos que tirar de 2 um número maior que ele, e o resultado será negativo.

Então  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) = 0^-$ . Então a fração será negativa e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x+1}{2-x} \right) = -\infty$ .

**Exemplo 3** - Calcule  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left( \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \right)$

Veja que a **generalização 3** se aplica, pois  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + 3x + 2) = 20$  e  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 3) = 0$ .

$$\text{Então } \lim_{x \rightarrow 3^-} \left( \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \right) = \infty.$$

Resta-nos saber se será  $-\infty$  ou  $+\infty$ .

O numerador é positivo.



Quanto ao denominador,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [(x-1)(x-3)]$ . Analisemos o sinal de  $(x-1)(x-3)$  quando  $x \rightarrow 3^-$ . Fator  $(x-1)$ : é positivo, pois um número menor que três, mas próximo de três, menos um, dá sinal positivo. Fator  $(x-3)$ : é negativo, pois um número menor que três menos três dá negativo.

Temos então que  $(x-1)(x-3)$  é um produto cujos fatores têm sinais diferentes, logo esse produto é negativo, ou seja,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 3) = 0^-$ .

Voltando à fração inicial do limite temos o numerador e o denominador têm sinais contrários, logo a fração é negativa e  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left( \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \right) = -\infty$ .

**Exemplo 4** - Calcule  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} \right)$

De início caímos em uma indeterminação da forma  $\frac{0}{0}$ . Fatoramos e resolvemos:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{(x-2)}{(x+1)} \right)$$

Neste ponto temos que  $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x-2) = -3$  e  $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0^-$  e a generalização 3 se aplica. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} \right) = +\infty$$

## Limites “no infinito”

Como iremos abordar limites de funções quando a variável independente cresce ou decresce indefinidamente? É o que você irá aprender agora.

Tomemos novamente a função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Vamos atribuir a  $x$  valores cada vez maiores, e que vão crescendo indefinidamente. A tabela a seguir mostra alguns valores de  $x$  e de suas imagens.

TABELA 2

| $x$   | $f(x) = \frac{1}{x^2}$ |
|-------|------------------------|
| 1     | 1                      |
| 2     | 0,25                   |
| 5     | 0,04                   |
| 10    | 0,01                   |
| 100   | 0,0001                 |
| 1000  | 0,000001               |
| 10000 | 0,00000001             |

Fonte: Próprio autor



Veja que, enquanto  $x$  cresce cada vez mais, a imagem da função vai se aproximando cada vez mais de zero, com valores maiores que zero.

É fácil perceber nesse caso que o numerador é constante e o denominador cresce indefinidamente e, portanto, a fração diminuirá cada vez mais o seu valor, aproximando-se de zero.

Dizemos então que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right) = 0^+$ .

Vamos agora atribuir a  $x$  valores que decrescem infinitamente. Vejamos o que acontece com a imagem da função. Veja a tabela 3.

**TABELA 3**

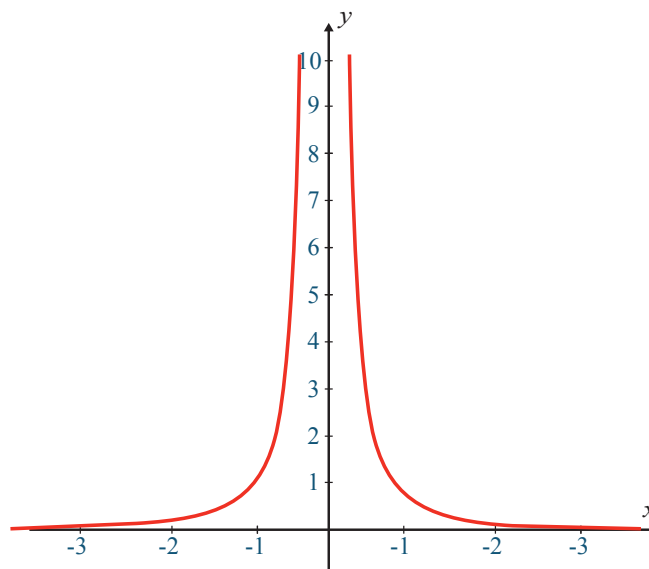
| $x$    | $f(x)$ —   |
|--------|------------|
| -1     | 1          |
| -2     | 0,25       |
| -5     | 0,04       |
| -10    | 0,01       |
| -100   | 0,0001     |
| -1000  | 0,000001   |
| -10000 | 0,00000001 |

Fonte: Próprio autor

Nesse caso podemos dizer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right) = 0^+$ , pela mesma razão do anterior.

Vejamos o gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

**GRÁFICO 5 - GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = \frac{1}{x^2}$**



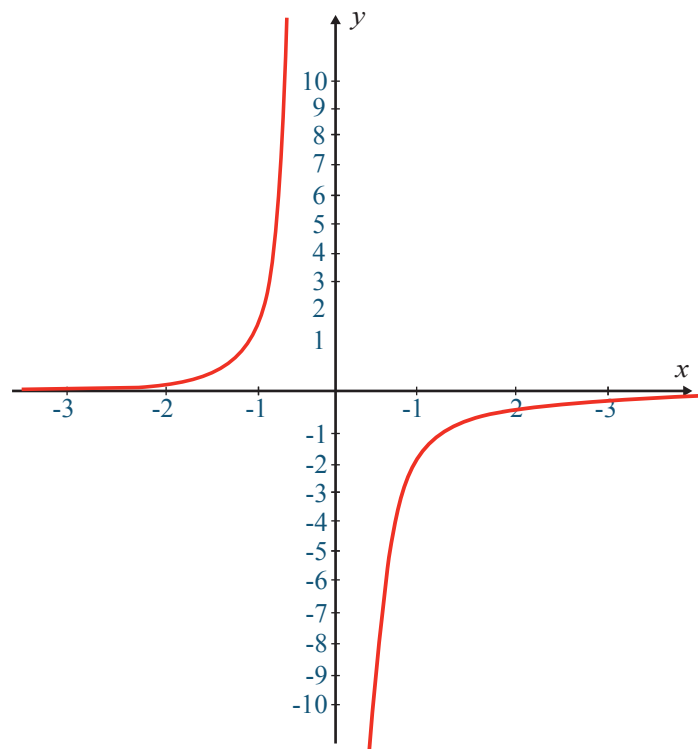
Fonte: Próprio autor

Veja que tanto para crescimentos infinitos de  $x$ , quanto para decrescimentos infinitos de  $x$ , a imagem da função aproxima-se cada vez mais de zero positivamente, acarretando aproximações assintóticas em relação ao eixo  $0x$  (reta  $x = 0$ ), sempre por cima da reta.

Fica então confirmado que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right) = 0^+$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right) = 0^+$ .

Analisemos agora a função  $f(x) = \frac{-2}{x^3}$ , cujo gráfico é:

**GRÁFICO 6 - GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = \frac{-2}{x^3}$**



Fonte: Próprio autor

Podemos perceber que quando  $x$  decresce indefinidamente a curva vai se aproximando cada vez mais do eixo  $0x$ , mas sempre acima do eixo. Isto nos permite afirmar que as imagens de  $f$  vão se aproximando cada vez mais de zero, com valores positivos de  $f$ .

Isto significa que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-2}{x^3} \right) = 0^+$ .

Se olharmos agora para o outro lado, veremos que quanto mais o  $x$  cresce, mais a curva se aproxima do eixo  $0x$ , mas sempre por baixo. ( $x \rightarrow +\infty$ , então  $f \rightarrow 0^-$ ).

Isto significa que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-2}{x^3} \right) = 0^-$ .

Podemos generalizar que:

## IMPORTANTE

### GENERALIZAÇÃO 4

Se  $n$  for um inteiro positivo, então,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{K}{x^n} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{K}{x^n} \right) = 0$$

Para sabermos se será  $0^+$  ou  $0^-$  dependerá do sinal de  $K$  e se  $n$  for par ou ímpar, no caso de  $x$  tender a  $-\infty$ .



## Limites “infinitos no infinito”

O que quer dizer a expressão  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4)$  ?

**Quer dizer:** Para onde vai a imagem da função  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$  quando  $x$  assume valores cada vez maiores?

Intuitivamente podemos perceber que, quando  $x$  cresce muito, o primeiro termo de  $f$ , que está elevado à terceira potência crescerá muito mais rapidamente que os outros. Podemos então afirmar que esse termo é que definirá a tendência de variação das imagens de toda a função, quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Isso nos leva a afirmar que o limite de  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$  quando  $x \rightarrow +\infty$  é equivalente ao limite de  $f(x) = x^3$  quando  $x \rightarrow +\infty$ . Ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)$$

Tal equivalência é verdadeira e pode ser provada. Como?

Tomemos a função  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ . Vamos colocar em evidência o termo  $x^3$ . Veja que só não poderíamos colocar em evidência o termo  $x^3$  se ele fosse zero, mas como  $x \rightarrow +\infty$ , então ele está longe de zero!

Teremos então:

$$f(x) = x^3 \left( \frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{4}{x^3} \right) \quad \text{ou} \quad f(x) = x^3 \left( 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right)$$

$$\text{Então} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = \left[ x^3 \left( 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) \right]$$

Mas limite de um produto é o produto dos limites.

$$\text{Logo} \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right)$$

Mas limite de uma soma é a soma dos limites, então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{x^2} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{x^3} \right) \right]$$

e, pela generalização 4 temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 0 + 0 - 0 \right), \text{ ou seja,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3). \text{ Como queríamos provar!}$$

Todo esse raciocínio se aplica também para  $x \rightarrow -\infty$

## IMPORTANTE

### GENERALIZAÇÃO 5

Para calcularmos o limite de uma função polinomial, com  $x \rightarrow \pm \infty$ , basta tomarmos o limite do termo de maior grau do polinômio, com  $x \rightarrow \pm \infty$ .



$$\text{Ex)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4) = -\infty$$

## INDETERMINAÇÃO DA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

Como podemos calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-5}{2x+7} \right)$ ?

Primeiramente devemos aplicar a propriedade que diz: o limite de uma divisão é a divisão de limites (se o denominador não se anular). Então:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-5}{2x+7} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x-5)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+7)}$$

Veja que se calculássemos esse limite chegaríamos a uma indeterminação da forma  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Para levantarmos essa indeterminação devemos usar a generalização 5. Veja:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-5}{2x+7} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x)}$$

Mas como o limite de uma divisão é a divisão de limites, então a divisão de limites é o limite da divisão. Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-5}{2x+7} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x}{2x} \right). \text{ Cancelando o } x, \text{ temos:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-5}{2x+7} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{2} \right)$$



Mas limite de uma constante é a constante. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-5}{2x+7} \right) = \frac{3}{2}$$

Observe que o numerador da resposta é igual ao coeficiente do termo de maior grau do numerador da função, que é 3. E também que o denominador da resposta (2) é igual ao coeficiente do termo de maior grau do denominador da função.

E isto não é coincidência. Se você observar o desenvolvimento da resolução exercício anterior verá que só sobraram o 3 e o 2.

Aliás, isto pode ser considerada uma generalização:

## IMPORTANTE

### GENERALIZAÇÃO 6

Sejam os limites:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)$

Se  $f(x)$  e  $g(x)$  são funções polinomiais de mesmo grau, então o valor do limite será uma fração cujo numerador é o coeficiente do termo de maior grau de  $f(x)$ . E o denominador será o coeficiente do termo de maior grau de  $g(x)$ .

Vamos ver alguns exemplos.

**Exemplo 1** -  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-5x^3 + 2x^2 - 2x + 5}{-2x^3 + 2x - 7} \right) = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

**Exemplo 2** -  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^{99} - 5x^{45} + 3}{-x^{99} + 7x^{21} + x^{17}} \right) = \frac{2}{-1} = -2$

E se o grau do numerador for diferente do grau do denominador?

Teremos dois casos:

Se o grau do numerador for menor que o grau do denominador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - 3x + 5}{x^5 - 5x^2 - 3} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 5)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 5x^2 - 3)} = \\ \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{x^5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

Veja que em todas as vezes que o grau do numerador for menor que o grau do denominador, ao aplicarmos a generalização 5, a fração final terá algum  $x$  no denominador. Ou seja, ao

final resultará um limite da forma  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{K}{x^n} \right)$  cuja resposta é zero (generalização 4).



Então podemos generalizar que:

## IMPORTANTE

### GENERALIZAÇÃO 7

Sejam os limites  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)$ , onde o grau de  $f(x)$  é menor que o grau de  $g(x)$ .

$$\text{Então } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$$

Se o grau do numerador for maior que o grau do denominador:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^5 - 5x^2 - 3}{x^2 - 3x + 5} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 5x^2 - 3)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 5)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^5}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

Veja que em todas as vezes que o grau do numerador for maior que o grau do denominador, ao aplicarmos a generalização 5, a fração final terá algum  $x$  no numerador. Ou seja,

ao final resultará um limite da forma  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^n}{K} \right)$  cuja resposta é  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

## IMPORTANTE

### GENERALIZAÇÃO 8

Sejam os limites  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)$ , onde o grau de  $f(x)$  é maior que o grau de  $g(x)$ . Então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = -\infty$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3 - 2x^2 - 4x^4}{5x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-4x^4}{5x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-4x^3}{5} \right) = +\infty$$

# Síntese

---

Caro(a) estudante

Nesse módulo você deu mais um passo para compreender as noções de limite e de aproximações infinitas.

Você aprendeu a conceituar limites “infinitos” e compreender suas expressões algébrica e gráfica. Aprendeu também a calcular esses limites “infinitos”.

Já sabe conceituar e calcular limites “no infinito”.

Aprendeu a conceituar e calcular limites “infinitos no infinito”, além de levantar e resolver indeterminações da forma  $\frac{\infty}{\infty}$

Espero que você tenha se familiarizado com as ideias que lhe foram apresentadas neste texto. Refaça os exemplos do módulo e garanta a sua aprendizagem com a prática destes e de outros exemplos que você poderá encontrar nas referências bibliográficas do módulo.

Após o estudo deste módulo, avalie se você conseguiu entender bem os assuntos aqui abordados. Se não, você deve retornar ao texto e estudar novamente os tópicos que não ficaram claros, ou pedir ajuda ao seu professor.

Saudações e continue seus estudos!

# Referências

---

## Bibliografia Básica

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica: volume 1**. 3. ed.. São Paulo: Harbra, c1994.. xii, 685[64] p.: ISBN 8529400941.

STEWART, James. **Cálculo: volume 1**. 5. ed.. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.. 581p., [204]p. ISBN 8522104794.

THOMAS, George Brinton; FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo: volume 1**. 10. ed.. São Paulo: Addison-Wesley, c2001.. xvi, 660[4]p. ISBN 8588639068.

## Bibliografia Complementar:

ANTON, Howard; BIVENS, Irl.; DAVIS, Stephen. **Cálculo: volume 1**. 8. ed.. Porto Alegre: Bookman, 2007.. xx, 581[64]p. ISBN 9788560031634.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração**. 6. ed. rev. amp.. São Paulo: Pearson Prentice Hall, c2007.. ix, 448p. ISBN 857605115X

LARSON, Roland E.; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com aplicações**. 4.ed.. Rio de Janeiro: LTC Ed., c1998.. xxii, 711p. ISBN 8521611447.

SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com geometria analítica: volume 1**. São Paulo: McGraw-Hill, c1987.. xxii, 829p. ISBN 0074504118.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, c1994.. xxvi, 744p. ISBN 8534603081.