UNIVERSIDADE FUMEC

Cálculo I

MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO

O CONCEITO DE MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

AS PROPRIEDADES DO VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

E MAIS...

APRESENTAÇÃO

Caros alunos, vamos estudar mais um assunto relacionado com os números reais. Trata-se do **módulo ou valor absoluto de um número real**.

Esperamos que o estudo aqui desenvolvido se torne bastante claro para você, desfazendo a ideia que muitas pessoas têm de que este é um assunto de difícil compreensão.

O conteúdo se desenvolverá com as seguintes etapas:

- Noção intuitiva do conceito de módulo ou valor absoluto de um número real
- Definição de módulo ou valor absoluto de um número real
- Propriedades
- Resolução de equações e de inequações (desigualdades) envolvendo módulo

A partir de agora, padronizaremos a representação gráfica de pontos extremos de intervalos incluídos/excluídos por bolinhas cheias (pretas) e/ou vazias (brancas) respectivamente.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao final do seu estudo, você deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de módulo ou valor absoluto de um número real
- Compreender as propriedades do valor absoluto de um número real
- Resolver equações e inequações envolvendo o módulo, aplicando corretamente suas respectivas propriedades.

FICHA TÉCNICA

UNIVERSIDADE FUMEC

FUMEC VIRTUAL - SETOR DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Gestão Pedagógica
Coordenação
Gabrielle Nunes P. Araújo
Transposição Pedagógica
Flávia Juliana da Silva
Joelma Andréa de Oliveira

Produção de Design Multimídia
Coordenação
Rodrigo Tito M. Valadares
Design Multimídia
Dennis Henrique Dias Peçanha
Raphael Gonçalves Porto Nascimento

Infra-Estrututura e Suporte
Coordenação
Anderson Peixoto da Silva

AUTORIA DA DISCIPLINA
Prof. Ronaldo Abrão Pimentel e
Profa. Valéria Cunha Figueiredo

BELO HORIZONTE - 2013

MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO

Noção Intuitiva do Módulo ou Valor Absoluto de um Número Real

Considere um número real a qualquer localizado na reta real.

SAIBA MAIS

Dizemos que o **valor absoluto ou módulo de $\underline{a}$** é o **valor da distância** do número a até a origem, isto é, até o número zero.

Devemos nos lembrar da cinemática e da geometria euclidiana, que nos ensinam que distância é uma **grandeza escalar positiva**.

ATENÇÃO

Portanto, o **valor absoluto ou módulo de a** é sempre uma **grandeza positiva.**

NOTAÇÃO

Indica-se valor absoluto ou módulo de a com o símbolo $|a|$ (a entre barras verticais)

Observe os dois exemplos ilustrados na figura 1 abaixo:

1º) Se tivermos $a = 3$, sua distância até o zero é igual a 3 unidades, logo, módulo de 3 é igual a 3 e escrevemos $|3| = 3$.

2º) Se tivermos $a = -2$, sua distância até o zero é igual a 2 unidades, logo, módulo de – 2 é igual a 2 e escrevemos $|-2| = 2$.

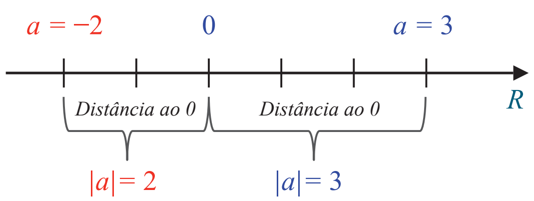

Fig. 1 : Interpretação geométrica de $|3|$ e de $|-2|$

3º) E ainda, se tivermos $a = 0$, sua distância até o zero é igual a 0, logo, módulo de 0 é igual a 0 e escrevemos $|0| = 0$.

IMPORTANTE

Conclusões:

1. Estes 3 exemplos simples nos permitem escrever que:
   - Se a for igual a **zero ou um número positivo**, seu **módulo** corresponde ao **seu próprio valor**.
   - Se a for um **número negativo**, seu **módulo** corresponde ao **seu valor**, **mas com sinal invertido,** isto é, seu valor multiplicado por – 1.
2. Módulo ou valor absoluto de a**,** que é igual à distância de a até o **zero,** pode ser expresso pelo teorema de Pitágoras em uma dimensão como sendo a raiz positiva de a^2:

$$\sqrt{(a-0)^2} = \sqrt{(0-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$$

Definição de Módulo ou Valor Absoluto

as duas conclusões acima, que levam em conta o sinal de um número real, nos permitirão enunciar a definição formal de valor absoluto ou módulo de um número real x.

Agora leia atentamente as sentenças abaixo e observe que cada uma delas descreve a afirmativa de mesma cor apresentada na conclusão nº1.

Se necessário, volte também ao 1º, 2º e 3º exemplos acima.

$$|x| = x,\ se\ x \geq 0$$

$$|x| = -x,\ se\ x < 0$$

Dizemos que a definição de módulo ou valor absoluto de um número real x é dada por:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Duas propriedades básicas

Essas propriedades decorrem diretamente da definição acima e da interpretação geométrica descrita no tópico ***Noção intuitiva de módulo ou valor absoluto de um número real*** e são importantes devido ao seu uso frequente na resolução das equações e inequações neste estudo.

1º) Se $a \in R$ e $a > 0$, então,

$$\boxed{|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a}$$

Vamos ler a propriedade por etapas e interpreta-la usando a associação do $|x|$ com a ideia da distância de x até 0.

Se $a \in R$ **e** $a > 0 \rightarrow$ ***Se*** a ***é um número real positivo***,

então,

$|x| < a \rightarrow$ ***módulo de*** x ***será menor que*** a,

se e somente se

$-a < x < a \rightarrow$ ***os valores de*** x ***se situarem no intervalo aberto*** $(-a, a)$.

Isso significa que a **distância de** x **até** 0 deve ser:

- **Menor que** a distância de a até o zero, ou seja, **menor que** $|a| = a$

  ou,

- **Menor que** a distância de $-a$ até o zero, ou seja, **menor que** $|-a| = a$.

Logo, x pode ser qualquer número entre a e $-a$, lembrando que $a > 0$.

Observe o intervalo aberto mostrado em destaque na figura 2.

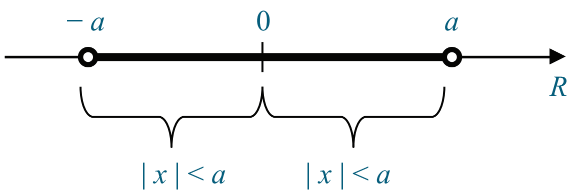

Fig. 2 : Interpretação geométrica para $|x| < a$.

Exemplo:

Se $|x| < 3$, então, x pode ser qualquer número do intervalo aberto $(-3, +3)$.

Podemos ter $x = 1$, $x = 1{,}8$, $x = -1{,}5$ ou $x = -2{,}5$, etc... Todos esses são números situados a uma distância D de zero, **inferior a** 3.

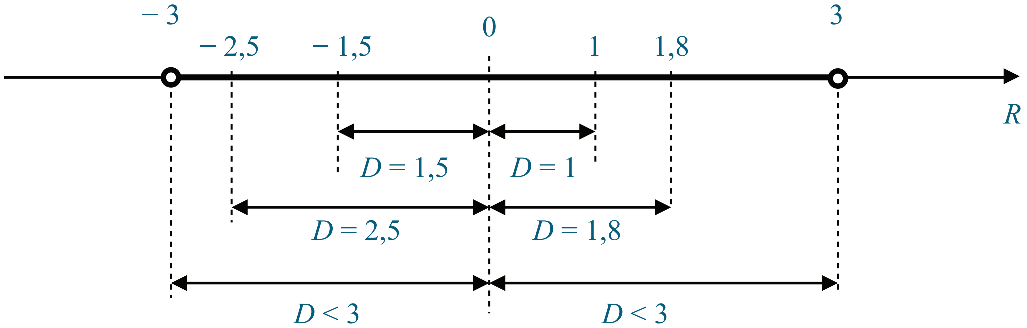

Fig. 3 : Interpretação geométrica de $|x| < 3$

2º) Se $a \in R$ e $a > 0$ então,

$$\boxed{|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a}$$

Vamos prosseguir trabalhando com a ideia da distância de x até 0.

Se $a \in R$ e $a > 0$ $\rightarrow$ **Se a for um número real positivo,**

então,

$|x| > a$ $\rightarrow$ *módulo de x será maior que a,*

se e somente se

$x > a$ ou $x < -a$ *os valores de x se situarem no intervalo* $(a, +\infty)$, *ou no intervalo* $(-\infty, -a)$.

Isso significa que a **distância de x até 0** deve ser:

- **Maior que** a distância de a até o zero, ou seja, **maior que** $|a| = a$

  ou,

- **Maior que** a distância de $-a$ até o zero, ou seja, **maior que** $|-a| = a$.

Consequentemente, vemos que x pode ser qualquer número à direita de a ou qualquer número à esquerda de $-a$, com $a > 0$.

Observe os intervalos infinitos em destaque na figura 4 abaixo.

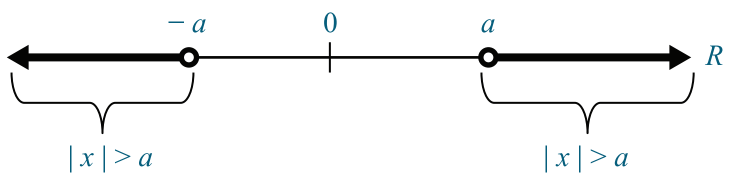

Fig. 4 : Interpretação geométrica para $|x| > a$

Exemplo:

Se $|x| > 4$, então podemos ter $x = 6$, $x = 14$ ou $x = -8$, $x = -16$, etc.

Cada um desses números está situado a uma distância D de zero **superior a 4**

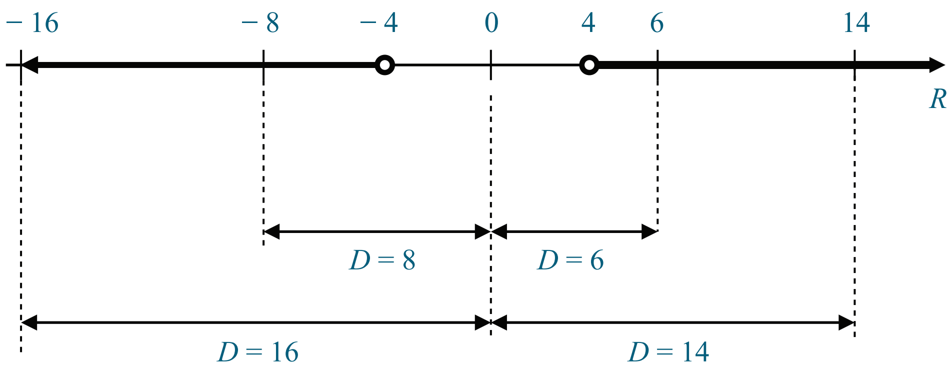

Fig. 5 : Interpretação geométrica de $|x| > 4$

OBSERVAÇÃO: As duas propriedades que acabamos de estudar, também podem ser enunciadas incluindo os pontos extremos dos intervalos propostos, isto é, incluindo $x = a$ e $x = -a$.

Assim teremos:

Se $a \in R$ e $a > 0$ então,

1. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
2. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$

Outras propriedades relativas aos módulos de dois números reais:

3º) Se $a, b \in R$ então,

$$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|}$$

A equação acima significa que o módulo do produto de dois números é igual ao produto de seus módulos.

Exemplo:

Se $a = 6$ e $b = -4$, então:

$$|6.(-4)| = |6||-4| = (6)(4) = 24$$

4º) Se $a, b \in R$ e $b \neq 0$, então,

$$\boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}}$$

A equação acima significa que o módulo do quociente de dois números é igual ao quociente de seus módulos.

Exemplo:

Se $a = 16$ e $b = -8$, então:

$$\left|\frac{16}{-8}\right| = \frac{|16|}{|-8|} = \frac{16}{8} = 2$$

5º) Se $a, b \in R$, então,

$$\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|}$$

A desigualdade acima envolve dois casos distintos, que exemplificaremos abaixo:

1º caso: Se a e b são números reais que possuem mesmo sinal

Exemplos:

a. Se $a = 6$ e $b = 2$, temos que $|6+2| = |6| + |2| = 8$

b. Se $a = -5$ e $b = -4$, temos que $|-5-4| = |-5| + |-4| = 9$

2º caso: Se a e b são números reais que possuem sinais opostos

Exemplo:

c. Se $a = 3$ e $b = -2$, temos que $|3-2| < |3| + |-2|$, uma vez que $1 < 5$.

Observando os exemplos acima vemos que:

- Se a e b possuem mesmo sinal, teremos a igualdade $|a+b| = |a| + |b|$, isto é, o módulo da soma de a e b é igual à soma de seus respectivos módulos.
- Se a e b possuem sinais opostos, observa-se a desigualdade $|a+b| < |a| + |b|$, isto é, o módulo da soma de a e b é menor que a soma de seus respectivos módulos.

Logo,

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

significa que o módulo da soma de dois números reais pode ser menor ou igual à soma de seus módulos.

Resolvendo equações envolvendo o Valor Absoluto

Caro(a) aluno(a), vamos estudar alguns exemplos, nos quais resolveremos equações e inequações envolvendo o módulo ou valor absoluto de expressões algébricas.

Para isso, você vai aplicar a definição do módulo e suas propriedades principais, que sintetizaremos na tabela a seguir:

TABELA 1

Definição	$\lvert x\rvert = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$
1ª Propriedade **Se** $a \in R$ **e** $a > 0$	$\lvert x\rvert \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
2ª Propriedade **Se** $a \in R$ **e** $a > 0$	$\lvert x\rvert \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$

E lembre-se, tenha postura ativa!

Acompanhe nossos exemplos fazendo suas próprias anotações e cálculos!

Vamos começar? Bom trabalho!

Exemplo 1:

Determine os valores de x que satisfazem à equação $|x+2|=5$

Esta equação nos fala que o módulo de $x + 2$ é igual a 5.

ATENÇÃO

Você pode ter concluído precipitadamente que $x + 2 = 5$ e, portanto, a solução é $x = 3$!!

Mas você deve ficar atento!

A equação $|x+2|=5$ não nos permite escrever simplesmente que $x + 2 = 5$, pois as barras que simbolizam o valor absoluto devem ser eliminadas **corretamente, levando em conta todas as possibilidades do problema.**

Vamos aplicar a **definição do valor absoluto ou módulo de um número real**:

Por enquanto $x + 2$ é um número real desconhecido e como tal, pode ser igual a zero, positivo ou negativo.

Teremos então as duas possibilidades que a definição acima proporciona:

- Se $x+2\geq 0$, então, $|x+2|=x+2$ ou
- Se $x+2<0$, então, $|x+2|=-(x+2)=-x-2$

Ilustramos essas duas possibilidades na figura 6.

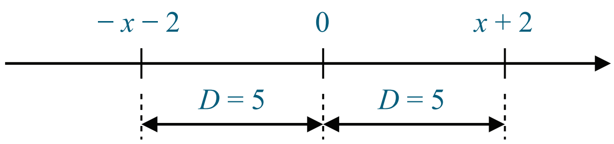

Fig. 6 : Equação $|x + 2| = 5$ e sua interpretação geométrica

Voltando à nossa equação modular e às duas possibilidades acima:

$$|x+2|=5$$

Teremos, separadamente, duas soluções:

- $x + 2 = 5$, de onde obtemos $x = 3$.
- $-x-2 = 5$, de onde obtemos $x = -7$.

O conjunto solução do problema é $\{x \in R \,|\, x = 3 \text{ ou } x = -7\}$

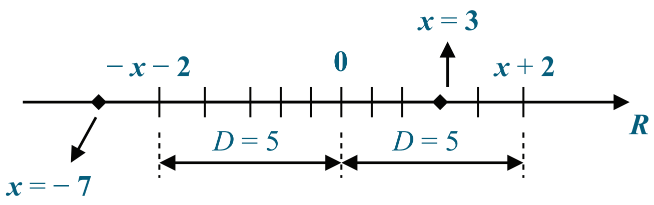

Fig. 7 : Equação $|x + 2| = 5$ e seu conjunto solução

IMPORTANTE

Você deve compreender claramente que o conjunto solução acima fornece **os valores de** x, $x = 3$ **ou** $x = -7$, **necessários para que os números reais** $x + 2$ **ou** $-x-2$ **se situem à distância de** 5 **unidades do zero.**

Vamos verificar?

Para $x = 3$, temos $|\quad +2| = |3+2| = |5| = 5$ e,

para $x = -7$, temos $|x+2| = |-7+2| = |-5| = 5$

Observe a figura 7 com atenção!

Exemplo 2

Resolva a equação modular $|5x - 3| = 8$

Inicialmente, vamos ler a equação dada:

O valor absoluto (ou módulo) de $5x - 3$ ***é igual a*** 8.

Isso nos conduz à pergunta:

Qual ou quais são os valores de x ***possíveis para essa condição?***

Vamos agora desdobrar essa equação modular, usando novamente a **definição do valor absoluto** e obtendo equações algébricas de simples resolução.

a. Se $5x - 3 \geq 0$, escrevemos $|5x-3| = 5x - 3$

Substituindo na equação dada $|5x - 3| = 8$, teremos:

$5x - 3 = 8$ e obtemos a primeira solução do problema: $x = \dfrac{11}{5}$

b. Se $5x - 3 < 0$, escrevemos $|5x-3| = -(5x-3) = 3 - 5x$

Substituindo novamente na equação original, teremos:

$3 - 5x = 8$, que nos leva à segunda solução: $x = -1$

O conjunto solução do problema é $\left\{x \in R \,|\, x = \dfrac{11}{5} \text{ ou } x = -1\right\}$

SAIBA MAIS

Se você já compreendeu bem a definição do valor absoluto de um número real e a sua aplicação nos exemplos acima, torna-se útil para você a opção de resolução do problema, através da **formulação equivalente** abaixo:

Se $|5x-3|=8$, isso **também significa** que a expressão **entre as barras** de módulo pode ser igual a $+8$ ou -8.

Logo escrevemos:

$5x-3=8$ ou $5x-3=-8$, cujas soluções são $x=\dfrac{11}{5}$ ou $x=-1$ respectivamente.

Exemplo 3

Determine os valores de x que satisfazem a equação

$$|3x+2|=5-x$$

Vamos ler a equação dada:

O valor absoluto (ou módulo) de $3x+2$ é igual a $5-x$.

Isso nos conduz à pergunta:

Qual ou quais são os valores de x que resolvem esta esta equação?

Utilizando agora o procedimento alternativo e equivalente descrito no destaque acima, escreveremos:

Se $|3x+2|=5-x$, então, a **expressão entre as barras** de módulo, isto é, $3x+2$ pode ser:

- igual a $5-x$

  ou

- igual a $-(5-x)=x-5$

Cada uma dessas possibilidades nos leva a uma solução para o problema através de uma equação algébrica simples.

1ª opção: $3x+2=5-x$, de onde obtemos $x=\dfrac{3}{4}$

ou

2ª opção: $3x+2=x-5$, de onde obtemos $x=-\dfrac{7}{2}$

O conjunto solução da equação modular é $\left\{x\in R \mid x=\dfrac{3}{4} \text{ ou } x=-\dfrac{7}{2}\right\}$

Exemplo 4:

Resolva a equação $|3x-4|=|2-x|$

A leitura da equação: o módulo de $3x-4$ é igual ao módulo de $2-x$.

Perguntamos então:

Qual ou quais são os valores de x que atendem a essa condição?

Caro(a) aluno(a), temos aqui uma **situação nova**, pois essa equação propõe **a igualdade dos módulos de duas expressões algébricas**.

Vamos resolver juntos este exemplo, analisando cuidadosamente, **todas as opções possíveis para os termos entre as barras de valor absoluto.** São elas:

TABELA 2

1ª	$3x-4\geq 0$	$2-x\geq 0$
2ª	$3x-4<0$	$2-x<0$
3ª	$3x-4\geq 0$	$2-x<0$
4ª	$3x-4<0$	$2-x\geq 0$

O estudo correto dos quatro casos nos levará a um procedimento mais sintético de resolução a ser adotado.

Aplicando a definição formal do valor absoluto (tabela 1) aos 2 membros da equação, teremos:

1ª opção:

Se ambos forem maiores ou iguais a zero:

Nesse caso, $|3x-4|=3x-4$ e $|2-x|=2-x$

Substituindo na equação dada, escrevemos:

$$3x-4=2-x$$

E obtemos $x=\dfrac{3}{2}$

2ª opção:

Se ambos forem menores que zero:

Nesse caso, $|3x-4|=4-3x$ e $|2-x|=x-2$

ATENÇÃO

Você observou que multiplicamos cada termo entre barras por -1?

Você sabe o motivo?

Caso você não consiga responder a essa pergunta, volte à 2ª condição na tabela 2 e à definição do valor absoluto na tabela 1.

Substituindo na equação dada, escrevemos novamente:

$$4-3x=x-2 \quad \text{ou} \quad 3x-4=2-x$$

E obtemos $x=\dfrac{3}{2}$

IMPORTANTE

Observe que **tanto na 1ª quanto na 2ª opção**, resolvemos a **mesma equação** algébrica.

Isso aconteceu porque as duas opções acima se referem, na realidade, a uma **ÚNICA CONDIÇÃO** estudada:

A condição de que ambos os termos, $3x-4$ e $2-x$, possuem o mesmo sinal.

E ainda, o conjunto solução obtido para esta condição foi $\left\{x \in R \mid x = \frac{3}{2}\right\}$

3ª opção:

Se $3x-4 \geq 0$ e $2-x<0$:

Neste caso, pela definição temos: $|3x-4| = 3x-4$ e $|2-x| = x-2$.

A equação torna-se $3x-4 = x-2$, cuja solução é $x=1$.

4ª opção:

Se $3x-4<0$ e $2-x \geq 0$:

Neste caso, $|3x-4| = 4-3x$ e $|2-x| = 2-x$.

A equação algébrica $3x-4 = x-2$ novamente nos leva a $x=1$.

IMPORTANTE

Observe agora que, na **3ª e 4ª opções** também resolvemos **a mesma equação** algébrica.

Novamente, isso ocorreu porque as duas opções acima também correspondem, na realidade, a uma **ÚNICA CONDIÇÃO** estudada:

A condição de que ambos os termos, $3x-4$ e $2-x$, possuem sinais opostos.

Neste segundo caso, o conjunto solução do problema é $\{x \in R \mid x = 1\}$

O conjunto solução (global) da equação modular será a união dos conjuntos soluções obtidos $\left\{x \in R \mid x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = 1\right\}$, pois observamos que apenas uma das condições (termos com mesmo sinal ou com sinais opostos) pode ocorrer de cada vez.

CONCLUSÃO

A solução do problema proposto neste exemplo envolve o estudo de apenas duas condições ou casos distintos:

1º caso: Os dois termos possuem o **mesmo sinal**

2º caso: Os dois termos possuem **sinais opostos**

Exemplo 5:

Determine os valores de x, tais que $|10-3x|=|7x+8|$

Leitura e interpretação:

Devemos calcular x, de forma que o valor absoluto de $10-3x$ seja igual ao valor absoluto de $7x-8$.

Utilizando a conclusão do exemplo anterior, vimos que teremos dois casos, que serão estudados separadamente.

1º caso: Os dois termos possuem o mesmo sinal

Se ambos forem, **simultaneamente** positivos ou negativos, podemos escrever :

$$10-3x=7x+8$$

Obtemos $-10x=-2$ e, portanto, $x=\frac{1}{5}$.

2º caso: Os dois termos possuem sinais opostos

Se $10-3x\geq 0$ e $7x+8<0$ ou vice versa, podemos escrever:

$10-3x=-(7x+8)$, ou seja, $10-3x=-7x-8$.

Resolvendo esta equação, obtemos $x=-\frac{9}{2}$.

O conjunto solução do problema é:

$$\left\{x\in R \mid x=\frac{1}{5} \text{ ou } x=-\frac{9}{2}\right\}$$

Exemplo 6:

Resolva a equação $\left|\frac{2x-5}{x+1}\right|=3$

Esta equação nos diz que o valor absoluto de $\frac{2x-5}{x+1}$ é igual a 3.

Vamos obter os valores de x que satisfazem essa condição.

E ainda, devemos ter $x+1\neq 0$, ou seja, $x\neq -1$.

Se $\left|\frac{2x-5}{x+1}\right|=3$, então, $\frac{2x-5}{x+1}$ pode ser igual a $+3$ ou -3.

Usando o procedimento empregado no exemplo nº 3, discutiremos esses dois casos.

1º caso:

$$\frac{2x-5}{x+1}=3$$

Escrevemos $2x-5=3(x+1)$ e obtemos $x=-8$.

2º caso:

$$\frac{2x-5}{x+1}=-3$$

Resolvendo a equação acima, obtemos $2x-5=-3(x+1)$, ou seja, $x=\frac{4}{5}$.

A solução do problema proposto será $\left\{x \in R \mid x=-8 \text{ ou } x=\frac{4}{5}\right\}$.

Resolvendo desigualdades envolvendo o valor absoluto

Caro(a) aluno(a), para resolvermos as **desigualdades** que envolvem o valor absoluto, as **duas propriedades básicas** do módulo de um número real, apresentadas na tabela 1serão utilizadas.

A aplicação dessas propriedades transformará uma desigualdade modular em uma desigualdade de números reais, conforme estudamos no módulo anterior.

Logo, sempre que necessário, retorne à **tabela 1** do módulo anterior – **Números Reais** – onde sintetizamos as seis propriedades das desigualdades entre números reais e aos exemplos de resolução de desigualdades.

Vamos começar?

Exemplo 7:

Determine o conjunto dos valores de x tais que $|4x-3| \leq 9$

Inicialmente, esta inequação informa que o módulo ou valor absoluto de $4x-3$ deve ser menor ou igual a 9.

Quais são os valores de x que realizam esta condição?

Voltando à tabela 1, aplicamos a 1ª propriedade básica e escrevemos:

$$|4x-3| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq 4x-3 \leq 9$$

Resolvendo agora a dupla desigualdade, adicionaremos $+3$ a todos os termos e, em seguida, multiplicaremos tudo por $\frac{1}{4}$.

Obtemos então que $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$.

Logo, o **módulo de $4x-3$ será menor ou igual a 9, se e somente se, os valores de x se situarem no intervalo fechado** $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$:

$$|4x-3| \leq 9 \Leftrightarrow \left\{x \in R \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq 3.\right\}$$

Dica!

Uma atividade para você conferir o resultado deste exemplo:

Experimente substituir o valor de x por qualquer número dentro do intervalo obtido e verifique que você vai obter $|4x-3|$ no máximo, igual a 9.

Exemplo 8:

Determine o conjunto solução da inequação $|1-3x|>10$.

Neste exemplo, queremos obter todos os valores de x para os quais o módulo de $1-3x$ seja maior que 10.

A proposta deste exemplo nos remete à 2ª propriedade básica (na tabela 1).

Podemos escrever que:

$$|1-3x|>10 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x>10 \\ \text{ou} \\ 1-3x<-10 \end{cases}$$

Resolveremos cada uma das desigualdades separadamente, e o conjunto solução final será a união das duas soluções.

Tomando a 1ª desigualdade: $1-3x>10$, vamos adicionar -1 aos dois termos, multiplicar tudo por $-\frac{1}{3}$ e **inverter** a desigualdade, obtendo $x<-3$.

Tomando agora a 2ª desigualdade $1-3x<-10$ e executando as mesmas operações, chegamos ao intervalo $x>\frac{11}{3}$.

Logo, o módulo de $1-3x$ será >10, se e somente se tivermos:

$$x<-3 \text{ ou } x>\frac{11}{3}.$$

Ou seja:

$$|1-3x|>10 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3)\cup\left(\frac{11}{3},+\infty\right)$$

Exemplo 9:

Resolva a desigualdade

$$\left|\frac{4-x}{x-2}\right|<3 \text{ com } x\neq 2$$

A interpretação do exercício é:

Determine os valores de x de forma que o módulo de $\frac{4-x}{x-2}$ seja menor que 3.

Esta inequação nos leva a utilizarmos a 1ª propriedade básica (tabela 1) e para a qual escrevemos a dupla desigualdade:

$$-3 < \frac{4-x}{x-2} < 3$$

Para resolvermos a desigualdade acima, vamos multiplicar todos os termos por $\boldsymbol{x-2}$.

Lembre-se de que **isso não elimina a restrição** $x \neq 2$.

ATENÇÃO

E ainda, da mesma forma como estudamos no módulo anterior (Números Reais) $x-2$ **pode ser um número real positivo ou negativo e cada um desses casos deve ser estudado separadamente**, para obtermos a solução final e global do problema.

1º caso: $x-2>0 \Rightarrow x>2$

$$-3 < \frac{4-x}{x-2} < 3$$

Multiplicando todos os termos por $x-2$ e lembrando que nesse caso a desigualdade não sofrerá alteração, teremos:

$$-3(x-2) < 4-x < 3(x-2)$$

Obtemos

$$-3x+6 < 4-x < 3x-6$$

Desta forma, as 3 condições abaixo devem ser atendidas simultaneamente:

$$\begin{cases} x>2 \\ -3x+6<4-x \\ 4-x<3x-6 \end{cases}$$

Resolveremos as 2 últimas inequações.

Fazendo as operações necessárias, resolvemos $-3x+6<4-x$ e obtemos:

$$x>1 .$$

Resolvendo agora $4-x<3x-6$, chegamos ao intervalo:

$$x > \frac{5}{2}$$

Temos agora as 3 condições simultâneas, às quais os valores de x devem obedecer, neste 1º caso, representadas na figura 8 abaixo:

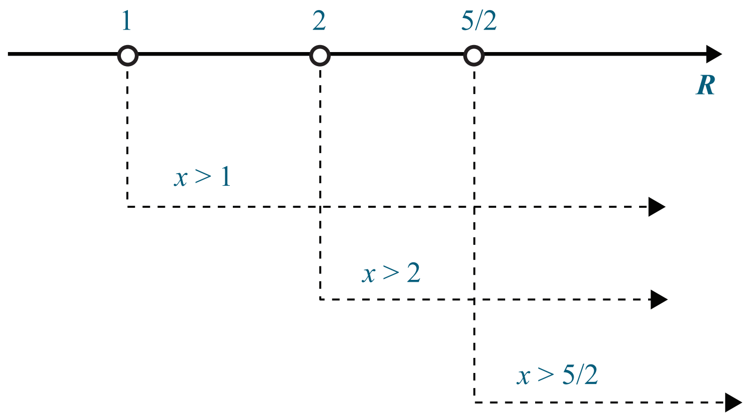

Fig. 8 : Interseção de $x > 1$, $x > 2$ e $x > 5/2$.

A solução final para este 1º caso será o intervalo dos valores de x, tais que:

$$\left\{x \in R \middle| x > \frac{5}{2}\right\}.$$

2º caso: $x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$

$$-3 < \frac{4-x}{x-2} < 3$$

Multiplicando todos os termos por $x-2$ e lembrando que nesse caso a desigualdade sofrerá **inversão de sentido**, pois agora $x-2<0$, teremos:

$$-3(x-2) > 4 - x > 3(x-2)$$

Obtemos

$$-3x + 6 > 4 - x > 3x - 6$$

Desta forma, as novas 3 condições abaixo devem ser atendidas simultaneamente:

$$\begin{cases} x < 2 \\ -3x + 6 > 4 - x \\ 4 - x > 3x - 6 \end{cases}$$

Vamos resolver novamente as 2 últimas inequações.

A desigualdade $-3x+6>4-x$ possui como solução o intervalo $x<1$ e resolvendo agora a 3ª desigualdade, $4-x>3x-6$, chegamos ao intervalo: $x<\frac{5}{2}$

Neste 2º caso, os valores de x devem satisfazer agora à interseção dos intervalos $x<2$**,** $x<1$ **e** $x<\frac{5}{2}$.

Conforme ilustrado na figura 9 abaixo, a solução final para o 2º caso será:

$$\{x \in R \mid x < 1\}.$$

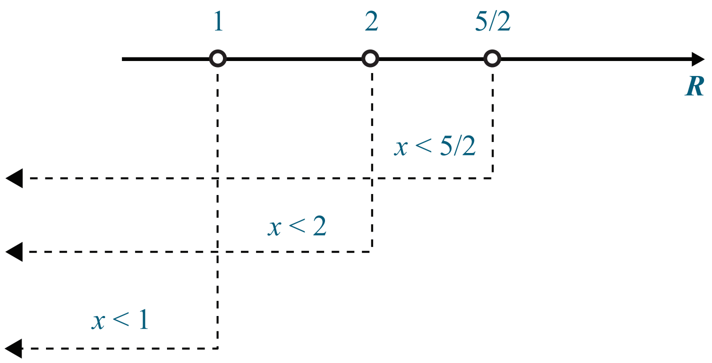

Fig. 9 : Interseção de $x < 1$, $x < 2$ e $x < 5/2$

Solução Final

A solução final do problema será a união dos dois intervalos obtidos, isto é:

$$S : x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

SAIBA MAIS: Um processo alternativo de solução

Vamos retomar o exemplo que acabamos de resolver:

$$\left|\frac{4-x}{x-2}\right| < 3 \ com \ x \neq 2$$

A propriedade **nº 4** do módulo de um quociente de números reais nos informa que:

4ª Propriedade: Se $a, b \in R$ e $b \neq 0$, então,

$$\boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}}$$

Logo, podemos escrever que:

$$\left|\frac{4-x}{x-2}\right| = \frac{|4-x|}{|x-2|}$$, com $x \neq 2$

E, portanto:

$$\frac{|4-x|}{|x-2|} < 3$$, com $x \neq 2$

Multiplicando ambos os termos da desigualdade por $|x-2|$, obtemos:

$$|4-x| < 3|x-2|$$

Observe que como $|x-2|>0$, este produto que acabamos de efetuar não alterou a desigualdade.

A 6ª propriedade das desigualdades, que estudamos no módulo anterior, **Números Reais,** proporciona um método alternativo para você resolver este problema.

Esta propriedade fala sobre o produto de desigualdades:

Se $0 \le \boldsymbol{a} < b$ e $0 \le \boldsymbol{c} < d$, então, $\boldsymbol{ac} < bd$

Aplicando essa propriedade à inequação abaixo:

$$|4-x| < 3|x-2|$$

Chamaremos

$$a = c = |4-x| \quad \text{e} \quad b = d = 3|x-2|$$

Neste caso, $ac < bd$ torna-se:

$$\left(|4-x|\right)^2 < \left(3|x-2|\right)^2$$

E obtemos:

$$16 - 8x + x^2 < 9\left(x^2 - 4x + 4\right)$$

Ou seja, devemos ter:

$$-2x^2 + 7x - 5 < 0$$

Conforme estudamos no 1º módulo, vamos buscar as raízes do polinômio, para fazermos sua fatoração.

As raízes de $-2x^2 + 7x - 5 = 0$ são $x_1 = 1$ e $x_2 = \dfrac{5}{2}$.

O estudo de sinal abaixo, nos fornecerá o conjunto solução do problema.

Devemos ter

$$-2x^2 + 7x - 5 < 0 \Rightarrow (1-x)(2x-5) < 0$$

ESTUDO DO SINAL

Sinal de		1		5/2		R
$1-x$	$+$		$-$		$-$	
$2x-5$	$-$		$-$		$+$	
$(1-x)(2x-5)$	$-$		$+$		$-$	

A solução da inequação $\left|\,\right|$ com $x \neq 2$ é o conjunto dos valores de x tais que $-2x^2 + 7x - 5 < 0$, ou seja:

$$x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

Síntese

Caro(a) estudante, inicialmente, vimos o **conceito de módulo ou valor absoluto** de um número real, sua **interpretação geométrica** e a **definição analítica**.

Estudamos as **cinco propriedades** do módulo de um número real, com especial ênfase nas duas primeiras, tendo em vista a grande utilidade de ambas.

Resolvemos **equações e inequações que envolvem o valor absoluto** e vimos que, no caso das **inequações**, o processo de **resolução utiliza** também as **propriedades e estratégias** das **desigualdades de números reais** que estudamos no módulo anterior.

Avalie se você conseguiu assimilar bem os pontos principais do conteúdo deste módulo, caso contrário, é importante que você retorne ao texto, para rever os tópicos que não ficaram claros.

Referências

Bibliografia Básica

FLEMMING, Diva Marília.; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração**. 6. ed. rev. amp.. São Paulo: Pearson Prentice Hall, c2007.. ix, 448p. ISBN 857605115X.

SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com geometria analítica: volume 1**. São Paulo: McGraw-Hill, c1987.. xxii, 829p. ISBN 0074504118.

THOMAS, George Brinton; FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo: volume 1**. 10. ed.. São Paulo: Addison-Wesley, c2001.. xvi, 660[4]p. ISBN 8588639068.

Bibliografia Complementar:

ANTON, Howard; BIVENS, Irl.; DAVIS, Stephen. **Cálculo: volume 1**. 8. ed.. Porto Alegre: Bookman, 2007.. xx, 581[64]p. ISBN 9788560031634.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica: volume 1**. 3. ed.. São Paulo: Harbra, c1994.. xii, 685[64] p.: ISBN 8529400941.

LARSON, Roland E.; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com aplicações.** 4.ed.. Rio de Janeiro: LTC Ed., c1998.. xxii, 711p. ISBN 8521611447.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, c1994.. xxvi, 744p. ISBN 8534603081.

STEWART, James. **Cálculo: volume 1**. 5. ed.. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.. 581p., [204]p. ISBN 8522104794.