



UNIVERSIDADE
FUMEC

Cálculo I

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

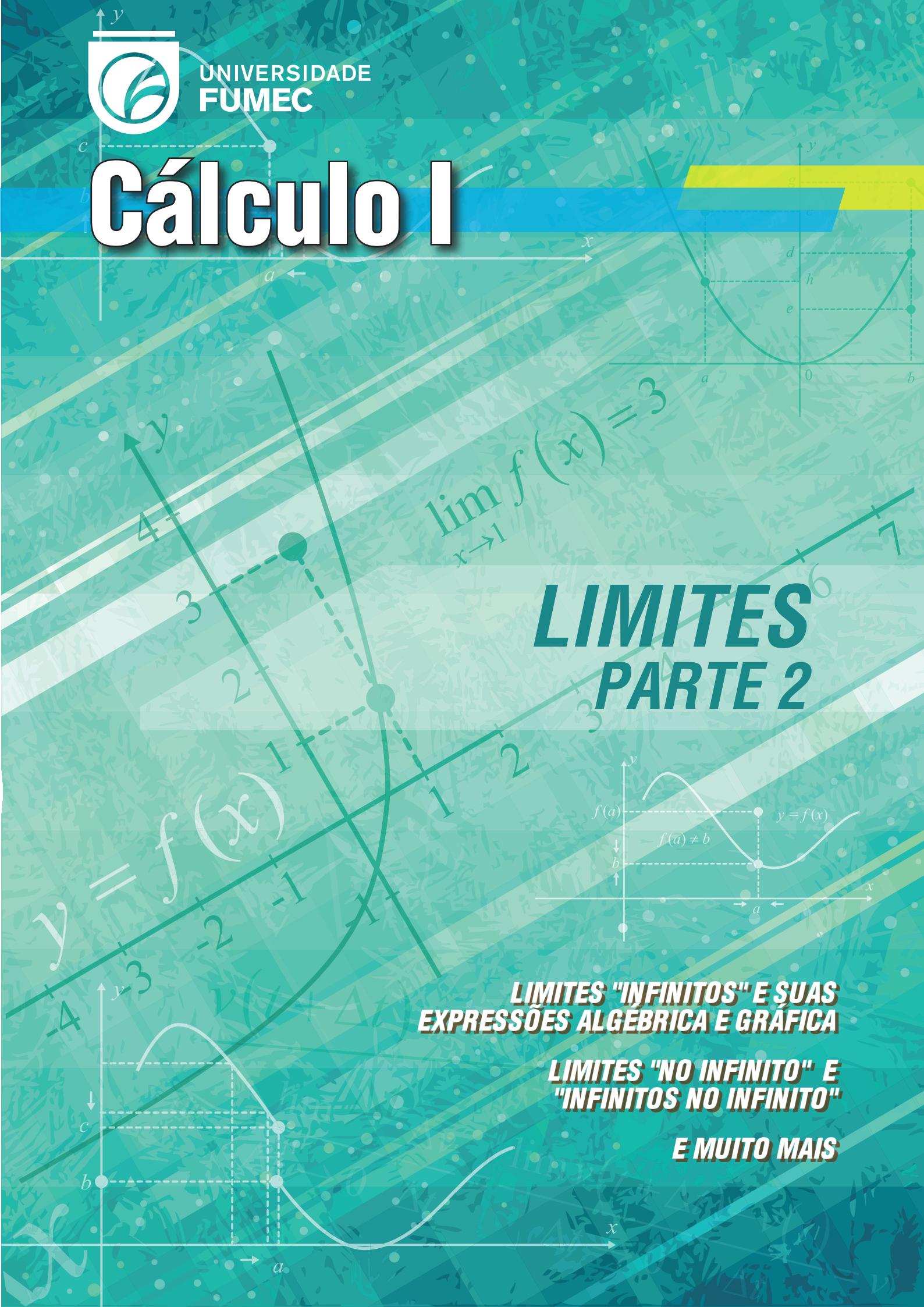
LIMITES PARTE 2



**LIMITES "INFINITOS" E SUAS
EXPRESSÕES ALGÉBRICA E GRÁFICA**

**LIMITES "NO INFINITO" E
"INFINITOS NO INFINITO"**

E MUITO MAIS



APRESENTAÇÃO

Caro(a) aluno(a), vamos iniciar mais um módulo de limites. Analisaremos funções com crescimento infinito ou crescimentos infinitos de variáveis e as consequências disso para as funções.

Para a compreensão sobre as aproximações infinitas, vamos conhecer um dos “Paradoxos de Zenon”. Zênón de Eléia foi um filósofo grego que viveu no século V a.C.

Segundo Zenon, se houvesse uma corrida entre o herói mais rápido da antiguidade, Aquiles, e uma tartaruga, e este desse uma distância de vantagem à vagarosa encouraçada, Aquiles jamais a alcançaria.

Absurdo?

Então pensemos juntos! Suponhamos que Aquiles desse uma distância de 64m à tartaruga. Esta, de tão cansada, ao atingir tal distância, parou para descansar.

Então Aquiles começou a correr. Veja que, ao chegar aos 32m, o corredor notou que faltavam 32m para chegar à tartaruga. Quando percorreu a metade dos 32m restantes, percebeu que faltava a metade do que faltava antes para chegar à tartaruga, que estava lá paradinha, morta de cansaço.

Mas então, para seu desespero, Aquiles percebeu que, por mais que corresse, sempre faltaria à metade do que faltava antes para que o herói alcançasse a tartaruguinha.

Conclusão: Quando Aquiles alcançaria a tartaruga? Nunca!!!

Você deve estar intrigado, pensando: “Pô, mas é claro que ele vai alcançar a tartaruga!”, pois isso é que o seu senso-comum lhe diz.

Entretanto, você há de convir que a sua razão lhe diz que isso pode acontecer. É por isso que se chama paradoxo.

São esses modos distintos de pensar que diferenciam o senso-comum, que é regido pelos conhecimentos adquiridos pelos nossos sentidos, do pensamento científico, que é regido pela razão.

É sobre essas questões sofisticadas e intrigantes que tratamos quando trabalhamos com os limites.

Vamos lá?

Bons estudos e boa aprendizagem!



OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao final deste módulo você será capaz de:

- Conceituar limites “infinitos” e compreender suas expressões algébrica e gráfica;
- Calcular limites “infinitos”;
- Conceituar e calcular limites “no infinito”;
- Conceituar e calcular limites “infinitos no infinito”;
- Resolver indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$

LIMITES - PARTE 2

Limites “infinitos”

Vamos analisar agora funções cujos valores aumentam ou diminuem infinitamente quando a variável independente aproxima-se de um determinado valor.

Seja a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, cujo domínio é $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Vamos ver o que acontece com a imagem dessa função quando os valores de x aproxima-se cada vez mais de $x = 0$.

A tabela a seguir nos fornece os valores de $f(x)$ para valores de x cada vez mais próximos de 0.



TABELA 1

$x < 0$		$x > 0$	
-1,0	1	1	1
-0,5	4	0,5	4
-0,1	100	0,1	100
-0,01	10.000	0,01	10.000
-0,001	1.000.000	0,001	1.000.000
-0,0001	100.000.000	0,0001	100.000.000
-0,00001	10.000.000.000	0,00001	10.000.000.000

Fonte: Próprio autor

Nossa função é uma fração, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, cujo numerador é fixo e o denominador aproxima-se cada vez mais de zero.

Veja que quanto mais o x se aproxima de 0, tanto pela esquerda quanto pela direita, maior se torna o valor da imagem da função ($f(x)$), sem se aproximar de um valor. Em outras palavras, podemos tornar a imagem dessa função tão grande quanto desejarmos, bastando que para isso tomemos valores de x cada vez mais próximos de 0.



TOME NOTA

Para indicar que $f(x)$ cresce indefinidamente quando x se aproxima de 0, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

E se lê: O limite de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ quando x tende a 0 é “mais infinito”



Observe que para fazermos esta afirmação foi preciso fazer duas aproximações, uma com valores de x menores que 0 e outra com valores de x maiores do que 0 (veja a tabela 1). É porque foi preciso encontrar os limites laterais para fazermos essa afirmação.

Temos então que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty$.

É importante você perceber que não existem os limites laterais da função e muito menos o limite da função quando x tende a 0. O que esses limites nos informam é que a imagem dessa função pode se tornar infinitamente grande quando x assume valores cada vez mais próximos de 0, uma vez que a imagem não se aproxima de nenhum valor.

TOME NOTA

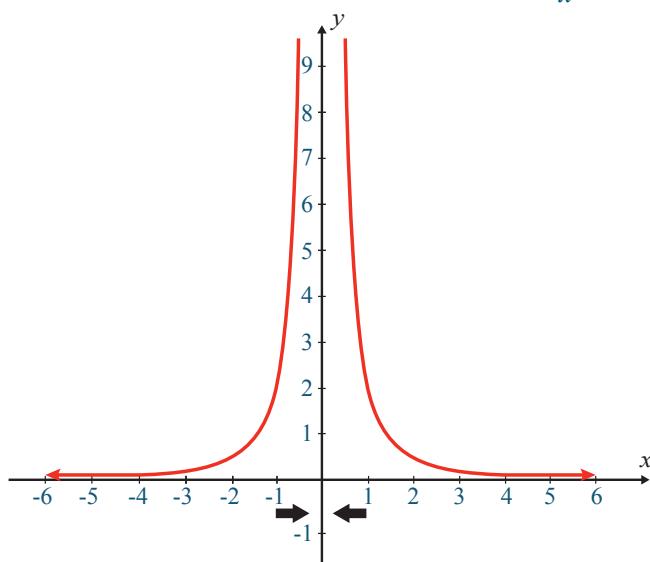
Não podemos dizer que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty$ porque os limites laterais são iguais, uma vez que estes não existem.



Infinito não é um número, mas, como a própria palavra nos explica, é algo sem fim!

Vamos analisar o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Veja que a curva está assumindo valores cada vez maiores quando x vai assumindo valores cada vez mais próximos de zero, tanto pela esquerda quanto pela direita.

GRÁFICO 1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = \frac{1}{x^2}$



Fonte: Próprio autor



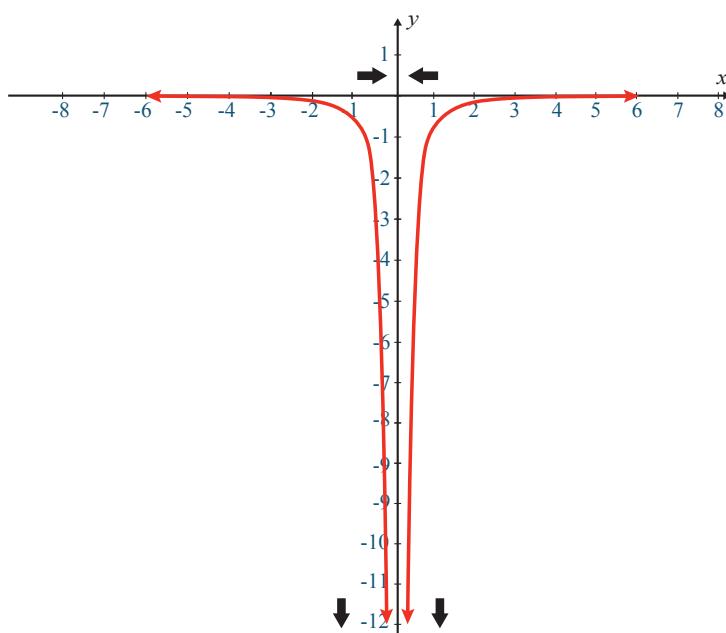
Como x pode se aproximar de 0 quanto queiramos, sem nunca chegar lá, então a curva (em vermelho) vai crescer cada vez mais. Além disso, a curva nunca vai tocar o eixo $0y$, apesar de estar se aproximando cada vez mais dela. Tanto pela esquerda quanto pela direita.



A esse fenômeno chamamos de **aproximação assintótica da curva em relação à reta**, e a reta $x = 0$ (o eixo $0y$) se chama **assíntota vertical do gráfico de f** .

Vamos observar agora a função $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, cujo gráfico se apresenta a seguir:

GRÁFICO 2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = -\frac{1}{x^2}$



Fonte: Próprio autor

Esse é um caso muito parecido com o anterior, mas a imagem da função assume valores cada vez menores (infinitamente pequenos) quando x se aproxima de 0, tanto pela esquerda quanto pela direita.

Podemos então afirmar que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$.

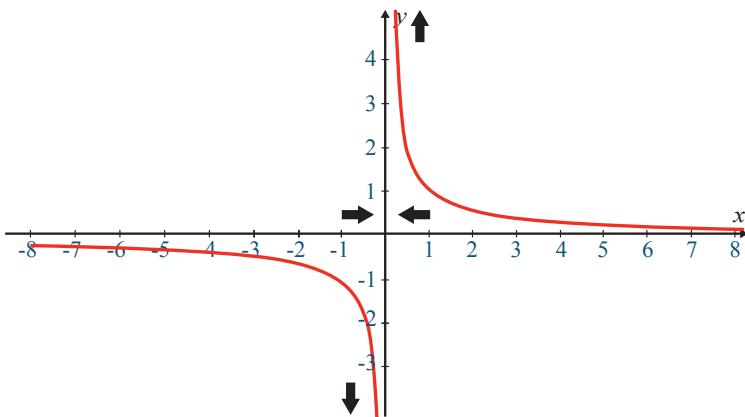
Lê-se: O limite da função, quando x tende a zero "menos infinito".

Veja que estão ocorrendo aproximações assintóticas da curva em relação à reta, só que agora com valores infinitamente pequenos de f . E a reta $x = 0$ (eixo $0y$) é assíntota vertical do gráfico de f .

Novamente, é importante frisar que não existe o limite da função quando x se aproxima de zero, e tampouco os laterais. Infinito não é um número!

Vejamos agora a função $f(x) = \frac{1}{x}$, cujo gráfico é:

GRÁFICO 3 – GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = \frac{1}{x}$



Fonte: Próprio autor

Neste caso, quando x se aproxima de 0 pela esquerda, a imagem da função decresce infinitamente. Então $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty$.

E ocorre uma aproximação assintótica da curva em relação à reta $x = 0$.

E quando x se aproxima de 0 pela direita, a imagem da função cresce infinitamente, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$. E ocorre outra aproximação assintótica da curva em relação à reta $x = 0$.

Afirmamos então que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = \pm\infty$. Mas este limite nos interessa muito pouco. O que importa mesmo são os laterais, como veremos adiante.

Podemos então generalizar o seguinte:

IMPORTANTE

GENERALIZAÇÃO 1

Se n for um inteiro positivo qualquer, então:

- I. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^n} \right) = +\infty$
- II. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^n} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ for par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$



Vejamos alguns exemplos:

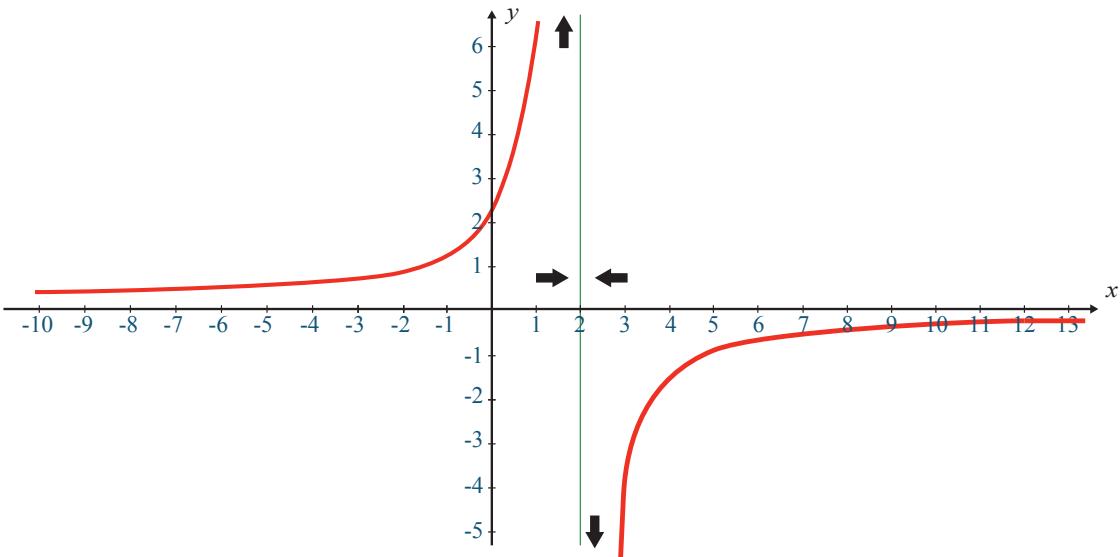
$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^8} \right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^{33}} \right) = +\infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^8} \right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^{33}} \right) = -\infty$$



Vejamos a função $f(x) = \frac{-5}{x-2}$ e seu gráfico:

GRÁFICO 4 GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = \frac{-5}{x-2}$



Fonte: Próprio autor

Veja que $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-5}{x-2} \right) = +\infty$, pois há uma aproximação assintótica em relação à reta $x = 2$ pela esquerda, para cima.

Note também que $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-5}{x-2} \right) = -\infty$, pois há uma aproximação assintótica em relação à reta $x = 2$ pela direita, para baixo.

Podemos então afirmar que $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-5}{x-2} \right) = \pm \infty$

IMPORTANTE

GENERALIZAÇÃO 2

- I. $\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{K}{f(x)} \right) = \pm \infty$ se $K \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
- II. $\lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{K}{f(x)} \right) = \pm \infty$ se $K \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$



Veja no exemplo a seguir como calcular um limite quando não temos o gráfico da função, ou seja, algebricamente:

Ex.1) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x-1} \right) =$

A primeira coisa a se observar é que se pudéssemos aplicar a regra do limite de uma divisão, o denominador daria 0. Então não podemos!

Vamos calcular os limites laterais:

- I. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2}{x-1} \right)$. O numerador é constante e o denominador tende a zero. Então, pela **generalização 2**, esse limite dará ou mais ou menos infinito.

Vamos fazer a análise de sinal da fração: O numerador é constante e é positivo. Vejamos o denominador. Se x tender a 1 pela esquerda, então $x < 1$ e $x - 1$ será sempre menor que zero ($x - 1 < 0$).

Assim, nossa fração terá um numerador positivo e um denominador negativo $\left(\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right)$

sempre que $x < 1$ e, portanto, a fração será negativa. Então $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2}{x-1} \right) = -\infty$

- II. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{x-1} \right)$. A forma de analisar é análoga à anterior. Sabemos que esse limite dará infinito e teremos que saber se dará positivo ou negativo.

O numerador é positivo. Se x tender a 1 pela direita, então $x > 1$ e, portanto, $x - 1$ será positivo, ou seja, $x - 1 > 0$. Logo, a fração será positiva pois o numerador e o denominador serão positivos $\left(\begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \right)$, sempre que $x > 1$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{x-1} \right) = +\infty$

Podemos então afirmar que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x-1} \right) = \pm \infty$

Ex 2) Calcular $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{-5}{(x+3)^2} \right)$

Como o numerador é uma constante não nula e o denominador tende a zero, então caímos na **generalização 2** e esse limite dá infinito. Precisamos analisar o sinal, através dos limites laterais.

- I. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{-5}{(x+3)^2} \right)$. O numerador é negativo. Vejamos o denominador.

Como x é menor que -3 (por ex. -3,001), então $x + 3 < 0$, mas $(x + 3)^2 > 0$ e o denominador será positivo. Teremos então que a fração será negativa, pois $\frac{-}{+} = -$ e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{-5}{(x+3)^2} \right) = -\infty$$

- II. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{-5}{(x+3)^2} \right)$. O numerador é negativo e o denominador sempre será positivo,

pois está elevado ao quadrado. Teremos então $\frac{-}{+}$ e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{-5}{(x+3)^2} \right) = -\infty$$

Podemos afirmar então que $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{-5}{(x+3)^2} \right) = -\infty$.



IMPORTANTE



GENERALIZAÇÃO 3

Se a for um número real e se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$, onde K é uma constante não nula, e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, então:

- I. Se $K > 0$ e se $g(x) \rightarrow 0$ com valores maiores que zero, temos que $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = +\infty$;
- II. Se $K > 0$ e se $g(x) \rightarrow 0$ com valores menores que zero, temos que $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = -\infty$;
- III. Se $K < 0$ e se $g(x) \rightarrow 0$ com valores maiores que zero, temos que $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = -\infty$;
- IV. Se $K < 0$ e se $g(x) \rightarrow 0$ com valores menores que zero, temos que $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = +\infty$.

Essa generalização também será válida se " $x \rightarrow a$ " for substituído por " $x \rightarrow a^+$ " ou por " $x \rightarrow a^-$ ".

Veja os exemplos para essa generalização.

Exemplo 1 - Ache $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+1}{2-x} \right)$

A generalização 3 é aplicável pois $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x) = 0$. Sabemos que esse limite dará infinito, resta saber o sinal.

O numerador é positivo. O denominador será positivo, pois 2 menos um número menor que ele dará positivo. Dizemos que $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x) = 0^+$. Então a fração será positiva e $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+1}{2-x} \right) = +\infty$.

Exemplo 2 - Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x+1}{2-x} \right)$

Veja que a única mudança que vai ocorrer, em relação ao exemplo 1, é no denominador. Se $x \rightarrow 2^+$, então temos que tirar de 2 um número maior que ele, e o resultado será negativo. Então $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) = 0^-$. Então a fração será negativa e $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x+1}{2-x} \right) = -\infty$.

Exemplo 3 - Calcule $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \right)$

Veja que a **generalização 3** se aplica, pois $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + 3x + 2) = 20$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 3) = 0$.

Então $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \right) = -\infty$.

Resta-nos saber se será $-\infty$ ou $+\infty$.

O numerador é positivo.



Quanto ao denominador, $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [(x-1)(x-3)]$. Analisemos o sinal de $(x-1)(x-3)$ quando $x \rightarrow 3^-$. Fator $(x-1)$: é positivo, pois um número menor que três, mas próximo de três, menos um, dá sinal positivo. Fator $(x-3)$: é negativo, pois um número menor que três menos três dá negativo.

Temos então que $(x-1)(x-3)$ é um produto cujos fatores têm sinais diferentes, logo esse produto é negativo, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 3) = 0^-$.

Voltando à fração inicial do limite temos o numerador e o denominador têm sinais contrários, logo a fração é negativa e $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \right) = -\infty$.

Exemplo 4 - Calcule $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} \right)$

De início caímos em uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Fatoramos e resolvemos:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{(x-2)}{(x+1)} \right)$$

Neste ponto temos que $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x-2) = -3$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0^-$ e a generalização 3 se aplica. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} \right) = +\infty$$

LIMITES “no infinito”

Como iremos abordar limites de funções quando a variável independente cresce ou decresce indefinidamente? É o que você irá aprender agora.

Tomemos novamente a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Vamos atribuir a x valores cada vez maiores,

e que vão crescendo indefinidamente. A tabela a seguir mostra alguns valores de x e de suas imagens.

TABELA 2

x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	1
2	0,25
5	0,04
10	0,01
100	0,0001
1000	0,000001
10000	0,00000001

Fonte: Próprio autor



Veja que, enquanto x cresce cada vez mais, a imagem da função vai se aproximando cada vez mais de zero, com valores maiores que zero.

É fácil perceber nesse caso que o numerador é constante e o denominador cresce indefinidamente e, portanto, a fração diminuirá cada vez mais o seu valor, aproximando-se de zero.

Dizemos então que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0^+$.

Vamos agora atribuir a x valores que decrescem infinitamente. Vejamos o que acontece com a imagem da função. Veja a tabela 3.

TABELA 3

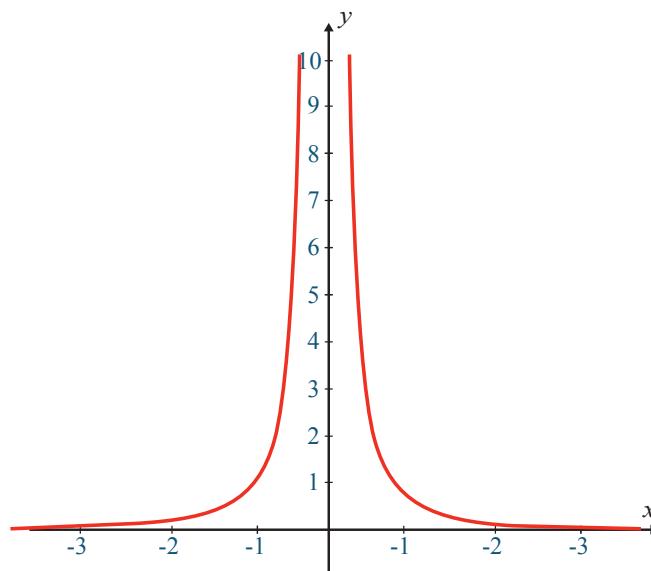
x	$f(x)$
-1	1
-2	0,25
-5	0,04
-10	0,01
-100	0,0001
-1000	0,000001
-10000	0,00000001

Fonte: Próprio autor

Nesse caso podemos dizer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0^+$, pela mesma razão do anterior.

Vejamos o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$

GRÁFICO 5 - GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = \frac{1}{x^2}$



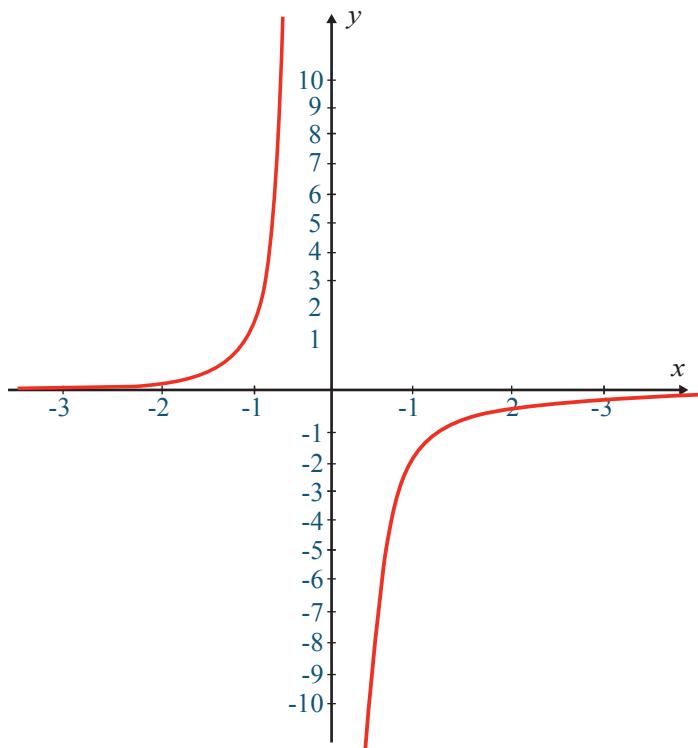
Fonte: Próprio autor

Veja que tanto para crescimentos infinitos de x , quanto para decrescimentos infinitos de x , a imagem da função aproxima-se cada vez mais de zero positivamente, acarretando aproximações assintóticas em relação ao eixo $0x$ (reta $x = 0$), sempre por cima da reta.

Fica então confirmado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0^+$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0^+$.

Analisemos agora a função $f(x) = \frac{-2}{x^3}$, cujo gráfico é:

GRÁFICO 6 - GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = \frac{-2}{x^3}$



Fonte: Próprio autor

Podemos perceber que quando x decresce indefinidamente a curva vai se aproximando cada vez mais do eixo $0x$, mas sempre acima do eixo. Isto nos permite afirmar que as imagens de f vão se aproximando cada vez mais de zero, com valores positivos de f .

Isto significa que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2}{x^3} \right) = 0^+$.

Se olharmos agora para o outro lado, veremos que quanto mais o x cresce, mais a curva se aproxima do eixo $0x$, mas sempre por baixo. ($x \rightarrow +\infty$, então $f \rightarrow 0^-$).

Isto significa que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{x^3} \right) = 0^-$.



Podemos generalizar que:

IMPORTANTE

GENERALIZAÇÃO 4

Se n for um inteiro positivo, então,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{K}{x^n} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{K}{x^n} \right) = 0$$

Para sabermos se será 0^+ ou 0^- dependerá do sinal de K e se n for par ou ímpar, no caso de x tender a $-\infty$.



Limites “infinitos no infinito”

O que quer dizer a expressão $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4)$?

Quer dizer: Para onde vai a imagem da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ quando x assume valores cada vez maiores?

Intuitivamente podemos perceber que, quando x cresce muito, o primeiro termo de f , que está elevado à terceira potência crescerá muito mais rapidamente que os outros. Podemos então afirmar que esse termo é que definirá a tendência de variação das imagens de toda a função, quando $x \rightarrow +\infty$.

Isto nos leva a afirmar que o limite de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ quando $x \rightarrow +\infty$ é equivalente ao limite de $f(x) = x^3$ quando $x \rightarrow +\infty$. Ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)$$

Tal equivalência é verdadeira e pode ser provada. Como?

Tomemos a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$. Vamos colocar em evidência o termo x^3 . Veja que só não poderíamos colocar em evidência o termo x^3 se ele fosse zero, mas como $x \rightarrow +\infty$, então ele está longe de zero!

Teremos então:

$$f(x) = x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{4}{x^3} \right) \text{ ou } f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right)$$

$$\text{Então } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) \right]$$

Mas limite de um produto é o produto dos limites.

$$\text{Logo } f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right)$$



Mas limite de uma soma é a soma dos limites, então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) \cdot \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^3} \right) \right]$$

e, pela generalização 4 temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 0 + 0 - 0 \right), \text{ ou seja,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3). \text{ Como queríamos provar!}$$

Todo esse raciocínio se aplica também para $x \rightarrow -\infty$

IMPORTANTE

GENERALIZAÇÃO 5

Para calcularmos o limite de uma função polinomial, com $x \rightarrow \pm \infty$, basta tomarmos o limite do termo de maior grau do polinômio, com $x \rightarrow \pm \infty$.



Ex) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4) = -\infty$

INDETERMINAÇÃO DA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

Como podemos calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-5}{2x+7} \right)$?

Primeiramente devemos aplicar a propriedade que diz: o limite de uma divisão é a divisão de limites (se o denominador não se anular). Então:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-5}{2x+7} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x-5)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+7)}$$

Veja que se calculássemos esse limite chegaríamos a uma indeterminação da forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Para levantarmos essa indeterminação devemos usar a generalização 5. Veja:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-5}{2x+7} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x)}$$

Mas como o limite de uma divisão é a divisão de limites, então a divisão de limites é o limite da divisão. Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-5}{2x+7} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{2x} \right). \text{ Cancelando o } x, \text{ temos:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-5}{2x+7} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} \right)$$



Mas limite de uma constante é a constante. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-5}{2x+7} \right) = \frac{3}{2}$$

Observe que o numerador da resposta é igual ao coeficiente do termo de maior grau do numerador da função, que é 3. E também que o denominador da resposta (2) é igual ao coeficiente do termo de maior grau do denominador da função.

E isto não é coincidência. Se você observar o desenvolvimento da resolução exercício anterior verá que só sobraram o 3 e o 2.

Aliás, isto pode ser considerada uma generalização:

IMPORTANTE

GENERALIZAÇÃO 6



Sejam os limites: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções polinomiais de mesmo grau, então o valor do limite será uma fração cujo numerador é o coeficiente do termo de maior grau de $f(x)$. E o denominador será o coeficiente do termo de maior grau de $g(x)$.

Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 1 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-5x^3 + 2x^2 - 2x + 5}{-2x^3 + 2x - 7} \right) = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

Exemplo 2 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^{99} - 5x^{45} + 3}{-x^{99} + 7x^{21} + x^{17}} \right) = \frac{2}{-1} = -2$

E se o grau do numerador for diferente do grau do denominador?

Teremos dois casos:

Se o grau do numerador for menor que o grau do denominador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 5}{x^5 - 5x^2 - 3} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 5)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 5x^2 - 3)} = \\ \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

Veja que em todas as vezes que o grau do numerador for menor que o grau do denominador, ao aplicarmos a generalização 5, a fração final terá algum x no denominador. Ou seja, ao final resultará um limite da forma $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{K}{x^n} \right)$ cuja resposta é zero (generalização 4).

Então podemos generalizar que:

IMPORTANTE

GENERALIZAÇÃO 7



Sejam os limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$, onde o grau de $f(x)$ é menor que o grau de $g(x)$.

Então $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$

Se o grau do numerador for maior que o grau do denominador:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^5 - 5x^2 - 3}{x^2 - 3x + 5} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 5x^2 - 3)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 5)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^5}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

Veja que em todas as vezes que o grau do numerador for maior que o grau do denominador, ao aplicarmos a generalização 5, a fração final terá algum x no numerador. Ou seja,

ao final resultará um limite da forma $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^n}{K} \right)$ cuja resposta é $+\infty$ ou $-\infty$.



IMPORTANTE

GENERALIZAÇÃO 8

Sejam os limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$, onde o grau de $f(x)$ é maior que o grau de $g(x)$. Então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = -\infty$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3 - 2x^2 - 4x^4}{5x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-4x^4}{5x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-4x^3}{5} \right) = +\infty$$

Síntese

Caro(a) estudante

Nesse módulo você deu mais um passo para compreender as noções de limite e de aproximações infinitas.

Você aprendeu a conceituar limites “infinitos” e compreender suas expressões algébrica e gráfica. Aprendeu também a calcular esses limites “infinitos”.

Já sabe conceituar e calcular limites “no infinito”.

Aprendeu a conceituar e calcular limites “infinitos no infinito”, além de levantar e resolver indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Espero que você tenha se familiarizado com as ideias que lhe foram apresentadas neste texto. Refaça os exemplos do módulo e garanta a sua aprendizagem com a prática destes e de outros exemplos que você poderá encontrar nas referências bibliográficas do módulo.

Após o estudo deste módulo, avalie se você conseguiu entender bem os assuntos aqui abordados. Se não, você deve retornar ao texto e estudar novamente os tópicos que não ficaram claros, ou pedir ajuda ao seu professor.

Saudações e continue seus estudos!

Referências

Bibliografia Básica

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica: volume 1.** 3. ed.. São Paulo: Harbra, c1994.. xii, 685[64] p.: ISBN 8529400941.

STEWART, James. **Cálculo: volume 1.** 5. ed.. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.. 581p., [204]p. ISBN 8522104794.

THOMAS, George Brinton; FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo: volume 1.** 10. ed.. São Paulo: Addison-Wesley, c2001.. xvi, 660[4]p. ISBN 8588639068.

Bibliografia Complementar:

ANTON, Howard; BIVENS, Irl.; DAVIS, Stephen. **Cálculo: volume 1.** 8. ed.. Porto Alegre: Bookman, 2007.. xx, 581[64]p. ISBN 9788560031634.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração.** 6. ed. rev. amp.. São Paulo: Pearson Prentice Hall, c2007.. ix, 448p. ISBN 857605115X

LARSON, Roland E.; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com aplicações.** 4.ed.. Rio de Janeiro: LTC Ed., c1998.. xxii, 711p. ISBN 8521611447.

SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com geometria analítica: volume 1.** São Paulo: McGraw-Hill, c1987.. xxii, 829p. ISBN 0074504118.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica.** 2. ed. São Paulo: Makron Books, c1994.. xxvi, 744p. ISBN 8534603081.