UNIVERSIDADE FUMEC

Cálculo I

NÚMEROS REAIS

AS DUAS CATEGORIAS DE NÚMEROS REAIS

A CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS NÚMEROS REAIS E OS PONTOS DA RETA REAL

OS TIPOS DE INTERVALOS: INTERVALO ABERTO, FECHADO, INTERVALOS SEMIABERTOS E INFINITOS

E MUITO MAIS...

APRESENTAÇÃO

Olá aluno(a), bem-vindo(a)! Inicialmente, você vai estudar o conjunto dos Números Reais e as relações formais entre os elementos deste conjunto.

Essas relações serão estabelecidas com o auxílio da linguagem simbólica da matemática.

Esta linguagem foi fundamental para o desenvolvimento da matemática ao longo da história, transformando-a em importante recurso inserido hoje em nossas atividades acadêmicas, profissionais e pessoais.

Aprofundar seus conhecimentos sobre os **Números Reais** será o seu primeiro passo para o desenvolvimento do estudo que vamos empreender juntos neste semestre.

Vamos começar? Bons estudos!

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao final deste módulo você deverá ser capaz de:

- Identificar as duas categorias de números reais
- Compreender a correspondência entre os números reais e os pontos da reta real;
- Compreender a relação de ordem entre números reais e como isso é expresso pelas posições destes sobre a reta real;
- Compreender as relações, "*maior que*" e "*menor que*", para os números reais, suas respectivas representações simbólicas e condições de uso na formulação de desigualdades;
- Compreender cada uma das seis (6) propriedades das desigualdades entre números reais, enunciadas para os dois (2) sentidos lógicos, "*maior que*" e "*menor que*";
- Descrever intervalos de números reais sobre a reta através das suas representações.
- Identificar os tipos de intervalos: Intervalo aberto, fechado, intervalos semiabertos e infinitos.
- Utilizar as possíveis representações para um intervalo e ser capaz de fazer a conversão de uma forma de representação para outra.
- Aplicar corretamente as seis propriedades acima na resolução de inequações ou desigualdades propostas, descrevendo o intervalo solução em suas diferentes representações.

FICHA TÉCNICA

UNIVERSIDADE FUMEC

FUMEC VIRTUAL - SETOR DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Gestão Pedagógica
Coordenação
Gabrielle Nunes P. Araújo
Transposição Pedagógica
Flávia Juliana da Silva

Produção de Design Multimídia
Coordenação
Rodrigo Tito M. Valadares
Design Multimídia
Nathan Ackerman Chagas de Souza
Raphael Gonçalves Porto Nascimento

Infra-Estrututura e Suporte
Coordenação
Anderson Peixoto da Silva

AUTORIA DA DISCIPLINA

Prof. Ronaldo Abrão Pimentel e
Profa. Valéria Cunha Figueiredo

BELO HORIZONTE - 2013

NÚMEROS REAIS

Introdução

Os números são usados sempre que precisamos determinar, com clareza, aspectos quantitativos de grandezas, das mais diversas naturezas, como:

- Valor do PIB nacional de 2012: aproximadamente R$ 4.403.000.000.000,00
- Peso de uma pessoa: 85,5kg
- Frequência cardíaca: 76 bpm
- Índice de variação da BOVESPA: −0,52%
- Posologia de um medicamento: 500mg/dia
- Temperatura mínima de um dia de inverno: −12°C
- Temperatura de congelamento da água em CNTP: 0°C
- Velocidade de um veículo: 110 km/h
- Diâmetro de um tubo de PVC: 3/8 de polegada
- Frequência de uma estação de rádio: 91,7 MHz, etc.

IMPORTANTE

Esses números, frequentemente utilizados em medidas, são denominados **números reais**. Um número real pode ser positivo, zero ou negativo.

Existem duas categorias de números reais:

NÚMEROS RACIONAIS:

São números reais que podem ser escritos como uma razão de 2 números inteiros isto é, $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$.

São números racionais:

- Os números inteiros: ...-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3,... (positivos ou naturais, negativos ou simétricos dos naturais e o zero).
- As frações positivas e negativas: $\frac{12}{17}$, $-\frac{25}{9}$
- Números decimais finitos: $\frac{1}{8} = 0{,}125$, $-\frac{11}{4} = -2{,}75$
- Números decimais infinitos, que se repetem periodicamente: $\frac{1}{3} = 0{,}3333333\ldots$, $-\frac{365}{22} = -16{,}59090909\ldots$

NÚMEROS IRRACIONAIS

São números que não podem ser escritos na forma de quociente ou razão de dois números inteiros.

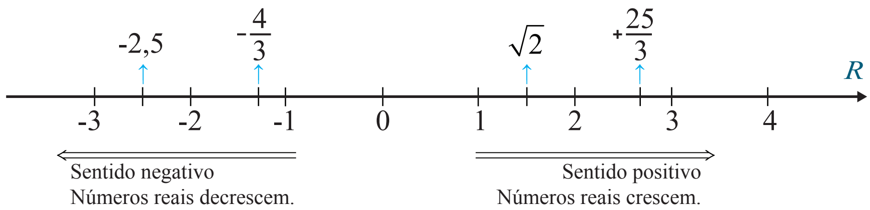
- Estes são números decimais, também com expansão infinita, mas sem repetição periódica: $\pi = 3{,}1415926535897\ldots$, $-\sqrt{2} = -1{,}41421356\ldots$

Representação dos Números Reais

Todos nós somos familiarizados com a reta dos números reais ou a **reta real**.

Esta reta é uma representação dos números reais, porque a cada ponto dela está associado um número real e vice versa, ou seja, para cada número real existe um ponto da reta associado a ele. Veja a figura 1:

FIGURA 1: REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA RETA REAL



Os números positivos localizam-se à direita do zero e os negativos à esquerda do zero e esta é uma convenção estabelecida universalmente.

Ordem na Reta Real

Os números reais possuem entre si uma relação de ordem, isto é, são ordenados. Isto significa que:

- "1 é menor que 2",
- "-3 é menor que -2"
- "$\frac{5}{2}$ é menor que 4", e assim por diante.

Observando a reta real, figura 2, podemos afirmar, genericamente que, se a e b são números reais quaisquer, a é menor que b se, e somente se, a estiver à esquerda de b.

FIGURA 2: RETA REAL A < B

Escreve-se simbolicamente a afirmativa a é menor que b: $\boxed{a < b}$

Temos também, na figura 3, que se c e d são números reais quaisquer, d é maior que c se, e somente se, d estiver à direita de c:

FIGURA 3: RETA REAL D > C

Simbolicamente, $\boxed{d > c}$ significa que d é maior que c.

As expressões **a < b** e **d > c** recebem o nome de **desigualdades**.

Vejamos dois exemplos:

1. A desigualdade $3 > -2$ é verdadeira, porque o número 3 se situa à direita de -2 na reta real.
2. A desigualdade $-1 < 4$ é verdadeira, porque o número -1 se situa à esquerda de 4.

Confira esses exemplos na reta real representada na figura 1.

Propriedades das Desigualdades

ATENÇÃO

Antes de prosseguirmos é importante que você perceba que **desigualdades** estabelecem **comparações** entre objetos de naturezas diversas.

Estes objetos de comparação podem ser grandezas relacionadas com nosso dia a dia, como, por exemplo, comparação entre preços de um produto ou podem ser objetos matemáticos como a comparação entre conjuntos de números reais, entre gráficos de funções, que teremos a oportunidade de estudar adiante.

As desigualdades entre números reais possuem as propriedades abaixo, que são do nosso interesse, devido ao cuidado que devemos ter ao estabelecermos comparações entre eles e à necessidade de uso frequente das mesmas em nosso estudo.

Considere os números reais a, b, c e d abaixo:

1ª) Propriedade transitiva

Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$

Confira o exemplo:

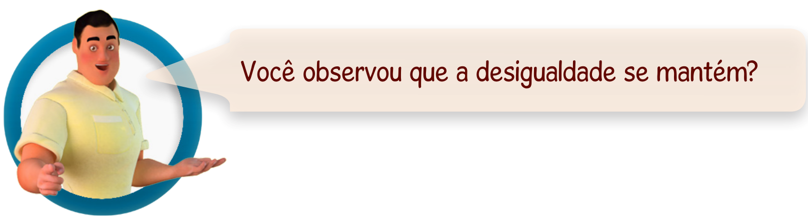
$5 > 2$ e $2 > -4$ logo $5 > -4$

2ª) Adição de um número real qualquer à desigualdade

Se $a > b$, então $a + c > b + c$

Confira os exemplos:

a. $8 > 3$ logo $8 + 2 > 3 + 2$ (Adicionamos um número positivo aos dois membros da desigualdade).
b. $2 > -6$, logo $2 - 4 > -6 - 4$ (Adicionamos um número negativo aos dois membros da desigualdade).



3ª) Multiplicação da desigualdade por um número real positivo qualquer

Se $a > b$ e $c > 0$, então, $ac > bc$

Veja os exemplos:

a. $7 > 2$, logo, $(7)(9) > (2)(9)$

b. $-6 > -9$, logo, $(3)(-6) > (3)(-9)$

4ª) Multiplicação da desigualdade por um número real negativo qualquer

Se $a > b$ e $c > 0$, então, $ac < bc$

Observe **com atenção** os exemplos:

a. $8 > 4$, logo, $(8)(-2) < (4)(-2)$

b. $-3 > -5$, logo, $(-3)(-4) < (-5)(-4)$

ATENÇÃO

Caro(a) aluno(a) é fundamental que você compreenda a diferença entre a 3ª e a 4ª propriedades:

Na 3ª propriedade, se multiplicarmos a desigualdade por um **número positivo**, seu sentido lógico **não se altera**:

Se a **é maior** que b, ac também será **maior** que bc.

Agora, na 4ª propriedade, se a desigualdade for multiplicada por um **número negativo** seu sentido lógico **será invertido:**

Se a é **maior** que b, agora ac será **menor** que bc.

Se você não se atentou para este detalhe, retorne ao texto e observe novamente os exemplos dessas propriedades.

5ª) Adição de desigualdades

Se $a > b$ e $c > d$, então, $a + c > b + d$

Confira:

a. $-3 > -9$ e $4 > 1$ logo $-3 + 4 > -9 + 1$

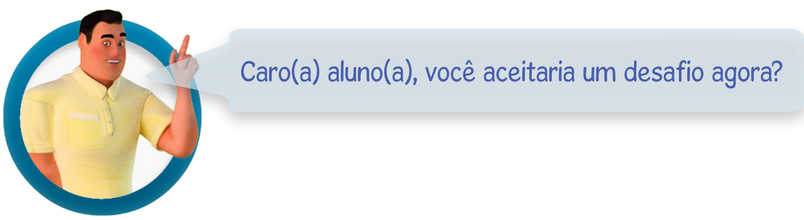
6ª) Produto de desigualdades

Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então, $a\,c > b\,d$

Observe que nesta propriedade a, b, c e d devem ser todos positivos!

Veja o exemplo:

$6 > 2 > 0$ e $4 > 3 > 0$ logo $(6)(4) > (2)(3)$



Veja bem, as mesmas propriedades acima, todas enunciadas com o símbolo ***maior que*** (>), podem ser reescritas também para o símbolo ***menor que*** (<) :

Observe a propriedade transitiva novamente:

1ª) **Propriedade transitiva**

Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$

Veja o exemplo:

$3 < 5$ e $5 < 8$ logo $3 < 8$

Agora pense e reescreva as demais propriedades (2ª a 6ª) usando agora o símbolo < (menor que), da mesma forma que mostramos aqui, com a 1ª propriedade.

Confira suas respostas na lista das propriedades, na página 12.

É importante destacar que você pode encontrar as demonstrações das propriedades das desigualdades na bibliografia relacionada no final deste módulo.

Intervalos

Caro(a) aluno(a), frequentemente, estaremos interessados em conjuntos de números reais tomados sobre a reta real, que chamaremos de **intervalos** e que podem ser expressos por desigualdades.

Mas, intervalos também fazem parte do nosso dia a dia!

Veja um exemplo simples:

- No dia 21/05/13 o dólar comercial variou entre 2,0360 e 2,0375 reais e isso pode ser expresso pela desigualdade

$$R\$\ 2{,}0360 \leq 1\ U\$ \leq R\$\ 2{,}0375$$

Fonte: Thomson Reuters em 21/05/13

SAIBA MAIS

Veja outros exemplos de desigualdades clicando aqui[1]

1 http://educacao.uol.com.br/matematica/desigualdade-principio-da-inequacao.jhtm

Certamente, este é um tópico que você já conhece, logo, vamos fazer aqui uma breve revisão abordando:

- Tipos de intervalos: Intervalo aberto, fechado, intervalos semiabertos e infinitos.
- Formas de representação de um intervalo:
  - Representações gráficas sobre a reta real,
  - Descrição do conjunto de números reais pertencentes ao intervalo por meio de uma desigualdade
  - Representação através das notações específicas para cada tipo de intervalo

Vamos iniciar nossa revisão?

Noção intuitiva:

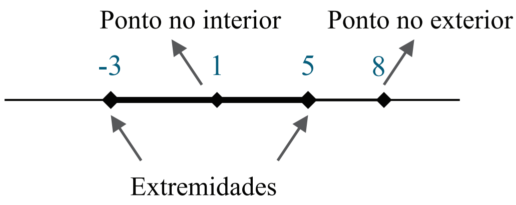
Considere o intervalo em destaque sobre a reta real, na figura 4 abaixo:

Os números -3 e 5 são as **extremidades** (ou pontos extremos) deste intervalo.

O número 1 é um ponto que **pertence** a este intervalo, porque se situa **entre suas extremidades**, ou seja, **dentro** dele.

Já o número 8 é um ponto que não está entre eles, ou seja, está situado **fora** deste intervalo e que, portanto, **não pertence** ao mesmo.

FIGURA 4



Ao longo de todo o nosso curso, trabalharemos com oito tipos de intervalos sobre a reta real.

Veremos abaixo quais são eles e suas respectivas representações.

TIPOS DE INTERVALOS

INTERVALO ABERTO

Intervalo **aberto** (a, b) é o conjunto de todos os números reais que **estão entre** a e b. Este conjunto não contém as extremidades a e b.

Dentre as várias formas de representarmos o intervalo aberto, utilizaremos três representações:

Veja abaixo:

Representação gráfica: Como vimos anteriormente que a cada número real associamos um único ponto da reta, agora podemos representar o intervalo dos números que estão entre a e b como o conjunto dos pontos da reta que pertencem a este intervalo, como ilustramos na figura 5.

Lembre-se que, no intervalo aberto (a, b), os pontos extremos e não pertencem ao mesmo e devem ser indicados pelos **parêntesis** ou pelas **"bolinhas vazias",** situados sobre eles.

FIGURA 5

- **Representação através da sentença** que descreve o conjunto dos valores de x na reta que pertencem a este intervalo: $\{x \in R \mid a < x < b\}$
- **Representação através das notações** para este intervalo: (a, b) como mostrado acima, ou $]a, b[$

INTERVALO FECHADO

Intervalo **fechado** $[a, b]$ é o conjunto de todos os números reais que estão entre a e b, incluindo agora suas extremidades.

Veja a figura 6 e lembre-se que, no intervalo fechado $[a, b]$ os pontos extremos a e b pertencem ao mesmo e devem ser indicados agora pelos **colchetes** ou pelas "**bolinhas cheias**", situados sobre eles.

- Representação gráfica

FIGURA 06

- **Representação através da sentença:** $\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$
- **Representação através da notação de intervalo:** $[a, b]$

Observação:

Lemos o símbolo $\leq$ como *"menor do que ou igual a"* e o símbolo $\geq$ *"maior do que ou igual a"*.

INTERVALOS SEMIABERTOS

Intervalos semiabertos $[a, b)$ ou $(a, b]$ são os conjuntos de todos os números reais entre a e b, incluindo agora apenas um de seus pontos extremos.

Podemos ter:

a. Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita

FIGURA 07: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Ou $\{x \in R \mid a \leq x < b\}$ (sentença) ou $[a, b)$ como consta acima, ou $[a, b[$ (notação de intervalo)

b. Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita

FIGURA 08: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Ou $\{x \in R \mid a < x \leq b\}$ (sentença) ou $(a, b]$ conforme acima ou $]a, b]$ (notação de intervalo)

INTERVALOS INFINITOS

Intervalos infinitos são subconjuntos do conjunto dos números reais, limitados apenas em um ponto extremo.

Temos quatro tipos de intervalos infinitos, podendo ser abertos ou fechados no seu ponto extremo. São eles:

a. $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{x} > a\}$ ou $(a, +\infty)$ ou $]a, +\infty[$ ou

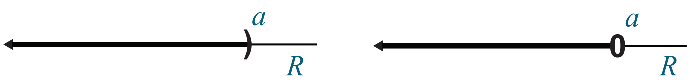
FIGURA 09: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

b. $\{x \in R | x \geq a\}$ ou $[a, +\infty)$ ou $[a, +\infty[$ ou

FIGURA 10: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

c. $\{x \in R | x < a\}$ ou $(-\infty, a)$ ou $]-\infty, a[$ ou

FIGURA 11: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



d. $\{x \in R | x \leq a\}$ ou $(-\infty, a]$ ou $]-\infty, a]$ ou

FIGURA 12: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

A reta real corresponde ao conjunto $\{x \mid x \in R\}$ ou ao intervalo escrito como $(-\infty, +\infty)$ ou $]-\infty, +\infty[$.

Resolvendo Desigualdades

Caro(a) aluno(a), vamos agora aplicar tudo que vimos neste módulo, isto é, as desigualdades, suas propriedades e os intervalos e suas representações para resolvermos alguns exercícios.

Antes de começarmos, vamos sintetizar aqui os pontos que serão seus principais recursos para resolver estes exercícios.

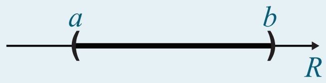
TABELA 1 - PROPRIEDADES DAS DESIGUALDADES

1ª	Transitiva	Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$	Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$
2ª	Adição de um nº real qualquer	Se $a > b$, então $a + c > b + c$	Se $a < b$, então $a + c < b + c$
3ª	Multiplicação por um nº real positivo	Se $a > b$ e $c > 0$, então, $ac > bc$	Se $a < b$ e $c > 0$, então, $ac < bc$
4ª	Multiplicação por um nº real negativo	Se $a > b$ e $c < 0$, então, $ac < bc$	Se $a < b$ e $c < 0$, então, $ac > bc$
5ª	Adição de desigualdades	Se $a > b$ e $c > d$, então, $a + c > b + d$	Se $a < b$ e $c < d$, então, $a + c < b + d$
6ª	Produto de desigualdades	Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então, $a\,c > b\,d$	Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, então, $a\,c < b\,d$

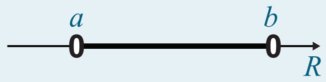
TABELA 2 - INTERVALOS

Intervalo aberto

$\{x \in R \mid a < x < b\}$ ou (a,b)

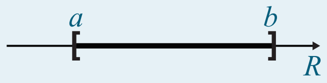


ou



Intervalo fechado

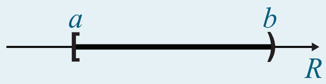
$\{x \in R | a \le x \le b\}$ ou $[a,b]$



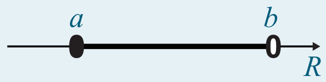
ou

Intervalos semiabertos

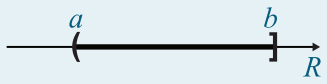
$\{x \in R \mid a \le x < b\}$ ou $[a,b)$



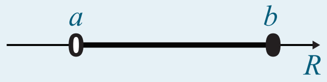
ou



$\{x \in R\ !a < x \le b\}$ ou $(a,b]$

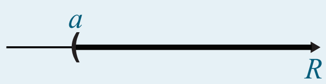


ou

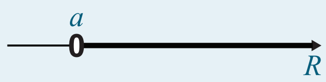


Intervalos infinitos

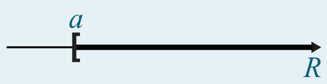
$\{x \in R \mid x > a\}$ ou $(a,+\infty)$ ou $]a,+\infty[$



ou

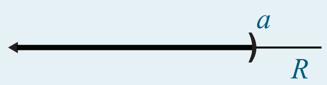


$\{x \in R \mid x \ge a\}$ ou $[a,+\infty)$ ou $[a,+\infty[$

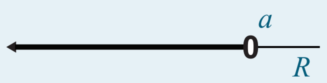


ou

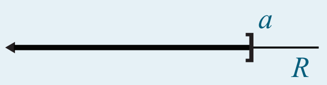
$\{x \in R \mid x < a\}$ ou $(-\infty,a)$ ou $]-\infty,a[$



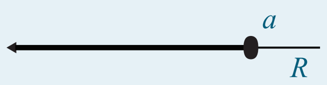
ou



$\{x \in R \mid x \le a\}$ ou $(-\infty,a]$ ou $]-\infty,a]$

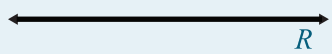


ou



Reta Real

$\{x \in R\}$ ou $(-\infty,+\infty)$ ou $]-\infty,+\infty[$



Exemplos

Resolva as desigualdades propostas abaixo:

1. $5 + 4\boldsymbol{x} > 2\boldsymbol{x} - 3$
2. $4 - \boldsymbol{x} \le 5\boldsymbol{x} - 3$
3. $-3 \le 5\boldsymbol{x} - 8 < 12$
4. $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+4} < 5, \ (x \neq -4)$

Caro(a) aluno(a), o que significa resolver uma desigualdade?
O que você deve obter?

Você deverá:

- Obter todos os valores de $\underline{x}$ que satisfazem a desigualdade, e
- Ser capaz de representar este conjunto dos valores de $\underline{x}$, que chamaremos de **intervalo solução**, em todas as representações possíveis para este intervalo.

IMPORTANTE

Agora estude os exemplos com **postura ativa**, isto é, você deve fazer junto comigo, em uma folha à parte, todas as operações aqui indicadas, passo a passo.

E ainda, retorne às tabelas 1 e 2 de síntese das propriedades e dos intervalos todas as vezes que isso for necessário!

Vamos lá?

Exercícios resolvidos

1º Exemplo

$$5 + 4x > 2x - 3$$

Inicialmente, vamos ler a proposta da desigualdade: $5 + 4x$ é maior que $2x - 3$.

Resolve-la, significa obter o conjunto dos valores de x necessários para que $5 + 4x$ se torne maior que $2x - 3$.

ATENÇÃO

Você compreendeu a proposta da desigualdade?

Para obter o conjunto de valores de x acima, seu objetivo imediato é **ISOLAR** a incógnita x em um dos lados da desigualdade e, para isso escolheremos o primeiro membro.

Observe que, no 1º membro da desigualdade, x está multiplicado por 4 e ainda, 5 foi adicionado a $4x$.

Para começar, vamos eliminar o $+5$ no 1º membro, aplicando a **2ª propriedade** e adicionando -5 aos dois membros da desigualdade.

SAIBA MAIS

Por que precisamos adicionar -5 **aos dois lados** da desigualdade e não apenas "passar" o $+5$ do 1º para o 2º membro trocando seu sinal?

Na realidade, se você aprofundar seus estudos sobre as **operações com números reais**, verá que, o que permite o procedimento automático de *"passar um número N, adicionado ao 1º membro (de uma igualdade ou desigualdade) para o 2º membro, apenas trocando seu sinal"*, é a adição do número simétrico de N, isto é, $-N$ aos 2 lados da igualdade ou desigualdade.

Além disso, você vai perceber aqui, no estudo dos exemplos, que precisamos ser bastante cuidadosos ao trabalharmos com desigualdades e, as propriedades que estudamos já levam em conta todo esse cuidado! Vamos continuar os nossos cálculos:

Adicionando o -5, temos:

$$-5 + 5 + 4x > 2x - 3 - 5$$

Feitas as operações indicadas, obtemos:

$$4x > 2x - 8$$

Prosseguindo com nosso objetivo de isolar a incógnita x apenas no 1º membro da desigualdade, usaremos novamente a **2ª propriedade**, adicionando agora $-2x$ aos dois lados da desigualdade.

Essa operação pode ser feita sem sabermos qual é o valor de x ou de $-2x$? Sim!

IMPORTANTE

Você deve observar que podemos efetuar essa adição sem nos preocuparmos com o fato de que não conhecemos o valor de x e nem sequer seu sinal.

Isso é possível, porque a 2ª propriedade é válida **para qualquer número real**.

$$-2x + 4x > -2x + 2x - 8$$

Obtemos:

$$2x > -8$$

Aplicando, finalmente, a **3ª propriedade**, vamos multiplicar os dois membros por $1/2$:

$$\frac{1}{2}.2x > \frac{1}{2}(-8)$$

logo teremos:

$$x > -4$$

SAIBA MAIS

Novamente, você deve estar se perguntando:

Por que preciso multiplicar os 2 lados por $\frac{1}{2}$? Eu não poderia simplesmente passar o 2 para o outro lado, dividindo o segundo membro por 2?

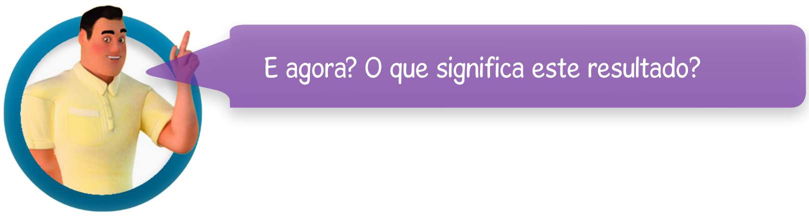
Cabe aqui a mesma explicação dada anteriormente:

O estudo mais cuidadoso das **operações com números reais**, nos mostra que, o que permite o procedimento automático de *"passar um número N, que multiplica o 1º membro (de uma igualdade ou desigualdade) para o 2º membro, dividindo-o por N"*, é a multiplicação, de ambos os lados da igualdade ou desigualdade, pelo número inverso de N, isto é, $\frac{1}{N}$.

Você terá oportunidade de verificar nos próximos exemplos, que todo este cuidado é fundamental, quando tratamos com desigualdades.

Retomando nosso exemplo, o intervalo solução da desigualdade proposta é o intervalo infinito $(-4,+\infty)$, representado na forma do conjunto $\{x \in R \mid x > -4\}$ e também na reta real como se segue na figura 13 abaixo:

FIGURA 13: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



Este resultado nos informa que, $5 + 4x$ será maior que $2x - 3$, se e somente se, x for maior que -4, ou seja,

$$5 + 4\boldsymbol{x} > 2\boldsymbol{x} - 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > -4$$

Você pode fazer um teste para conferir!

Experimente substituir na desigualdade $x = 1$ (dentro do intervalo solução) e depois $x = -5$ (fora do intervalo solução).

No primeiro, você obtém $9 > -1$ (que é verdade) e no segundo, $-15 > -13$ (que é falso).

2º Exemplo

$$4 - x \leq 5x - 3$$

Lemos essa desigualdade como $4 - x$ deve ser menor ou igual a $5x - 3$.

Resolve-la, significa obter o conjunto de valores de x que permitem essa condição.

Aplicando a **2ª propriedade**, adicionaremos -4 a cada membro da desigualdade:

$$-4 + 4 - x \leq 5x - 3 - 4$$

Obtemos

$$-x \leq 5x - 7$$

Lembrando que nosso objetivo é isolar x no primeiro membro, aplicaremos de novo a mesma propriedade, adicionando agora -5 aos dois lados da desigualdade:

$$-x - 5x \leq -5x + 5x - 7$$

Teremos:

$$-6x \leq -7$$

Para obtermos apenas x no primeiro membro, devemos multiplicar os dois lados por $-1/6$.

Neste caso, diante do fato de ser este, um número negativo, utilizaremos a **4ª propriedade** e teremos:

$\left(-\frac{1}{6}\right)(-6x) \geq (-7)\left(-\frac{1}{6}\right)$, o que nos leva ao intervalo solução $x \geq \frac{7}{6}$.

ATENÇÃO

Você observou que substituímos o símbolo $\leq$ por $\geq$?

Por que foi necessário **inverter o sentido da desigualdade**?

Invertemos o sentido lógico da desigualdade, porque nós a multiplicamos por um número negativo, conforme aprendemos na **4ª propriedade.**

O intervalo solução obtido $\left[\frac{7}{6}, +\infty\right)$ é também representado através do conjunto $\left\{x \in R \mid x \geq 7/6\right\}$ e na reta real como mostra a figura 14:

FIGURA 14: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

A resposta obtida significa que $4 - \boldsymbol{x} \leq 5\boldsymbol{x} - 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \geq \frac{7}{6}$; leia essa sentença final!

3º Exemplo

$$-3 \leq 5x - 8 < 12$$

Caro(a) estudante, você tem aqui um problema novo: estamos diante de uma dupla desigualdade, que deve ser lida da seguinte forma:

O valor de $5x - 8$ **se situa entre** -3 **e** 12, incluindo -3, isto é, $5x - 8$ deve ser maior ou igual a -3 e menor que 12, ou então, **o valor de** $5x - 8$ **se situa no intervalo semiaberto** $[-3, 12)$ ou $[-3, 12[$.

Esta condição nos conduzirá para um conjunto de valores de x, que também serão especificados dentro de um intervalo semiaberto, que vamos determinar.

Para isso, você agora vai me acompanhar nas operações necessárias, para isolarmos nossa incógnita x no termo central da dupla desigualdade.

Vamos começar?

$$-3 \leq 5x - 8 < 12$$

Inicialmente, vamos adicionar $+8$ a todos os termos da desigualdade, para eliminar a parcela -8 do termo central:

$$-3 + 8 \leq 5x - 8 + 8 < 12 + 8$$

Obtemos então:

$$5 \leq 5x < 20$$

Multiplicando agora cada termo por $1/5$, de modo a obtermos apenas x no termo central, teremos:

$$\left(\frac{1}{5}\right)5 \leq \left(\frac{1}{5}\right)5x < \left(\frac{1}{5}\right)20,$$

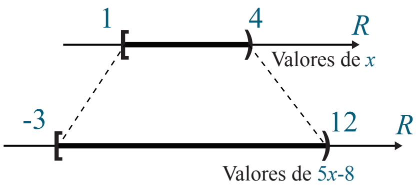
o que nos leva ao intervalo semiaberto $1 \leq x < 4$.

Este intervalo solução $[1, 4)$ também é representado pelo conjunto $\{x \in R \mid 1 \leq x < 4\}$ e pela representação gráfica na reta real exibida na figura 15:

FIGURA 15: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Este resultado significa que os valores de x no intervalo $[1, 4)$ fazem com que os valores de $5x - 8$ se situem no intervalo $[-3, 12)$. Isto está indicado nas representações gráficas na figura 16 abaixo:

FIGURA 16: REPRESENTAÇÃO DOS VALORES DE x E DE $5x - 8$



Vamos fazer uma rápida verificação do nosso resultado?

Escolhendo $x = 3$, que se encontra dentro do intervalo $[1, 4)$, obtemos:

$$5x - 8 = 5.3 - 8 = 7$$

Que, por sua vez, está situado no intervalo $[-3, 12)$.

Você pode verificar ainda que, para valores de x fora do intervalo solução $[1, 4)$, o valor assumido por $5x - 8$ também ficará fora do intervalo $[-3, 12)$ proposto na desigualdade inicial.

Vamos conferir?

Se escolhermos $x = 0$ e $x = 6$ valores de que não pertencem ao intervalo $[1, 4)$ vamos obter, respectivamente,

$$5x - 8 = 5.0 - 8 = -8 \quad \text{e} \quad 5x - 8 = 5.6 - 8 = 22$$

Ambos, -8 e 22, são valores fora do intervalo $[-3, 12)$, esperado para $5x - 8$.

Veja novamente a figura 16: $-3 \leq 5x - 8 < 12 \Leftrightarrow 1 \leq x < 4$

4º Exemplo

$$\frac{x}{x+4} < 5 \ \text{ com } x \neq -4$$

Caro(a) aluno(a), temos aqui mais uma situação nova: uma desigualdade ou inequação (também podemos usar esta denominação), que possui a incógnita x no numerador e no denominador de um quociente.

Comecemos, lendo a desigualdade proposta:

Você notou a restrição escrita à direita da inequação? Ela é necessária?

Observe que a restrição imposta $(x \neq -4)$ é necessária, porque **não podemos ter o denominador igual a zero**, não é verdade?

O primeiro passo para resolvermos esta inequação será multiplicarmos os dois membros por $x + 4$, de forma que o denominador seja **temporariamente eliminado**.

IMPORTANTE

Você deve ter se perguntado: Por que o denominador será, temporariamente e não definitivamente, eliminado?

É importante deixar claro, que faremos isso, porque não podemos perder a memória da inequação proposta.

Isto significa que todos os valores possíveis de x, ou seja, os intervalos soluções obtidos incluirão a restrição inicial, $x \neq -4$, imposta pela proposição do exercício.

Entretanto, como x é um número real **desconhecido**, $x + 4$ também é **desconhecido**.

Logo, teremos duas possibilidades, pois, $x + 4$ pode ser:

- Um número real positivo, que significa a condição $x + 4 > 0$ ou
- Um número real negativo, que significa a condição $x + 4 < 0$.

Agora, como resolveremos este problema, com duas possibilidades distintas? Vejamos:

1. Resolveremos o problema para uma condição de cada vez, **separadamente;**
2. Cada uma delas nos levará a um intervalo solução;
3. A **solução geral** do problema **reunirá os intervalos gerados**, justamente, porque, de fato, as duas possibilidades acima existem e podem ocorrer!
4. Só não pode ocorrer, como já dissemos, $x + 4 = 0$, não é mesmo?

Caro(a) estudante, agora que já temos o esboço da trajetória a ser seguida, vamos juntos resolver este problema?

E lembre-se, seja ativo! Acompanhe tudo fazendo suas próprias anotações!

1ª condição

$$x + 4 > 0$$

Inicialmente esta desigualdade nos impõe um intervalo inicial de trabalho, compatível com esta condição. Aplicando a 2ª propriedade:

$$x + 4 - 4 > 0 - 4$$

Obtemos o intervalo:

$$x > -4$$

Isto significa que o intervalo solução para a 1ª condição, deve ser **compatível com este intervalo.**

ATENÇÃO

E se a solução que vamos obter para esta 1ª condição estiver fora deste intervalo $x > -4$?

Neste caso, não existe solução deste exercício para a 1ª condição aqui colocada e deveremos buscar a solução do problema para a 2ª condição.

Vamos então, retomar a desigualdade original e multiplicar os dois termos da desigualdade proposta pelo número real **POSITIVO:** $x + 4$.

$$\frac{x}{x+4} < 5$$

Aplicando a 3ª propriedade:

$$\frac{x}{x+4}(x+4) < 5(x+4)$$

Obtemos:

$$x < 5x + 20$$

Adicionando agora $-5x$ aos dois lados:

$$-5x + x < 5x - 5x + 20$$

Chegamos a:

$$-4x < 20$$

Finalmente, multiplicando os dois lados agora por $-1/4$ e invertendo o sentido da desigualdade (4ª propriedade), uma vez que este fator é um número negativo, teremos:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)(-4x) > \left(-\frac{1}{4}\right)20$$

Que nos leva ao intervalo

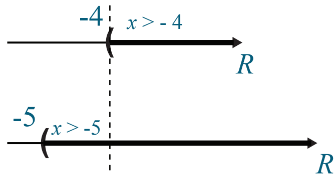
$$x > -5$$

Como já dito anteriormente, a solução final, para a 1ª condição do exercício, deve **compatibilizar** os intervalos:

$x > -4$ (gerado pela 1ª condição) e $x > -5$ (solução do problema para a 1ª condição), ambos representados na figura 17.

Atender simultaneamente aos intervalos acima significa que vamos tomar, como intervalo solução, os valores de x **comuns aos dois intervalos**, ou então, os valores de x que pertençam ao conjunto interseção dos dois intervalos:

FIGURA 17: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO CONJUNTO INTERSEÇÃO DOS DOIS INTERVALOS



1ª solução (parcial)

O intervalo solução que corresponde à interseção dos intervalos mostrados na figura 17 é o intervalo infinito $(-4, +\infty)$ ou , também representado pelo conjunto $\{x \in R \mid x > -4\}$ ou na reta real como mostra a figura 18 abaixo:

FIGURA 18: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Retomaremos este intervalo solução na obtenção da solução geral do problema. Então, vamos continuar, pois o exercício ainda não terminou!

2ª condição

$x + 4 < 0$

Inicialmente, da mesma forma como ocorreu no nosso trabalho com a 1ª condição, esta aqui também gera uma desigualdade, que nos impõe um novo intervalo de valores de x, com o qual a segunda solução parcial do problema, precisa ser compatível.

Aplicando a 2ª propriedade para resolver esta desigualdade inicial, obtemos:

$x + 4 \ - 4 < 0 - 4$, ou seja, $x < - 4$.

Isto significa que agora, a **solução** do problema, **nesta 2ª condição**, deve ser **compatível com este novo intervalo.**

Vamos retomar a desigualdade original e multiplicar seus dois termos pelo número real **NEGATIVO:** $x + 4$, e aplicar a 4ª propriedade:

$$\frac{x}{x+4} < 5$$

$$\frac{x}{x+4}(x+4) > 5(x+4)$$, obtemos

$$x > 5x + 20$$

Note que o sentido da desigualdade foi invertido nesta operação.

Adicionando $- 5x$ aos dois lados (2ª propriedade), teremos:

$- 5x + x > 5\,x - 5x + 20$, que fornece

$- 4x > 20$

Finalmente, multiplicando os dois lados agora por $-\frac{1}{4}$ e invertendo novamente o sentido da desigualdade (4ª propriedade), uma vez que este fator é um número negativo, teremos:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)(-4x) < \left(-\frac{1}{4}\right)20$$

E encontramos:

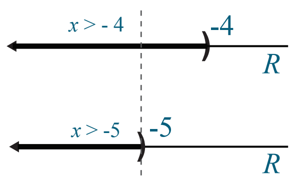
$x < - 5.$

Da mesma forma como ocorreu na solução para a 1ª condição, o **intervalo solução** para esta 2ª condição deve ser o **conjunto interseção** dos intervalos:

$x < - 4$ (gerado pela 2ª condição) e $x < - 5$ (solução do problema para a 2ª condição)

Vemos na figura 19 a representação desses intervalos na reta real e a indicação do conjunto interseção de ambos:

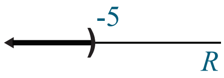
FIGURA 17: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO CONJUNTO INTERSEÇÃO DOS DOIS INTERVALOS



2ª solução (parcial):

O intervalo solução para a **2ª condição** será então $x < -5$, escrito como $(-\infty, -5)$ ou $\{x \in R \mid x < -5\}$ ou representado também na figura abaixo:

FIGURA 20: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

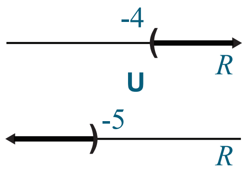


Solução Geral

Conforme já explicamos, a **solução geral** do problema deve ser válida tanto para $x + 4 > 0$ quanto para $x + 4 < 0$, uma vez que ambas são condições válidas.

Desta forma, ela **reunirá** os intervalos soluções desses dois casos, o que é expresso, matematicamente, através do **conjunto união** dos intervalos soluções, ou conjuntos soluções, obtidos para cada uma das duas condições:

FIGURA 21: UNIÃO DAS DUAS SOLUÇÕES PARCIAIS DO EXERCÍCIO



O intervalo solução da solução geral da desigualdade proposta será $x < -5$ ou $x > -4$, que deve ser representado na reta real, conforme mostrado abaixo:

FIGURA 22: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO INTERVALO SOLUÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL

E pode ser representado também como $(-\infty,5) \cup (-4,+\infty)$ ou ainda na forma

$$\{x \in R \mid x < -5 \text{ ou } x > -4\}$$

Observação: Este conjunto (de intervalos) de números reais descrevem os valores de que tornam possível e verdadeira, a desigualdade proposta

$$\frac{x}{x+4} < 5$$

Se tomarmos qualquer valor de x no intervalo fechado $[-5, -4]$, que está **fora do intervalo solução,** veremos que a desigualdade não se verifica.

Vamos testar?

Por exemplo, se $x = -4{,}5$ obtemos $\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{-4{,}5}{-4{,}5+4} = \dfrac{-4{,}5}{-0{,}5} = 9$ e, $9 < 5$ é falso

Logo, a desigualdade não se verifica para $x = -4{,}5$, que pertence a $[-5, -4]$.

Síntese

Caro(a) estudante, a síntese abaixo contém os pontos principais do conteúdo deste módulo.

Avalie se você conseguiu assimilar bem todos eles, pois, caso contrário, é importante que você retorne ao texto, para rever os tópicos que não ficaram claros.

Os números reais se dividem em duas categorias: os números racionais e os irracionais.

Além disso, a cada número real associamos um único ponto da reta, que denominamos reta real.

Essa correspondência gera a representação gráfica dos números reais.

Os números reais formam um conjunto ordenado.

A comparação entre números reais é formalizada nas propriedades das desigualdades (Tabela 1), que estabelecem as leis que regem tais comparações.

Subconjuntos de números reais formam os intervalos, que podem ser abertos, fechados, semiabertos ou infinitos. (Tabela 2)

Como vimos cada uma dessas categorias de intervalos pode ser representada de 3 formas distintas:

- Através da sentença que descreve o respectivo subconjunto
- Através do uso da notação específica para cada tipo de intervalo
- Graficamente, através do subconjunto dos pontos correspondentes localizados sobre a reta real.

Todos esses conhecimentos são utilizados por você na resolução de desigualdades ou inequações, que têm por objetivo determinar o conjunto dos valores de x que satisfazem a desigualdade.

Para isso, você vai isolar a incógnita x, sempre observando cuidadosamente as propriedades das desigualdades e expressando os valores possíveis de x, isto é, o conjunto solução nas suas diferentes formas de representação.

Referências

Bibliografia Básica

FLEMMING, Diva Marília.; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A:** funções, limites, derivação e integração. 6. ed. rev. amp.. São Paulo: Pearson Prentice Hall, c2007.. ix, 448p. ISBN 857605115X.

SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com geometria analítica**: volume 1. São Paulo: McGraw-Hill, c1987.. xxii, 829p. ISBN 0074504118.

THOMAS, George Brinton; FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo:** volume 1. 10. ed.. São Paulo: Addison-Wesley, c2001.. xvi, 660[4]p. ISBN 8588639068.

Bibliografia Complementar

ANTON, Howard; BIVENS, Irl.; DAVIS, Stephen. **Cálculo:** volume 1. 8. ed.. Porto Alegre: Bookman, 2007.. xx, 581[64]p. ISBN 9788560031634.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica:** volume 1. 3. ed.. São Paulo: Harbra, c1994.. xii, 685[64] p.: ISBN 8529400941.

LARSON, Roland E.; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com aplicações.** 4.ed.. Rio de Janeiro: LTC Ed., c1998.. xxii, 711p. ISBN 8521611447.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, c1994.. xxvi, 744p. ISBN 8534603081.

STEWART, James. **Cálculo:** volume 1. 5. ed.. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.. 581p., [204]p. ISBN 8522104794.

Glossário

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Símbolo	Como se lê
$\in$ / $\notin$	Pertence a / Não pertence a
$\subset$ / $\not\subset$	Está contido / Não está contido
$\supset$ / $\not\supset$	Contém / Não contém
$\exists$ / $\nexists$	Existe / Não existe
$\exists\|$	Existe apenas um ou existe um único
$\|$	Tal que
$\forall$	Para todo
$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Se e somente se
$\cup$	União (de conjuntos)
$\cap$	Interseção (de conjuntos)
$\vee$	Ou
$\wedge$	E
$\varnothing$	Conjunto vazio
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor ou igual a
$\geq$	Maior ou igual a
Σ	Somatório
$\int$	Integral
$+\infty$ / $-\infty$	Mais infinito / Menos infinito
log	Logaritmo decimal ou logaritmo na base 10
ln	Logaritmo neperiano ou logaritmo na base *e*
N	Conjunto dos números naturais
Z	Conjunto dos números inteiros
Q	Conjunto dos números racionais
R	Conjunto dos números reais