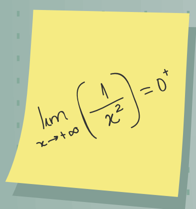
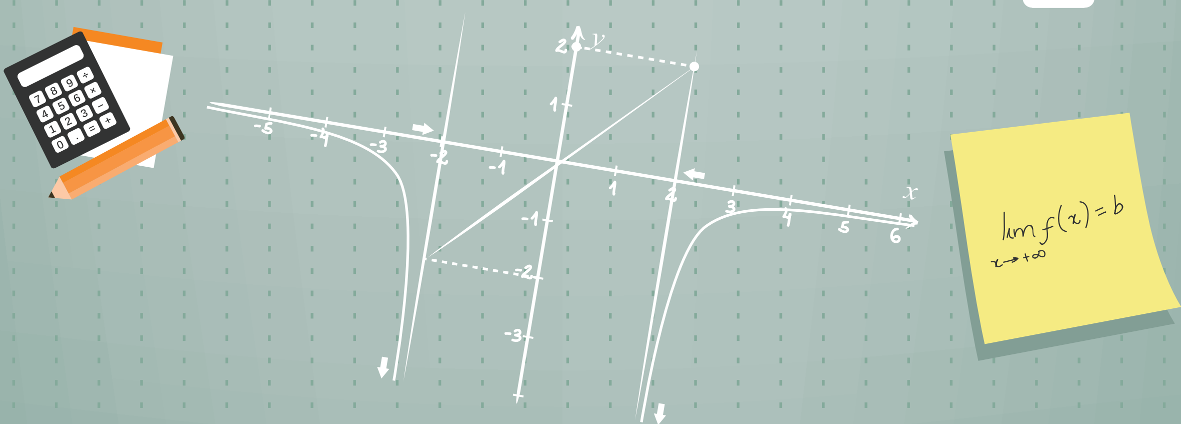
UNIVERSIDADE FUMEC

Cálculo I

APLICAÇÕES DE LIMITES:

ASSÍNTOTAS E CONTINUIDADE





- **RECONHECENDO UMA APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA EM RELAÇÃO A UMA RETA VERTICAL E HORIZONTAL**
- **NOMEANDO UMA ASSÍNTOTA VERTICAL E HORIZONTAL NO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO**
- **ENTENDENDO A IDEIA INTUITIVA DE CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO**
- **UTILIZANDO DAS CONDIÇÕES PARA A CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO PARA DETERMINAR SE ELA É CONTÍNUA OU DESCONTÍNUA**

APRESENTAÇÃO

Caro(a) aluno(a), nesse módulo você verá algumas aplicações de limites que abordam conceitos muito importantes para o cálculo, como os de assíntotas horizontais e verticais e o essencial conceito o de continuidade de uma função.

Na educação à distância a sua relação com o conhecimento se dá fundamentalmente através da leitura, e é necessário que você leia com muita atenção os textos apresentados.

Lembre-se de ter sempre à mão um caderno de anotações ao qual você possa recorrer sempre que tiver dúvida sobre algum desenvolvimento algébrico ou para anotar conceitos importantes ou dúvidas que lhe tenham ocorrido.

Uma postura proativa é muito importante na hora de ler. Afinal, é você quem constrói o seu conhecimento, e, portanto, é você o responsável por ele.

Seja um leitor investigativo, procurando acompanhar o raciocínio do autor do texto; sempre perguntando o porquê das coisas e tentando antecipar as conclusões do autor.

É sobre essas questões sofisticadas e intrigantes que tratamos quando trabalhamos com os limites.

Vamos lá?

Bons estudos e boa aprendizagem!

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao final deste módulo você será capaz de:

- Reconhecer gráfica e algebricamente uma aproximação assintótica em relação a uma reta vertical e nomear uma assíntota vertical no gráfico de uma função;
- Reconhecer gráfica e algebricamente uma aproximação assintótica em relação a uma reta horizontal e nomear uma assíntota horizontal no gráfico de uma função;
- Entender a ideia intuitiva de continuidade de uma função;
- Utilizar-se das condições para a continuidade de uma função para determinar se ela é contínua ou descontínua em um número.

FICHA TÉCNICA

UNIVERSIDADE FUMEC

FUMEC VIRTUAL - SETOR DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Gestão Pedagógica
Coordenação
Gabrielle Nunes P. Araújo
Transposição Pedagógica
Ediane Cardoso

Produção de Design Multimídia
Coordenação
Rodrigo Tito M. Valadares
Design Multimídia
Dennis Henrique Dias Peçanha
Raphael Gonçalves Porto Nascimento

Infra-Estrututura e Suporte
Coordenação
Anderson Peixoto da Silva

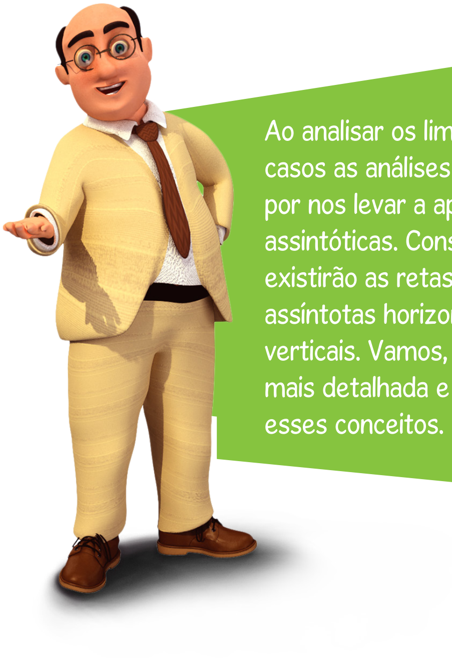
AUTORIA DA DISCIPLINA

Prof. Ronaldo Abrão Pimentel e
Profa. Valéria Cunha Figueiredo

BELO HORIZONTE - 2013

APLICAÇÕES DE LIMITES: ASSÍNTOTAS E CONTINUIDADE

Assíntotas verticais e horizontais no gráfico de uma função



Ao analisar os limites, em alguns casos as análises gráficas acabam por nos levar a aproximações assintóticas. Consequentemente existirão as retas, que chamamos de assíntotas horizontais e assíntotas verticais. Vamos, agora, abordar mais detalhada e formalmente esses conceitos.

ASSÍNTOTAS VERTICAIS NO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Quando estudamos os limites “infinitos” nós os associamos a aproximações assintóticas. Vamos agora formalizar essa associação.

ATENÇÃO

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva dada pela função $y = f(x)$ se pelo menos uma das condições for satisfeita:

I. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

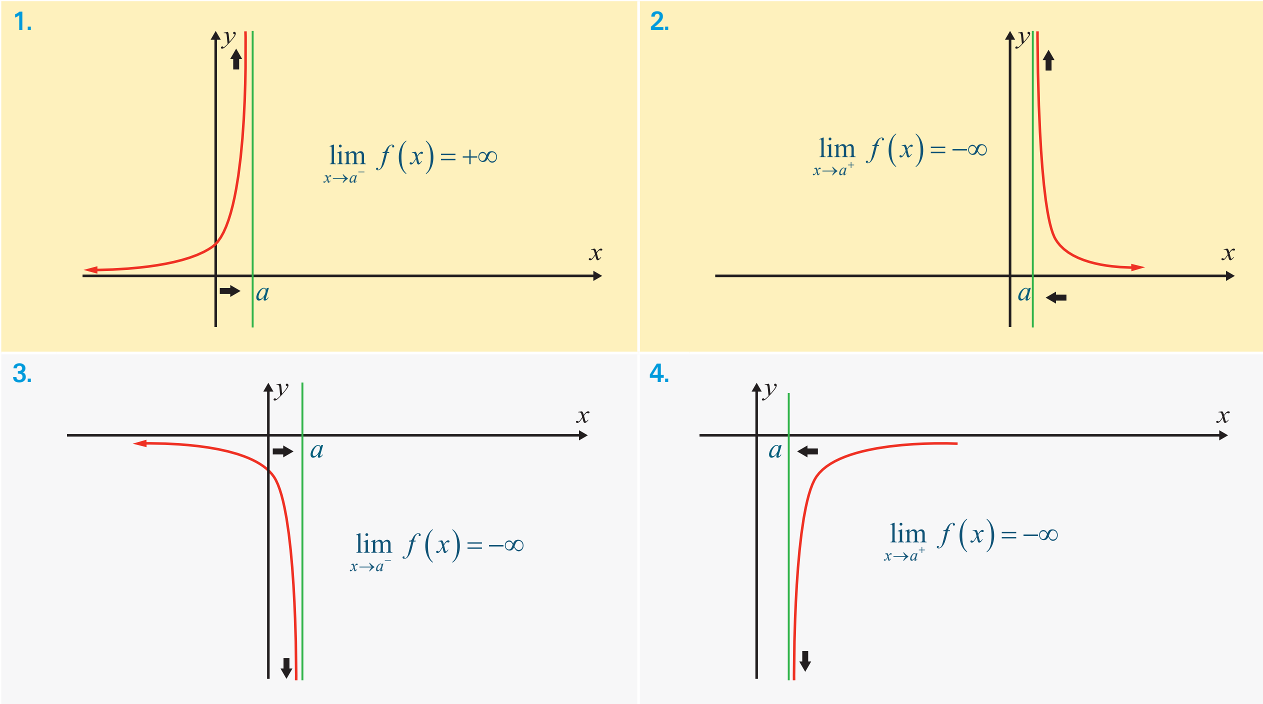
II. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

III. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

IV. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Cada uma das figuras a seguir mostra parte do gráfico de uma função na qual a reta $x = a$ é uma **assíntota vertical**.

GRÁFICOS 1, 2, 3 E 4 – APROXIMAÇÕES ASSINTÓTICAS VERTICAIS



Fonte: próprio autor

Exemplo 1

Encontre, caso existam, as assíntotas verticais do gráfico da função $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

Solução

Para que o gráfico dessa função admita uma assíntota vertical é necessário que $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

Mas que "a" será este?

Veja que, para que possamos utilizar as generalizações 2 ou 3 vistas no módulo anterior, o limite do denominador da função, quando x tender a a tem que ser zero. Mas o valor de x que zera o denominador desta função é o valor $x = 3$. Logo temos que fazer o x tender a 3. Note que $x = 3$ não está no domínio da função, que é $D_f = R - \{3\}$!

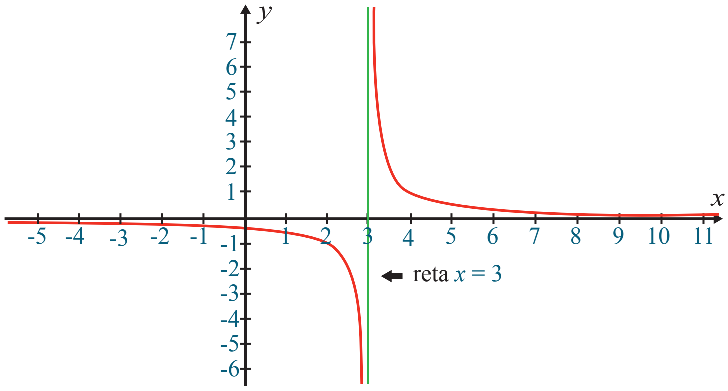
Temos então que achar $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x)$.

1. $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$ Aqui podemos concluir que há uma aproximação assintótica da curva da função em relação à reta $x = 3$, quando x se aproxima de $x = 3$ pela esquerda. Logo, a reta $x = 3$ é assíntota vertical do gráfico de f.

2. $\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ e haverá também uma aproximação assintótica da curva da função em relação à reta $x = 3$, quando x se aproxima de $x = 3$ pela direita. Logo, temos uma confirmação de que a reta $x = 3$ é assíntota vertical do gráfico de f.

3. O gráfico da curva dada pela função $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ é mostrado a seguir, destacando a reta $x = 3$ como assíntota vertical do gráfico da função.

GRÁFICO 5 – GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$



Fonte: próprio autor

Exemplo 2

"Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = tgx$.

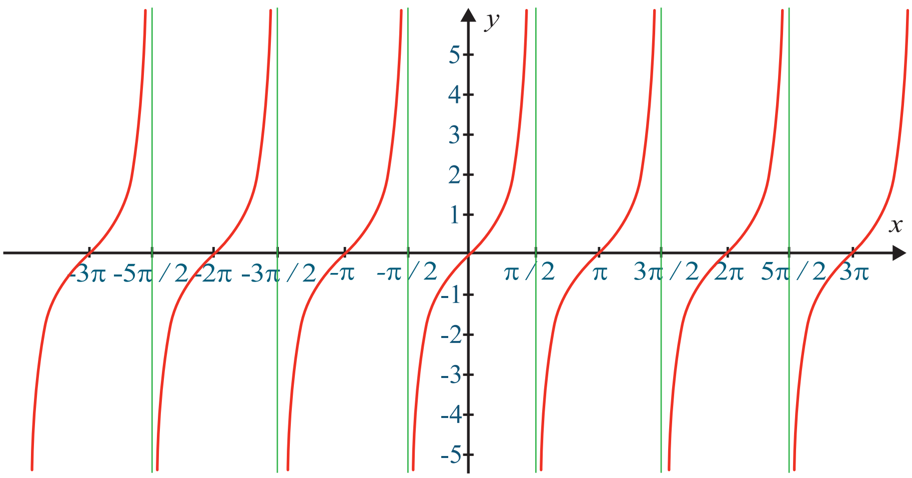
Solução

Como $tgx = \dfrac{senx}{\cos x}$, existem assíntotas verticais onde $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \to 0^+$ quando $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$ e $\cos x \to 0^-$ quando $x \to \dfrac{\pi}{2}^+$ e considerando que $senx$ é positivo quando do x está próximo de $\dfrac{\pi}{2}$ temos:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tgx = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tgx = -\infty .$$

Isso mostra que a reta $x = \dfrac{\pi}{2}$ é uma assíntota vertical. Por raciocínio análogo mostra que as retas $x = (2K+1)\dfrac{\pi}{2}$, onde K é um número inteiro, são todas assíntotas verticais do gráfico de $f(x) = tgx$. O gráfico 10 confirma isso." (Stewart, 2006)

GRÁFICO 6 – GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = tgx$



Fonte: próprio autor

Exemplo 3

Encontre, caso existam, as assíntotas verticais do gráfico da função

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-3}{x^2-4} & se\ \ x<-2\\ x & se-2\le x\le 2\\ \dfrac{-3}{x^2-4} & se\ \ x>2\end{cases}$$

Solução

Veja que o domínio da função é $D_f = R$. Entretanto existem quebras exatamente em $x = -2$ e $x = 2$, que são os valores de x que anulariam o denominador da função.

Então devemos achar os limites com $x \to -2^-$, $x \to -2^+$, $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$.

I. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\dfrac{-3}{x^2-4}\right)=-\infty$ e podemos concluir que há uma aproximação assintótica da curva da função em relação à reta $x = -2$, quando x se aproxima de $x = -2$ pela esquerda. Logo, a reta $x = -2$ é assíntota vertical do gráfico de f.

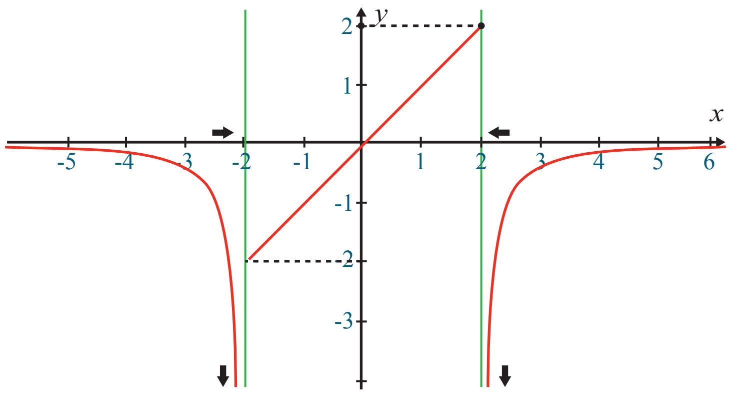
II. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x=-2$. Como o limite não deu infinito, então ele não caracteriza aproximação assintótica em relação à reta $= -2$ quando x se aproxima de $x = -2$ pela direita. Entretanto a reta $x = -2$ é assíntota vertical do gráfico de f por causa da aproximação assintótica pela esquerda.

III. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x=2$. Não caracteriza existência de assíntota vertical.

IV. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{-3}{x^2-4}\right)=-\infty$. Há uma aproximação assintótica da curva da função em relação à reta $x = 2$, quando x se aproxima de $x = 2$ pela direita. Logo, a reta $x = 2$ é assíntota vertical do gráfico de f.

Veja, a seguir, o gráfico da função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-3}{x^2-4} & se\ \ x<-2\\ x & se-2\le x\le 2\\ \dfrac{-3}{x^2-4} & se\ \ x>2\end{cases}$

GRÁFICO 7 – GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-3}{x^2-4} & se\ \ x<-2\\ x & se-2\le x\le 2\\ \dfrac{-3}{x^2-4} & se\ \ x>2\end{cases}$



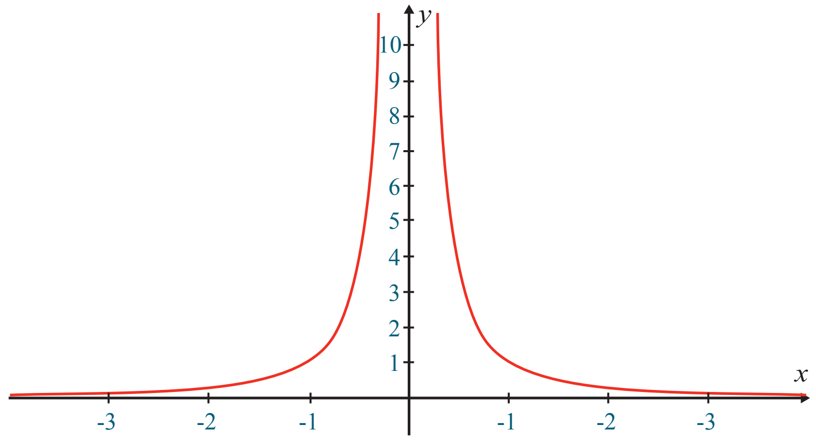
Fonte: próprio autor

ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS NO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Acabamos de analisar a ocorrência de assíntotas verticais no gráfico de uma função. Iremos agora analisar se ocorrem também assíntotas horizontais e como se dá esse processo.

Vamos rever a função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ e o seu comportamento quando x cresce ou decresce infinitamente. Revisemos seu gráfico:

GRÁFICO 8 – FUNÇÃO $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$



Fonte: próprio autor

Vimos que, quando x cresce indefinidamente a imagem da função se aproxima cada vez mais de zero. Nota-se que a curva aproxima-se assintoticamente do eixo $0x$.

E vimos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=0^+$

Vimos também que, quando x decresce indefinidamente a imagem da função se aproxima cada vez mais de zero. Isso se expressa graficamente como uma aproximação assintótica da curva em relação ao eixo $0x$. E também que, algebricamente esse movimento de aproximação é expresso por $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=0^+$.

Nos dois casos em que ocorrem aproximações assintóticas em relação ao eixo $0x$, dizemos que o eixo $0x$ (a reta $y=0$) é uma **assíntota horizontal** do gráfico da função.

Podemos então escrever a seguinte definição:

IMPORTANTE

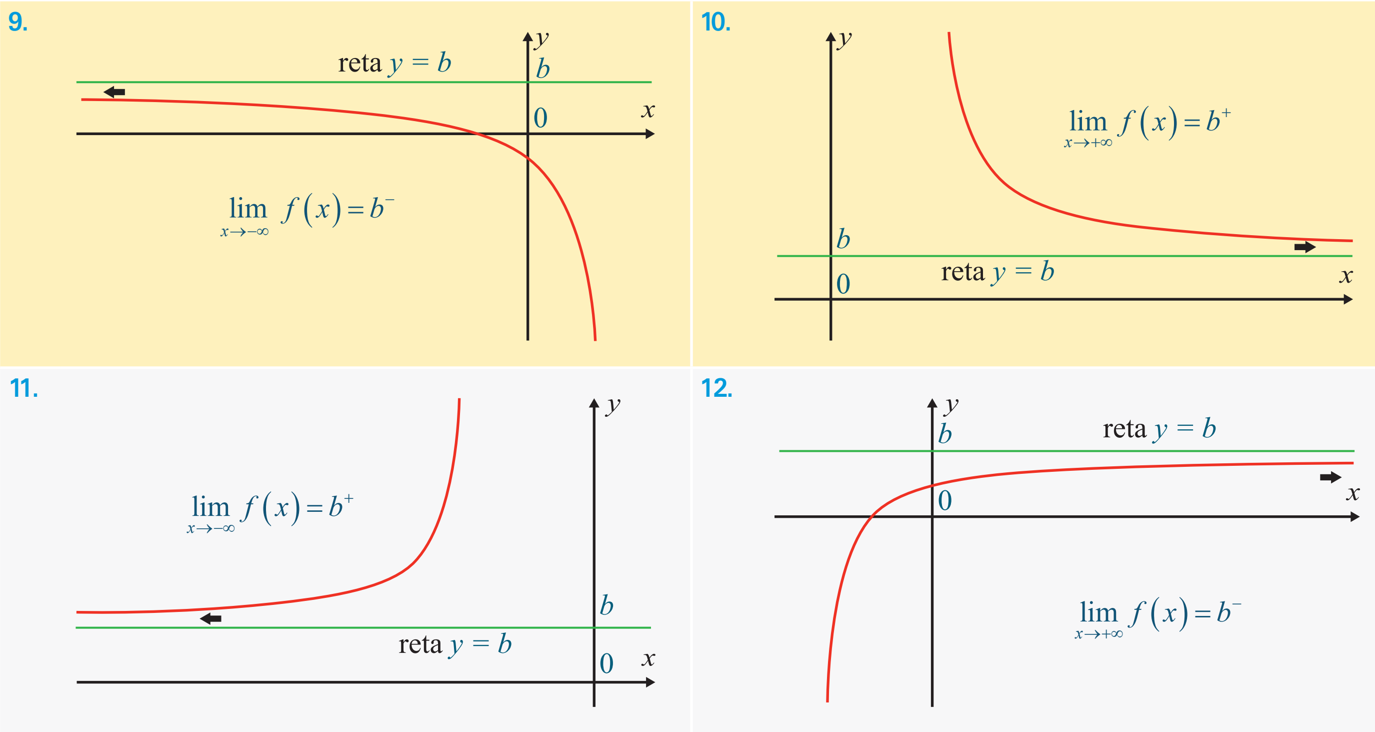
A reta $y=b$ é uma **assíntota horizontal** da curva $y=f(x)$ se pelo menos uma das afirmações seguintes for válida:

I. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$

II. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

Cada uma das figuras a seguir mostra parte do gráfico de uma função na qual a reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal.**

GRÁFICOS 9, 10, 11 E 12 – APROXIMAÇÕES ASSINTÓTICAS HORIZONTAIS



Fonte: próprio autor

Exemplo 1

Encontre, caso exista(m), a(s) assíntota(s) horizontal (is) do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ e faça um esboço gráfico do resultado encontrado.

$$D_f = R$$

Solução

Temos que achar $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

I. $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 0$. Só por este limite já podemos afirmar que a reta $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando x decresce infinitamente.

Mas só isso não basta. Precisamos saber se a aproximação assintótica vai ocorre acima ou abaixo do eixo $0x$.

Neste caso basta sabermos o sinal da função quando x assumir valores negativos cada vez menores.

Veja que o numerador será negativo e o denominador, como é um número ao quadrado somado com um, será positivo. Então a fração será negativa e podemos afirmar que, quando $x \to -\infty$, $y \to 0^-$.

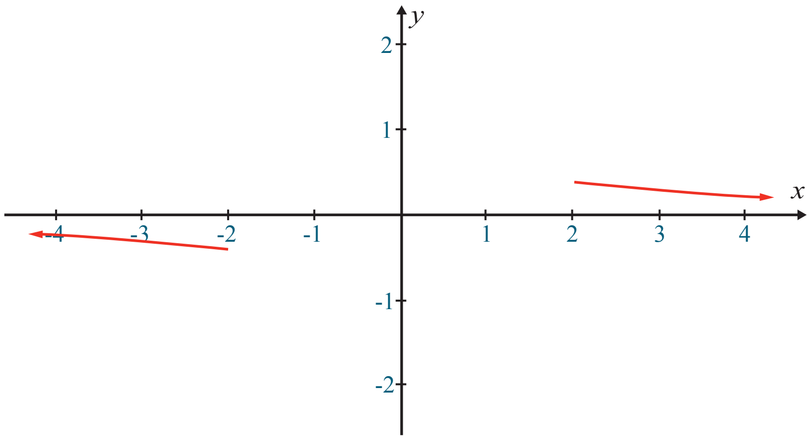
Logo a aproximação assintótica se dará por baixo da reta $y = 0$.

II. $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = 0^+$. Esse limite afirma que quando x crescer indefinidamente vai ocorrer uma aproximação assintótica em relação à reta $y = 0$. Se fizermos uma análise de sinal da fração, de forma análoga à do limite anterior, veremos que se $x \to +\infty$, então $y \to 0^+$.

Conclusão: a reta $y = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f, ocorrendo duas aproximações assintóticas, uma de cada lado.

Veja a representação gráfica desse resultado encontrado:

GRÁFICO 13 – ASSÍNTOTA HORIZONTAL



Fonte: próprio autor

Exemplo 2

Encontre, caso exista(m), a(s) assíntota(s) horizontal (is) do gráfico da função $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+2}$ e faça um esboço gráfico do resultado encontrado.

$$D_f = R$$

Veja que $\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+2}\right) = 1$ e $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+2}\right) = 1$. Então a reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f.

Precisamos saber como ocorrem as aproximações assintóticas.

Agora não basta sabermos o sinal da fração, como no exemplo anterior, pois um número maior ou menor que 1, próximo dele, será sempre positivo. Precisamos saber é se vai tender a 1 com valores maiores ou menores que 1.

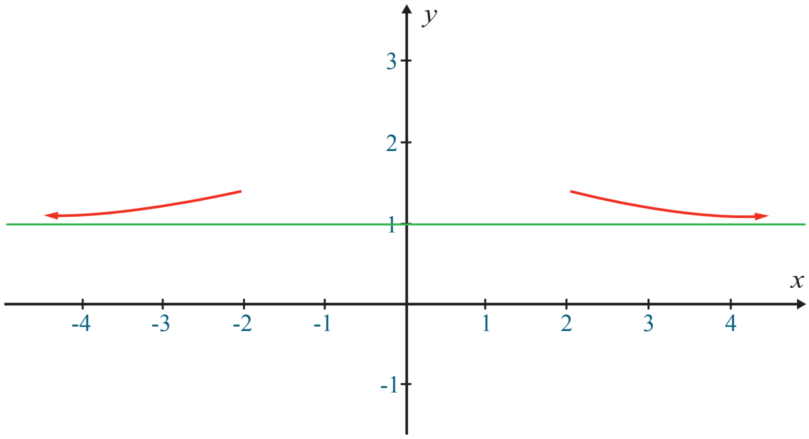
Para isso, observe que o numerador é um número elevado ao quadrado e somado com 5. E o denominador é esse mesmo número elevado ao quadrado, mas somado com 2. Portanto a fração terá o numerador maior que o denominador. E seu valor será sempre maior que 1.

Então $\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+2}\right) = 1^+$ e $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+2}\right) = 1^+$

As aproximações assintóticas ocorrerão por cima da reta $y = 1$.

A representação gráfica dos resultados encontrados é:

GRÁFICO 14 – ASSÍNTOTA HORIZONTAL



Fonte: próprio autor

Exemplo 3

Encontre, caso exista(m), a(s) assíntota(s) horizontal (is) do gráfico da função $f(x)=\dfrac{x^5-2}{4-x^2}$ e faça um esboço gráfico do resultado encontrado.

$$D_f = R-\{-2,2\}$$

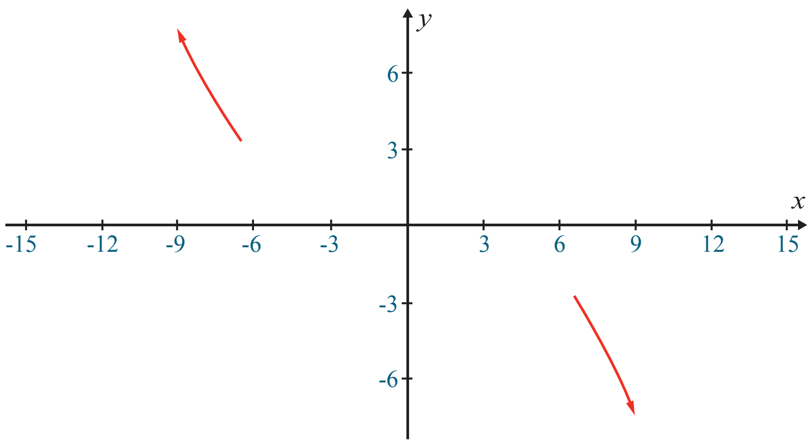
Solução

Veja que $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^5-2}{4-x^2}\right)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^5-2}{4-x^2}\right)=-\infty$.

Então não há aproximações assintóticas e não existem assíntotas verticais.

Veja o esboço gráfico dos resultados encontrados:

GRÁFICO 15 – NÃO HÁ ASSÍNTOTA HORIZONTAL



Fonte: próprio autor

Exemplo 4

Encontre, caso exista(m), a(s) assíntota(s) horizontal(is) e vertical(is) do gráfico da função $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-1}$ e faça um esboço gráfico do resultado encontrado.

$$D_f = R - \{1\}$$

Solução

I. Assíntota vertical:

Para acharmos assíntota vertical temos que ver se há algum valor de x fora do domínio, que, no caso, é $x = 1$.

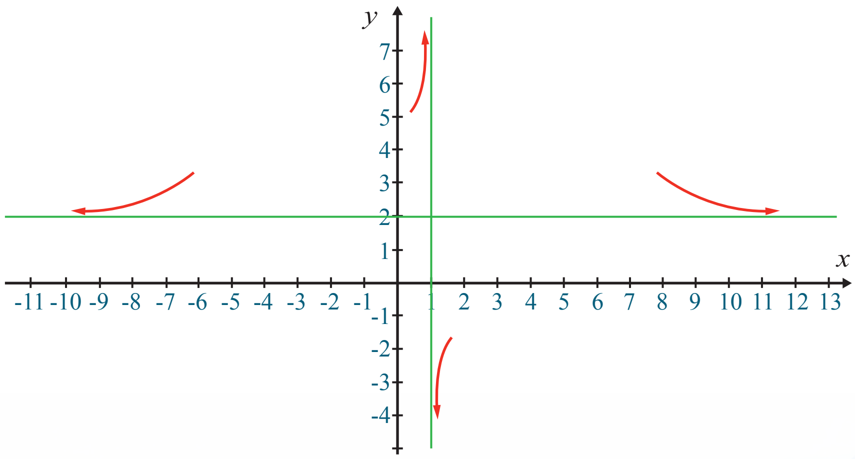
Temos que $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2x-4}{x-1}\right)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2x-4}{x-1}\right)=-\infty$. Portanto, a reta $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico de f.

II. Assíntota horizontal:

Temos que $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-4}{x-1}\right)=2^+$ e $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x-4}{x-1}\right)=2^+$. Portanto, a reta $y = 2$ é assíntota horizontal do gráfico de f.

Esboço gráfico dos resultados encontrados:

GRÁFICO 16 – ASSÍNTOTA HORIZONTAL E ASSÍNTOTA VERTICAL



Fonte: próprio autor

Continuidade

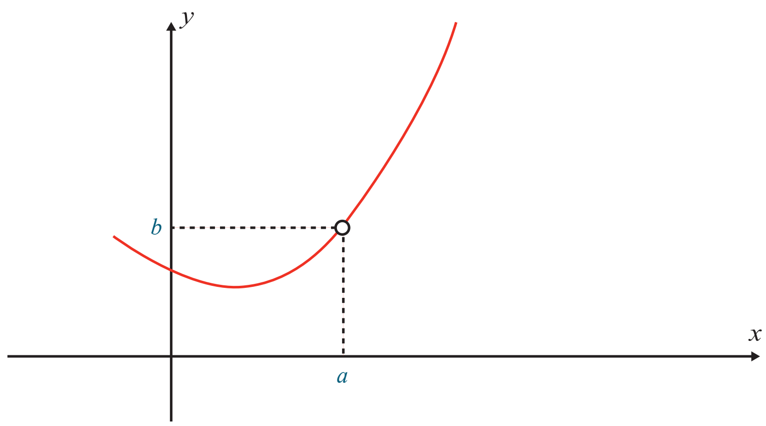
Um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções cortes ou mudanças. O processo será descontínuo se houver uma quebra ou interrupção enquanto ele ocorre.

Uma abordagem semelhante ocorre sobre continuidade de uma função em matemática. Graficamente podemos afirmar que uma função será *contínua* em um determinado valor de x se a curva não sofrer nenhum corte ou interrupção ou quebra ao passar por esse valor. Você não precisará retirar o lápis do papel para traçar o gráfico da função nesse número x.

Analogamente, a função será *descontínua* em um valor x se você precisar tirar o lápis do papel ao passar por esse número x. Ou seja, ao passar por x a função sofrerá uma quebra.

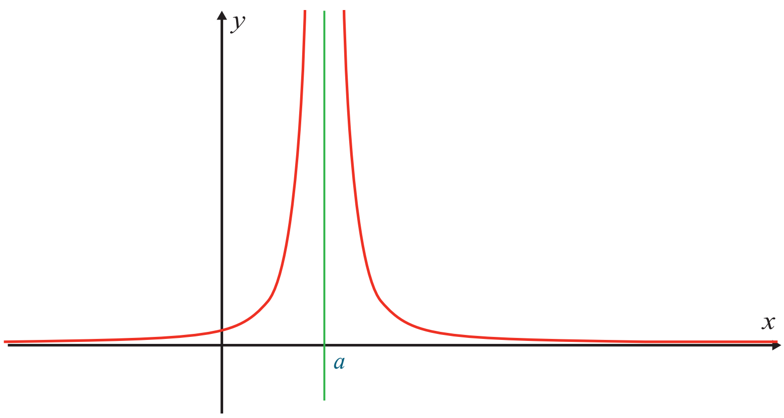
Vamos analisar alguns tipos de descontinuidade para descobrirmos o que garante a continuidade da função em um ponto. Seja uma função $y = f(x)$ representada em cada um dos seis gráficos a seguir:

GRÁFICO 17



Fonte: próprio autor

GRÁFICO 18



Fonte: próprio autor

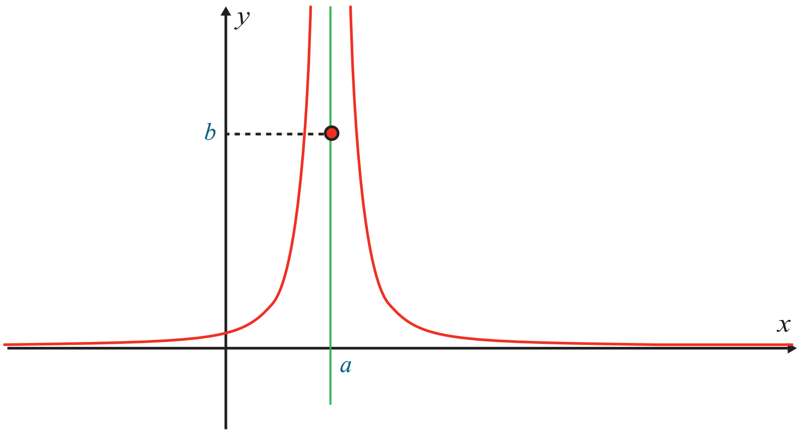
Veja que nos gráficos 17 e 18 f é descontínua em $x = a$, porque $\nexists f(a)$. Então, a primeira condição para uma função ser contínua em $x = a$ é que exista $f(a)$.

CONDIÇÃO 1

$\exists f(a)$

Mas, será então que, se existir $f(a)$, a função será contínua em $x = a$? Vamos analisar a função do gráfico 19.

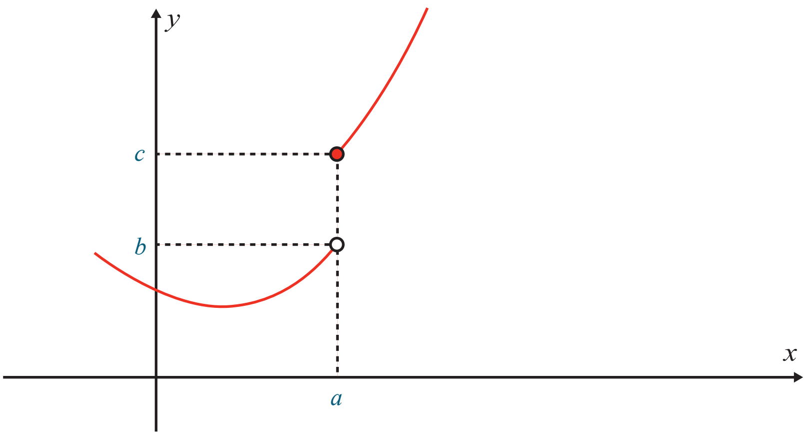
GRÁFICO 19



Fonte: próprio autor

Sabemos, pelo gráfico, que f é descontínua em $x = a$. Note que $\exists f(a)$, mas $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, pois $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Então não basta existir $f(a)$. Tem que existir também $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Vejamos a função do gráfico 20.

GRÁFICO 20



Fonte: próprio autor

Veja que a função é descontínua em $x = a$, pois ela dá um salto neste ponto. E $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, uma vez que os limites laterais são diferentes. E isso vem confirmar nossa proposição de que também tem que existir $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

CONDIÇÕES 1 E 2

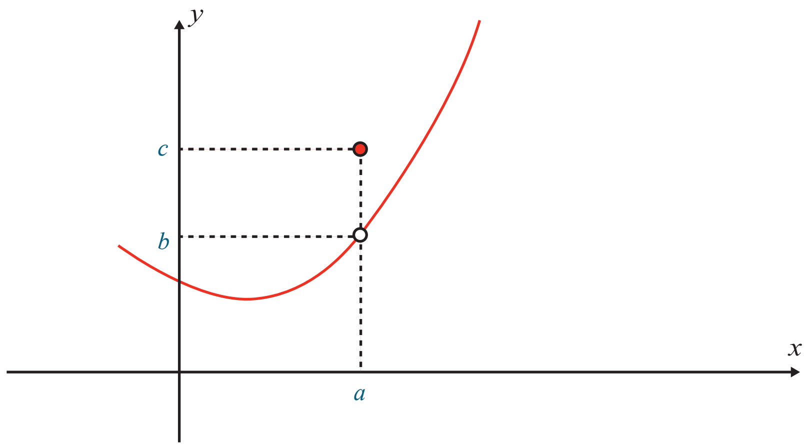
I. $\exists f(a)$

II. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$

E agora, será que as duas condições são suficientes?

Vejamos a função do gráfico 21.

GRÁFICO 21

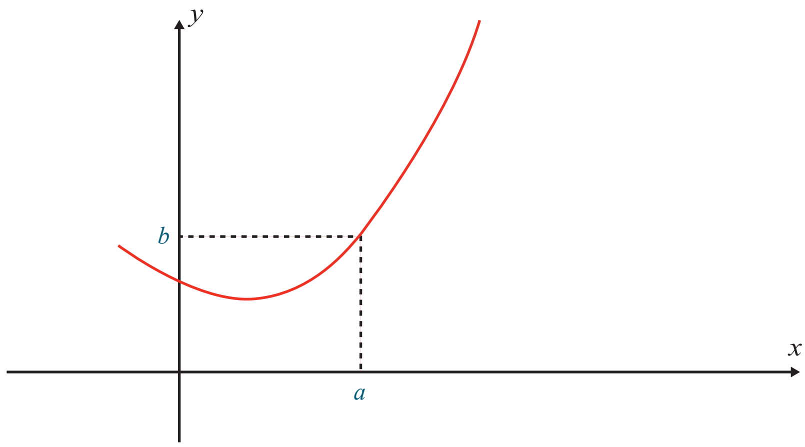


Fonte: próprio autor

Note que $\exists f(a) = c$, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e mesmo assim a função é descontínua em $x = a$, pois ali ela dá um salto para marcar o ponto (a, c) e depois volta ao seu traçado regular.

Veja que se pudéssemos pegar o pontinho vermelho e colocá-lo na falha que existe na curva, esta seria contínua! Mas isto significaria fazer $b = c$, ou seja, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. E esta é a terceira e última condição. Veja a função do gráfico 22.

GRÁFICO 22



Fonte: próprio autor

Vamos observar a função do gráfico 22. Veja que ela é contínua em $x = a$. E também que $\exists f(a)$, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Essas são as três condições para que uma função seja contínua em $x = a$.

Vamos agora formalizar esta ideia?

IMPORTANTE

A função f é **contínua** em $x = a$ se forem satisfeitas as três condições a seguir:

I. $\exists f(a)$

II. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$

III. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se uma ou mais de uma dessas condições não for satisfeita a função será **descontínua** em $x = a$

Se observarmos bem veremos que essas três condições de continuidade podem ser resumidas na terceira: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; pois para duas coisas serem iguais elas têm que existir!

Exemplo 1

Analise a continuidade da função $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$.

Veja que o domínio da função é $D_f = R - \{1\}$, ou seja, $\nexists f(1)$. Então não foi satisfeita a condição (i), e a função é descontínua em $x = 1$.

Observe que para qualquer outro valor de $x = a$, que seja diferente de 1, se formos achar $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, iremos apenas substituir o valor de a na função, achando $f(a)$. Então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ e a função será contínua para todo $x \neq 1$.

Podemos então afirmar que:

TOME NOTA

Qualquer função racional é contínua em seu domínio.

Exemplo 2

Analise a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 5 & se\ x = 1 \end{cases}$.

O domínio da função é $D_f = R$. Mas ocorre uma quebra da função em $x = 1$ e aí **pode** ocorrer uma descontinuidade.

Vamos então analisar a continuidade da função em $x = 1$.

I. $\exists f(1)$ e $f(1) = 5$

II. $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ pois $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$

Portanto, não foi satisfeita a condição (ii) e a função é descontínua em $x = 1$.

Exemplo 3

Analise a continuidade da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$.

O domínio é $D_f = R$. Além disso, é fácil perceber que, para calcularmos o limite dessa função quando x tender para qualquer valor de a, deveremos substituir o valor de a na função, achando $f(a)$.

Então $\lim\limits_{x \to a}\left(x^3 - 2x^2 + 4x - 3\right) = a^3 - 2a^2 + 4a - 3 = f(a)$ e a função será contínua para todo x. Daí podemos concluir que:

TOME NOTA

Uma função polinomial é constante para todo x.

Exemplo 4

Analise a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1} & se\ x \neq -1 \\ 2 & se\ x = -1 \end{cases}$.

Ocorre uma quebra em $x = -1$ e é neste valor que devemos investigar.

I. $\exists f(1)$ e $f(1) = 2$

II. $\exists \lim\limits_{x \to -1} f(x)$ pois $\lim\limits_{x \to -1}\left(\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1}\left(\dfrac{(x-3)(x+1)}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1}(x-3) = -4$

III. Mas $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$, logo, f é descontínua em $x = -1$.

Observe que se a função tivesse sido definida como sendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1} & se\ x \neq -1 \\ -4 & se\ x = -1 \end{cases}$

ela seria contínua em $x = -1$, pois $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -4$.

Exemplo 5

Analise a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} x+2 & se\ x \leq 2 \\ -x+4 & se\ x > 2 \end{cases}$.

O domínio da função é $D_f = R$ e devemos analisar a continuidade em $x = 2$, que é onde ocorre uma quebra.

I. $\exists f(2) = 4$

II. $\nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Pois $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-}(x+2) = 4$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+}(-x+4) = 2$, e os limites laterais são diferentes, logo não existe o limite.

Temos então que a função é descontínua em $x = 2$.

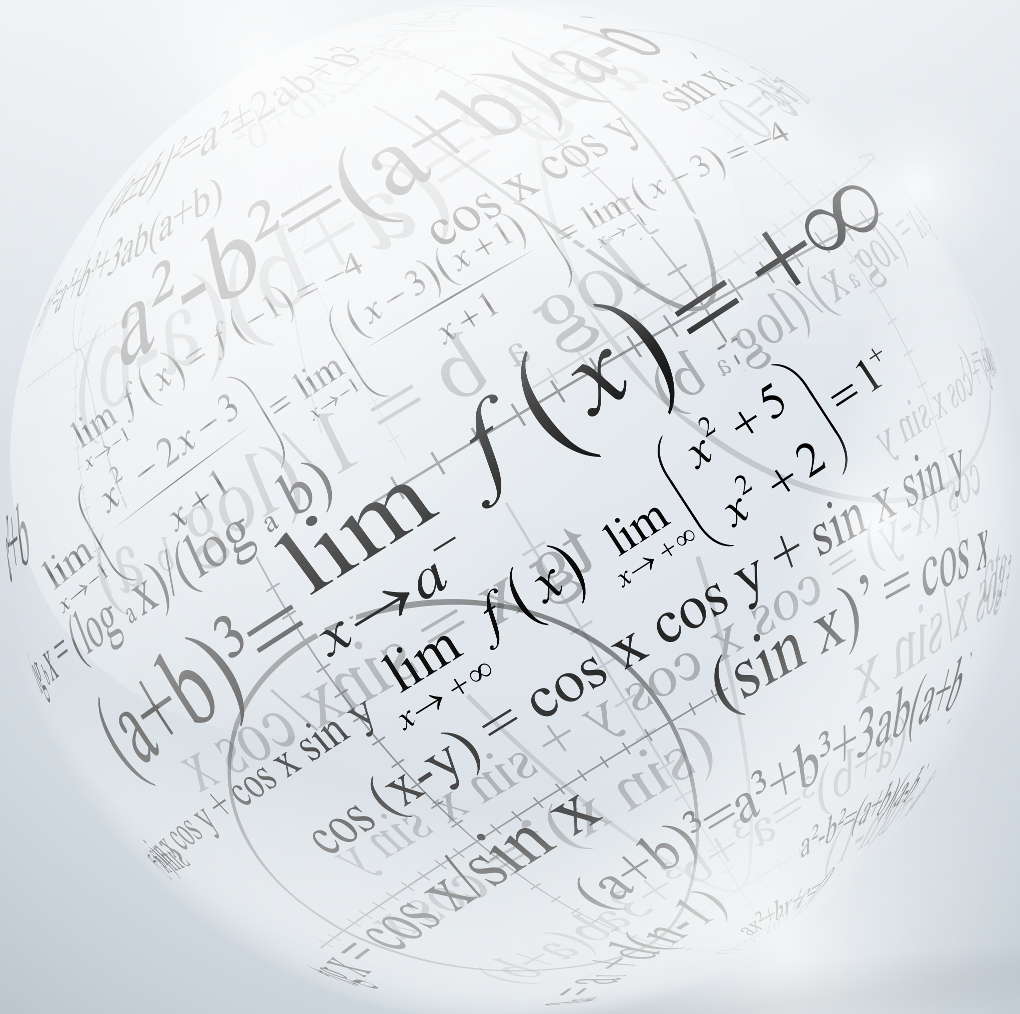
Exemplo 6 - Analise a continuidade da função $f(x) = tgx$.

Como $tgx = \dfrac{\cos x}{senx}$, então $f(x) = tgx$ será contínua, exceto onde $\cos x = 0$. Isso acontece quando x é um múltiplo inteiro ímpar de $\dfrac{\pi}{2}$, e, portanto $f(x) = tgx$ será descontínua quando $x = K\pi + \dfrac{\pi}{2}$, onde K é um número inteiro.

ATENÇÃO

Outras informações importantes:

1. Os seguintes tipos de funções são contínuas em todo número de seus domínios:
   I. Funções polinomiais;
   II. Funções racionais;
   III. Funções raízes;
   IV. Funções trigonométricas;
   V. Funções trigonométricas inversas;
   VI. Funções exponenciais;
   VII. Funções logarítmicas.
2. Uma função é contínua em um intervalo aberto se ela for contínua em todo x pertencente a este intervalo.



Síntese

Caro(a) estudante

Nesse módulo você aprendeu a utilizar-se de limites para reconhecer algebricamente a existência ou não de assíntotas horizontais e verticais do gráfico de uma função.

Compreendeu a ideia intuitiva de continuidade de uma função.

Aprendeu a utilizar-se de limites nas condições de continuidade de uma função para determinar se elas são contínuas ou não em um determinado valor de x.

Espero que você tenha se familiarizado com as ideias que lhe foram apresentadas neste texto. Refaça os exemplos do módulo e garanta a sua aprendizagem com a prática destes e de outros exemplos que você poderá encontrar nas referências bibliográficas do módulo.

Após o estudo deste módulo, avalie se você conseguiu entender bem os assuntos aqui abordados. Se não, você deve retornar ao texto e estudar novamente os tópicos que não ficaram claros, ou pedir ajuda ao seu professor.

Saudações e continue seus estudos!

Referências:

Bibliografia Básica

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica: volume 1**. 3ª ed.. São Paulo: Harbra, c1994.. xii, 685[64] p.: ISBN 8529400941.

STEWART, James. **Cálculo: volume 1**. 5ª ed.. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.. 581p., [204]p. ISBN 8522104794.

THOMAS, George Brinton; FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo: volume 1**. 10ª ed.. São Paulo: Addison-Wesley, c2001.. xvi, 660[4]p. ISBN 8588639068.

Bibliografia Complementar:

ANTON, Howard; BIVENS, Irl.; DAVIS, Stephen. **Cálculo: volume 1**. 8ª ed.. Porto Alegre: Bookman, 2007.. xx, 581[64]p. ISBN 9788560031634.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração**. 6ª ed. rev. amp.. São Paulo: Pearson Prentice Hall, c2007.. ix, 448p. ISBN 857605115X

LARSON, Roland E.; HOSTETLER, Robert P.; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com aplicações.** 4ªed.. Rio de Janeiro: LTC Ed., c1998.. xxii, 711p. ISBN 8521611447.

SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com geometria analítica: volume 1**. São Paulo: McGraw-Hill, c1987.. xxii, 829p. ISBN 0074504118.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, c1994.. xxvi, 744p. ISBN 8534603081.