Tarea 2 - Modelación y Simulación

Antonio Miguel Natusch Zarco
2022111958
Ingeniería de Sistemas

<u>Números pseudoaleatorios</u>

Estos problemas se pueden encontrar en la **sección 2.5** del libro principal de la materia, de García et al. (2013, p. 52–58),

1) Notación y Conceptos

- $r_i = \{r_1, r_2, r_3, ..., r_n\}$: Secuencia de números aleatorios entre el intervalo $(0, 1)$ que contiene n números, todos ellos diferentes.
- n: *Período* o *ciclo de vida* del generador que creó la secuencia r_i.
- $$f(r) : \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro valor} \end{cases}$$

  ...distribución uniforme continua que debe seguir un conjunto de r_i.
- N: Período de vida *bastante grande* para un generador de números pseudoaleatorios.
- X_i: Número entero positivo que se utiliza como semilla o detonador en los algoritmos congruenciales y no congruenciales para generar números pseudoaleatorios.

(García et al., 2013, p. 22-23)

1.1) Algoritmos no congruenciales

1.1.1) Algoritmo de cuadrados medios

Este algoritmo no congruencial fue propuesto en la decada de los cuarenta del siglo xx por Von Neumann y Metropolis. Requiere un número entero detonador (llamado semilla) con D dígitos, el cual es elevado al cuadrado para seleccionar del resultado los D dígitos del centro; el primer número se determina simplemente anteponiendo el «0.» a esos dígitos. Para obtener el segundo r_i se sigue el mismo procedimiento, solo que ahora se elevan al cuadrado los D dígitos del centro que se seleccionaron para obtener el primer r_i.
Este método se repite hasta obtener n números r_i. A continuación se presentan con más detalle los pasos para generar números con el algoritmo de cuadrados medios.

1. Seleccionar una semilla (X_0) con D dígitos $(D > 3)$.
2. Sea $Y_0 =$ resultado de elevar X_0 al cuadrado; sea $X_1 =$ los D dígitos del centro, y sea r_i = 0.D dígitos del centro.
3. Sea $Y_i =$ resultado de elevar X_i al cuadrado; sea $X_{i+1} =$ los D dígitos del centro, y sea r_i = 0.D dígitos del centro para toda $i = 1, 2, 3, ..., n$
4. Repetir el paso 3 hasta obtener los n números r_i deseados.

Nota Si no es posible obtener los D dígitos del centro del número Y_i, agregue ceros a la izquierda del número Y_i. (García et al., 2013, p. 24)

Ejemplo

Generar los primeros 5 números a partir de una semilla X_0 = 5735, de donde se puede observar que D = 4 dígitos.

Solución:

$$\begin{array}{lll} Y_0 = (5735)^2 = 32890225 & X_1 = 8902 & r_1 = 0.8902 \\ Y_1 = (8902)^2 = 79245604 & X_2 = 2456 & r_2 = 0.2456 \\ Y_2 = (2456)^2 = 06031936 & X_3 = 0319 & r_3 = 0.0319 \\ Y_3 = (0319)^2 = 101761 & X_4 = 0176 & r_4 = 0.0176 \\ Y_4 = (0176)^2 = 030976 & X_5 = 3097 & r_5 = 0.3097 \end{array}$$

El algoritmo de cuadrados medios generalmente es incapaz de generar una secuencia de r_i con periodo de vida n grande. Además, en ocasiones sólo es capaz de generar un número, por ejemplo, si $X_0 = 1000$, entonces $X_1 = 0000; r_i = 0.0000$ y se dice que el algoritmo se degenera con la semilla de $X_0 = 1000$. (García et al., 2013, p. 25)

1.1.2) Algoritmo de productos medios

La mecánica de generación de números pseudoaleatorios de este algoritmo no congruencial es similar a la del algoritmo de cuadrados medios. La diferencia entre ambos radica en que el algoritmo de productos medios requiere dos semillas, ambas con D dígitos; además, en lugar de elevarlas al cuadrado, las semillas se multiplican y del producto se seleccionan los D dígitos del centro, los cuales formarán el primer numero pseudoaleatorio r_i = 0.D dígitos. Después se elimina una semilla, y la otra se multiplica por el primer numero de D dígitos, para luego seleccionar del producto los D dígitos que conformarán un segundo numero r_i. Entonces se elimina la segunda semilla y se multiplican el primer número de D dígitos por el segundo número de D dígitos; del producto se obtiene el tercer número r_i. Siempre se irá eliminando el numero más antiguo, y el procedimiento se repetirá hasta generar los n números pseudoaleatorios. A continuación se presentan con más detalle los pasos del método para generar números con el algoritmo de producto medios.

1. Seleccionar una semilla (X_0) con D dígitos $(D > 3)$
2. Seleccionar una semilla (X_1) con D dígitos $(D > 3)$
3. Sea $Y_0 = X_0 * X_1$; sea $X_2 =$ los D dígitos del centro, y sea $r_i = 0.D$ dígitos del centro.
4. Sea $Y_i = X_i * X_{i+1}$; sea $X_{i+2} =$ los D dígitos del centro, y sea $r_{i+1} = 0.D$ dígitos del centro para toda $i = 1, 2, 3, ..., n$.
5. Repetir el paso 4 hasta obtener los n números r_i deseados.

Nota Si no es posible obtener los D dígitos del centro del número Y_i, agregue ceros a la izquierda del número Y_i. (García et al., 2013, p. 25)

Ejemplo

Generar los primeros 5 números r_i a partir de las semillas $X_0 = 5015$ y $X_1 = 5374$; observe que ambas semillas tienen $D = 4$ dígitos.

Solución:

$$\begin{array}{lll} Y_0 = (5015)(5734) = 28756010 & X_2 = 7560 & r_1 = 0.7560 \\ Y_1 = (5734)(7560) = 43349040 & X_3 = 3490 & r_2 = 0.3490 \\ Y_2 = (7560)(3490) = 26384400 & X_4 = 3844 & r_3 = 0.3844 \\ Y_3 = (3490)(3844) = 13415560 & X_5 = 4155 & r_4 = 0.4155 \\ Y_4 = (3844)(4155) = 15971820 & X_6 = 9718 & r_5 = 0.9718 \end{array}$$

(García et al., 2013, p. 26)

1.1.3) Algoritmo de multiplicador constante

Este algoritmo no congruencial es similar al algoritmo de productos medios.
Los siguientes son los pasos necesarios para generar números pseudoaleatorios con el algoritmo de multiplicador constante.

1. Seleccionar una semilla (X_0) con D dígitos $(D > 3)$.
2. Seleccionar una constante (a) con D dígitos $(D > 3)$.
3. Sea $Y_0 = a * X_0$; sea $X_1 =$ los D dígitos del centro, y sea $r_i = 0.D$ dígitos del centro.
4. Sea $Y_i = a * X_i$; sea $X_{i+1} =$ los D dígitos del centro, y sea $r_{i+1} = 0.D$ dígitos del centro para toda $i = 1, 2, 3, ..., n$.
5. Repetir el paso 4 hasta obtener los n números r_i deseados.

Nota Si no es posible obtener los D dígitos del centro del número Y_i, agregue ceros a la izquierda del número Y_i. (García et al., 2013, p. 26)

Ejemplo Generar los primeros 5 números r_i a partir de la semilla $X_0 = 9803$ y con la constante $a = 6965$. Observe que tanto la semilla como la constante tienen $D = 4$ dígitos.

Solución:

$$
\begin{array}{lll}
Y_0 = (6965)(9803) = 68277895 & X_1 = 2778 & r_1 = 0.2778 \\
Y_1 = (6965)(2778) = 19348770 & X_2 = 3487 & r_2 = 0.3487 \\
Y_2 = (6965)(3487) = 24286955 & X_3 = 2869 & r_3 = 0.2869 \\
Y_3 = (6965)(2869) = 19982585 & X_4 = 9825 & r_4 = 0.9825 \\
Y_4 = (6965)(9825) = 68431125 & X_5 = 4311 & r_5 = 0.4311
\end{array}
$$

Bibliografía

García, E., García, H., & Cárdenas, L. (2013). *Simulación y análisis de sistemas con ProModel* (Segunda Edición). PEARSON, México.