Clase 2 (Propedéuticos)

Antonio Rivera

Durante la clase me preguntaron por el ejercicio 5 y 7 de la tarea.

Ejercicio 5

$$\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right]^2$$

Hay varias formas de hacer esto. Primero aplicaremos las potencias a cada fracción dentro de los corchetes. Entonces nos queda:

$$\left[\frac{\left(\frac{2^4}{3^4}\right)\left(\frac{3^2}{2^2}\right)}{2\left(\frac{1^2}{3^2}\right)}\right]^2$$

Ahora tenemos multiplicación de fracciones por lo que nos queda:

$$\left[\frac{\frac{2^4\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^2}}{\frac{2\cdot 1^2}{3^2}}\right]^2$$

Ahora tenemos una fracción de fracciones por lo que podemos hacer la regla del sangüich:

$$\left[\frac{2^4\cdot 3^2\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^2\cdot 2\cdot 1^2}\right]^2$$

$1^2=1$ y lo que sea por 1 es la misma cosa, por lo que ya nos podemos deshacer de eso. Ahora, como tenemos $3^2\cdot 3^2$, usamos la ley de exponentes que nos dice que $a^m a^n = a^{m+n}$, por lo que $3^2\cdot 3^2 = 3^4$. Entonces nos queda:

$$\left[\frac{2^4\cdot 3^4}{3^4\cdot 2^3}\right]^2$$

Como tenemos 3^4 arriba y abajo, se cancelan

$$\left[\frac{2^4\cdot \cancel{3^4}}{\cancel{3^4}\cdot 2^3}\right]^2 = \left[\frac{2^4}{2^3}\right]^2$$

Finalmente, una regla que no escribí en la clase pasada es que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Esto es lógico porque, para pasar a^n al numerador, necesito cambiar el signo del exponente. Entonces

$$\left[\frac{2^4}{2^3}\right]^2 = \left[2^{4-3}\right]^2 = \left[2^1\right]^2 = 2^2$$

Y ya con eso terminamos.

Ejercicio 7

$$3(-2)^2 - 2^2 + 5\sqrt{16} - 8 + 12/4 - 10$$

Para hacer este ejercicio primero tenemos que fijaros en los paréntesis que haya. Como el único es para el término de $3(-2)^2$ y dentro del paréntesis no hay ninguna operación, resolveremos las potencias. Tenemos $(-2)^2 = (-2)(-2) = +4$. Notemos que $5\sqrt{16}$ es 5 multiplicado por la raíz de 16. Entonces nos queda:

$$3 \cdot 4 - 4 + 5 \cdot 4 - 8 + 12/4 - 10$$

Ahora tenemos que hacer cada multiplicación y división:

$$12 - 4 + 20 - 8 + 3 - 10$$

Terminamos haciendo cada suma y resta, y si lo hacemos bien obtenemos que

$$3(-2)^2 - 2^2 + 5\sqrt{16} - 8 + 12/4 - 10 = 13$$

1 Notación científica

1.1 Reglas de la notación científica

- En *notación científica* buscamos expresar una cifra como un solo dígito antes del punto y el resto de los dígitos de la cifra, después del punto. Esta nueva cifra se multiplica por 10^n, donde n es el número de veces que tuvimos que mover el punto.
- Si tuvimos que mover el punto hacia la izquierda para dejar un solo dígito antes del punto, el exponente será positivo.
- Si tuvimos que mover el punto hacia la derecha para dejar un solo dígito antes del punto, el exponente será negativo.

Ejemplo 1

Imaginemos que tenemos la cifra 170500000 (ciento setenta millones quinientos mil). Dejar un solo dígito antes del punto significa escribir:

$$170500000 \quad \rightarrow \quad 1.705$$

Para hacer esto tendríamos que mover el punto ocho lugares hacia la izquierda. Entonces nos queda que

$$170500000 = 1.705 \times 10^8$$

Nota 1: No escribimos los ceros a la derecha del 5 *porque los ceros a la derecha del punto no importan.*

Nota 2: El punto de 170500000 *queda hasta el extremo derecho y es implícito.*

Ejemplo 2

Imaginemos que tenemos la cifra 0.0000003 (tres diezmillonésimos). Dejar un solo dígito antes del punto significa escribir:

$$0.0000003 \quad \rightarrow \quad 3$$

Para hacer esto tendríamos que mover el punto siete lugares hacia la derecha. Entonces nos queda que

$$0.0000003 = 3 \times 10^{-7}$$

Nota 3: Vean que también tuve que saltar el 3 *para quedar a la derecha de éste.*

2 Operaciones con notación científica

Para hacer las diversas operaciones algebraicas que ya conocemos será conveniente usar las siguientes reglas:

- Si ya tenemos el número en notación científica pero queremos mover el punto más veces hacia la izquierda, le sumaremos al exponente de 10^n el número de veces que movimos el punto.
- Si ya tenemos el número en notación científica pero queremos mover el punto más veces hacia la derecha, le restaremos al exponente de 10^n el número de veces que movimos el punto.

Por ejemplo si nos dan la cifra en notación científica 5×10^4 pero queremos que en vez de 5 sea 0.005, como para escribir esto tuvimos que mover el punto tres veces hacia la izquierda, ahora la cifra se convierte en 0.005×10^7.

2.1 Suma y resta

Si los exponentes sobre el 10 *de dos cifras en notación científica son iguales, para sumar o restar las cifras basta con que sumemos los números antes del* 10

Ejemplo 1

$$1.3 \times 10^6 + 2.1 \times 10^6 = 3.4 \times 10^6$$

Ejemplo 2

$$7.9 \times 10^4 + 9.3 \times 10^3$$

Aquí tenemos un caso donde los exponentes sobre el 10 no son iguales. Lo que buscamos es dejarlos iguales para poder sumar los números antes del 10. Para esto nos conviene convertir a 9.3×10^3 a algo multiplicado por 10^4. Como para hacer esto necesitamos sumar 1 al exponente de 10^3, significa que tendremos que mover el punto una vez hacia la izquierda, por lo que nos quedará 0.93×10^4 y ya podemos sumar

$$7.9 \times 10^4 + 0.93 \times 10^4 = 8.83 \times 10^4$$

Ejemplo 3

$$9.9 \times 10^{-4} - 9 \times 10^{-5}$$

Ahora nos conviene convertir a 9×10^{-5} a algo multiplicado por 10^{-4}. Como para hacer esto necesitamos sumar 1 al exponente de 10^3, significa que tendremos que mover el punto una vez hacia la izquierda, por lo que nos quedará 0.9×10^{-4} y ya podemos restar

$$9.9 \times 10^{-4} - 0.9 \times 10^{-4} = 9 \times 10^{-4}$$

2.2 Multiplicación y división

Ejemplo 1

$$(2 \times 10^4)(3 \times 10^3)$$

Como cada parte de la multiplicación está multiplicando a todo, podemos acomodar como queramos; por ejemplo:

$$(2 \cdot 3) \times (10^4 \cdot 10^3) = 6 \times 10^{4+3} = 6 \times 10^7$$

En la última parte usamos la ley de exponentes $a^m a^n = a^{m+n}$.

Ejemplo 2

$$(6\times10^5)(5\times10^{-5}) = (6\cdot5)\times(10^5\cdot10^{-5}) = 30\times10^{5+(-5)} = 30\times10^0 = 30\cdot1 = 30 = 3\times10^1$$

En la última parte usamos la ley de exponentes $a^0 = 1$.

Ejemplo 3

$$(8 \times 10^8) \div (2 \times 10^2) = \frac{8 \times 10^8}{2 \times 10^2}$$

De igual forma, podemos acomodar como queramos; por ejemplo:

$$\frac{8 \times 10^8}{2 \times 10^2} = \frac{8}{2} \cdot \frac{10^8}{10^2} = 4 \times 10^{8-2} = 4 \times 10^6$$

En la última parte usamos la ley de exponentes

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo 4

$$(7 \times 10^{-5}) \div (2 \times 10^{-2}) = \frac{7 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-2}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{10^{-5}}{10^{-2}} = 3.5 \times 10^{-5-(-2)} = 3.5 \times 10^{-3}$$

2.3 Potencia y radical

Ejemplo 1

$$(3 \times 10^2)^3$$

Aquí podemos usar la ley de exponentes $(ab)^n = a^n b^n$ por lo que queda

$$(3^3) \times (10^2)^3$$

Ahora, usando la ley de exponentes $(a^m)^n = a^{mn}$, tendremos

$$27 \times 10^6 = 2.7 \times 10^7$$

Ejemplo 2

$$\sqrt[4]{16 \times 10^{16}} = (16 \times 10^{16})^{\frac{1}{4}}$$

En la última parte usamos la ley de exponentes $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Luego podemos usar la ley de exponentes $(ab)^n = a^n b^n$ por lo que queda

$$16^{\frac{1}{4}} \times (10^{16})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} \times (10^{\frac{16}{4}}) = 2 \times 10^4$$

3 Álgebra

El *álgebra* es la recomposición o la recolocación de los trozos en los que se partió una cosa. En álgebra nos interesa trabajar con incógnitas. Por ejemplo, veamos el término

$$-4x^3$$

Diremos que el:

- -4 es el coeficiente de este término,
- x será la incógnita, variable o literal, y
- ^{3} es el exponente de la variable.

En el álgebra trabajaremos con expresiones algebraicas. Si la expresión algebraica tiene un solo término decimos que se trata de un *monomio*, si tiene dos se trata de un *binomio*, si tiene tres de un *trinomio*, etcétera. En general, si tiene más de un término decimos que se trata de un polinomio. Una expresión algebraica bien puede ser algo como

$$3x^2 - 7a^3x + 4ay - 1 \ .$$

Esta expresión tiene cuatro términos. ¿Cuándo una expresión algebraica se vuelve una ecuación? Cuando la expresión algebraica se iguala a otra cosa (incluyendo una expresión algebraica). Por ejemplo,

$$3x^2 - 7a^3x + 4ay - 1 = 10 \ .$$

4 Operaciones con expresiones algebraicas

4.1 Suma y resta

Nota importante: *Cuando dos (o más) términos tienen* ***exactamente*** *las mismas variables con el mismo exponente en cada variable, sólo sumamos sus coeficientes.**
Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x^3 + 4x^2 + 5x^2y + x^2 - 9y^2 + 5x^2 &= 3x^3 + (4x^2 + x^2 + 5x^2) + 5x^2y - 9y^2 \\ &= 3x^3 + 10x^2 + 5x^2y - 9y^2 \end{aligned}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{aligned} (4a + 3x + 2y^2) + (3a + 5x + 7y^2) &+ (a + 2x + 4y^2) + (2x + 3y^2 + 7z^2) \\ &= (4a + 3a + a) + (3x + 5x + 2x + 2x) + (2y^2 + 7y^2 + 4y^2 + 3y^2) + (7z^2) \\ &= 8a + 12x + 16y^2 + 7z^2 \end{aligned}$$

Otro ejemplo:

$$\begin{aligned} (a^3 - 4a^2b + 6abc)+(a^2b &- 10abc + 2a^3) + (b^3 + 3a^2b + abc) \\ &= (a^3 + 2a^3) + (-4a^2b + a^2b + 3a^2b) + (6abc - 10abc + abc) + (b^3) \\ &= 3a^3 - 3abc + b^3 \end{aligned}$$

Si un signo menos se antepone a una expresión algebraica que está entre paréntesis, tenemos que cambiar el signo de cada uno de los términos. Por ejemplo:

$$-(-5xy^2 + 3a - 2b^3 - 10) = 5xy^2 - 3a + 2b^3 + 10$$

Entonces

$$\begin{aligned} (5a^2b &- 7ab^2 + 6cd) - (-7a^2b + 8ab^2 + cd) \\ &= 5a^2b - 7ab^2 + 6cd + 7a^2b - 8ab^2 - cd \\ &= (5a^2b + 7a^2b) + (-7ab^2 - 8ab^2) + (6cd - cd) \\ &= 12a^2b - 15ab^2 + 5cd \end{aligned}$$

4.2 Mutiplicación

Cuando multipliquen, si les quedan muchas variables multiplicándose entre sí, será necesario acomodarlas alfabeticamente.

$$a(2x^2 - 3ay) = 2ax^2 - 3a^2y$$

$$-5x^3(-3x^2 + x) = 15x^5 - 5x^4$$

Los casos anteriores fueron de un monomio multiplicando a un binomio. Cuando multiplicamos un polinomio por otro polinomio, tenemos que multiplicar cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio (todos contra todos).

$$(2x^2 + y^3)(3x^3 - 4y^2 + z) = 6x^5 - 8x^2y^2 + 2x^2z + 3x^3y^3 - 4y^5 + y^3z$$

$$\begin{aligned}(4a^4 + 3a^2b - 2b^2)(2a^2 - 3b) &= 8a^6 - 12a^4b + 6a^4b - 9a^2b^2 - 4a^2b^2 + 6b^3 \\ &= 8a^6 - 6a^4b - 13a^2b^2 + 6b^3\end{aligned}$$

4.3 Productos notables

Binomio al cuadrado

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Esto se puede leer como: *El resultado del binomio el cuadrado es el primer término al cuadrado más el doble del producto del primer término por el segundo término más el segundo término al cuadrado.*

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}(3a^2y + 5xy)^2 &= (3a^2y)^2 + 2(3a^2y)(5xy) + (5xy)^2 \\ &= 9a^4y^2 + 30a^2xy^2 + 25x^2y^2\end{aligned}$$