Recursive Formulation of Social Planner Problem
Value Function Iteration: Numerical Approach

Dirk Krueger (2017) - Seção 3.2.3

Apresentação por Antonio Ricciardi Macedo

Maio, 2022

Formulação Recursiva do Problema do Planejador Social (1/2)

- A função valor v soluciona a seguinte recursão

$$v(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta v(k')\} = (Tv)(k) \tag{3.2}$$

em que:

- (3.2): Equação Funcional ou "Equação de Bellman"
- v: função valor
- k: estoque de capital que o planejador traz para o período atual, ou seja, que é resultado de decisões anteriores (variável de estado)
- k': é escolhida hoje pelo planejador social (variável de controle), definindo o estoque capital do próximo período.

- Queremos encontrar a função valor v e a função política ótima $k' = g(k)$.

Formulação Recursiva do Problema do Planejador Social (2/2)

- Assuma que:
  - $U(c) = ln(c)$
  - $F(k, n) = k^\alpha n^{1-\alpha}$
  - Depreciação total: $\delta = 1$
  - Logo, $f(k) = F(k, 1) + (1 - \delta)k = k^\alpha$ (no ótimo, $n = 1$)
- Portanto, (3.2) pode ser reescrita como:

$$v(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{\ln(k^\alpha - k') + \beta v(k')\} \tag{1}$$

- Suponha
  - $k, k' \in \mathcal{K} = \{0.04,\ 0.08,\ 0.12,\ 0.16,\ 0.20\}$
  - $\alpha = 0.3$ e $\beta = 0.6$
  - Palpite inicial: $v_0(k) = 0,\ \forall k \in \mathcal{K}$, ou seja, $v_0 = \{0, 0, 0, 0, 0\}$

Resolvendo $v_1(k)$ - 1ª iteração (1/2)

- Definiremos
$$v_1(k) \equiv \max_{0 \leq k' \leq k^\alpha} \{\ln(k^\alpha - k') + \beta v_0(k')\} = (Tv_0)(k)$$
- Como $v_0(k) = 0, \forall k \in \mathcal{K}$, o problema será:
$$v_1(k) = \max_{0 \leq k' \leq k^\alpha} \{\ln(k^\alpha - k')\}$$
- Note que, para todo $k \in \mathcal{K} = \{0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.20\}$, o valor de k' que maximiza a expressão é sempre $k' = 0.04$ neste caso.
- Logo, sabemos que, nesta 1ª iteração, a função política ótima
$$k'(k) = g_1(k) = 0.04, \ \forall k \in \mathcal{K}.$$

  Note que 0.04 é o menor valor permitido em $\mathcal{K}$.

Resolvendo $v_1(k)$ - 1ª iteração (2/2)

- Calculando os valores de $v_1(k)$ para cada k e com $k' = 0.04$, obtemos

$$v_1(k = 0.04) = \ln\left(0.04^{0.3} - 0.04\right) = -1.077$$
$$v_1(k = 0.08) = \ln\left(0.08^{0.3} - 0.04\right) = -0.847$$
$$v_1(k = 0.12) = \ln\left(0.12^{0.3} - 0.04\right) = -0.715$$
$$v_1(k = 0.16) = \ln\left(0.16^{0.3} - 0.04\right) = -0.622$$
$$v_1(k = 0.20) = \ln\left(0.20^{0.3} - 0.04\right) = -0.550$$

- Função valor v_1 $(\equiv Tv_0 \neq v_0)$ e função política g_1 são dadas por

k	$v_1(k)$	$g_1(k)$
0.04	−1.077	0.04
0.08	−0.847	0.04
0.12	−0.715	0.04
0.16	−0.622	0.04
0.20	−0.550	0.04

Resolvendo $v_2(k)$ - 2ª iteração (1/2)

- Definiremos

$$v_2(k) \equiv \max_{0 \leq k' \leq k^\alpha} \{\ln(k^\alpha - k') + \beta v_1(k')\} = (Tv_1)(k)$$

- Como $v_1(k')$ não é nulo para todo k', precisamos agora verificar qual é o k' que maximiza $v_2(k)$ para cada k.
- para $k = 0.04$, temos os possíveis $v_2(k)$:

$$v_2(k=0.04) = \ln\left(0.04^{0.3} - 0.04\right) + 0.6 * (-1.077) = -1.7227 \qquad (k' = 0.04)$$

$$v_2(k=0.04) = \ln\left(0.04^{0.3} - 0.08\right) + 0.6 * (-0.847) = -1.7097 \qquad (k' = 0.08)$$

$$v_2(k=0.04) = \ln\left(0.04^{0.3} - 0.12\right) + 0.6 * (-0.715) = -1.7731 \qquad (k' = 0.12)$$

$$v_2(k=0.04) = \ln\left(0.04^{0.3} - 0.16\right) + 0.6 * (-0.622) = -1.8838 \qquad (k' = 0.16)$$

$$v_2(k=0.04) = \ln\left(0.04^{0.3} - 0.20\right) + 0.6 * (-0.550) = -2.0407 \qquad (k' = 0.20)$$

- Logo, para maximizar $v_2(k = 0.04)$, escolhe-se $k' = 0.08$

Resolvendo $v_2(k)$ - 2ª iteração (2/2)

- Repete-se esse processo feito para $k = 0.04$ para os demais possíveis valores de k:

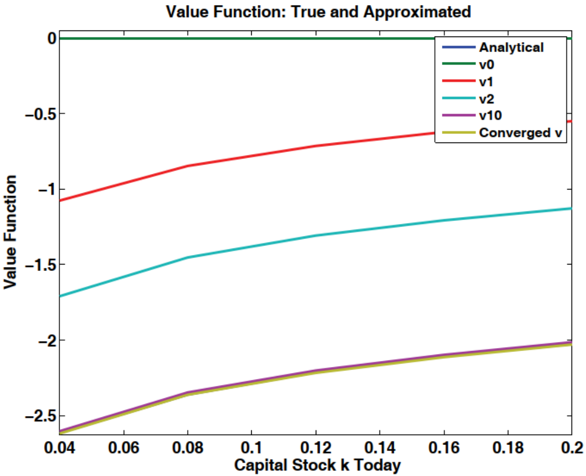
$k \backslash k'$	0.04	0.08	0.12	0.16	0.2
0.04	-1.7227	-1.7097^*	-1.7731	-1.8838	-2.0407
0.08	-1.4929	-1.4530^*	-1.4822	-1.5482	-1.6439
0.12	-1.3606	-1.3081^*	-1.3219	-1.3689	-1.4405
0.16	-1.2676	-1.2072^*	-1.2117	-1.2474	-1.3052
0.2	-1.1959	-1.1298	-1.1279^*	-1.1560	-1.2045

- Função valor v_2 $(\equiv Tv_1 \neq v_1)$ e função política g_2 são dadas por

k	$v_2(k)$	$g_2(k)$
0.04	-1.7097	0.08
0.08	-1.4530	0.08
0.12	-1.3081	0.08
0.16	-1.2072	0.08
0.20	-1.1279	0.12

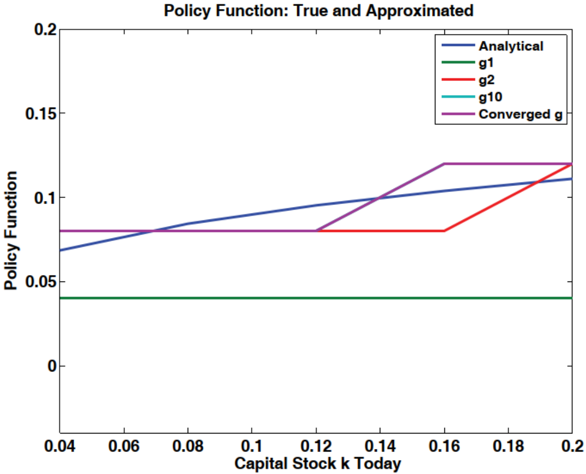
Demais iterações - Função Valor

- Ao repetir mais iterações, a função valor converge para a função valor real, ou seja, quando $v_n = v_{n+1} = Tv_n$. No entanto, numericamente, não chegará a ser igual.



Demais iterações - Função Política

- E também encontramos a função política, $g(k)$.



Capital Estacionário k^*

- A partir da função política encontrada, $g(k)$, podemos obter o capital estacionário, k^*:

(1) A partir de k_0, encontrar $k_1 = g(k_0)$

(2) Se $k_0 = k_1$, então encontramos o capital estacionário.

(3) Se $k_0 \neq k_1$, então vamos para o próximo período e verificamos se $k_1 = g(k_1) = k_2$

(4) Repete-se isso até encontrar $k_t = k_{t+1}$.

- Note que o capital estacionário $k^* = g(k^*)$, ou seja, k^* é ponto fixo de $g(k)$.