

# Lista 2 de Macroeconomia I - Parte 1

Antonio Ricciardi Macedo - PPGE/FEA-RP/USP

Maio, 2022

## Definições, Proposições, Lemas e Observações

---

### Configuração do Modelo.

- $k_t$ : capital em  $t$
  - $n_t$ : horas trabalhadas em  $t$
  - $y_t$ : bens de consumo
  - $y_t = F(k_t, n_t)$ : função de produção agregada
  - $\delta$ : taxa de depreciação
  - $i_t$ : investimento
  - $k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t$  : lei de movimento do capital
  - $y_t \geq i_t + c_t$ : factibilidade
- 

**Definição 10 (Krueger, 2017).** Uma alocação  $\{c_t, k_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}$  é factível se, para todo  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} F(k_t, n_t) &= c_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t \\ c_t &\geq 0, \quad k_t \geq 0, \quad 0 \leq n_t \leq 1 \\ k_0 &\leq \bar{k}_0 \end{aligned}$$

---

**Definição 11 (Krueger, 2017).** Uma alocação  $\{c_t, k_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}$  é Pareto Eficiente se ela é factível e não existe outra alocação factível  $\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_t, \tilde{n}_t\}_{t=0}^{\infty}$  tal que

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(\tilde{c}_t) > \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

---

### Formulação Sequencial do Problema do Planejador Social.

$$\begin{aligned} w(\bar{k}_0) &= \max_{\{c_t, k_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \\ s.a. \quad &\left\{ \begin{aligned} F(k_t, n_t) &= c_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t \\ c_t &\geq 0 \\ k_t &\geq 0 \\ 0 &\leq n_t \leq 1 \\ 0 &\leq k_0 \leq \bar{k}_0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

---

**Hipótese 1.**  $U$  continuamente diferenciável, estritamente crescente, estritamente côncava e limitada. Satisfaz as condições de Inada  $\lim_{c \rightarrow 0} U'(c) = 0$ . O fator de desconto  $\beta$  satisfaz  $\beta \in (0, 1)$ .

---

**Hipótese 2.**  $F$  é continuamente diferenciável e homogênea de grau 1, estritamente crescente e estritamente côncava. Além disso,  $F(0, n) = F(k, 0) = 0$  para todo  $k, n > 0$ . Também,  $F$  satisfaz as condições de Inada  $\lim_{k \rightarrow 0} F_k(k, 1) = \infty$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(k, 1) = 0$ .

---

### Formulação Recursiva do Problema do Planejador Social.

$$v(k) = \max_{0 \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta v(k')\} \quad (3.2)$$

em que:

- (3.2): Equação Funcional ou “Equação de Bellman”
  - $v$ : função valor
  - $k$ : variável de estado
  - $k'$ : variável de controle
  - $k' = g(k)$ : função política
- 

### Problema do Planejador com Horizonte Finito $T$ .

$$w^T(\bar{k}_0) = \max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^T \beta^t U(f(k_t) - k_{t+1}), \quad s.a. \quad \begin{cases} 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t) \\ k_0 = \bar{k}_0 > 0 \text{ dado} \end{cases}$$

em que:

- $(t_0, t_1, \dots, t_T)$  e  $(k_1, k_2, \dots, k_T, k_{T+1})$
  - $\beta^t U(f(k_t) - k_{t+1}) = \beta^t U(c_t)$
  - $\beta^T U[f(k_T) - k_{T+1}]$
  - escolha de  $T + 1$  variáveis em um conjunto compacto
  - $k_{T+1} = 0$  no ótimo
  - $0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t) \leq f(K)$
- 

### Problema do Planejador com Horizonte Infinito $t \rightarrow \infty$ .

$$w(\bar{k}_0) = \max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(f(k_t) - k_{t+1}), \quad s.a. \quad \begin{cases} 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t) \\ k_0 = \bar{k}_0 > 0 \text{ dado} \end{cases}$$


---

**Teorema 12 (Krueger, 2017).** Suponha que  $U, \beta$  e  $F$  (e portanto  $f$ ) satisfaçam Hipótese 1 e Hipótese 2. Então, uma alocação  $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$  que satisfaça as equações de Euler e a condição de transversalidade soluciona o problema sequencial do planejador social, para um dado  $k_0$ .

---

## Questão 1

Considere a seguinte modificação no modelo de crescimento neoclássico determinístico. As pessoas da economia têm formação de hábitos de consumo, ou seja, a utilidade é dada por

$$u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, c_{t-1})$$

dado um certo  $c_{-1}$ , em que  $U(c_t, c_{t-1}) = \ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}$ . Além disso, a função de produção é dada por  $f(k) = Ak^\alpha$  e todo estoque de capital se deprecia a cada período. (Podemos ignorar o trabalho aqui). Desse modo, o problema do planejador de escolher a trajetória de consumo que maximiza o bem-estar do consumidor pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}) \\ \text{s.a.} \quad & c_t + k_{t+1} \leq Ak_t^\alpha, \\ & c_t, k_{t+1} \geq 0 \\ & A > 0, \alpha \in (0, 1) \\ & \text{dados } k_0 > 0 \text{ e } c_{-1} > 0, \end{aligned}$$

em que  $\beta \in (0, 1)$  e  $\gamma > 0$ . Aqui,  $c_t$  representa o consumo da data  $t$ ,  $k_t$  é o estoque de capital no começo do período  $t$ .

(a) Escreva a equação de Bellman associada ao problema sequencial acima.

[Estratégia da Prova:](#)

- Subseção 3.2.1 (Krueger, 2017).

Podemos reescrever o problema do planejador, considerando  $\bar{k}_0 = k_0$  no equilíbrio e dado  $U(c_t, c_{t-1}) = \ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}$ , como:

$$\begin{aligned} w(k_0, c_{-1}) &= \max_{\substack{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty} \\ 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t) \\ k_0 \text{ dado}}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}) \right\} \\ &= \max_{\substack{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty} \\ 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t) \\ k_0 \text{ dado}}} \left\{ \ln c_0 + \gamma \ln c_{-1} + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\beta^t}{\beta} (\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}) \right\} \quad (\text{tirando } t=0 \text{ do } \sum) \\ &= \max_{\substack{0 \leq k_1 \leq f(k_0) \\ k_0 \text{ dado}}} \left\{ \ln c_0 + \gamma \ln c_{-1} + \beta \left[ \max_{\substack{\{k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty} \\ 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t) \\ k_1 \text{ dado}}} \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} (\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}) \right\} \right] \right\} \\ &= \max_{\substack{0 \leq k_1 \leq f(k_0) \\ k_0 \text{ dado}}} \left\{ \ln c_0 + \gamma \ln c_{-1} + \beta \left[ \max_{\substack{\{k_{t+2}\}_{t=0}^{\infty} \\ 0 \leq k_{t+2} \leq f(k_{t+1}) \\ k_1 \text{ dado}}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\ln c_{t+1} + \gamma \ln c_t) \right\} \right] \right\} \end{aligned}$$

Assim,

$$w(k_0, c_{-1}) = \max_{\substack{0 \leq k_1 \leq f(k_0) \\ k_0 \text{ dado}}} \{\ln c_0 + \gamma \ln c_{-1} + \beta w(k_1, c_0)\}, \quad \text{s.a. } c_t + k_{t+1} \leq Ak_t^\alpha.$$

Logo, o problema recursivo é dado pela equação de Bellman:

$$v(k, c_{-1}) = \max_{\substack{0 \leq k' \leq f(k) \\ k \text{ dado}}} \{\ln c + \gamma \ln c_{-1} + \beta v(k', c)\}, \quad \text{s.a. } c + k' \leq Ak^\alpha. \quad (2.1.1)$$

A restrição  $c + k' \leq Ak^\alpha$  se dá a partir da Definição 10 (Krueger, 2017), em que  $F(k_t) = c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$  e, como temos depreciação total em um período ( $\delta = 1$ ), segue que

$$F(k_t) = c_t + k_{t+1}$$

Como, no equilíbrio,  $f(k_t) = F(k_t) + (1 - \delta)k_t$  e  $\delta = 1$ , então  $f(k_t) = F(k_t)$ . Pelo enunciado, temos que  $f(k_t) = Ak_t^\alpha$  (sendo  $A > 0$  constante) e, portanto,

$$\begin{aligned} f(k_t) &= F(k_t) \\ Ak_t^\alpha &= c_t + k_{t+1}, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

que pode ser reescrita como  $c + k' = Ak^\alpha$ . ■

**(b) Seja  $v^*(k_0, c_{-1})$  a função valor que resolve a equação funcional estabelecida no item anterior. Mostre que  $v^*(k_0, c_{-1}) = E + F \ln k_0 + G \ln c_{-1}$  e que a trajetória ótima de capital  $\{k_{t+1}^*\}_{t=0}^\infty$  satisfaz  $\ln k_{t+1}^* = I + H \ln k_t^*$ , em que  $E, F, G, H$  e  $I$  são constantes. Ache fórmulas explícitas para  $E, F, G, H$  e  $I$  em função dos parâmetros  $A, \beta, \alpha$  e  $\gamma$ .**

#### Estratégia da Prova:

- Subseção 3.2.3 (Krueger, 2017): *Guess-and-Verify* (pág. 45)
  - Aplicar suposta forma da função valor na equação de Bellman obtida no item (a).
  - Maximizar via CPO e obter  $k'$ .
  - Aplicar  $k'$  na equação de Bellman e reescrever no formato suposto.
  - Resolver sistema com as possíveis equivalências entre  $E, F, G$  e obter seus valores em função de  $A, \alpha, \beta, \gamma$  e aplicá-los na funções valor e política.
  - Supor forma da função política e estabelecer equivalências com  $I, H$ .
  - Construir, via indução matemática, uma sequência de capital e calcular o capital estacionário  $\bar{k}$  em que  $t \rightarrow \infty$ .

Daremos os palpites sobre os formatos da função valor,  $v$ , e da função política  $k' = g(k)$  no equilíbrio. Suponha que solução de (2.1.1) tenha o formato

$$v(k, c_{-1}) = E + F \ln k + G \ln c_{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{R}_+ \quad (2.1.3)$$

em que  $E, F, G \in \mathbb{R}$  e são constantes.

Aplicando  $v(k', c) = E + F \ln(k') + G \ln c$  (período seguinte do formato da função que supomos no início) no problema de otimização/equação de Bellman em (2.1.1) temos:

$$\max_{\substack{0 \leq k' \leq f(k) \\ k \text{ dado}}} \{\ln c + \gamma \ln c_{-1} + \beta [E + F \ln k' + G \ln c]\}, \quad \text{s.a. } c + k' \leq Ak^\alpha. \quad (2.1.4)$$

e substituindo  $c = Ak^\alpha - k'$ , segue que

$$\max_{\substack{0 \leq k' \leq f(k) \\ k \text{ dado}}} \{ \ln(Ak^\alpha - k') + \gamma \ln c_{-1} + \beta[E + F \ln k' + G \ln(Ak^\alpha - k')] \}.$$

Note que  $c_{-1}$  não está em função de  $k'$ , apenas de  $k$  e  $k_{-1}$ . Observe também que a função objetiva (log) é côncava, satisfaz Inada e não deve ter solução de canto. Portanto, por CPO:

$$\begin{aligned} [k'] : \quad 0 &= -\frac{1}{Ak^\alpha - k'} + \frac{\beta F}{k'} - \frac{\beta G}{Ak^\alpha - k'} \\ 0 &= -\frac{1 + \beta G}{Ak^\alpha - k'} + \frac{\beta F}{k'} \\ \frac{\beta F}{k'} &= \frac{1 + \beta G}{Ak^\alpha - k'} \\ Ak^\alpha - k' &= \frac{(1 + \beta G)k'}{\beta F} \\ k' \left( 1 + \frac{1 + \beta G}{\beta F} \right) &= Ak^\alpha \\ k' \left( \frac{1 + \beta F + \beta G}{\beta F} \right) &= Ak^\alpha \\ k'_* &= \left( \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} \right) k^\alpha \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Aplicando (2.1.5) na equação de Bellman (2.1.4)

$$v(k, c_{-1}) = \max_{\substack{0 \leq k' \leq f(k) \\ k \text{ dado}}} \{ \ln(Ak^\alpha - k') + \gamma \ln c_{-1} + \beta[E + F \ln k' + G \ln(Ak^\alpha - k')] \} \tag{2.1.5}$$

$$(c = Ak^\alpha - k')$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(*)}{=} \ln \left( Ak^\alpha - \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} k^\alpha \right) + \gamma \ln c_{-1} \\ &\quad + \beta \left[ E + F \ln \left( \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} k^\alpha \right) + G \ln \left( Ak^\alpha - \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} k^\alpha \right) \right] \\ &= \ln k^\alpha + \ln \left( A - \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} \right) + \gamma \ln c_{-1} \\ &\quad + \beta \left[ E + F \ln k^\alpha + F \ln \left( \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} \right) + G \ln k^\alpha + G \ln \left( A - \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} \right) \right] \\ &= \alpha \ln k + \ln \left( \frac{A(1 + \beta G)}{1 + \beta F + \beta G} \right) + \gamma \ln c_{-1} \\ &\quad + \beta \left[ E + \alpha F \ln k + F \ln \left( \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} \right) + \alpha G \ln k + G \ln \left( \frac{A(1 + \beta G)}{1 + \beta F + \beta G} \right) \right] \\ &= (1 + \beta G) \ln \left( \frac{A(1 + \beta G)}{1 + \beta F + \beta G} \right) + \beta F \ln \left( \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} \right) + \beta E \\ &\quad + \alpha(1 + \beta F + \beta G) \ln k + \gamma \ln c_{-1} \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Em (\*), o max "sumiu" pela aplicação função política ótima,  $\hat{g}(k) = k'_*$ , que maximiza a função valor obtida em (2.1.4). Note que (2.1.6) é comparável à forma suposta no início do exercício,  $v(k, c_{-1}) = E + F \ln k + G \ln c_{-1}$ :

$$\underbrace{(1 + \beta G) \ln \left( \frac{A(1 + \beta G)}{1 + \beta F + \beta G} \right) + \beta F \ln \left( \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} \right) + \beta E}_{E} + \underbrace{\alpha(1 + \beta F + \beta G) \ln k}_{F \ln k} + \underbrace{\gamma \ln c_{-1}}_{G \ln c_{-1}}$$

Para verificar essas equivalências, solucionaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} E &= (1 + \beta G) \ln \left( \frac{A(1+\beta G)}{1+\beta F+\beta G} \right) + \beta F \ln \left( \frac{A\beta F}{1+\beta F+\beta G} \right) + \beta E \\ F &= \alpha(1 + \beta F + \beta G) \\ G &= \gamma \end{cases}$$

Aplicando  $G$  em  $F$ , segue que

$$\begin{aligned} F &= \alpha + \alpha\beta F + \alpha\beta G \\ F - \alpha\beta F &= \alpha + \alpha\beta\gamma \\ F(1 - \alpha\beta) &= \alpha + \alpha\beta\gamma \\ F &= \frac{\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta} \end{aligned} \quad (G = \gamma) \quad (2.1.7)$$

Substituindo  $F$  e  $G$  em  $E$ :

$$\begin{aligned} E - \beta E &= (1 + \beta G) \ln \left( \frac{A(1 + \beta G)}{1 + \beta F + \beta G} \right) + \beta F \ln \left( \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} \right) \\ E(1 - \beta) &= (1 + \beta\gamma) \ln \left( \frac{A(1 + \beta\gamma)}{1 + \beta \frac{\alpha(1+\beta\gamma)}{1-\alpha\beta} + \beta\gamma} \right) + \beta \frac{\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta} \ln \left( \frac{A\beta \frac{\alpha(1+\beta\gamma)}{1-\alpha\beta}}{1 + \beta \frac{\alpha(1+\beta\gamma)}{1-\alpha\beta} + \beta\gamma} \right) \\ &= (1 + \beta\gamma) \ln \left( \frac{A(1 + \beta\gamma)}{\frac{(1-\alpha\beta)+\beta\alpha(1+\beta\gamma)+(1-\alpha\beta)\beta\gamma}{1-\alpha\beta}} \right) + \beta \frac{\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta} \ln \left( \frac{\frac{A\beta\alpha(1+\beta\gamma)}{1-\alpha\beta}}{\frac{(1-\alpha\beta)+\beta\alpha(1+\beta\gamma)+(1-\alpha\beta)\beta\gamma}{1-\alpha\beta}} \right) \\ &= (1 + \beta\gamma) \ln \left( \frac{A(1 + \beta\gamma)(1 - \alpha\beta)}{1 - \alpha\beta + \beta\alpha(1 + \beta\gamma) + (1 - \alpha\beta)\beta\gamma} \right) \\ &\quad + \frac{\beta\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta} \ln \left( \frac{A\beta\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta + \beta\alpha(1 + \beta\gamma) + (1 - \alpha\beta)\beta\gamma} \right) \\ &= (1 + \beta\gamma) \ln \left( \frac{A(1 + \beta\gamma)(1 - \alpha\beta)}{\beta\alpha(1 + \beta\gamma) + (1 - \alpha\beta)(1 + \beta\gamma)} \right) \\ &\quad + \frac{\beta\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta} \ln \left( \frac{A\beta\alpha(1 + \beta\gamma)}{\beta\alpha(1 + \beta\gamma) + (1 - \alpha\beta)(1 + \beta\gamma)} \right) \\ &= (1 + \beta\gamma) \ln \left( \frac{A(1 + \beta\gamma)(1 - \alpha\beta)}{(\alpha\beta + 1 - \alpha\beta)(1 + \beta\gamma)} \right) + \frac{\beta\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta} \ln \left( \frac{A\beta\alpha(1 + \beta\gamma)}{(\alpha\beta + 1 - \alpha\beta)(1 + \beta\gamma)} \right) \\ &= (1 + \beta\gamma) \ln (A(1 - \alpha\beta)) + \frac{\beta\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta} \ln (A\beta\alpha) \\ E &= \frac{1}{1 - \beta} \left[ (1 + \beta\gamma) \ln (A(1 - \alpha\beta)) + \frac{\beta\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta} \ln (A\beta\alpha) \right] \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Substituindo  $E, F, G$  na função valor, temos:

$$v^*(k, c_{-1}) = \frac{1}{1 - \beta} \left[ (1 + \beta\gamma) \ln (A(1 - \alpha\beta)) + \frac{\beta\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta} \ln (A\beta\alpha) \right] + \frac{\alpha(1 + \beta\gamma)}{1 - \alpha\beta} \ln k + \gamma \ln c_{-1}$$

Aplicando  $F$  e  $G$  na função política (2.1.5), segue

$$\begin{aligned} k'_* &= \left( \frac{A\beta F}{1 + \beta F + \beta G} \right) k^\alpha = \left( \frac{A\beta \frac{\alpha(1+\beta\gamma)}{1-\alpha\beta}}{1 + \beta \frac{\alpha(1+\beta\gamma)}{1-\alpha\beta} + \beta\gamma} \right) k^\alpha \\ &= \left( \frac{\frac{A\beta\alpha(1+\beta\gamma)}{1-\alpha\beta}}{\frac{1-\alpha\beta+\beta\alpha(1+\beta\gamma)+\beta\gamma(1-\alpha\beta)}{1-\alpha\beta}} \right) k^\alpha = \left( \frac{A\beta\alpha(1 + \beta\gamma)}{(\alpha\beta + 1 - \alpha\beta)(1 + \beta\gamma)} \right) k^\alpha \\ &= (A\beta\alpha)k^\alpha \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Suponha a forma da função política com as constantes  $H, I$ :

$$\ln k_{t+1}^* = I + H \ln k_t^* \quad (2.1.10)$$

Por (2.1.9), sabemos que  $k_{t+1}^* = (A\beta\alpha)(k_t^*)^\alpha$  e, ao tomarmos o  $\ln$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \ln(k_{t+1}^*) &= \ln[(A\beta\alpha)(k_t^*)^\alpha] \\ &= \ln(A\beta\alpha) + \ln(k_t^*)^\alpha \\ &= \ln(A\beta\alpha) + \alpha \ln(k_t^*) \end{aligned}$$

Portanto, fazendo a equivalência com os termos de (2.1.11) (e ignorando que não tem  $\ln(\cdot)$  no lado esquerdo da expressão), concluímos que:

$$\begin{cases} I &= \ln(A\beta\alpha) \\ H &= \alpha \end{cases} \quad (2.1.11)$$

Agora, a partir a da função política em (2.1.9) e usando indução matemática, encontraremos a sequência de capital solução de (2.1.1):

$$\begin{aligned} k_1 &= g(k_0) = (A\beta\alpha)k_0^\alpha \\ k_2 &= g(k_1) = (A\beta\alpha)k_1^\alpha = (A\beta\alpha)[(A\beta\alpha)k_0^\alpha]^\alpha = (A\beta\alpha)^{1+\alpha}k_0^{\alpha^2} \\ k_3 &= g(k_2) = (A\beta\alpha)k_2^\alpha = (A\beta\alpha)[(A\beta\alpha)^{1+\alpha}k_0^{\alpha^2}]^\alpha = (A\beta\alpha)^{1+\alpha+\alpha^2}k_0^{\alpha^3} \\ &\vdots \\ k_{t+1}^* &= g(k_t) = (A\beta\alpha)^{\sum_{i=0}^t \alpha^i} k_0^{\alpha^t} = (A\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} k_0^{\alpha^t} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Agora, calcularemos o capital estacionário  $\bar{k}$  a partir de  $k_{t+1}$  obtido em (2.1.12)

$$\bar{k} = \lim_{t \rightarrow \infty} k_{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} (A\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} k_0^{\alpha^t}$$

Note que, por  $\alpha \in (0, 1)$ , quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\alpha^t \rightarrow 0$ , logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_0^{\alpha^t} = 1$$

e, portanto,

$$\bar{k} = (A\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \bar{k} &= g(\bar{k}) \\ (A\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} &= (A\beta\alpha)[(A\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}]^\alpha \\ &= (A\beta\alpha)^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &= (A\beta\alpha)^{\frac{1-\alpha+\alpha}{1-\alpha}} \\ &= (A\beta\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{k}$  é ponto fixo de  $g(k)$  e a sequência construída em (2.1.12) é solução para o problema sequencial do planejador social. ■

## Questão 2

Considere novamente o modelo de crescimento neoclássico. Em que o planejador escolhe uma sequência de capital para  $t = 0, 1, 2, \dots$  para maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t), \quad \beta \in (0, 1)$$

sujeito a uma sequência de restrições de recursos dada por

$$c_t + k_{t+1} \leq f(k_t) + (1 - \delta)k_t, \quad \delta \in (0, 1)$$

com uma condição inicial  $k_0 > 0$ .

(a) Seja  $v(k)$  a função valor deste problema. Escreva e explique a equação de Bellman que determina  $v(k)$ .

Estratégia da Prova:

- Subseções 3.2.1 e 3.2.2 (Krueger, 2017).
- Note que  $\delta \neq 1$ . Logo, para  $c_t \geq 0$ , precisamos de  $k_{t+1} \leq f(k_t) + (1 - \delta)k_t$

Note que, no equilíbrio, a sequência de restrições de recursos é válida para a igualdade e, logo, sendo  $\delta \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} &= f(k_t) + (1 - \delta)k_t \\ c_t &= f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}. \end{aligned}$$

Normalizando  $n_t = 1$ , aplicando  $c_t$  na Formulação Sequencial do Problema do Planejador Social e tomando  $k_0 = \bar{k}_0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} w(\bar{k}_0) &= \max_{\substack{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty} \\ k_0 \text{ dado}}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \right\} \\ &= \max_{\substack{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty} \\ k_0 \text{ dado}}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U[f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}] \right\} \tag{2.2.1} \\ &= \max_{\substack{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty} \\ k_0 \text{ dado}}} \left\{ U[f(k_0) + (1 - \delta)k_0 - k_1] + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\beta^t}{\beta} U[f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}] \right\} \\ &\quad \text{(tirando } t = 0 \text{ do } \sum) \\ &= \max_{\substack{k_1 \\ k_0 \text{ dado}}} \left\{ U[f(k_0) + (1 - \delta)k_0 - k_1] + \beta \left[ \max_{\substack{\{k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty} \\ k_1 \text{ dado}}} \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U[f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}] \right\} \right] \right\} \\ &= \max_{\substack{k_1 \\ k_0 \text{ dado}}} \left\{ U[f(k_0) + (1 - \delta)k_0 - k_1] + \beta \left[ \max_{\substack{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty} \\ k_1 \text{ dado}}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U[f(k_{t+1}) + (1 - \delta)k_{t+1} - k_{t+2}] \right\} \right] \right\} \\ &= \max_{\substack{k_1 \\ k_0 \text{ dado}}} \{ U[f(k_0) + (1 - \delta)k_0 - k_1] + \beta w(k_1) \}, \quad \text{s.a. } 0 \leq k_1 \leq f(k_0) + (1 - \delta)k_0. \end{aligned}$$



Portanto, o problema recursivo é dado pela equação de Bellman:

$$v(k) = \max_{\substack{0 \leq k' \leq f(k) + (1-\delta)k \\ k \text{ dado}}} \{U[f(k) + (1-\delta)k - k'] + \beta v(k')\}. \quad (2.2.2)$$

A equação de Bellman é um equação funcional em que a solução é uma função, ao invés de ser um número ou um vetor. Ela postula que a utilidade ao longo da vida do agente representativo é dado pela utilidade que o agente recebe hoje,  $U[f(k) + (1-\delta)k - k']$ , mais a utilidade trazida a valor presente das utilidades do próximo período em diante,  $\beta v(k')$ . Então, esta formulação considera o trade-off do planejador: maior consumo hoje  $\times$  maior estoque de capital. (Krueger, 2017, pág. 43) ■

**(b) Para este e os próximos itens suponha que**

$$U(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, & \text{se } \sigma > 0, \sigma \neq 1 \\ \ln(c), & \text{se } \sigma = 1 \end{cases},$$

**e que  $f(k) = zk^\alpha$  com  $\alpha \in (0, 1)$  e  $z > 0$ . Resolva o modelo para os valores de steady state  $c^*$  e  $k^*$ . (Dica: Você pode fazer isso utilizando os valores de  $c^*$  e  $k^*$  constantes ( $c = c' = c^*$  ou  $k = k' = k^*$ ) na equação de Euler.) Qual a razão capital/produto em steady state? E consumo/produto?**

Estratégia da Prova:

- Subseção 3.2.4 (Krueger, 2017) - Solução do Problema Sequencial por Equação de Euler e Condições de Transversalidade (TVC).
- Usar relação de estado estacionário  $k = k' = k^*$  na equação de Euler para encontrar  $k^*$
- A partir de  $k^*$ , encontrar  $c^*$  e  $y^*$ .

Utilizaremos o problema na formulação sequencial (2.2.1), dado por:

$$w(\bar{k}_0) = \max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U[f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}] \right\}$$

Supondo Hipótese 1 e Hipótese 2 para as funções  $U, \beta, F$  e  $f$ , temos que as restrições são inativas, ou seja,  $0 < k_{t+1} < f(k_t) + (1-\delta)k_t$ . Portanto, podemos utilizar CPO's para solucionar o problema (são necessárias e suficientes).

Primeiro, note que dentro do somatório temos, para todo  $t$ ,

$$\dots + \beta^t U[f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}] + \beta^{t+1} U[f(k_{t+1}) + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}] + \dots$$

logo, para derivarmos o somatório por  $k_{t+1}$ , precisamos considerar 2 termos que possuem  $k_{t+1}$ .

Pelas CPO's:

$$[k_{t+1}] : -\beta^t U'[f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}] + \beta^{t+1} U'[f(k_{t+1}) + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}][f'(k_{t+1}) + (1-\delta)] = 0$$

$$\begin{aligned} \beta^t U'[f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}] &= \beta^{t+1} U'[f(k_{t+1}) + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}][f'(k_{t+1}) + (1-\delta)] \\ U'[f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}] &= \beta U'[f(k_{t+1}) + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}][f'(k_{t+1}) + (1-\delta)], \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

para  $t = 0, 1, 2, \dots$

Note que, no estado estacionário (steady state),  $k_t = k_{t+1} = k_*$ , portanto:

$$\begin{aligned}
U'[f(k_*) + (1 - \delta)k_* - k_*] &= \beta U'[f(k_*) + (1 - \delta)k_* - k_*][f'(k_*) + (1 - \delta)] \\
1 &= \beta[f'(k_*) + (1 - \delta)] && \text{(dividindo por } U') \\
\frac{1}{\beta} &= (zk_*^\alpha)' + (1 - \delta) && (f(k) = zk^\alpha) \\
\frac{1}{\beta} &= \alpha zk_*^{\alpha-1} + (1 - \delta) \\
\frac{1}{\beta} - (1 - \delta) &= \alpha zk_*^{\alpha-1} \\
\frac{1 - \beta + \delta\beta}{\beta\alpha z} &= k_*^{\alpha-1} \\
\frac{\beta\alpha z}{1 - \beta + \delta\beta} &= k_*^{1-\alpha} && \text{(elevado a } -1, \text{ pois } \alpha - 1 < 0) \\
\left(\frac{\beta\alpha z}{1 - \beta + \delta\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} &= (k_*^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
k_* &= \left(\frac{\beta\alpha z}{1 - \beta + \delta\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. && (2.2.4)
\end{aligned}$$

Agora, precisamos encontrar o produto em estado estacionário,  $y_*$ , tal que

$$\begin{aligned}
y_* = f(k_*) = zk_*^\alpha &= z \left[ \left( \frac{\beta\alpha z}{1 - \beta + \delta\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^\alpha && \text{(usando (2.2.4))} \\
&= \left( \frac{\beta\alpha}{1 - \beta + \delta\beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z^{1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
&= \left( \frac{\beta\alpha}{1 - \beta + \delta\beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z^{\frac{1-\alpha+\alpha}{1-\alpha}} \\
&= \left( \frac{\beta\alpha}{1 - \beta + \delta\beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z^{\frac{1}{1-\alpha}} && (2.2.5)
\end{aligned}$$

Portanto, a razão capital/produto no estado estacionário é

$$\frac{k_*}{y_*} = \frac{\left(\frac{\beta\alpha}{1-\beta+\delta\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} z^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{\beta\alpha}{1-\beta+\delta\beta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \left(\frac{\beta\alpha}{1-\beta+\delta\beta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} z^0 = \frac{\beta\alpha}{1-\beta+\delta\beta} \quad (2.2.6)$$

Note que, como  $k = k' = k_*$  no estado estacionário, o consumo é dado por

$$c_* = f(k_*) + (1 - \delta)k_* - k_* = f(k_*) - \delta k_* = y_* - \delta k_* \quad (2.2.7)$$

Logo, a razão consumo/produto é

$$\begin{aligned}
\frac{c_*}{y_*} &= \frac{y_* - \delta k_*}{y_*} = 1 - \delta \frac{k_*}{y_*} = 1 - \delta \frac{\beta\alpha}{1 - \beta + \delta\beta} && \text{(usando (2.2.6))} \\
&= \frac{(1 - \beta + \delta\beta) - \delta\beta\alpha}{1 - \beta + \delta\beta} = \frac{1 - \beta + \delta\beta(1 - \alpha)}{1 - \beta + \delta\beta}.
\end{aligned}$$

---

(c) Descreva em detalhes os passos de um algoritmo para computar as funções valor e política associadas ao problema do planejador.

---

Podemos computar as funções valor e política numericamente via programação dinâmica. Para isso, definiremos uma função  $v(\cdot)$  de dimensão infinita, e a preencheremos com os resultados das iterações da função valor. O algoritmo pode ser descrito em 5 passos, são eles:

(i) **Parametrizar a economia.**

Neste tópico definiremos os parâmetros e as funções a serem utilizadas. Então, para o exercício proposto, neste item definiremos a função utilidade como uma CRRA:

$$U(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, & \text{se } \sigma > 0, \sigma \neq 1 \\ \ln(c), & \text{se } \sigma = 1 \end{cases},$$

E a função de tecnologia de produção:

$$f(k) = zk^\alpha$$

Além das funções, precisamos atribuir valores para os parâmetros a serem utilizados, a partir da calibração. Como exemplo, utilizaremos como parâmetros:

- $\alpha = 0.3$
- $\beta = 0.96$
- $\sigma = 2.5$
- $\delta = 0.02$
- $z = 1$

Além disso, precisamos definir um grid para os possíveis valores de  $k$  e  $k'$ , nele estará o ponto fixo que o algoritmo procurará. Portanto a definição correta dos pontos do grid é crucial para a obtenção da solução do algoritmo. Um grid pode ser definido da seguinte forma:

$$K = \{\underline{k}, k_1, k_2, k_3, \dots, \bar{k}\}$$

em que  $\underline{k} < k_1 < k_2 < k_3 < \dots < \bar{k}$ .

(ii) **Defina um chute Inicial.**

Agora, faremos um chute inicial para a primeira função valor a entrar no loop. Podemos escolher qualquer valor, pois as propriedades da iteração da função valor garantem que haverá convergência do algoritmo para o ponto fixo, qualquer que seja o chute inicial. Porém, quanto mais distante do ponto fixo o chute inicial estiver, seu algoritmo fará mais iterações e demorará mais tempo para chegar ao resultado. Desta forma, é aconselhável dar um "chute educado". Um exemplo de chute inicial pode ser:

$$v_0(k) = 0 \quad \forall k \in K$$

(iii) **Resolva o modelo.**

Este tópico representa a procura do algoritmo pela solução ótima. Neste caso, operaremos

pelo método da força bruta, utilizaremos a capacidade de processamento dos computadores para realizar o número necessário de iterações da função valor para procurar em todos os  $k'$  possíveis a função  $v(\cdot)$  para cada  $k$ , até esgotar todas as entradas do grid. Então, resolveremos o seguinte problema de maximização

$$v_1(k) = \max_{\substack{0 \leq k' \leq f(k) \\ k' \in K}} \{U(f(k) - k') + \beta v_0(k')\}$$

e guardaremos  $v_1$  e a escolha da função política  $g_1(k) = k'$ .

(iv) **Repita o passo anterior para as funções valor subsequentes.**

Agora faremos o mesmo processo do passo anterior e encontraremos  $v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_n$  até que

$$\|v_n - v_{n-1}\| = 0$$

Assim, teremos que fazer as iterações até que encontremos a iteração convergida, ou seja, a iteração que satisfaça  $\|v_n - v_{n-1}\| = 0$ . Porém, note que tal norma pode ser muito pequena mas nunca será exatamente zero. Então, ao invés de zero, devemos definir um valor bastante pequeno e próximo de zero como critério de convergência da função valor.

(v)  **$v = v_n$  e  $g(k) = g_n(k)$**

No último passo basta igualar a função  $v$  à  $v_n$  e a função política à  $g_n(k)$  e encontraremos a solução do problema de programação dinâmica.

---

**(d) Sejam  $z = 1$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 1/1.05$ ,  $\delta = 0.05$  e  $\sigma = 1$ . Usando estes valores de parâmetros, discretize o espaço de estados para o capital com  $n = 1001$  pontos, calcule e plote a função valor neste grid. Seja  $c(k)$  a função política para o consumo. Calcule e plote  $c(k)$ . Como o comportamento de consumo e poupança implicado por essa função se compara com o steady state do item (b)?<sup>1</sup>**

---

Usando os parâmetros  $z, \alpha, \beta, \delta$  dados, em  $k_*, y_*, c_*$ , obtidos respectivamente em (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.7), temos

$$\begin{aligned} k_* &= \left( \frac{\beta \alpha z}{1 - \beta + \delta \beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left( \frac{\frac{1}{1.05} 0.3 (1)}{1 - \frac{1}{1.05} + 0.05 \frac{1}{1.05}} \right)^{\frac{1}{1-0.3}} = 4.8 \\ y_* &= \left( \frac{\beta \alpha}{1 - \beta + \delta \beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left( \frac{\frac{1}{1.05} 0.3}{1 - \frac{1}{1.05} + 0.05 \frac{1}{1.05}} \right)^{\frac{0.3}{1-0.3}} 1^{\frac{1}{1-0.3}} = 1.6 \\ c_* &= y_* - \delta k_* = 4.8 - (0.05)1.6 = 1.36 \end{aligned}$$

Note também que:

$$\frac{c^*}{y^*} = 0.85 \quad \text{e} \quad \frac{\delta k^*}{y^*} = 0.15$$

ou seja, 85% é consumido e 15% é investido/poupado no estado estacionário.

---

<sup>1</sup>Dica: Seu grid deve ter o ponto  $k^*$  em seu interior. Por exemplo, você pode usar um grid  $K = \{0.7k^* < \dots < k^* < \dots < 1.3k^*\}$ . Note que dado um  $n$  a escolha do grid pode não gerar uma função política muito suave. Faça experimentos em que você altera  $n$  e os limites inferiores e superiores do grid para observar esse fato.

Para resolver numericamente a função valor, como  $\sigma = 1$ , precisamos aplicar  $U(c) = \ln c$  e  $f(k) = zk^\alpha$  na função valor (2.2.2), obtida no item (a):

$$v(k) = \max_{\substack{0 \leq k' \leq zk^\alpha + (1-\delta)k \\ k \text{ dado}}} \{\ln[zk^\alpha + (1-\delta)k - k'] + \beta v(k')\}. \quad (2.2.8)$$

```

1 # Fazendo as suposições iniciais
2 k_grid = np.linspace(4, 6, 201) # Possíveis valores de k e k'
3 beta = 1 / 1.05
4 alpha = 0.3
5 delta = 0.05
6 sigma = 1 # Para itens (c) e (d), usar 1; para item (e), usar 0.5 e 2
7 z = 1
8 n_k = len(k_grid) # Tamanho do vetor de valores de k e k'
9
10 # Criando lista de arrays de função valor e função política
11 v0 = np.zeros(n_k)
12 vn = [v0]
13
14 g0 = np.zeros(n_k)
15 gn = [g0]
16
17 # Loop das iterações enquanto (while) é menor do que dada distância
18 tol_norma = 1e-5 # Tolerância de distância entre funções valor (0.00001)
19 norma = np.inf # Valor inicial da norma = infinito
20 n = 0 # Contador de iterações
21
22 while norma > tol_norma:
23     # Aplicar a cada iteração Operador de Bellman em objetos genéricos Tv e Tg
24     Tv = np.zeros(n_k)
25     Tg = np.zeros(n_k)
26     f_obj = np.zeros((n_k, n_k))
27     n += 1
28
29     for i in range(n_k):
30         for j in range(n_k):
31             if k_grid[j] >= 0 and k_grid[j] <= z*k_grid[i]**alpha + (1 - delta)*
k_grid[i]:
32                 if sigma == 1: # Utilidade na forma log
33                     f_obj[i,j] = log(z*k_grid[i]**alpha + (1 - delta)*k_grid[i] -
k_grid[j]) + beta*vn[n-1][j]
34                 else: # Utilidade na forma de razão
35                     f_obj[i,j] = ((z*k_grid[i]**alpha + (1 - delta)*k_grid[i] -
k_grid[j]))*(1 - sigma) - 1) / (1 - sigma) + beta*vn[n-1][j]
36                 else:
37                     f_obj[i,j] = - np.inf
38             Tv[i] = np.max(f_obj[i,:])
39             Tg[i] = np.argmax(f_obj[i,:])
40
41     # Quando acabar loop de linha, jogar função valor em vn e política em gn
42     vn.append(Tv)
43     gn.append(Tg)
44     norma = max(abs(vn[n] - vn[n-1]))
45
46 # Trocando índice em gn por valores de k'
47 for funcao in gn:
48     for i in range(len(funcao)):
49         funcao[i] = k_grid[int(funcao[i])]

```

Geradas as funções valor e política de capital, faremos as visualizações das convergências de acordo com o número de iterações:

```

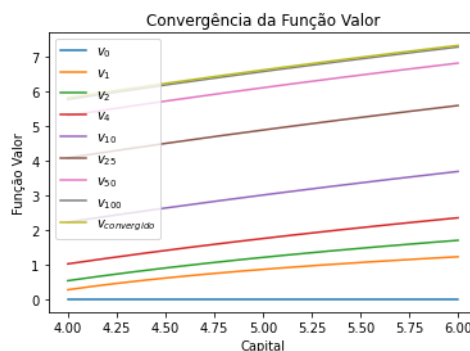
1 # Visualização gráfica da convergência da função valor
2 fig, ax = plt.subplots()
3

```

```

4 # Inclusão de cada função valor no gráfico
5 ax.plot(k_grid, vn[0], label='$v_0$')
6 ax.plot(k_grid, vn[1], label='$v_1$')
7 ax.plot(k_grid, vn[2], label='$v_2$')
8 ax.plot(k_grid, vn[4], label='$v_4$')
9 ax.plot(k_grid, vn[10], label='$v_{10}$')
10 ax.plot(k_grid, vn[25], label='$v_{25}$')
11 ax.plot(k_grid, vn[50], label='$v_{50}$')
12 ax.plot(k_grid, vn[100], label='$v_{100}$')
13 ax.plot(k_grid, vn[n], label='$v_{convergado}$')
14
15 # Legendas
16 ax.set_xlabel('Capital')
17 ax.set_ylabel('Função Valor')
18 ax.set_title('Convergência da Função Valor')
19 ax.legend()
20
21 plt.show()

```



```

1 # Visualização gráfica da convergência da função política
2 fig, ax = plt.subplots()
3
4 # Inclusão de cada função valor no gráfico
5 ax.plot(k_grid, gn[1], label='$g_1$')
6 ax.plot(k_grid, gn[2], label='$g_2$')
7 ax.plot(k_grid, gn[3], label='$g_5$')
8 ax.plot(k_grid, gn[10], label='$g_{10}$')
9 ax.plot(k_grid, gn[n], label='$g_{convergado}$')
10 ax.plot(k_grid, k_grid, '--', label='45 graus')
11
12 # Limites do gráfico
13 # ax.set_ylim([4.5, 5.3]) # tamanho mínimo e máximo vertical
14 # ax.set_xlim([4.5, 5.3]) # tamanho mínimo e máximo horizontal
15
16 # Legendas
17 ax.set_xlabel('Capital')
18 ax.set_ylabel('Função Política')
19 ax.set_title('Convergência da Função Política')
20 ax.legend()
21
22 plt.show()

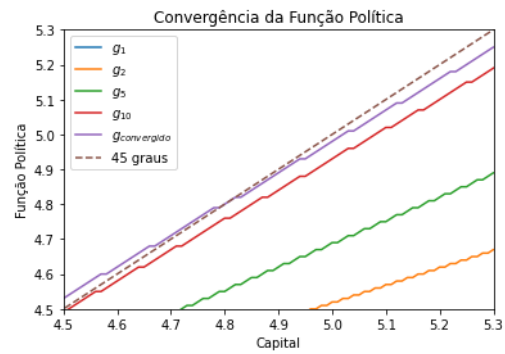
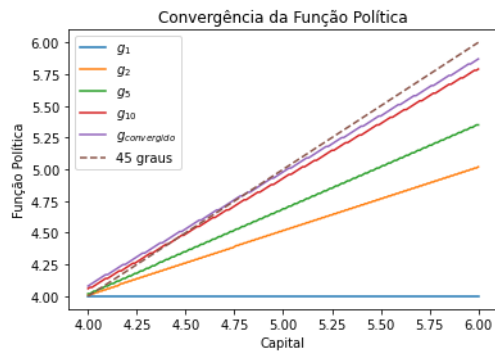
```

Os gráficos acima mostram a convergência da função política, sendo que o da direita é um zoom do gráfico da esquerda. Nelas, vemos que a reta de 45 graus, que corresponde os pontos em que  $k = k'$ , cruza a função política de capital  $g(k)$  próximo a 4.8 (valor calculado acima para o capital estacionário). Podemos também encontrar numericamente o capital estacionário:

```

1 p = int(np.round(np.random.uniform(0, n_k - 1, size = 1), 0)) # aleatório
2 print("Índice inicial do capital (aleatorizado):", p) # Índice randomizado
3
4 while k_grid[p] != gn[n][p]: # até termos  $k = k'$ 

```



```

5     p = np.where(k_grid == gn[n][p])[0][0] # Aplica o índice de k' em k
6
7     print("Índice do capital estacionário:", p) # Índice do capital estacionário
8     g_ss = k_grid[p]
9     print("Capital estacionário k* =", np.round(g_ss, 3))
10
11 # Consumo estacionário c* - a partir do k*
12 c_ss = z * k_grid[p]**alpha + (1-delta)*k_grid[p] - k_grid[p]
13 print("Consumo estacionário c* =", np.round(c_ss, 3))

```

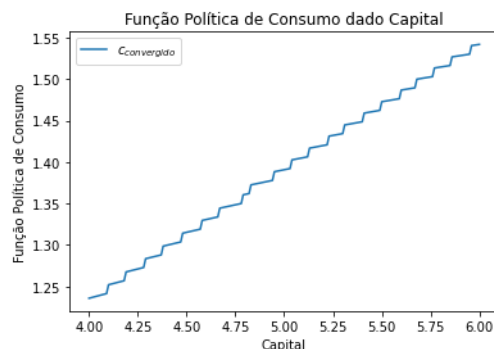
1 Índice inicial do capital (aleatorizado): 104  
2 Índice do capital estacionário: 82  
3 Capital estacionário k\* = 4.82  
4 Consumo estacionário c\* = 1.362

Note que o capital estacionário encontrado é bastante próximo ao valor teórico de 4.8 (calculado acima). Inserir mais dos que os 201 pontos definidos para  $k$  e/ou diminuir o tamanho do intervalo pode auxiliar numa melhor precisão deste valor. Agora, visualizaremos a função política de consumo a partir da função política do capital convergida:

```

1 # Calcular a função consumo c = f(k) + (1 - \delta) k - k'
2 cn = z * k_grid**alpha + (1-delta)*k_grid - gn[n]
3
4 # Visualização gráfica da função política de consumo
5 fig, ax = plt.subplots()
6
7 # Inclusão de cada função valor no gráfico
8 ax.plot(k_grid, cn, label='$c_{convergiado}$')
9
10 # Legendas
11 ax.set_xlabel('Capital')
12 ax.set_ylabel('Função Política de Consumo')
13 ax.set_title('Função Política de Consumo dado Capital')
14 ax.legend()
15
16 plt.show()

```



(e) Suponha que a economia está em steady state em  $t = 0$ . E há uma mudança permanente de  $z = 1$  para  $z' = 1.05$ . Calcule e plote a nova função valor associada com  $z'$ . Compare ela com a função valor encontrada em (c). Calcule e plote a dinâmica de transição do capital e consumo dessa economia para o ajuste ao novo steady state.

Nesta seção, usaremos as funções convergidas (obtidas no item anterior) como "ponto de partida" para a nova economia, em que  $z = 1$  se torna  $z' = 1.05$ .

```

1 # Fazendo a alteração em z
2 z = 1.05
3
4 # Funções iniciais são as convergidas na economia anterior
5 vn = [vn[n]]
6 gn = [gn[n]]
7
8 norma = np.inf # Valor inicial da norma = infinito
9 n = 0 # Contador de iterações
10
11 while norma > tol_norma:
12     # Aplicar a cada iteração Operador de Bellman em objetos genéricos Tv e Tg
13     Tv = np.zeros(n_k)
14     Tg = np.zeros(n_k)
15     f_obj = np.zeros((n_k, n_k))
16     n += 1
17
18     for i in range(n_k):
19         for j in range(n_k):
20             if k_grid[j] >= 0 and k_grid[j] <= z*k_grid[i]**alpha + (1 - delta)*
k_grid[i]:
21                 if sigma == 1: # Utilidade na forma log
22                     f_obj[i,j] = log(z*k_grid[i]**alpha + (1 - delta)*k_grid[i] -
k_grid[j]) + beta*vn[n-1][j]
23                 else: # Utilidade na forma de razão
24                     f_obj[i,j] = ((z*k_grid[i]**alpha + (1 - delta)*k_grid[i] -
k_grid[j]))*(1 - sigma) - 1) / (1 - sigma) + beta*vn[n-1][j]
25                 else:
26                     f_obj[i,j] = - np.inf
27                     Tv[i] = np.max(f_obj[i,:])
28                     Tg[i] = np.argmax(f_obj[i,:])
29
30     # Quando acabar loop de linha, jogar função valor em vn e política em gn
31     vn.append(Tv)
32     gn.append(Tg)
33     norma = max(abs(vn[n] - vn[n-1]))
34
35
36 # Trocando índice em gn por valores de k' (retirando o 1 - já trocado)
37 for j in range(1, len(gn)):
38     for i in range(len(gn[int(j)])):
39         gn[int(j)][i] = k_grid[int(gn[int(j)])[i])]
40
41
42 # Visualização gráfica da convergência da função valor
43 fig, ax = plt.subplots()
44
45 # Inclusão de cada função valor no gráfico
46 ax.plot(k_grid, vn[0], label='$v_0 \ (z = 1)$')
47 ax.plot(k_grid, vn[n], "--", label='$v_{convergado} \ (z^{\prime} = 1.05)$')
48

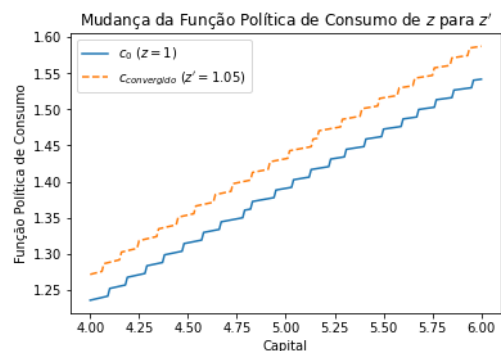
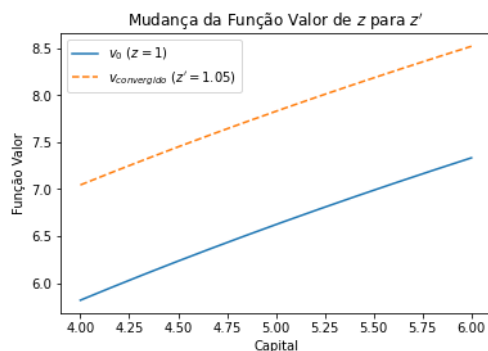
```



```

49 # Legendas
50 ax.set_xlabel('Capital')
51 ax.set_ylabel('Função Valor')
52 ax.set_title('Mudança da Função Valor de $z$ para $z^{\prime}$')
53 ax.legend()
54
55 plt.show()
56
57
58 # Calcular o consumo  $c = f(k) + (1 - \delta)k - k'$ 
59 c0 = cn # função política de consumo anterior
60 cn = z * k_grid**alpha + (1-delta)*k_grid - gn[n] # função política de consumo nova
61
62 # Visualização gráfica da função política de consumo
63 fig, ax = plt.subplots()
64
65 # Inclusão de cada função valor no gráfico
66 ax.plot(k_grid, c0, label='$c_0 \ (z = 1)$')
67 ax.plot(k_grid, cn, "--", label='$c_{convergiado} \ (z^{\prime} = 1.05)$')
68
69 # Legendas
70 ax.set_xlabel('Capital')
71 ax.set_ylabel('Função Política de Consumo')
72 ax.set_title('Mudança da Função Política de Consumo de $z$ para $z^{\prime}$')
73 ax.legend()
74
75 plt.show()

```



```

1 # Encontrar numericamente o capital estocástico  $k^*$  e guardar variáveis de transição
2 print("Índice inicial do capital (do  $k^*$  anterior):", p) # Índice randomizado
3 print("Capital inicial ( $k^*$  de  $z = 1$ ) =", np.round(k_grid[p], 3))
4
5 g_transicao = []
6 c_transicao = []
7 t_ss = 0 # Contador de períodos para estado estacionário
8
9 while k_grid[p] != gn[n][p]: # até termos  $k = k^*$ 
10     aux = p
11     g_transicao.append(k_grid[p])
12     p = np.where(k_grid == gn[n][p])[0][0] # Aplica o índice de  $k^*$  em  $k$ 
13     c_transicao.append(z * k_grid[aux]**alpha + (1-delta)*k_grid[aux] - k_grid[p])
14     t_ss += 1
15
16 print("Foram necessários", t_ss, "períodos para atingir o novo estado estacionário.")
17 print("Índice do capital estacionário (novo):", p) # Índice do capital estacionário
18 g_ss2 = k_grid[p]
19 print("Capital estacionário  $k^*$  ( $z' = 1.05$ ) =", np.round(g_ss2, 3))
20
21 # Consumo estacionário  $c^*$  - a partir do  $k^*$ 
22 c_ss2 = z * k_grid[p]**alpha + (1-delta)*k_grid[p] - k_grid[p]
23 print("Consumo estacionário  $c^*$  =", np.round(c_ss2, 3))

```

```

1 Índice inicial do capital (do  $k^*$  anterior): 82
2 Capital inicial ( $k^*$  de  $z = 1$ ) = 4.82
3 Foram necessários 20 períodos para atingir o novo estado estacionário.
4 Índice do capital estacionário (novo): 114
5 Capital estacionário  $k^*$  ( $z' = 1.05$ ) = 5.14
6 Consumo estacionário  $c^* = 1.459$ 

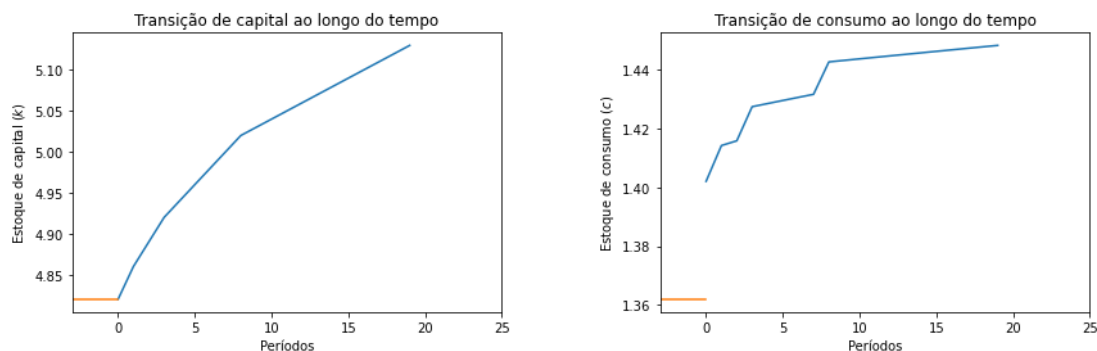
```

A mudança de  $z = 1$  para  $z' = 1.05$  faz aumentar o capital estacionário de 4.8 para 5.1, e o consumo estacionário de 1.36 para 1.46 (as curvas deslocam-se para cima). Também podemos verificar como se deu a transição destes valores ao longo do tempo:

```

1 # Visualização da transição do capital
2 fig, ax = plt.subplots()
3
4 # Inclusão de cada função valor no gráfico
5 ax.plot(range(len(g_transicao)), g_transicao)
6 ax.plot([-3, 0], [g_ss, g_ss])
7
8 # Legendas
9 ax.set_xlabel('Períodos')
10 ax.set_ylabel('Estoque de capital ($k$)')
11 ax.set_title('Transição de capital ao longo do tempo')
12 ax.set_xlim(-3, 25)
13
14 plt.show()
15
16
17 # Visualização da transição do consumo
18 fig, ax = plt.subplots()
19
20 # Inclusão de cada função valor no gráfico
21 ax.plot(range(len(c_transicao)), c_transicao)
22 ax.plot([-3, 0], [c_ss, c_ss])
23
24 # Legendas
25 ax.set_xlabel('Períodos')
26 ax.set_ylabel('Estoque de consumo ($c$)')
27 ax.set_title('Transição de consumo ao longo do tempo')
28 ax.set_xlim(-3, 25)
29
30 plt.show()

```



Ambas quantidade de capital e de consumo crescem. No entanto, o consumo tem um aumento brusco já em  $t = 0$  com a mudança de  $z = 1$  para  $z' = 1.05$ , diferente do capital que depende das decisões de investimento realizadas em períodos anteriores à mudança. ■

---

(f) Refaça os itens (b), (d) e (d) considerando  $\sigma = 0.5$  e  $\sigma = 2$ . O que muda? Dê a intuição dos seus resultados.

---

A mudança de  $\sigma$  altera o formato a função de utilidade, dada por:

$$U(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}, \quad \text{se } \sigma > 0, \sigma \neq 1$$

Para resolver numericamente a função valor, como  $\sigma = 0.5$ , a função valor com a forma de utilidade acima será dada por:

$$v(k) = \max_{\substack{0 \leq k' \leq zk^\alpha + (1-\delta)k \\ k \text{ dado}}} \left\{ \frac{[zk^\alpha + (1-\delta)k - k']^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} + \beta v(k') \right\}. \quad (2.2.9)$$

As únicas alterações são as trocas, no código, do  $\sigma$  e da função de utilidade

```
1 log(z*k_grid[i]**alpha + (1 - delta)*k_grid[i] - k_grid[j]) + beta*vn[n-1][j]
```

para

```
1 ((z*k_grid[i]**alpha + (1 - delta)*k_grid[i] - k_grid[j])** (1 - sigma) - 1) / (1 - sigma) + beta*vn[n-1][j]
```

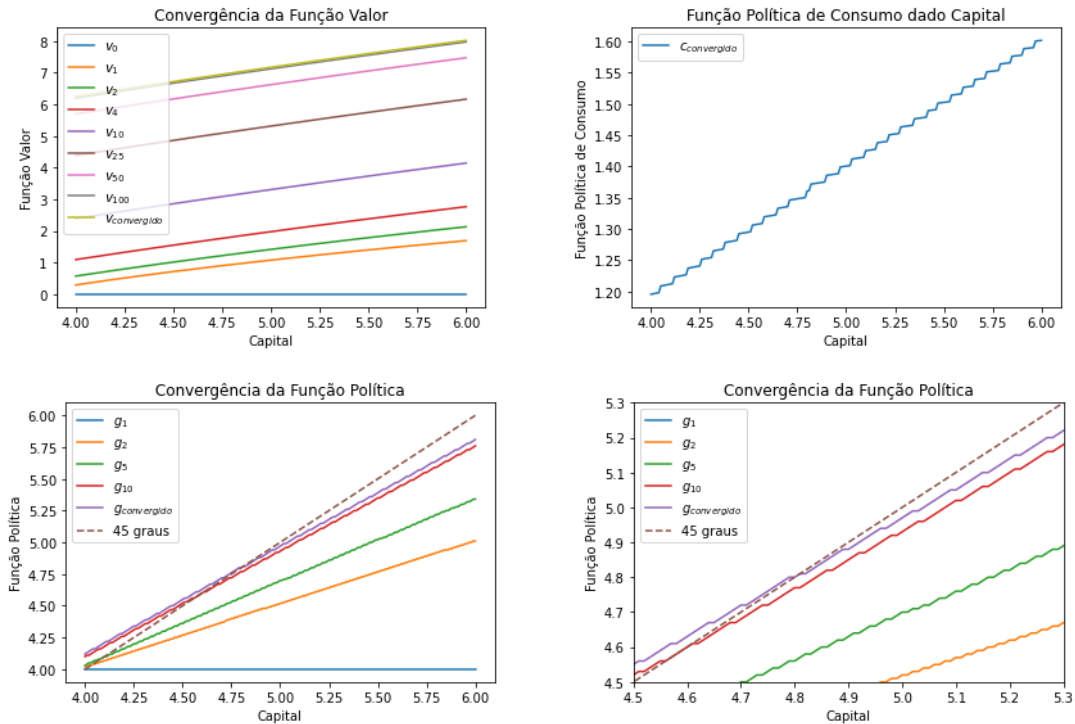
e, portanto, o código não será incluído neste item, apenas os resultados e gráficos.

Caso  $\sigma = 0.5$ :

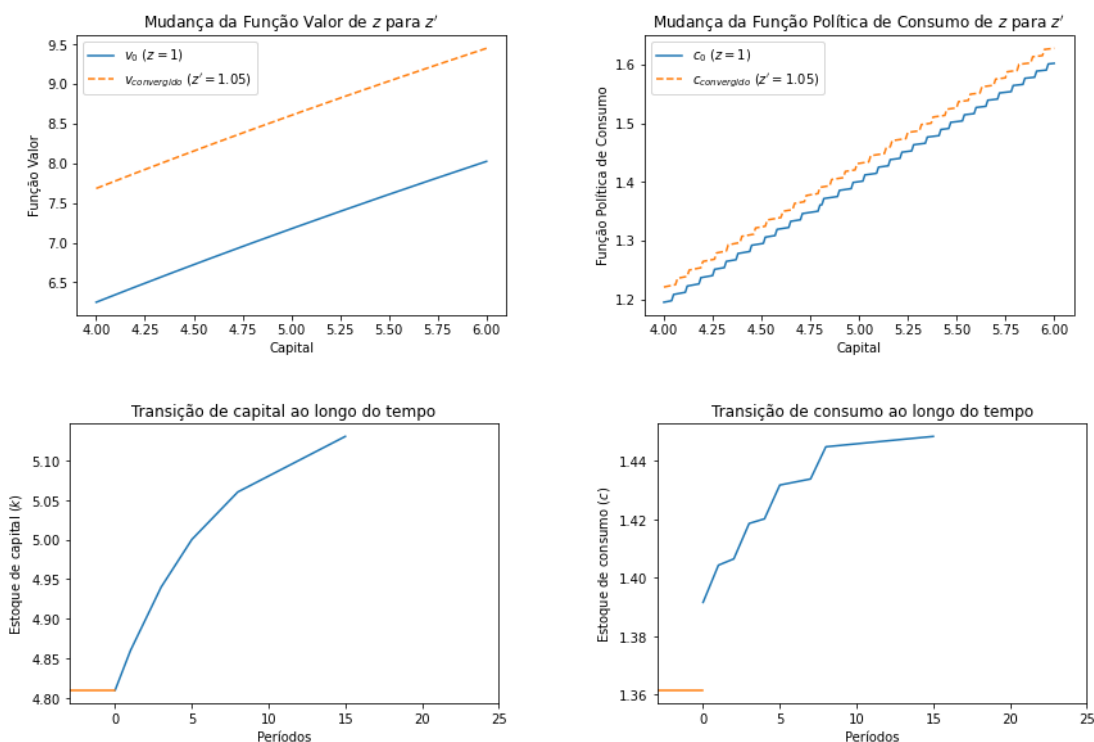
Quando  $z = 1$ , temos os seguintes resultados:

```
1 Índice inicial do capital (aleatorizado): 94
2 Índice do capital estacionário: 81
3 Capital estacionário k* = 4.81
4 Consumo estacionário c* = 1.361
```

Note que os resultados, mesmo com a alteração de  $\sigma = 1$  para  $\sigma = 0.5$ , o capital estacionário,  $k^*$ , e o consumo estacionário,  $c^*$ , permanecem iguais.



Quando  $z = 1.05$ , temos os seguintes resultados:



- 1 Índice inicial do capital (do  $k^*$  anterior): 81
- 2 Capital inicial ( $k^*$  de  $z = 1$ ) = 4.81
- 3 Foram necessários 16 períodos para atingir o novo estado estacionário.
- 4 Índice do capital estacionário (novo): 114
- 5 Capital estacionário  $k^*$  ( $z' = 1.05$ ) = 5.14
- 6 Consumo estacionário  $c^* = 1.459$

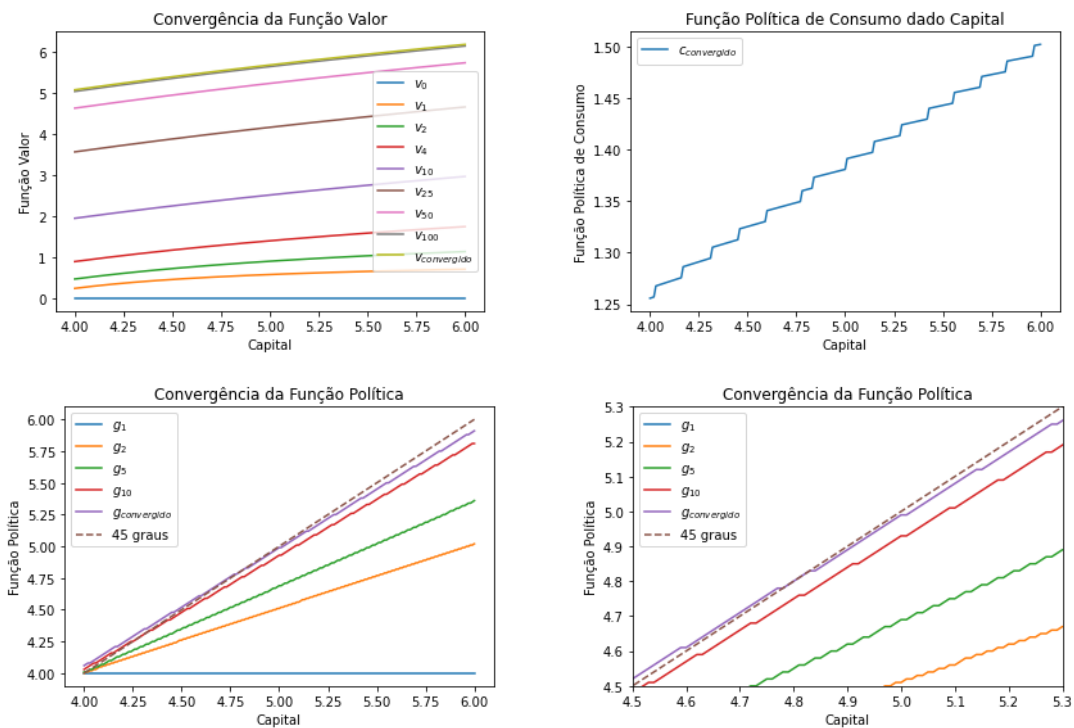
Ao alterar para  $z' = 1.05$ , os valores no estado estacionário também são os mesmos de quando  $\sigma = 1$ . Note que, para atingir o novo estado estacionário, foram necessários 16 períodos (ao invés de 20 no caso em que  $\sigma = 1$ ). Intuitivamente, o consumo é altamente *substituível* ao longo do tempo - ou seja, a elasticidade intertemporal de substituição é relativamente alta:  $1/\sigma = 2$ . Neste caso, a necessidade de suavização do consumo é baixa, logo, o planejador realiza a transição de maneira mais rápida.

#### Caso $\sigma = 2$ :

Quando  $z = 1$ , temos os seguintes resultados:

- 1 Índice inicial do capital (aleatorizado): 74
- 2 Índice do capital estacionário: 78
- 3 Capital estacionário  $k^* = 4.78$
- 4 Consumo estacionário  $c^* = 1.36$

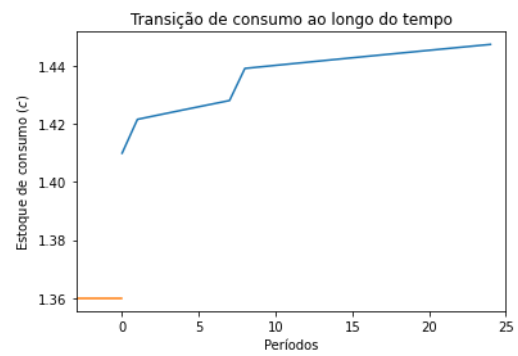
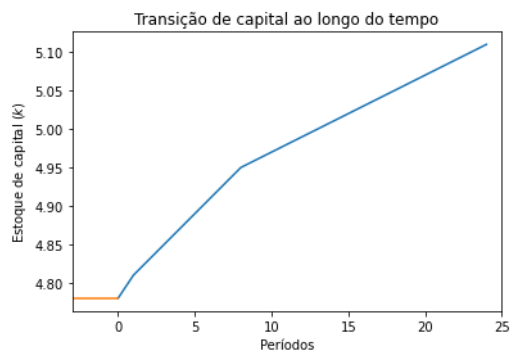
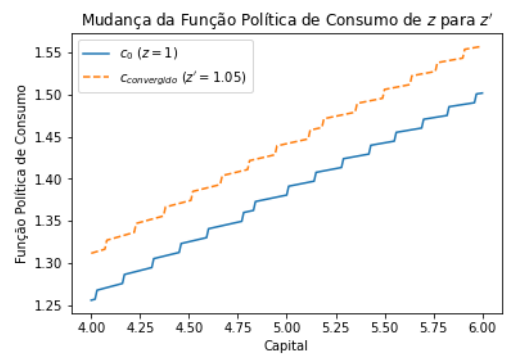
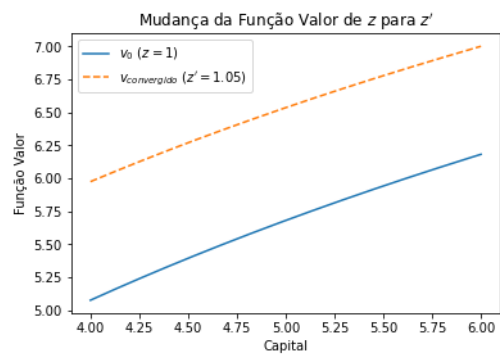
Assim como em  $\sigma = 0.5$ , os resultados para  $\sigma = 2$  são iguais do item anterior ( $\sigma = 1$ ).



Quando  $z = 1.05$ , temos os seguintes resultados:

- 1 Índice inicial do capital (do  $k^*$  anterior): 78
- 2 Capital inicial ( $k^*$  de  $z = 1$ ) = 4.78
- 3 Foram necessários 25 períodos para atingir o novo estado estacionário.
- 4 Índice do capital estacionário (novo): 112
- 5 Capital estacionário  $k^*$  ( $z' = 1.05$ ) = 5.12
- 6 Consumo estacionário  $c^* = 1.458$

Note que, para atingir o novo estado estacionário, foram necessários 25 períodos (ao invés de 20 no caso em que  $\sigma = 1$ ). Intuitivamente, o consumo é altamente *complementar* ao longo do tempo - ou seja, a elasticidade intertemporal de substituição é relativamente baixa:  $1/\sigma = 0.5$ . Neste caso, a necessidade de suavização do consumo é alta, logo, o planejador realiza a transição em um período maior e a convergência ao estado estacionário demora mais.



## Referências

Krueger, D. (2017). *Macroeconomic Theory*. University of Pennsylvania Press.