

Listas de Macroeconomia I - Parte 1

Antonio Ricciardi Macedo - PPGE/FEA-RP/USP

Abril, 2022

Conteúdo

1	Lista 1	2
1.0	[X] Definições, Proposições, Lemas e Observações	2
1.1	[X]	4
1.2	[X]	13

1 Lista 1

1.0 [X] Definições, Proposições, Lemas e Observações

Definição 1 (Krueger, 2017). Uma alocação é uma sequência $(c^1, c^2) = (c_t^1, c_t^2)_{t=0}^{\infty}$ de consumo em cada período para cada indivíduo.

Definição 2 (Krueger, 2017). Um Equilíbrio (Competitivo) de Arrow-Debreu é um par

$$\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty} \quad \text{e} \quad (\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^{\infty})_{i=1,2}$$

tal que

(1) Dado $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^{\infty}$, para cada $i \in \{1, 2\}$, a sequência $\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ resolve

$$\max_{\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t^i) \quad (2)$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t^i c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t^i e_t^i \quad (3)$$

$$c_t^i \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (4)$$

(2) Mercados em equilíbrio em cada $t \in \mathbb{N}$

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (5)$$

Definição 3 (Krueger, 2017). Uma alocação $(c^1, c^2) = (c_t^1, c_t^2)_{t=0}^{\infty}$ é factível se

$$\begin{aligned} c_t^i &\geq 0 & \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 &\leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Definição 4 (Krueger, 2017). Uma alocação $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ é Pareto Eficiente se ela é factível e não existe outra alocação $\{(\tilde{c}_t^1, \tilde{c}_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ tal que

$$\begin{aligned} u(\tilde{c}^i) &\geq u(c^i) & \forall i \in \{1, 2\} \\ u(\tilde{c}^i) &> u(c^i) & \text{para algum } i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Proposição 5 - I Teorema do Bem Social (Krueger, 2017). Seja $\{(\hat{c}_t^1, \hat{c}_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ uma alocação de E.C. de Arrow-Debreu. Então $\{(\hat{c}_t^1, \hat{c}_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ é uma alocação eficiente de Pareto.

Método de Negishi (1960) para Computar Equilíbrios. O Problema do Planejador é

$$\begin{aligned}
 & \max_{\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}} \{ \alpha^1 u(c^1) + \alpha^2 u(c^2) \} \tag{6} \\
 & \text{s.a. } \begin{cases} c_t^i \geq 0 & \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 \leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \max_{\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \alpha^1 \ln(c_t^1) + \alpha^2 \ln(c_t^2) \} \\
 & \text{s.a. } \begin{cases} c_t^i \geq 0 & \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 \leq 2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Proposição 6 (Krueger, 2017). Toda alocação $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ que resolve o problema do Planner (6) para algum vetor de pesos de Pareto $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in \mathbb{R}_+^2$ é Pareto Eficiente.

Proposição 7 (Krueger, 2017). Inversamente, alocação $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ eficiente de Pareto é solução de (6) para algum vetor de pesos de Pareto $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in \mathbb{R}_+^2$, $\alpha \neq 0$.

1.1 [☒]

Considere uma economia com o tempo discreto e infinito, i.e., $t = 0, 1, 2, \dots$. Nesta economia vivem duas pessoas de vida eterna indexadas por $i = 1, 2$. Existe um único bem, que é perecível, e cada pessoa tem uma dotação $e_t^i = 1$ para todo t deste bem. As preferências das pessoas sobre um fluxo de consumo, $\{c_t^i\}_{t=0}^\infty$, são dadas por

$$u^i(\{c_t^i\}_{t=0}^\infty) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t \ln c_t^i,$$

em que $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$. Toda informação desta economia é pública e não há nenhum risco. Em $t = 0$, antes de receber a dotação, as pessoas se encontram em um mercado central e transacionam unidades do bem de consumo para todos os períodos. Denote por p_t o preço de uma unidade do bem no período t . Em todo $t \geq 1$ as pessoas voltam ao mercado central para executar as trocas negociadas em $t = 0$. Assuma que os acordos feitos no início dos tempos são sempre honrados pelas pessoas.

Estratégia da Prova:

- Principais diferenças em relação à economia do Capítulo 2 de Krueger (2017):
 - Preferências individuais distintas: fatores de desconto temporal β_i^t são distintos para cada $i = 1, 2$, com $\beta_1 < \beta_2$.
 - dotações e_t^i são iguais a 1 para toda pessoa i e todo tempo t .

(a) Defina uma alocação factível para esta economia.

Para uma alocação ser factível requer que o consumo seja não-negativo e satisfaça a restrição de recursos (soma das dotações é maior ou igual à soma dos consumos) para todos os períodos t , como definido por Krueger (2017) em:

Definição 3. Uma alocação $(c^1, c^2) = (c_t^1, c_t^2)_{t=0}^\infty$ é factível se

$$\begin{aligned} c_t^i &\geq 0 & \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 &\leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo (de Arrow-Debreu) para esta economia.

A partir da Definição 2 (Krueger, 2017), substituiu-se β^t por β_i^t em (2), dado que, neste exercício, as preferências individuais são distintas, com $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$.

Definição 2'. Um Equilíbrio (Competitivo) de Arrow-Debreu (AD) é um par

$$\{\hat{p}_t\}_{t=0}^\infty \quad \text{e} \quad (\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty)_{i=1,2}$$

tal que

(1) Dado $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^\infty$, para cada $i \in \{1, 2\}$, a sequência $\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty$ resolve

$$\max_{\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^\infty \beta^t \ln(c_t^i) \quad (2')$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^\infty \hat{p}_t^i c_t^i \leq \sum_{t=0}^\infty \hat{p}_t^i e_t^i \quad (3)$$

$$c_t^i \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (4)$$

(2) Mercados em equilíbrio em cada $t \in \mathbb{N}$

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (5)$$

(c) Caracterize o equilíbrio competitivo da economia.

Estratégia da Prova:

- Seção 2.2.2 de Krueger (2017) não é muito promissor.
- Seção 2.2.4 de Krueger (2017) - Método de Negishi:
 1. Resolver o problema do planejador para alocações eficientes de Pareto indexadas nos pesos de Pareto $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$
 2. Usar multiplicadores de Lagrange $\mu_t/2$ para as restrições de recursos no problema do planejador.
 3. Encontrar os pesos de Pareto normalizados tal que as funções de transferência sejam iguais a zero.
 4. Alocações de eficientes de Pareto correspondentes a $\hat{\alpha}$ são alocações de equilíbrio; os preços de equilíbrio são (múltiplos de) multiplicadores de Lagrange do problema do planejador.

Seja o par $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^\infty$ e $\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty$, para $i = 1, 2$, Equilíbrio Competitivo de Arrow-Debreu (AD), então resolvendo o problema do consumidor temos:

$$\mathcal{L}(\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty, \lambda_i) = \sum_{t=0}^\infty \beta_i^t \ln(c_t^i) \stackrel{(*)}{-} \lambda_i \left(\sum_{t=0}^\infty p_t (c_t^i - e_t^i) \right)$$

Note que, em $(*)$, o sinal é negativo, pois $p_t (c_t^i - e_t^i) \leq 0$. Observe também que λ_i é o multiplicador de Lagrange para a restrição orçamentária.

CPO's para c_t^i :

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^i} = \beta_i^t \cdot \frac{1}{c_t^i} - \lambda_i p_t(1) \iff \lambda_i = \frac{\beta_i^t}{p_t c_t^i}, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (1.1.1)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = \sum_{t=0}^\infty p_t (c_t^i - e_t^i) = 0 \quad (1.1.2)$$

Analogamente, para c_{t+1}^i :

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^i} = \beta_i^{t+1} \cdot \frac{1}{c_{t+1}^i} - \lambda_i p_t(1) \iff \lambda_i = \frac{\beta_i^{t+1}}{p_{t+1} c_{t+1}^i}, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (1.1.3)$$

Igualando λ_i de (1.1.1) e de (1.1.3), temos, para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_i^t}{p_t c_t^i} &= \frac{\beta_i^{t+1}}{p_{t+1} c_{t+1}^i} \iff \\ \frac{1}{p_t c_t^i} &= \frac{\beta_i}{p_{t+1} c_{t+1}^i} \iff & (\text{dividindo por } \beta_i^t) \\ p_{t+1} c_{t+1}^i &= \beta_i p_t c_t^i, \quad \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Somando equações (1.1.4) para $i = 1$ e $i = 2$, temos

$$\begin{aligned} p_{t+1} c_{t+1}^1 + p_{t+1} c_{t+1}^2 &= \beta_1 p_t c_t^1 + \beta_2 p_t c_t^2 \iff \\ p_{t+1} (c_{t+1}^1 + c_{t+1}^2) &= p_t (\beta_1 c_t^1 + \beta_2 c_t^2) \iff \\ p_{t+1} (e_{t+1}^1 + e_{t+1}^2) &= p_t (\beta_1 c_t^1 + \beta_2 c_t^2) \iff & (\text{no equilíbrio } c_t = e_t = 2) \\ 2p_{t+1} &= p_t (\beta_1 c_t^1 + \beta_2 c_t^2) \iff & (1.1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2p_{t+1} &= p_t [\beta_1 (2 - c_t^2) + \beta_2 c_t^2] \iff & (c_t^1 = 2 - c_t^2) \\ 2p_{t+1} &= p_t (2\beta_1 - \beta_1 c_t^2 + \beta_2 c_t^2) \iff \\ p_{t+1} &= p_t \frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_t^2}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Por indução matemática, temos

$$p_t = p_0 \left(\frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_0^2}{2} \right)^t, \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Tomando, sem perda de generalidade, $p_0 = 1$, temos

$$p_t = \left(\frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_0^2}{2} \right)^t, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (1.1.6')$$

Para encontrar c_t^2 , substituímos (1.1.6) em (1.1.4), para $i = 2$:

$$\begin{aligned} \left(p_t \frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_t^2}{2} \right) c_{t+1}^2 &= \beta_2 p_t c_t^2 \\ \frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_t^2}{2} c_{t+1}^2 &= \beta_2 c_t^2 \\ c_{t+1}^2 &= c_t^2 \frac{2\beta_2}{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por indução matemática, temos

$$c_t^2 = c_0^2 \left(\frac{2\beta_2}{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_0^2} \right)^t, \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

(...)

Pelo método acima, os cálculos serão mais complexos e há resultados com funções implícitas. Usaremos, então, o **Método de Negishi (1960)** em que o Problema do Planejador é:

$$\begin{aligned} & \max_{\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}} \{ \alpha^1 u(c^1) + \alpha^2 u(c^2) \} \\ \iff & \max_{\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}} \alpha^1 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_1^t \ln(c_t^1) + \alpha^2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_2^t \ln(c_t^2) \\ & s.a. \quad \begin{cases} c_t^i \geq 0 & \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 \leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Anexando multiplicadores de Lagrange iguais a $\mu_t/2$ para as restrições de recursos, o Lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L} = \alpha^1 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_1^t \ln(c_t^1) + \alpha^2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_2^t \ln(c_t^2) - \frac{\mu_t}{2} \left(\sum_{t=0}^{\infty} (c_t^1 + c_t^2 - 2) \right)$$

As CPO's são:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^1} = \frac{\alpha^1 \beta_1^t}{c_t^1} - \frac{\mu_t}{2} \iff \frac{\alpha^1 \beta_1^t}{c_t^1} = \frac{\mu_t}{2} \quad (1.1.7)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^2} = \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{c_t^2} - \frac{\mu_t}{2} \iff \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{c_t^2} = \frac{\mu_t}{2} \quad (1.1.8)$$

Note que μ_t nestas CPO's tem o mesmo papel de p_t nas CPO's de (1.1.1) e (1.1.2), ou seja, é uma medida de escassez (Krueger, 2017, pág. 18). Portanto, há uma conexão próxima entre μ_t e p_t , tal que, no equilíbrio,

$$p_t = \mu_t.$$

Igualando (1.1.7) e (1.1.8), temos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^1 \beta_1^t}{c_t^1} &= \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{c_t^2} \iff \\ c_t^1 &= \frac{\alpha^1 \beta_1^t c_t^2}{\alpha^2 \beta_2^t} = \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t c_t^2 \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Substituindo (1.1.9) na restrição de recursos no equilíbrio competitivo, temos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t c_t^2 + c_t^2 &= 2 \\ c_t^2 \left(1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t \right) &= 2 \\ c_t^2(\alpha) &= \frac{2}{1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t} \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Fazendo o mesmo para c_t^1 , obtemos

$$c_t^1(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^t} \quad (1.1.11)$$

Substituindo (1.1.10) em (1.1.8), segue que

$$\begin{aligned}\frac{\mu_t}{2} &= \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{2} \left(1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t \right) \iff \\ \mu_t &= \alpha^2 \beta_2^t + \frac{\alpha^1 \alpha^2 \beta_2^t}{\alpha^2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t \iff \\ \mu_t &= \alpha^1 \beta_1^t + \alpha^2 \beta_2^t\end{aligned}\tag{1.1.12}$$

As funções de transferência, $t^i(\alpha)$ para $i = 1, 2$, são definidas por

$$t^i(\alpha) = \sum_{t=0}^{\infty} \mu_t [c_t^i(\alpha) - 1] = \sum_{t=0}^{\infty} \mu_t c_t^i(\alpha) - \sum_{t=0}^{\infty} \mu_t\tag{1.1.13}$$

Note que (1.1.10) e (1.1.11) estão no formato, para $i, j = 1, 2$ com $i \neq j$,

$$c_t^i(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^j}{\alpha^i} \left(\frac{\beta_j}{\beta_i} \right)^t}.$$

Substituindo a expressão acima e (1.1.12) em (1.1.13), obtemos

$$\begin{aligned}t^i(\alpha) &= \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t) \left(\frac{2}{1 + \frac{\alpha^j}{\alpha^i} \left(\frac{\beta_j}{\beta_i} \right)^t} \right) - \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2(\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t)}{1 + \frac{\alpha^j}{\alpha^i} \left(\frac{\beta_j}{\beta_i} \right)^t} - \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^i \beta_i^t - \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^j \beta_j^t \\ &= 2 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t}{\frac{\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t}{\alpha^i \beta_i^t}} - \alpha^i \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t - \alpha^j \sum_{t=0}^{\infty} \beta_j^t \\ &= 2 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t}{\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t} (\alpha^i \beta_i^t) - \alpha^i \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t - \alpha^j \sum_{t=0}^{\infty} \beta_j^t \\ &= 2 \frac{\alpha^i}{1 - \beta_i} - \frac{\alpha^i}{1 - \beta_i} - \frac{\alpha^j}{1 - \beta_j} \\ t^i(\alpha) &= \frac{\alpha^i}{1 - \beta_i} - \frac{\alpha^j}{1 - \beta_j}\end{aligned}\tag{1.1.14}$$

Agora, como $t^i(\alpha) = 0, \forall i = 1, 2$ no equilíbrio, temos

$$t^i(\alpha) = \frac{\alpha^i}{1 - \beta_i} - \frac{\alpha^j}{1 - \beta_j} = 0$$

Como α^1 e α^2 são pesos arbitrários e o que importa é a relação entre eles (α^1/α^2), tomamos os pesos tal que $\alpha^1 + \alpha^2 = 1 \iff \alpha^2 = 1 - \alpha^1$, sem perda de generalidade. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^1}{1 - \beta_1} &= \frac{1 - \alpha^1}{1 - \beta_2} \\ \alpha^1(1 - \beta_2) &= (1 - \alpha^1)(1 - \beta_1) \\ \alpha^1(1 - \beta_2) &= 1 - \beta_1 - \alpha^1(1 - \beta_1) \\ \alpha^1(1 - \beta_2) + \alpha^1(1 - \beta_1) &= 1 - \beta_1 \\ \alpha^1(2 - \beta_1 - \beta_2) &= 1 - \beta_1 \\ \hat{\alpha}^1 &= \frac{1 - \beta_1}{2 - \beta_1 - \beta_2} > 0\end{aligned}\tag{1.1.15}$$

em que $\alpha^1 > 0$, pois $\beta_1, \beta_2 < 1$. Analogamente, para $i = 2$, temos

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1 - \beta_2}{2 - \beta_1 - \beta_2} > 0 \quad (1.1.16)$$

Note que $\alpha_1 > \alpha_2$, dado que os denominadores são idênticos e $(1 - \beta_1) > (1 - \beta_2)$, pois $\beta_2 > \beta_1$. Agora, aplicando (1.1.15) e (1.1.16) em (1.1.10) e (1.1.11), temos

$$\hat{c}_t^1 = \frac{2}{1 + \frac{\left(\frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t}{\left(\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t}} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} \quad (1.1.17)$$

e

$$\hat{c}_t^2 = \frac{2}{1 + \frac{\left(\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\right) \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t}{\left(\frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\right) \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t}} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} \quad (1.1.18)$$

Como $p_t = \mu/2$ no equilíbrio, aplicando (1.1.12), (1.1.15) e (1.1.16), obtemos

$$\begin{aligned} p_t = \mu_t &= \alpha^1 \beta_1^t + \alpha^2 \beta_2^t \\ &= \left(\frac{1 - \beta_1}{2 - \beta_1 - \beta_2} \right) \beta_1^t + \left(\frac{1 - \beta_2}{2 - \beta_1 - \beta_2} \right) \beta_2^t \\ \hat{p}_t &= \frac{\beta_1^t(1 - \beta_1) + \beta_2^t(1 - \beta_2)}{2 - \beta_1 - \beta_2} \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Portanto, é Pareto Eficiente a alocação $\{(\hat{c}_t^1, \hat{c}_t^2)\}_{t=0}^\infty$ que resolve o Problema do Planejador (6) para o vetor de pesos de Pareto $\alpha = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2) \in \mathbb{R}_+^2$ tal que

$$\hat{c}_t^1 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} \quad (1.1.17)$$

$$\hat{c}_t^2 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} \quad (1.1.18)$$

$$\hat{\alpha}^1 = \frac{1 - \beta_1}{2 - \beta_1 - \beta_2} \quad (1.1.15)$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1 - \beta_2}{2 - \beta_1 - \beta_2} \quad (1.1.16)$$

sob os preços de equilíbrio

$$\hat{p}_t = \frac{\beta_1^t(1 - \beta_1) + \beta_2^t(1 - \beta_2)}{2 - \beta_1 - \beta_2}. \quad (1.1.19)$$

■

(d) Seja \hat{c}_t^i o consumo da pessoa i no período t em equilíbrio. Mostre que:

i) $\hat{c}_0^1 - \hat{c}_0^2 > 0$

ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{c}_t^1 = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{c}_t^2 = 2$

Item (i):

Usando (1.1.17) e (1.1.18) para $t = 0$, obtemos:

$$c_0^1 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^0} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}}$$
$$c_0^2 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^0} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}}$$

Como $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$, temos que $(1 - \beta_2) < (1 - \beta_1)$ e, portanto, o denominador de c_0^2 é maior do que de c_0^1 . Portanto, como o numerador de ambos consumos iniciais são iguais, concluímos que

$$c_0^1 > c_0^2 \iff c_0^1 - c_0^2 > 0$$

■

Item (ii):

- Para c_t^1 : por (1.1.11), temos que

$$c_t^1(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} \quad (1.1.11)$$

– Note que $\beta_2 > \beta_1$, portanto $\beta^2/\beta^1 > 1$.

– Portanto, quando $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t = \infty$$

– Logo, o denominador de (1.1.11) vai a infinito e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_t^1 = 0$$

- Para c_t^2 : por (1.1.10), temos que

$$c_t^2(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} \quad (1.1.10)$$

– Note que $\beta_2 > \beta_1$, portanto $\beta^1/\beta^2 < 1$.

– Portanto, quando $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t = 0$$

– Logo, o denominador de (1.1.10) vai a 1 e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_t^2 = 2$$

■

(e) Explique a intuição dos resultados demonstrados no item anterior.

O fato da diferença, $c_0^1 - c_0^2$, ser positiva se dá pelo fato de $\beta_1 < \beta_2$ tal que $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1)$. Um maior β preserva mais os valores quando os t 's são maiores, ou seja, indica uma maior “paciência” do consumidor em relação a consumos futuros. Como $\beta_1 < \beta_2$, o indivíduo 1 é mais impaciente e, portanto, consome mais do que o 2 nos períodos iniciais, enquanto o indivíduo 2 é mais paciente e consome mais no futuro. Portanto, $c_0^1 - c_0^2 > 0$ e, quando $t \rightarrow \infty$, $c_t^2 \rightarrow 2$ (total de dotação em um período) e $c_t^1 \rightarrow 0$.

(f) É fácil ver que as sequências de consumo de equilíbrio são monótonas. Escreva um código que encontre o período $t^*(\beta_1, \beta_2)$ para o qual $\hat{c}_t^1 - \hat{c}_t^2$ troca de sinal para β 's genéricos. Fixe $\beta_2 = 0.95$ e faça um gráfico para mostrar $t^*(\beta_1, \beta_2)$.¹

```

1 # Módulos a serem utilizados
2 import numpy as np # Módulo para trabalhar com matrizes
3 import matplotlib.pyplot as plt # Módulo para fazer gráficos
4
5 beta_2 = 0.95 # valor de beta_2 fixado
6
7 # Criando e preenchendo matriz com beta_1 e t*
8 tabela = np.zeros([18, 2]) # criando matriz de zeros 18 x 2 para preenchimento
9
10 # Loop para preenchimento de possíveis \beta_1 < \beta_2 e t* para c1_t - c2_t
11 # mudar de sinal (quando c2_t > 1, pois c2_t = 2 - c1_t, no equilíbrio)
12 for i in range(len(tabela)):
13     tabela[i, 0] = beta_2 - (i + 1) * 0.05
14
15     # Calcular consumo inicial do indivíduo 2 (c2_0)
16     t = 0
17     c2_t = - np.inf # um valor pequeno arbitrário para entrar no loop
18
19     while c2_t < 1:
20         # Como c1_t + c2_t = 2, só precisamos verificar se c2_t > 1 ou c1_t < 1
21         c2_t = 2 / (1 + ((1 - tabela[i,0]) / (1 - beta_2)) * (tabela[i,0] / beta_2)
22         ** t)
23         t += 1
24     tabela[i, 1] = t - 1 # tem que ser t-1 pois o Python não atualiza
25     # automaticamente o valor de c2_t
26 print(tabela)

```

```

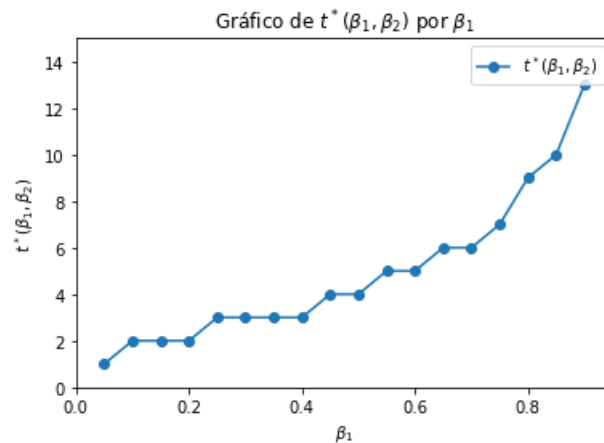
1 [[ 0.9  13. ]
2  [ 0.85 10. ]
3  [ 0.8   9. ]
4  [ 0.75  7. ]
5  [ 0.7   6. ]
6  [ 0.65  6. ]
7  [ 0.6   5. ]
8  [ 0.55  5. ]
9  [ 0.5   4. ]
10 [ 0.45  4. ]
11 [ 0.4   3. ]
12 [ 0.35  3. ]
13 [ 0.3   3. ]
14 [ 0.25  3. ]
15 [ 0.2   2. ]
16 [ 0.15  2. ]
17 [ 0.1   2. ]

```

¹É possível encontrar analiticamente $t^*(\beta_1, \beta_2)$. Não é este o propósito do exercício. Resolva o problema numericamente.

```
18 [ 0.05  1.  ]]
```

```
1 # Criação do gráfico
2 fig, ax = plt.subplots() # Cria a base (em branco) do gráfico
3 ax.plot(tabela[:, 0], tabela[:, 1], # Coluna 0 no eixo x e coluna 1 no y
4         '-o', # Formato da linha e ponto do gráfico
5         label='$t^*(\\beta_1, \\beta_2)$') # Descrição da legenda
6 ax.legend() # Faz aparecer a legenda
7 ax.set_ylim([0, 15]) # tamanho mínimo e máximo vertical
8 ax.set_xlim([0.00, 0.95]) # tamanho mínimo e máximo horizontal
9 ax.set_xlabel('$\\beta_1$') # Descrição do eixo x
10 ax.set_ylabel('$t^*(\\beta_1, \\beta_2)$') # Descrição do eixo y
11 ax.set_title('Gráfico de $t^*(\\beta_1, \\beta_2)$ por $\\beta_1$') # Título
12 plt.show() # Plot do gráfico com os comandos dados
```



1.2 $\boxed{\times}$

Considere uma economia com o tempo discreto e infinito, i.e., $t = 0, 1, 2, \dots$. Nesta economia vivem duas pessoas de vida eterna indexadas por $i = 1, 2$. Existe um único bem, que perecível, e cada pessoa tem uma dotação do tipo:

$$e_t^i = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i + t \text{ é par} \\ 0 & , \text{ se } i + t \text{ é ímpar} \end{cases}$$

As preferências das pessoas sobre um fluxo de consumo, $\{c_t^i\}_{t=0}^\infty$, são dadas por

$$u^i(\{c_t^i\}_{t=0}^\infty) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

em que $0 < \beta < 1$. Toda informação desta economia é pública e não há nenhum risco. Em $t = 0$, antes de receber a dotação, as pessoas se encontram em um mercado central e transacionam unidades do bem de consumo para todos os períodos. Denote por p_t o preço de uma unidade do bem no período t . Em todo $t \geq 1$ as pessoas voltam ao mercado central para executar as trocas negociadas em $t = 0$. Assuma que os acordos feitos no início dos tempos são sempre honrados pelas pessoas.

(a) Defina uma alocação factível para esta economia.

Uma alocação $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^\infty$ é factível se satisfaz a seguinte restrição de recursos:

$$\sum_{i=1}^2 c_t^i \leq \sum_{i=1}^2 e_t^i \quad \forall t$$

em que

$$c_t^i \geq 0 \quad \forall t, \text{ para } i = 1, 2.$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo (de Arrow-Debreu) para esta economia.

Um Equilíbrio (Competitivo) de Arrow-Debreu (AD) são preços $\{\hat{p}\}_{t=0}^\infty$ e alocações $(\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty)_{i=1,2}$, tais que

(1) Dado $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^\infty$, para cada $i \in \{1, 2\}$, a sequência $\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty$ resolve

$$\max_{\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(\hat{c}_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (2)$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t \hat{c}_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t e_t^i \quad (3)$$

$$\hat{c}_t^i \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (4)$$

(2) Mercados em equilíbrio em cada $t \in \mathbb{N}$

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (5)$$

(c) Mostre que em num equilíbrio competitivo a pessoa 2 tem um consumo maior do que a pessoa 1.

Estratégia da Prova:

- Resolver o problema do consumidor para preços arbitrários.
 - Encontrar os preços que satisfaçam o Market Clearing.
 - Substituir os preços do encontrados no problema do consumidor para encontrar a alocação de equilíbrio.
-

Problema do Consumidor:

$$\max_{\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (2)$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t e_t^i \quad (3)$$

$$c_t^i \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Calculando a CPO para o consumidor i:

$$\begin{aligned} \beta^t u'(c_t^i) - \lambda^i p_t &= 0 \\ u'(c_t^i) &= \lambda^i \frac{p_t}{\beta^t} \end{aligned}$$

Note que o resultado obtido da CPO nos permite fazer a seguinte relação:

$$\frac{u'(c_t^i)}{u'(c_t^j)} = \frac{\lambda^i \frac{p_t}{\beta^t}}{\lambda^j \frac{p_t}{\beta^t}} = \frac{\lambda^i}{\lambda^j}$$

Rearranjando, obtemos:

$$\begin{aligned} u'(c_t^i) &= \lambda^i \frac{p_t}{\beta^t} \\ (c_t^i)^{-\sigma} &= \lambda^i \frac{p_t}{\beta^t} \\ c_t^i &= \left(\frac{\beta^t}{\lambda^i p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \end{aligned} \quad (5)$$

Aplicando o resultado na restrição orçamentária:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} p_t \left(\frac{\beta^t}{\lambda^i p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i \\ (\lambda^i)^{-\frac{1}{\sigma}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{\frac{t}{\sigma}} p_t^{1-\frac{1}{\sigma}} &= \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i \end{aligned}$$

$$\lambda^i = \left[\frac{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^{\frac{t}{\sigma}} p_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i} \right]^{\sigma}$$

Substituindo este resultado em (5), obtemos:

$$c_t^i = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Agora, aplicaremos a condição de market clearing:

$$c_t^1 + c_t^2 = 1 \quad \forall t$$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^1}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^2}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= 1 \\ \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s (e_s^1 + e_s^2)}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= 1 \\ \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= 1 \end{aligned}$$

Então, $\left(\frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$ deve ser constante. Logo, para $t+1$, teremos:

$$\frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^{t+1}}{p_{t+1}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} = 1$$

E, então:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^{t+1}}{p_{t+1}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ \left(\frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= \left(\frac{\beta^{t+1}}{p_{t+1}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ p_t \beta &= p_{t+1} \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, assuma $p_0 = 1$. Então, por indução, temos que

$$p_t = \beta^t \tag{6}$$

Para encontrar a alocação de equilíbrio dos agentes, basta substituir 6 na decisão de consumo. Assim:

$$c_t^i = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^{s(1-\frac{1}{\sigma})} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left(\frac{\beta^t}{\beta^t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s}$$

Como $\beta \in (0, 1)$,

$$c_t^i = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s} = (1 - \beta) \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i$$

Agora, basta calcular o consumo de cada agente.

Para $i = 1$, $e_t^i = 1$ se $i + t$ é ímpar, ou seja,

$$(1 - \beta) \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^1 = (1 - \beta)[0 + \beta + 0 + \beta^2 + 0 + \beta^4 + \dots] = \frac{\beta(1 - \beta)}{1 - \beta^2}$$

Para $i = 2$, $e_t^i = 1$ se $i + t$ é par. Então,

$$(1 - \beta) \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^2 = (1 - \beta)[1 + 0 + \beta^2 + 0 + \beta^4 + \dots] = \frac{(1 - \beta)}{1 - \beta^2}$$

Portanto, as alocações ótimas serão:

$$c_t^i = \begin{cases} \frac{\beta(1 - \beta)}{1 - \beta^2} & , \text{ se } i = 1 \\ \frac{(1 - \beta)}{1 - \beta^2} & , \text{ se } i = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Como assumimos que $\beta \in (0, 1)$,

$$\frac{\beta(1 - \beta)}{1 - \beta^2} < \frac{(1 - \beta)}{1 - \beta^2}$$

pois o único termo que diferencia as duas equações é o β . Sendo assim, podemos reescrever as alocações ótimas como $c_t^2 = \frac{(1 - \beta)}{1 - \beta^2}$ e $c_t^1 = \beta c_t^2$. Logo, $c_t^2 > c_t^1$.

(d) Explique a intuição dos resultados demonstrados no item anterior.

O resultado do item (c) é obtido pelo fato da construção das dotações da economia. Como foi definido que

$$e_t^i = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i + t \text{ é par} \\ 0 & , \text{ se } i + t \text{ é ímpar} \end{cases}$$

temos que em $t = 0$ o consumidor que terá dotação igual a 1 será o consumidor 2, pois $i + t = 2 + 0 = 2$, que é um número par. Sendo assim, o consumidor 2 terá uma vantagem comparativa inicial ao indivíduo 1, por iniciar sua vida consumindo. Portanto, é intuitivo concluirmos que $c_t^2 > c_t^1$.

(e) Suponha agora que as pessoas podem trocar um título de um período que promete o pagamento de uma unidade do bem de consumo. Além disso, as pessoas trocam bens e títulos a cada período via um mercado centralizado. Defina um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais.

Definição: Um equilíbrio em mercados sequenciais é dado por uma alocação $\{(\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i)_{i=1,2}\}_{t=0}^{\infty}$ e uma sequência de taxa de juros $\{\hat{r}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ tais que:

(1) Para $i = 1, 2$, dada $\{\hat{r}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}, \{\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i\}_{t=0}^{\infty}$ resolve

$$\begin{aligned} \max_{\{\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ s.a. \quad c_t^i + \frac{a_{t+1}^i}{1 + \hat{r}_{t+1}} \leq e_t^i + a_t^i, \quad \forall t \\ c_t^i \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ a_{t+1}^i \geq -\bar{A}, \quad \forall t, \bar{A}^i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2) Market Clearing

$$\begin{aligned} \hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 &= e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^2 a_{t+1}^i &= 0 \end{aligned}$$

Referências

Krueger, D. (2017). *Macroeconomic Theory*. University of Pennsylvania Press.

Negishi, T. (1960). Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy. *Metroeconomica*, 12(2-3), 92–97.