

# Listas de Macroeconomia I - Parte 1

Antonio Ricciardi Macedo - PPGE/FEA-RP/USP

Abril, 2022

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Lista 1</b>	<b>2</b>
1.0	[X] Definições, Proposições, Lemas e Observações . . . . .	2
1.1	[X] . . . . .	4
1.2	[X] . . . . .	13

# 1 Lista 1

## 1.0 [X] Definições, Proposições, Lemas e Observações

---

**Definição 1 (Krueger, 2017).** Uma alocação é uma sequência  $(c^1, c^2) = (c_t^1, c_t^2)_{t=0}^\infty$  de consumo em cada período para cada indivíduo.

---

**Definição 2 (Krueger, 2017).** Um Equilíbrio (Competitivo) de Arrow-Debreu é um par

$$\{\hat{p}_t\}_{t=0}^\infty \quad \text{e} \quad (\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty)_{i=1,2}$$

tal que

(1) Dado  $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^\infty$ , para cada  $i \in \{1, 2\}$ , a sequência  $\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty$  resolve

$$\max_{\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^\infty \beta^t \ln(c_t^i) \quad (2)$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^\infty \hat{p}_t^i c_t^i \leq \sum_{t=0}^\infty \hat{p}_t^i e_t^i \quad (3)$$

$$c_t^i \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (4)$$

(2) Mercados em equilíbrio em cada  $t \in \mathbb{N}$

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (5)$$

---

**Definição 3 (Krueger, 2017).** Uma alocação  $(c^1, c^2) = (c_t^1, c_t^2)_{t=0}^\infty$  é factível se

$$\begin{aligned} c_t^i &\geq 0 & \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 &\leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

---

**Definição 4 (Krueger, 2017).** Uma alocação  $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^\infty$  é Pareto Eficiente se ela é factível e não existe outra alocação  $\{(\tilde{c}_t^1, \tilde{c}_t^2)\}_{t=0}^\infty$  tal que

$$\begin{aligned} u(\tilde{c}^i) &\geq u(c^i) & \forall i \in \{1, 2\} \\ u(\tilde{c}^i) &> u(c^i) & \text{para algum } i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

---

**Proposição 5 - I Teorema do Bem Social (Krueger, 2017).** Seja  $\{(\hat{c}_t^1, \hat{c}_t^2)\}_{t=0}^\infty$  uma alocação de E.C. de Arrow-Debreu. Então  $\{(\hat{c}_t^1, \hat{c}_t^2)\}_{t=0}^\infty$  é uma alocação eficiente de Pareto.

---

**Método de Negishi (1960) para Computar Equilíbrios.** O Problema do Planejador é

$$\begin{aligned}
 & \max_{\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}} \{ \alpha^1 u(c^1) + \alpha^2 u(c^2) \} \tag{6} \\
 & \text{s.a. } \begin{cases} c_t^i \geq 0 & \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 \leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \max_{\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \alpha^1 \ln(c_t^1) + \alpha^2 \ln(c_t^2) \} \\
 & \text{s.a. } \begin{cases} c_t^i \geq 0 & \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 \leq 2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{cases}
 \end{aligned}$$

---

**Proposição 6 (Krueger, 2017).** Toda alocação  $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$  que resolve o problema do Planner (6) para algum vetor de pesos de Pareto  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in \mathbb{R}_+^2$  é Pareto Eficiente.

---

**Proposição 7 (Krueger, 2017).** Inversamente, alocação  $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$  eficiente de Pareto é solução de (6) para algum vetor de pesos de Pareto  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $\alpha \neq 0$ .

---

## 1.1 [☒]

Considere uma economia com o tempo discreto e infinito, i.e.,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Nesta economia vivem duas pessoas de vida eterna indexadas por  $i = 1, 2$ . Existe um único bem, que é perecível, e cada pessoa tem uma dotação  $e_t^i = 1$  para todo  $t$  deste bem. As preferências das pessoas sobre um fluxo de consumo,  $\{c_t^i\}_{t=0}^\infty$ , são dadas por

$$u^i(\{c_t^i\}_{t=0}^\infty) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t \ln c_t^i,$$

em que  $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ . Toda informação desta economia é pública e não há nenhum risco. Em  $t = 0$ , antes de receber a dotação, as pessoas se encontram em um mercado central e transacionam unidades do bem de consumo para todos os períodos. Denote por  $p_t$  o preço de uma unidade do bem no período  $t$ . Em todo  $t \geq 1$  as pessoas voltam ao mercado central para executar as trocas negociadas em  $t = 0$ . Assuma que os acordos feitos no início dos tempos são sempre honrados pelas pessoas.

---

### Estratégia da Prova:

- Principais diferenças em relação à economia do Capítulo 2 de Krueger (2017):
  - Preferências individuais distintas: fatores de desconto temporal  $\beta_i^t$  são distintos para cada  $i = 1, 2$ , com  $\beta_1 < \beta_2$ .
  - dotações  $e_t^i$  são iguais a 1 para toda pessoa  $i$  e todo tempo  $t$ .

---

### (a) Defina uma alocação factível para esta economia.

Para uma alocação ser factível requer que o consumo seja não-negativo e satisfaça a restrição de recursos (soma das dotações é maior ou igual à soma dos consumos) para todos os períodos  $t$ , como definido por Krueger (2017) em:

**Definição 3.** Uma alocação  $(c^1, c^2) = (c_t^1, c_t^2)_{t=0}^\infty$  é factível se

$$\begin{aligned} c_t^i &\geq 0 & \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 &\leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

---

### (b) Defina um equilíbrio competitivo (de Arrow-Debreu) para esta economia.

A partir da Definição 2 (Krueger, 2017), substituiu-se  $\beta^t$  por  $\beta_i^t$  em (2), dado que, neste exercício, as preferências individuais são distintas, com  $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ .

**Definição 2'.** Um Equilíbrio (Competitivo) de Arrow-Debreu (AD) é um par

$$\{\hat{p}_t\}_{t=0}^\infty \quad \text{e} \quad (\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty)_{i=1,2}$$

tal que

(1) Dado  $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^\infty$ , para cada  $i \in \{1, 2\}$ , a sequência  $\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty$  resolve

$$\max_{\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^\infty \beta_i^t \ln(c_t^i) \quad (2')$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^\infty \hat{p}_t^i c_t^i \leq \sum_{t=0}^\infty \hat{p}_t^i e_t^i \quad (3)$$

$$c_t^i \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (4)$$

(2) Mercados em equilíbrio em cada  $t \in \mathbb{N}$

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (5)$$

### (c) Caracterize o equilíbrio competitivo da economia.

#### Estratégia da Prova:

- Seção 2.2.2 de Krueger (2017) não é muito promissor.
- Seção 2.2.4 de Krueger (2017) - Método de Negishi:
  1. Resolver o problema do planejador para alocações eficientes de Pareto indexadas nos pesos de Pareto  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$
  2. Usar multiplicadores de Lagrange  $\mu_t/2$  para as restrições de recursos no problema do planejador.
  3. Encontrar os pesos de Pareto normalizados tal que as funções de transferência sejam iguais a zero.
  4. Alocações de eficientes de Pareto correspondentes a  $\hat{\alpha}$  são alocações de equilíbrio; os preços de equilíbrio são (múltiplos de) multiplicadores de Lagrange do problema do planejador.

Seja o par  $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^\infty$  e  $\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty$ , para  $i = 1, 2$ , Equilíbrio Competitivo de Arrow-Debreu (AD), então resolvendo o problema do consumidor temos:

$$\mathcal{L}(\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty, \lambda_i) = \sum_{t=0}^\infty \beta_i^t \ln(c_t^i) \stackrel{(*)}{-} \lambda_i \left( \sum_{t=0}^\infty p_t (c_t^i - e_t^i) \right)$$

Note que, em  $(*)$ , o sinal é negativo, pois  $p_t (c_t^i - e_t^i) \leq 0$ . Observe também que  $\lambda_i$  é o multiplicador de Lagrange para a restrição orçamentária.

CPO's para  $c_t^i$ :

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^i} = \beta_i^t \cdot \frac{1}{c_t^i} - \lambda_i p_t(1) \iff \lambda_i = \frac{\beta_i^t}{p_t c_t^i}, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (1.1.1)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = \sum_{t=0}^\infty p_t (c_t^i - e_t^i) = 0 \quad (1.1.2)$$

Analogamente, para  $c_{t+1}^i$ :

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^i} = \beta_i^{t+1} \cdot \frac{1}{c_{t+1}^i} - \lambda_i p_t(1) \iff \lambda_i = \frac{\beta_i^{t+1}}{p_{t+1} c_{t+1}^i}, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (1.1.3)$$

Igualando  $\lambda_i$  de (1.1.1) e de (1.1.3), temos, para  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_i^t}{p_t c_t^i} &= \frac{\beta_i^{t+1}}{p_{t+1} c_{t+1}^i} \iff \\ \frac{1}{p_t c_t^i} &= \frac{\beta_i}{p_{t+1} c_{t+1}^i} \iff & (\text{dividindo por } \beta_i^t) \\ p_{t+1} c_{t+1}^i &= \beta_i p_t c_t^i, \quad \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Somando equações (1.1.4) para  $i = 1$  e  $i = 2$ , temos

$$\begin{aligned} p_{t+1} c_{t+1}^1 + p_{t+1} c_{t+1}^2 &= \beta_1 p_t c_t^1 + \beta_2 p_t c_t^2 \iff \\ p_{t+1} (c_{t+1}^1 + c_{t+1}^2) &= p_t (\beta_1 c_t^1 + \beta_2 c_t^2) \iff \\ p_{t+1} (e_{t+1}^1 + e_{t+1}^2) &= p_t (\beta_1 c_t^1 + \beta_2 c_t^2) \iff & (\text{no equilíbrio } c_t = e_t = 2) \\ 2p_{t+1} &= p_t (\beta_1 c_t^1 + \beta_2 c_t^2) \iff & (1.1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2p_{t+1} &= p_t [\beta_1 (2 - c_t^2) + \beta_2 c_t^2] \iff & (c_t^1 = 2 - c_t^2) \\ 2p_{t+1} &= p_t (2\beta_1 - \beta_1 c_t^2 + \beta_2 c_t^2) \iff \\ p_{t+1} &= p_t \frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_t^2}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Por indução matemática, temos

$$p_t = p_0 \left( \frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_0^2}{2} \right)^t, \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Tomando, sem perda de generalidade,  $p_0 = 1$ , temos

$$p_t = \left( \frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_0^2}{2} \right)^t, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (1.1.6')$$

Para encontrar  $c_t^2$ , substituímos (1.1.6) em (1.1.4), para  $i = 2$ :

$$\begin{aligned} \left( p_t \frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_t^2}{2} \right) c_{t+1}^2 &= \beta_2 p_t c_t^2 \\ \frac{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_t^2}{2} c_{t+1}^2 &= \beta_2 c_t^2 \\ c_{t+1}^2 &= c_t^2 \frac{2\beta_2}{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por indução matemática, temos

$$c_t^2 = c_0^2 \left( \frac{2\beta_2}{2\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) c_0^2} \right)^t, \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

(...)

Pelo método acima, os cálculos serão mais complexos e há resultados com funções implícitas. Usaremos, então, o **Método de Negishi (1960)** em que o Problema do Planejador é:

$$\begin{aligned} & \max_{\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}} \{ \alpha^1 u(c^1) + \alpha^2 u(c^2) \} \\ \iff & \max_{\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}} \alpha^1 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_1^t \ln(c_t^1) + \alpha^2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_2^t \ln(c_t^2) \\ & s.a. \quad \begin{cases} c_t^i \geq 0 & \forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2\} \\ c_t^1 + c_t^2 \leq e_t^1 + e_t^2 & \forall t \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Anexando multiplicadores de Lagrange iguais a  $\mu_t/2$  para as restrições de recursos, o Lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L} = \alpha^1 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_1^t \ln(c_t^1) + \alpha^2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_2^t \ln(c_t^2) - \frac{\mu_t}{2} \left( \sum_{t=0}^{\infty} (c_t^1 + c_t^2 - 2) \right)$$

As CPO's são:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^1} = \frac{\alpha^1 \beta_1^t}{c_t^1} - \frac{\mu_t}{2} \iff \frac{\alpha^1 \beta_1^t}{c_t^1} = \frac{\mu_t}{2} \quad (1.1.7)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^2} = \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{c_t^2} - \frac{\mu_t}{2} \iff \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{c_t^2} = \frac{\mu_t}{2} \quad (1.1.8)$$

Note que  $\mu_t$  nestas CPO's tem o mesmo papel de  $p_t$  nas CPO's de (1.1.1) e (1.1.2), ou seja, é uma medida de escassez (Krueger, 2017, pág. 18). Portanto, há uma conexão próxima entre  $\mu_t$  e  $p_t$ , tal que, no equilíbrio,

$$p_t = \mu_t.$$

Igualando (1.1.7) e (1.1.8), temos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^1 \beta_1^t}{c_t^1} &= \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{c_t^2} \iff \\ c_t^1 &= \frac{\alpha^1 \beta_1^t c_t^2}{\alpha^2 \beta_2^t} = \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t c_t^2 \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Substituindo (1.1.9) na restrição de recursos no equilíbrio competitivo, temos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t c_t^2 + c_t^2 &= 2 \\ c_t^2 \left( 1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t \right) &= 2 \\ c_t^2(\alpha) &= \frac{2}{1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t} \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Fazendo o mesmo para  $c_t^1$ , obtemos

$$c_t^1(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^1} \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^t} \quad (1.1.11)$$

Substituindo (1.1.10) em (1.1.8), segue que

$$\begin{aligned}\frac{\mu_t}{2} &= \frac{\alpha^2 \beta_2^t}{2} \left( 1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t \right) \iff \\ \mu_t &= \alpha^2 \beta_2^t + \frac{\alpha^1 \alpha^2 \beta_2^t}{\alpha^2} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^t \iff \\ \mu_t &= \alpha^1 \beta_1^t + \alpha^2 \beta_2^t\end{aligned}\tag{1.1.12}$$

As funções de transferência,  $t^i(\alpha)$  para  $i = 1, 2$ , são definidas por

$$t^i(\alpha) = \sum_{t=0}^{\infty} \mu_t [c_t^i(\alpha) - 1] = \sum_{t=0}^{\infty} \mu_t c_t^i(\alpha) - \sum_{t=0}^{\infty} \mu_t\tag{1.1.13}$$

Note que (1.1.10) e (1.1.11) estão no formato, para  $i, j = 1, 2$  com  $i \neq j$ ,

$$c_t^i(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^j}{\alpha^i} \left( \frac{\beta_j}{\beta_i} \right)^t}.$$

Substituindo a expressão acima e (1.1.12) em (1.1.13), obtemos

$$\begin{aligned}t^i(\alpha) &= \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t) \left( \frac{2}{1 + \frac{\alpha^j}{\alpha^i} \left( \frac{\beta_j}{\beta_i} \right)^t} \right) - \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2(\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t)}{1 + \frac{\alpha^j}{\alpha^i} \left( \frac{\beta_j}{\beta_i} \right)^t} - \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^i \beta_i^t - \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^j \beta_j^t \\ &= 2 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t}{\frac{\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t}{\alpha^i \beta_i^t}} - \alpha^i \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t - \alpha^j \sum_{t=0}^{\infty} \beta_j^t \\ &= 2 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t}{\alpha^i \beta_i^t + \alpha^j \beta_j^t} (\alpha^i \beta_i^t) - \alpha^i \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t - \alpha^j \sum_{t=0}^{\infty} \beta_j^t \\ &= 2 \frac{\alpha^i}{1 - \beta_i} - \frac{\alpha^i}{1 - \beta_i} - \frac{\alpha^j}{1 - \beta_j} \\ t^i(\alpha) &= \frac{\alpha^i}{1 - \beta_i} - \frac{\alpha^j}{1 - \beta_j}\end{aligned}\tag{1.1.14}$$

Agora, como  $t^i(\alpha) = 0, \forall i = 1, 2$  no equilíbrio, temos

$$t^i(\alpha) = \frac{\alpha^i}{1 - \beta_i} - \frac{\alpha^j}{1 - \beta_j} = 0$$

Como  $\alpha^1$  e  $\alpha^2$  são pesos arbitrários e o que importa é a relação entre eles ( $\alpha^1/\alpha^2$ ), tomamos os pesos tal que  $\alpha^1 + \alpha^2 = 1 \iff \alpha^2 = 1 - \alpha^1$ , sem perda de generalidade. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^1}{1 - \beta_1} &= \frac{1 - \alpha^1}{1 - \beta_2} \\ \alpha^1(1 - \beta_2) &= (1 - \alpha^1)(1 - \beta_1) \\ \alpha^1(1 - \beta_2) &= 1 - \beta_1 - \alpha^1(1 - \beta_1) \\ \alpha^1(1 - \beta_2) + \alpha^1(1 - \beta_1) &= 1 - \beta_1 \\ \alpha^1(2 - \beta_1 - \beta_2) &= 1 - \beta_1 \\ \hat{\alpha}^1 &= \frac{1 - \beta_1}{2 - \beta_1 - \beta_2} > 0\end{aligned}\tag{1.1.15}$$



em que  $\alpha^1 > 0$ , pois  $\beta_1, \beta_2 < 1$ . Analogamente, para  $i = 2$ , temos

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1 - \beta_2}{2 - \beta_1 - \beta_2} > 0 \quad (1.1.16)$$

Note que  $\alpha_1 > \alpha_2$ , dado que os denominadores são idênticos e  $(1 - \beta_1) > (1 - \beta_2)$ , pois  $\beta_2 > \beta_1$ . Agora, aplicando (1.1.15) e (1.1.16) em (1.1.10) e (1.1.11), temos

$$\hat{c}_t^1 = \frac{2}{1 + \frac{\left(\frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t}{\left(\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\right) \left(\frac{\beta_1}{\beta_1}\right)^t}} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} \quad (1.1.17)$$

e

$$\hat{c}_t^2 = \frac{2}{1 + \frac{\left(\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\right) \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t}{\left(\frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_2}\right)^t}} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} \quad (1.1.18)$$

Como  $p_t = \mu/2$  no equilíbrio, aplicando (1.1.12), (1.1.15) e (1.1.16), obtemos

$$\begin{aligned} p_t = \mu_t &= \alpha^1 \beta_1^t + \alpha^2 \beta_2^t \\ &= \left( \frac{1 - \beta_1}{2 - \beta_1 - \beta_2} \right) \beta_1^t + \left( \frac{1 - \beta_2}{2 - \beta_1 - \beta_2} \right) \beta_2^t \\ \hat{p}_t &= \frac{\beta_1^t(1 - \beta_1) + \beta_2^t(1 - \beta_2)}{2 - \beta_1 - \beta_2} \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Portanto, é Pareto Eficiente a alocação  $\{(\hat{c}_t^1, \hat{c}_t^2)\}_{t=0}^\infty$  que resolve o Problema do Planejador (6) para o vetor de pesos de Pareto  $\alpha = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2) \in \mathbb{R}_+^2$  tal que

$$\hat{c}_t^1 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} \quad (1.1.17)$$

$$\hat{c}_t^2 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} \quad (1.1.18)$$

$$\hat{\alpha}^1 = \frac{1 - \beta_1}{2 - \beta_1 - \beta_2} \quad (1.1.15)$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{1 - \beta_2}{2 - \beta_1 - \beta_2} \quad (1.1.16)$$

sob os preços de equilíbrio

$$\hat{p}_t = \frac{\beta_1^t(1 - \beta_1) + \beta_2^t(1 - \beta_2)}{2 - \beta_1 - \beta_2}. \quad (1.1.19)$$

■

(d) Seja  $\hat{c}_t^i$  o consumo da pessoa  $i$  no período  $t$  em equilíbrio. Mostre que:

i)  $\hat{c}_0^1 - \hat{c}_0^2 > 0$

ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{c}_t^1 = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{c}_t^2 = 2$

---

**Item (i):**

Usando (1.1.17) e (1.1.18) para  $t = 0$ , obtemos:

$$c_0^1 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^0} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}}$$
$$c_0^2 = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^0} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}}$$

Como  $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ , temos que  $(1 - \beta_2) < (1 - \beta_1)$  e, portanto, o denominador de  $c_0^2$  é maior do que de  $c_0^1$ . Portanto, como o numerador de ambos consumos iniciais são iguais, concluímos que

$$c_0^1 > c_0^2 \iff c_0^1 - c_0^2 > 0$$

■

**Item (ii):**

- Para  $c_t^1$ : por (1.1.11), temos que

$$c_t^1(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^1} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t} \quad (1.1.11)$$

- Note que  $\beta_2 > \beta_1$ , portanto  $\beta^2/\beta^1 > 1$ .
- Portanto, quando  $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^t = \infty$$

- Logo, o denominador de (1.1.11) vai a infinito e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_t^1 = 0$$

- Para  $c_t^2$ : por (1.1.10), temos que

$$c_t^2(\alpha) = \frac{2}{1 + \frac{\alpha^1}{\alpha^2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t} \quad (1.1.10)$$

- Note que  $\beta_2 > \beta_1$ , portanto  $\beta^1/\beta^2 < 1$ .
- Portanto, quando  $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^t = 0$$

- Logo, o denominador de (1.1.10) vai a 1 e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_t^2 = 2$$

■

---

(e) Explique a intuição dos resultados demonstrados no item anterior.

O fato da diferença,  $c_0^1 - c_0^2$ , ser positiva se dá pelo fato de  $\beta_1 < \beta_2$  tal que  $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1)$ . Um maior  $\beta$  preserva mais os valores quando os  $t$ 's são maiores, ou seja, indica uma maior “paciência” do consumidor em relação a consumos futuros. Como  $\beta_1 < \beta_2$ , o indivíduo 1 é mais impaciente e, portanto, consome mais do que o 2 nos períodos iniciais, enquanto o indivíduo 2 é mais paciente e consome mais no futuro. Portanto,  $c_0^1 - c_0^2 > 0$  e, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $c_t^2 \rightarrow 2$  (total de dotação em um período) e  $c_t^1 \rightarrow 0$ .

**(f) É fácil ver que as sequências de consumo de equilíbrio são monótonas. Escreva um código que encontre o período  $t^*(\beta_1, \beta_2)$  para o qual  $\hat{c}_t^1 - \hat{c}_t^2$  troca de sinal para  $\beta$ 's genéricos. Fixe  $\beta_2 = 0.95$  e faça um gráfico para mostrar  $t^*(\beta_1, \beta_2)$ .<sup>1</sup>**

```

1 # Módulos a serem utilizados
2 import numpy as np # Módulo para trabalhar com matrizes
3 import matplotlib.pyplot as plt # Módulo para fazer gráficos
4
5 beta_2 = 0.95 # valor de beta_2 fixado
6
7 # Criando e preenchendo matriz com beta_1 e t*
8 tabela = np.zeros([18, 2]) # criando matriz de zeros 18 x 2 para preenchimento
9
10
11 # Loop para preenchimento de possíveis \beta_1 < \beta_2 e t* para c1_t - c2_t
12 # mudar de sinal (quando c2_t > 1, pois c2_t = 2 - c1_t, no equilíbrio)
13 for i in range(len(tabela)):
14     tabela[i, 0] = beta_2 - (i + 1) * 0.05
15
16     # Estabelecendo valores iniciais
17     t = 0
18     # c_2 = 2 / (1 + ((1 - tabela[i, 0]) / (1 - beta_2)) * (tabela[i, 0] / beta_2)**t)
19     while 2 / (1 + ((1 - tabela[i, 0]) / (1 - beta_2)) *
20             (tabela[i, 0] / beta_2)**t) < 1: # formula do c_2
21         t += 1
22     tabela[i, 1] = t
23
24 print(tabela)

```

```

1 [[ 0.9  13. ]
2  [ 0.85 10. ]
3  [ 0.8   9. ]
4  [ 0.75  7. ]
5  [ 0.7   6. ]
6  [ 0.65  6. ]
7  [ 0.6   5. ]
8  [ 0.55  5. ]
9  [ 0.5   4. ]
10 [ 0.45  4. ]
11 [ 0.4   3. ]
12 [ 0.35  3. ]
13 [ 0.3   3. ]
14 [ 0.25  3. ]
15 [ 0.2   2. ]
16 [ 0.15  2. ]
17 [ 0.1   2. ]
18 [ 0.05  1. ]]

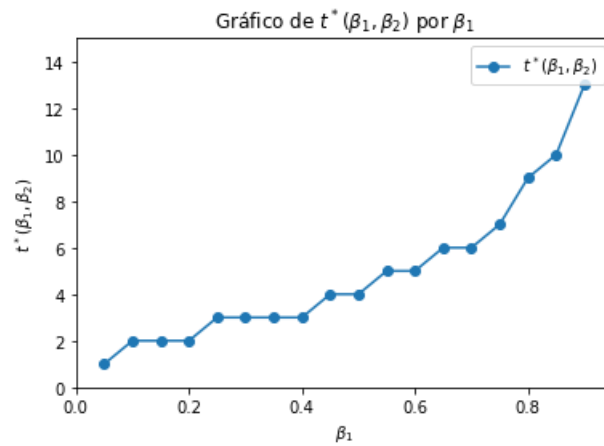
```

<sup>1</sup>É possível encontrar analiticamente  $t^*(\beta_1, \beta_2)$ . Não é este o propósito do exercício. Resolva o problema numericamente.

```

1 # Criação do gráfico
2 fig, ax = plt.subplots() # Cria a base (em branco) do gráfico
3 ax.plot(tabela[:, 0], tabela[:, 1], # Coluna 0 no eixo x e coluna 1 no y
4         '-o', # Formato da linha e ponto do gráfico
5         label='$t^*(\\beta_1, \\beta_2)$') # Descrição da legenda
6 ax.legend() # Faz aparecer a legenda
7 ax.set_ylim([0, 15]) # tamanho mínimo e máximo vertical
8 ax.set_xlim([0.00, 0.95]) # tamanho mínimo e máximo horizontal
9 ax.set_xlabel('$\\beta_1$') # Descrição do eixo x
10 ax.set_ylabel('$t^*(\\beta_1, \\beta_2)$') # Descrição do eixo y
11 ax.set_title('Gráfico de $t^*(\\beta_1, \\beta_2)$ por $\\beta_1$') # Título
12 plt.show() # Plot do gráfico com os comandos dados

```



## 1.2 $\boxed{\times}$

Considere uma economia com o tempo discreto e infinito, i.e.,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Nesta economia vivem duas pessoas de vida eterna indexadas por  $i = 1, 2$ . Existe um único bem, que perecível, e cada pessoa tem uma dotação do tipo:

$$e_t^i = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i + t \text{ é par} \\ 0 & , \text{ se } i + t \text{ é ímpar} \end{cases}$$

As preferências das pessoas sobre um fluxo de consumo,  $\{c_t^i\}_{t=0}^\infty$ , são dadas por

$$u^i(\{c_t^i\}_{t=0}^\infty) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

em que  $0 < \beta < 1$ . Toda informação desta economia é pública e não há nenhum risco. Em  $t = 0$ , antes de receber a dotação, as pessoas se encontram em um mercado central e transacionam unidades do bem de consumo para todos os períodos. Denote por  $p_t$  o preço de uma unidade do bem no período  $t$ . Em todo  $t \geq 1$  as pessoas voltam ao mercado central para executar as trocas negociadas em  $t = 0$ . Assuma que os acordos feitos no início dos tempos são sempre honrados pelas pessoas.

(a) Defina uma alocação factível para esta economia.

Uma alocação  $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^\infty$  é factível se satisfaz a seguinte restrição de recursos:

$$\sum_{i=1}^2 c_t^i \leq \sum_{i=1}^2 e_t^i \quad \forall t$$

em que

$$c_t^i \geq 0 \quad \forall t, \text{ para } i = 1, 2.$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo (de Arrow-Debreu) para esta economia.

Um Equilíbrio (Competitivo) de Arrow-Debreu (AD) são preços  $\{\hat{p}\}_{t=0}^\infty$  e alocações  $(\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty)_{i=1,2}$ , tais que

(1) Dado  $\{\hat{p}_t\}_{t=0}^\infty$ , para cada  $i \in \{1, 2\}$ , a sequência  $\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty$  resolve

$$\max_{\{\hat{c}_t^i\}_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(\hat{c}_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (2)$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t \hat{c}_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t e_t^i \quad (3)$$

$$\hat{c}_t^i \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (4)$$

(2) Mercados em equilíbrio em cada  $t \in \mathbb{N}$

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (5)$$

---

(c) Mostre que em num equilíbrio competitivo a pessoa 2 tem um consumo maior do que a pessoa 1.

---

Estratégia da Prova:

- Resolver o problema do consumidor para preços arbitrários.
  - Encontrar os preços que satisfaçam o Market Clearing.
  - Substituir os preços do encontrados no problema do consumidor para encontrar a alocação de equilíbrio.
- 

Problema do Consumidor:

$$\max_{\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (2)$$

$$s.a. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}^t e_t^i \quad (3)$$

$$c_t^i \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Calculando a CPO para o consumidor i:

$$\begin{aligned} \beta^t u'(c_t^i) - \lambda^i p_t &= 0 \\ u'(c_t^i) &= \lambda^i \frac{p_t}{\beta^t} \end{aligned}$$

Note que o resultado obtido da CPO nos permite fazer a seguinte relação:

$$\frac{u'(c_t^i)}{u'(c_t^j)} = \frac{\lambda^i \frac{p_t}{\beta^t}}{\lambda^j \frac{p_t}{\beta^t}} = \frac{\lambda^i}{\lambda^j}$$

Rearranjando, obtemos:

$$\begin{aligned} u'(c_t^i) &= \lambda^i \frac{p_t}{\beta^t} \\ (c_t^i)^{-\sigma} &= \lambda^i \frac{p_t}{\beta^t} \\ c_t^i &= \left( \frac{\beta^t}{\lambda^i p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \end{aligned} \quad (5)$$

Aplicando o resultado na restrição orçamentária:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} p_t \left( \frac{\beta^t}{\lambda^i p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i \\ (\lambda^i)^{-\frac{1}{\sigma}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{\frac{t}{\sigma}} p_t^{1-\frac{1}{\sigma}} &= \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i \end{aligned}$$

$$\lambda^i = \left[ \frac{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^{\frac{t}{\sigma}} p_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^i} \right]^{\sigma}$$

Substituindo este resultado em (5), obtemos:

$$c_t^i = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left( \frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Agora, aplicaremos a condição de market clearing:

$$c_t^1 + c_t^2 = 1 \quad \forall t$$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^1}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left( \frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^2}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left( \frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= 1 \\ \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s (e_s^1 + e_s^2)}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left( \frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= 1 \\ \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left( \frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= 1 \end{aligned}$$

Então,  $\left(\frac{\beta^t}{p_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$  deve ser constante. Logo, para  $t+1$ , teremos:

$$\frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left( \frac{\beta^{t+1}}{p_{t+1}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} = 1$$

E, então:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left( \frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left( \frac{\beta^{t+1}}{p_{t+1}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ \left( \frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} &= \left( \frac{\beta^{t+1}}{p_{t+1}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ p_t \beta &= p_{t+1} \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, assuma  $p_0 = 1$ . Então, por indução, temos que

$$p_t = \beta^t \tag{6}$$

Para encontrar a alocação de equilíbrio dos agentes, basta substituir 6 na decisão de consumo. Assim:

$$c_t^i = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} p_s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} p_s^{1-\frac{1}{\sigma}} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left( \frac{\beta^t}{p_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^{s(1-\frac{1}{\sigma})} \beta^{\frac{s}{\sigma}}} \left( \frac{\beta^t}{\beta^t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s}$$

Como  $\beta \in (0, 1)$ ,

$$c_t^i = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i}{\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s} = (1 - \beta) \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^i$$

Agora, basta calcular o consumo de cada agente.

Para  $i = 1$ ,  $e_t^i = 1$  se  $i + t$  é ímpar, ou seja,

$$(1 - \beta) \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^1 = (1 - \beta)[0 + \beta + 0 + \beta^2 + 0 + \beta^4 + \dots] = \frac{\beta(1 - \beta)}{1 - \beta^2}$$

Para  $i = 2$ ,  $e_t^i = 1$  se  $i + t$  é par. Então,

$$(1 - \beta) \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s e_s^2 = (1 - \beta)[1 + 0 + \beta^2 + 0 + \beta^4 + \dots] = \frac{(1 - \beta)}{1 - \beta^2}$$

Portanto, as alocações ótimas serão:

$$c_t^i = \begin{cases} \frac{\beta(1 - \beta)}{1 - \beta^2} & , \text{ se } i = 1 \\ \frac{(1 - \beta)}{1 - \beta^2} & , \text{ se } i = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Como assumimos que  $\beta \in (0, 1)$ ,

$$\frac{\beta(1 - \beta)}{1 - \beta^2} < \frac{(1 - \beta)}{1 - \beta^2}$$

pois o único termo que diferencia as duas equações é o  $\beta$ . Sendo assim, podemos reescrever as alocações ótimas como  $c_t^2 = \frac{(1 - \beta)}{1 - \beta^2}$  e  $c_t^1 = \beta c_t^2$ . Logo,  $c_t^2 > c_t^1$ .

#### (d) Explique a intuição dos resultados demonstrados no item anterior.

O resultado do item (c) é obtido pelo fato da construção das dotações da economia. Como foi definido que

$$e_t^i = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i + t \text{ é par} \\ 0 & , \text{ se } i + t \text{ é ímpar} \end{cases}$$

temos que em  $t = 0$  o consumidor que terá dotação igual a 1 será o consumidor 2, pois  $i + t = 2 + 0 = 2$ , que é um número par. Sendo assim, o consumidor 2 terá uma vantagem comparativa inicial ao indivíduo 1, por iniciar sua vida consumindo. Portanto, é intuitivo concluirmos que  $c_t^2 > c_t^1$ .

**(e) Suponha agora que as pessoas podem trocar um título de um período que promete o pagamento de uma unidade do bem de consumo. Além disso, as pessoas trocam bens e títulos a cada período via um mercado centralizado. Defina um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais.**

**Definição:** Um equilíbrio em mercados sequenciais é dado por uma alocação  $\{(\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i)_{i=1,2}\}_{t=0}^{\infty}$  e uma sequência de taxa de juros  $\{\hat{r}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$  tais que:



(1) Para  $i = 1, 2$ , dada  $\{\hat{r}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}, \{\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i\}_{t=0}^{\infty}$  resolve

$$\begin{aligned} \max_{\{\hat{c}_t^i, \hat{a}_{t+1}^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ s.a. \quad c_t^i + \frac{a_{t+1}^i}{1 + \hat{r}_{t+1}} \leq e_t^i + a_t^i, \quad \forall t \\ c_t^i \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ a_{t+1}^i \geq -\bar{A}, \quad \forall t, \bar{A}^i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2) Market Clearing

$$\begin{aligned} \hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 &= e_t^1 + e_t^2, \quad \forall t \in \mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^2 a_{t+1}^i &= 0 \end{aligned}$$

## Referências

Krueger, D. (2017). *Macroeconomic Theory*. University of Pennsylvania Press.

Negishi, T. (1960). Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy. *Metroeconomica*, 12(2-3), 92–97.