Lista 3 - Organização Industrial

Monitor: Antonio Ricciardi Macedo

Maio, 2023

Exercício 1

Duas firmas produzem um produto homogêneo. Seja p o preço do produto. A produção da firma 1 é denotada por q_1 e a produção da firma 2 por q_2. A produção agregada da indústria é denotada por $Q = q_1 + q_2$. A curva de demanda agregada da indústria para este produto é dada por $p = a - Q$. Suponha que o custo unitário da firma i é dado por c_i, para $i = 1, 2$, em que $a > c_2 > c_1 > 0$. Encontre:

(a) Um equilíbrio competitivo. Certifique-se de resolver para a quantidade produzida em cada empresa e o preço de mercado.
(b) Um equilíbrio de Cournot. Certifique-se de resolver para a quantidade produzida em cada empresa e o preço de mercado.
(c) Um equilíbrio de Stackelberg assumindo que a firma 1 é a firma líder. Certifique-se de resolver o nível de produção de cada empresa e o preço de mercado.
(d) Um equilíbrio de movimentos sequenciais, assumindo que a empresa 2 define seu nível de produção antes da firma 1. Existe alguma diferença na divisão de mercado e no nível de preços entre o presente caso e o caso em que a empresa 1 se move primeiro? Explique.
(e) Um equilíbrio de Bertrand. Certifique-se de resolver para a quantidade produzida em cada empresa e o preço de mercado.

(a) Equilíbrio Competitivo:

$$p = \text{Cmg} = c_1$$

pois, como $c_2 > c_1$, a firma 2 não produzirá neste mercado. Assim, $q_2 = 0$. Portanto,

$$q_1 = Q = a - c_1$$

(b) Neste caso, o preço será:

$$p = a - q_1 - q_2$$

Para a firma 1:

$$\max_{q_1} (a - q_1 - q_2^e)q_1 - q_1 c_1$$

Tirando a CPO em q_1, teremos

$$a - 2q_1 - q_2^e - c_1 = 0$$

$$q_1 = \frac{a - q_2^e - c_1}{2}$$

Analogamente, para a firma 2, o problema será

$$\max_{q_2} (a - q_1^e - q_2)q_2 - q_2 c_2$$

Tirando a CPO em q_2, teremos

$$a - q_1^e - 2q_2 - c_2 = 0$$

$$q_2 = \frac{a - q_1^e - c_2}{2}$$

Em equilíbrio, o resultado esperado ocorre de fato e então

$$q_1 = \frac{a - \frac{a - q_1 - c_2}{2} - c_1}{2}$$

$$q_1 = \frac{-a + q_1 + c_2}{4} + \frac{a - c_1}{2}$$
$$q_1 - \frac{q_1}{4} = \frac{-a + c_2 + 2a - 2c_1}{4}$$
$$\frac{3q_1}{4} = \frac{a + c_2 - 2c_1}{4}$$
$$q_1 = \frac{a + c_2 - 2c_1}{3}$$

Por simetria, teremos

$$q_2 = \frac{a + c_1 - 2c_2}{3}$$

Assim,

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{2a - c_1 - c_2}{3}$$
$$P = a - Q = \frac{a + c_1 + c_2}{3}$$

(c) No modelo de Stackelberg com a firma 1 líder, teremos o seguinte problema para a firma 2, dado q_1:

$$\max_{q_2} (a - q_1 - q_2)q_2 - q_2 c_2$$

CPO para q_2:

$$a - q_1 - 2q_2 - c_2 = 0$$
$$q_2 = \frac{a - q_1 - c_2}{2}$$

Agora, a firma líder resolverá o seguinte problema

$$\max_{q_1} (a - q_1 - \frac{a - q_1 - c_2}{2})q_1 - c_1 q_1$$

Tirando a CPO em q_1:

$$a - 2q_1 - \frac{a}{2} + q_1 + \frac{c_2}{2} - c_1 = 0$$
$$q_1 = \frac{a + c_2}{2} - c_1$$
$$q_1 = \frac{a + c_2 - 2c_1}{2}$$

Assim,

$$q_2 = \frac{a - \frac{a + c_2 - 2c_1}{2} - c_2}{2}$$
$$q_2 = \frac{\frac{a}{2} - \frac{c_2}{2} + c_1 - c_2}{2}$$
$$q_2 = \frac{a - 3c_2 + 2c_1}{4}$$
$$Q = q_1 + q_2 = \frac{3a - c_2 - 2c_1}{4}$$
$$P = a - Q = \frac{a + c_2 + 2c_1}{4}$$

(d) Caso a empresa 2 agir primeiro, primeiramente resolveremos o problema para a firma 1, então:

$$\max_{q_1} (a - q_1 - q_2)q_1 - q_1 c_1$$

CPO para q_1:

$$a - 2q_1 - q_2 - c_1 = 0$$

$$q_1 = \frac{a - q_2 - c_1}{2}$$

Agora, a firma líder resolverá o seguinte problema

$$\max_{q_2} (a - q_2 - \frac{a - q_2 - c_1}{2})q_2 - c_2 q_2$$

Tirando a CPO em q_2:

$$a - 2q_2 - \frac{a}{2} + q_2 + \frac{c_1}{2} - c_2 = 0$$

$$q_2 = \frac{a + c_1}{2} - c_2$$

$$q_2 = \frac{a + c_1 - 2c_2}{2}$$

Assim,

$$q_1 = \frac{a - \frac{a + c_1 - 2c_2}{2} - c_1}{2}$$

$$q_1 = \frac{\frac{a}{2} - \frac{c_1}{2} + c_2 - c_1}{2}$$

$$q_1 = \frac{a - 3c_1 + 2c_2}{4}$$

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{3a - c_1 - 2c_2}{4}$$

$$P = a - Q = \frac{a + c_1 + 2c_2}{4}$$

Sim, há diferença, por exemplo, nos preços:

$$P^{\text{item(d)}} - P^{\text{item(c)}} = \frac{a + c_1 + 2c_2}{4} - \frac{a + c_2 + 2c_1}{4} = \frac{c_2 - c_1}{4} > 0$$

(e) Como $c_2 > c_1$, e o modelo de Bertrand é uma disputa pelo preço, teremos que $P_1 < P_2$, logo a firma 2 dominará o mercado e a firma 2 não produzirá. De fato, tome $\varepsilon > 0$ o menor valor monetário possível. Então,

$$P_1 = c_2 - \varepsilon$$

$$P_2 = c_2$$

Como $P_1 < P_2$,

$$q_1 = a - c_2 + \varepsilon = Q_1$$

$$q_2 = 0$$

Exercício 2

Considere um oligopólio de Cournot com duas firmas. A função custo de cada firma é dada por $C_i(q_i) = q_i^2/2$ para $i = 1, 2$. Suponha que a demanda seja dada por $p = a - bQ$ em que $Q = \sum_{i=1}^{2} q_i$.

(a) Defina um equilíbrio de Cournot.
(b) Encontre o equilíbrio de Cournot.

(a) Um equilíbrio de Cournot é um vetor $(\{q_i^c, p^c\}_{i=1,2})$ tais que

1. Dado q_i^c, temos que $q_i = q_i^c$ resolve $\max_{q_i}$ para todo $i \in \{1, 2\}$
2. $p^c = a - b(\sum_{i=1}^{2} q_i^c)$

(b) Como $c_i(q_i) = \frac{q_i^2}{2}$

$$\pi_i(q_i, q_j) = (a - b(q_i + q_j))q_i - \frac{q_i^2}{2}$$

CPO

$$a - 2bq_i - bq_j - q_i = 0$$

Como a CPO é valida para $i = 1, 2$, teremos os seguinte sistema de equações

$$a - 2bq_1 - bq_2 - q_1 = 0$$

$$a - 2bq_2 - bq_1 - q_2 = 0$$

Logo, $q_1 = q_2$.
Como o problema é simétrico, $q_i = q_j = q$

$$a = 2bq + bq + q = q(3b + 1)$$

$$q = \frac{q}{3b + 1}$$

$$Q = \frac{2a}{3b + 1}$$

$$P = a - bQ = a - \frac{2ab}{3b + 1} = \frac{3ba + a - 2ab}{3b + 1} = \frac{a(b + 1)}{3b + 1}$$

Exercício 3

Considere um oligopólio de Bertrand com 3 firmas. A função custo de cada firma é dada por $C_i(q_i) = cq_i$, com $c \geq 0$. Suponha que a demanda seja dada por $p = a - Q$ em que $Q = \sum_{i=1}^{3} q_i$ e $a > c$.

(a) Defina um equilíbrio de Bertrand.
(b) Encontre o equilíbrio de Bertrand.

(a) Uma sêxtupla $\{p_1^b, p_2^b, p_3^b, q_1^b, q_2^b, q_3^b\}$ é um equilíbrio da Bertrand-Nash se

1. $p_i^b \in \arg\max_{p_i} \pi_i(p_i^b, p_j^b) = (p_i - c_i)q_i^b$, para $i = 1, 2, 3$
2. q_1^b, q_2^b e q_3^b são determinados por (1)

(b) Nesse caso teremos:

$$q_i^b = \begin{cases} \frac{a-c}{3} & \text{se } p_1^b = p_2^b = p_3^b \\ \frac{a-c}{2} & \text{se } p_1^b = p_2^b < p_3^b \\ a - c & \text{se } p_1^b < p_2^b \sim p_3^b \\ 0 & \text{demais casos} \end{cases}$$

$$\pi_i = (p - c)q_i = pq_i - cq_i = 0$$

CPO

$$p^b = c$$

$$Q^b = a - c$$

$$q^b = \frac{a - c}{3}$$

Exercício 4

Considere um mercado em que duas firmas competem escolhendo preço. No entanto, cada firma deve fazer um investimento em capacidade produtiva antes de operar no mercado. O custo unitário da capacidade é dado por r. A função custo depois de feito o investimento na capacidade k_i é dada por

$$C_i(q_i) \begin{cases} cq_i & \text{se } q_i \leq k_i \\ \infty & \text{se } q_i > k_i \end{cases}$$

em que $c > 0$. Suponha que a demanda seja dada por $p = a - bQ$, em que $Q = \sum_i q_i$ e $a > c$.

(a) Argumente que esta economia determina um jogo em 2 estágios mostrando quais são os payoffs e as estratégias das firmas.
(b) Defina um equilíbrio para o jogo.
(c) Encontre o equilíbrio.

(a) O jogo é esquematizado em 2 estágios, da seguinte forma

1. Escolha da capacidade
2. Concorrência via preço

O equilíbrio será encontrado por indução retroativa.
Se $q_i \leq k_i$ e $k_i > 0$:

$$\pi_i(k_i, q_i) = (a - b(q_i + q_j))q_i - cq_i - rk_i$$

Se $q_i > k_i > 0$:

$$\pi_i(k_i.q_i) = -\infty$$

Se $q_i = 0 = k_i$:

$$\pi_i(k_i, q_i) = 0$$

(b) A sêxtupla $\{k_1, k_2, q_1, q_2, p_1, p_2\}$ é um equilíbrio tal que

1. $\{q_1, q_2, p_1, p_2\}$ dada k_1, k_2 é um equilíbrio Bertrand-Nash no segundo estágio
2. $k_i \in \arg\max_{\bar{k_i}} \pi_i(\bar{K}_i, k_j)$.

(c) Se $q_i = k_i$, então $p_i = a - b(k_1 + k_2)$, para i = 1,2.
No primeiro estágio:

$$\max_{k_i} (a - b(k_i + k_j))k_i - ck_i - ek_i$$

CPO

$$a - 2bk_i - bk_j - c - r = 0$$

A equação será simétrica, então $k_i = k_j = k$

$$a - c - r = 3bk$$

$$k = \frac{a - c - r}{3b}$$

$$q_1 = q_2 = k$$

$$p = a - \frac{b2(a - c - r)}{3b} = \frac{a + c + r}{3}$$

References