Lista 2 - Organização Industrial

Monitor: Antonio Ricciardi Macedo

Abril, 2023

Considere que um monopolista opera num mercado em que há um contínuo de consumidores. Além disso, estes consumidores são de tipos diferentes: θ_h e θ_l. O monopolista sabe que uma fração α dos consumidores é do tipo θ_h. Suponha que o monopolista tem uma função de custo $C(q) = cq$. Os consumidores têm utilidade de reserva igual a zero. Além disso, a utilidade dos consumidores do tipo θ_i com $i \in \{h, l\}$ é dada por

$$u_i(x,t) = \theta_i \ln(1+x) - t$$

em que x é a quantidade consumida do bem e t é a tarifa cobrada pelo monopolista. Considere que $\theta_h = 4$, $\theta_l = 3$, $c = 1$ e $\alpha = 1/2$.

Exercício 1

Suponha que o monopolista pode identificar o tipo de cada consumidor. Responda:

(a) Qual é o problema do monopolista?
(b) Por que no contrato que maximiza o problema do monopolista cada consumidor tem utilidade zero?
(c) Resolva o problema do monopolista.
(d) Qual o lucro do monopolista?

(a) Para $i = h, l$, o problema do monopolista será:

$$\max_{t_i, x_i} t_i - cx_i$$

$$s.a.\ \theta_i \ln(1+x_i) - t_i \geq 0$$

(b) Sabemos que se a utilidade for negativa, o agente não consumirá o bem. Portanto, resta ver o caso que a utilidade é maior que zero.
Se $\theta_i \ln(1+x_i) - t_i > 0$ para $i = h$ ou l, o monopolista poderia aumentar t_i e aumentar seu lucro, uma vez que seu lucro é descrito por $t_i - cx_i$. Dessa forma, o monopolista aumentará t_i até que $\theta_i \ln(1+x_i) - t_i = 0$.

(c) Para o consumidor h, resolveremos:

$$\max_{x_h, t_h} t_h - cx_h$$

$$s.a.\ \theta_h \ln(1+x_h) - t_h \geq 0$$

Substituindo t_h da R.O. no problema de maximização e substituindo os valores do enunciado, teremos:

$$\max_{x_h, t_h} 4\ln(1+x_h) - t_h - x_h$$

Tirando a CPO com relação a x_h:

$$\frac{4}{1+x_h} - 1 = 0$$

$$x_h = 3$$

E então

$$t_h = 4\ln(1+3) \approx 12$$

Analogamente, para o consumidor l, teremos

$$\max_{x_l, t_l} 3\ln(1+x_l) - t_l - x_l$$

Tirando a CPO com relação a x_h

$$x_l = 2$$

E então

$$t_l = 3\ln(1+2) \approx 6$$

(d) O lucro será:

$$\begin{aligned}\pi &= \alpha(t_h - cx_h) + (1-\alpha)(t_l - cx_l) \\ &\approx 1/2(12-3) + 1/2(6-2) = \frac{13}{2}\end{aligned}$$

Exercício 2

Suponha agora que o monopolista não consegue mais diferenciar os consumidores. Responda:

(a) Por que o monopolista não pode implementar o contrato encontrado no exercício anterior?
(b) Escreva o novo problema do monopolista.
(c) Explique quais restrições do problema do monopolista devem valer com igualdade.
(d) Resolva o problema do monopolista.
(e) Qual o lucro do monopolista?
(f) Qual tipo de consumidor tem renda informacional? Por quê? Qual o tamanho desta renda?

(a) Se o monopolista implementasse o contrato $(t_l, t_h) = (6{,}12)$, como não se pode diferenciar os consumidores, o consumidor do tipo θ_h teria incentivo a optar pelo par $\{t_l, x_l\}$, uma vez que

$$\theta_h \ln(1 + x_l) - t_l = 4\ln(1 + 2) - 3\ln(1 + 2) = \ln(3) > 0 = \theta_h \ln(1 + x_h) - t_h$$

Então, ambos os consumidores optariam por $\{t_l, x_l\}$, mostrando que o contrato encontrado no exercício 1 não é implementável.

(b) O novo problema do monopolista será:

$$\max_{x_h, x_l, t_h, t_l} \alpha(t_h - cx_h) + (1 - \alpha)(t_l - cx_l)$$

$$s.a. \begin{cases} \theta_h \ln(1 + x_h) - t_h \geq 0 & (\text{IR}_h) \\ \theta_l \ln(1 + x_l) - t_l \geq 0 & (\text{IR}_l) \\ \theta_h \ln(1 + x_h) - t_h \geq \theta_h \ln(1 + x_l) - t_l & (\text{IC}_h) \\ \theta_l \ln(1 + x_l) - t_l \geq \theta_l \ln(1 + x_h) - t_h & (\text{IC}_l) \end{cases}$$

(c) (IC_h): $\theta_h \ln(1 + x_h) - t_h \geq \theta_h \ln(1 + x_l) - t_l$
No item (a) mostramos que os consumidores do tipo h tem incentivos a optar pelo par $\{t_l, x_l\}$, ou seja, se passar pelo indivíduo l. Então, a restrição (IC_h) restrita com igualdade garante que o consumidor h revele sua verdadeira característica. Note ainda que os consumidores do tipo l não tem interesse em se passar pelos consumidores do tipo h.

(IR_l): $\theta_l \ln(1 + x_l) - t_l \geq 0$
Neste caso o consumidor do tipo l tem que participar o contrato. Note ainda que podemos chegar na restrição (IR_h) a partir de $(IR_l) + (IC_h) \to (IR_h)$

(d) Podemos reescrever o problema como:

$$\max_{(x_i, t_i)_{i=h,l}} \alpha(t_h - cx_h) + (1 - \alpha)(t_l - cx_l)$$

$$s.a. \begin{cases} \theta_l \ln(1 + x_l) = t_l & (\text{IR}_l) \\ \theta_h \ln(1 + x_h) - t_h = \theta_h \ln(1 + x_l) - t_l & (\text{IC}_h) \end{cases}$$

Substituindo as restrições no problema de maximização:

$$\max_{(x_i, t_i)_{i=h,l}} \alpha(\theta_h \ln(1 + x_h) - \theta_h \ln(1 + x_l) + \theta_l \ln(1 + x_l) - cx_h) + (1 - \alpha)(\theta_l \ln(1 + x_l) - cx_l)$$

CPO em x_h:

$$\alpha\left(\frac{\theta_h}{1 + x_h} - c\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{1 + x_h} - 1\right) = 0$$

$$\frac{4}{1+x_h} - 1 = 0$$
$$x_h = 3$$

CPO em x_l:

$$\alpha\left(-\frac{\theta_h}{1+x_l} + \frac{\theta_l}{1+x_l}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\theta_l}{1+x_l} - c\right) = 0$$
$$\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{1+x_l} + \frac{3}{1+x_l}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1+x_l} - 1\right) = 0$$
$$\frac{1}{1+x_l} = \frac{3}{1+x_l} - \frac{(1+x_l)}{1+x_l}$$
$$1 = 3 - 1 - x_l$$
$$x_l = 1$$

Assim,

$$t_h^s = 4(\ln(1+3) - \ln(1+1)) + 3\ln(1+1)$$
$$= 4\ln 2 + 3\ln 2 = 7\ln 2$$

$$t_l^s = 3\ln(1+1) = 3\ln 2$$

(e)

$$\pi = \frac{1}{2}(7\ln 2 - 3) + \frac{1}{2}(3\ln 2 - 1)$$
$$= 5\ln 2 - 2 \approx 1,46$$

(f) O consumidor com renda informacional é o consumidor h, pois ele tem incentivos a não se comportar como o seu tipo e se passar pelo consumidor l. Assim, o monopolista deve prover incentivos para que h fale a verdade.
Renda informacional $= u_h(x_h^S, t_h^S) - u_h(x_h^F, t_h^F) = -t_h^S + t_h^F$, em que F refere-se à discriminação de primeiro grau e S à de segundo grau. Então,

$$4\ln 4 - 7\ln 2 = \ln 4^4 - \ln 2^7$$
$$\ln 2^{2\cdot 4} - \ln 2^7 = \ln 2^8 - \ln 2^7$$
$$\ln\left(\frac{2^8}{2^7}\right) = \ln 2 > 0$$

Exercício 3

Um monopolista vende em dois mercados diferentes, sem possibilidade de arbitragem entre eles. A demanda inversa no mercado 1 é dada por $p_1 = 100 - q_1/2$, e a demanda inversa no mercado 2 é dada por $p_2 = 100 - q_2$. O monopolista produz $q = q_1 + q_2$ e tem custo $c(q) = q^2$.

(a) Calcule a receita marginal em cada um dos mercados e a receita marginal agregada.
(b) Calcule a quantidade que o monopolista vai vender em cada um dos mercados.
(c) Calcule o lucro total do monopolista.
(d)Suponha agora que o monopolista decida dividir a produção em duas plantas, uma destinada a cada mercado. Calcule o quanto será produzido em cada mercado.
(e) Calcule o lucro total do monopolista ao dividir a produção. O lucro aumenta ou diminui em relação ao item (c)? Interprete.
(f) Suponha que seja possível arbitrar entre os mercados (logo, o monopolista não pode mais discriminar entre os mercados, tendo que vender qualquer unidade ao preço p). Calcule o preço p, a quantidade total produzida, a quantidade vendida em cada mercado e o lucro do monopolista. O que acontece com o lucro? Por quê?

(a, b): Problema do monopolista:

$$\pi = (100 - \frac{q_1}{2})q_1 + (100 - q_2)q_2 - (q_1 + q_2)^2$$

CPO para q_1:

$$100 - q_1 - 2q_1 - 2q_2 = 0$$

em que $100 - q_1$ representa a receita marginal para o mercado 1.
CPO para q_2:

$$100 - 2q_2 - 2q_1 - 2q_2 = 0$$

em que $100 - 2q_2$ é a receita marginal do mercado 2.
A partir das duas CPO's, chegamos a

$$q_1 = 25$$

$$q_2 = 12,5$$

Portanto, as receitas marginais serão:

$$MR_1 = 75 = MR_2$$

E a receita marginal agregada será:

$$MR_1 + MR_2 = 150$$

(c)

$$\pi = (100 - \frac{25}{2})25 + (100 - 12,5)12,5 - (25 + 12,5)^2$$

$$\pi = 1875$$

(d) Para o mercado 1:

$$\max_{q_1}(100 - \frac{q_1}{2})q_1 - q_1^2$$

Tomando a CPO em relação a q_1:

$$100 - q_1 - 2q_1 = 0$$

$$q_1 = \frac{100}{3}$$

Para o mercado 2:

$$\max_{q_2}(100 - q_2)q_2 - q_2^2$$

Tomando a CPO em relação a q_2:

$$100 - 2q_2 - 2q_2 = 0$$

$$q_1 = \frac{100}{4} = 25$$

(e) O lucro total será:

$$\pi_1 = (100 - \frac{100}{6})\frac{100}{3} - (\frac{100}{3})^2$$

$$\pi_1 = 1666,66$$

$$\pi_2 = (100 - 25)25 - (25)^2$$

$$\pi_1 = 1250$$

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = 1666,66 + 1250 = 2916,66$$

O lucro aumentou com relação ao item (c), pois o curso marginal de produzir q_i é decrescente em q_j, para $i, j = \{1, 2\}$ e $j \neq i$.

(f) Demandas

$$q_1 = 200 - 2p$$

$$q_2 = 100 - p$$

$$Q = q_1 + q_2 = 300 - 3p$$

$$p = 100 - \frac{Q}{3}$$

Problema do monopolista

$$\max_Q (100 - \frac{Q}{3})Q - Q^2$$

Tirando a CPO com relação a Q:

$$100 - \frac{2}{3}Q - 2Q = 0$$

$$Q = \frac{300}{8}$$

$$P = \frac{700}{8}$$

Assim,

$$q_1 = 200 - 2p = 25$$

$$q_2 = 100 - p = \frac{25}{2}$$

$$\pi = \frac{700}{8}\frac{300}{8} - (\frac{300}{8})^2 = 1875$$

References