INTRODUCCIÓN

Monday, January 28, 2019 6:17 PM

Forma de Evaluación

- Asistencia 10%
  - x26 clases | 80% asistencia
  - - Puntualidad → 2
  - - Normal → 1
  - - Falta → 0
- Exámenes 40%
  - - Aprobar 1 examen
  - - Serán 2 exámenes
- Tareas/Programas 20%
  - * Puede ser en equipo
- Exposiciones 30%
  - 2 exposiciones (Por equipo) → 4 personas

1.1 - 1.4 Historia - Error

Friday, February 1, 2019 10:19 AM

1.1 Introducción Histórica de los Métodos Numéricos

- ENIAC1 → Primera computadora
- Análisis Numérico | Rama de las matemáticas que mediante el uso de algoritmos iterativos obtienen soluciones numéricas aproximadas.
- Iteración | Acción de repetir varias veces la misma acción

▶ Errores

▶ inherentes
→ Causados por la incertidumbre en las mediciones
- incertidumbre { Hacen referencia a las dimensiones físicas
- equivocaciones { Al momento de medir

▶ método
→ Limitaciones de nuestros equipos
- Truncamiento
- Redondeo

Redondeo

- DMS → Digito más significativo

- DMS → Digito más significativo

- Si es mayor a 5 → incrementa
- Si es menor a 5 → no se modifica
- Si es igual a 5 → Se revisa cifra anterior
  - → Si es par → No se modifica
  - → Si es impar → Se incrementa uno

Error Absoluto

$$E = |V_{Real} - V_{medido}|$$

Error Relativo

$$E = \frac{|V_{Real} - V_{medido}|}{V_{Real}} \underbrace{\times 100}_{\text{Porcentual}}$$

▶ Ejercicio

- Error absoluto → .028 [m]
- Error relativo → .093 %

$$\varepsilon_A = |\text{Aprox. actual} - \text{Aprox. anterior}|$$ ← Valor absoluto

▶ Redondeo

$P_i = 3.141592$

$P_i = 3.1416$

$$E_p = \frac{|V_R - V_A|}{V_R} \times 100 =$$

$$= .00025464\ \%$$

$= .00025464\ \%$

▶ Truncamiento

$P_i = 3.1415$

$$E_p = \frac{|V_R - V_A|}{V_R} \times 100 =$$

$$= .002928\ \%$$

1.5 - Estabilidad Numérica

Friday, February 8, 2019 11:31 AM

Estabilidad Numérica

- Que tan estable es un método al momento de realizar un proceso.

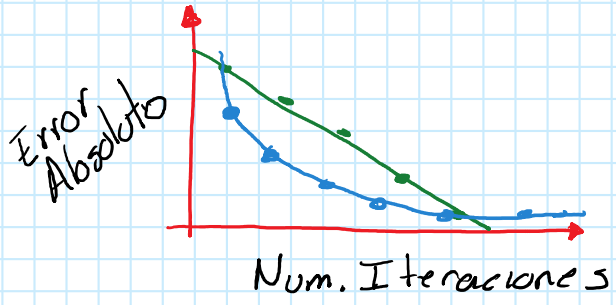
- Inestable → se atenuan
- Estable → Se magnifican los errores

- Convergencia

- Un método numérico es convergente si este se aproxima mediante iteraciones al valor real

- Orden de convergia

- Es la velocidad con la cual una sucesión converge a su limite



- Lineal y estable
- No estable (Exponencial)

Aproximación de funciones mediante polinomios

- Series de Taylor y Maclaryn

Taylor $\left| f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|_{x=x_0} (x-x_0)^n$

Maclaurin $\left| f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} f^i(0) \right.$

1] Para calcular la velocidad aerolar de la Tierra un astronomo aproxima un año como 3.1416×10^4 [segundos].

→ Si el valor real se toma como número de segundos que hay entre 365 días

¿Cuál es el error absoluto y relativo del astronomo?

$V_{aproximado} = 3.1416 \times 10^7$

$V_{real} = (365)(24)(60)(60) = 3.1536 \times 10^7$

$\therefore$ Error Absoluto $= \left| 3.1536 \times 10^7 - 3.1416 \times 10^7 \right| = 120{,}000$

$= 1.2 \times 10^5$

Error Relativo $= \frac{\text{Error Absoluto}}{V_{real}} = 3.8051 \times 10^{-3}$

$= .38\%$

2] Por medio del polinomio de Taylor de grado 3 aproximar, ..., posteriormente evaluar el polinomio en, ...,

- $x_0 = 0$
- Evaluar en $x = -0.1$
- $f(x) = e^{3x}$

→ Calcular el valor exacto de $f(-0.1) =$

→ Cuál es el error relativo % (5 cifras decimales)

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) = \qquad x = -0.1$$

$$k=0 \quad \frac{\cancel{(x-0)^0}}{0!} f^0(0) = 1$$

$$k=1 \quad \frac{(x-0)^1}{\cancel{1!}\,1} f'(0) = 3x$$

$$k=2 \quad \frac{(x-0)^2}{\cancel{2!}\,2} f''(0) = \frac{9}{2}x^2$$

$$k=3 \quad \frac{(x-0)^3}{\cancel{3!}\,6} f'''(0) = \frac{27}{6}x^3$$

$$f(x) = e^{3x} \; ; \; f(0) = e^{3(0)} = 1$$

$$f'(x) = 3e^{3x} \; ; \; f'(0) = 3e^{3(0)} = 3$$

$f'(x) = 3e^{3x}$; $f'(0) = 3e^{3(0)} = 3$

$f''(x) = 9e^{3x}$; $f''(0) = 9e^{3(0)} = 9$

$f'''(x) = 27e^{3x}$; $f'''(0) = 27e^{3(0)} = 27$

∴ Polinomio $P(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{6}x^3$

if $x = -0.1$

$\therefore P(-0.1) = .7405$

∴ Valor (Real) $f(x) = e^{3x}$; $f(-0.1) = e^{3(-.1)} =$

$= .740818 \cong .74082$

• Error Relativo Porcentual $= \dfrac{|(.74082) - (.7409)|}{.74082} \times 100 =$

$= 4.32 \times 10^{-4} \times 100 = .0432\ \%$

-> 2.1 - MÉTODOS CERRADOS

Monday, February 11, 2019 11:12 AM

Métodos Cerrados

* Manzo

Método de bisección

- Elegir el intervalo y posteriormente partirlo a la mitad (Bisección)
- Buscar la ubicación de la raíz
  - Siempre converge
  - Tiende a ser más preciso mientras más iteraciones tenga.

1] Ejercicio

$f(x) = e^x - 5$

// Error estimado

1 % = .01

x	f(x)
0	-4
1	-2.2817
2	2.389

Intervalo

∴ a - b [1 , 2]

- $c = \frac{a+b}{2}$
- $f(a) * f(c) < 0$

- error absoluto = abs(a - b)

1 iteración

$c = 1.5$; $-.51831092$

$[a, c]$; $[-2.2817, -.51831]$ < 0

$[c, b]$; $[-.51831, 2.389]$

$\therefore$ Tomamos $[c, b]$

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	error
1	2	1.5	−2.2817	2.389	−.5183	1
1.5	2	1.75	−.5188	2.389	.7546	.5
1.5	1.75	1.625	−.5188	.7546	.0784	.25
1.5	1.625	1.5625	−.5188	.0784	−.02292	.125
1.5625	1.625	1.5937	−.2292	.0784	−.0780	.0625
1.5937	1.625	1.6093	−.0784	.0784	−.0006	.0313
1.6093	1.625	1.61715	−.006	.0784	.03870	.01569

-> 2.2 Método Interpolation (Regla Falsa)

Friday, February 15, 2019 11:31 AM

- Es método que permite aproximaciones a las raíces de un polinomio

- Condiciones
  - Intervalo debe ser continuo
  - f(a) y f(b) deben tener signos opuestos

$$x_i = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

▶ $f(x) = x^2 - 2$ $[0, 2]$ ($0 \to a$, $2 \to b$)

i	a	b	f(a)	f(b)	x_i	$f(x_i)$
1	0	2	-2	2	1	-1
2	1	2	-1	2	1,333	-.223

1] • $f(a) = (0)^2 - 2 = -2$ • $f(b) = (2)^2 - 2 = 2$

• $x_1 = \dfrac{(0)(2) - (2)(-2)}{2 - (-2)} = 1$; $f(x_1) = -1$

2] • $f(a) = f(1) = -1$ • $f(b) = f(2) = 2$

$$x_2 = \frac{(1)(2) - (2)(-1)}{(2)-(-1)} = \frac{4}{3} = 1.333$$

$$\therefore f(x_2) = -0.23$$

-> 2.3 Método de factores cuadráticos

Monday, February 18, 2019 11:15 AM

- Determina las raíces complejos de polinomios

- Ecuación Gral. Polinomio

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots + a_n$$

- Factor de cuadrático

$$x^2 + Px + Q$$

- $P(x) = (x^2 + px + q)(b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \ldots + b_{n-3} x + b_{n-2}) + Rx + S$

- $b_K = a_K - P b_{K-1} - Q b_{K-2}$
- $R = a_{n-1} - P b_{n-2} - Q b_{n-1}$
- $S = a_n - Q b_{n-2}$

- $\Delta P = \dfrac{R}{b_{n-1}}$
- $\Delta Q = \dfrac{S}{b_{n-2}}$

- $P = \dfrac{a_{n-1} - Q b_{n-3}}{b_{n-2}}$

- $Q = \dfrac{a_n}{b_{n-2}}$

->2.4 Método de Aproximaciones sucesivas

Friday, February 22, 2019 11:20 AM

- También se le conoce como el método de iteraciones simples

- $\text{Error} = |x_{n+1} - x_n|$ $\qquad f(x)=0$

  $x_{n+1} = g(x_n)$ $\qquad x = x_0$

  $x_1 = g(x_0)$

Iteración	x_n	x_{n+1}	Error
1	4.5	4.63	.13
2	4.63	4.67	.04
3	4.67	4.69	.02
4	4.69	4.697	.007

- $x^2 - 3x - 8 = 0$

x	$f(x)$
0	-8
1	-10
2	-10
3	-8
4	-4
5	2

$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$

$x_1 = g(x_0)$

$\rightarrow x_1 = \sqrt{8+3x} = \sqrt{8+3(4.5)} =$ *

$= \underline{4.6368}$

$\rightarrow x_2 = \sqrt{8+3(\underline{4.63})} = 4.6786$

* Checar tolerancia

// Para saber si converge

1. Derivar la expresión utilizada para evaluar x_i
2. Evaluar en el valor inicial

$\therefore$ Converge $\triangleq |g'(x)| < 1$

$\therefore$ diverge $\triangleq |g'(x)| > 1$

->2.5 Newton Raphson

Friday, February 22, 2019 12:10 PM

- Es un método abierto, la función debe ser continua y derivable

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

//Basta con un valor inicial no un intervalo

//Ejemplo

- $f(x) = x^3 - x - 1$, $x_0 = 1$
- $f'(x) = 3x^2 - 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$$

- $x_1 = x_0 = 1$
- $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{(1)^3 - (1) - 1}{3(1)^2 - 1} = 1.5$
- $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.5 - \frac{(1.5)^3 - 1.5 - 1}{3(1.5)^2 - 1} = 1.348$
- $x_4 = 1.325$

- Error Absoluto $= |x_{n+1} - x_n|$
- Error Porcentual Aproximado $= \frac{E.A.}{x_{n+1}}$

NOTA! La tolerancia hay que compararla con el error absoluto

NOTA | La tolerancia hay que compararla con el error absoluto

Riley Reid

Gauss Jordan

Monday, February 25, 2019 11:29 AM

- Gaussiano: Sistema de Ecuaciones Triangular $\longrightarrow$ Sustitución Regresiva

- Gauss Jordan:
  - No sólo es la triángularización
  - Debemos hacer "Matriz aumentada" y obtener la columna de respuesta

1]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -.1 & -.2 & 7.85 \\ .1 & 7 & -.3 & -19.3 \\ .3 & -.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{157}{20} \\ \frac{1}{10} & 7 & -\frac{3}{10} & -19.3 \\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & 10 & 71.4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{15} & \frac{157}{60} \\ 0 & \frac{2101}{300} & -\frac{22}{75} & -\frac{11737}{600} \end{array}\right]$$

No hacer por fracciones xd

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 30 & -1 & -2 & 78.5 \\ 1 & 70 & -3 & -193 \\ 3 & -2 & 100 & 714 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 60 & -2 & -4 & 157 \\ 1 & 70 & -3 & -193 \\ 3 & -2 & 100 & 714 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 70 & -3 & -193 \\ 3 & -2 & 100 & 714 \\ 60 & -2 & -4 & 157 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 70 & -3 & -193 \\ 0 & -212 & 109 & 1293 \\ 0 & -4202 & 176 & \cancel{11423} \end{array}\right] \sim$$

11580

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 70 & -3 & -193 \\ 0 & -212 & 109 & 1293 \\ 0 & 0 & \bigcirc & \bigcirc \end{array}\right] \sim$$

$\frac{106}{2101}$

1984.462264

~~14205.23589~~

14048.23585

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 70 & -3 & -193 \\ 0 & 1 & -.51415 & -6.099056604 \\ 0 & 0 & 1 & 7.079114632 \end{array}\right] \sim$$

Método LU

Friday, March 1, 2019 11:52 AM

Método de Doolittle

Método de Crout

- $A = L, U$

//Para matrices singulares | Determinante distinto a 0

- $A = \underbrace{L \quad U}$

$A \Leftarrow$ Producto de estas matrices

- Los 1 de la matriz u (Diagonal Principal)

↳ Crout

1]

$$-2a + b + 2c + 4d = 9$$
$$-10a + 9b + 19c + 21d = 53$$
$$8a + 4b + 9c - 20d = -39$$
$$14a + 3b - c - 12d = -68$$

DLittle; $A = L_1 U$

Crout; $A = L U_1$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ -10 & 9 & 19 & 21 \\ 8 & 4 & 9 & -20 \\ 14 & 3 & -1 & -12 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 53 \\ -39 \\ -68 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ -10 & 9 & 19 & 21 \\ 8 & 4 & 9 & -20 \\ 14 & 3 & -1 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 17 & -4 \\ 0 & -4 & -15 & -40 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -39 \end{bmatrix} \sim$$

-5
4
7

-2
1

-6

$$\sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = U \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

- $LUx = b$; $Ux = y$; $Ly = b$

// Sacando y ; $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 53 \\ -39 \\ 68 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 9$$
$$5y_1 + y_2 = 53$$
$$-4y_1 + 2y_2 + y_3 = -39$$
$$-7y_1 - 1y_2 + 6y_3 + y_4 = 68$$

//Resolviendo

$$y = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ -19 \\ -9 \end{bmatrix}$$

// Sacando x ; $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ -19 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$-2a + b + 2c + 4d = 9$$
$$4b + 9c + d = -19$$
$$-c - 6d = -19$$
$$-3d = -9$$

$a = 2$
$b = -1$
$c = 1$
$d = 3$ //

Incognitas

- Pasos → Algoritmos Generales

1] $Y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} - Y_j$

$i = 1, 2, 3$

2] $X_i = \dfrac{Y_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij} X_j}{U_{ij}}$

$i = n$

Jocabi - Gauss|Seidel

Monday, March 4, 2019 11:29 AM

Método de Jacobi

$$17x - 2y - 3z = 500$$
$$-5x \quad 21y \quad 2z = 200$$
$$-5x \quad -5y \quad 22z = 30$$

$$A\,x = B$$

$$X_{k+1} = D^{-1} * B + D^{-1}(L+U) * X_k$$

- $A = \begin{bmatrix} 17 & -2 & -3 \\ -5 & 21 & -2 \\ -5 & -5 & 22 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 500 \\ 200 \\ 30 \end{bmatrix}$

- $D \triangleq$ Diagonal $\qquad$ Inversa

$$\begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{21} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{22} \end{bmatrix}$$

- L // Invertimos signos

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

- U // Invertimos signos

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $D^{-1} * B$

$$\begin{bmatrix} 1/17 & 0 & 0 \\ 0 & 1/21 & 0 \\ 0 & 0 & 1/22 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 500 \\ 200 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500/17 \\ 200/21 \\ 30/22 \end{bmatrix}$$

- $L+U$

$$(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} ;$$

- $D^{-1}(L+U) =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2/17 & 3/17 \\ 5/21 & 0 & 2/21 \\ 5/22 & 5/22 & 0 \end{bmatrix}$$

// Agrupando todas las expresiones

$$X_{k+1} = D^{-1} * B + D^{-1}(L+U) * X_k$$

$$= \begin{bmatrix} 500/17 \\ 200/21 \\ 30/22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2/17 & 3/17 \\ 5/21 & 0 & 2/21 \\ 5/22 & 5/22 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \\ Z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500/17 + 2/17\, y^k + 3/17\, z^k \\ 200/21 + 5/21\, x^k + 2/21\, z^k \\ 30/22 + 5/22\, x^k + 5/22\, y^k \end{bmatrix} =$$

- if $k=0$

$x^1 = 500/17$

$y^1 = 200/21$

$z^1 = 30/22$

- if $k=1$

$x^2 = 30.78$

$y^2 = 17.82$

$z^2 = 10.27$

Tolerancia | Error

$$X_2 = \frac{30.78 - 29.41}{30.78} = 4.43$$

Método de Gauss-Seidel

- Checar la convergencia a través de la comprobación de los valores mayores de la

- Checar la convergencia a traves de la comprobación de los valores mayores de la diagonal

$$4x - y = 2 \qquad 4 > 1$$
$$-x + 4y - z = 6 \qquad 4 > 2$$
$$-y + 4z = 2 \qquad 4 > 1$$

$\therefore$ Mayormente Dominante (Converge)

$$x = \frac{2+y}{4} \qquad y = \frac{x+z+6}{4} \qquad z = \frac{2+y}{4}$$

$y_0 = 0 \qquad z_0 = 0 \qquad x_0 = .5$

1 Itera

- $x_1 = \frac{2+0}{4} = .5$
- $y_1 = \frac{.5+0+6}{4} = 1.62$
- $z_1 = \frac{2+1.62}{4} = .906$

2 Itera

- $x_2 = \frac{2+1.62}{4} = .906$
- $y_2 = \frac{.906+.906+6}{4} = 1.9531$
- $z_2 = \frac{2+1.9531}{4} = .988$

Valores Característicos

Monday, March 11, 2019 12:00 PM

- Método de Krilov → La ecuación caracteristica
- Método de Potencias → Mayor y Menor valor característicos

EJERCICIOS

Friday, March 15, 2019 11:18 AM

→ Tema 1

1) Desarrollar el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x) = \sqrt{x}$

En el punto $x_0 = 1$ y con este aproxime el valor de $\sqrt{3}$ redondeando a 2 cifras decimales

Calcule el error relativo entre el resultado anterior y el valor obtenido con calculadora (5 decimales

Datos

$x_0 = 1$

$x = 3$

$f(x) = \sqrt{x}$

Expresión

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$; $f(1) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$; $f'(1) = 1/2$

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$; $f''(1) = -1/4$

$$\therefore f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} =$$

$$= 1 + \frac{(1/2)(x-1)}{1} + \frac{(-1/4)(x-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$$

// Dando el error | Valor real = 1.73205

// Dando el error | Valor real = 1.73205

$$\text{Error} = \frac{|1.73205 - 1.5|}{1.73205} = .13397$$

2] Suponga que el número π se aproxima por medio de la evaluación

$\pi = 4 \operatorname{angtan}(1)$ | Usando 4 digitos decimales

Valor Verdadero π | $\pi = 3.141592654$

a) Encuentre error relativo debido al troncamiento
b) Encuentre error relativo debido al redondeo

$\pi = 4 \operatorname{angtan}(1) = 3.141592654$

→ Troncamiento = 3.1415

→ Redondeo = 3.1416

// Troncamiento

$$E_r = \frac{|V_R - V_e|}{V_R} = \frac{|3.141592654 - 3.1415|}{3.141592654} =$$

$$= 29.49255362 \times 10^{-6}$$

// Redondeo

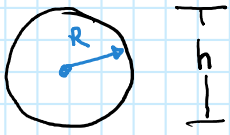
$$E_r = \frac{|3.141592654 - 3.1416|}{3.141592654} = 2.338434995 \times 10^{-6}$$

∴ Redondeo da menos error

∴ Redondeo da menos error //

→ Tema 2 // Raíces de ecuaciones

3] Se necesita diseñar un tanque esférico



El volumen que el tanque puede tener es

$$V = \pi h^2 \left(\frac{3R - h}{3} \right)$$

$V \triangleq$ Volumen

$h \triangleq$ Profundidad de agua [m]

$R \triangleq$ Radio del tanque [m]

If $R = 3$ a qué profundidad debe llenarse el tanque para contener $30\ m^2$

// 3 iteraciones con Regla Falsa

// Determine error relativo después de cada iteración

• Expresión

$$x_{i+1} = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

• Función

$$V = \pi h^2 \left(\frac{3R - h}{3} \right) ; \quad 30 = \pi h^2 \left(\frac{9 - h}{3} \right) ;$$

$$f(x) = 30 - \pi x^2 \left(\frac{9 - x}{3} \right)$$

// Evaluaciones del Rango

x	f(x)
0	30
1	21.6

∴ Rango de valores

[2, 3]

1	21.6	
2	0.6784	Cambio de signo
3	-26.548	

$[2, 3]$
$\uparrow \quad \uparrow$
a b

// Tabla e iteraciones

i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	Error
0	2	3	.6784	-26.548	2.0249	.0507	—
1	2.0249	3	.0507	-26.548	2.0267	.0052	$\frac{x_i - a}{x_i} = 6.76119 \times 10^{-4}$
2	2.0267	3	.0052	-26.548	2.0268	.0026	
3	2.0268	3	.0026	-26.548	2.0269	.0014	

$$x_1 = \frac{(2)(-26.548) - (3)(.6784)}{-26.548 - .6784} =$$

// Nota: Se da cambio respecto al que no cambia el signo

$f(a) \cdot f(x_i)$

$f(b) \cdot f(x_i)$

$$x_2 = \frac{(2.0249)(-26.548) - (3)(.0507)}{(-26.548) - (.0507)} = .0052$$

$x_3 = 2.0269$

4] Calcula la raíz de la siguiente función hasta que el error absoluto sea menor a 0.001

$f(x) = 2 - e^{-x}$

// Tabla → Para dar rangos | // Expresión

x	f(x)

x	f(x)
-2	-5.3890
-1	-0.7182
0	1
1	1.6321

Rango de la raíz

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = -0.5$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

// Existir y diferente de 0

ite	x_0	x_R	Error Abs.
0	-0.5	-.7131	—
1	-.7131	-.6933	.0198
2	-.6933	-.6931	.0002

5] Obtenga la solución del Sistema de Ecuación por el método de Gauss-Seiden con un error de .001

$$x - y + 6z = 23$$
$$-x + 8y + 2z = 30$$
$$6x + y + z = 22$$

Deben ser mayores

$$6x + y + z = 22$$
$$-x + 8y + 2z = 30$$
$$x - y + 6z = 23$$

$$x = \frac{22 - y - z}{6}$$

$$y = \frac{30 + x - 2z}{8}$$

$$z = \frac{23 - x + y}{6}$$

if $x, y, z = 0$

$$x_0 = \frac{22}{6} = 3.666$$

$$y_0 = 4.2075$$

$$z_0 = 3.9234 \cancel{4} 6$$

$$x_1 = \frac{22 - 4.2075 - 3.9236}{} = 1.6102$$

Errores

$$\left| 1.6102 - \frac{22}{6} \right| =$$

$$x_1 = \frac{22 - 4.2079 - 3.9236}{6} = 1.6102$$

$$\left| 1.6102 - \frac{22}{6} \right| =$$

$$y_2 = \frac{30 + (1.6102) - 2(3.9236)}{8} = 3.9605$$

$$z_2 = \frac{23 - (1.6102) + (3.9605)}{6} = 4.2251$$

EXAMEN

Thursday, March 21, 2019 11:52 PM

1] Truncamiento

$\frac{24}{7} = 3.428571$ // 2 decimales

$E_A = |3.428571 - 3.42| = 8.571 \times 10^{-3}$

$E_E = \frac{|3.428571 - 3.42|}{3.428571} = 2.4998 \times 10^{-3}$

→ Redondeo a 3 cifras

$EA = |3.428571 - 3.429| = 4.29 \times 10^{-4}$

$EE = \frac{4.29 \times 10^{-4}}{3.428571} = 1.2512 \times 10^{-4}$

2] Descomposición LU versión Doolittle

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix} \underset{r_3 = -\frac{3}{2} r_1 + r_3}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{r_3 = -\frac{5}{2} r_2 + r_3}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3] $f(x) = xe^x - 5$

- Raíz / Bisección error = .01

x	f(x)
0	-5
1	-2.28
1.5	1.722
2	9.778

} [a, b]

$f(a) * f(b) < 0$

Raíz

$x = 1.32421875$ //

1.5	1.122	
2	9.778	

$x = 1.32421875$

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Error
1	2	1.5	−2.28	9.778	1.778	1
1	1.5	1.25	−2.28	1.778	−.637	.5
1.25	1.5	1.375	−.637	1.778	.4382	.25
1.25	1.375	1.3125	−.637	.4382	−.1234	.125
1.3125	1.375	1.34375	−.1234	.4382	.1511	.0625
1.3125	1.34375	1.328125	−.1234	.1511	.01229	.03125
1.3125	1.328125	$\frac{169}{128}$	−.1234	.01229	−.0559	.015625
169/128	1.328125	$\frac{339}{256}$	−.0559	.01229	−.0219	7.8125×10^{-3}

4] Newton - Rhapson / Obtener una de las raices

$f(x) = x^2 + 9x + 4$ // Error relativo cada iteración error estimado de 1%

$f'(x) = 2x + 9$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Valores iniciales

$x_0 = 0$

$x_0 = -10$

$\rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x^2 + 9x + 4}{2x + 9} = -\frac{4}{9}$

▶ $x_0 = 0$

- $x_2 = -\frac{4}{9} - \frac{(\ )^2 + 9(\ ) + 4}{2(\ ) + 9} = -\frac{308}{657}$

Error Relativo $\left| \frac{\left|-\frac{4}{9} - \left(-\frac{308}{657}\right)\right|}{-(4/9)} \right| = -.05479$

- $x_3 = -\frac{308}{657} - \frac{(\ )^2 + 9(\ ) + 4}{2(\ ) + 9} = -.46887 11252$

Error Relativo $\left| \frac{\left|-\frac{308}{657} - (-.46887 11252)\right|}{(-308/657)} \right| = -1.5691317 \times 10^{-4}$

▶ $x_0 = 10$

Relativo | $(-308/657)$

$x_0 = 10$

$$x_1 = x_0 - \frac{x^2+9x+4}{2x+9} = -\frac{96}{11}$$

$$x_2 = -\frac{96}{11} - \frac{(-96/11)^2 + 9(\ ) + 4}{2(\ ) + 9} = -\frac{8732}{1023}$$

Error relativo $\left| \dfrac{\left|-\frac{96}{11} - \left(-\frac{8732}{1023}\right)\right|}{(-96/11)} \right| = .0219534$

$$x_3 = -\frac{8732}{1023} - \frac{(\ )^2 + 9(\ ) + 4}{2(\ ) + 9} = -8.531131114$$

Error Relativo $\left| \dfrac{\left|-\frac{8753}{1023} - (-8.531131114)\right|}{(-8753/1023)} \right| = -2.93075 \times 10^{-3}$

$$x_4 = -8.531131114 - \frac{(\ )^2 + 9(\ ) + 4}{2(\ ) + 9} = -8.530747879$$

// No necesario

5]

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 7 & 23 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7/5 & 23/5 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 7/5 & 23/5 \\ 0 & 0 & -9/5 & 9/5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 7/5 & 23/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] //$$