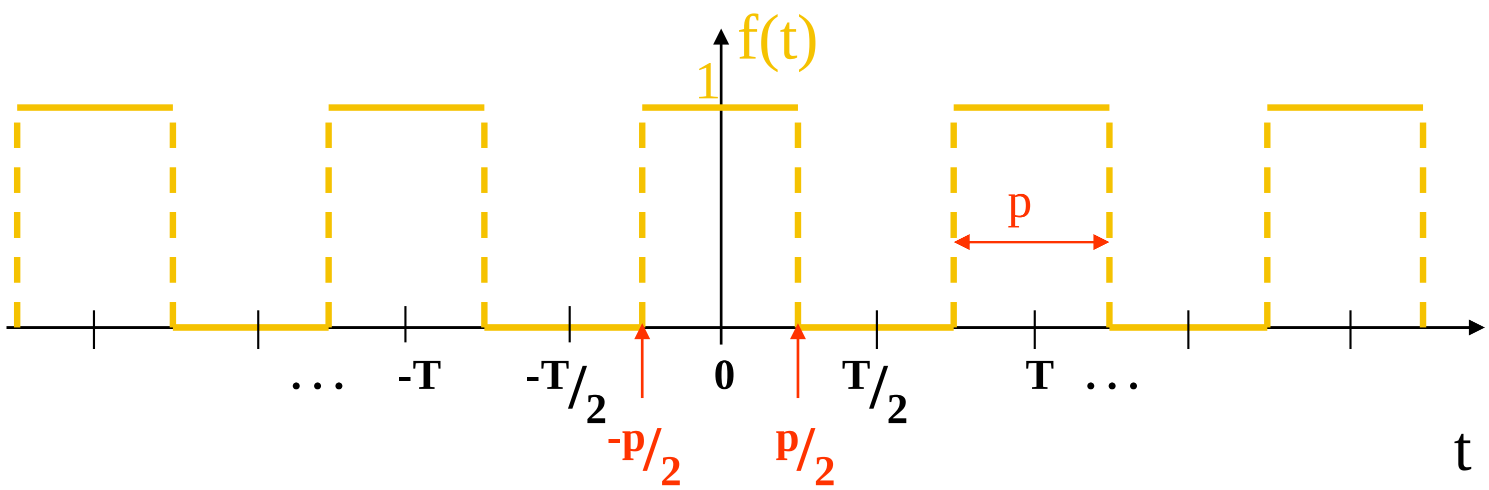
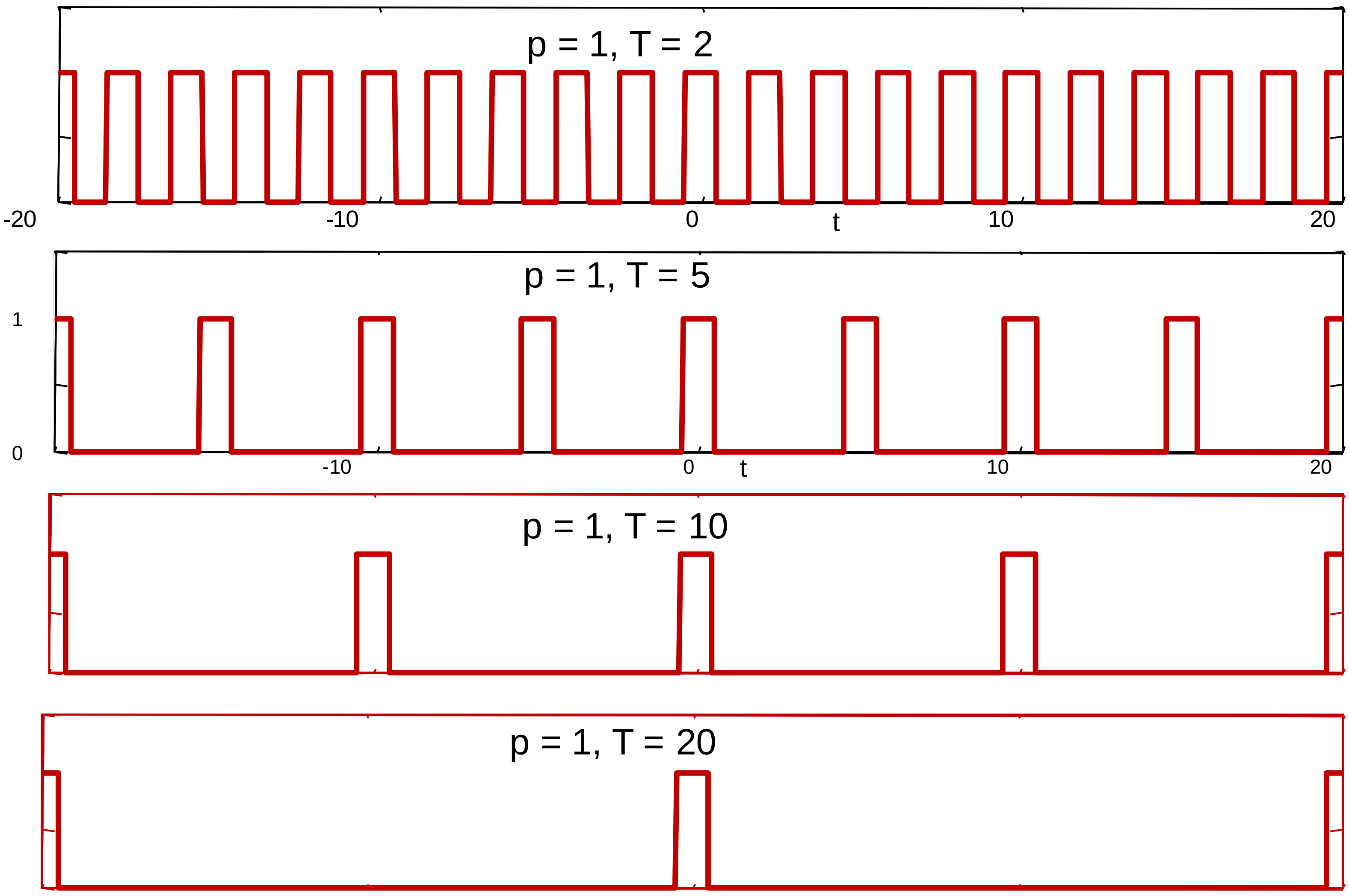
De la serie de Fourier a la transformada de Fourier

- **Serie de Fourier** nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de ***funciones periódicas*** **f(t).**
- ¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener una representación en el dominio de la frecuencia **de *funciones no periódicas***?

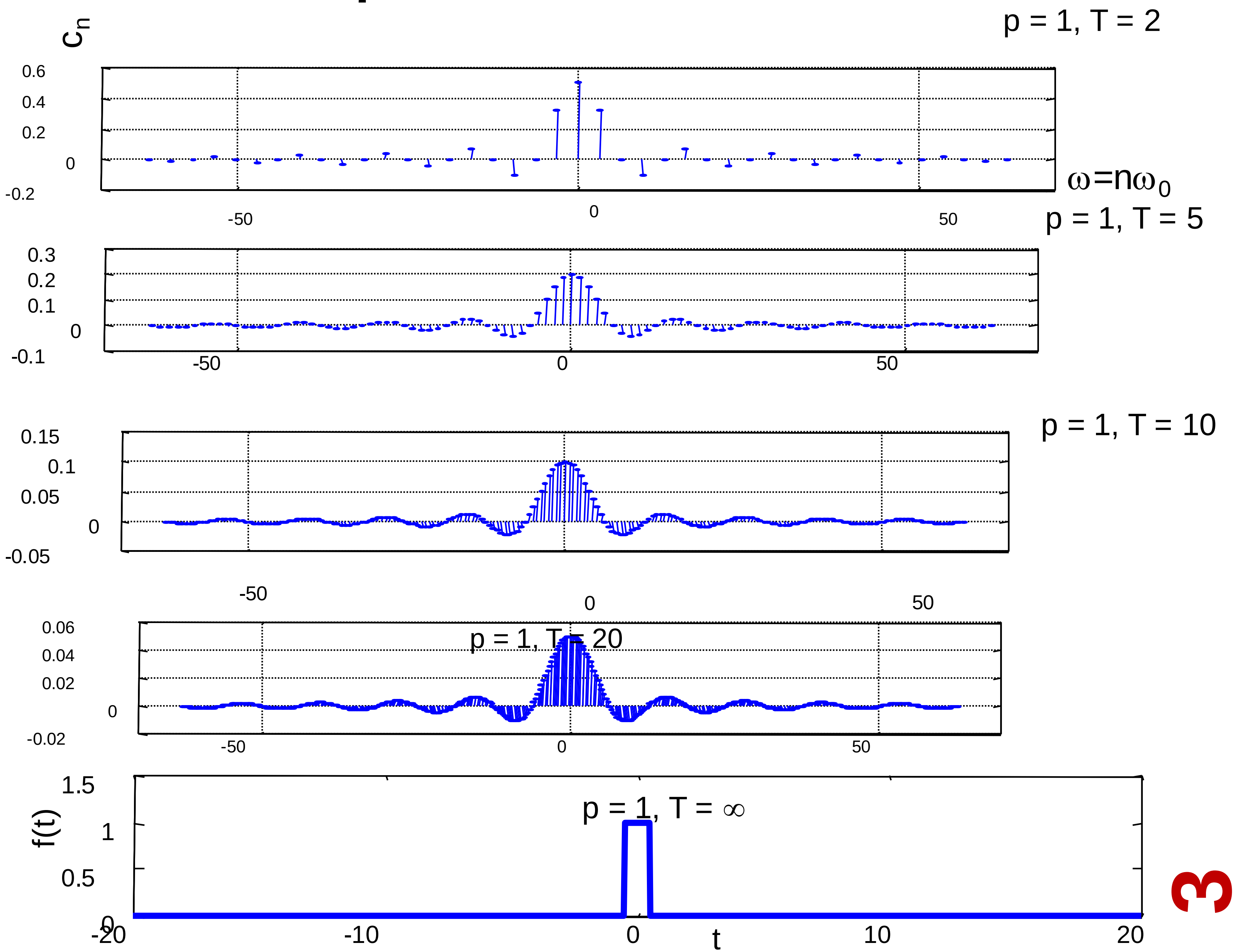
Consideremos la siguiente función periódica de periodo T:



Si el período del tren de pulsos aumenta...

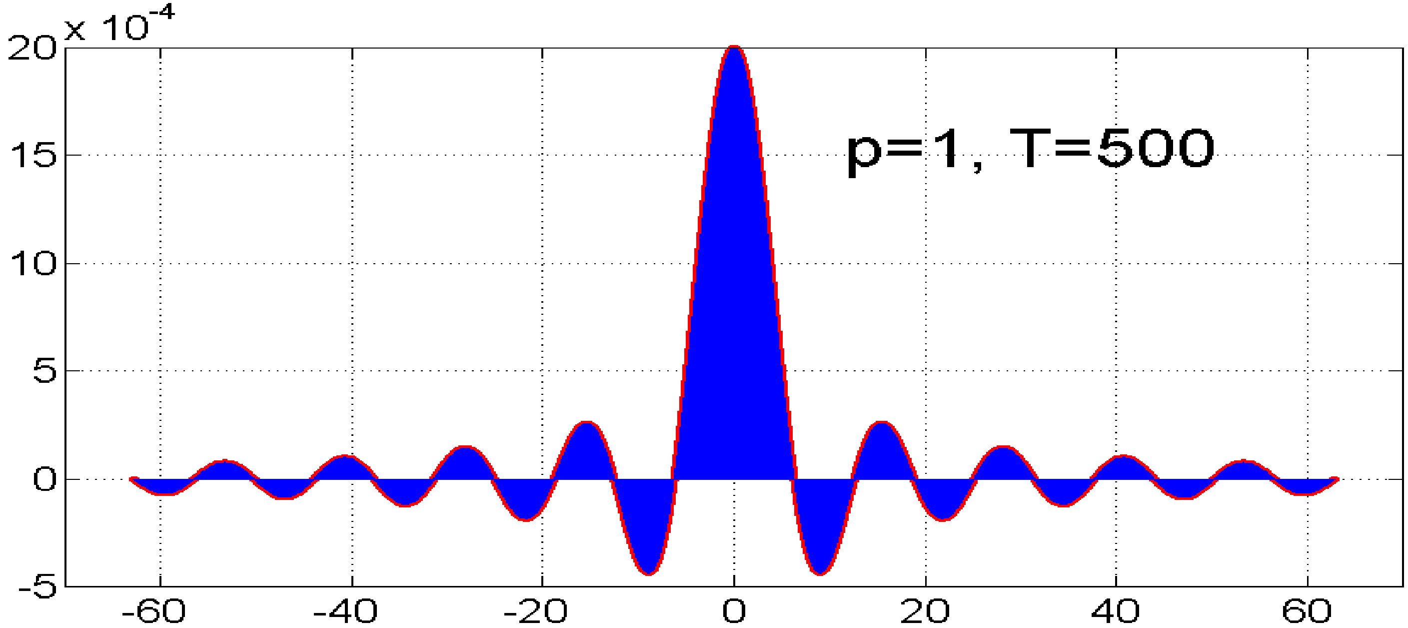


¿El espectro se "densifica?



Cuando T→∞, la función deja de ser periódica:

¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier? Si se hace T muy grande (T→∞), el espectro se vuelve *"continuo"*:



Espectro de frecuencia continuo

El razonamiento anterior nos lleva a reconsiderar la expresión de una función *f(t) no periódica* en el dominio de la frecuencia, **no como una suma de armónicos de frecuencia nw_0, sino como una función continua de la frecuencia w.**

Así, la serie:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

al cambiar la "variable discreta" nw_0 (cuando $T \to \infty$) por la variable continua w, se transforma en una *integral* de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t} d\omega$$

También se le conoce como la representación en integral de Fourier

La integral de Fourier

En la práctica ninguna amplitud de señal *f(t)* tiene a infinito, por consecuencia *ninguna* ***señal práctica*** puede tener un área infinita bajo su gráfica.

La integral de Fourier o la representación en integral de Fourier de *f* se define como la integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[A(\omega)cos(\omega t) + B(\omega)sen(\omega t)]d\omega \ldots (-\infty < t < \infty)$$

Donde:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)cos(\alpha\omega)d\alpha$$

$$\mathrm{B}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)sen(\alpha\omega)d\alpha$$

Integral de Fourier en Senos y Cosenos

Análogas a las de Series de Fourier de Senos y Cosenos, podemos desarrollar las integrales de Fourier en términos de estos.

Integral de Fourier en Cosenos

Sea f integrable en $[0,\infty)$, la integral de Fourier en cosenos de f en $[0,\infty)$ es:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega \;\text{ donde } A(\omega) = 2\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

Integral de Fourier en Senos

La integral de Fourier en senos es de f en $[0,\infty)$ es:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega t)\,d\omega \text{ donde } \mathrm{B}(\omega) = 2\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx$$

La integral de Fourier compleja

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_\omega e^{i\omega x}\, d\omega$$

Donde el coeficiente $\boldsymbol{C_\omega}$ esta dado por:

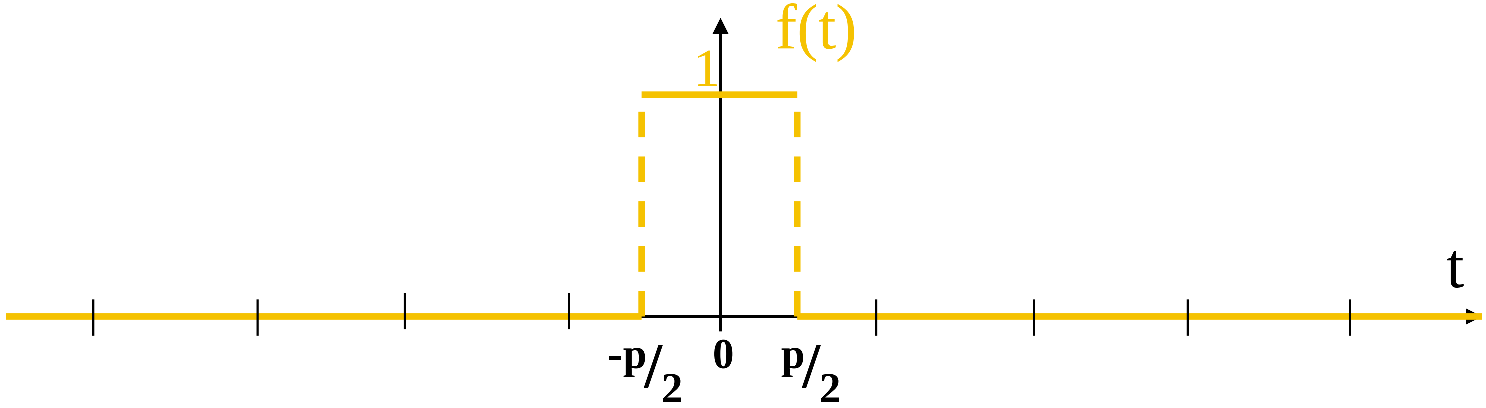
$$\boldsymbol{C_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega x} dt}$$

Transformada de Fourier

Esta expresión nos permiten calcular **F(w)** (dominio de la frecuencia) a partir de *f(t)* (dominio del tiempo).

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Calcular $F(\omega)$ para el pulso rectangular f(t) siguiente:



La función en el dominio del tiempo es:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & t<\frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2}<t \end{cases}$$

Integrando:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-p/2}^{p/2} e^{-i\omega t} dt$$

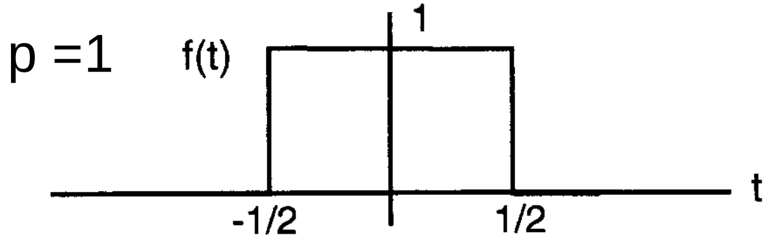
$$= \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-p/2}^{p/2} = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega p/2} - e^{i\omega p/2})$$

Usando la fórmula de Euler:

$$sen(\omega p/2) = \frac{e^{i\omega p/2} - e^{-i\omega p/2}}{2i}$$

$$F(\omega) = p \frac{sen(\omega p/2)}{\omega p/2} = p\,\mathrm{sinc}(\omega p/2)$$

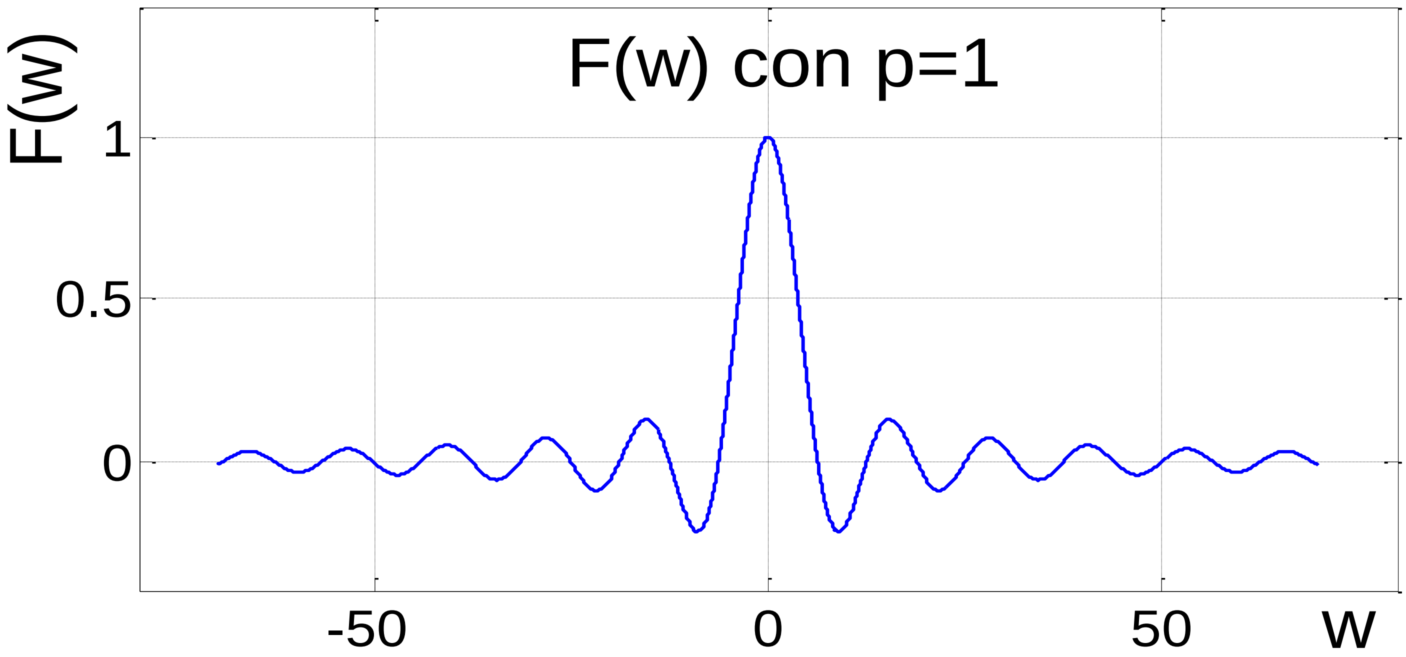
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$



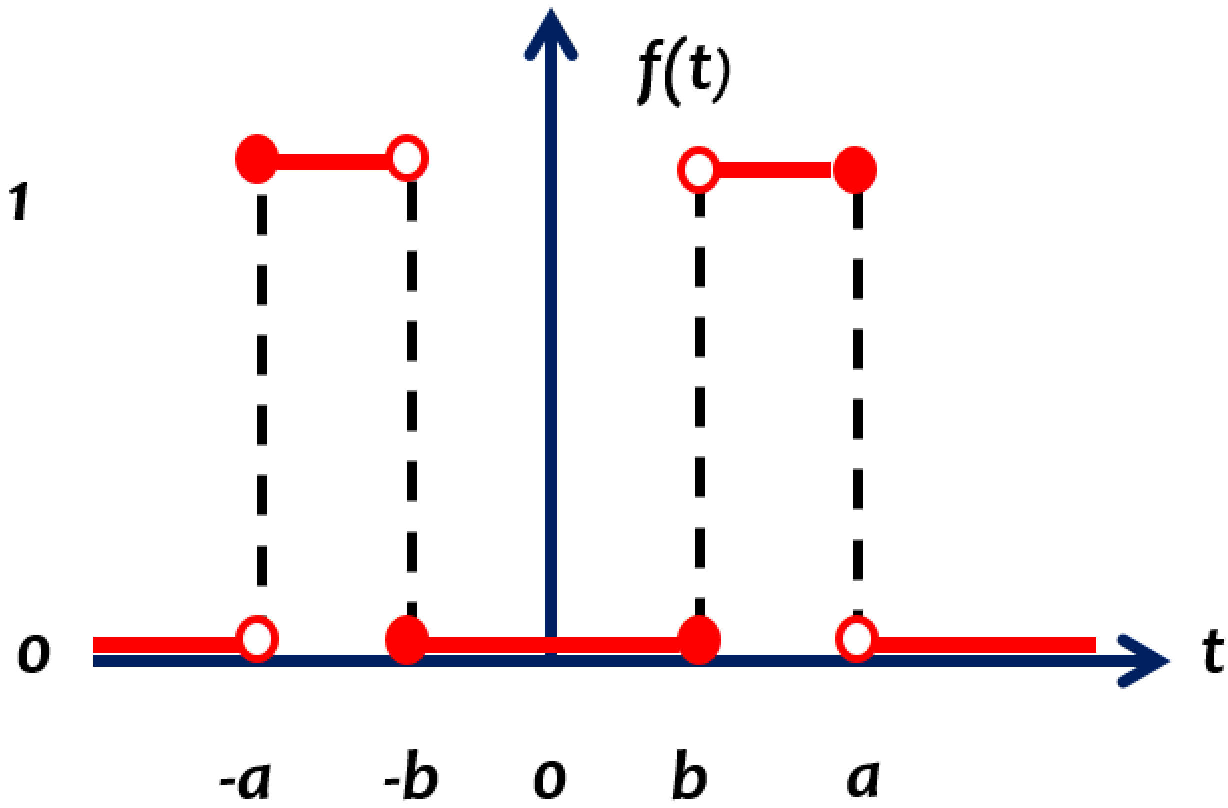
En forma gráfica,

la transformada es:

$$F(\omega) = p\,\mathrm{sinc}(\omega p / 2)$$



<u>**Obtener la transformada de Fourier de la siguiente función:**</u>



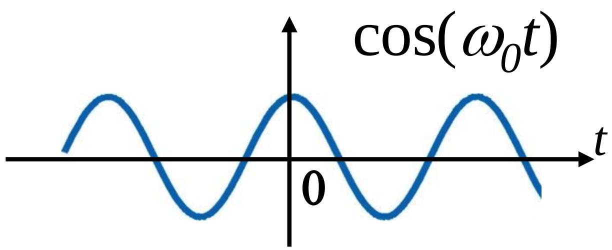
$F(\omega)$ de la función coseno

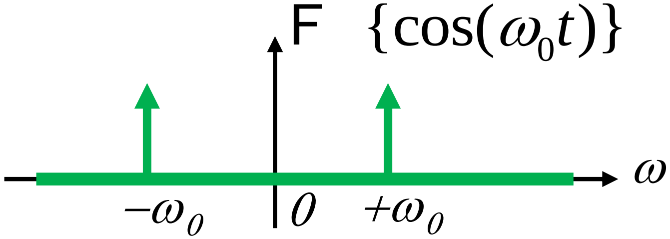
$$f(t) = \cos(\omega_0 t) \qquad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t} \right) dt =$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2\pi}{2} \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right]$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \pi \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right]}$$



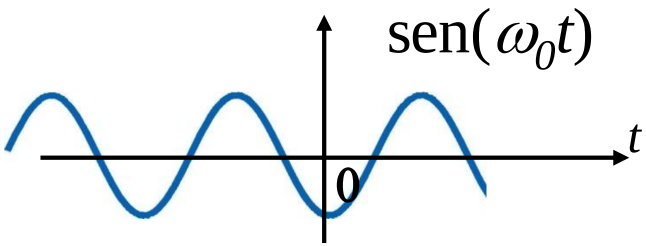


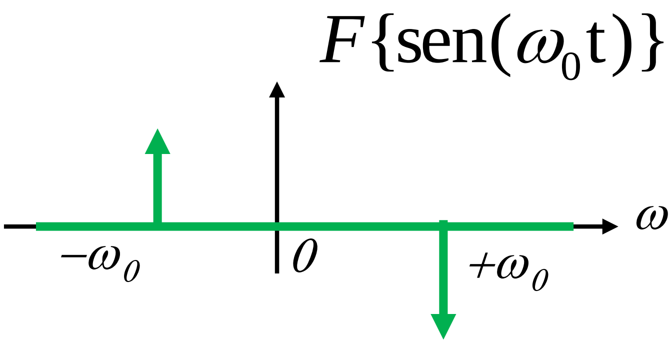
$F(\omega)$ de la función seno:

$$f(t) = sen(\omega_0 t) \qquad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} sen(\omega_0 t)\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \right) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} - e^{-i(\omega+\omega_0)t} \right) dt$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = i\pi\left[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right]}$$

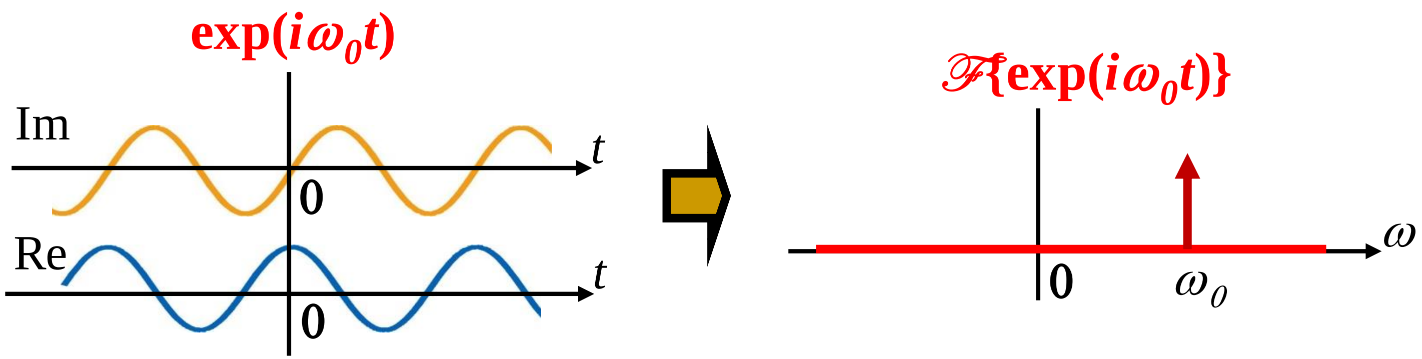




$F(\omega)$ DE LA ONDA PLANA EXP(IWo T)

$$F\{e^{i\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t}\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

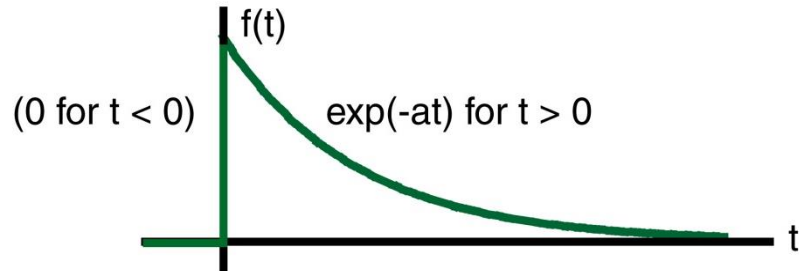
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$



La TF de $\exp(i\omega_0 t)$ es una frecuencia pura.

Encontrar $F(\omega)$ de la función:

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$



$$a>0$$

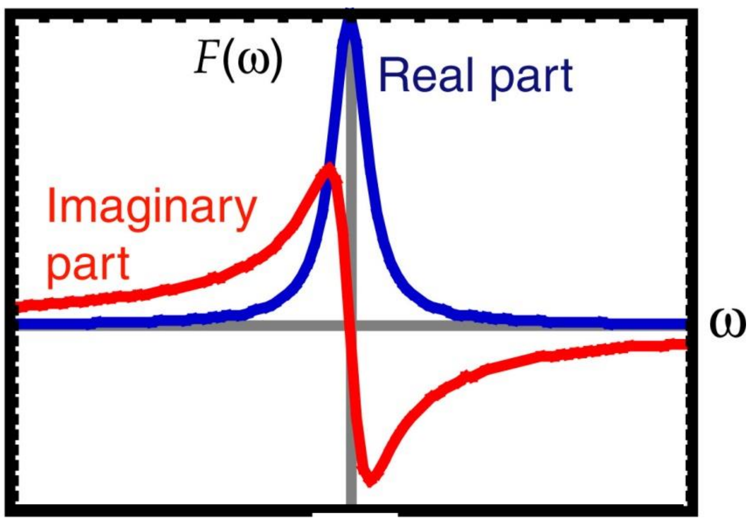
$$\hat{f}(\omega)=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt=$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\,dt=-\left.\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right|_0^{\infty}=$$

$$-\frac{1}{a+i\omega}(0-1)=\frac{1}{a+i\omega}=$$

$$\frac{1}{a+i\omega}\frac{a-i\omega}{a-i\omega}=$$

$$\frac{a}{a^2+\omega^2}-i\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

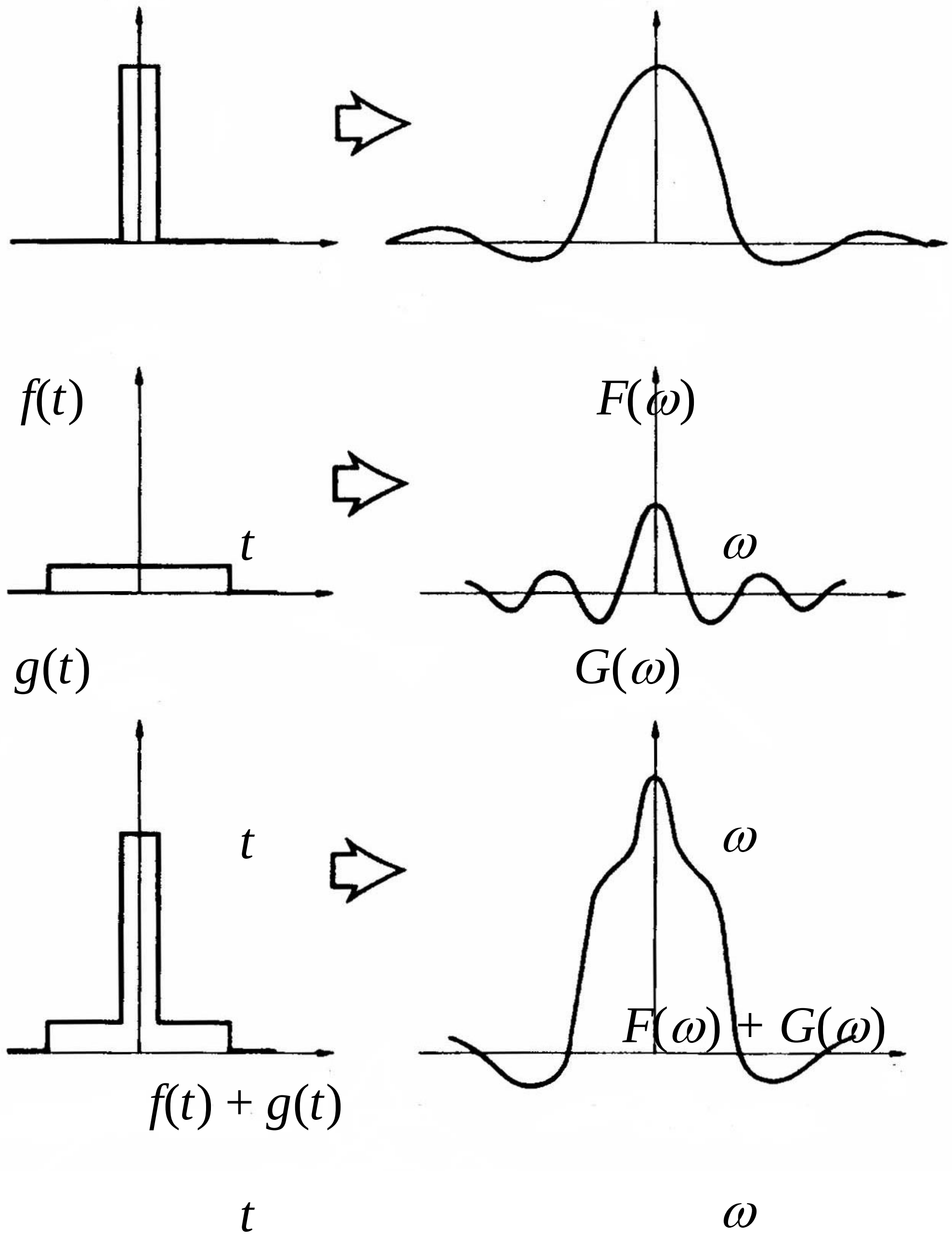


Propiedades de las transformadas de Fourier:

Linealidad:

$$\left.\begin{array}{l} f(t) \xleftrightarrow{F.T.} \hat{f}(\omega) \\ g(t) \xleftrightarrow{F.T.} \hat{g}(\omega) \end{array}\right\} \Rightarrow f(t)+g(t) \xleftrightarrow{F.T.} \hat{f}(\omega)+\hat{g}(\omega)$$

$$f(t) \xleftrightarrow{F.T.} \hat{f}(\omega) \Rightarrow (a+ib)f(t) \xleftrightarrow{F.T.} (a+ib)\hat{f}(\omega)$$



f(t)
F(ω)
t
ω
g(t)
G(ω)
t
ω
f(t) + g(t)
F(ω) + G(ω)
t
ω

Calcular $F(\omega)$ de la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases} 0 \ , \ |t|>\dfrac{a}{2} \\ 1 \ , \ \dfrac{b}{2}<|t|<\dfrac{a}{2} \\ 2 \ , \ |t|<\dfrac{b}{2} \end{cases} \ ; \ a>b>0$$

La función f(t) se puede escribir también del siguiente modo:

$$f(t)=g(t)+h(t)$$

$$donde \ \ g(t)=\begin{cases} 0 \ , \ |t|>\dfrac{a}{2} \\ 1 \ , \ |t|<\dfrac{a}{2} \end{cases} \ ; \ \ h(t)=\begin{cases} 0 \ , \ |t|>\dfrac{b}{2} \\ 1 \ , \ |t|<\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

Luego:

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega) + \hat{h}(\omega)$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\omega a}{2}\right)}{\dfrac{\omega a}{2}} + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\omega b}{2}\right)}{\dfrac{\omega b}{2}}}$$

Traslación en el dominio de tiempos

$$\boxed{f(t) \xleftrightarrow{F.T.} \hat{f}(\omega) \Rightarrow f(t+a) \xleftrightarrow{F.T.} e^{i\omega a}\,\hat{f}(\omega)}$$

$$f(t+a) = g(t)$$

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega(u-a)}\, du \quad = e^{i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\omega u}\, du$$

$$\hat{g}(\omega) = e^{i\omega a}\,\hat{f}(\omega)$$

Escalado

$$\boxed{F\{f(at)\} = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

$$F\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$$

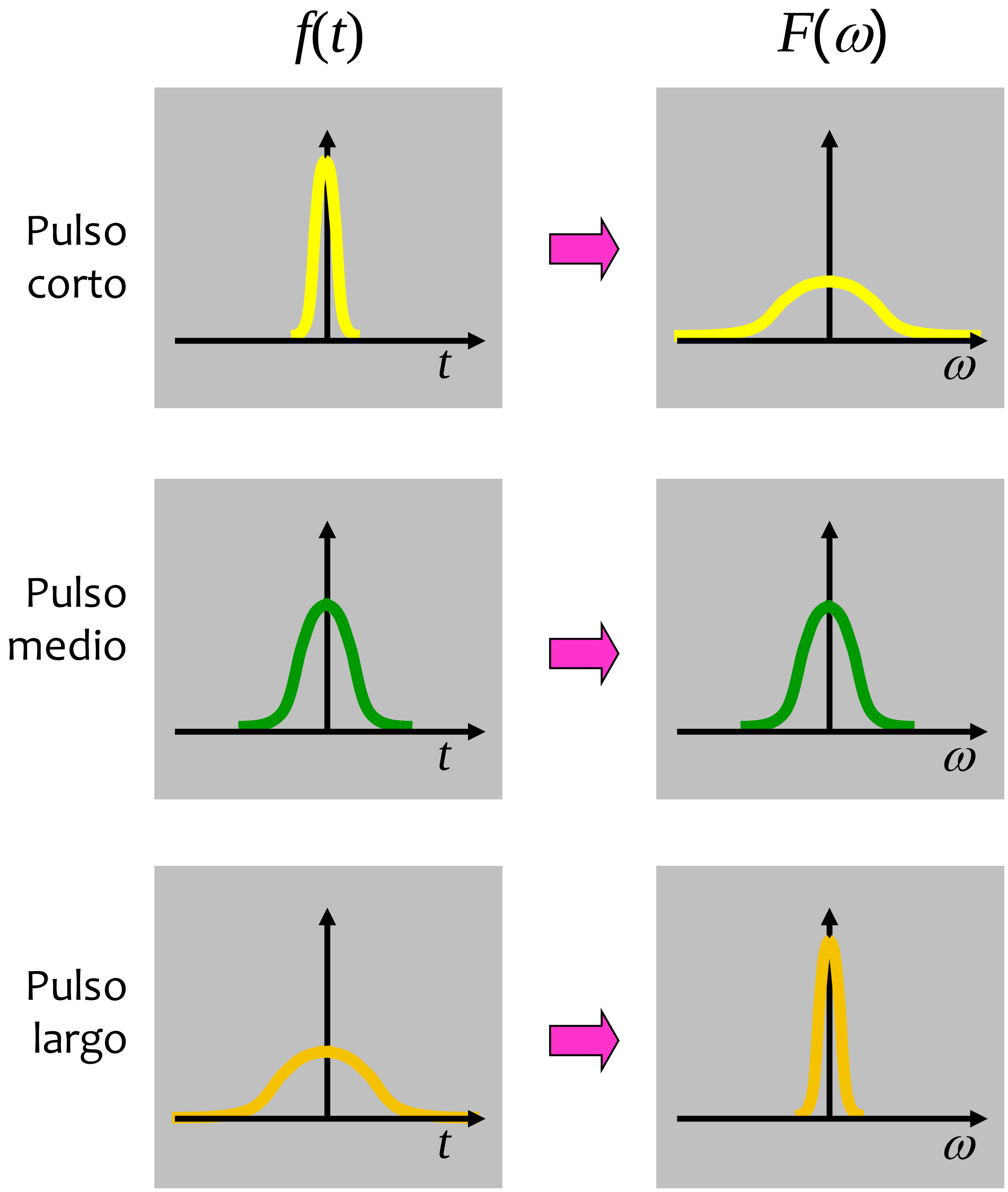
$$F\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt =$$

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}(at)}d(at) =$$

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\frac{\omega}{a}t'}dt' = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

EFECTO DE LA PROPIEDAD DE ESCALADO

Mientras más corto es el pulso, más ancho es el espectro.



Transformadas de Fourier de funciones pares, *f(t) = f(-t)*:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \;= \left[\int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right]$$

$$\hat{f}(\omega) = \left[\int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right] = \int_{0}^{\infty} f(t) \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) dt$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt}$$

Transformadas de Fourier de funciones impares, *f(t) = -f(-t):*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad = \left[\int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right]$$

$$\hat{f}(\omega) = \left[\int_{0}^{\infty} - f(t)\, e^{i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right] = \int_{0}^{\infty} f(t) \left(-e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) dt$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = 2i \int_{0}^{\infty} f(t)\, sen(\omega t)\, dt}$$