Ejercicios Distribuciones de muestreo

2. Cierta población tiene media y desviación estándar iguales a 500 y 30, respectivamente. Se seleccionan muchas muestras de tamaño 36 y se calculan las medias.

a) ¿Qué valor es de esperar que tenga la media de todas esas medias muestrales?

b) ¿Qué valor se esperaría para la desviación estándar de todas las medias muestrales?

c) ¿Qué forma es de esperar que tenga la distribución de todas las medias muestrales?

4.-Los 25 estudiantes del grupo 31 de Inferencia Estadística tiran al aire una moneda 16 veces. Sea *X* el número de caras obtenidas por cada estudiante. ¿Cuál es la probabilidad de que el número promedio de caras para los 25 estudiantes se halle entre 7.5 y 8.5?

Resolución:

El resultado de los 16 lanzamientos de cada estudiante es una variable aleatoria binomial

Sean:
m=16 el número de lanzamientos de cada estudiante
n=25 estudiantes
X_j=Número de caras obtenidas por el estudiante j,
Donde X_j tiene distribución binomial, con parámetros m=16 y p=0.5

$$\mu = E[X_j] = m * p = 16 * 0.5 = 8$$
$$\sigma^2 = V[X_j] = n * p * q = 16 * 0.5 * 0.5 = 4$$

El resultado del promedio del número de caras obtenidas por los 25 estudiantes puede considerarse como una muestra aleatoria de tamaño n=25

Sea $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ el número promedio de caras obtenidas por los 25 estudiantes

Método a) usando una distribución de muestreo exacta

Hagamos: $n\bar{X} = \sum_{j=1}^{n} x_j$

Como cada X_j Tiene distribución binomial, la variable Y, que es la suma de ellas, también tiene distribución binomial, con parámetros n*m=400 y p=0.5

$$Y = n\bar{X} \sim Binomial(n * m = 400; p = 0.5)$$

En el enunciado se pide: $P(7.5 \leq \bar{X} \leq 8.5)$, que es equivalente a $P(7.5n \leq n\bar{X} \leq 8.5n)$
Sustituyendo n=25:

$$P(187.5 \leq Y \leq 212.5)$$

Utilizando la distribución binomial acumulativa se tiene que:

$$P(187.5 \leq Y \leq 212.5) = P(Y \leq 212.5) - P(Y < 187.5) = 0.78875$$

Método b) Utilizando el teorema del límite central.

Ejercicios Distribuciones de muestreo

Aunque el tamaño de la muestra es 25 y no se cumple con el mínimo de 30 para usar el teorema, veremos que se obtiene un resultado muy aproximado.

Se tiene: $\mu_{\bar{X}} = E[\bar{X}] = \mu = 8$ y $\sigma_{\bar{X}}^2 = V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{25} = 0.16$

Según el teorema del límite central tiene distribución aproximadamente normal, con media 8 y varianza 0.16, así que, la variable aleatoria Z tiene distribución aproximadamente normal estándar.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2}} \qquad \text{también} \qquad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$P(7.5 \leq \bar{X} \leq 8.5) = P\left(\frac{7.5 - 8}{\frac{2}{\sqrt{25}}} \leq Z \leq \frac{8.5 - 8}{\frac{2}{\sqrt{25}}}\right) = P(-1.25 \leq Z \leq 1.25)$$
$$= 0.78870$$

6. Un fabricante de lámparas eléctricas, proveedor de la FI, asegura que su producto tiene una duración promedio de 700 horas con una desviación estándar de 120 horas. Se realizó la compra de 150 lámparas con la intención de hacer un gran pedido, si la vida útil del promedio de la muestra es superior a 680 horas. ¿Cuál es la probabilidad de realizar el pedido al fabricante?

8. Se sacan dos muestras aleatorias independientes de 64 observaciones cada una, de dos poblaciones normales con las mismas medias y desviaciones estándar de 6.40 y 7.20, respectivamente. Calcular la probabilidad de que la diferencia en valor absoluto entre las medias de las muestras exceda 0.6.

10. Un ingeniero industrial quiere verificar la variabilidad de un equipo diseñado para medir el volumen de una fuente de audio frecuencia. Tres mediciones independientes registradas con el equipo fueron 4.1, 5.2 y 10.2. Calcular *a* y *b* tales que $P(a < S^2 < b) = 0.9$ si se sabe que $\sigma^2 = 5.5$

12. La resistencia a la tensión para cierto tipo de alambre se distribuye normalmente con media μ y variancia σ^2 . Se seleccionaron seis segmentos al azar de alambre de un rollo grande y se midió *i Y* , la resistencia a la tensión para el segmento *i* , en donde *i* = 1, 2, 3, 4, 5, 6 La media de la población μ y la variancia de la población σ 2 se pueden estimar por *Y* y *S* 2 ,
respectivamente. Calcular la probabilidad aproximada de que *Y* esté a lo más 2*S n* de la verdadera media de la población.

14. Previo a una elección la senadora *X* contrata los servicios de la compañía *Y* para fijar la contienda establecida con los electores. Ella percibe con respecto a este punto que si tiene el 45% de los votos será nominada de cuerdo con su estrategia de campaña. Supóngase que la compañía contratada selecciona una muestra aleatoria simple de 1600 electores registrados. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra pueda producir una proporción de 45% o más dado que la verdadera proporción es del 40%?

Ejercicios Distribuciones de muestreo

18.-
a) Calcular para una distribución N(0,1), el punto que deja a la derecha una cola de probabilidad 0.05.
b) Calcular para una distribución t de Student, la probabilidad de que la variable tome un valor a la derecha de ese punto. Tomar como grados de libertad sucesivamente v1 = 10 y 1 v = 500

20. Se ha determinado que 60% de los estudiantes de la DCB fuman cigarrillos. Se toma una muestra aleatoria de 800 estudiantes. Calcular la probabilidad de que la proporción de la muestra de la gente que fuma cigarrillos sea menor que 0.55

Resolución:

La proporción poblacional es $\mathrm{p} = 0.6$, denotemos con $\hat{p}$ la proporción en la muestra; se pide $P(\hat{p} < 0.55)$ con n=800. Como la muestra es grande, se sabe que la variable aleatoria Z tiene distribución aproximadamente normal estándar, donde

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

$$P(\hat{p} < 0.55) = P\left(Z < \frac{0.55 - 0.6}{\sqrt{\frac{0.6 * 0.4}{800}}} \right) = P(z < -2.326) = 0.0019$$

22. Se sabe que la verdadera proporción de los componentes defectuosos fabricados por una firma es de 4%, y calcular la probabilidad de que una muestra aleatoria de tamaño 60 tenga:
a) Menos del 3% de los componentes defectuosos.
b) Más del 1% pero menos del 5% de partes defectuosas.

24. Si una población normal tiene desviación estándar igual a 25 unidades, cuál es el error estándar de la media muestral, al utilizar muestras de tamaño: 16, 25, 50 y 100

26. Se aceptará un cargamento de barras de acero para el laboratorio de manufactura si la resistencia media a la ruptura de una muestra aleatoria de 10 barras es mayor que **235** libras por pulgada cuadrada. Por experiencia se sabe, la resistencia media a la ruptura de tales barras ha tenido promedio y desviación estándar iguales a **240** y 40, respectivamente.
a) Supóngase que la resistencia a la ruptura está distribuida normalmente, ¿cuál es la probabilidad de que una barra seleccionada aleatoriamente tenga una resistencia en el intervalo de 245 a 255?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el cargamento que llega al laboratorio sea aceptado?

28. El Coordinador de Ciencias Aplicadas, desea recabar información sobre la proporción de alumnos a los que no les agrada una nueva política respecto a la aceptación de alumnos irregulares. ¿Cuántos alumnos debe incluir en una muestra si desea que la fracción de la muestra se desvíe a lo más en 0.15 de la verdadera fracción, con una probabilidad de 0.98?

Resolución:

Se desea encontrar n tal que $P(|\hat{p}-p|< 0.15) = 0.98$; que también se puede escribir como $P(-0.15 < \hat{p}-p < 0.15) = 0.98$;

Se sabe que $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ tiene distribución normal estándar

y hagamos $E = |\hat{p}-p| = 0.15$

$P(-E < \hat{p}-p < E) = 0.98$;

$P(\frac{-E}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{E}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}) = 0.98$; entonces: $P(\frac{-E}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < Z < \frac{E}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}) = 0.98$;

Si $Z\alpha/_2 = \frac{E}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ de la expresión anterior despejamos n tenemos: $n = \frac{Z\alpha/_2{}^2 pq}{E^2}$

donde α=0.98, α =0.02 y α /2=0.01 en tablas encontramos $Z_{0.01} = 2.326$

se desconoce p, pero si se usa p=0.5 se garantiza que p*q tendrá el mayor valor y entonces:

$$n = \frac{2.326^2(0.5)(0.5)}{0.15^2} = 60.11$$

Se deberá tomar una muestra de al menos 11 alumnos.

Ejercicios Distribuciones de muestreo

30. En un estudio para comparar los pesos promedios de niños y niñas de sexto grado en una escuela primaria se usará una muestra aleatoria de 20 niños y otra de 25 niñas. Se sabe que tanto para niños como para niñas los pesos siguen una distribución normal. El promedio de los pesos de todos los niños de sexto grado de esa escuela es de 100 libras y su desviación estándar es de 14.142 libras, mientras que el promedio de los pesos de todas las niñas de sexto grado de esa escuela es de 85 libras y su desviación estándar es de 12.247 libras.
¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de los pesos de los 20 niños sea al menos 20 libras más grande que el de las 25 niñas?

32. Un fabricante de bombillas afirma que sus productos durarán un promedio de 500 horas de trabajo. Para conservar este promedio esta persona verifica 25 focos cada mes. Si el valor y calculado cae entre –t 0.05 y t 0.05, él se encuentra satisfecho con esta afirmación. ¿Qué conclusión deberá él sacar de una muestra de 25 focos cuya duración fue?

520 521 511 513 510 513 522 500 521 495 496 488 500
502 512 510 510 475 505 521 506 503 487 493 500