Método de Diferencias Finitas
para
Ecuaciones en Derivadas Parciales

Ecuaciones Elípticas y Parabólicas

Introducción

- Una ecuación diferencial en la que aparecen dos o más variables independientes se llama *ecuación en derivadas parciales (EDP)*.

- EDP de orden 2, lineal y de coeficientes constantes:

$$A.\mathbf{u}_{xx}+B.\mathbf{u}_{xy}+C.\mathbf{u}_{yy}+D.\mathbf{u}_{x}+E.\mathbf{u}_{y}+F.\mathbf{u}=G$$

$$\mathbf{u}_{xx}=\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}^2},\ \mathbf{u}_{xy}=\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{y}},\ \mathbf{u}_{yy}=\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}^2},\mathbf{u}_{x}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}},\mathbf{u}_{y}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y},\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

- Clasificación:
  - Si $B^2 - 4.A.C < 0$, la ecuación se llama *elíptica*
  - Si $B^2 - 4.A.C = 0$, la ecuación se llama *parabólica*
  - Si $B^2 - 4.A.C > 0$, la ecuación se llama *hiperbólica*

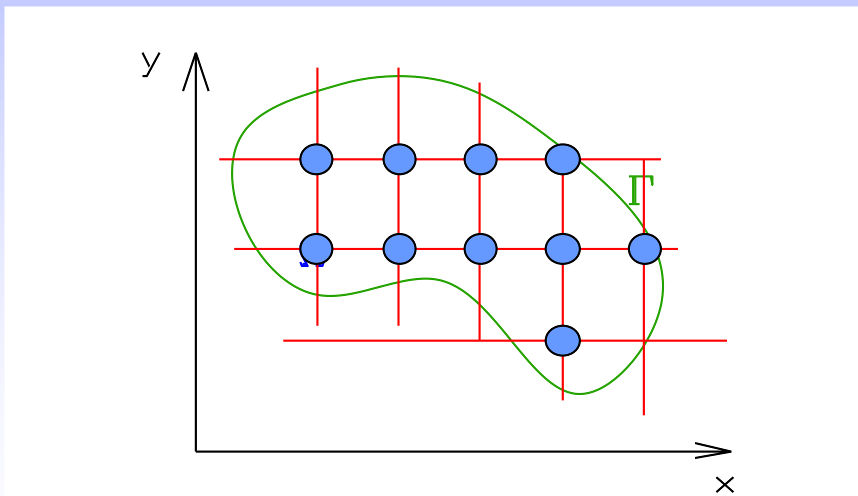
EDP Elípticas

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \begin{cases} f = 0 : \text{Laplace} \\ f \neq 0 : \text{Poisson} \end{cases}$$

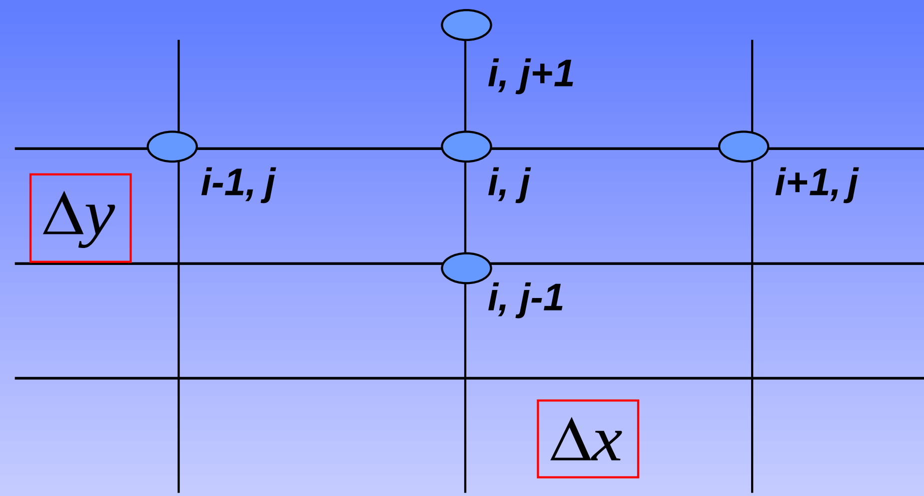
Solución Numérica de la Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Dominio de la solución



Diferencias Finitas



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2.u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2.u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2.\Delta x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2.\Delta y}$$

Aproximación por diferencias finitas para la solución de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2.u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

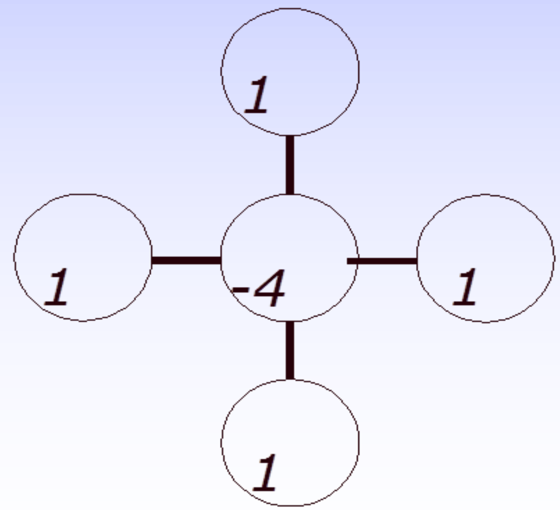
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2.u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{u_{i-1,j} - 2.u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2.u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

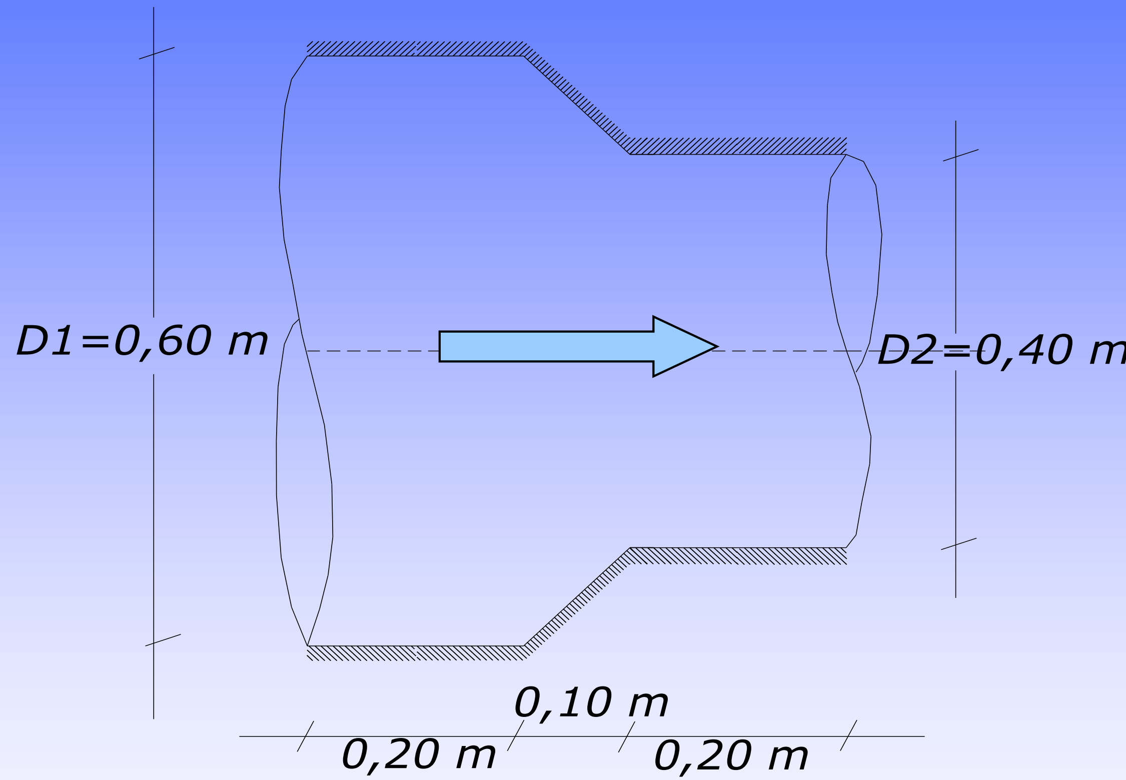
para una malla de cuadrados resulta $\Delta x = \Delta y$

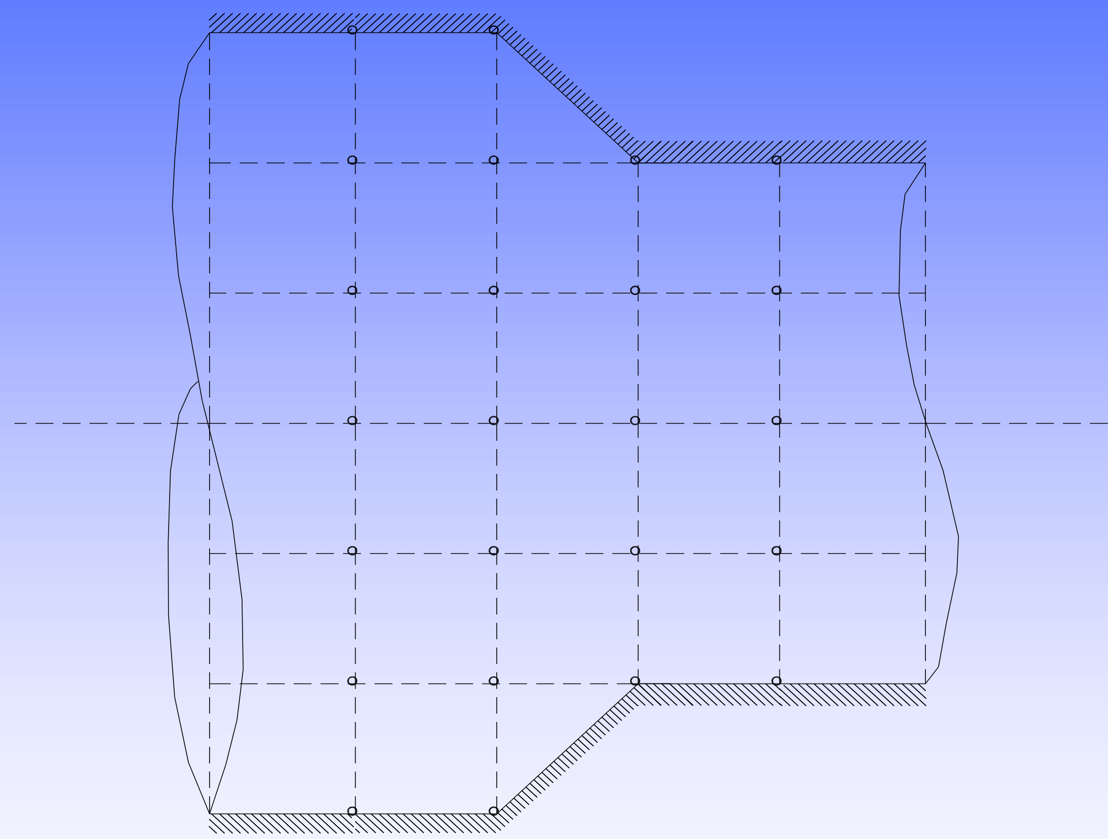
$$\Rightarrow u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4.u_{i,j} = 0$$

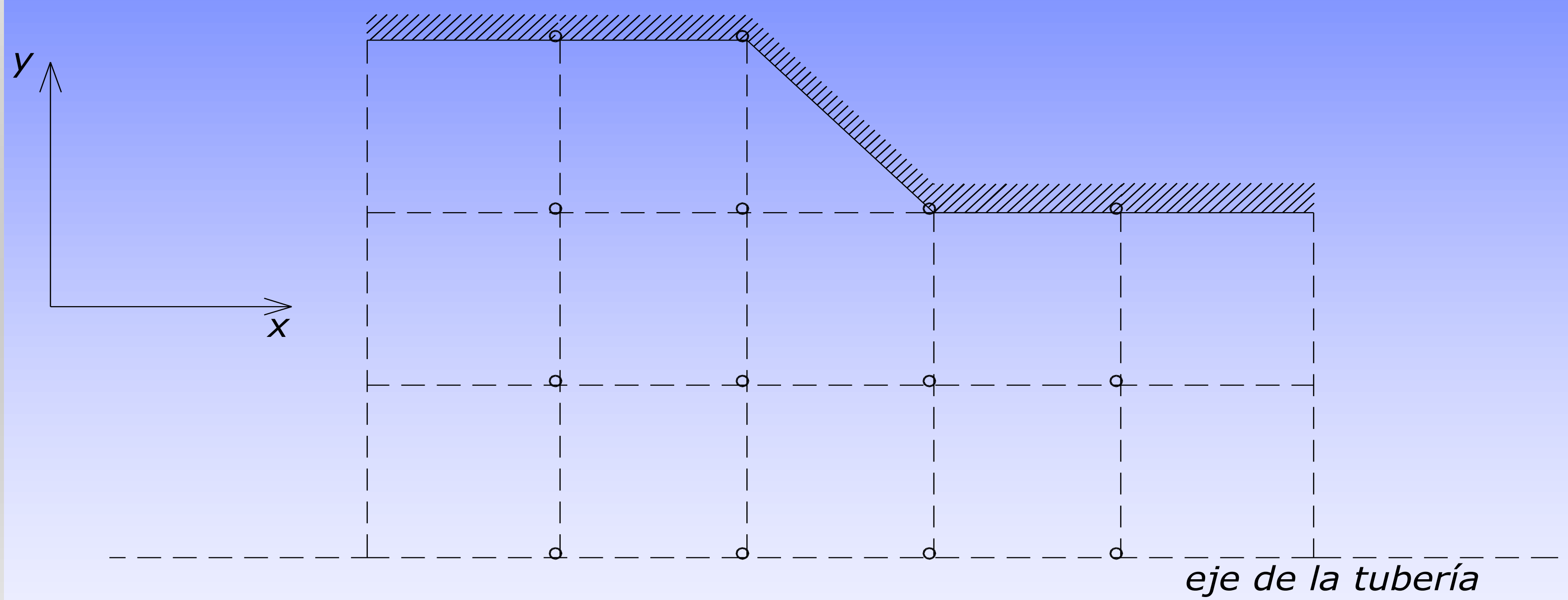
Esta ecuación puede representarse en forma gráfica mediante el siguiente «Stencil»:

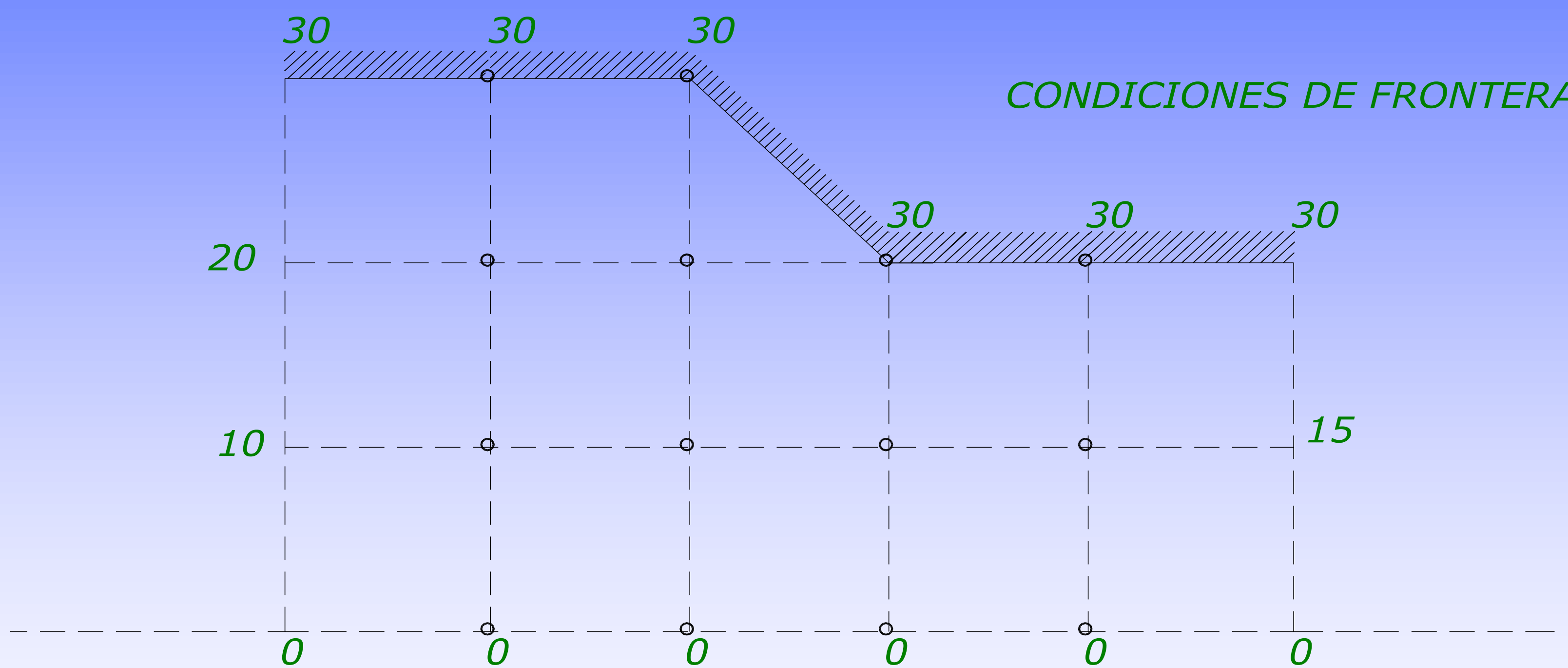


Ejemplo: cálculo de las líneas de corriente del escurrimiento fluido

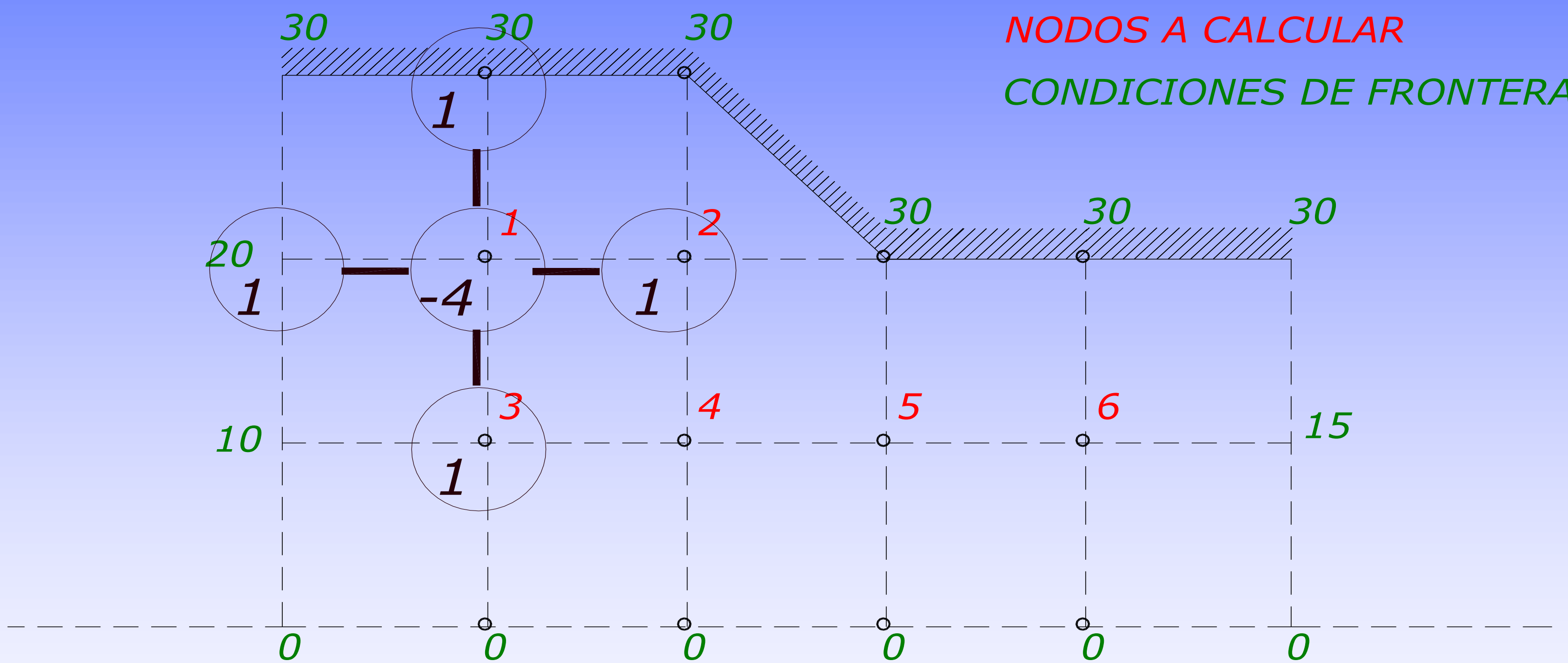





y
x
eje de la tubería


CONDICIONES DE FRONTERA
30
30
30
30
30
30
20
10
15
0
0
0
0
0
0

SUCESIVAS POSICIONES DEL OPERADOR



$$30+u_2+u_3+20-4u_1=0 \quad 30+30+u_4+u_1-4u_2=0$$

$$u_1+u_4+0+10-4u_3=0 \quad u_2+u_5+0+u_3-4u_4=0 \quad 30+u_6+0+u_4-4u_5=0 \quad 30+15+0+u_5-4u_6=0$$

Sistema de Ecuaciones Resultante

$$30 + u_2 + u_3 + 20 - 4.u_1 = 0$$

$$30 + 30 + u_4 + u_1 - 4u_2 = 0$$

$$u_1 + u_4 + 0 + 10 - 4u_3 = 0$$

$$u_2 + u_5 + 0 + u_3 - 4u_4 = 0$$

$$30 + u_6 + 0 + u_4 - 4u_5 = 0$$

$$30 + 15 + 0 + u_5 - 4u_6 = 0$$

Formulación Matricial del Sistema denominando u=**Y**

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -60 \\ -10 \\ 0 \\ -30 \\ -45 \end{bmatrix}$$

Sistema de Ecuaciones Resultante

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -60 \\ -10 \\ 0 \\ -30 \\ -45 \end{bmatrix}$$

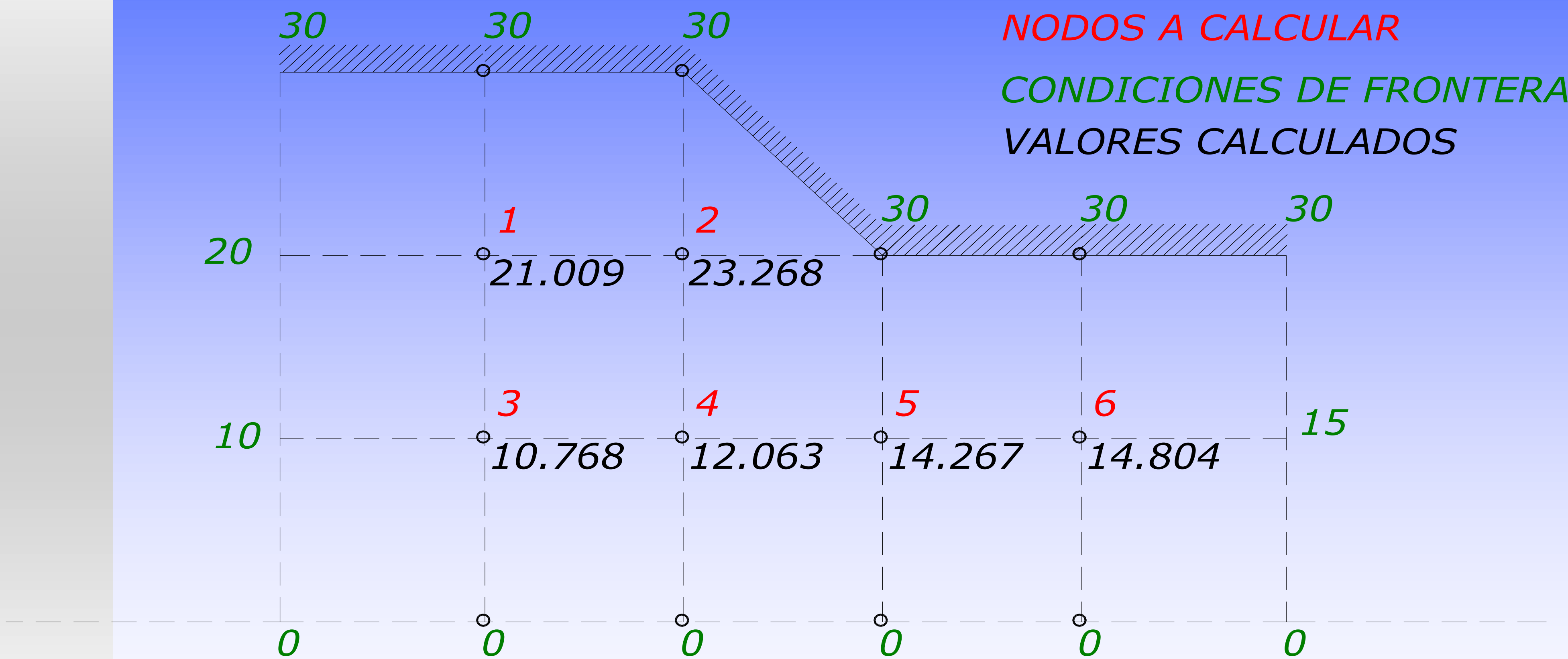
Resolución del Sistema en MATLAB

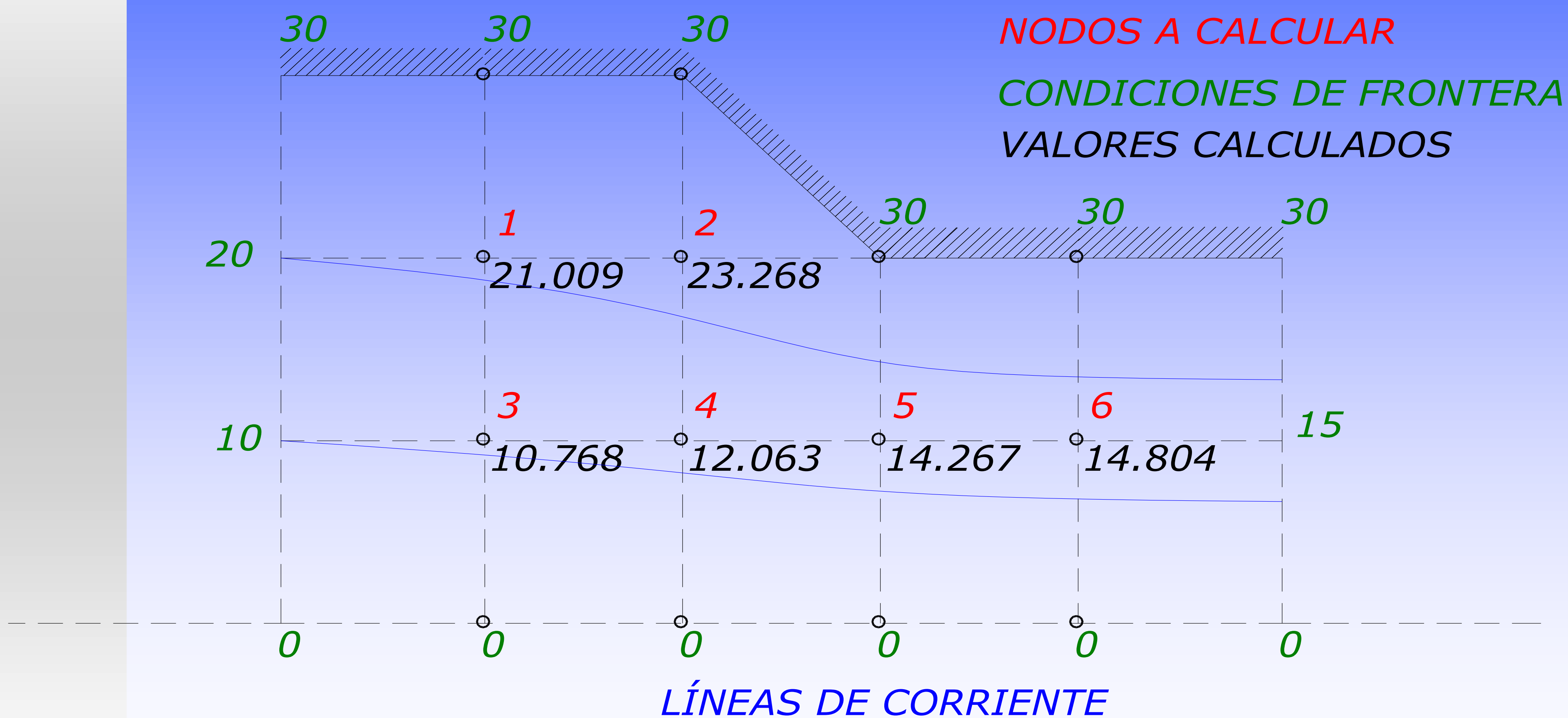
```
>> A=[-4 1 1 0 0 0;1 -4 0 1 0 0; 1 0 -4 1 0 0;0 1 1 -4 1 0;0 0 0 1 -4 1; 0 0 0 0 1 -4]

A =

    -4     1     1     0     0     0
     1    -4     0     1     0     0
     1     0    -4     1     0     0
     0     1     1    -4     1     0
     0     0     0     1    -4     1
     0     0     0     0     1    -4

>> b=[-50;-60; -10; 0; -30; -45]

b =

   -50
   -60
   -10
     0
   -30
   -45

>> psi=inv(A)*b

psi =

   21.0090
   23.2681
   10.7681
   12.0633
   14.2169
   14.8042
0
```

Solución del Sistema de Ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 = 21.009 \\ \Psi_2 = 23.268 \\ \Psi_3 = 10.768 \\ \Psi_4 = 12.063 \\ \Psi_5 = 14.267 \\ \Psi_6 = 14.804 \end{bmatrix}$$

Valores de la función de corriente Y en la grilla discreta




NODOS A CALCULAR
CONDICIONES DE FRONTERA
VALORES CALCULADOS
30
30
30
30
30
30
1
2
20
21.009
23.268
3
4
5
6
15
10
10.768
12.063
14.267
14.804
0
0
0
0
0
0
LÍNEAS DE CORRIENTE

EDP parabólicas

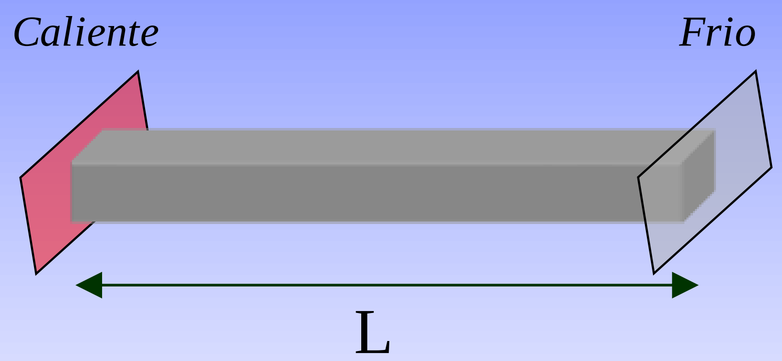
- Las ecuaciones parabólicas se emplean para caracterizar problemas dependientes del tiempo y el espacio

- Un ejemplo:

ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN DE CALOR

Ecuación de Conducción del Calor

Se puede usar la conservación de calor para desarrollar un balance de energía en un elemento diferencial de una barra larga y delgada aislada, considerando la cantidad de calor que se almacena en un periodo de tiempo Δt



Se llega a:

$$\boxed{\mathbf{u_t} - \alpha\, \mathbf{u_{xx}} = 0}$$

en la que **a** es el coeficiente de difusividad térmica, que depende del material de la barra

Para unas dadas **condiciones iniciales y de contorno** la solución de esta EDP parabólica permite conocer la temperatura en cualquier posición de la barra y para cualquier instante : **u(x,t)**
con $\mathbf{0 < x < L}$; $\mathbf{t > 0}$

Condición Inicial

- Temperatura de la barra para t=0

$$u(x, 0) = f(x)$$

(constante o función de la posición)

Condiciones de Contorno

- Temperatura de la barra en los extremos x=0 ; x=L

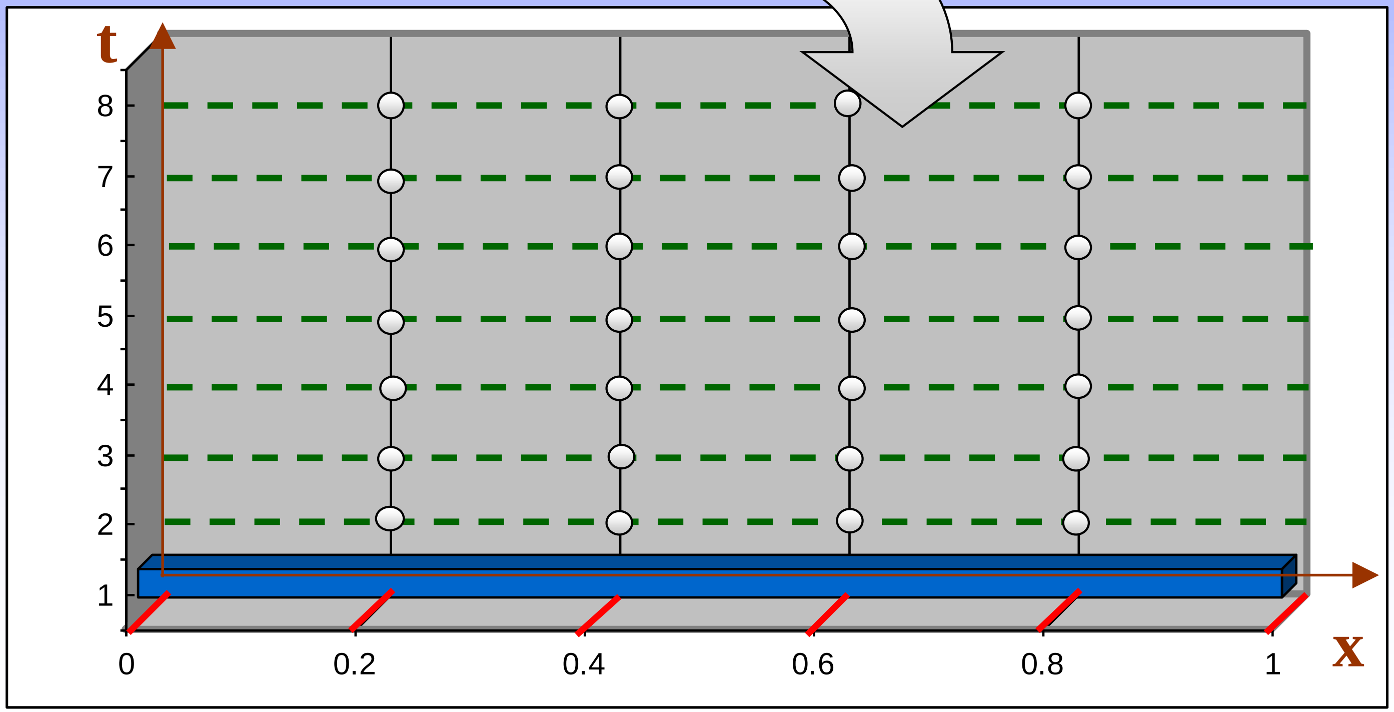
$$u(0, t) = T_0 \qquad u(L, t) = T_L$$

Solución Numérica de la Ecuación del Calor

Encontraremos la **solución aproximada** de $\mathbf{u}_t - \alpha\, \mathbf{u}_{xx} = 0$

- Para **algunos puntos del dominio**
  - -algunas secciones de la barra
  - -algunos instantes

Discretización del dominio



Método de Diferencias finitas

- Discretización del dominio (Grilla Discreta)
- Condiciones de Contorno e Iniciales en el Dominio Discretizado
- Reemplazo de las derivadas parciales de la EDP por sus aproximaciones numéricas. Se obtiene una Ecuación en Diferencias (ED)

EDP $\Rightarrow$ **ED**

- Aplicación de la ED a los puntos de la Grilla Discreta

Convergencia Consistencia y Estabilidad

- EDP $F(x,y,u)=0$ Solución: $u(x,y)$
- ED $G_{i,j}(h,k,\tilde{u})=0$, para cada (i,j) $\tilde{u}_{h,k}(x_i,y_j)$
- Convergencia $$\boxed{\tilde{u}_{h,k}(x_i,y_j) \xrightarrow[h,k\to 0]{} u(x_i,y_j)}$$
- Consistencia $$\boxed{G_{i,j}(h,k,\tilde{u}) \xrightarrow[h,k\to 0]{} F(x,y,u)}$$
- Estabilidad: la diferencia entre la solución numérica y la solución exacta tiende a cero a medida que avanza el cálculo con una cantidad de pasos tendiente a infinito

Discretización del Dominio

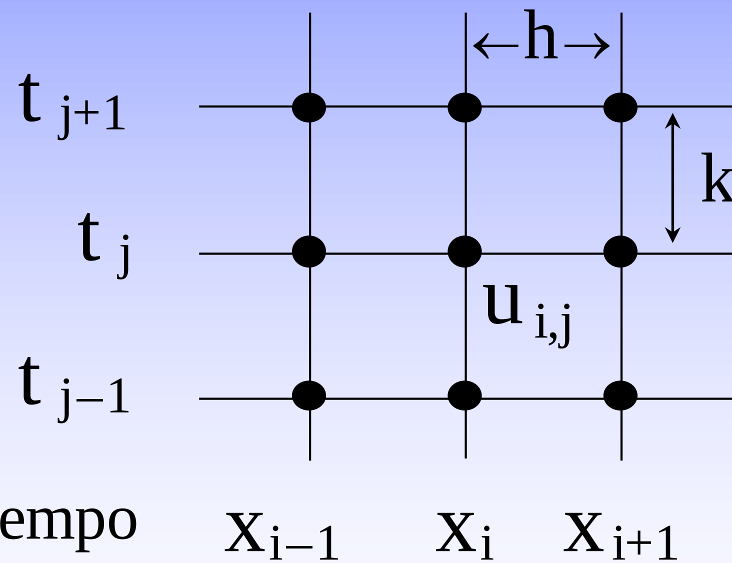
Para elegir los puntos en los cuales calcularemos la solución aproximada de la EDP

-Particionamos el espacio

secciones de la barra

separadas una distancia h=Dx

$x_i = i \,.\, h \quad , \quad i=0,\, 1,\, \ldots m$



-Elegimos una partición para el tiempo

k=Dt

$t_j = j \,.\, k \quad , \quad j=0,\, 1,\, \ldots n$

Aproximaciones Numéricas de las derivadas parciales de la EDP

- Derivada parcial primera
  - Hacia adelante

$$u_t(x_i,t_j) \cong \frac{u(x_i,t_j+k)-u(x_i,t_j)}{k} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} \quad error \quad O(k)$$

  - Hacia atrás

$$u_t(x_i,t_j) \cong \frac{u(x_i,t_j)-u(x_i,t_j-k)}{k} = \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k} \quad error \quad O(k)$$

Aproximaciones Numéricas de las derivadas parciales de la EDP

- Derivada parcial segunda

  - Centrada

$$u_{xx}(x,t) \cong \frac{u(x-h,t)-2u(x,t)+u(x+h,t)}{h^2} = \frac{u_{i-1,j}-2.u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}$$

$$error \qquad O(h^2)$$

Ecuación del Calor. Método Explícito

- Derivada Primera : hacia delante
- Derivada Segunda: centrada
- Ecuación en diferencias

$$\boxed{\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}-\alpha\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}=0}$$

Error O(k+h²)

$$multiplicando \quad por \quad k:$$

- parámetro de Courant

$$u_{i,j+1}-u_{i,j}-\frac{\alpha .k}{h^2}.(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})=0$$

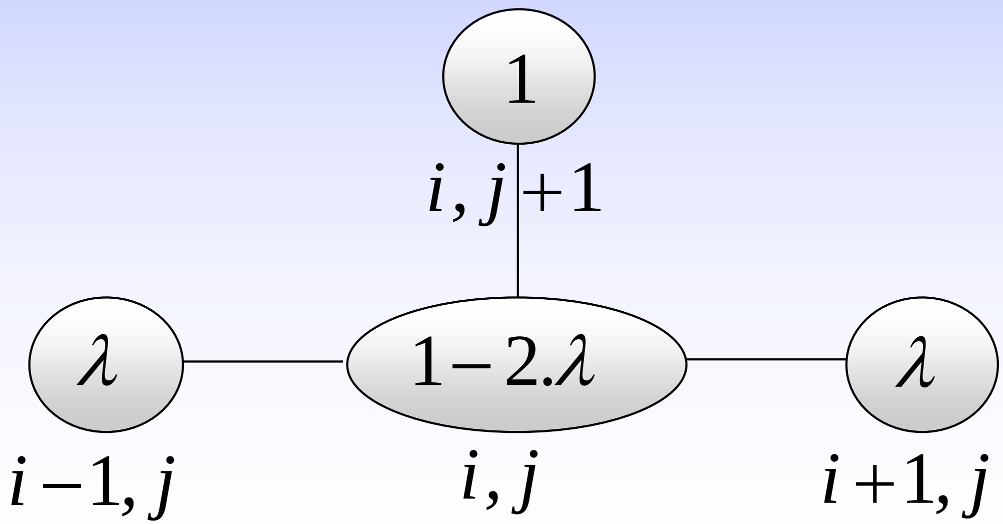
Ecuación del Calor. Método Explícito

- Ecuación en diferencias

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} - \lambda.(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = 0$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j}(1 - 2.\lambda) + \lambda.u_{i+1,j} + \lambda.u_{i-1,j}$$

- Stencil



Estabilidad Numérica del Método Explícito

- El método explícito se puede expresar en forma matricial:

$$\mathbf{w}^{(j)} = \mathbf{A}\,.\mathbf{w}^{(j-1)}$$

con $\mathbf{w}^{(j)}$: conjunto de las aproximaciones u para el paso del tiempo j.

$\mathbf{w}^{(j-1)}$: conjunto de las aproximaciones u para el paso del tiempo j-1

A : matriz tridiagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & & & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda & (1-2\lambda) & \lambda \\ 0 & & & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

Estabilidad Numérica del Método Explícito

- Para que el Método sea estable debe cumplirse que el radio espectral $\rho(A) \leq 1$

Esto es equivalente a que $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$

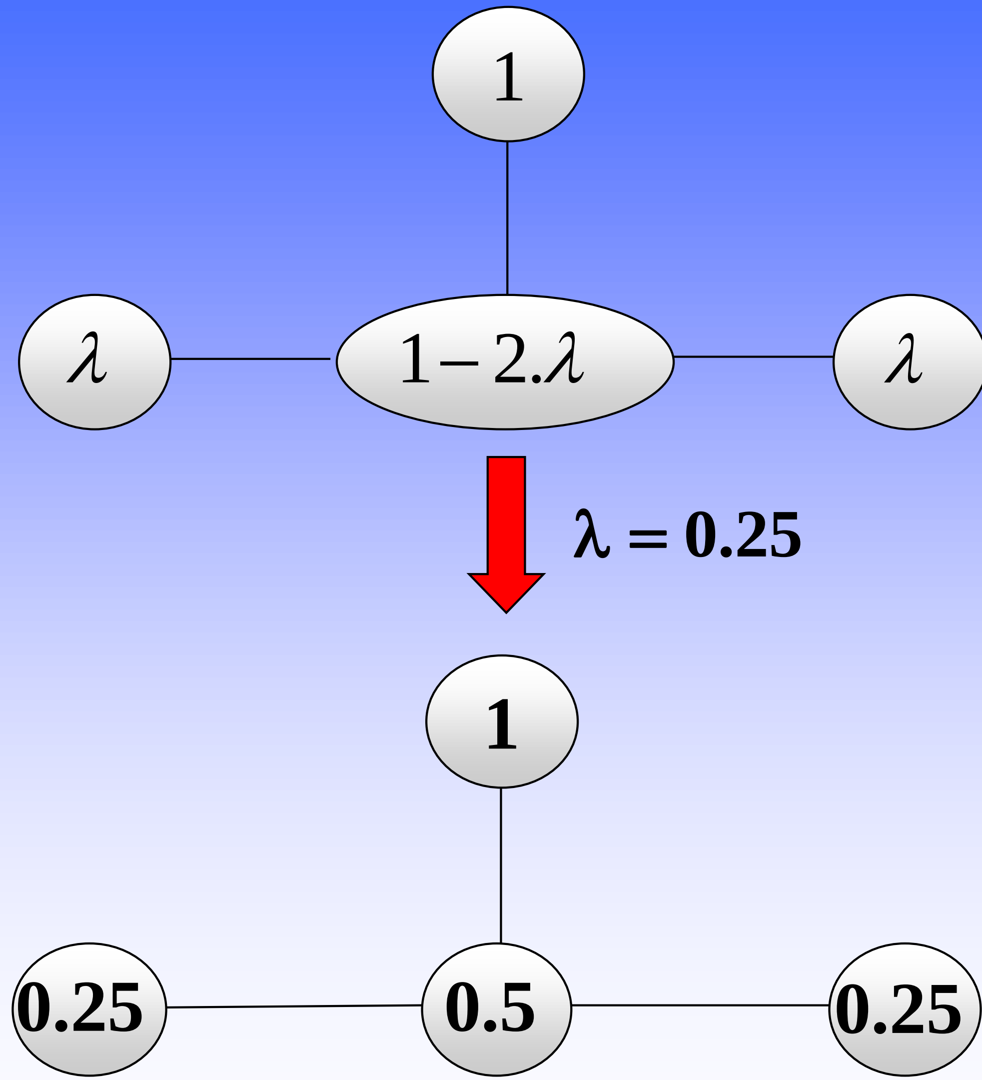
Como $\lambda = \dfrac{\alpha.k}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$ esto condiciona los valores de **h** y **k** que se adopten para la discretización (no puede utilizarse cualquier combinación de **h** y **k**).

Ecuación del Calor. Método explícito. Ejemplo

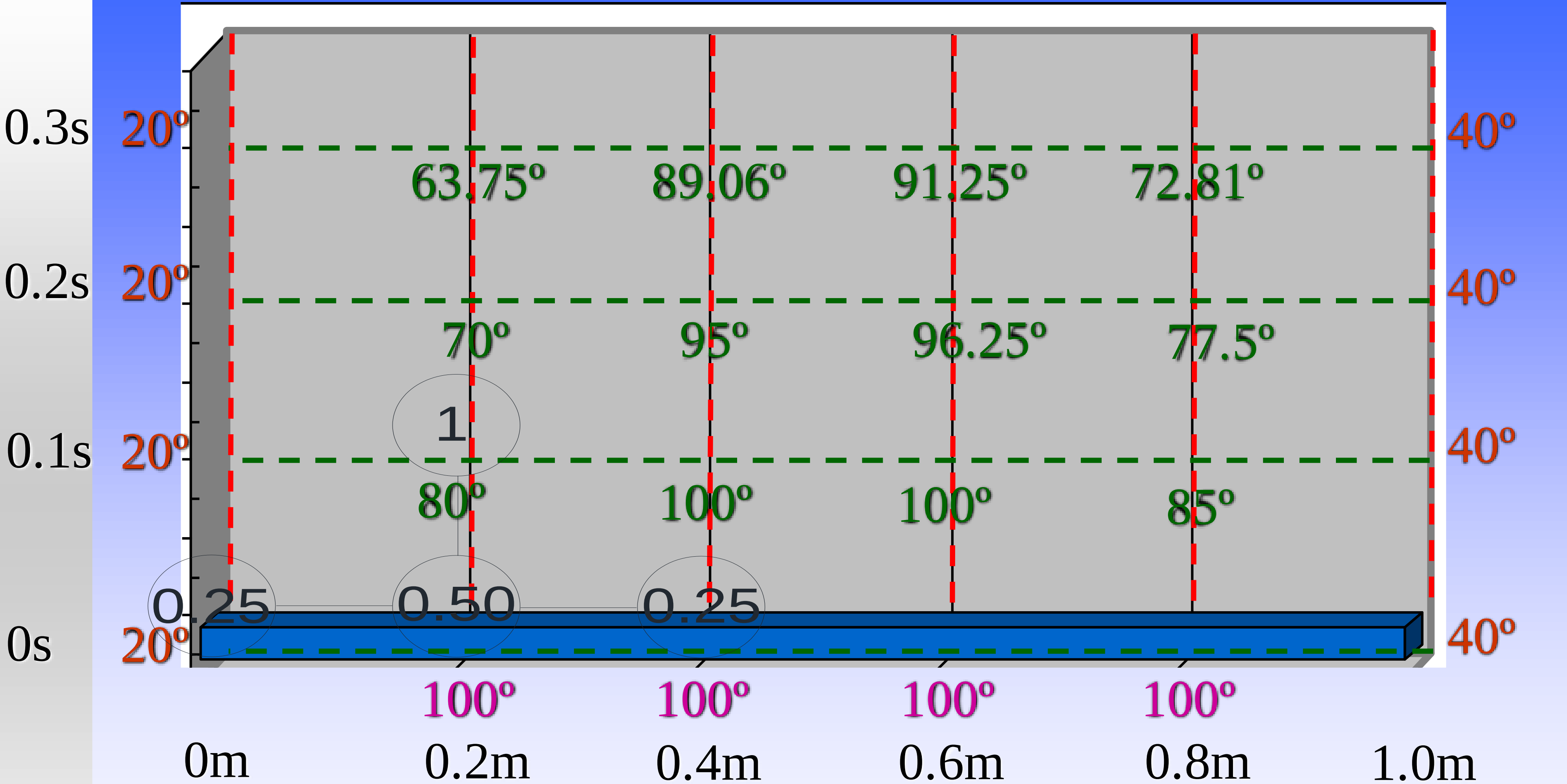
- Hallar la temperatura para t = 0.3 s de una barra de 1m cuyos extremos se mantienen a 20ºC y a 40ºC. La temperatura inicial de la barra es de 100ºC y el coeficiente **a** = 0.1. Tomar $\Delta x = 0.2$m y $\Delta t = 0.1$ s. Justificar la aplicabilidad del método explícito.

- Parámetro de Courant $\lambda = \dfrac{\alpha . k}{h^2} = \dfrac{0.1 \cdot 0.1}{0.04} = 0.25 \leq \dfrac{1}{2}$

- Stencil



▫ Grilla Discreta ▫ Cond. de Contorno ▫ Cond. Iniciales



Cálculo de Temperaturas con el Stencil: ▫ Valores calculados

$T_{0.2m,0.1s}=0.25*20+0.50*100+0.25*100=80º$

$T_{0.4m,0.1s}=0.25*100+0.50*100+0.25*100=100º$

$T_{0.6m,0.1s}=0.25*100+0.50*100+0.25*100=100º$

$T_{0.8m,0.1s}=0.25*100+0.50*100+0.25*40=85º$

Método Explícito. Cálculo con Excel

20					40
20					40
20					40
20	100	100	100	100	40

Ecuación del Calor. Método Implícito

- Derivada Primera : hacia atrás
- Derivada Segunda: centrada
- Ecuación en diferencias

$$\boxed{\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} - \alpha \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0}$$

Error O(k+h²)

multiplicando por k :

- parámetro de Courant

$$u_{i,j} - u_{i,j-1} - \frac{\alpha.k}{h^2}.(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = 0$$

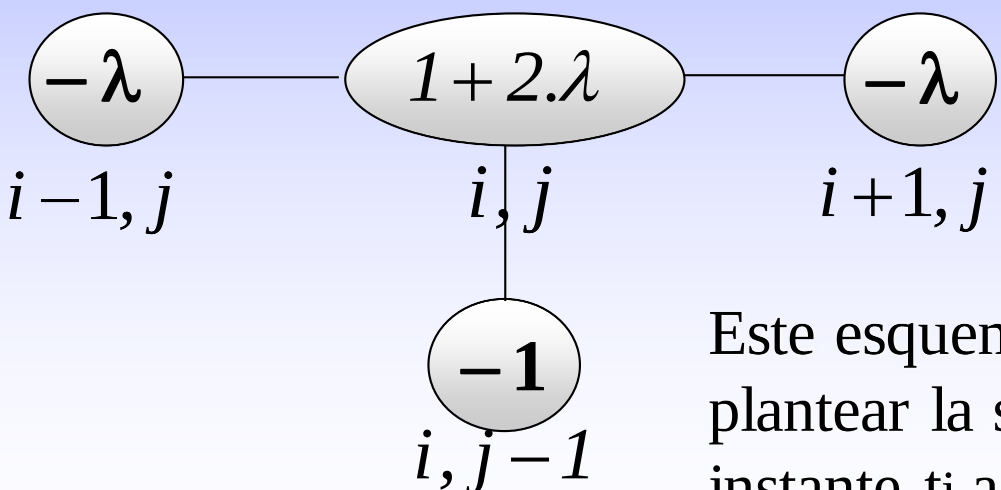
Ecuación del Calor. Método Implícito

- Ecuación en diferencias

$$u_{i,j} - u_{i,j-1} - \lambda.(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = 0$$

$$u_{i,j}(1 + 2.\lambda) - u_{i,j-1} - \lambda.u_{i+1,j} - \lambda.u_{i-1,j} = 0$$

- Stencil



Este esquema permite plantear la solución en el instante tj a partir de la solución en el instante tj-1

Estabilidad Numérica del Método Implícito

- La aplicación sucesiva del stencil da como resultado un sistema de ecuaciones, que resulta ser tridiagonal.
- El método implícito se puede expresar en forma matricial:

$$\mathbf{A} \,.\, w^{(j)} = w^{(j-1)}$$

con $\mathbf{w}^{(j)}$: conjunto de las aproximaciones u para el paso del tiempo j.

$\mathbf{w}^{(j-1)}$: conjunto de las aproximaciones u para el paso del tiempo j-1

A : matriz tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & & & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & & & \\ 0 & .. & .. & .. & & \\ & & .. & .. & .. & 0 \\ & & & -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda \\ 0 & & & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix}$$

Estabilidad Numérica del Método Implícito

- Analizando la Matriz **A** correspondiente al Método Implícito, se observa que el radio espectral

$$\rho(\mathbf{A}^{-1}) < 1$$

Para cualquier valor del parámetro de Courant, por lo que este método es **incondicionalmente estable.**

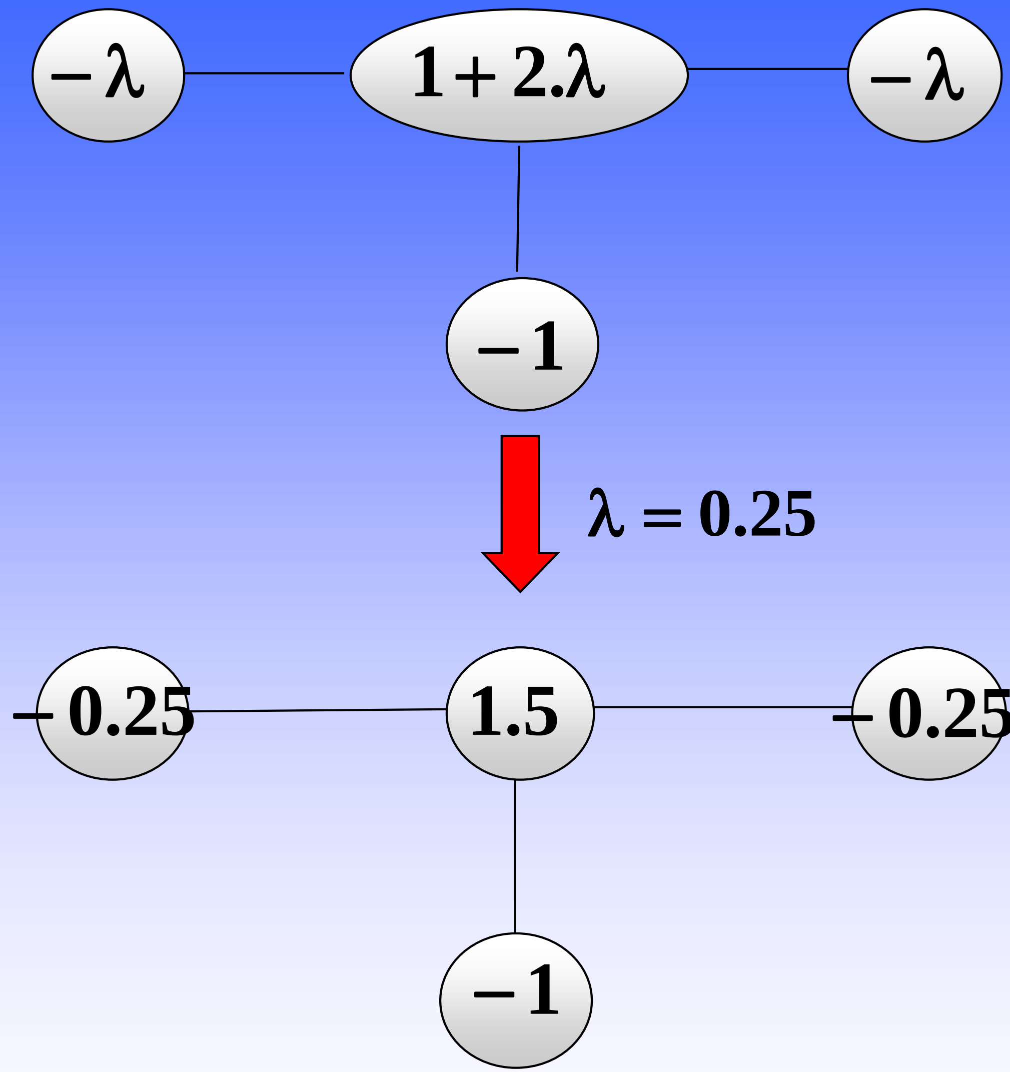
Ecuación del Calor. Método implícito. Ejemplo

- Hallar la temperatura para t = 0.3 s de una barra de 1m cuyos extremos se mantienen a 20ºC y a 40ºC. La temperatura inicial de la barra es de 100ºC y el coeficiente **a** = 0.1. Tomar $\Delta x = 0.2$m y $\Delta t = 0.1$ s.

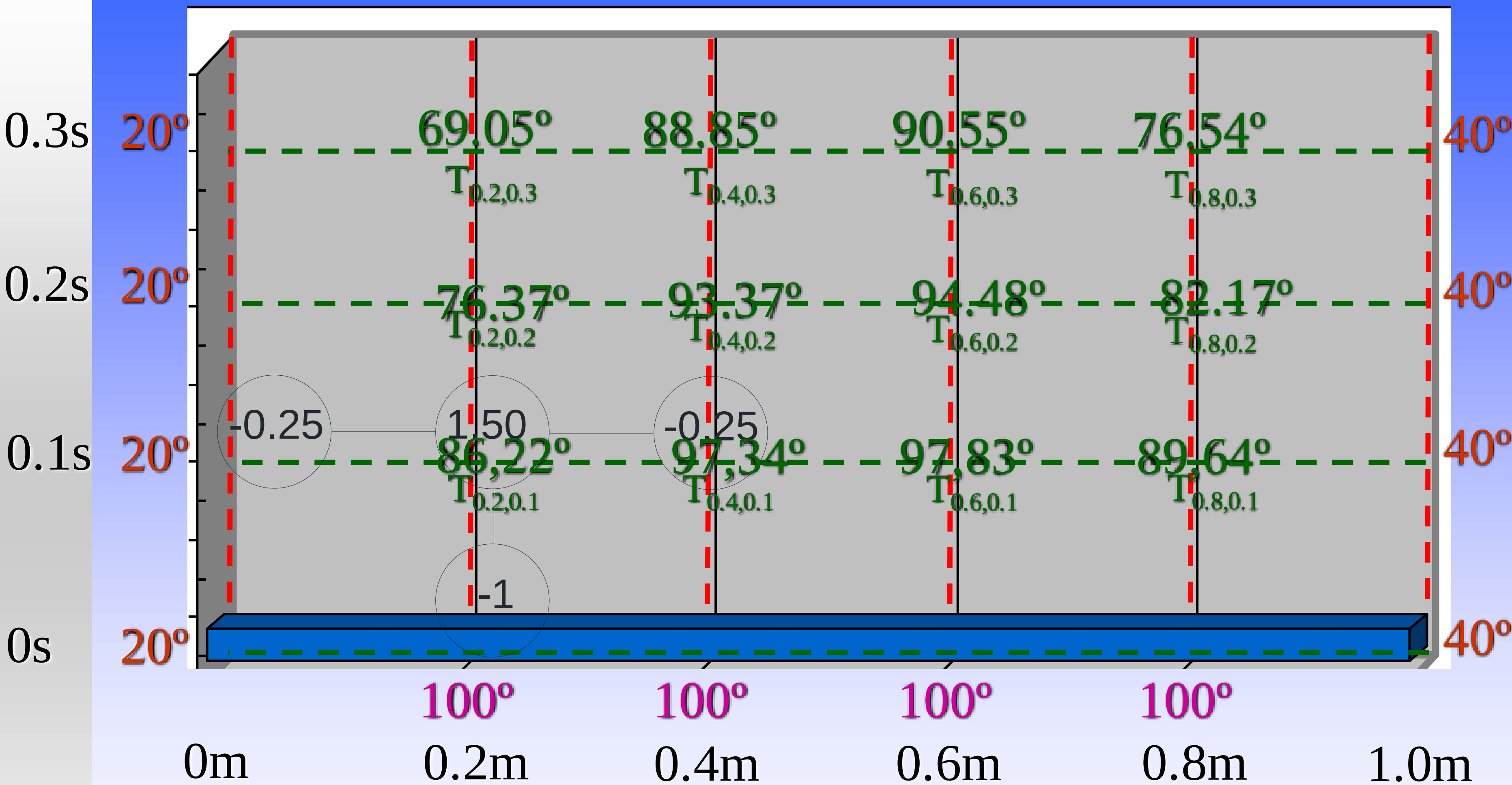
- Parámetro de Courant

$$\lambda = \frac{\alpha . k}{h^2} = \frac{0.1 \cdot 0.1}{0.04} = 0.25$$

- Stencil



▫ Grilla Discreta ▫ Cond. de Contorno ▫ Cond. Iniciales



$-0.25*20 + 1.5*T_{0.2,0.2} - 0.25*T_{0.4,0.2} - 1*86.22=0$

$-0.25*T_{0.2,0.2}+1.5*T_{0.4,0.2}-0.25*T_{0.6,0.2}-1*97.34=0$

$-0.25*T_{0.4,0.2}+1.5*T_{0.6,0.2}-0.25*T_{0.8,0.2}-1*97.83=0$

$-0.25*T_{0.6,0.2} + 1.5*T_{0.8,0.2} - 0.25*40 - 1*89.64=0$

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{0.2,0.2} \\ T_{0.4,0.2} \\ T_{0.6,0.2} \\ T_{0.8,0.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91.22 \\ 97.34 \\ 97.83 \\ 99.64 \end{bmatrix}$$

Método de Crank-Nicolson

- Idea: obtener un método con error $O(k^2+h^2)$

¿Cómo?

  - Se promedian las diferencias hacia delante en el j-ésimo paso en t y las diferencias hacia atrás en el (j+1)ésimo paso en t
  - El método es incondicionalmente estable

- Stencil