FUNDAMENTOS DE FÍSICA

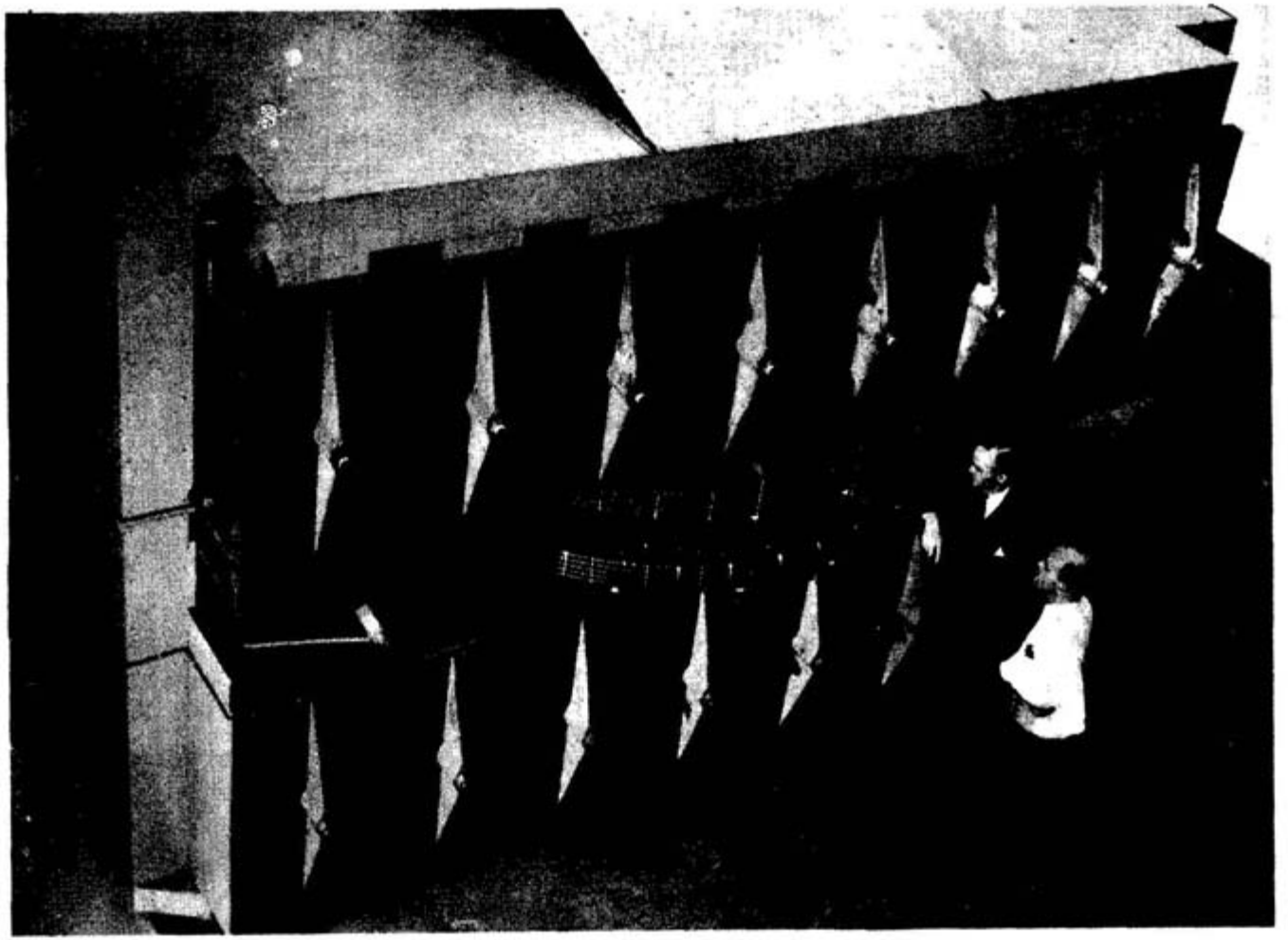
II

ELECTRICIDAD
Y
MAGNETISMO

FUNDAMENTOS DE FÍSICA

II

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO



Acelerador de electrones a 100 millones de electrón-voltios.
(Cortesía de General Electric.)

FRANCIS W. SEARS
Profesor de Física del Instituto de Tecnología de Massachusetts (M.I.T.)

FUNDAMENTOS DE FÍSICA

II

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Versión española de
ALBINO YUSTA ALMARZA
Licenciado en Ciencias Físicas

AGUILAR

MADRID - 1961

El presente volumen, incorporado a este fondo editorial con el asesoramiento de D. Luis Bravo Gala, es la traducción española de la obra

ELECTRICITY AND MAGNETISM
por Francis Weston Sears

y se publica con la debida autorización de la Addison-Wesley Publishing Company, Inc., de Reading, Massachusetts (EE. UU.), propietaria de todos los derechos de edición y distribución de dicha obra.

TERCERA EDICIÓN

Núm. Registro 546-58
Depósito Legal M. 9.818.—1960.

© Aguilar, 1961.
Reservados todos los derechos.

Printed in Spain. Impreso en España por Talleres Gráficos Montaña. Amor Hermoso, 89. Madrid

PRÓLOGO

Este libro es el segundo volumen de una serie de textos redactados para un curso de física general de dos años en el Instituto de Tecnología de Massachusetts. El tiempo dedicado en este curso a electricidad y magnetismo abarca, aproximadamente, las veinte primeras semanas, de un total de treinta, del segundo año. El resto del mismo se dedica a óptica.

Los estudiantes que utilizan este libro han completado durante el primer año un curso de mecánica, calor y sonido. Han estudiado también, durante este primer año, geometría analítica y cálculo diferencial, y durante el segundo han cursado cálculo y ecuaciones diferenciales. Esta preparación matemática y física permite desarrollar la materia en un nivel algo más elevado que en el curso corriente de física general.

Salvo una breve mención de los sistemas electrostático y electromagnético, se utiliza siempre como sistema de unidades el MKS racionalizado. Las notaciones y terminología son, con algunas excepciones, las recomendadas por el Comité de unidades eléctricas y magnéticas de la Asociación de profesores de física en su comunicación de junio de 1938.

El autor desea expresar su agradecimiento al doctor Charles W. Sheppard, que redactó las secciones dedicadas a fuerzas electromotrices de origen químico, y al doctor Mark W. Zemansky, por su ayuda al preparar el original para la publicación. Hago constar también mi agradecimiento a numerosos colaboradores del American Physics Teacher *y del* American Journal of Physics.

Los originales de los grabados para todos los libros de la serie fueron realizados por la señora Jane A. Osgood y el señor Joseph S. Banks. Todo el equipo de redacción de Addison-Wesley Press, y en especial la señora Olga A. Crawford, han prestado su máxima colaboración en la tarea de revisar la serie durante su edición.

Cambridge, Massachusetts. FRANCIS W. SEARS.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO . . . . . *Pág.* IX

ELECTRICIDAD

CAP. I.—LEY DE COULOMB 3

1-1. Estructura del átomo, *pág.* 3.—1-2. Electrización por contacto, 6.—1-3. Conductores y aisladores, 8.—1-4. Cantidad de electricidad. Ley de Coulomb, 9.—1-5. Comprobación de la ley de Coulomb. Átomo nuclear de Rutherford, 10.—1-6. Sistemas de unidades, 13.—Problemas, 17.

CAP. II.—CAMPO ELÉCTRICO 18

2-1. Campo eléctrico, *pág.* 18.—2-2. Cálculo de la intensidad del campo eléctrico, 21.—2-3. Campo de un dipolo, 27.—2-4. Campo debido a una distribución continua de carga, 29.—2-5. Líneas de fuerza, 32.—2-6. Teorema de Gauss, 35.—2-7. Campo y carga dentro de un conductor, 36.—2-8. Aplicación del teorema de Gauss, 38.—2-9. Experimento de la gota de aceite de Millikan, 42.—2-10. Rigidez dieléctrica, 44.—Problemas, 45.

CAP. III.—POTENCIAL 48

3-1. Energía potencial electrostática, *pág.* 48.—3-2. Potencial, 52.—3-3. Diferencia de potencial, 53.—3-4. Potencial y distribución de carga, 57.—3-5. Gradiente de potencial, 61.—3-6. Potencial de un conductor esférico cargado, 67.—3-7. Ecuaciones de Poisson y Laplace, 69.—3-8. Intensidad del campo eléctrico, potencial y distribución de carga, 71.—3-9. Superficies equipotenciales, 72.—3-10. Reparto de carga entre conductores, 75.—3-11. Generador de Van de Graaff, 77.—Problemas, 80.

CAP. IV.—INTENSIDAD Y RESISTENCIA 84

4-1. Intensidad, *pág.* 84.—4-2. Sentido de una corriente, 87.—4-3. Circuito completo, 87.—4-4. Conductibilidad eléctrica, 88.—4-5. Resistencia y resistividad. Ley de Ohm, 90.—4-6. Resistencias patrones, 92.—4-7. Cálculo de la resistencia, 93.—4-8. Medidas de intensidad de corriente, diferencia de potencial y resistencia, 97.—4-9. Ley de Joule, 98.—4-10. Valores medio y eficaz de una corriente, 100.—Problemas, 104.

CAP. V.—CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA 108

5-1. Fuerza electromotriz, *pág.* 108.—5-2. Ecuación del circuito, 110.—5-3. Otra definición de fuerza electromotriz, 112.—5-4. Diferencia de potencial entre puntos de un circuito, 114.—5-5. Voltaje en los bornes de un generador, 117.—5-6. Potenciómetro, 118.—5-7. Conexión de resistencias en serie y en paralelo, 120.—5-8. Redes de resistencias que contienen fem, 124.—5-9. Reglas de Kirchhoff, 125.—5-10. Puente de Wheatstone, 128.—5-11. Potencia, 131. 5-12. Medidas de la energía y de la potencia, 133.—Problemas, 135.

CAP. VI.—FUERZAS ELECTROMOTRICES QUÍMICAS Y TÉRMICAS 142

6-1. Energía química y fuerza electromotriz, *pág.* 142.—6-2. Potenciales de electrodo, 142.—6-3. Pilas eléctricas, 143.—6-4. Electrodo de hidrógeno, 144. 6-5. Cálculo de fuerzas electromotrices, 145.—6-6. Concentración de iones hidrógeno, 146.—6-7. Pila de Daniell, 146.—6-8. Reversibilidad, 149.—6-9. Polarización, 150.—6-10. Pila seca, 150.—6-11. El acumulador de plomo, 151. 6-12. Pilas patrones, 152.—6-13. Electrólisis, 152.—6-14. Electrólisis del agua, 154.—6-15. Energía libre química, 155.—6-16. Fuerzas electromotrices térmicas, 155.—6-17. Fuerza electromotriz Thomson, 156.—6-18. Fuerza electromotriz Peltier, 157.—6-19. Fuerza electromotriz Seebeck, 158.—6-20. Variación de la fem con la temperatura, 160.—Problemas, 163.

CAP. VII.—PROPIEDADES DE LOS DIELÉCTRICOS 164

7-1. Cargas inducidas, *pág.* 164.—7-2. Cargas inducidas sobre esferas, 168. 7-3. Susceptibilidad, coeficiente dieléctrico y capacidad específica de inducción, 170.—7-4. Generalización del teorema de Gauss. Desplazamiento, 175.—7-5. Condiciones de contorno, 178.—7-6. Polarización, 180.—7-7. Fuerzas que se ejercen entre cargas situadas en un dieléctrico, 182.—Problemas, 187.

CAP. VIII.—CAPACIDAD Y CONDENSADORES 189

8-1. Capacidad de un conductor aislado, *pág.* 189.—8-2. Condensadores, 189. 8-3. Condensador de láminas paralelas, 190.—8-4. Otros tipos de condensadores, 196.—8-5. Corrientes de carga y descarga de un condensador, 198.—8-6. Condensadores en serie y en paralelo, 201.—8-7. Energía de un condensador cargado, 203.—8-8. Densidad de energía en un campo eléctrico, 204.—8-9. Fuerza entre las armaduras de un condensador, 205.—8-10. Corriente de desplazamiento, 208.—Problemas, 211.

MAGNETISMO

CAP. IX.—EL CAMPO MAGNÉTICO 217

9-1. Magnetismo, *pág.* 217.—9-2. Campo magnético. Inducción, 218.—9-3. Fuerza sobre una carga móvil, 220.—9-4. Órbitas en los campos magnéticos de partículas cargadas, 223.—9-5. Ciclotrón, 224.—9-6. Medida de e/m, 228.—9-7. Espectrógrafo de masas, 230.—9-8. Fuerza sobre un conductor que transporta una corriente, 232.—9-9. Fuerza y momento sobre un circuito completo, 234. Problemas, 237.

CAP. X.—GALVANÓMETROS, AMPERÍMETROS Y VOLTÍMETROS. MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA 240

10-1. Galvanómetro, *pág.* 240.—10-2. Galvanómetro de cuadro móvil alrededor de un eje fijo, 242.—10-3. Amperímetros y voltímetros, 243.—10-4. Galvanómetro balístico, 245.—10-5. Electrodinamómetro, 246.—10-6. Motor de corriente continua, 247.—Problemas, 248.

CAP. XI.—CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE O UNA CARGA MÓVIL. 251

11-1. Campo magnético de un elemento de corriente, *pág.* 251.—11-2. Campo magnético de un conductor rectilíneo, 254.—11-3. Integrales curvilíneas y de superficie de la inducción magnética, 256.—11-4. Fuerza entre conductores paralelos. Amperio, 258.—11-5. Campo creado por una espira circular, 260. 11-6. Campo de un solenoide, 264.—11-7. Campo de una carga puntual móvil, 266.—Problemas, 268.

CAP. XII.—FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA 272

12-1. Fuerza electromotriz producida por movimiento, *pág.* 272.—12-2. Ley de Faraday, 277.—12-3. Ley de Lenz, 279.—12-4. Betatrón, 279.—12-5. Dínamo de disco de Faraday, 281.—12-6. Fem inducida sobre un cuadro en rotación, 282.—12-7. Generador de corriente continua o dínamo, 284.—12-8. Método de la bobina exploradora para la medida de flujo magnético, 285.—12-9. Amortiguamiento de un galvanómetro, 287.—12-10. Corrientes de Foucault, 288. Problemas, 290.

CAP. XIII.—AUTOINDUCCIÓN 293

13-1. Inducción mutua, *pág.* 293.—13-2. Autoinducción, 295.—13-3. Producción de una corriente en un circuito inductivo, 298.—13-4. Energía asociada a una autoinducción, 300.—13-5. Autoinducciones en serie, 301.—Problemas, 304.

CAP. XIV.—PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA 307

14-1. Introducción, *pág.* 307.—14-2. Origen de los efectos magnéticos, 308. 14-3.—Corrientes superficiales equivalentes, 311.—14-4. Susceptibilidad, permeabilidad y excitación magnéticas, 311.—14-5. Imantación, 318.—Problemas, 322.

CAP. XV.—FERROMAGNETISMO 323

15-1. Ferromagnetismo, *pág.* 323.—15-2. Temperatura de Curie, 325.—15-3. Histéresis, 325.—15-4. La teoría de los dominios, 329.—15-5. Polos magnéticos, 330.—15-6. Campo magnético terrestre, 332.—15-7. Definición general de excitación magnética, 334.—15-8. Imantación de una barra, 336.—15-9. Par de fuerzas ejercido sobre una barra imantada, 337.—15-10. Momento magnético. Magnetómetro, 339.—15-11. Circuito magnético, 341.—15-12. Deducción de la ecuación del circuito magnético, 345.—15-13. Energía por unidad de volumen en un campo magnético, 348.—Problemas, 349.

CAP. XVI.—CORRIENTES ALTERNAS 351

16-1. Circuito en serie en corriente alterna, *pág.* 351.—16-2. Medias cuadráticas o valores eficaces, 353.—16-3. Relación entre las fases del voltaje y de la intensidad de corriente, 356.—16-4. Diferencia de potencial entre los puntos de un circuito recorrido por una corriente alterna, 357.—16-5. Diagramas de vector rotatorio, 359.—16-6. Circuitos en paralelo, 363.—16-7. Resonancia, 363. 16-8. Potencia en los circuitos de corriente alterna, 366.—16-9. Transformador, 369.—16-10. Corriente alterna trifásica, 372.—Problemas, 377.

CAP. XVII.—OSCILACIONES ELÉCTRICAS Y ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS . . . 380

17-1. Oscilaciones eléctricas, *pág.* 380.—17-2. Oscilaciones amortiguadas, 382. 17-3. Oscilaciones entretenidas, 383.—17-4. Radiación, 384.—17-5. Velocidad de las ondas electromagnéticas, 387.—17-6. Vector de Poynting, 393.—17-7. Reflexión y refracción. Fórmulas de Fresnel, 394.—Problemas, 399.

CAP. XVIII.—ELECTRÓNICA 401

18-1. Partículas elementales, *pág.* 401.—18-2. Emisión termoiónica. Diodo, 403.—18-3. Tubos de vacío de varios electrodos, 410.—18-4. Oscilógrafo de rayos catódicos, 412.—18-5. Efecto fotoeléctrico, 413.—18-6. Tubos de rayos X, 415. 18-7. Conducción en los gases, 416.—Problemas, 420.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA 421

TABLA DE CONSTANTES FÍSICAS 422

TABLA DE SÍMBOLOS 423

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS NATURALES 425

LOGARITMOS DECIMALES 426

CONSTANTES Y FACTORES DE CONVERSIÓN. ALFABETO GRIEGO 428

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES DE FINAL DE CAPÍTULO 429

ÍNDICE ALFABÉTICO DE AUTORES Y MATERIAS 435

ELECTRICIDAD

CAPÍTULO PRIMERO

LEY DE COULOMB

1-1. Estructura del átomo.—La palabra átomo se deriva del griego *atomos*, que significa indivisible; pero apenas es necesario señalar que la denominación no es apropiada. Todos los átomos son agrupaciones más o menos complejas de partículas subatómicas, y existen muchos procedimientos para separar algunas de estas partículas, bien aisladas, o en grupos. El ejemplo más espectacular lo constituye la ruptura de un núcleo atómico en el proceso de la fisión nuclear.

Las partículas subatómicas, o sea los constituyentes de los cuales están formados los átomos, son tres: el electrón, el protón y el neutrón. Se han observado o postulado otras partículas subatómicas, pero su existencia es transitoria y no forman parte de la materia ordinaria. Las partículas subatómicas están dispuestas, en general, del mismo modo en todos los átomos. Los protones y neutrones forman siempre un conjunto estrechamente apretado, llamado núcleo, cuyo diámetro, si lo suponemos esférico, es del orden de 10^{-12} cm. Fuera del núcleo, y a distancias relativamente grandes de él, están los electrones. En el modelo atómico propuesto en 1913 por el físico danés Niels Bohr, se imaginan los electrones girando alrededor del núcleo, describiendo órbitas circulares o elípticas. Actualmente se cree que este modelo no es enteramente correcto, pero resulta todavía útil para hacer intuitiva la estructura del átomo. Los diámetros de las órbitas electrónicas, que determinan el tamaño del átomo en conjunto, son del orden de 2 ó 3×10^{-8} cm, o sea, aproximadamente diez mil veces mayores que el diámetro del núcleo. Un átomo de Bohr es un sistema solar en miniatura: el Sol, en el centro, corresponde al núcleo, mientras que los planetas, a distancias relativamente grandes del Sol, corresponden a los electrones.

Las masas de un protón y de un neutrón son aproximadamente iguales, siendo la masa de cada uno de ellos unas 1840 veces mayor que la de un electrón. Por tanto, toda la masa de un átomo está prácticamente concentrada en su núcleo. Las masas de estas partículas subatómicas pueden calcularse del modo siguiente. Sabemos que una molécula-gramo de hidrógeno monoatómico consta de $6{,}02 \times 10^{23}$ partículas (número de Avogadro) y que su masa es 1,008 g. La masa de un solo átomo de hidrógeno es, por consiguiente, con tres cifras exactas,

$$\frac{1{,}008}{6{,}02 \times 10^{23}} = 1{,}67 \times 10^{-24}\ \text{g} = 1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{Kg}.$$

El átomo de hidrógeno (la cuestión de los isótopos se discutirá en el párrafo siguiente) es la única excepción a la regla de que todos los átomos

están constituídos por tres clases de partículas subatómicas. El núcleo de un átomo de hidrógeno consta de un solo protón, fuera del cual hay un solo electrón. Por tanto, de la masa total del átomo de hidrógeno, 1/1840 corresponde a la masa del electrón, y el resto, a la del protón.

Así, pues, con tres cifras exactas,

$$\text{masa del electrón} = \frac{1{,}67 \times 10^{-24}}{1840}\,\text{g} = 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{Kg};$$

$$\text{masa del protón} = 1{,}67 \times 10^{-24}\ \text{g} = 1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{Kg},$$

y, puesto que las masas del protón y del neutrón son aproximadamente iguales,

$$\text{masa del neutrón} = 1{,}67 \times 10^{-24}\ \text{g} = 1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{Kg}.$$

El hidrógeno ordinario es una mezcla de tres clases de átomos llamados *isótopos*. Además del átomo descrito en el párrafo anterior, que se compone de un solo protón y un solo electrón, se encuentran átomos de *hidrógeno pesado* o deuterio, y también átomos de tritio. La concentración del deuterio en el hidrógeno ordinario es alrededor de 1 parte en 5000, y la del tritio, todavía menor. El núcleo de un átomo de deuterio (llamado *deuterón*) se compone de un protón y un neutrón. El núcleo de un átomo de tritio está formado por un protón y dos neutrones. Tanto en el deuterio como en el tritio hay un solo electrón fuera del núcleo.

Para distinguir entre estas formas de hidrógeno, se escriben sus símbolos químicos ${}_1H^1$, ${}_1D^2$ (un símbolo más consecuente sería ${}_1H^2$) y ${}_1H^3$. El número escrito debajo y a la izquierda de la letra representa, o el número de protones en el núcleo, o el número de electrones fuera del núcleo, y se denomina *número atómico* del átomo. En cada átomo, siempre que esté en estado normal o no ionizado, el número de protones es igual al de electrones, hecho que está directamente relacionado con las propiedades eléctricas del protón y del electrón, como después veremos. El número escrito en la parte superior y a la derecha de la letra es el número total de partículas del núcleo, y es el número entero más próximo al peso atómico. Evidentemente la masa de un átomo de deuterio es, con muy poco error, el doble de la de ${}_1H^1$, mientras que la masa de un átomo de tritio es tres veces mayor. Las propiedades químicas de un átomo dependen, principalmente, del número de electrones extranucleares, y sólo en pequeña escala de la masa del núcleo, y por ello los isótopos de un elemento difieren químicamente poquísimo o nada.

El elemento siguiente al hidrógeno en la tabla periódica es el helio, cuyo isótopo más abundante es ${}_2He^4$. Su núcleo se compone de dos protones y dos neutrones, y tiene dos electrones extranucleares. El núcleo de este isótopo es la partícula α. El helio tiene también otro isótopo, ${}_2He^3$, cuyo núcleo contiene dos protones y un neutrón. Su concentración es, aproximadamente, de una parte en 100000. El litio, elemento siguiente al helio, tiene la siguiente composición aproximada: 92 % de

$_3Li^7$ y 8 % de $_3Li^6$. Se deja al lector la deducción de la disposición de los protones, neutrones y electrones de estos átomos.

Cuando se continúa avanzando en la tabla periódica, la complejidad de los átomos aumenta. El átomo más complejo que se encuentra en la Naturaleza es el uranio, mezcla de tres isótopos: $_{92}U^{238}$, $_{92}U^{235}$ y $_{92}U^{234}$, con una proporción relativa de 99,28 %, 0,71 % y 0,006 %. Durante la elaboración de la bomba atómica, se han *fabricado* átomos más complejos. Éstos son el neptunio, $_{93}Np^{239}$, y el plutonio, $_{94}Pu^{239}$. El núcleo del plutonio se compone de 94 protones y 145 neutrones, con 94 electrones extranucleares, lo que forma un total de 333 partículas subatómicas.

Se encuentra que los protones y electrones ejercen fuerzas mutuas, además de las fuerzas de gravitación universal que existen entre ellos. Estas fuerzas se *explican* adjudicando a los protones y electrones una propiedad llamada *electricidad* o *carga eléctrica*, exactamente igual que las fuerzas gravitatorias se *explican* adjudicando a la materia la propiedad de tener *masa gravitatoria*. Existe, no obstante, una diferencia, puesto que mientras las fuerzas gravitatorias son únicamente fuerzas atractivas, las fuerzas eléctricas pueden ser atractivas o repulsivas. Los protones ejercen fuerzas de repulsión sobre otros protones, los electrones ejercen fuerzas de repulsión sobre otros electrones, mientras que los protones y electrones se atraen mutuamente. Aparecen así dos clases de carga eléctrica, designadas arbitrariamente como carga positiva (+) y negativa (−). Los protones tienen carga positiva; los electrones, carga negativa. Las fuerzas observadas entre protones y electrones conducen, pues, al enunciado conocido: cargas de la misma clase se atraen; cargas de distinta clase se repelen.

Todos los electrones tienen precisamente la misma carga negativa; todos los protones tienen exactamente la misma carga positiva. Además, cualquier sistema tal como un átomo normal, que contiene igual número de protones y electrones, no presenta carga en exceso. Esto conduce a la conclusión de que las cargas de un protón y un electrón, aunque de signo opuesto, son de igual valor.

No han sido observadas nunca cargas de valor inferior a la de un protón o un electrón; por consiguiente, parece ser ésta la unidad natural o fundamental de carga eléctrica.

Además de las fuerzas de atracción o repulsión entre protones y electrones, que dependen únicamente de la distancia entre las partículas, existen otras fuerzas entre ellos que dependen de su movimiento relativo, y que dan lugar a los fenómenos *magnéticos*. Durante muchos años la fuerza aparente de atracción o repulsión entre dos barras imantadas se explicaba admitiendo la existencia de entidades magnéticas análogas a las cargas eléctricas y llamadas *polos magnéticos*. Es un hecho conocido, sin embargo, que se observan también fenómenos magnéticos en la proximidad de un alambre por el cual circula una corriente. Ahora bien: una corriente es simplemente un movimiento de cargas eléctricas, y parece ahora que todos los efectos magnéticos son consecuencia del movimiento relativo de las cargas eléctricas.

Por tanto, el magnetismo y la electricidad no son dos cosas distintas, sino fenómenos afines que se originan como consecuencia de las propiedades de las cargas eléctricas.

La introducción precedente resume una pequeña parte del enorme conjunto de conocimientos experimentales, cuyos orígenes se remontan a cientos de años, mientras que los aspectos más recientes se encuentran todavía en fase de experimentación en muchos laboratorios. Algunos de estos experimentos se describirán en este libro, y al final del capítulo XVIII se encontrará una bibliografía sobre obras de consulta.

1-2. Electrización por contacto.—Los átomos de una sustancia cualquiera, como ha quedado establecido en la sección anterior, contienen un número igual de protones y electrones. Por consiguiente, la materia no presenta, de ordinario, efectos eléctricos, y se dice que es eléctricamente *neutra* o que está *descargada*. Si alteramos por algún procedimiento el equilibrio entre electrones y protones, esto es, si un cuerpo tiene exceso o defecto de electrones, se dice que está *cargado*, y hablaremos de un cuerpo *cargado* o simplemente de una *carga*. Hay muchos medios por los cuales puede alterarse el equilibrio entre las cargas positivas y negativas. El más antiguo, históricamente, es el fenómeno de la electrización por frotamiento, como suele designarse, si bien resulta una denominación más adecuada la de electrización por contacto, puesto que todo lo que se requiere es un contacto íntimo. Frotando vigorosamente una superficie contra otra se pueden poner en íntimo contacto muchos puntos de ambas superficies.

Si se frota una barra de ebonita con una piel de gato y se aproxima a una bolita de medula de saúco suspendida de un hilo de seda, la bolita de saúco es al principio atraída por la ebonita y, después del instante de contacto, repelida. Dos bolitas de medula de saúco que han sido tratadas de igual modo se repelen mutuamente. Por otra parte, cada bolita es atraída por la piel de gato. La explicación de estos fenómenos es que cuando la ebonita y la piel de gato se ponen en contacto hay una transmisión espontánea de electrones de la piel de gato a la ebonita, con lo cual ésta adquiere un exceso de electrones y resulta cargada negativamente, mientras que la piel de gato, que ha perdido algunos electrones, resulta cargada positivamente.

Más adelante (Cap. VII) se explicará la razón de la atracción inicial de la bolita de medula de saúco *descargada* por la barra de ebonita. Cuando la bolita se pone en contacto con la barra cargada negativamente, algunos de los electrones en exceso de la barra pasan a la bolita, observándose entonces una repulsión entre la barra y la bolita, o entre dos bolitas cargadas, lo cual evidencia que los cuerpos que tienen cargas de la misma clase se repelen. La atracción entre las bolitas y la piel de gato demuestra que los cuerpos que tienen cargas de distinta clase se atraen. Todos los fenómenos de *electrostática* son simplemente manifestaciones de estas fuerzas entre cuerpos cargados o entre las entidades fundamentales de carga, electrones y protones. La expresión *electrostática* no es

del todo acertada, puesto que las cargas sobre las cuales actúan las fuerzas eléctricas están frecuentemente en movimiento.

Las medidas efectuadas demuestran que la carga adquirida por la ebonita cuando se pone en contacto con la piel de gato es exactamente igual y opuesta a la adquirida por la piel de gato. No hay *creación* de carga eléctrica en el proceso de electrización, sino simplemente una *transmisión* de carga de un cuerpo al otro. Estos experimentos no indican, por sí solos, qué partículas se mueven, pero otros ponen de manifiesto que son los electrones.

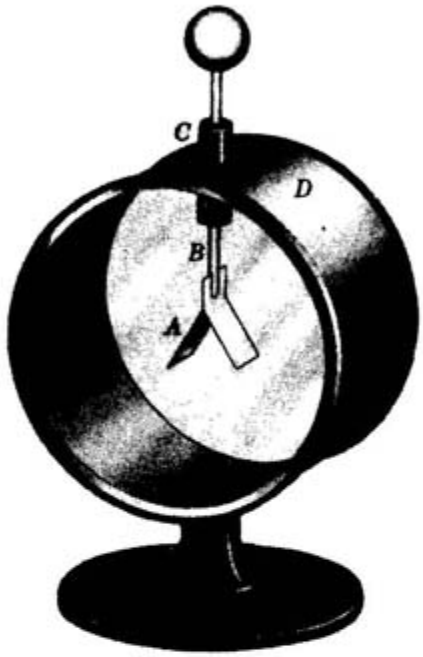


FIG. 1-1.—Electroscopio de panes de oro.

Una bolita de medula de saúco, cargada, puede servir como cuerpo de prueba para determinar si un segundo cuerpo está o no cargado. Un aparato más sensible es el *electroscopio de hojas*, representado esquemáticamente en la figura 1-1. Dos láminas delgadas o panes de oro o aluminio, *A*, están fijas en el extremo de una varilla metálica, *B*, que pasa a través de un soporte, *C*, de ebonita, ámbar o azufre. La caja *D* que las encierra está provista de ventanas a través de las cuales pueden observarse las hojas y sirve para protegerlas de las corrientes de aire. Cuando se toca la bola del electroscopio con un cuerpo cargado, las hojas adquieren cargas del mismo signo y se repelen, siendo su divergencia una medida de la cantidad de carga que han recibido.

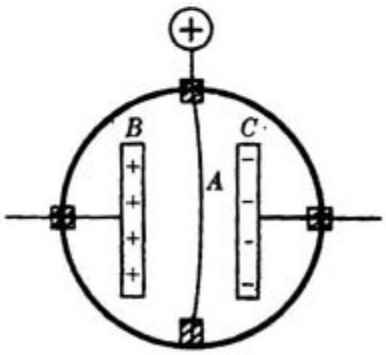


FIG. 1-2.—Electrómetro de cuerda.

Un instrumento más adecuado para determinaciones cuantitativas es el *electrómetro de cuerda*, cuyo fundamento se ilustra en la figura 1-2. Un hilo fino, *A* (la *cuerda)*, estirado bajo una pequeña tensión, está situado entre dos láminas metálicas, *B* y *C*, que poseen carga positiva y negativa, respectivamente. Si se da ahora al hilo una carga positiva, p. ej., es repelido por las cargas positivas de *B* y atraído por las negativas de *C*. Como resultado de esto se arquea ligeramente hacia la derecha y el desplazamiento de su punto medio, que puede me-

dirse con un microscopio, permite determinar la carga que ha adquirido.

Si se conecta a la bola del electroscopio un borne de una batería de algunos centenares de voltios de diferencia de potencial y el otro borne a la caja del mismo, las hojas se separarán igual que si hubiesen sido cargadas por un cuerpo electrizado por contacto. No hay diferencia entre los *tipos* de carga dados a la hoja en los dos procesos y, en general, no hay distinción entre *electricidad estática* y *corriente eléctrica*. La expresión *corriente* se refiere a un movimiento de cargas, mientras que la *electrostática* se ocupa casi siempre de las reacciones mutuas entre cargas en reposo. En ambos casos las cargas son las de los electrones o protones.

1-3. Conductores y aisladores.—Conectemos un extremo de un hilo de cobre a la bola de un electroscopio, estando el otro extremo sostenido por una barra de vidrio, como indica la figura 1-3. Si se toca con una barra de ebonita cargada el extremo más alejado del hilo, las hojas del electroscopio se separarán inmediatamente. Se ha transmitido, por tanto, una descarga a lo largo del hilo, y se dice que el hilo es un *conductor*. Si se repite el experimento, utilizando una fibra de seda o una cinta de goma, en lugar del hilo de cobre, las hojas del electroscopio no divergen y se dice que la fibra o la goma son un *dieléctrico* o un *aislador*. El movimiento de una carga a través de una sustancia se estudiará con más detalle en el capítulo IV, pero para nuestro propósito presente basta decir que la mayor parte de las sustancias caen dentro de una de las dos clases anteriores. Los conductores permiten el paso de cargas a través de ellos, mientras que los aisladores no lo permiten.

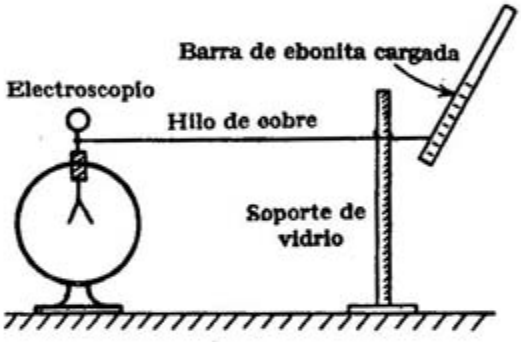


FIG. 1-3.—El cobre es conductor de la electricidad.

En general, los metales son buenos conductores, mientras que los no metales son aisladores. La valencia positiva de los metales, y el hecho de que formen iones positivos en disolución, indican que los átomos de un metal liberan fácilmente uno o más de sus electrones exteriores. Dentro de un conductor metálico, tal como un hilo de cobre, llegan a desprenderse de cada átomo algunos de los electrones exteriores que pueden moverse libremente por el metal. Éstos son los llamados electrones *libres*. El núcleo positivo y el resto de los electrones permanecen en posición fija. Por el contrario, dentro de un aislador no hay (o están en proporción muy pequeña) estos electrones libres.

El fenómeno de electrización por contacto no está limitado a la ebonita y a la piel de gato o, en todo caso, a los aisladores en general. Dos sustancias distintas cualesquiera presentan el fenómeno en mayor o menor escala, pero evidentemente un conductor ha de ser sostenido por un mango

aislador, pues en otro caso las cargas producidas sobre él se dispersarían inmediatamente.

1-4. Cantidad de electricidad. Ley de Coulomb.—Un cuerpo cargado es aquel que tiene cierto número de protones o de electrones en exceso, y el valor de la carga neta del cuerpo queda definido por este número. Sin embargo, en la práctica, la carga de un cuerpo se expresa en función de una unidad mucho mayor que la carga de un electrón o protón. Utilizaremos las letras q o Q para representar la cantidad en exceso de carga + o — de un cuerpo, aplazando por el momento la definición de la unidad de carga.

La primera investigación cuantitativa de la ley que rige las fuerzas que se ejercen entre cuerpos cargados fué realizada por Charles Augustin Coulomb (1736-1806) en 1784-1785, utilizando para efectuar las medidas una balanza de torsión del tipo empleado, 13 años después, por Cavendish para medir las fuerzas gravitatorias. Dentro de los límites de precisión de sus medidas, Coulomb demostró que la fuerza de atracción o repulsión entre dos cuerpos cargados es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

El concepto de cantidad de electricidad no era conocido con precisión en tiempos de Coulomb, y no se había ideado ninguna unidad de carga ni tampoco un método de medida. Trabajos posteriores han demostrado que, a una separación dada, la fuerza entre dos cuerpos cargados es proporcional al producto de sus cargas individuales, q y q'. Esto es,

$$F \propto \frac{qq'}{r^2} \qquad [1\text{-}1]$$

Esta proporcion puede convertirse en igualdad multiplicando por una constante k:

$$\boxed{F = k\frac{qq'}{r^2}} \qquad [1\text{-}2]$$

El valor de la constante k de proporcionalidad depende de las unidades en las cuales se expresen la fuerza, la carga y la distancia. Cualquiera de las relaciones [1-1] o [1-2] se denomina *ley de Coulomb*, y puede enunciarse así:

La fuerza de atracción o repulsión ejercida sobre un cuerpo cargado por otro es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

Susceptible de ciertas generalizaciones que se explicarán más adelante, la ley de Coulomb, en la forma dada anteriormente, queda restringida a cargas puntuales, esto es, a cargas o cuerpos cargados cuyas dimensiones

son pequeñas comparadas con la distancia que los separa. Si hay materia en el espacio comprendido entre las cargas —p. ej., si los cuerpos cargados están en el aire— las fuerzas entre ellos se modifican a causa de las cargas *inducidas* en las moléculas del medio que los rodea. Este efecto será descrito más adelante. Desde el punto de vista práctico, la ley puede utilizarse tal como se ha escrito, para cargas puntuales situadas en el aire, ya que a la presión atmosférica el efecto del aire sólo modifica la fuerza que se ejercería en el vacío en un $^1/_2$ por 1000.

La misma ley se cumple, cualquiera que sea el signo de las cargas q y q'. Si las cargas son del mismo signo, la fuerza es una repulsión; si son de signo opuesto, una atracción. Sobre cada una de las cargas se ejercen fuerzas del mismo valor y sentidos opuestos.

1-5. Comprobación de la ley de Coulomb. Átomo nuclear de Rutherford.—Lo más parecido a una carga puntual, que se presenta en la Naturaleza, es el núcleo cargado positivamente de un átomo, y tenemos prueba experimental directa de que la fuerza de repulsión entre un par de núcleos atómicos obedece a la ley de Coulomb. Los experimentos fueron realizados, no con el propósito principal de comprobar esta ley, sino para averiguar, en lo posible, cómo están dispuestas dentro de un átomo las cargas eléctricas positivas o negativas, y fueron estos mismos experimentos los que demostraron por primera vez que el átomo se compone de un núcleo, pequeño y macizo, rodeado de electrones. Estas experiencias fueron realizadas en 1910-11 por sir Ernest Rutherford y dos de sus discípulos, Hans Geiger y Ernest Marsden, en Cambridge (Inglaterra).

El electrón había sido *descubierto* en 1897 por sir J. J. Thomson, y su masa y carga se conocían en 1910 con mucha precisión. Se sabía también que, con la sola excepción del hidrógeno, todos los átomos contienen más de un electrón. Thomson había propuesto un modelo atómico que consistía en una esfera relativamente grande de carga positiva (de unos 2 ó 3×10^{-8} cm de diámetro), dentro de la cual estaban embutidos los electrones como las ciruelas en un budín.

Lo que Rutherford y sus colaboradores hicieron fué lanzar otras partículas sobre los átomos que investigaban y, observando cómo eran desviadas o *dispersadas* las partículas lanzadas, sacaron conclusiones acerca de la distribución de la carga dentro de los átomos sobre los cuales habían sido lanzadas dichas partículas. Afortunadamente, fué posible disponer de dichos proyectiles. En ciertas desintegraciones radiactivas, se emiten partículas α. Estas partículas, que actualmente sabemos son núcleos de átomos de helio, poseen velocidades del orden de 10^9 cm/seg. Los átomos normales de helio tienen dos electrones. Por consiguiente, su núcleo, la partícula α, tiene una doble carga positiva y se compone de dos protones y dos neutrones. A causa de su enorme velocidad, las partículas α son capaces de recorrer varios centímetros en el aire, o algunas décimas o centésimas de milímetro a través de sustancias sólidas, antes de ser detenidas por los choques.

El dispositivo experimental está representado esquemáticamente en la figura 1-4. Un foco radiactivo situado a la izquierda emite partículas α. Gruesas pantallas de plomo detienen todas las partículas, excepto las que se encuentran en un estrecho haz definido por pequeños orificios. El haz pasa entonces a través de una lámina metálica delgada (se emplearon oro, plata y cobre) e incide sobre una placa recubierta de sulfuro de cinc. Puede observarse un centelleo momentáneo sobre la pantalla cuando es alcanzada por una partícula α, y es posible determinar, por

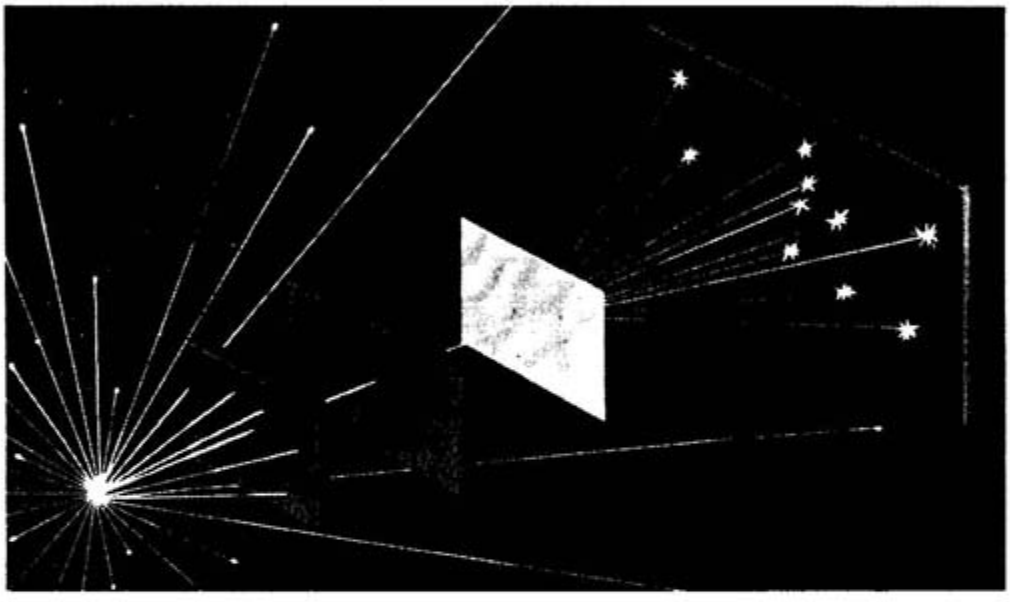


FIG. 1-4.—Dispersión de las partículas α por una lámina metálica delgada.

consiguiente, el número de partículas que han sido desviadas un ángulo cualquiera de su dirección inicial.

De acuerdo con el modelo de Thomson, los átomos de un sólido están pegados unos a otros, empaquetados como bolas dentro de una caja. El hecho experimental de que una partícula α pueda pasar en línea recta a través de una hoja metálica, obliga a admitir, si este modelo es correcto, que la partícula α es capaz de penetrar realmente las esferas de carga positiva. Admitido que esto es posible, se puede calcular la desviación que tendría lugar. El átomo de Thomson es eléctricamente neutro y, por tanto, exteriormente al átomo no se ejercería ninguna fuerza sobre la partícula α. Dentro del átomo la fuerza eléctrica sería debida, en parte, a los electrones, y en parte, a la esfera de carga positiva. Sin embargo, la masa de una partícula α es unas 7400 veces la del electrón, y a partir de consideraciones sobre la cantidad de movimiento se deduce que la partícula α sólo puede sufrir desviaciones despreciables como consecuencia de las fuerzas que se originan entre ella y la masa mucho más pequeña de los electrones. Sólo las acciones mutuas con la carga positiva, que constituye casi toda la masa del átomo, pueden desviar la partícula α.

La fuerza eléctrica sobre una partícula α dentro de una esfera de carga positiva es igual a la fuerza gravitatoria sobre una masa puntual colocada dentro de una esfera, excepto que las fuerzas de gravitación son atractivas, mientras que la fuerza entre dos cargas positivas es una repulsión. El campo gravitatorio dentro de una esfera es nulo en el centro y aumenta proporcionalmente con la distancia a éste, a causa de que la parte de masa de la esfera que se encuentra *fuera* de un radio cualquiera no ejerce fuerza sobre los puntos interiores. La partícula α es *repelida*, por tanto, desde el centro de la esfera con una fuerza proporcional a su distancia al centro (véase problema 2-13), y su trayectoria puede calcularse para una dirección inicial cualquiera de aproximación, tal como la de la figura 1-5 (*a*). Sobre la base de estos cálculos, Rutherford predijo el número de partículas que debían ser desviadas un ángulo cualquiera de su dirección inicial.

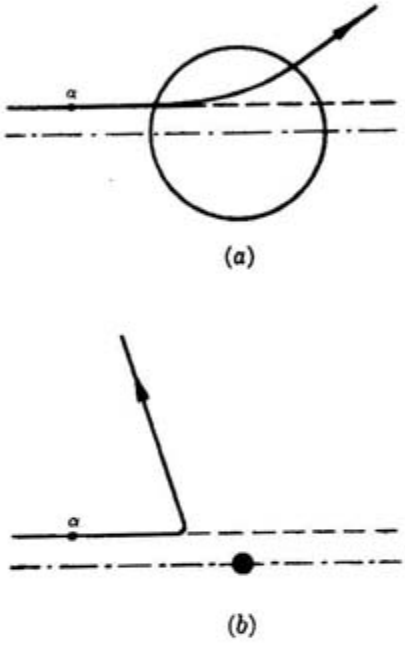


FIG. 1-5.—(*a*) Partícula α desviada un pequeño ángulo por el átomo de Thomson. (*b*) Partícula α desviada un ángulo grande por el átomo nuclear de Rutherford.

Los resultados experimentales no coinciden con los cálculos basados sobre el átomo de Thomson. En realidad, muchas partículas fueron desviadas ángulos mayores que los predichos. Teniendo en cuenta los grandes ángulos de desviación observados, Rutherford dedujo que la carga positiva, en lugar de estar distribuída sobre una esfera de dimensiones atómicas (2 ó 3×10^{-8} cm), estaba concentrada en un volumen mucho más pequeño cuyas dimensiones sólo eran alrededor de una diezmilésima del valor anterior, o sea 10^{-12} cm, y que él llamó *núcleo*. Cuando una partícula α se aproxima a una carga de estas dimensiones, toda la carga ejerce un efecto de repulsión sobre ella desde distancias extraordinariamente pequeñas, con la consecuencia de que pueden producirse desviaciones mucho mayores. La figura 1-5 (*b*) muestra la trayectoria de una partícula α desviada por un átomo nuclear de Rutherford, para la misma trayectoria inicial que la parte (*a*) de la figura.

Rutherford calculó de nuevo el número de partículas que cabría esperar se desviaran un ángulo cualquiera, suponiendo se cumplía la ley de la proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia para la fuerza ejercida entre la partícula α (también un núcleo) y un núcleo cuyas dimensiones eran inferiores a 10^{-12} cm. Dentro de los límites de precisión experimental, los resultados observados y calculados coinciden comple-

tamente. Podemos decir, por consiguiente, que estos experimentos comprueban la ley de Coulomb para cargas *puntuales*, y al mismo tiempo miden el tamaño del núcleo.

Todo estudiante de física debería leer el informe de Rutherford sobre estas investigaciones en el *Philosophical Magazine*, vol. 21, pág. 669 (1911).

1-6. Sistemas de unidades.—El lector recordará que muchas de las ecuaciones de mecánica resultaban más sencillas si las unidades de *fuerza*, *masa* y *aceleración* se elegían de tal modo que la constante de proporcionalidad k de la segunda ley de Newton ($F = kma$) fuera igual a la unidad. La constante de proporcionalidad puede hacerse así desaparecer de muchas ecuaciones en las cuales aparece en caso contrario. Se consigue una simplificación análoga en algunas de las ecuaciones de electricidad y magnetismo si se adopta el mismo procedimiento con respecto a la ley de Coulomb, esto es, si las unidades de fuerza, distancia y *cantidad de electricidad* se eligen de tal modo que la constante de proporcionalidad de la ley de Coulomb sea igual a la unidad.

Mientras que algunos de los sistemas usuales de unidades eléctricas se han establecido con este criterio, hay otros en los cuales las unidades de fuerza, distancia y carga se definen independientemente de la ley de Coulomb, con la consecuencia de que la constante de proporcionalidad no es igual a la unidad y ha de arrastrarse en todas las ecuaciones que se deducen de esta ley.

Actualmente la formulación de las ecuaciones de la electricidad y del magnetismo se encuentra en estado de transición, y no existe acuerdo general respecto a los símbolos y a la terminología. Se puede elegir media docena de libros o artículos al azar, y se encontrará un sistema diferente de unidades en cada uno. Todos tienen algo en su favor, y cualquiera que hubiera sido el sistema que hubiésemos adoptado en este libro, el lector podría estar seguro de encontrar otros sistemas en estudios más avanzados y en las referencias a trabajos ya publicados.

Durante muchos años las ecuaciones de electrostática se han escrito utilizando unidades del sistema *electrostático*, mientras que las ecuaciones que se referían a fenómenos magnéticos utilizaban el sistema *electromagnético*. Las unidades de una misma magnitud no tienen el mismo valor en los dos sistemas; p. ej., la unidad electromagnética de carga es 3×10^{10} veces la unidad electrostática. Además, las unidades del sistema *práctico*, tales como los conocidos voltio, amperio y ohmio, difieren de las correspondientes unidades en los dos sistemas anteriores. Por tanto, ha sido costumbre conservar estos tres sistemas de unidades y arrastrar los factores necesarios para pasar de uno a otro.

Las unidades mecánicas, tanto en el sistema electrostático como en el electromagnético, son las mismas, e iguales a las del sistema cgs, es decir, gramo, centímetro, dina, etc. Se hizo notar hace relativamente poco tiempo que, con algunos cambios de importancia secundaria, las unidades del conocido sistema práctico proporcionarían un sistema único adaptado a la electricidad y al magnetismo si, en lugar de las unidades mecá-

nicas cgs, se adoptaban las mks, es decir, el kilogramo, el metro, el newton, etc. No hay duda de que este sistema, en una forma u otra, será adoptado universalmente con el tiempo y, por esta razón, es el que utilizaremos en este libro. Cuando se haya logrado, si se consigue alguna vez, coincidir en la forma precisa que deberían tomar las ecuaciones, es seguro afirmar que únicamente diferirán de las nuestras en los símbolos y nombres utilizados para designar algunas magnitudes, y quizá en la colocación del factor 4π.

Aunque sólo nos referiremos ocasionalmente al sistema electrostático, es necesario tener alguna costumbre de utilizarlo a causa del gran número de libros, artículos y tablas de datos que ya existen en los cuales se emplea este sistema. En el sistema electrostático, las fuerzas se expresan en dinas; las distancias, en centímetros, y la unidad de carga se elige de tal forma que la constante de proporcionalidad de la ley de Coulomb sea igual a la unidad. Esta ley, con $k = 1$, *define* entonces la unidad de carga en este sistema. Dicha unidad [1] puede definirse, según esto, como *la carga que repele a otra igual y del mismo signo, con una fuerza de una dina cuando ambas cargas están a la distancia de un centímetro*, y aplicadas a cuerpos cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con un centímetro. La ley de Coulomb toma la forma sencilla

$$F = \frac{qq'}{r^2} \qquad [1\text{-}3]$$

En el sistema mks, las fuerzas se expresan en newtons y las distancias en metros. La unidad de carga no se define por la ley de Coulomb sino en función de la unidad de intensidad de corriente, el amperio (véase sección 11-4). La unidad mks de carga se denomina *culombio* y se define como la cantidad de carga que atraviesa, por segundo, una sección de un conductor en el cual circula una corriente constante de un amperio. El culombio es, con mucha aproximación, igual a 3×10^9 veces la unidad electrostática. (El valor exacto es

$$1 \text{ coul} = 2{,}99790 \times 10^9 \text{ unidades electrostáticas}).$$

El culombio es una cantidad de carga relativamente grande, y para muchos fines resulta de magnitud más adecuada el *microculombio* ($=10^{-6}$ culombios).

La unidad *natural* de carga eléctrica es la carga transportada por un electrón o un protón. Las medidas más precisas que se han realizado hasta el presente dan para esta carga el valor:

$$\begin{aligned} e &= 1{,}601864 \times 10^{-19} \text{ coul} \\ &= 4.80223 \times 10^{-10} \text{ unidades electrostáticas.} \end{aligned}$$

Una unidad electrostática representa, por tanto, la carga transportada por $2{,}08 \times 10^9$ electrones, y un culombio, la carga de unos 6×10^{18} elec-

[1] El autor llama a esta unidad *statcoulomb* aplicando el prefijo *stat* a las unidades del sistema electrostático, pero la denominación equivalente no se utiliza en nuestro idioma. *(N. del T.)*

trones. Como comparación, la población total de la Tierra se estima en unas 2×10^9 personas, mientras que, por otra parte, un cubo de cobre de un centímetro de arista contiene alrededor de 8×10^{22} electrones libres.

Puesto que las unidades de carga, fuerza y distancia en el sistema mks se han definido independientemente de la ley de Coulomb, el valor numérico de la constante de proporcionalidad k en este sistema tiene que determinarse experimentalmente. En principio, el experimento consistiría en medir la fuerza, en newtons, entre dos cargas puntuales cuyas cargas se hubieran medido en culombios y la distancia que las separa en metros. La Ec. [1-2] permite despejar el valor de k. En la práctica, el valor de k se determina indirectamente. El valor numérico más exacto es:

$$k = 8{,}98742 \times 10^9.$$

Para muchos fines, el valor aproximado $k = 9 \times 10^9$ es suficientemente preciso.

En cualquier sistema de unidades, las dimensiones de k son las de fuerza $\times$ distancia$^2 \div$ carga^2. Por tanto, en el sistema electrostático,

$$k = 1 \frac{\text{dina-cm}^2}{\text{unidad electrostática}^2},$$

y en el sistema mks,

$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{new-m}^2}{\text{coul}^2}$$

Con objeto de evitar la aparición del factor 4π en otras ecuaciones derivadas de la ley de Coulomb, y que se usan más frecuentemente que la misma ley, definimos una nueva constante ε_0 por la relación

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k},$$

o bien,

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

y escribimos la ley de Coulomb en la forma

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}} \qquad [1\text{-}4]$$

Del valor numérico de k dado anteriormente se deduce que, en el sistema mks,

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} = 8{,}85 \times 10^{-12} \frac{\text{coul}^2}{\text{new-m}^2}}$$

mientras que el factor $1/4\pi\varepsilon_0$ es:

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k = 9 \times 10^9 \frac{\text{new-m}^2}{\text{coul}^2}}$$

Cuando se escribe explícitamente el factor 4π en la definición de ε_0, como hemos hecho aquí, se obtiene el llamado *sistema mks racionalizado*. Muchos autores eligen para definir ε_0 la ecuación

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{k},$$

en lugar de

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$$

La ley de Coulomb se escribe entonces

$$F = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2},$$

y el valor numérico de ε_0 definido de este modo es:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{k} = \frac{1}{9 \times 10^9} = 1{,}11 \times 10^{-10}$$

Este método de definir ε_0 conduce al llamado *sistema mks no racionalizado*. Ha de tenerse mucho cuidado, cuando se estudian otros libros o revistas, de cerciorarse si el autor utiliza el sistema racionalizado o el no racionalizado. En este libro sólo se empleará el primero.

EJEMPLO.—Calcúlese la fuerza electrostática de repulsión entre dos partículas α separadas una distancia de 10^{-11} cm, y compárese con la fuerza de atracción gravitatoria que existe entre ellas.

Cada partícula α tiene una carga de $+2e$, o sea, $2 \times 1{,}60 \times 10^{-19} = 3{,}20 \times 10^{-19}$ culombios. La fuerza de repulsión a una distancia de 10^{-11} cm, o sea, 10^{-13} m, es:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$$

$$= 9 \times 10^9 \frac{(3{,}20 \times 10^{-19})^2}{(10^{-13})^2}$$

$$= 9{,}18 \times 10^{-2} \text{ new},$$

y puesto que 1 new $= 10^5$ dinas,

$$F = 9180 \text{ dinas}.$$

Esta es una fuerza relativamente grande, que equivale (aproximadamente) a un peso de 10 g.

La masa de una partícula α (2 protones + 2 neutrones) es:

$$4 \times 1{,}67 \times 10^{-24} = 6{,}68 \times 10^{-24} \text{ g} = 6{,}68 \times 10^{-27} \text{ Kg}.$$

La constante γ de gravitación es:

$$\gamma = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{\text{new-m}^2}{\text{Kg}^2}$$

La fuerza de atracción gravitatoria es:

$$F = \gamma \frac{mm'}{r^2}$$

$$= 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{(6{,}68 \times 10^{-27})^2}{(10^{-13})^2}$$

$$= 2{,}97 \times 10^{-37} \text{ new.}$$

La fuerza de atracción gravitatoria es, evidentemente, despreciable comparada con la fuerza de atracción electrostática.

PROBLEMAS

1-1. *a*) Una carga puntual de + 80 unidades electrostáticas dista 5 cm de una carga puntual de −60 unidades electrostáticas. ¿Qué fuerza en dinas ejerce cada carga sobre la otra? *b*) Una carga puntual de + 14,4 unidades electrostáticas está a 4 cm de la carga positiva citada en *a*) y a 3 cm de la carga negativa. ¿Cuál es la fuerza resultante ejercida sobre ella?

1-2. Dos esferas muy pequeñas, cada una de las cuales pesa 3 dinas, están sujetas a hilos de seda de 5 cm de longitud y penden de un punto común. Cuando se suministra a las esferas una cantidad igual de carga negativa, cada hilo forma un ángulo de 30° con la vertical. Calcúlese el valor de las cargas.

1-3. Se demostrará en el capítulo siguiente que cuando a una esfera conductora cargada, de 1 cm de radio, y situada en el aire, se le proporciona una carga superior a unos 3×10^{-8} coul, el aire que rodea a la esfera se hace conductor y la carga *escapa*. Utilícese la cifra anterior como carga máxima que una esfera de este radio puede retener en el aire y calcúlese la fuerza máxima entre dos esferas cuando la distancia entre sus centros es de 10 cm.

1-4. Un gramo de hidrógeno monoatómico contiene $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos que se componen de un núcleo cargado positivamente y un único electrón exterior. Si todos los electrones contenidos en 1 g de hidrógeno pudieran concentrarse en el polo Norte de la Tierra, y todos los núcleos en el polo Sur, ¿cuál sería, en toneladas, la fuerza de atracción entre ellos? El radio polar de la Tierra tiene 6357 Km.

1-5. Los experimentos de Rutherford demostraron que la ley de Coulomb se cumplía para la fuerza de repulsión de dos núcleos, hasta una distancia de unos 10^{-12} cm. El núcleo del átomo de oro contiene 118 neutrones y 79 protones, y el núcleo de helio (una partícula α) contiene dos protones y dos neutrones. *a*) ¿Cuál es la fuerza de repulsión, en newtons, entre un núcleo de oro y una partícula α, cuando la distancia que los separa es 10^{-12} cm? *b*) Hállese la aceleración de una partícula α cuando está sometida a dicha fuerza.

1-6. En el modelo de Bohr correspondiente al átomo de hidrógeno, un electrón describe una órbita circular alrededor de un núcleo que contiene un solo protón. Si el radio de la órbita es $5{,}28 \times 10^{-9}$ cm, calcúlese el número de revoluciones que da el electrón por segundo. La fuerza de atracción electrostática entre protón y electrón proporciona la fuerza centrípeta.

CAPÍTULO II

CAMPO ELÉCTRICO

2-1. Campo eléctrico.—La figura 2-1 (*a*) representa dos cuerpos cargados positivamente, *A* y *B*, entre los cuales se origina una fuerza eléctrica de repulsión, *F*. Como la fuerza de gravitación universal, esta fuerza es del tipo de las de acción a distancia, y se manifiesta sin que exista ninguna conexión material entre *A* y *B*. Nadie sabe *por qué* es esto posible; es un hecho experimental que los cuerpos cargados se comportan de este modo. Resulta útil, sin embargo, imaginar que cada uno de los cuerpos cargados modifica las propiedades del espacio que lo rodea, de modo que éstas difieren en algo, sea lo que fuere, de las correspondientes a dicho espacio cuando no estaban presentes los cuerpos cargados. Así, supongamos que quitamos el cuerpo *B* y sea ahora *P* [Fig. 2-1 (*b*)] el punto del

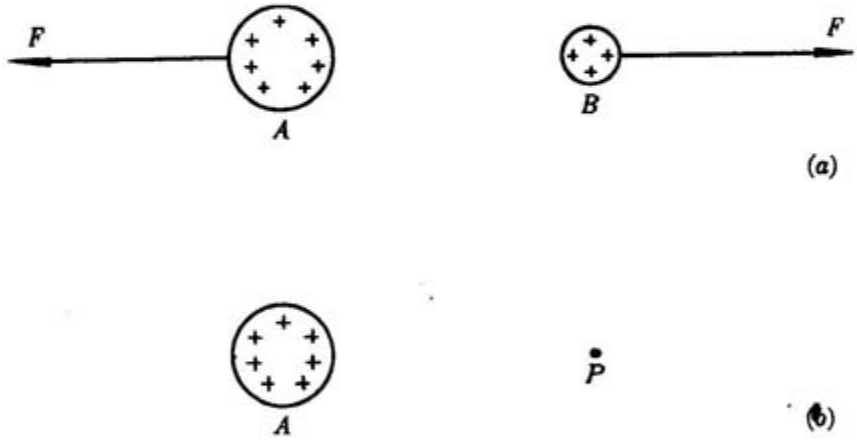


FIG. 2-1.—El espacio que rodea a un cuerpo cargado es un campo eléctrico.

espacio en el cual estaba colocado anteriormente el cuerpo *B*. Se dice que el cuerpo cargado *A* produce o crea un *campo eléctrico* en el punto *P*, y si el cuerpo cargado *B* está ahora colocado en *P*, podemos considerar que esta fuerza es ejercida sobre *B por el campo* y no por el cuerpo *A* directamente. Puesto que esta fuerza sería experimentada por el cuerpo *B* en todos los puntos del espacio que rodea al cuerpo *A*, dicho espacio es un campo eléctrico.

Se puede considerar igualmente que el cuerpo *B* crea un campo, y que se ejerce una fuerza sobre el cuerpo *A* por el campo de *B*.

La comprobación experimental de la existencia de un campo eléctrico en un punto consiste simplemente en colocar un cuerpo cargado en dicho punto, cuerpo que se denominará *carga de prueba*. Si se ejerce una fuerza

(de origen eléctrico) sobre el cuerpo cargado, existe un campo eléctrico en el punto.

Se dice que existe un campo eléctrico en un punto si sobre un cuerpo cargado colocado en dicho punto se ejerce una fuerza de origen eléctrico.

Puede determinarse si la fuerza es de origen eléctrico o no, comparando las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo de prueba cuando está cargado y cuando está descargado. Cualquier fuerza que se observe cuando el cuerpo está cargado, y no exista cuando está descargado, es una fuerza de origen eléctrico. Así una bolita de medula de saúco descargada experimenta una fuerza debida a su peso, aunque no haya ningún cuerpo cargado en su proximidad. Esta fuerza no es debida a causas eléctricas, puesto que la bola no pesa más cuando está cargada. Sin embargo, si se coloca junto a la bolita un segundo cuerpo cargado, la fuerza sobre ella es diferente cuando tiene carga que cuando no la tiene. Esta variación de la fuerza indica la existencia de un campo eléctrico, debido a la presencia del segundo cuerpo cargado.

Puesto que la fuerza es una magnitud vectorial, el campo eléctrico es también una magnitud vectorial, que tiene a la vez dirección y módulo. El *valor* del campo en cualquier punto, representado por E, se define como el *cociente obtenido al dividir la fuerza F ejercida sobre un cuerpo de prueba colocado en el punto, por la cantidad de carga q' del cuerpo de prueba:*

$$\boxed{E = \frac{F}{q'}} \qquad [2\text{-}1]$$

En otras palabras, el valor de un campo eléctrico es la *fuerza por unidad de carga.*

La *dirección* de un campo eléctrico en un punto es la *dirección de la fuerza ejercida sobre una carga de prueba positiva colocada en el punto.* La fuerza sobre una carga negativa, tal como un electrón, es, por consiguiente, opuesta a la dirección del campo.

Se utilizan varias expresiones para referirse al *vector campo eléctrico* en un punto, tales como intensidad del campo eléctrico, intensidad del campo, o simplemente, *campo eléctrico.*

En el sistema mks, en el cual las fuerzas están expresadas en newtons y las cargas en culombios, la unidad de intensidad del campo eléctrico es el *newton por culombio.* Más adelante se definirán otras unidades en las cuales puede expresarse la intensidad de un campo eléctrico.

La Ec. [2-1] puede escribirse

$$F = q'E. \qquad [2\text{-}2]$$

Esto es, la fuerza ejercida sobre una carga q' en un punto en que la intensidad del campo eléctrico es E, es igual al producto de la intensidad del campo por la carga.

El significado de muchas de las ecuaciones de la electricidad y del magnetismo resulta mucho más evidente si se escriben de tal forma que destaque en ellas la naturaleza escalar o vectorial de las magnitudes que intervienen. Aunque desarrollaremos el cálculo sin utilizar notación vectorial, algunas de las relaciones más impor-

tantes se darán en forma vectorial; p. ej., puesto que el campo eléctrico y la fuerza son vectores, mientras que la carga q' es un escalar, la Ec. [2-2] se escribe con notación vectorial:

$$\vec{F} = q'\vec{E} \qquad [2\text{-}3]$$

Esto indica a la vez que los vectores tienen el mismo sentido si q' es positiva, y sentido opuesto si es negativa.

EJEMPLO 1.—Demostraremos en el capítulo siguiente que cuando se conectan los bornes de una batería de 100 V a dos láminas paralelas separadas 1 cm, la intensidad del campo eléctrico en el espacio comprendido entre las láminas es 10^4 new/coul. Supongamos que tenemos un campo de esta intensidad dirigido verticalmente hacia arriba; calcúlese la fuerza ejercida por este campo sobre un electrón y compárese con el peso de éste.

Carga del electrón $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ coul.

Masa del electrón $m = 9{,}1 \times 10^{-28}$ g $= 9{,}1 \times 10^{-31}$ Kg.

$$F_{\text{eléctrica}} = eE = 1{,}60 \times 10^{-19} \times 10^4 = 1{,}60 \times 10^{-15} \text{ new.}$$

$$F_{\text{gravitatoria}} = mg = 9{,}1 \times 10^{-31} \times 9{,}8 = 8{,}9 \times 10^{-30} \text{ new.}$$

La razón de la fuerza eléctrica a la fuerza gravitatoria es, por consiguiente,

$$\frac{1{,}6 \times 10^{-15}}{8{,}9 \times 10^{-30}} = 1{,}8 \times 10^{14}.$$

Se ve que la fuerza gravitatoria es despreciable.

EJEMPLO 2.—¿Qué velocidad adquirirá el electrón del ejemplo anterior, partiendo del reposo, cuando haya recorrido 1 cm? ¿Cuál será entonces su energía cinética? ¿Cuánto tiempo necesita para recorrer dicha distancia?

Siendo la fuerza constante, el electrón se mueve con movimiento uniformemente acelerado, de aceleración

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{1{,}6 \times 10^{-19} \times 10^4}{9{,}1 \times 10^{-31}} = 1{,}8 \times 10^{15} \text{ m/seg}^2.$$

Su velocidad después de haber recorrido 1 cm ó 10^{-2} m es:

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \times 1{,}8 \times 10^{15} \times 10^{-2}} = 6{,}0 \times 10^6 \text{ m/seg.}$$

Su energía cinética:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}1 \times 10^{-31} \times (6{,}0 \times 10^6)^2 = 16 \times 10^{-18} \text{ julios.}$$

El tiempo necesario:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{6{,}0 \times 10^6}{1{,}8 \times 10^{15}} = 3{,}3 \times 10^{-9} \text{ seg.}$$

EJEMPLO 3.—Si se hace que el mismo electrón penetre en el campo con una velocidad horizontal, hállese la ecuación de su trayectoria (Fig. 2-2).

El sentido del campo es hacia arriba en la figura 2-2, de modo que la fuerza sobre el electrón es hacia abajo. La velocidad inicial es en el sentido positivo del eje X.

La aceleración según el eje X es cero, y la aceleración según el eje Y es $-\frac{eE}{m}$. Por consiguiente, al cabo de un tiempo t,

$$x = v_0 t; \quad y = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2.$$

La eliminación de t da:

$$y = -\frac{eE}{2mv_0^2}x^2,$$

que es la ecuación de una parábola. El movimiento es el mismo que el de un cuerpo lanzado horizontalmente en el campo gravitatorio terrestre. La desviación de los electrones por un campo eléctrico se utiliza para controlar la dirección de una corriente de electrones en muchos dispositivos electrónicos, tales como el oscilógrafo de rayos catódicos.

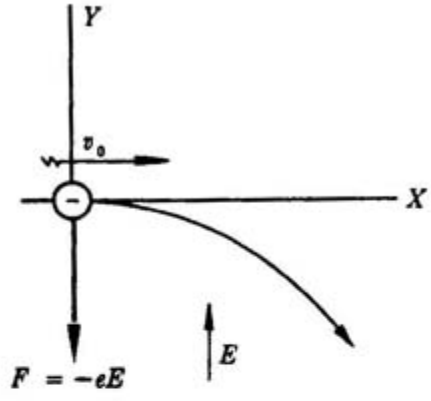


FIG. 2-2.—Trayectoria de un electrón en un campo eléctrico.

2-2. Cálculo de la intensidad del campo eléctrico.—En la sección precedente se describe un procedimiento experimental para medir la intensidad del campo eléctrico en un punto, que consiste en colocar en dicho punto una carga de prueba, medir la fuerza que se ejerce sobre ella y calcular la razón de la fuerza a la carga. La intensidad del campo eléctrico en un punto puede calcularse también partiendo de la ley de Coulomb si se conocen los valores y las posiciones de las cargas que crean el campo. Así, para calcular la intensidad del campo eléctrico en un punto P del espacio, separado una distancia r de una carga puntual q, imaginemos una carga de prueba q' colocada en P. La fuerza sobre la carga de prueba es, en virtud de la ley de Coulomb,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2},$$

y, por consiguiente, la intensidad del campo eléctrico en P es:

$$\boxed{E = \frac{F}{q'}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

El sentido del campo es tal que se aleja de la carga q si ésta es positiva, y se acerca si es negativa.

Si varias cargas puntuales q_1, q_2, etc., están a distancias r_1, r_2, etc., de un punto dado P, como indica la figura 2-3, cada una ejerce una fuerza sobre la carga de prueba q' colocada en el punto, y la fuerza resultante es la suma geométrica de estas fuerzas:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q'}{r_1^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q'}{r_2^2} + \ldots \text{ (suma geométrica)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q'\left(\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2} + \ldots\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q'\Sigma\frac{q}{r^2} \text{ (suma geométrica).}$$

El campo eléctrico en el punto es:

$$E = \frac{F}{q'},$$

y, por consiguiente,

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Sigma\frac{q}{r^2}} \quad \text{(suma geométrica)} \qquad [2\text{-}4]$$

En la práctica, los campos eléctricos son creados generalmente por cargas distribuídas sobre la superficie de conductores de tamaño finito, y no por cargas puntuales. La intensidad del campo eléctrico se calcula entonces imaginando divididas las cargas distribuídas en cargas infinitesimales dq. La suma de la Ec. [2-4] se convierte entonces en una integral, y

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}} \quad \text{(suma geométrica).} \qquad [2\text{-}5]$$

Cualquiera de las Ecs. [2-1] o [2-5] puede considerarse como definición de la intensidad del campo eléctrico en un punto.

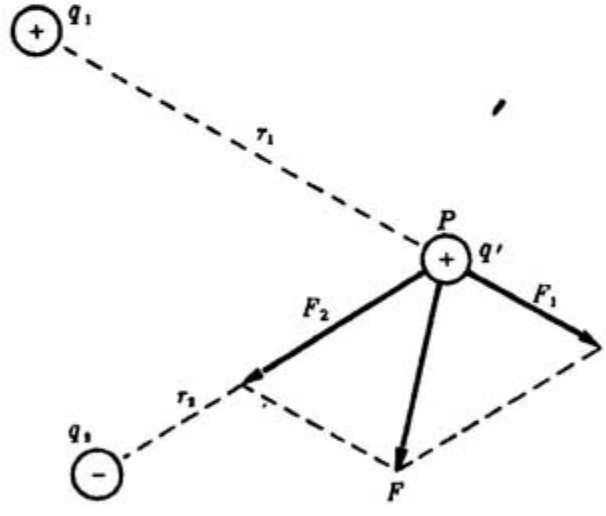


FIG. 2-3.—La fuerza resultante F sobre la carga de prueba q' es la suma geométrica de las fuerzas F_1 y F_2.

La primera define la intensidad del campo eléctrico en un punto a partir de medidas que pueden efectuarse en el punto, y no requiere el conocimiento del valor y posición de las cargas que crean el campo. La segunda permite *calcular* la intensidad en un punto sin tener realmente que efectuar medidas en dicho punto, siempre que se conozca la distribución de las cargas que crean el campo.

La Ec. [2-5] se escribe en forma vectorial como sigue. Sea $\vec{r}$ el vector dirigido desde el elemento de carga dq al punto en el cual se desea calcular el campo. Se tiene:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq\,\vec{r}}{r^3} \qquad [2\text{-}6]$$

El módulo de $\vec{r}/r^3$ es $1/r^2$, de modo que el valor numérico de $dq\,\vec{r}/r^3$ es igual a dq/r^2.

Se observará que la ley de Coulomb para la fuerza que se ejerce entre cargas puntuales es precisamente de la misma forma que la ley de Newton para la fuerza gravitatoria entre masas puntuales:

$$F = \gamma \frac{mm'}{r^2}$$

Por tanto, las definiciones de intensidad de un campo eléctrico son las mismas que las definiciones correspondientes de la intensidad de un campo gravitatorio:

$$G = \frac{F}{m'}, \quad \text{o} \quad G = \gamma \int \frac{dm}{r^2}$$

De la consideración de la forma de estas ecuaciones parecería deducirse que los problemas gravitatorio y eléctrico obedecen al mismo principio. Existen, sin embargo, importantes diferencias entre ellos que dan al concepto de intensidad del campo, en el caso eléctrico, un significado más profundo que en el caso gravitatorio, y hacen su definición, como razón de la fuerza a la carga, preferible a su definición mediante la Ec. [2-5]. La diferencia procede del hecho de que mientras los efectos gravitatorios parecen propagarse a través del espacio con una velocidad infinita, no ocurre lo mismo para los efectos eléctricos (o, más correctamente, los electromagnéticos).

Sean las masas A y B de la figura 2-4 que ocupan en el mismo instante las posiciones representadas por los círculos de trazo lleno. La fuerza gravitatoria ejercida por A sobre B está dirigida directamente hacia A. Movamos ahora A hasta A' a lo largo de la línea de trazos. En el instante en que A es desplazada de su posición inicial, la dirección de la fuerza ejercida sobre B cambia, de tal modo que está dirigida en cada instante hacia la posición ocupada por A en dicho instante.

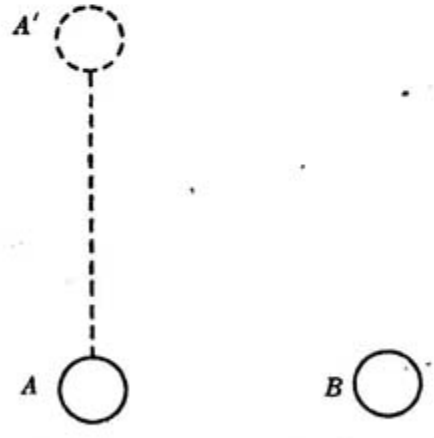


FIG. 2-4.—Acción mutua entre el cuerpo B y un cuerpo A móvil.

Sean ahora A y B dos cargas eléctricas. Si A y B están en reposo, la fuerza ejercida por A sobre B se encuentra sobre la línea que las une y está dada por la ley de Coulomb. Si A comienza a moverse hacia A', la fuerza que actúa sobre B *no modifica su dirección instantáneamente*, sino que transcurre cierto tiempo antes que el cambio en el campo creado por A se haya propagado hasta el punto ocupado por B. La consecuencia de esto es que si la carga A está en movimiento, la fuerza ejercida por ella sobre la carga B no depende de donde se encuentra la carga A *ahora*,

sino de donde se encontraba *hace un instante*. La intensidad del campo eléctrico en B, en cualquier instante, puede definirse como la razón de la fuerza ejercida sobre B en dicho instante a la carga de B, pero no puede calcularse a partir de la ley de Coulomb (o de la Ec, [2-5]) dando a r un valor igual a la distancia instantánea entre A y B. Por consiguiente, la definición de intensidad del campo eléctrico como fuerza por unidad de carga,

$$E = \frac{F}{q'},$$

debe ser considerada como más fundamental que su definición en función de la ley de Coulomb,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^2}$$

Cuando se estudien los fenómenos de *fuerza electromotriz inducida* y *radiación electromagnética*, se pondrá en evidencia otra razón más para adoptar la primera definición. Se verá que es posible tener una fuerza ejercida sobre una carga aun en ausencia de cualesquiera otros cuerpos cargados, siempre que esté presente un campo magnético que varíe con el tiempo.

La velocidad de propagación de los efectos electromagnéticos en el vacío es la misma velocidad de la luz, o sea 3×10^8 m/seg. Por consiguiente, para cargas que se mueven lentamente, el tiempo transcurrido durante la propagación de los efectos eléctricos puede despreciarse y es posible utilizar cualquiera de las dos definiciones de E. Para una discusión más profunda de esta cuestión debe acudirse a una obra más amplia.

Debemos mencionar otra cuestión más, en conexión con las definiciones de intensidad del campo eléctrico. Supongamos que se desea conocer la intensidad del campo eléctrico en un punto del espacio vacío. El campo, en cuanto a fenómenos puramente electrostáticos, es debido a la presencia de cuerpos cargados en la proximidad del punto. Pero si se coloca una carga real de prueba q' en dicho punto, las fuerzas ejercidas por la carga de prueba sobre las cargas primitivas las obligará, en general, a desplazarse de sus posiciones iniciales.

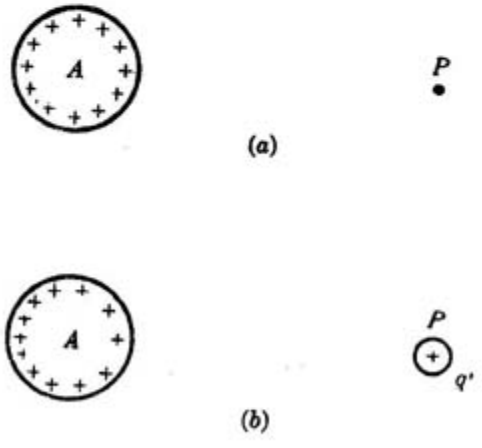


FIG. 2-5.—La introducción de una carga de prueba en un campo eléctrico puede modificar éste.

Supongamos, p. ej., que el cuerpo A de la figura 2-5 (a) sea un conductor esférico con una carga positiva uniformemente distribuída sobre su superficie, y que se desea calcular la intensidad del campo

eléctrico en el punto P del vacío. Si llevamos al punto P una carga positiva de prueba q', la repulsión entre esta carga y las cargas de la esfera ocasionará una distribución de carga no uniforme sobre la esfera, como la indicada en la figura 2-5 (*b*). Aunque la razón de la fuerza observada sobre la carga de prueba al valor de esta carga da *correctamente* la intensidad del campo eléctrico en P, *cuando la carga de prueba está en este punto*, el campo *no* es evidentemente el mismo que *antes* de llevar la carga de prueba al punto.

Por consiguiente, si deseamos definir la intensidad del campo eléctrico en un punto del vacío por la ecuación

$$E = \frac{F}{q'},$$

hemos de postular: *a*) que las cargas que crean el campo se supone no se desplazan por la presencia de la carga de prueba, o *b*) que debe utilizarse una carga de prueba *infinitesimal*. En este último caso la carga de prueba sólo produce una alteración despreciable en la distribución de carga inicial.

Por el contrario, si la intensidad del campo eléctrico en un punto se define por la ecuación

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2},$$

la dificultad anterior no se plantea, puesto que no se utiliza carga de prueba.

EJEMPLO 1.—Calcúlese la intensidad del campo eléctrico a las siguientes distancias de una carga positiva puntual de 10^{-9} coul: 1 mm, 1 cm, 10 cm, 100 cm. Si el campo en un punto cualquiera se representa por un vector utilizando una escala de 1 cm = 10000 new/coul, determínese la longitud del vector campo en cada caso.

La intensidad del campo eléctrico a una distancia r de una sola carga puntual es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{q}{r^2}$$

Para $r = 1$ mm $= 10^{-3}$ m,

$$E = 9 \times 10^9 \times \frac{10^{-9}}{(10^{-3})^2} = 9 \times 10^6 \text{ new/coul.}$$

Para $r = 1$ cm, $E = 9 \times 10^4$ new/coul.
Para $r = 10$ cm, $E = 900$ new/coul.
Para $r = 100$ cm, $E = 9$ new/coul.

Las longitudes correspondientes de los vectores campo son: 9 m, 9 cm, 0,9 mm, 0,009 mm.

En la figura 2-6 se han indicado algunos de los vectores que representan la intensidad del campo eléctrico en puntos situados alrededor de una carga positiva.

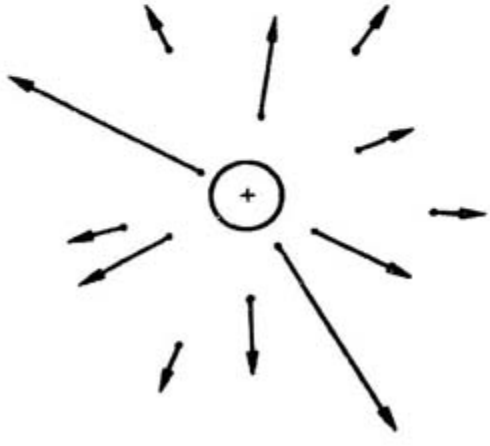


FIG. 2-6.—Intensidad del campo eléctrico en los puntos del campo creado por una carga puntual.

EJEMPLO 2.—Dos cargas puntuales q_1 y q_2, de $+ 12 \times 10^{-9}$ y $- 12 \times 10^{-9}$ coul, están separadas una distancia de 10 cm, como indica la figura 2-7. Calcúlense los campos eléctricos debidos a estas cargas en los puntos a, b y c.

Tenemos que calcular el vector suma geométrica $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Sigma \frac{q}{r^2}$ en cada punto.

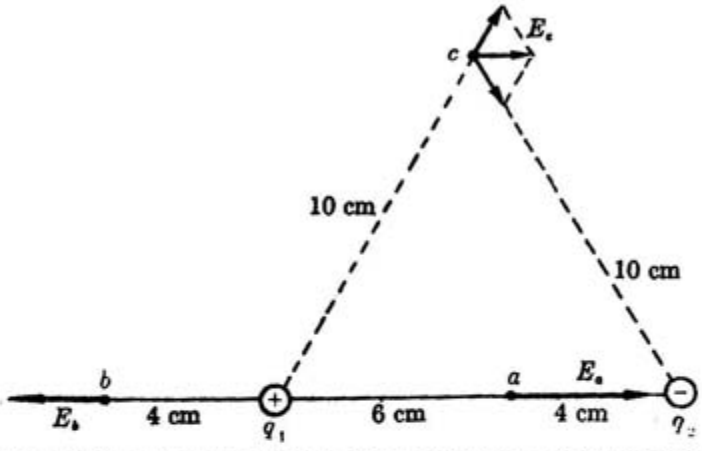


FIG. 2-7.—Intensidad en los tres puntos a, b y c del campo creado por las cargas q_1 y q_2.

En el punto a, el campo debido a la carga positiva está dirigido hacia la derecha y su valor es:

$$9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0{,}06)^2} = 3{,}00 \times 10^4 \text{ new/coul.}$$

El campo debido a la carga negativa está también dirigido hacia la derecha y vale:

$$9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0{,}04)^2} = 6{,}75 \times 10^4 \text{ new/coul.}$$

Por consiguiente, en el punto a,

$E_a = (3{,}00 + 6{,}75) \times 10^4 = 9{,}75 \times 10^4$ new/coul, dirigido hacia la derecha.

En el punto b, el campo debido a la carga positiva está dirigido hacia la izquierda y su valor es:

$$9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0{,}04)^2} = 6{,}75 \times 10^4 \text{ new/coul.}$$

El campo debido a la carga negativa está dirigido hacia la derecha y vale:

$$9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0{,}14)^2} = 0{,}55 \times 10^4 \text{ new/coul.}$$

Por consiguiente, en el punto b,

$E_b = (6{,}75 - 0{,}55) \times 10^4 = 6{,}20 \times 10^4$ new/coul, dirigido hacia la izquierda.

En el punto c, el valor de cada vector campo es:

$$9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{(0{,}1)^2} = 1{,}08 \times 10^4 \text{ new/coul.}$$

Las direcciones de estos vectores están representadas en la figura, y su resultante E_c se ve fácilmente que es

$E_c = 1{,}08 \times 10^4$ new/coul, dirigido hacia la derecha.

2-3. Campo de un dipolo.—El campo creado por dos cargas de igual magnitud, pero de signos opuestos, tiene suficiente importancia para justificar un estudio más amplio. El conjunto de dos cargas iguales y opuestas se denomina *dipolo*. La figura 2-8 representa un dipolo formado por las dos cargas puntuales $+q$ y $-q$, separadas una distancia l.

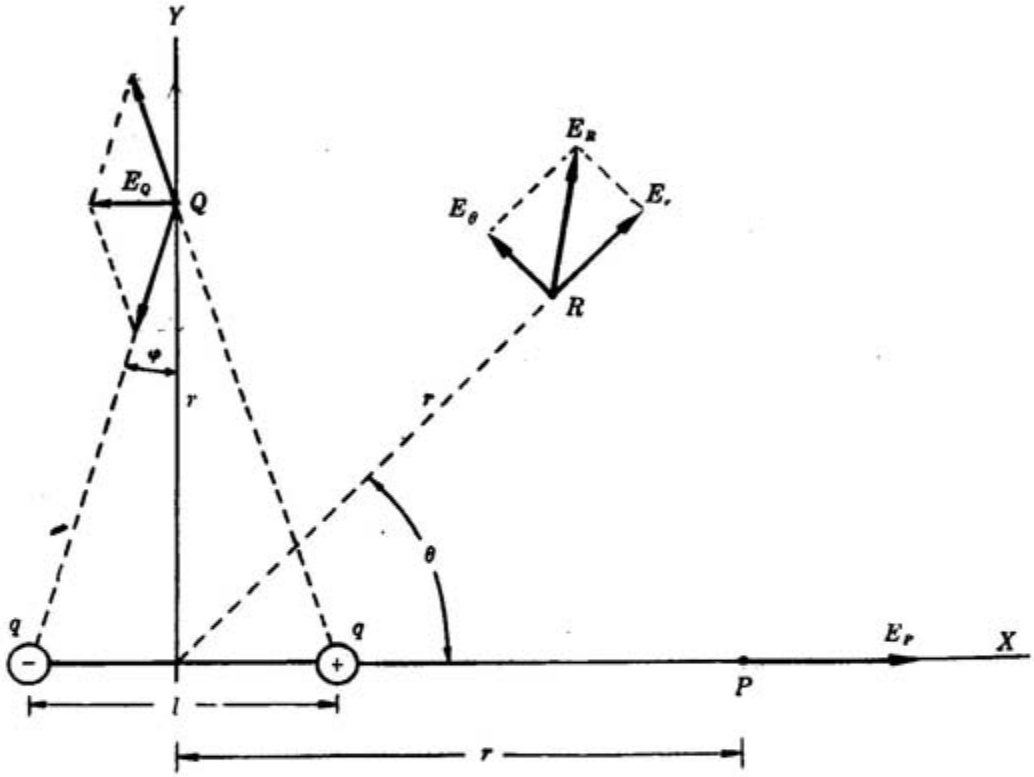


FIG. 2-8.—Intensidad del campo eléctrico en los puntos del campo creado por un dipolo.

Consideremos en primer lugar el campo creado en un punto P situado en la prolongación del eje del dipolo y a una distancia r del centro del mismo. En virtud de la Ec. [2-4] encontramos:

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\, \frac{(r+l/2)^2-(r-l/2)^2}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\, \frac{2rl}{(r^2-l^2/4)^2}$$

Si la distancia l entre las cargas es pequeña comparada con r, el término $l^2/4$ del denominador puede despreciarse frente a r^2 y se obtiene:

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3}$$

Vemos que la intensidad del campo eléctrico es proporcional al producto ql. Este producto se denomina *momento eléctrico* del dipolo. Si para abreviar sustituimos ql por p, se tiene:

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3} \qquad [2\text{-}7]$$

Consideremos ahora el punto Q, sobre el plano bisector del eje del dipolo. El valor del campo creado en Q por cada carga es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}$$

Las componentes de estos campos perpendiculares al eje del dipolo se anulan evidentemente, y ambas componentes paralelas al eje, que valen E sen φ, dan como resultante E_Q:

$$\begin{aligned} E_Q &= 2E \operatorname{sen} \varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}\frac{l/2}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Si r es suficientemente grande frente a l, pueden despreciarse los términos $l^2/4$ del denominador, y la expresión se reduce a

$$E_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3},$$

o sea, en función del momento eléctrico p,

$$E_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} \qquad [2\text{-}8]$$

Vemos, por tanto, que en ambos puntos P y Q la intensidad del campo eléctrico es proporcional al momento eléctrico e inversamente proporcional al *cubo* de la distancia al centro del dipolo (a distancias suficientemente grandes para que las aproximaciones estén justificadas).

El campo eléctrico en cualquier punto tal como R puede calcularse por el método descrito anteriormente, pero es mucho más sencillo utilizar otro método que se explicará en la sección 3-5. Resulta más cómodo utilizar las coordenadas polares, r y θ, y calcular el campo eléctrico en función de sus componentes rectangulares E_r, en el sentido en que aumen-

ta r, y E_θ, en el sentido en que aumenta θ. Las expresiones finales son:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}; \qquad [2\text{-}9]$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p \operatorname{sen} \theta}{r^3}, \qquad [2\text{-}10]$$

siendo l despreciable frente a r.

Se propone como ejercicio demostrar que estas ecuaciones se reducen a las [2-7] o [2-8] cuando los puntos se encuentran sobre los ejes X o Y.

2-4. Campo debido a una distribución continua de carga.—Hasta ahora solamente hemos calculado los campos creados por una o más cargas puntuales. En la práctica se encuentran casi siempre campos creados por cargas localizadas sobre cuerpos de tamaño finito. El cálculo de tales campos es extremadamente complicado, si no imposible, excepto para cuerpos de forma geométrica sencilla tales como hilos, planos, cilindros o esferas. Además, si los cuerpos cargados están sumergidos en un líquido o en un gas, o si existen en su proximidad otros cuerpos cargados, se producirán las llamadas cargas *inducidas* en el interior o en la superficie de estos cuerpos, lo que constituye una complicación más del problema. Por ello sólo consideraremos por ahora cuerpos cargados de forma geométrica sencilla y en el vacío.

Comencemos con el ejemplo de un largo hilo que tiene una carga positiva distribuída uniformemente a lo largo de él. Se desea calcular

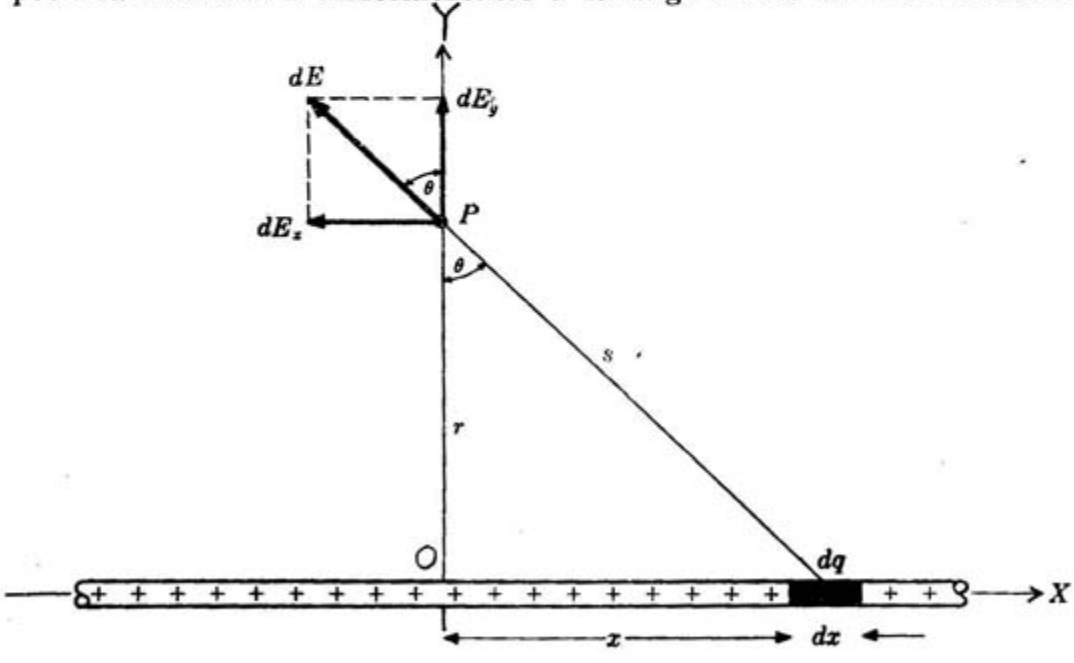


FIG. 2-9.—Intensidad del campo eléctrico en un punto próximo a un hilo uniformemente cargado.

la magnitud, dirección y sentido del campo eléctrico en un punto P, figura 2-9, situado a una distancia r del hilo. El radio de éste se supone lo bastante pequeño para que pueda considerarse como una línea geométrica.

Dividamos el hilo en cortos segmentos de longitud dx, cada uno de los cuales puede ser considerado como una carga puntual dq. El campo resultante en un punto cualquiera se obtiene sumando (vectorialmente) los campos creados por todas estas cargas puntuales. En el punto P, el elemento dq crea un campo de magnitud

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{s^2}$$

Puesto que los campos de otros elementos no tienen la misma dirección que dE, la intensidad resultante no puede calcularse por integración de esta ecuación. (La integración es un proceso *algebraico*, y no una suma *vectorial*.) Sin embargo, las componentes X e Y de dE pueden integrarse separadamente. Esto es,

$$E_x = \int dE_x = \int dE \operatorname{sen} \theta;$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \cos \theta.$$

Representemos por λ la carga por unidad de longitud de hilo. La carga de un elemento de longitud dx es:

$$dq = \lambda\, dx,$$

y

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\frac{dx}{s^2}$$

La integración puede simplificarse si se sustituye x por θ como variable independiente. De la figura 2-9 se deduce:

$$x = r \operatorname{tg} \theta; \quad dx = r \sec^2 \theta d\theta; \quad s = r \sec \theta.$$

Haciendo estas sustituciones obtenemos:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\int \operatorname{sen} \theta d\theta;$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\int \cos \theta d\theta.$$

Si el hilo es infinitamente largo, los límites de integración varían entre $\theta = -\pi/2$ y $\theta = +\pi/2$, y se obtiene finalmente:

$$E_x = 0; \quad E_y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

El campo eléctrico resultante es, por tanto, perpendicular al hilo, como debía esperarse por razón de simetría. Obsérvese que el campo es inversamente proporcional a la *primera* potencia de la distancia al hilo.

Como segundo ejemplo sea un anillo circular situado en el plano X-Z, con su centro en el origen, según indica la figura 2-10. El radio del anillo es a, y q, la carga positiva que soporta. Se desea calcular el

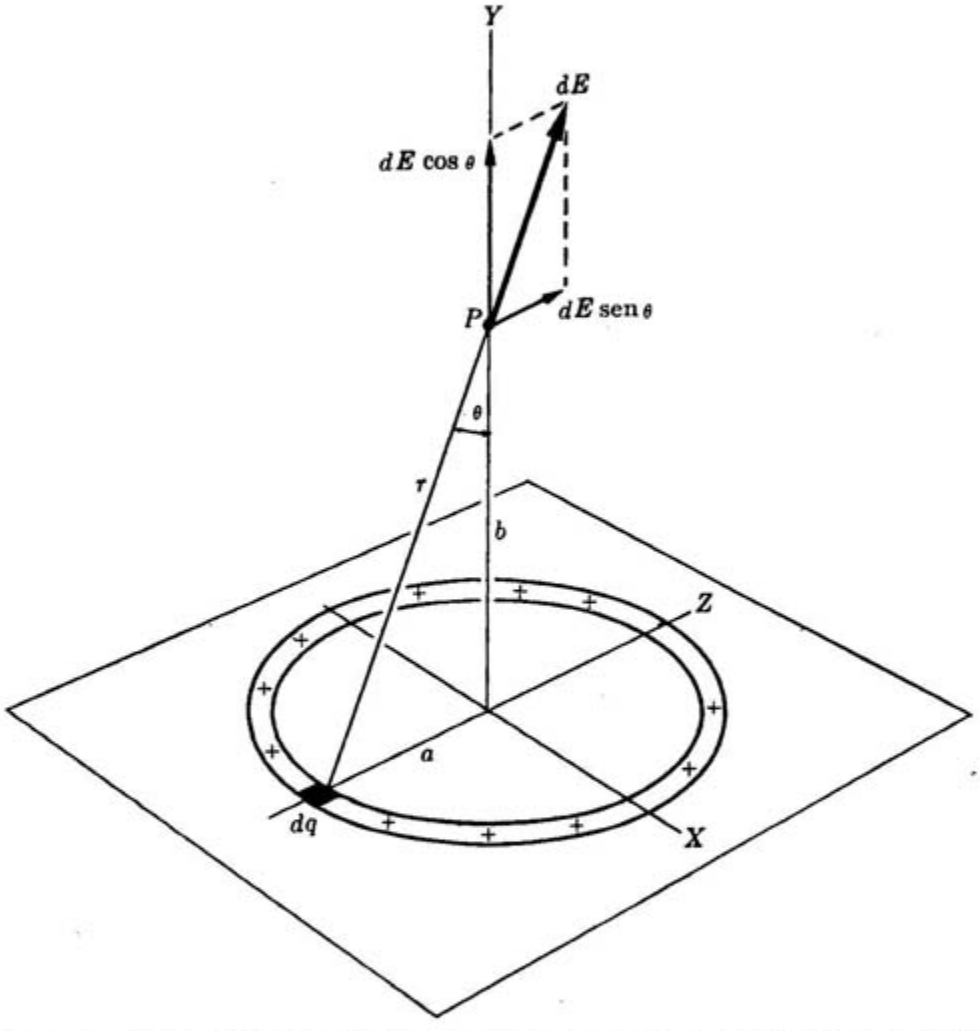


FIG. 2-10.—Intensidad del campo eléctrico en un punto situado sobre el eje de un anillo uniformemente cargado.

campo eléctrico en un punto P situado sobre el eje del anillo, y a una distancia b de su centro.

Un pequeño elemento de anillo cuya carga es dq crea en P un campo dE, de magnitud

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

Se observará que cuando se consideran todos los elementos del anillo, las componentes dE sen θ, perpendiculares al eje, se compensan y el campo resultante en P es la suma de las componentes $dE \cos \theta$. Por tanto,

$$E = \int dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \int dq,$$

o sea,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

En el centro del anillo, donde $b = 0$, resulta $E = 0$, lo que es evidente por razón de simetría. Para distancias tales que a sea muy pequeño comparado con b, puede despreciarse a^2 frente a b^2, y

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{b^2}$$

En otras palabras, a distancias suficientemente grandes, el campo es el mismo que el creado por una carga puntual q.

2-5. Líneas de fuerza.—El concepto de líneas de fuerza fué introducido por Michael Faraday (1791-1867) como un medio auxiliar para representar campos eléctricos (o magnéticos). Una *línea de fuerza* (en un campo eléctrico) es *una línea imaginaria dibujada de modo que su dirección en cada punto* (es decir, la dirección de su tangente) *sea la misma que la dirección del campo en ese punto.* (Véase figura 2-11). Puesto que, en general, la dirección del campo varía de un punto a otro, las líneas de fuerza son ordinariamente curvas.

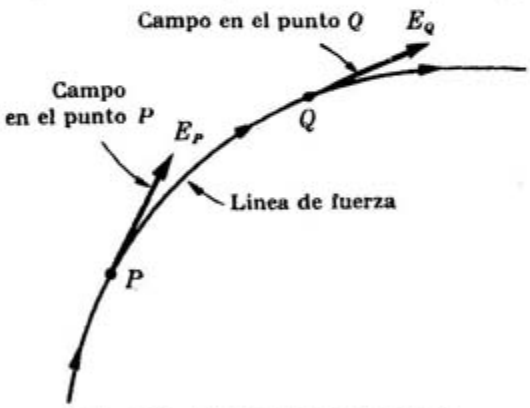


FIG. 2-11.—Línea de fuerza eléctrica.

La figura 2-12 representa algunas de las líneas de fuerza que rodean una sola carga positiva, dos cargas iguales (una positiva y otra negativa) y dos cargas positivas iguales. Un cálculo análogo al de las secciones 2-3 y 2-4 demostrará que la dirección del campo resultante en todo punto de cada uno de los esquemas coincide con la dirección de la tangente a la línea de fuerza que pasa por dicho punto. Las flechas sobre las líneas indican el sentido en que ha de trazarse la tangente.

Es posible, naturalmente, dibujar una línea de fuerza que pase por cada punto de un campo eléctrico, pero si se hiciese esto, toda la superficie del esquema estaría llena de líneas de fuerza, y no podríamos distinguir ninguna de ellas separadamente. Limitando de modo adecuado el número de líneas de fuerza que se dibujan para representar un campo, estas líneas

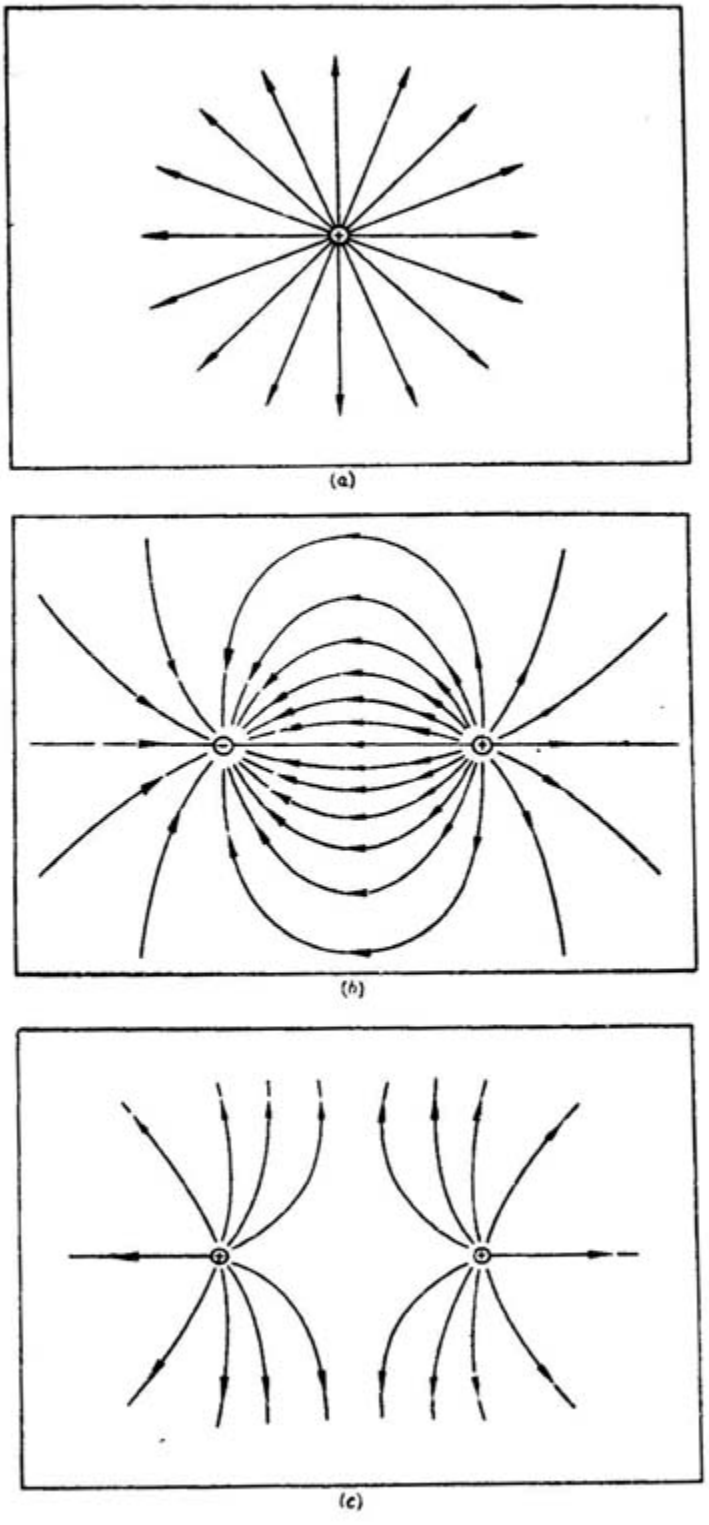


FIG. 2-12.—Representación de un campo eléctrico con ayuda de líneas de fuerza.

pueden utilizarse para indicar la magnitud de un campo al mismo tiempo que su dirección. Esto se consigue espaciando las líneas de fuerza de tal modo que *el número de las que atraviesen la unidad de superficie perpendicular a la dirección del campo, sea igual, en cada punto, al producto de* ε_0 *por la intensidad del campo eléctrico en dicho punto.* En una región donde la intensidad sea grande, las líneas de fuerza estarán apretadas, e inversamente, en una región en que la intensidad sea pequeña, las líneas de fuerza estarán muy espaciadas.

Si la intensidad del campo eléctrico y, por consiguiente, el número de líneas por unidad de área, es la misma en todos los puntos de una superficie de extensión finita perpendicular al campo, el número total de líneas de fuerza N que atraviesan la superficie es:

$$N = \varepsilon_0 E \times A,$$

siendo E la intensidad del campo eléctrico uniforme, y A, el área de la superficie. La condición anterior queda satisfecha en todos los puntos de una superficie esférica de radio cualquiera que tiene en su centro una carga puntual aislada, puesto que la intensidad a una distancia r de una carga q es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

y la dirección del campo es la del radio que parte de la carga, o sea, perpendicular a la superficie esférica. El número total de líneas de fuerza que atraviesan la superficie será, por tanto,

$$N = \varepsilon_0 E \times A = \varepsilon_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = q. \qquad [2\text{-}11]$$

Esto es, el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie es igual a la carga situada en su interior. Este número es independiente del radio de la esfera, de lo cual se deduce que el mismo número de líneas atraviesa *cualquier* esfera concéntrica con la anterior. En otras palabras, ninguna línea de fuerza comienza o termina en el espacio que rodea a la esfera. Esta conclusión resulta cierta en todos los casos. Cada línea de fuerza de un campo eléctrico es una línea continua, terminada por una carga positiva en un extremo y una carga negativa en el otro. Aunque a veces, por comodidad, hablamos de una carga *aislada*, y dibujamos su campo, como en la figura 2-12 (*a*), esto significa simplemente que las cargas sobre las cuales terminan las líneas se encuentran a grandes distancias de la carga considerada; p. ej., si el cuerpo cargado en la figura 2-12 (*a*) es una pequeña esfera suspendida por un hilo del techo del laboratorio, las cargas negativas sobre las cuales terminan estas líneas de fuerza se encuentran en las paredes, suelo, techo o en otros objetos del laboratorio.

En cualquier punto de un campo eléctrico, el vector campo sólo puede tener una dirección y, por consiguiente, por cada punto sólo puede pasar una línea de fuerza. En otras palabras, las líneas de fuerza no se cortan.

Si la intensidad del campo varía de un punto a otro de una superficie, y si ésta no es en todos los puntos perpendicular al campo, el número de líneas que cruzan la superficie puede expresarse como sigue. En la figura 2-13, dA es un elemento infinitesimal de área cuya normal forma un ángulo φ con la dirección de un campo eléctrico. La proyección del área dA sobre un plano perpendicular al campo es $dA \cos \varphi$, y el número de líneas que atraviesan dA es $\varepsilon_0 E\, dA \cos \varphi$, siendo E la intensidad del campo eléctrico en el punto en que está situada dA. El número total de líneas de fuerza que atraviesan un área finita es, entonces,

$$N = \int \varepsilon_0 E\, dA \cos \varphi, \qquad [2\text{-}12]$$

eligiéndose los límites de integración de modo que abarquen toda la superficie.

El término $\cos \varphi$ de la Ec. [2-12] puede asociarse del mismo modo con E, esto es, $E \cos \varphi$ es la componente de E normal a la superficie.

2-6. Teorema de Gauss.—Hemos demostrado en la sección precedente que cualquier superficie esférica que tenga en su centro una carga q es atravesada por q líneas de fuerza. Puesto que estas líneas son continuas, es evidente que el mismo número atravesará una superficie cerrada de forma cualquiera que encierre la misma carga. El *teorema de Gauss* es una generalización de este resultado, y establece que *si se considera una superficie cerrada de forma cualquiera en un campo eléctrico, el número neto de líneas de fuerza que cruzan la superficie hacia afuera es igual a la carga neta positiva dentro de la superficie*[1], independientemente de como estén distribuídas las cargas. Utilizando la Ec. [2-12] como expresión general del número total de líneas de fuerza que atraviesan una superficie en función de la intensidad del campo eléctrico en dicha superficie, el teorema de Gauss se expresa así:

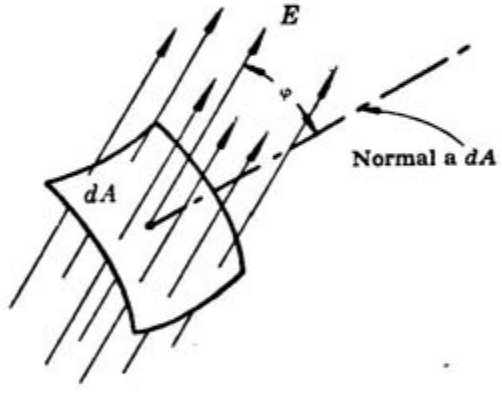


FIG. 2-13.—El campo eléctrico forma un ángulo φ con la normal al elemento de superficie.

$$\int \varepsilon_0 E \cos \varphi\, dA = q, \qquad [2\text{-}13]$$

interpretándose que la integral se extiende a toda la superficie y que q es la carga *neta* positiva que existe dentro de la misma.

Como corolario resulta que, si no hay ninguna carga dentro de la

[1] Véase en la Sec. [7-4] una generalización si la superficie atraviesa materia.

superficie cerrada, el número neto de líneas de fuerza que la atraviesan es cero.

Un elemento de superficie, dA, puede representarse vectorialmente por un vector de longitud proporcional a dA y perpendicular a dA. El teorema de Gauss, en notación vectorial, es:

$$\int \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = q.$$

EJEMPLO.—La figura 2-14 es una representación esquemática de un conjunto de cuerpos cargados, donde se muestran unas pocas líneas de fuerza del campo, y las trazas con el plano de la figura de cuatro superficies cerradas, A, B, C y D. El campo real y las superficies cerradas tienen, naturalmente, tres dimensiones. Cada signo + ó − representa un culombio.

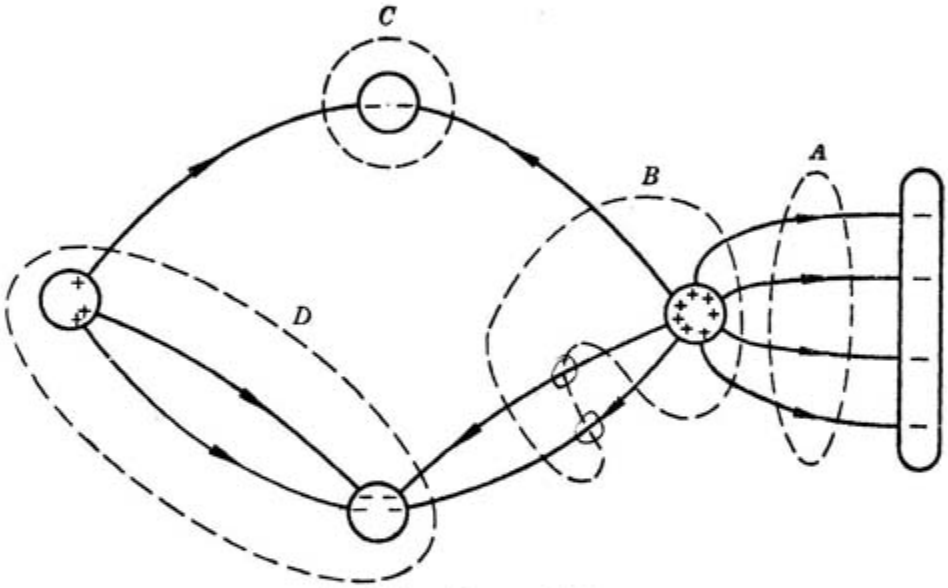


FIG. 2-14.—Teorema de Gauss.

El número de líneas de fuerza que atraviesan cada superficie puede encontrarse a simple vista. Consideremos primero la superficie A. Entran cuatro líneas y salen otras cuatro. No puede terminar ninguna línea dentro de la superficie, puesto que no hay carga dentro de ella. El número neto de líneas de fuerza que cruzan la superficie hacia afuera (cero) es igual a la carga neta dentro de la superficie (también cero).

Consideremos ahora la superficie B, que encierra 7 unidades de carga positiva. La superficie es cortada en 11 puntos, en 9 de los cuales las líneas cruzan en dirección hacia afuera, y en 2, hacia adentro. El número neto de líneas que cruzan hacia afuera es $9 - 2 = 7$, y la carga positiva dentro de la superficie es 7 culombios.

Pueden hacerse, como ejercicio, estudios similares de las superficies C y D.

2-7. Campo y carga dentro de un conductor.—Un conductor es un cuerpo dentro del cual hay cargas libres, esto es, cargas que están libres para moverse siempre que se ejerza una fuerza sobre ellas por un campo eléctrico. Si por cualquier medio se mantiene un campo eléctrico dentro de un conductor, habrá un movimiento continuo de sus cargas libres.

(Este movimiento se denomina corriente). Por otra parte, si no hay ningún campo interior al conductor, no habrá movimiento de sus cargas libres [1]. Podemos invertir el razonamiento y deducir que si las cargas en un conductor están en reposo, el campo dentro del conductor tiene que ser nulo. Con ayuda de este hecho y del teorema de Gauss podemos demostrar ahora que cuando un conductor está cargado, el *exceso* de carga se encuentra enteramente sobre su superficie.

La figura 2-15 (*a*) representa un conductor macizo de forma irregular, al que se ha dado una carga q. Construyamos una superficie (representada por trazos en la figura) que se encuentre dentro del conductor, pero justamente debajo de su superficie. De acuerdo con el teorema de Gauss, el número neto de líneas de fuerza que cruzan esta superficie hacia afuera es igual a la carga positiva neta encerrada por la superficie. Pero si las cargas están en reposo, la intensidad del campo eléctrico en todos los puntos situados dentro del conductor es nula. El número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie de trazos es, por tanto, cero, y en virtud del teorema de Gauss, la carga neta dentro de la superficie es también nula. Toda la carga sobre el conductor tiene que estar, por consiguiente, *fuera* de la superficie de trazos. Pero ésta se encuentra sólo a una distancia infinitesimal dentro de la superficie real del conductor. Por consiguiente, el exceso de carga del conductor está localizado en su superficie.

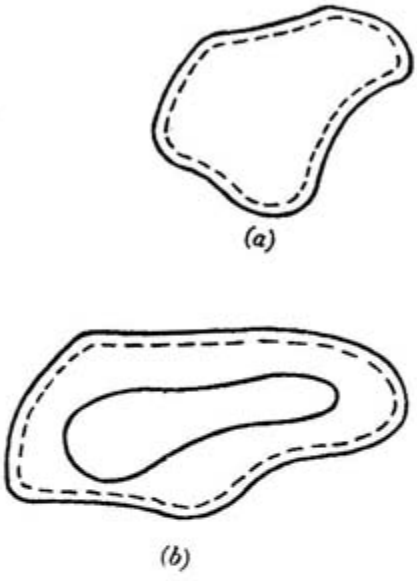


FIG. 2-15.—Aplicación del teorema de Gauss a un conductor.

El resultado acabado de deducir coincide con el que cabía esperar del hecho de existir fuerzas repulsivas entre cargas del mismo signo. Supongamos que se hubiese distribuído de algún modo dentro del conductor un exceso de carga positiva o negativa. Las fuerzas mutuas de repulsión hubieran producido la separación de las cargas tan lejos como hubiese sido posible, y la separación máxima se obtendría cuando toda la carga se encontrase sobre la superficie exterior.

Si el conductor no es macizo, sino hueco, como el de la figura 2-15 (*b*), el resultado es el mismo. El teorema de Gauss, aplicado a la superficie de trazos de dicha figura, demuestra que no puede haber carga dentro de esta superficie y, por consiguiente, que no hay carga ni campo en el interior de la cavidad. El hecho de que el campo dentro de un conductor

[1] Los electrones libres dentro de un metal participan de la energía de los átomos, pero su movimiento térmico es caótico, como el de los átomos de un gas, y no da como resultado paso de carga a través de una superficie cualquiera. Para nuestro propósito, este movimiento electrónico al azar puede despreciarse.

cerrado sea nulo es el fundamento de lo que se conoce con el nombre de *apantallado* electrostático. Cualquier dispositivo tal como una lámpara de radio o un electroscopio puede aislarse de la influencia de otras cargas rodeándolo de un conductor. Esto se consigue en las modernas lámparas por las propias paredes del tubo. Un experimento interesante consiste en rodear un electroscopio con una pantalla de tela metálica. La pantalla puede conectarse directamente a uno de los bornes de una máquina electrostática, y el electroscopio no presentará prácticamente ninguna desviación cuando la máquina esté funcionando. La tela metálica no es una superficie cerrada continua, pero su protección es casi tan eficaz como si lo fuese.

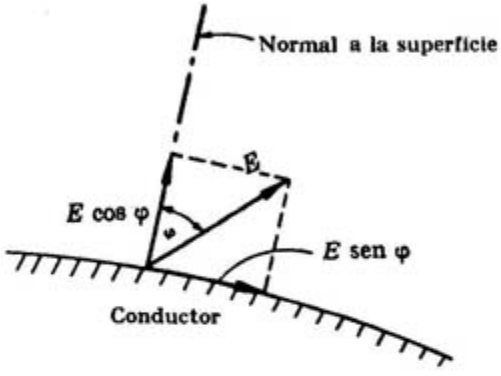


FIG. 2-16.—El campo sobre el conductor cargado es perpendicular a la superficie.

La dirección del campo en un punto situado justamente fuera de la superficie de un conductor cargado es perpendicular a la superficie, si las cargas sobre el conductor están en reposo. Para demostrar que esto es cierto, supongamos, como en la figura 2-16, que el campo en la superficie de un conductor formase un ángulo φ con la normal a la superficie. El campo puede descomponerse entonces en dos componentes, una perpendicular y otra paralela a la superficie. Bajo la influencia de la componente paralela, E sen φ, la carga se movería a lo largo de la superficie del conductor, lo cual es contrario a la hipótesis de que las cargas están en reposo. Por consiguiente, E sen $\varphi = 0$, y el campo es normal a la superficie.

2-8. Aplicación del teorema de Gauss.—Como ejemplo de la utilidad del teorema de Gauss calcularemos, con su ayuda, la intensidad del campo eléctrico creado por algunas distribuciones frecuentes de carga.

Campo de un largo conductor cargado.—Este problema ha sido ya resuelto en la sección 2-4, en la que E se calculó a partir de la ecuación de definición,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2} \text{ (suma geométrica).}$$

Resolveremos ahora el mismo problema utilizando el teorema de Gauss. Construyamos una superficie *gaussiana* cerrada, como la de la figura 2-17, en forma de un cilindro recto de radio r y longitud b, coaxial con el hilo. En los puntos no demasiado próximos a sus extremos, las líneas de fuerza que rodean el conductor son, por simetría, perpendiculares a él y a la superficie cilíndrica. Asimismo, por razón de simetría, el campo tiene la misma intensidad en todos los puntos de dicha superficie. El número total de líneas de fuerza que atraviesan el cilindro hacia afuera

es, por tanto, el producto de $\varepsilon_0 E$ por el área de esta superficie. (Ninguna línea de fuerza atraviesa las bases del cilindro.) La cantidad de carga dentro del cilindro es λb, donde λ es la carga por unidad de longitud. Por tanto,

$$\varepsilon_0 E \times 2\pi r b = \lambda b,$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

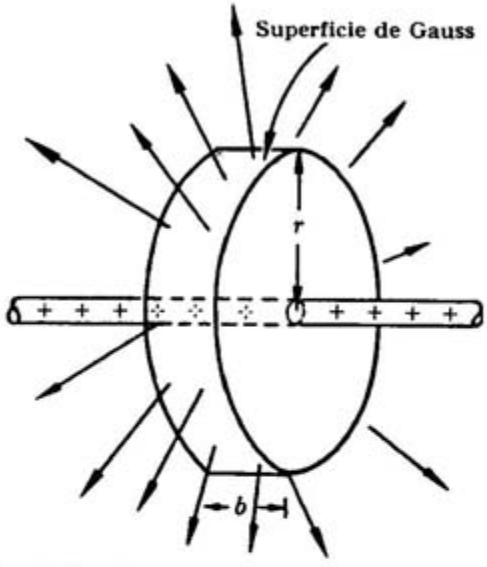


FIG. 2-17.—Superficie de Gauss para un largo hilo cargado.

Este ejemplo aclara la simplificación que proporciona el uso del teorema de Gauss en aquellos problemas en los cuales mediante consideraciones de simetría se puede demostrar que el campo es constante sobre una superficie de forma geométrica sencilla.

Campo alrededor de un cilindro.—La figura 2-18 representa un largo cilindro de radio a, que tiene una densidad superficial de carga uniforme σ. (La densidad superficial de carga es la carga por unidad de área y se expresa en coul/m².) Construyamos una superficie gaussiana como la de la figura 2-18. Por el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior,

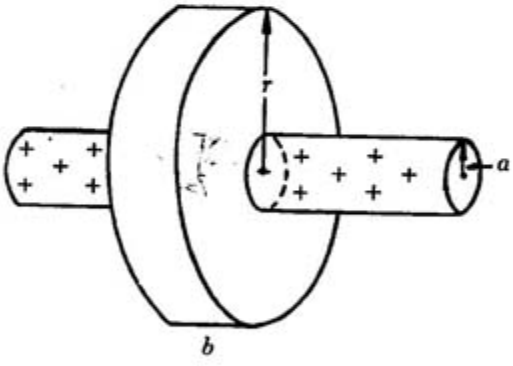


FIG. 2-18.—Superficie de Gauss para un largo cilindro cargado.

$$\varepsilon_0 E \times 2\pi r b = \sigma \times 2\pi a b;$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\sigma a}{r} \qquad [2\text{-}14]$$

La carga por unidad de longitud de cilindro es $2\pi a\sigma$, y designándola por λ, como anteriormente, tenemos:

$$\lambda = 2\pi a\sigma; \quad \sigma a = \lambda/2\pi,$$

con lo cual la Ec. [2-14] se convierte en

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \qquad [2\text{-}15]$$

Esta expresión es la misma que la del campo creado por una «línea» de carga. Por consiguiente, el campo *exterior* a un cilindro cargado es el mismo que si toda la carga del cilindro estuviera concentrada a lo largo de su eje. Naturalmente, el campo dentro del cilindro es nulo, y

las Ecs. [2-14] y [2-15] sólo son ciertas para valores de r iguales o mayores que a.

El campo en el espacio comprendido entre dos cilindros coaxiales cargados con cargas de signo opuesto y del mismo valor absoluto, por unidad de longitud, está dado por la Ec. [2-15]. La magnitud λ representa la carga por unidad de longitud soportada por cada cilindro.

Campo que rodea a una esfera cargada.—Se propone como ejercicio demostrar, utilizando el teorema de Gauss, que el campo a una distancia r del centro de una esfera de radio a, sobre la cual la densidad de carga σ es uniforme, vale:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\sigma a^2}{r^2}, \qquad [2\text{-}16]$$

donde r es igual o mayor que a.

Puesto que la carga total q sobre la esfera es

$$q = 4\pi a^2 \sigma,$$

la Ec. [2-16] puede escribirse:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

y el campo en el exterior de una superficie esférica conductora, uniformemente cargada, es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la esfera. El campo en el interior de la esfera es nulo.

Por consiguiente, la Ec. [2-16] da también la intensidad del campo eléctrico en los puntos situados entre dos conductores esféricos concéntricos.

Campo eléctrico entre láminas paralelas.—Cuando dos láminas paralelas conductoras, que tienen el tamaño y la separación indicados en la figura 2-19, reciben cargas iguales y de signos opuestos, el campo, entre ellas y a su alrededor, es aproximadamente el representado en la figura 2-19 (*a*). Aunque la mayor parte de la carga se acumula en las caras opuestas de las láminas, y el campo es prácticamente uniforme en el espacio comprendido entre ellas, hay una pequeña cantidad de carga sobre las superficies exteriores de las láminas y cierta dispersión del campo en los bordes de las mismas.

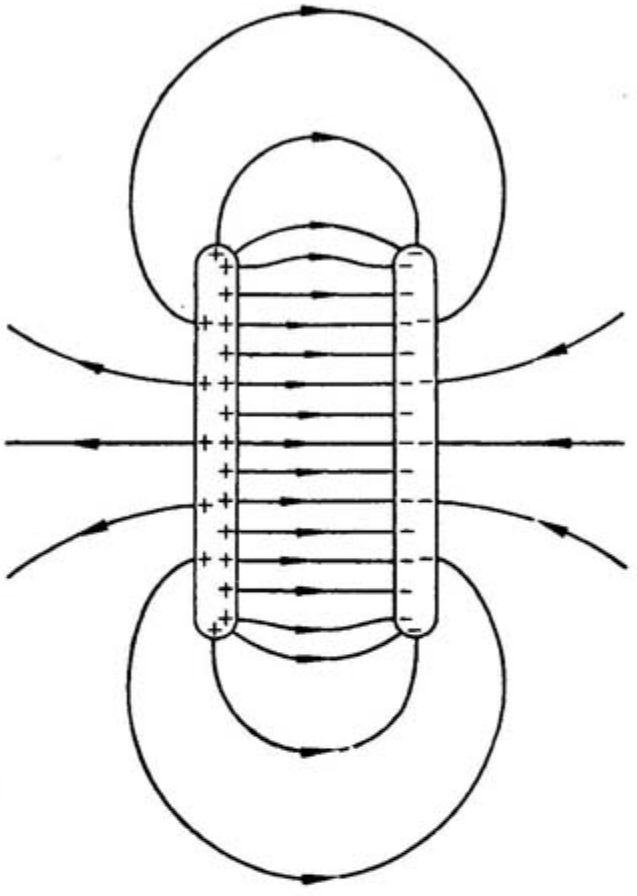
Cuanto más grandes son las láminas y más pequeña la distancia entre ellas, la dispersión se hace relativamente menor. Este dispositivo de dos láminas cargadas con signos contrarios y separadas por una distancia pequeña, comparada con sus dimensiones lineales, se presenta en muchas piezas de equipos eléctricos, principalmente en forma de condensador (véase Sec. 8-3). En la mayor parte de los casos la dispersión es despreciable, y cuando no lo es, se suele despreciar para mayor sencillez de los cálculos. Supondremos, por consiguiente, que el campo entre dos láminas cargadas con cargas contrarias es uniforme, como el de la figura 2-19 (*b*), y que las cargas están distribuídas

uniformemente sobre las superficies opuestas.

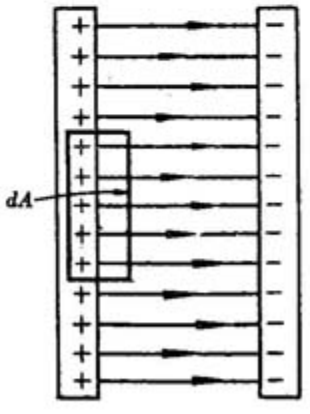
La intensidad del campo eléctrico en un punto situado en el espacio comprendido entre las láminas puede calcularse a partir de la definición,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2},$$

realizando una doble integración que abarque ambas láminas, pero es mucho más sencillo calcularlo aplicando el teorema de Gauss. El pequeño rectángulo de la figura 2-19 (*b*) es la sección de una superficie cerrada que tiene forma de paralelepípedo recto rectangular. Sus caras, de área dA, son perpendiculares al plano de la figura. Una de ellas se encuentra dentro del conductor de la izquierda, y la otra en el campo. Representemos por E la intensidad del campo eléctrico (uniforme) que existe entre las láminas, y por σ la carga por unidad de superficie sobre cada una. Las líneas de fuerza atraviesan la superficie del paralelepípedo únicamente por la cara situada en el espacio comprendido entre las láminas, ya que el campo dentro del conductor es nulo. El número de líneas de fuerza que atraviesan esta cara es $\varepsilon_0 E \times dA$. La carga dentro del paralelepípedo es σdA.



(*a*)



(*b*)

FIG. 2-19.—Campo eléctrico entre dos láminas paralelas con cargas opuestas.

Por tanto, en virtud del teorema de Gauss,

$$\varepsilon_0 E \times dA = \sigma\, dA,$$

y

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma} \qquad [2\text{-}17]$$

En la práctica, los campos eléctricos son producidos con más frecuencia por cargas distribuídas sobre láminas paralelas que por cualquier conjunto de cargas puntuales. Si *no* hubiésemos introducido el factor 4π en nuestra formulación inicial de la ley de Coulomb, lo hubiéramos encontrado como factor en la Ec. [2-17]. El sistema *racionalizado* relega, por tanto, el factor 4π a aquellas ecuaciones que, como la fundamental, son las menos frecuentemente utilizadas.

Ya hemos demostrado (Sec. 2-7) que el campo en un *punto infinitamente próximo* a la superficie de cualquier conductor cargado es perpendicular a la superficie. Si se construye un pequeño paralelepípedo como el de la figura 2-19 (*b*), que encierre una pequeña porción de cualquier superficie cargada, se deduce que la intensidad del campo eléctrico en un punto infinitamente próximo a la superficie está dada por la Ec. [2-17]. En general, el campo varía, naturalmente, cuando continuamos alejándonos de la superficie. En el caso especial de dos láminas planas y paralelas, el campo es el mismo en todos los puntos situados entre ellas.

Obsérvese que las Ecs. [2-14] y [2-16] se reducen a

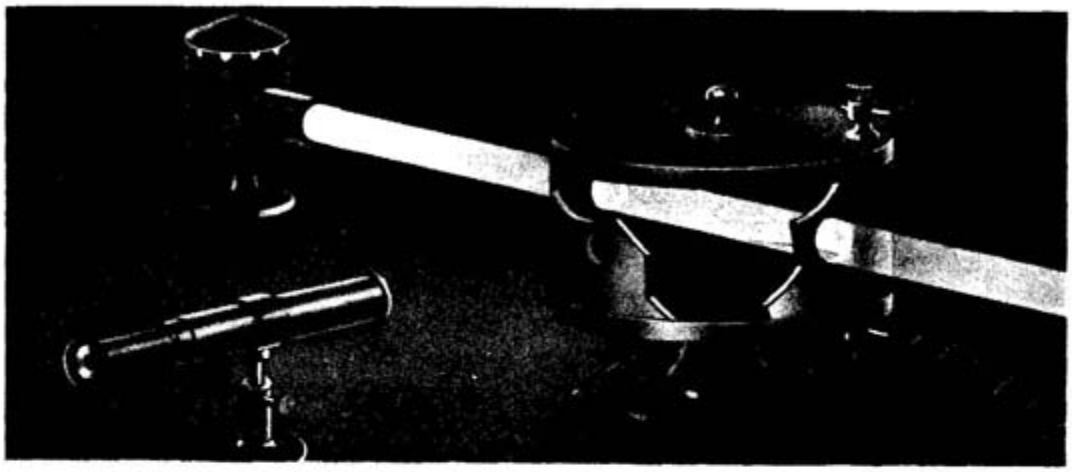
$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$$

en las superficies del cilindro y de la esfera, es decir, para $r = a$.

2-9. Experimento de la gota de aceite de Millikan.—Hemos expuesto suficientemente la teoría de la electrostática para poder describir uno de los experimentos clásicos de todos los tiempos: la medida de la carga de un electrón aislado realizada por Robert Andrews Millikan.

El aparato de Millikan está representado en la figura 2-20. A y B son dos láminas horizontales y exactamente paralelas. Mediante un pulverizador se esparce aceite en finas gotitas sobre la lámina superior y se deja que algunas gotitas caigan a través de un pequeño orificio practicado en esta lámina. Se dirige un haz de luz entre las dos láminas y se dispone un anteojo con su eje perpendicular al haz luminoso. Las gotitas de aceite iluminadas por el haz aparecen, cuando se miran por el anteojo, como minúsculas estrellas brillantes, cayendo lentamente bajo la acción conjunta de su peso, el empuje del aire y la fuerza de viscosidad que se opone a su movimiento.

Se observa que las gotas de aceite se cargan eléctricamente al ser pulverizadas, probablemente a causa del rozamiento. Esta carga es de ordinario negativa, lo que indica que las gotas han adquirido uno o más electrones en exceso. Si se carga ahora positivamente la lámina superior y negativamente la inferior, la región comprendida entre ambas láminas se con-



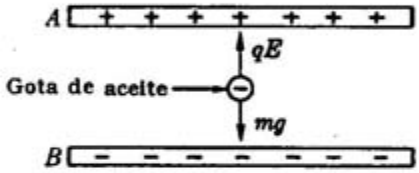


FIG. 2-20.—Experimento de la gota de aceite de Millikan.

vierte en un campo eléctrico uniforme. Modificando de forma adecuada la intensidad del campo eléctrico, la fuerza ejercida por el campo sobre una gota cargada negativamente puede hacerse exactamente igual al peso de la misma, menos el empuje del aire, de tal modo que la gota queda quieta entre las dos láminas. Cuando el campo tiene el valor conveniente resulta que

$$\begin{aligned} qE &= \text{peso} - \text{empuje} \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3 g(\rho - \rho'), \end{aligned} \qquad [2\text{-}18]$$

siendo q la carga de la gota; E, la intensidad del campo eléctrico; g, la aceleración de la gravedad; a, el radio de la gota; ρ, su densidad y ρ', la densidad del aire. Por consiguiente, puede calcularse la carga cuando se conocen E, g, a, ρ y ρ'.

Los radios de las gotas son del orden de 10^{-5} cm; es decir, demasiado pequeños para ser medidos directamente. Millikan ideó un procedimiento muy ingenioso para determinar estos radios. Cuando se suprime el campo, las gotas caen lentamente y su velocidad de caída puede medirse observando el tiempo que tardan en pasar entre retículos transversales dispuestos en el anteojo. Un cuerpo que cae en un medio viscoso aumenta su velocidad hasta alcanzar una velocidad límite tal, que la fuerza resultante hacia abajo (peso menos empuje) es igual a la resistencia debida a la viscosidad, dada por la ley de Stokes:

$$\frac{4}{3}\pi a^3 g(\rho - \rho') = 6\pi\eta a v, \qquad [2\text{-}19]$$

siendo η el coeficiente de viscosidad del medio, y v, la velocidad límite. Puesto que se conocen g, ρ, ρ' y η, y puede medirse v, es posible calcular el valor de a, y mediante la Ec. [2-18] determinar q.

Durante los experimentos realizados por Millikan y sus colaboradores en el período 1909-1913, midieron las cargas de algunos miles de gotas, con el siguiente resultado notable: Se encontró que cada gota observada tenía una carga igual a un múltiplo de una cantidad de carga (negativa) e. Esto es, fueron observadas gotas que tenían cargas, e, $2e$, $3e$, etc., exactamente, y nunca valores tales como $0{,}76e$ ó $2{,}49e$. Resulta evidente la conclusión de que la carga eléctrica no es algo que pueda dividirse indefinidamente, sino que existe en la Naturaleza en forma de múltiplos de una unidad e. Cuando se observa una gota con una carga e, deducimos que ha adquirido un electrón de más; si su carga es $2e$, tiene dos electrones de más, y así sucesivamente.

La medida de la carga electrónica por el método de Millikan se realiza todavía en varios laboratorios. Los mejores resultados obtenidos son [1]:

$$e = 1{,}6065 \times 10^{-19} \text{ coul}$$
$$= 4{,}8130 \times 10^{-10} \text{ unidades electrostáticas.}$$

La breve descripción anterior no puede hacer la debida justicia a los trabajos de Millikan. Para una descripción más completa de sus experimentos, véase la obra de Millikan *Electrones + y −*.

2-10. Rigidez dieléctrica.—Un aislador o dieléctrico es una sustancia dentro de la cual no hay (o, al menos, hay relativamente pocas) partículas cargadas, capaces de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico. Sin embargo, existe, para cada dieléctrico, cierto límite de la intensidad del campo eléctrico, por encima del cual la sustancia pierde sus propiedades aisladoras y se convierte en un conductor. La intensidad máxima del campo eléctrico que un dieléctrico puede soportar sin *rotura* se denomina *rigidez dieléctrica*; p. ej., la rigidez dieléctrica del aire a la presión atmosférica es alrededor de 100 dinas por unidad electrostática o 3×10^6 newtons por culombio, mientras que para el vidrio es dos o tres veces mayor. (Véanse en la Sec. 3-5 otras unidades en las cuales se expresa más frecuentemente la rigidez dieléctrica.)

Puesto que la intensidad máxima del campo eléctrico que puede existir en el aire a la presión atmosférica, sin *rotura*, es alrededor de 3×10^6 new/coul, la carga máxima por unidad de superficie de un conductor situado en el aire puede calcularse mediante la Ec. [2-17], haciendo $E = 3 \times 10^6$. Se encuentra que

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{3 \times 10^6}{36\pi \times 10^9} = 27 \times 10^{-6} \text{ coul/m}^2$$
$$= 27 \ \mu\text{coul/m}^2.$$

[1] Esta cifra difiere ligeramente de la citada en la sección 1-16, que está basada en los resultados de *todas* las mediciones de e, incluyendo las efectuadas por otros métodos.

Por tanto, la carga máxima *total* que puede ser retenida por una esfera metálica de 1 cm de radio en el aire es:

$$q = 4\pi a^2\sigma = 3{,}3 \times 10^{-8} \text{ coul.}$$
$$= 0{,}033\ \mu\text{coul.}$$

Es interesante comparar esta carga con la total de los electrones libres de la esfera. Supongamos que sea de cobre, de densidad 8,8 g/cm³. Su volumen es $4\pi a^3/3$, o sea 4,2 cm³, su masa es 37 g, y contiene, por consiguiente, 37/63 = 0,59 mol de cobre, o sea, $3{,}5 \times 10^{23}$ átomos. Si cada átomo contribuye con un electrón libre, de carga $1{,}6 \times 10^{-19}$ coul, la carga electrónica libre total es $5{,}6 \times 10^4$ coul. Por tanto, una carga de $3{,}3 \times 10^{-8}$ coul representa un exceso (o falta) de, aproximadamente, un electrón libre por cada 10^{12}. La esfera puede tener una carga *muy alta*, pero la variación proporcional de los electrones libres normales es despreciable.

Realmente, las condiciones bajo las cuales puede saltar una chispa en el aire desde un conductor a otro son mucho más complicadas que lo que resulta de establecer que la intensidad del campo eléctrico no puede exceder de 3×10^6 new/coul. Han de tenerse en cuenta otros muchos factores, tales como el tamaño de los conductores, su distancia, su forma, etc. Para más detalles debe consultarse un libro sobre la conductibilidad eléctrica en los gases.

PROBLEMAS

2-1. La intensidad del campo eléctrico entre las láminas de cierto oscilógrafo de rayos catódicos es 30000 newtons/culombio. *a*) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre un electrón cuando pasa entre ellas? *b*) ¿Cuál es la aceleración de un electrón cuando está sometido a esta fuerza?

2-2. En el espacio comprendido entre dos láminas planas y paralelas cargadas con cargas iguales y opuestas, existe un campo eléctrico uniforme. Un electrón abandonado en reposo sobre la lámina cargada negativamente llega a la superficie de la lámina opuesta, situada a 2 cm de distancia de la primera, al cabo de $1{,}5 \times 10^{-8}$ seg. *a*) Calcúlese la intensidad del campo eléctrico. *b*) Calcúlese la velocidad del electrón cuando llega a la segunda lámina.

2-3. Un electrón es proyectado con una velocidad inicial $v_0 = 10^7$ m/seg dentro del campo uniforme creado por las láminas planas y paralelas de la figura 2-21. El campo está dirigido verticalmente hacia abajo y es nulo excepto en el espacio comprendido entre las láminas; el electrón entra en el campo por un punto situado a igual distancia

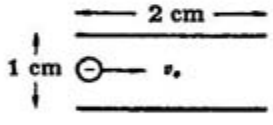


FIG. 2-21.

de las mismas. *a*) Si, cuando sale del campo, el electrón pasa justamente por el borde de la lámina superior, calcúlese la intensidad de dicho campo. *b*) Determínese la dirección de la velocidad del electrón cuando sale del campo.

2-4. Un electrón es lanzado dentro de un campo eléctrico uniforme de intensidad 5000 newtons/culombio dirigido verticalmente hacia arriba. La velocidad inicial del electrón es 10^7 m/seg, y forma un ángulo de 30° por encima de la horizontal. *a*) Calcúlese la altura máxima alcanzada por el electrón por encima de su altura inicial. *b*) ¿Qué distancia horizontal recorrerá el electrón antes de

volver a su altura inicial? *c*) Dibújese la trayectoria del electrón.

2-5. En un sistema de coordenadas rectangulares, dos cargas positivas puntuales de 10^{-8} coul, se encuentran fijas en los puntos $x = +0{,}1$ m, $y = 0$ y $x = -0{,}1$ m, $y = 0$. Calcúlese el valor y dirección del campo eléctrico en los siguientes puntos: *a*) el origen; *b*) $x = 0{,}2$ m, $y = 0$; *c*) $x = 0{,}1$ m, $y = 0{,}15$ m; *d*) $x = 0$, $y = 0{,}1$ m.

2-6. El mismo problema, 2-5, excepto que una de las cargas puntuales es positiva y la otra negativa.

2-7. La carga máxima que puede ser retenida por uno de los bornes esféricos de un generador de Van de Graaff es alrededor de 10^{-3} coul. Supongamos una carga positiva de este valor, distribuída uniformemente sobre la superficie de una esfera que se encuentra en el vacío. *a*) Calcúlese el valor del campo eléctrico en un punto exterior a la esfera y situado a 5 m de su centro. *b*) Si se abandonase un electrón en este punto, ¿cuál sería el valor y dirección de su aceleración inicial?

2-8. *a*) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico creado por el núcleo de un átomo de oro a una distancia de 10^{-12} cm? (Véase problema 1-5.) *b*) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico creado por un protón, a una distancia del mismo de $5{,}28 \times 10^{-9}$ cm? (Véase problema 1-6.)

2-9. Un dipolo formado por un electrón y un protón, separados por una distancia de 4×10^{-8} cm, está colocado de modo que su punto medio coincide con el origen, su eje con el eje X y el electrón queda a la izquierda del origen. Calcúlense y represéntense en un esquema las componentes E_r y E_θ del campo eléctrico creado por el dipolo en los siguientes puntos: *a*) $r = 10^{-6}$ cm, $\theta = 0$; *b*) $r = 10^{-6}$ cm, $\theta = \pi/2$; *c*) $r = 10^{-6}$ cm, $0 = \pi/6$.

2-10. Un anillo circular de hilo fino soporta una carga positiva q uniformemente distribuída. *a*) Determínese la magnitud y dirección del campo eléctrico en el centro del anillo debido a la carga sobre una porción del mismo que subtiende un ángulo central θ.

2-11. Un anillo circular de 5 cm de radio tiene una carga positiva de 100 unidades electrostáticas. *a*) Calcúlese la magnitud y dirección del campo eléctrico en puntos situados sobre el eje del anillo y a las siguientes distancias del centro del mismo: 0, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm y 10 cm. Utilícese el sistema electrostático de unidades en el cual $1/4\pi\varepsilon_0 = 1$, expresando E en dinas/unidad electrostática. Represéntense los resultados en una gráfica. *b*) Utilizando la expresión general de la intensidad del campo eléctrico en un punto cualquiera del eje de un anillo cargado, hállese por diferenciación la expresión de la distancia al centro de un anillo de radio a para la cual la intensidad se hace máxima. ¿Coincide la respuesta con la gráfica dibujada en la parte *a*)?

2-12. Dos láminas planas metálicas circulares, paralelas entre sí y separadas por una distancia pequeña comparada con sus radios, tienen densidades superficiales de carga, σ, iguales y opuestas. Considerando cada lámina subdividida en cierto número de coronas concéntricas, *a*) calcúlese la expresión de la intensidad del campo eléctrico en un punto del espacio comprendido entre las láminas sobre la línea que une sus centros, debida a la carga de una sola corona de radio r y anchura dr. *b*) Intégrese esta expresión y calcúlese la intensidad del campo eléctrico resultante.

2-13. Demuéstrese, con ayuda del teorema de Gauss, que el campo eléctrico en los puntos exteriores a una esfera que tiene una densidad de carga uniforme es el mismo que si toda la carga de la esfera estuviera concentrada en su centro.

2-14. Supongamos que una carga positiva está distribuída uniformemente en un volumen esférico de radio R, siendo ρ la carga por unidad de volumen. Demuéstrese, con ayuda del teorema de Gauss, que una carga puntual positiva q, situada a la distancia r del centro de la

esfera, es repelida desde dicho centro con una fuerza

$$F = \frac{\rho q r}{3\varepsilon_0}$$

siendo $r \leq R$.

2-15. El campo eléctrico en el espacio comprendido entre dos láminas planas y paralelas, cargadas con cargas iguales y opuestas, es 10 new/coul, siendo 100 cm² el área de cada lámina. Despreciando el efecto de los bordes, ¿cuál es la carga de cada una?

2-16. Las tres componentes del campo eléctrico existente en una cierta región son: $E_x = 10^3\, x^{1/3}$, $E_y = 0$, $E_z = 0$. (E está medido en new/coul, x en metros.)

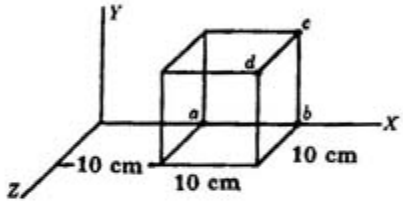


FIG. 2-22.

Calcúlese: *a*) el número de líneas de fuerza que atraviesan hacia afuera la superficie del elemento cúbico de volumen de la figura 2-22; *b*) la carga neta positiva dentro del elemento.

2-17. Una carga puntual negativa $-q$ está situada en el punto $x = -a$, $y = z = 0$, de un sistema de coordenadas rectangulares. Una carga igual positiva se encuentra en el punto $x = a$, $y = z = 0$. ¿Cuántas líneas de fuerza atraviesan una superficie circular que se encuentra en el plano Y-Z con su centro en el origen? Una recta trazada desde una cualquiera de las cargas a un punto de la circunferencia forma un ángulo β con el eje X. Discútase el caso particular correspondiente a $\beta = \pi/2$.

2-18. Calcúlese $\int \varepsilon_0 E \cos\varphi \, dA$ extendida a la superficie de una esfera con centro en el origen, donde E es el campo creado por un dipolo situado en el origen. El radio de la esfera es grande comparado con la longitud del dipolo. La expresión del área de un elemento situado sobre la superficie de la esfera, en coordenadas esféricas, es:

$$dA = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

(Véase THOMAS: *Cálculo infinitesimal* y *Geometría analítica*, Cap. XV.) ¿Cuántas líneas de fuerza atraviesan hacia afuera la superficie de la esfera? ¿Cuál es la carga neta dentro de la misma?

2-19. Una pequeña esfera cuya masa es 0,1 g es portadora de una carga de 3×10^{-9} coul y está atada en el estremo de un hilo de seda de 5 cm de longitud. El otro extremo del hilo está sujeto a una gran lámina vertical conductora que tiene una densidad de carga de 25×10^{-7} coul/m². Hállese el ángulo que formará el hilo con la vertical.

2-20. La figura 2-23 es la sección de dos largos cilindros coaxiales de radios a y b. El interior tiene una carga negativa λ por unidad de longitud, y el exterior una carga positiva igual. Una partícula positiva de carga q y masa m recorre, en el espacio vacío comprendido entre los cilindros, una trayectoria circular de radio r. Calcúlese la expresión de la velocidad de la partícula en función de las magnitudes dadas.

2-21. En el aparato de Millikan, una gota de aceite cargada desciende una distancia de 1 mm en un tiempo de 27,4 seg, en ausencia de campo exterior. La misma gota se mantiene en reposo en un campo de $2{,}37 \times 10^3$ new/coul. ¿Qué exceso de electrones ha adquirido la gota? La viscosidad del aire es 180×10^{-7} new-seg/m². La densidad del aceite es 824 Kg/m³ y la densidad del aire es 1,29 Kg/m³.

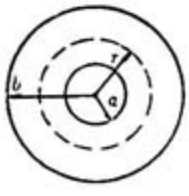


FIG. 2-23.

CAPÍTULO III

POTENCIAL

3-1. Energía potencial electrostática.—Muchos problemas de mecánica pueden simplificarse notablemente con ayuda de consideraciones energéticas; p. ej., la velocidad de un cuerpo que desliza hacia abajo sobre una superficie lisa de forma arbitraria puede calcularse estableciendo que el incremento de la energía cinética del cuerpo es igual a la disminución de su energía potencial. El principio de conservación de la energía es, naturalmente, aplicable también al movimiento en un campo eléctrico de un electrón, de un ion o de cualquier cuerpo cargado. En todos los casos de interés práctico, la fuerza gravitatoria ejercida sobre una carga es tan pequeña comparada con la fuerza eléctrica que la energía potencial gravitatoria es despreciable. En todo caso, cualquier partícula cargada que se encuentra en un campo eléctrico tiene una energía potencial eléctrica que procede del trabajo realizado para desplazarla venciendo las fuerzas eléctricas, del mismo modo que la energía potencial gravitatoria procede del trabajo realizado al levantar un cuerpo contra las fuerzas gravitatorias.

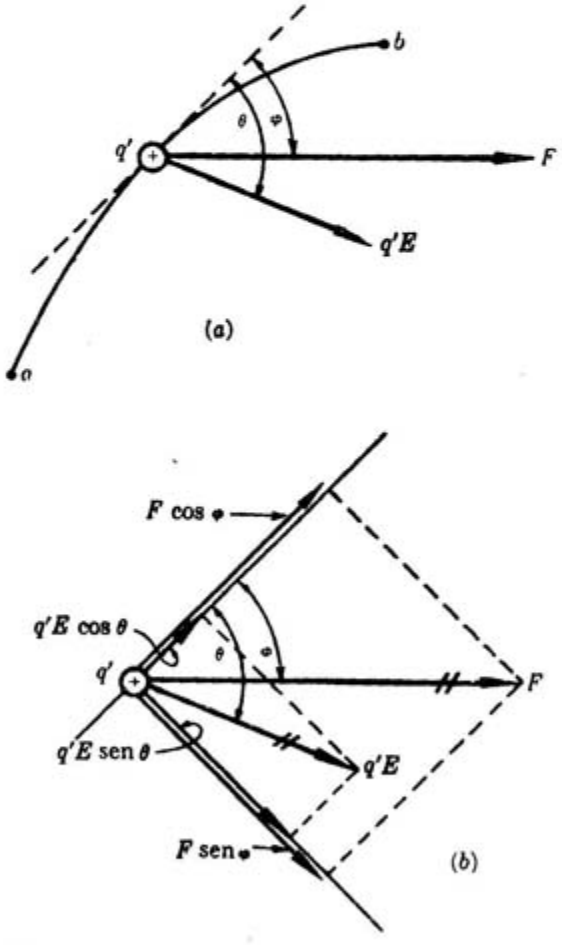


FIG. 3-1.—Fuerzas que actúan sobre una carga q' colocada en un campo electrostático.

El espacio de la figura 3-1 (a) es un campo eléctrico. La línea curva que pasa por los puntos a y b representa una trayectoria de forma arbitraria entre estos puntos. Una carga positiva de prueba q' (tal como una pequeña esfera metálica cargada, situada en el extremo de una varilla aislante) ha de desplazarse sobre esta trayectoria de a

hasta b. El valor y dirección del campo pueden variar de un punto a otro de la trayectoria. No se han representado las cargas que crean el campo ni se han tenido en cuenta las fuerzas gravitatorias y de rozamiento.

El vector $q'E$, en la figura 3-1 (a), es la fuerza ejercida sobre la carga por el campo en un punto arbitrario a lo largo de la línea. El vector F es la fuerza exterior, no eléctrica, que actúa sobre la carga; p. ej., la fuerza ejercida por la mano si alguien sostiene la varilla aislante y desplaza la carga a lo largo de la línea. Sea θ el ángulo formado por la tangente a la trayectoria y la fuerza $q'E$, y φ el ángulo determinado por la tangente y la fuerza exterior F. En la figura 3-1 (b), cada una de las fuerzas $q'E$ y F se han descompuesto en sus componentes paralela y normal a la trayectoria. La fuerza normal resultante, ΣF_n, es:

$$\Sigma F_n = F \operatorname{sen} \varphi + q'E \operatorname{sen} \theta.$$

La fuerza tangencial resultante, ΣF_t, es

$$\Sigma F_t = F \cos \varphi + q'E \cos \theta.$$

La fuerza normal, perpendicular a la trayectoria, es una fuerza centrípeta y modifica la dirección, pero no el valor de la velocidad de la carga. La fuerza tangencial comunica a la carga una aceleración a lo largo de su trayectoria. El valor de la aceleración está dado por la segunda ley de Newton,

$$F \cos \varphi + q'E \cos \theta = ma,$$

donde m es la masa de la carga.

Ahora bien:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds},$$

donde ds es el elemento de longitud a lo largo de la trayectoria. Entonces

$$F \cos \varphi + q'E \cos \theta = mv\frac{dv}{ds}$$

y

$$F \cos \varphi \, ds + q'E \cos \theta \, ds = mv \, dv,$$

o sea,

$$F \cos \varphi \, ds = mv \, dv - q'E \cos \theta \, ds. \qquad [3\text{-}1]$$

Los tres términos de esta ecuación tienen el siguiente significado. El primero, $F \cos \varphi \, ds$, es evidentemente el trabajo realizado sobre la carga por la fuerza exterior F durante el desplazamiento ds. Designemos este trabajo por dW,

$$dW = F \cos \varphi \, ds. \qquad [3\text{-}2]$$

El término siguiente, $mv \, dv$, puede escribirse en la forma $d\,(\frac{1}{2}mv^2)$ y es, por tanto, el aumento de energía cinética, $d(EC)$, de la carga:

$$d(EC) = mv \, dv = d(\tfrac{1}{2}mv^2). \qquad [3\text{-}3]$$

El último término, $-q'E \cos \theta \, ds$, es el trabajo realizado contra la fuerza eléctrica $q'E$, ejercida sobre la carga, por el campo. (El signo negativo significa que se ha realizado trabajo *contra* las fuerzas eléctricas; el trabajo realizado *por* la fuerza $q'E$ sería $+q'E \cos \theta \, ds$.) Por consiguiente, el último término representa el incremento en energía potencial, $d\,(EP)$, de la carga:

$$d(EP) = -q'E \cos \theta \, ds. \qquad [3\text{-}4]$$

La Ec. [3-1] es, por tanto, la forma que toma la ecuación trabajo-energía cuando se desplaza un cuerpo cargado en un campo eléctrico, y puede escribirse:

$$dW = d(EC) + d(EP).$$

Si se integra la Ec. [3-1] a lo largo de la trayectoria que une a y b, se obtiene:

$$\int_a^b F \cos \varphi \, ds = \int_{v_a}^{v_b} mv \, dv - \int_a^b q'E \cos \theta \, ds. \qquad [3\text{-}5]$$

La primera integral es evidentemente el trabajo total W realizado sobre la carga por la fuerza exterior F. Se la denomina *integral curvilínea* (véase THOMAS: *Cálculo infinitesimal* y *Geometría analítica*, Cap. XIV) y significa que en cualquier elemento de la trayectoria, de longitud ds, la componente $F \cos \varphi$ de la fuerza ha de multiplicarse por ds y efectuar la suma de estos productos para todos los elementos de la trayectoria entre a y b. Los límites a y b no lo son en el sentido usual, sino que sirven simplemente para indicar los puntos extremos de la trayectoria. Naturalmente, al objeto de calcular la integral, ha de determinarse la trayectoria y se ha de conocer cómo varía la fuerza en magnitud y dirección a lo largo de la misma:

$$\int_a^b F \cos \varphi \, ds = W. \qquad [3\text{-}6]$$

La primera integral del segundo miembro de la Ec. [3-5] puede calcularse inmediatamente sin tener en cuenta cómo varía la fuerza. Los límites v_a y v_b son las velocidades de la carga en los puntos a y b:

$$\int_{v_a}^{v_b} mv \, dv = \tfrac{1}{2}mv_b^2 - \tfrac{1}{2}mv_a^2 = EC_b - EC_a. \qquad [3\text{-}7]$$

Es decir, esta integral expresa el aumento total de energía cinética de la carga. La última integral es también una integral curvilínea y representa, evidentemente, el trabajo realizado contra la fuerza ejercida por el campo, o sea, el aumento total de energía potencial, $EP_b - EP_a$.

$$-\int_a^b q'E \cos \theta \, ds = EP_b - EP_a. \qquad [3\text{-}8]$$

En el caso especial de que el valor de la velocidad sea el mismo en los puntos a y b, el aumento de energía cinética es nulo y todo el trabajo exterior se aplica para aumentar la energía potencial. Esto es, en este caso especial,

$$\int_a^b F \cos \varphi \, ds = -\int_a^b q'E \cos \theta \, ds = EP_b - EP_a. \qquad [3\text{-}9]$$

En el caso particular (pero muy frecuente) de que la fuerza exterior sea nula y la carga se mueva únicamente bajo la influencia de la fuerza ejercida sobre ella por el campo, la primera integral de la Ec. [3-5] es nula, y

$$0 = EC_b - EC_a + EP_b - EP_a,$$

o sea,

$$EC_b + EP_b = EC_a + EP_a = \text{constante}. \qquad [3\text{-}10]$$

Esto es, cuando la única fuerza actuante es la ejercida por el campo, la suma de las energías cinética y potencial es la misma en todos los puntos de la trayectoria.

La Ec. [3-8] es la expresión general de la diferencia entre las energías potenciales de la carga de prueba q' en los puntos a y b de un campo electrostático. Antes que podamos hablar de *la* energía potencial de la carga en cualquier punto es necesario que convengamos en atribuir arbitrariamente energía potencial nula a cierto punto de referencia. Resultan expresiones matemáticas más sencillas si dicho punto se elige en el infinito. Esto es, la energía potencial de la carga de prueba se considera nula cuando se la supone muy alejada de las otras cargas que crean el campo. Entonces, si la carga de prueba se trae desde el infinito a un punto cualquiera del campo, el trabajo realizado contra la fuerza ejercida sobre ella por el campo es igual a la energía potencial en el punto. Si suponemos el punto a en el infinito y hacemos $EP_a = 0$, la Ec. [3-8] se convierte en

$$EP_b = -\int_\infty^b q'E \cos \theta \, ds. \qquad [3\text{-}11]$$

El punto b puede ser, naturalmente, un punto cualquiera del campo. Es costumbre, por tanto, suprimir el subíndice y los límites de la integral, y escribir simplemente

$$EP = -\int q'E \cos \theta \, ds, \qquad [3\text{-}12]$$

en la que se entiende que la integral es una integral curvilínea desde el infinito al punto en cuestión. *La energía potencial de una carga de prueba en un punto de un campo eléctrico* puede definirse, por consiguiente, como *el trabajo realizado contra la fuerza ejercida sobre ella por el campo, cuando se trae la carga desde el infinito al punto.* Demostraremos más tarde

que el trabajo realizado es independiente de la trayectoria seguida; si no fuera así, la energía potencial no tendría un valor único y el concepto de energía potencial carecería de sentido. Debe puntualizarse que la energía potencial es una propiedad del *sistema* de cargas (es decir de la carga de prueba y de las cargas que crean el campo) y, en rigor, no debía asignarse solamente a la carga de prueba. Sin embargo, por comodidad, se habla generalmente de la energía potencial de la carga de prueba.

3-2. Potencial.—La intensidad de un campo eléctrico en un punto es la razón de la fuerza ejercida sobre una carga de prueba en el punto al valor de dicha carga, o sea, es la fuerza por unidad de carga. Análogamente, el *potencial* en un punto de un campo eléctrico se define como *la razón de la energía potencial de un cuerpo de prueba al valor de su carga*, o sea, *la energía potencial por unidad de carga*. Se considera que el potencial en un punto tiene un valor aunque no haya carga eléctrica en dicho punto. Basta imaginar colocada una carga de prueba en el punto, calcular su energía potencial y hallar la razón de la energía potencial a la carga. Igual que en la sección 2-2, ha de admitirse que la distribución inicial de carga no se altera por la introducción de la carga de prueba, lo cual es cierto si ésta es suficientemente pequeña.

El potencial se representa por la letra V o por V_a o V_b, p. ej., si deseamos concretar que se refiere a un punto determinado a o b:

$$\text{Potencial en el punto } a = V_a = \frac{EP \text{ de la carga } q' \text{ en el punto } a}{q'} \qquad [3\text{-}13]$$

De esta definición se deduce que la energía potencial de una carga q' en un punto a de un campo eléctrico donde el potencial es V_a, es el producto del potencial en el punto por la carga q':

$$EP \text{ de la carga } q' \text{ en el punto } a = q'V_a. \qquad [3\text{-}14]$$

Puesto que la energía es una magnitud escalar, el potencial es también escalar. Tiene módulo, pero no dirección, y en este aspecto difiere del campo eléctrico, que es un vector.

En virtud de las Ecs. [3-12] y [3-13], el potencial en el punto a es:

$$V = \frac{EP}{q'} = \frac{-\int q'E \cos\theta \, ds}{q'},$$

o sea,

$$\boxed{V = -\int E \cos\theta \, ds} \qquad [3\text{-}15]$$

donde se entiende que la integral curvilínea se toma a lo largo de una línea que va desde el infinito al punto en cuestión. En lenguaje matemático, *el potencial en un punto es igual a la integral curvilínea, cambiada de signo,*

de la intensidad del campo eléctrico desde el infinito al punto. Físicamente, el potencial en un punto puede definirse como *el trabajo realizado, por unidad de carga, contra la fuerza ejercida por el campo, cuando se trae una carga desde el infinito al punto.*

En virtud de su definición, energía potencial por unidad de carga, el potencial se expresa en el sistema mks en *julios por culombio.* (La unidad correspondiente en el sistema electrostático es un ergio por unidad electrostática de carga.) Un potencial de un julio por culombio recibe el nombre de *voltio,* en honor del físico italiano Alessandro Volta (1745-1827), que fué el inventor de la *pila voltaica.* El voltio puede definirse del siguiente modo:

El potencial en un punto de un campo electrostático será un voltio, si para traer una carga de un culombio desde el infinito al punto, venciendo las fuerzas del campo, es necesario realizar un trabajo de un julio. Otra definición es: *El potencial en un punto de un campo electrostático es un voltio, si la razón de la energía potencial de una carga en el punto, al valor de la carga, es un julio por culombio.*

La milésima parte de un voltio se llama *milivoltio* (mV), y la millonésima de voltio se denomina *microvoltio* (μV). Mil voltios es un *kilovoltio* (KV), y un millón de voltios es un *megavoltio* (MV).

En el sistema electrostático, un potencial de un ergio por unidad electrostática de carga es la unidad electrostática de potencial y equivale (muy aproximadamente) a 300 V.

3-3. Diferencia de potencial.—Se denomina *diferencia de potencial* entre dos puntos de un campo electrostático a la diferencia de sus potenciales. Si dividimos por q' ambos miembros de la Ec. [3-8] se obtiene

$$\frac{EP_b}{q'} - \frac{EP_a}{q'} = -\int_a^b E \cos\theta \, ds. \qquad [3\text{-}16]$$

Pero

$$EP_b/q' = V_b \quad \text{y} \quad EP_a/q' = V_a,$$

donde V_b y V_a son los potenciales en los puntos b y a. Por tanto, la diferencia de potencial entre los puntos b y a es:

$$\boxed{V_b - V_a = -\int_a^b E \cos\theta \, ds} \qquad [3\text{-}17]$$

La diferencia de potencial entre los puntos b y a es igual a la integral curvilínea, cambiada de signo, de la intensidad del campo eléctrico desde el punto a al b, o sea, es igual *al trabajo realizado por unidad de carga contra las fuerzas eléctricas cuando se mueve una carga desde el punto a al b.*

Puesto que los potenciales se expresan en voltios, las diferencias de potencial se expresarán asimismo en voltios. *La diferencia de potencial entre dos puntos b y a es un voltio si se efectúa contra las fuerzas eléctricas un trabajo de un julio por culombio cuando se mueve una carga desde el punto a al b.*

Se dice que el punto b está a un potencial superior al de a si se realiza trabajo contra las fuerzas eléctricas para mover una carga positiva desde a hasta b. Esto es, b está a un potencial superior al de a si la energía potencial de una carga *positiva* es mayor en b que en a.

El potencial *en un punto* puede considerarse como la diferencia de potencial entre dicho punto y otro a distancia infinita donde el potencial se supone arbitrariamente cero.

El concepto de diferencia de potencial es extraordinariamente importante, tanto en electrostática como en los circuitos eléctricos. Los ingenieros electricistas utilizan la palabra *voltaje* al referirse a la diferencia de potencial.

Por ejemplo, la diferencia de potencial entre los bornes de una batería de automóvil es unos 6 V, designándose el borne de potencial más elevado por el signo +, y el de menor potencial por el signo —. El borne + está cargado positivamente; el borne —, negativamente. Existe, por tanto, un campo eléctrico en el espacio que rodea a los bornes, y el decir que la diferencia de potencial entre los bornes es 6V significa simplemente que si tuviéramos que mover un cuerpo cargado positivamente desde el borne negativo al positivo (p. ej., transportar una esfera metálica pequeña, cargada positivamente y sujeta por un hilo aislador, de un punto a otro), el trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas del campo existente entre los dos bornes sería de 6 julios por culombio de carga transportada.

La diferencia de potencial entre dos puntos a y b, o bien p y q, se expresará abreviadamente por V_{ab} o bien V_{pq}; esto es,

$$V_{ab} \equiv V_a - V_b, \quad V_{pq} \equiv V_p - V_q, \text{ etc.}$$

Si esta diferencia de potencial es una cantidad positiva, el primer punto (a o p) está a un potencial *más alto* que el segundo (b o q), y ha de realizarse un trabajo exterior para mover una carga positiva *desde* b a a, o *desde* q a p. Inversamente, si la diferencia es negativa, el segundo punto está a un potencial más elevado que el primero. Por consiguiente, puesto que $V_{ab} \equiv V_a - V_b$, y $V_{ba} \equiv V_b - V_a$, se deduce que

$$V_{ab} \equiv - V_{ba}.$$

Esto quiere decir, simplemente, que si ha de realizarse trabajo contra el campo para mover una carga positiva desde b hasta a, puede obtenerse trabajo del campo cuando se permite a la carga positiva moverse desde a hasta b.

Las diferencias de potencial pueden medirse con electroscopios, electrómetros y voltímetros. Si la bola de un electroscopio de panes de oro se conecta a un cuerpo que tenga un potencial y la caja del instrumento a otro cuerpo a diferente potencial, la divergencia de las hojas del electroscopio es una medida aproximada de la diferencia de potencial entre los cuerpos. Puesto que no existe una relación sencilla entre la divergencia de los panes de oro y la diferencia de potencial, el electroscopio de hojas se

usa rara vez en trabajos cuantitativos, siendo preferida alguna forma de electrómetro. El voltímetro corriente de cuadro móvil mide también la diferencia de potencial entre sus bornes; pero siendo un aparato destinado a funcionar con corriente, no es adecuado para medidas puramente electrostáticas.

Vamos a deducir ahora una expresión más general. Hemos demostrado que la integral curvilínea, cambiada de signo, de la intensidad del campo eléctrico a lo largo de cualquier trayectoria en un campo electrostático es igual a la diferencia de potencial entre los extremos de la trayectoria. Si la trayectoria se cierra sobre sí misma, de modo que los extremos coincidan, la diferencia de potencial entre ellos es evidentemente cero, y dicha integral será, por tanto, nula. En lenguaje matemático,

$$\oint E \cos \theta \, ds = 0, \qquad [3\text{-}18]$$

donde el símbolo $\oint$ significa que la integral curvilínea se extiende a una trayectoria cerrada.

El producto escalar de dos vectores se define como una magnitud escalar igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Por consiguiente, utilizando la notación vectorial, la Ec. [3-15] se escribe:

$$V = -\int \vec{E} \cdot \vec{ds}.$$

La Ec. [3-17] se convierte en

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{ds},$$

y la Ec. [3-18] se escribirá:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$$

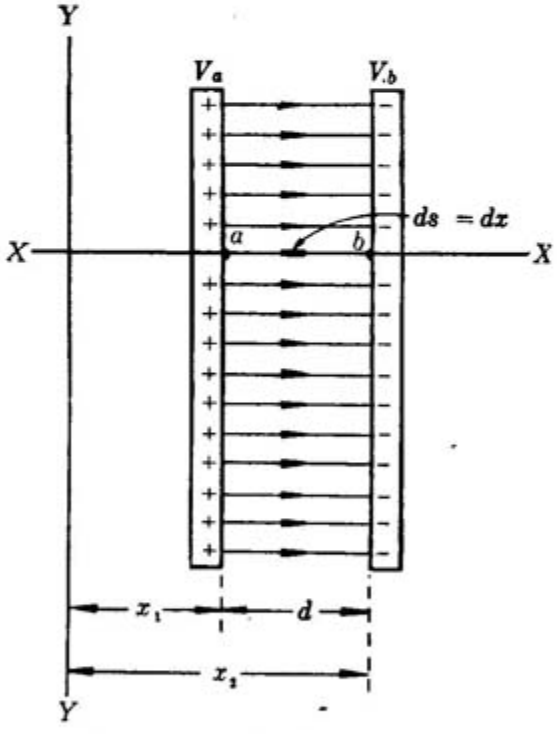


FIG. 3-2.—La intensidad del campo eléctrico entre dos láminas planas y paralelas es igual al cociente V_{ab}/d.

EJEMPLO 1.—Si el campo eléctrico es constante en magnitud y dirección dentro de cierta región, como, p. ej., entre dos láminas planas y paralelas cargadas con cargas iguales y opuestas, el segundo miembro de la Ec. [3-17] puede integrarse fácilmente. Tomemos el eje X en la dirección del campo y sea $ds = dx$. (Fig. 3-2.) Entonces, $\cos \theta = 1$ y

$$V_b - V_a = -\int_{x_1}^{x_2} E \, dx = -E(x_2 - x_1) = -Ed.$$

Por tanto,

$$V_a = V_b + Ed,$$

y

$$E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d} \qquad [3\text{-}19]$$

Esto es, la intensidad del campo eléctrico es igual a la diferencia de potencial entre las láminas dividida por su distancia. Obsérvese que $V_a > V_b$ (el potencial de la lámina positiva es mayor que el de la lámina negativa), de modo que V_{ab} es positiva y E es positivo; es decir, el campo está dirigido de izquierda a derecha.

La Ec. [3-19] es una expresión más útil para la intensidad del campo eléctrico entre láminas paralelas que la Ec. [2-17], $E = \sigma/\varepsilon_0$, puesto que la diferencia de potencial V_{ab} puede determinarse experimentalmente con más facilidad que la densidad superficial de carga.

EJEMPLO 2.—Un tipo sencillo de lámpara de radio, llamada diodo, se compone en esencia de dos electrodos situados dentro de una envoltura en la que se ha hecho un vacío muy elevado. Un electrodo, el cátodo, se mantiene a temperatura elevada y emite electrones desde su superficie (véase Sec. 18-1). Se establece entre el cátodo y el otro electrodo, llamado ánodo o placa, una diferencia de potencial de algunos cientos de voltios, siendo el ánodo el de potencial más elevado. Supongamos que en cierto diodo, el potencial de placa es de 250 V por encima del potencial del cátodo, y que se emite desde el cátodo un electrón sin velocidad inicial. ¿Cuál es su velocidad cuando llega al ánodo?

Sean V_k y V_p los potenciales respectivos del cátodo y del ánodo. Puesto que el electrón tiene una carga negativa de magnitud e, su energía potencial en el cátodo, de acuerdo con la Ec. [3-14[, es:

$$EP_k = -eV_k,$$

y en el ánodo

$$EP_p = -eV_p.$$

Sea v_p la velocidad del electrón en el ánodo. Su energía cinética en el ánodo es entonces

$$EC_p = \tfrac{1}{2}mv_p^2.$$

Su energía cinética en el cátodo es nula (dato).

La única fuerza que actúa sobre el electrón es la ejercida por el campo, de modo que, según la Ec. [3-10],

$$EC_p + EP_p = EC_k + EP_k;$$
$$\tfrac{1}{2}mv_p^2 - eV_p = -eV_k;$$
$$\tfrac{1}{2}mv_p^2 = e(V_p - V_k) = eV_{pk}.$$

Por tanto,

$$v_p = \sqrt{\frac{2eV_{pk}}{m}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 250}{9{,}1 \times 10^{-31}}}$$
$$= 9{,}4 \times 10^6 \text{ m/seg.}$$

Obsérvese que no es necesario conocer la forma o la distancia de los electrodos. La velocidad final depende solamente de la diferencia de potencial a través de la

cual ha *caído* el electrón (o más bien *elevado*, puesto que el electrón, por tener una carga negativa, se mueve desde los puntos de menor a los de mayor potencial). Naturalmente, el *tiempo* que tarda el electrón en trasladarse del cátodo al ánodo depende de la forma y dimensiones del tubo.

3-4. Potencial y distribución de carga.—Las consideraciones generales de las secciones anteriores demuestran que la diferencia de potencial entre los puntos b y a de un campo electrostático es igual y de signo opuesto a la integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico a lo largo de una línea que una ambos puntos:

$$V_b - V_a = -\int_a^b E \cos \theta \, ds. \qquad [3\text{-}17]$$

Calculemos ahora esta integral para el caso especial en que el campo es creado por una sola carga puntual q (Fig. 3-3). Sea r la distancia de la carga q a un punto cualquiera de una trayectoria arbitraria que une a y b. La intensidad E del campo eléctrico en el punto es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

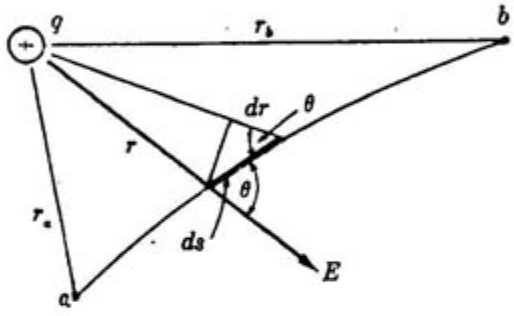


FIG. 3-3.—Cálculo de la diferencia de potencial entre los puntos a y b del campo creado por una sola carga puntual q.

Para un recorrido infinitesimal ds a lo largo de la trayectoria, la distancia aumenta en dr. Puede verse en la figura que

$$dr = ds \cos \theta.$$

Por consiguiente, la Ec. [3-17] se convierte en

$$V_b - V_a = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_a}^{r_b},$$

o sea,

$$V_b - V_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_b} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_a}, \qquad [3\text{-}20]$$

en la que r_b y r_a son, respectivamente, las distancias desde la carga q a los puntos b y a.

Para calcular el potencial *en* un punto, respecto a un punto del infinito, podemos o volver a la Ec. [3-15] y calcular la integral curvilínea de E, cambiada de signo, desde el infinito a un punto arbitrario, o bien

utilizar la Ec. [3-20], haciendo en ella $r_a = \infty$ y $V_a = 0$. Cualquiera de los dos métodos conduce al mismo resultado, o sea,

$$V_b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_b}$$

Puesto que b puede estar en cualquier punto del campo, se suprimen ordinariamente los subíndices y tenemos la expresión del potencial, respecto a un punto del infinito, en un punto situado a la distancia r de una carga puntual q:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}} \qquad [3\text{-}21]$$

El potencial resulta medido en voltios si q se expresa en culombios y r en metros.

Las distancias r_a, r_b y r que figuran en las Ecs. [3-20] y [3-21], se miden desde la carga q y se consideran siempre positivas. Sin embargo, la carga q puede ser positiva o negativa, y el potencial tendrá, por consiguiente, el mismo signo algébrico que la carga q.

En general, el campo en un punto es creado por cierto número de cargas en lugar de por una sola carga puntual. La consideración del caso

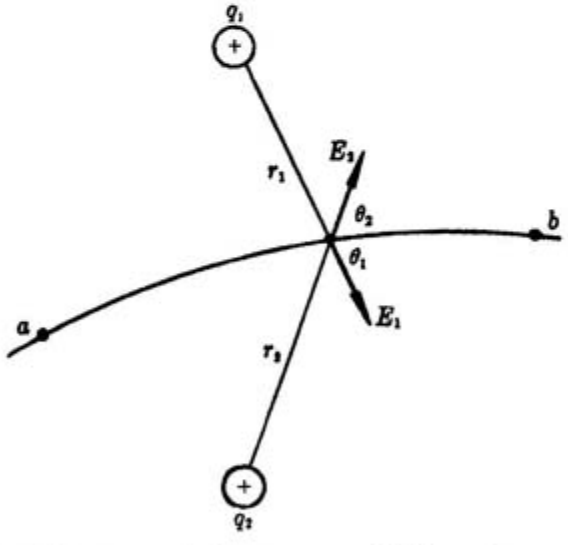


FIG. 3-4.—El potencial en un punto de un campo eléctrico es la suma algebraica de los potenciales debidos a las cargas que crean el campo.

sencillo del campo creado por dos cargas puntuales, indicará cómo ha de generalizarse la Ec. [3-21]. En la figura 3-4, las cargas puntuales positivas q_1 y q_2 crean un campo. Los vectores E_1 y E_2 son las intensidades del campo eléctrico debidas a las cargas respectivas en cualquier punto de una trayectoria arbitraria trazada entre a y b. Si una fuerza

exterior F (no representada en la Fig. 3-4), que forma un ángulo φ con la trayectoria, actúa sobre una carga de prueba q' colocada en el punto, la fuerza aceleradora resultante es:

$$\Sigma F_t = F \cos \varphi + q'E_1 \cos \theta_1 + q'E_2 \cos \theta_2.$$

Utilizando el mismo razonamiento que en las secciones 3-1 y 3-2, se obtiene:

$$\int_a^b F \cos \varphi \, ds = \int_{v_a}^{v_b} mv \, dv - \int_a^b q'E_1 \cos \theta_1 \, ds - \int_a^b q'E_2 \cos \theta_2 \, ds.$$

El incremento de energía potencial de la carga de prueba es:

$$EP_b - EP_a = -\int_a^b q'E_1 \cos \theta_1 \, ds - \int_a^b q'E_2 \cos \theta_2 \, ds.$$

La diferencia de potencial $V_b - V_a$ vale:

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_1 \cos \theta_1 \, ds - \int_a^b E_2 \cos \theta_2 \, ds, \qquad [3\text{-}22]$$

y el potencial en un punto es:

$$V = -\int E_1 \cos \theta_1 \, ds - \int E_2 \cos \theta_2 \, ds, \qquad [3\text{-}23]$$

donde las integrales son integrales curvilíneas desde el infinito al punto en cuestión. Pero, en virtud de la figura 3-4,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2}, \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2};$$

$$\cos \theta_1 \, ds = dr_1, \qquad \cos \theta_2 \, ds = dr_2.$$

Por tanto, según la Ec. [3-23],

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_2}, \qquad [3\text{-}24]$$

donde V es el potencial en un punto cualquiera, y r_1 y r_2, las distancias respectivas desde q_1 y q_2 a este punto. Vemos que el potencial en un punto es la suma de los potenciales debidos a las cargas q_1 y q_2, respectivamente. La suma es *algébrica, no vectorial*, ya que el potencial es una magnitud escalar.

Si el campo es creado por un número cualquiera de cargas puntuales, la generalización evidente de la Ec. [3-24] es:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Sigma \frac{q}{r}} \qquad [3\text{-}25]$$

La Ec. [3-25] se aplica igualmente al cálculo del potencial en un punto debido a esferas uniformemente cargadas, puesto que el campo en los

puntos exteriores a una esfera, que tiene una densidad superficial de carga uniforme, es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en su centro.

Si las cargas se encuentran distribuídas sobre superficies o dentro de volúmenes, la Ec. [3-25] se convierte en

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} \qquad [3\text{-}26]$$

De las Ecs. [3-24], [3-25] y [3-26] se deduce que el potencial en un punto de un campo electrostático sólo depende de los valores de las cargas que lo crean y de sus distancias al punto elegido. El potencial es independiente, por tanto, de la trayectoria utilizada para calcular la integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico desde el infinito al punto.

EJEMPLO 1.—Calcúlense los potenciales a las siguientes distancias de una carga puntual positiva de 10^{-9} coul: 1 mm, 1 cm, 10 cm, 100 cm. (Compárese con el ejemplo 1 de la Sec. 2-2.)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = 9 \times 10^9 \frac{q}{r}$$

Para $r = 1$ mm $= 10^{-3}$ m,

$$V = 9 \times 10^9 \times \frac{10^{-9}}{10^{-3}}$$

$$= 9000 \text{ V.}$$

Análogamente,

a 1 cm, $V = 900$ voltios;
a 10 cm, $V = 90$ voltios;
a 100 cm, $V = 9$ voltios.

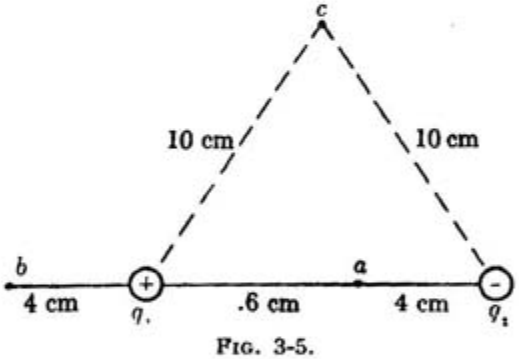


FIG. 3-5.

EJEMPLO 2.—Dos cargas puntuales de $+12 \times 10^{-9}$ y -12×10^{-9} coul están separadas 10 cm, como indica la figura 3-5. Hállense los potenciales en los puntos *a*, *b* y *c*. (Compárese con el ejemplo 2 de la Sec. 2-2.)

Hemos de calcular la suma *algébrica* $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Sigma\frac{q}{r}$ en cada punto. En el punto *a*, el potencial debido a la carga positiva es:

$$9 \times 10^9 \times \frac{12 \times 10^{-9}}{0{,}06} = +1800 \text{ V,}$$

y el debido a la carga negativa,

$$9 \times 10^9 \times \frac{(-12 \times 10^{-9})}{0{,}04} = -2700 \text{ V.}$$

Por tanto,

$$V_a = +1800 - 2700 = -900 \text{ V.}$$

En el punto b, el potencial debido a la carga positiva es $+ 2700$ V, y el debido a la carga negativa, $- 770$ V. Por tanto,

$$V_b = + 2700 - 770 = + 1930 \text{ V}.$$

En el punto c, el potencial es:

$$V_c = + 1080 - 1080 = 0.$$

EJEMPLO 3.—Calcúlese la energía potencial de una carga puntual de $+ 4 \times 10^{-9}$ culombios, cuando está colocada en los puntos a, b y c de la figura 3-5.

$$EP = qV.$$

Por tanto, en el punto a,

$$EP = qV_a = 4 \times 10^{-9} \times (- 900) = - 36 \times 10^{-7} \text{ julios} = - 36 \text{ erg}.$$

En el punto b,

$$EP = qV_b = 4 \times 10^{-9} \times 1930 = 77 \times 10^{-7} \text{ julios} = 77 \text{ erg}.$$

En el punto c,

$$EP = qV_c = 0.$$

(Todas respecto a un punto del infinito.)

EJEMPLO 4.—¿Cuál es la diferencia de potencial o voltaje entre los puntos a y b?; ¿b y a?; ¿b y c? ¿Qué trabajo sería necesario para llevar una carga puntual de $+ 4 \times 10^{-9}$ coul desde a hasta b, sin aumentar su energía cinética?; ¿y de c a a?

La diferencia de potencial entre los puntos a y b es $V_a - V_b$, o sea, V_{ab}:

$$V_{ab} = V_a - V_b = - 900 - 1930 = - 2830 \text{ V};$$
$$V_{ba} = V_b - V_a = 1930 - (-900) = + 2830 \text{ V};$$
$$V_{bc} = V_b - V_c = 1930 - 0 = + 1930 \text{ V}.$$

El trabajo necesario para llevar una carga q desde a hasta b es qV_{ba}:

$$W_{a \to b} = q \times V_{ba} = 4 \times 10^{-9} \times 2830 = 113 \times 10^{-7} \text{ julios};$$
$$W_{c \to a} = q \times V_{ac} = 4 \times 10^{-9} (- 900) = - 36 \times 10^{-7} \text{ julios}.$$

3-5. Gradiente de potencial.—La expresión general de la diferencia de potencial entre dos puntos es:

$$V_b - V_a = - \int_a^b E \cos \theta \, ds.$$

Cuando la distancia que los separa es infinitesimal, la diferencia de potencial se convierte en dV y, en virtud de la ecuación anterior,

$$dV = - E \cos \theta \, ds. \qquad [3\text{-}27]$$

El mismo resultado se deduce de la ecuación [3-4] si se dividen ambos miembros por q'.

La ecuación [3-27] puede escribirse:

$$\boxed{E \cos \theta = - \frac{dV}{ds}} \qquad [3\text{-}28]$$

La razón dV/ds, o sea, la derivada del potencial respecto a la distancia, contada en la dirección de ds, se denomina *gradiente de potencial*. Puesto que θ es el ángulo formado por el vector campo eléctrico y el elemento de longitud ds, el producto $E \cos \theta$ es la componente del campo en la dirección de ds. De aquí se deduce la siguiente relación importante: *La componente de la intensidad del campo eléctrico en una dirección cualquiera es igual al gradiente de potencial en dicha dirección, cambiado de signo.*

En particular, si la dirección de ds es la misma que la del campo eléctrico, se tiene $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$, y *la intensidad del campo eléctrico es igual al gradiente de potencial en la dirección del campo, cambiado de signo.*

En el sistema mks, los gradientes de potencial se expresan en *voltios por metro.*

Dado que la componente del campo eléctrico en cualquier dirección es numéricamente igual al gradiente de potencial en dicha dirección (prescindiendo del signo negativo), se deduce que las unidades de la intensidad del campo eléctrico y del gradiente de potencial son equivalentes. Esto es, 1 V/m = 1 new/coul, 100 V/m = 100 new/coul, etc. De hecho, es costumbre admitida utilizar como unidad usual para expresar la intensidad de un campo eléctrico el voltio por metro, en lugar del newton por culombio.

También se utilizan a veces el V/cm y el V/mm.

El campo que rodea a un conjunto de cargas cualesquiera es, naturalmente, tridimensional, y, en general, el potencial en un punto cualquiera es cierta función de las coordenadas, x, y, z, del punto. Podemos entonces tomar en la Ec. [3-28] la dirección de ds paralela primero al eje X, después al eje Y, y, finalmente, al eje Z. Los tres gradientes de potencial dan entonces las tres componentes rectangulares de E, o sea, E_x, E_y y E_z. Esto es,

$$E_x = -\frac{dV}{dx}; \quad E_y = -\frac{dV}{dy}; \quad E_z = -\frac{dV}{dz} \qquad [3\text{-}29]$$

(En rigor, estas expresiones deben escribirse como derivadas parciales.)

Es fácil ver que en una región en la cual el potencial tenga el mismo valor en todos los puntos, las tres derivadas de la Ec. [3-29] son nulas. Por consiguiente, las tres componentes de la intensidad del campo eléctrico son nulas y en dicha región el campo es cero. Inversamente, si la intensidad del campo eléctrico en una región es nula, el potencial es el mismo en todos los puntos. Hemos demostrado que la intensidad del campo eléctrico dentro de un conductor es nula, cuando las cargas sobre el conductor están en reposo. En consecuencia, el potencial tiene el mismo valor en todos los puntos dentro de dicho conductor.

Una de las propiedades útiles del concepto de gradiente de potencial es que frecuentemente es mucho más sencillo calcular la intensidad del campo eléctrico en un punto, hallando primero una expresión del po-

tencial en el punto y utilizando después la Ec. [3-29], que calcular directamente la intensidad mediante la Ec. [2-5]. La simplificación procede del hecho de que el potencial, que es un escalar, supone solamente una suma algébrica o integración, en lugar de una suma vectorial. Véanse los ejemplos 2 y 3 al final de esta sección.

El *gradiente* de una función escalar de x, y y z, tal como el potencial V, se define como un vector cuyas componentes son iguales a las derivadas parciales de la función respecto a x, y y z. (Véase THOMAS: *Cálculo infinitesimal y Geometría analítica*, Sec. 14-6.)

$$\text{grad } V = \vec{i}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial V}{\partial z},$$

donde $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son, respectivamente, los vectores unitarios a lo largo de los ejes X, Y y Z. Se deduce que

$$\vec{E} = -\text{ grad } V,$$

que equivale a las tres Ecs. [3-29].

EJEMPLO 1.—Hemos demostrado que el potencial debido a una sola carga puntual q es

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Por simetría, el campo de la carga es radial. Por consiguiente, si en la Ec. [3-28], tomamos ds en dirección radial, la componente de E obtenida será el valor de la propia intensidad del campo eléctrico. Según esto, hagamos ds igual a dr, y obtendremos:

$$E = -\frac{dV}{ds} = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

que coincide con la expresión anteriormente deducida para la intensidad del campo eléctrico creado por una carga puntual.

El método analítico anterior se interpreta gráficamente como sigue. En la figura 3-6 (a) se ha representado el potencial de una carga positiva puntual q en función de r. La pendiente de la curva, en un punto cualquiera, dV/dr, es el gradiente del potencial en dirección radial. El gradiente del potencial puede encontrarse gráficamente construyendo una tangente a la curva en un punto

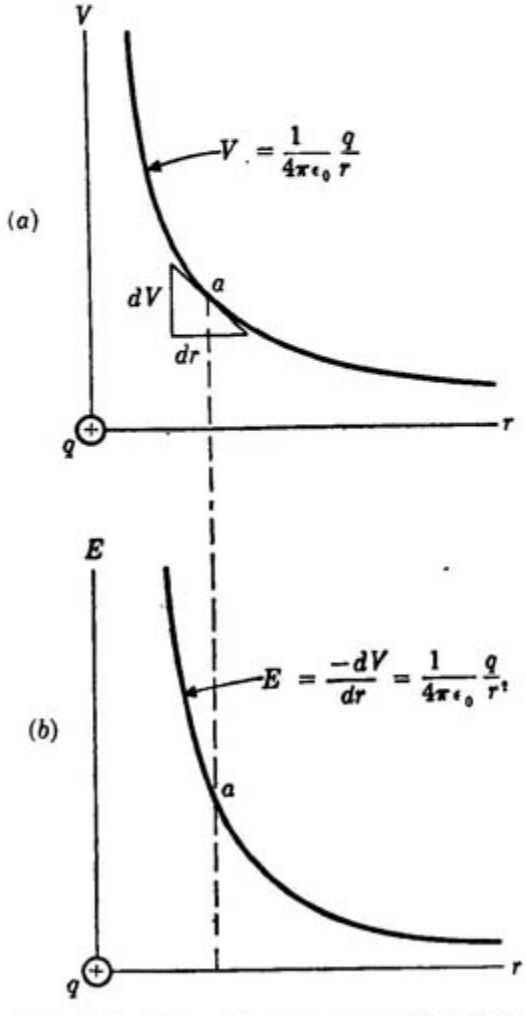


FIG. 3-6.—Potencial V e intensidad E en función de la distancia r de un punto a la carga q.

arbitrario y midiendo su pendiente. El campo eléctrico en el punto es igual al valor de esta pendiente cambiado de signo. Según se aprecia en la figura 3-6 (*a*), la pendiente de la gráfica que representa a V en función de r es negativa, de modo que la intensidad del campo eléctrico es positiva, es decir, está dirigido radialmente hacia afuera.

La figura 3-6 (*b*) es la gráfica de E en función de r. La *ordenada* de esta gráfica, en cualquier punto, es igual al valor de la *pendiente* en el mismo punto de la gráfica superior, cambiado de signo.

EJEMPLO 2.—Para ilustrar la simplificación que introduce el uso de gradientes de potencial, calculemos el campo eléctrico sobre el eje de un anillo cargado, problema que se resolvió ya en la sección 2-4. Aunque la carga total q sobre el anillo

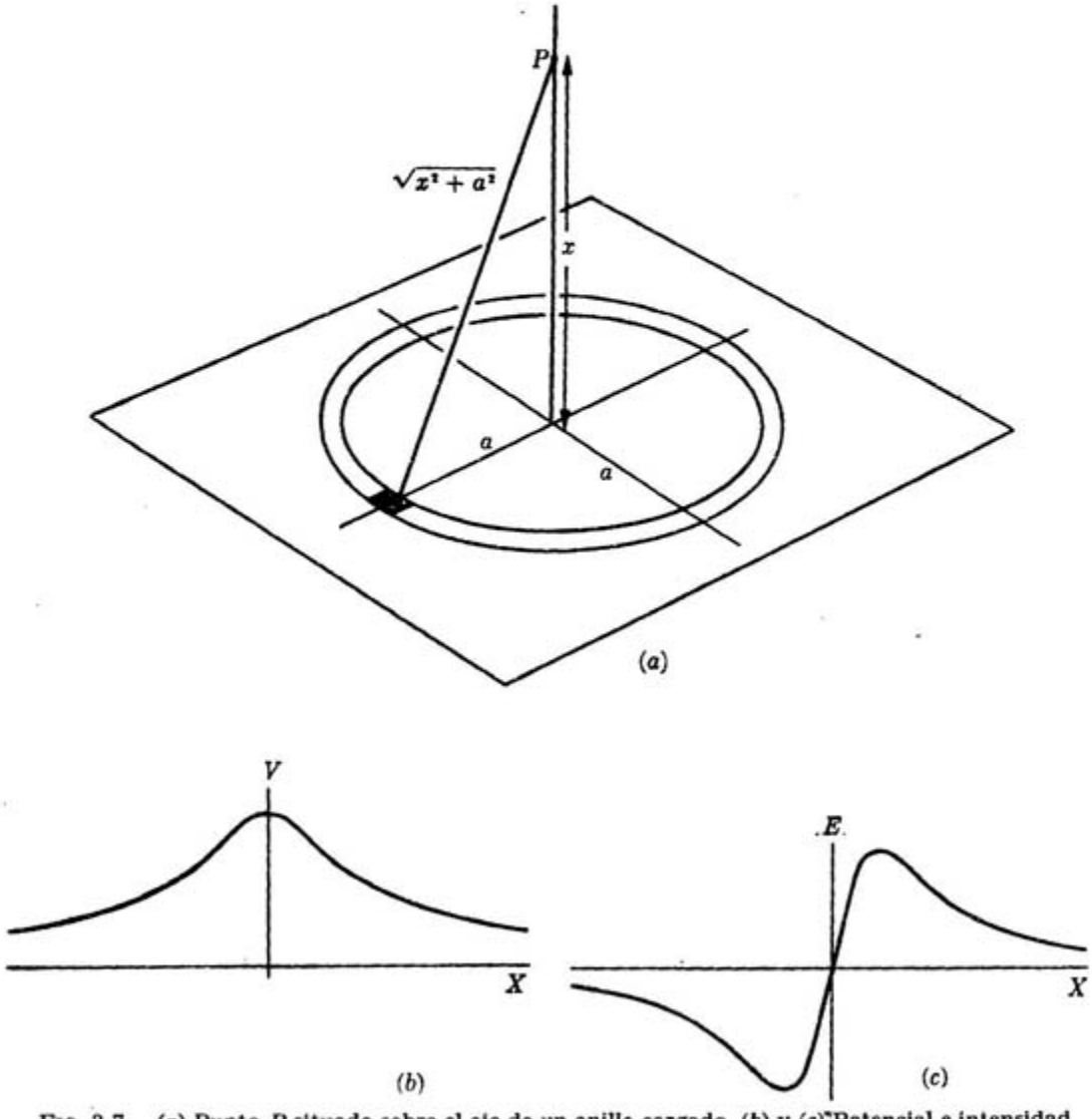


FIG. 3-7.—(*a*) Punto P situado sobre el eje de un anillo cargado. (*b*) y (*c*) Potencial e intensidad sobre el eje de un anillo cargado en función de la distancia al centro del mismo.

está distribuída en toda su longitud, cada porción de carga se halla a la misma distancia $\sqrt{x^2 + a^2}$ de un punto P del eje [Fig. 3-7(a).] Por consiguiente, el potencial en P es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

(La expresión general del potencial para puntos no situados sobre el eje es, naturalmente, más complicada.)

Por razón de simetría, el campo en un punto del eje tiene la dirección de éste, de modo que el gradiente del potencial, dV/dx, cambiado de signo, dará el campo en dicho punto:

$$E = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Salvo el cambio de notación, este resultado coincide con el obtenido en la sección 2-4, y los cálculos son evidentemente más sencillos. La figura 3-7 (b) es una gráfica de V en función de x, y la figura 3-7 (c) una gráfica de E en función de x.

EJEMPLO 3.—Consideremos ahora el potencial y el campo de un dipolo (Fig. 3-8). Utilicemos, para determinar la posición de un punto P, coordenadas polares, r y θ, con origen en el punto medio del dipolo, y tracemos, haciendo centro en P, los arcos indicados por las líneas de puntos. Si P está suficientemente lejos del dipolo los arcos pueden considerarse como segmentos rectilíneos perpendiculares a la vez a r y a cada una de las rectas que unen P a las dos cargas. La distancia desde la carga $+q$ a P es muy aproximadamente $r - \frac{l}{2}\cos\theta$, y desde la carga $-q$ a P es $r + \frac{l}{2}\cos\theta$. El potencial en P es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r - \frac{l}{2}\cos\theta} + \frac{-q}{r + \frac{l}{2}\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\left(\frac{l\cos\theta}{r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ql\cos\theta}{r^2}$$

si despreciamos $\frac{l^2}{4}\cos^2\theta$ frente a r^2.

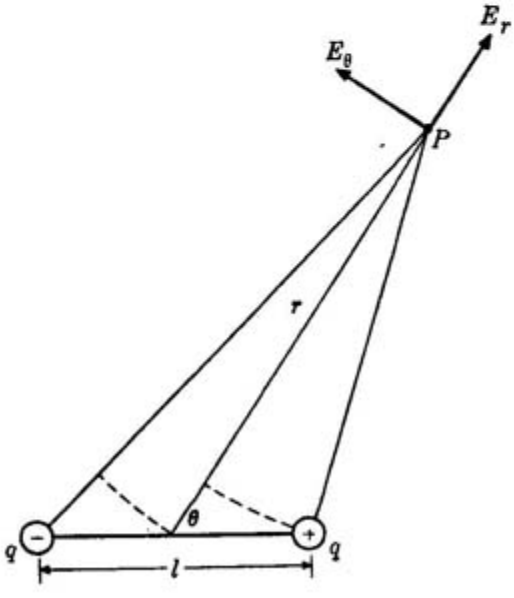


FIG. 3-8.—Componentes de la intensidad del campo eléctrico creado por un dipolo.

En coordenadas polares, una distancia ds en dirección radial es simplemente dr, y una distancia ds perpendicular a r es $rd\theta$. Por tanto,

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\text{radialmente}} = \frac{dV}{dr}; \quad \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\text{tangencialmente}} = \frac{dV}{rd\theta} = \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta},$$

y

$$E_r = -\frac{dV}{dr}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}$$

Así

$$E_r = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\,\text{sen}\,\theta}{r^3}$$

Estas expresiones de E_r y E_θ se dieron sin demostración en la sección 2-3.

EJEMPLO 4.—Un largo conductor cilíndrico de radio a está rodeado por un cilindro coaxial hueco de radio interior b. Los cilindros poseen cargas iguales y de signo opuesto. Calcúlese la expresión del campo eléctrico en un punto del espacio comprendido entre los cilindros, en función de la diferencia de potencial que existe entre ellos.

Con ayuda del teorema de Gauss (véase Sec. 2-8) hemos demostrado que, en función de λ (carga por unidad de longitud), el campo eléctrico entre los cilindros es:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r},$$

y como

$$E = -dV/dr,$$

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

$$-\int_{V_a}^{V_b} dV = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\lambda\int_a^b \frac{dr}{r}; \quad V_a - V_b = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\lambda\ln\frac{b}{a},$$

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0\frac{V_{ab}}{\ln\dfrac{b}{a}}$$

Al introducir esta expresión de λ en la primera ecuación se obtiene:

$$E = \frac{1}{r}\frac{V_{ab}}{\ln\dfrac{b}{a}} \qquad [3\text{-}30]$$

Esta expresión de la intensidad resulta más útil, porque la diferencia de potencial entre los cilindros puede medirse más fácilmente que su carga por unidad de longitud. Se ha despreciado el efecto de los bordes.

3-6. Potencial de un conductor esférico cargado.—La intensidad del campo eléctrico *fuera* de un conductor esférico cargado es la misma que si toda la carga del conductor estuviera concentrada en su centro. Se deduce de esto que el potencial en los puntos exteriores al conductor está dado por la misma expresión que para una carga puntual, a saber:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \qquad [3\text{-}31]$$

siendo r igual o mayor que el radio de la esfera. En los puntos *interiores* a la esfera la intensidad del campo eléctrico es nula. El potencial es, por tanto, el *mismo* en todos los puntos interiores e igual al potencial en la superficie, a saber:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}, \qquad [3\text{-}32]$$

siendo a el radio de la esfera.

Por consiguiente, la Ec. [3-31] da el potencial en los puntos exteriores, y la Ec. [3-32] da el potencial en los puntos interiores a la esfera.

El potencial y la intensidad del campo eléctrico debidos a una esfera cargada positivamente están representados gráficamente en la figura 3-9. En los puntos interiores, donde V es constante, la pendiente de la gráfica que representa a V en función de r es cero, y E es nulo. En un punto exterior infinitamente próximo a la superficie de la esfera, la pendiente de dicha gráfica es máxima y negativa. Por consiguiente, E es en dicho punto máximo y positivo. Cuando la distancia al centro aumenta, V disminuye proporcionalmente a $1/r$, y E lo hace proporcionalmente a $1/r^2$.

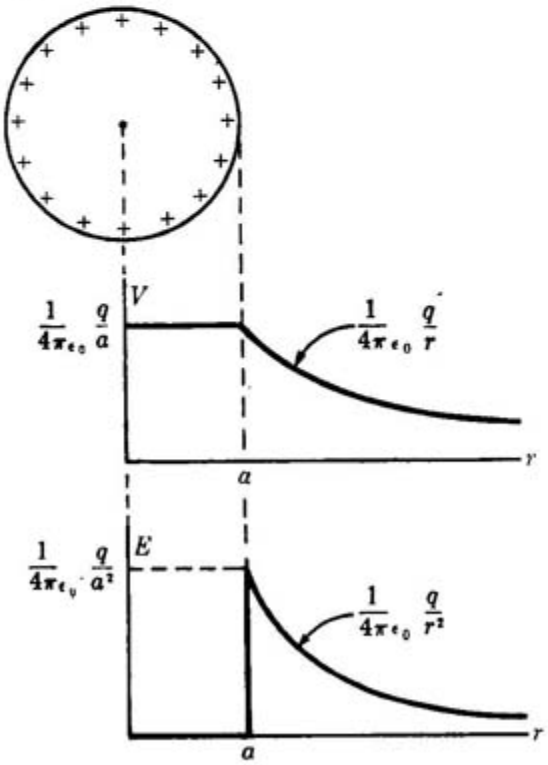


FIG. 3-9.—Potencial e intensidad dentro y fuera de una esfera cargada.

Se ha demostrado anteriormente que la carga máxima que puede ser retenida por un conductor situado en el aire está limitada por el hecho de que el aire mismo se hace conductor para una intensidad del campo de unos 3×10^6 V/m. En general, si E_m representa el límite máximo del campo eléctrico, la car-

ga máxima que puede ser retenida por un conductor esférico en el aire es:

$$q_m = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E_m.$$

Por tanto, el potencial *máximo* que puede alcanzar un conductor esférico en el aire es, en virtud de la Ec. [3-32],

$$V_m = aE_m.$$

Para una esfera de un centímetro de radio, $V_m = 0{,}01 \times 3 \times 10^6 = 30\,000$ V, y ninguna carga podría elevar el potencial de una esfera de este tamaño, en el aire, por encima de 30 000 V.

Por esta causa es necesario utilizar bornes esféricos tan grandes en las máquinas de voltajes elevados del tipo del generador de Van de Graaff. Si hacemos $a = 2$ m, se tiene:

$$V_m = 2 \times 3 \times 10^6 = 6 \text{ millones de voltios.}$$

Contrario a éste es el efecto producido por las puntas agudas, llamando punta a una porción de superficie de radio de curvatura muy pequeño. Puesto que el potencial máximo es directamente proporcional al radio, potenciales relativamente pequeños aplicados a puntas agudas situadas en el aire, producirán muy cerca de la punta campos suficientemente elevados para ocasionar una ionización del aire que las rodea.

EJEMPLO.—Dos conductores esféricos A y B, de 10 cm de radio cada uno, están colocados de modo que sus centros distan 1 metro (Fig. 3-10). Si se da a la esfera A una carga de $+30 \times 10^{-9}$ coul y a la B otra de -60×10^{-9} coul, calcúlese el potencial de cada una.

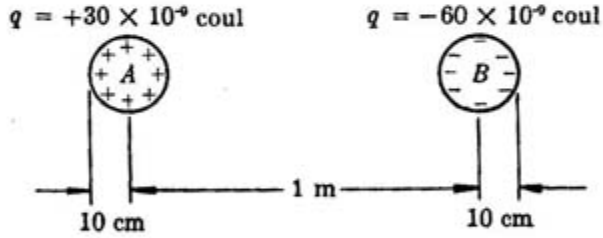


FIG. 3-10

Puesto que el potencial es el mismo en todos los puntos interiores a la esfera e igual al de la superficie de la misma, calculemos el potencial en el centro de cada una. En el centro de la esfera A, el potencial debido a su propia carga es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} = 9 \times 10^9 \times \frac{30 \times 10^{-9}}{0{,}10} = 2700 \text{ V}$$

En los puntos exteriores a la esfera B, toda la carga de B se puede considerar concentrada en su centro, o sea, a una distancia de 1 m del centro de A. Por tanto, el potencial en el centro de A debido a la carga de B es:

$$V = 9 \times 10^9 \times \frac{-60 \times 19^{-9}}{1} = -540 \text{ V}$$

El potencial en el centro de A, igual al de su superficie, es, por consiguiente,

$$V_A = 2700 - 540 = +2160 \text{ V}$$

Análogamente, en el centro de la esfera B el potencial es:

$$V_B = -5400 + 270 = -5130 \text{ V}$$

La diferencia de potencial entre las esferas es:

$$V_{AB} = V_A - V_B = 2160 - (-5130) = +7290 \text{ V},$$

siendo el potencial de A el más elevado.

El cálculo anterior no es rigurosamente correcto, puesto que las fuerzas de atracción entre las cargas de A y de B ocasionarán una acumulación de carga sobre las porciones de superficie de las esferas que se encuentran enfrentadas. La distribución resultante no tiene, por tanto, simetría esférica, y en los puntos exteriores el campo y el potencial no son los mismos que si toda la carga estuviera concentrada en los centros de las esferas. Sin embargo, el potencial en el centro de cada esfera debido a su propia carga, es igual a la carga dividida por el radio, sea uniforme o no la densidad superficial, puesto que todo elemento de carga se encuentra a una distancia del centro igual al radio.

La resolución exacta del problema cae fuera del alcance de este libro, pero si la distancia entre las esferas es grande comparada con su radio, la asimetría no es considerable y el método anterior da en esencia resultados correctos.

3-7. Ecuaciones de Poisson y Laplace.—Las ecuaciones de Poisson y Laplace son relaciones matemáticas útiles para la resolución de muchos problemas de electrostática. Las deduciremos en un caso unidimensional y después las generalizaremos para el caso de tres dimensiones. Representemos por A y B, en la figura 3-11, dos grandes placas paralelas conductoras entre las cuales hay un campo eléctrico dirigido de A a B. Supongamos que hay carga eléctrica en el espacio comprendido entre las láminas, como ocurre entre el cátodo y el ánodo de un tubo electrónico en el que el espacio comprendido entre ánodo y cátodo está ocupado por electrones que circulan entre ellos.

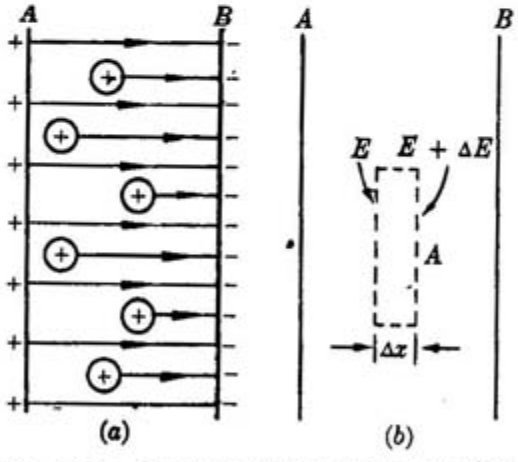


FIG. 3-11.—Carga espacial positiva entre dos láminas.

La carga distribuída se denomina *carga espacial*. Sea ρ la densidad de carga espacial, o sea, la carga por unidad de volumen, y supongamos que puede variar de un punto a otro del espacio, pero que es uniforme dentro de una delgada lámina paralela a las A y B. Dicho con otras palabras: si tomamos el eje X perpendicular a las láminas, la densidad de carga es función únicamente de x. El campo eléctrico puede variar también de un punto a otro, pero se supone que depende solamente de x. El campo eléctrico se indica en la figura 3-11 (a) dibu-

jando una línea de fuerza desde cada carga positiva a cada carga negativa. (Se ha supuesto una carga espacial positiva.) Obsérvese que el número de líneas de fuerza por unidad de superficie, y, por consiguiente, la intensidad del campo eléctrico, aumenta al aumentar x como consecuencia de la carga espacial.

Apliquemos ahora el teorema de Gauss a un delgado elemento de volumen de sección transversal A y espesor Δx, representado en la figura 3-11 (*b*). Sea E la intensidad del campo eléctrico en la cara izquierda del elemento. Por hipótesis, E tiene el mismo valor en todos los puntos de esta cara. La intensidad del campo eléctrico en la cara derecha de la lámina será $E + \Delta E$. Si dE/dx es la derivada de E respecto a x, el incremento ΔE del campo, en la distancia Δx, es:

$$\Delta E = \frac{dE}{dx}\,\Delta x.$$

Por tanto,

$$E + \Delta E = E + \frac{dE}{dx}\,\Delta x.$$

La integral de superficie de E extendida a la cara derecha del elemento es:

$$\left(E + \frac{dE}{dx}\,\Delta x\right) \times A,$$

y la integral de superficie de E extendida a la cara izquierda es:

$$-\,E \times A.$$

Esta integral es negativa puesto que E está dirigido hacia dentro en toda esta superficie.

La integral de superficie de E extendida a toda la superficie del elemento es:

$$\left(E + \frac{dE}{dx}\,\Delta x\right) \times A - E \times A = A\,\Delta x\,\frac{dE}{dx}$$

El teorema de Gauss establece que la integral de superficie del producto de ε_0 por la intensidad del campo eléctrico, extendida a una superficie cerrada, es igual a la carga encerrada dentro de la superficie. El volumen del elemento es $A\,\Delta x$ y la carga neta encerrada por él es $\rho A\,\Delta x$. Por tanto,

$$\varepsilon_0\,A\,\Delta x\,\frac{dE}{dx} = \rho A\,\Delta x.$$

Después de dividir ambos miembros por $\varepsilon_0\,A\,\Delta x$, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho. \qquad [3\text{-}33]$$

Pero la intensidad del campo eléctrico es igual al gradiente de potencial cambiado de signo, o sea,

$$E = -\frac{dV}{dx}$$

Derivando ambos miembros respecto a x se obtiene:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{d^2V}{dx^2} \qquad [3\text{-}34]$$

La Ec. [3-34] puede combinarse ahora con la [3-33] y resulta:

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho} \qquad [3\text{-}35]$$

Ésta es la *ecuación de Poisson* para una dimensión, en la que los potenciales varían únicamente con x. Su forma general, en la que V puede depender de x, y y z, se encuentra por el mismo método anterior y es:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \qquad [3\text{-}36]$$

En rigor las tres derivadas debían escribirse como derivadas parciales.

En el caso especial en que la densidad de carga es nula, la Ec. [3-35] se convierte en

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = 0} \qquad [3\text{-}37]$$

cuya forma general es:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0. \qquad [3\text{-}38]$$

La Ec. [3-38] es la *ecuación de Laplace.*

3-8. Intensidad del campo eléctrico, potencial y distribución de carga. Un campo eléctrico queda completamente determinado dando la distribución de carga, el campo eléctrico en cada punto o el potencial de todos los puntos. Si una cualquiera de estas determinaciones es conocida, pueden calcularse las otras (salvo posibles dificultades matemáticas).

Si se conoce la distribución de carga, la intensidad del campo eléctrico y el potencial en cualquier punto pueden encontrarse mediante las relaciones

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}; \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

Si es dada la intensidad del campo eléctrico, la carga dentro de cualquier volumen (y, por consiguiente, en cualquier punto) puede encontrarse

mediante el teorema de Gauss. El potencial se calcula entonces a partir de la conocida distribución de carga mediante la ecuación

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r},$$

o puede deducirse directamente de la expresión

$$V = -\int E \cos \theta \, ds.$$

Si es conocido el potencial en todos los puntos, la intensidad del campo eléctrico se deduce de las relaciones

$$E_x = -\frac{dV}{dx}, \quad E_y = -\frac{dV}{dy}, \quad E_z = -\frac{dV}{dz},$$

y, una vez conocido el campo eléctrico, la distribución de carga puede encontrarse mediante el teorema de Gauss.

3-9. Superficies equipotenciales.—La distribución del potencial en un campo eléctrico puede representarse gráficamente por *superficies equipotenciales*. Una superficie equipotencial es aquella en la cual todos los puntos tienen el mismo potencial. Aunque puede trazarse una superficie equipotencial por cada punto de un campo eléctrico, es costumbre representar en los esquemas sólo algunas de estas superficies equipotenciales.

Puesto que la energía potencial de un cuerpo cargado es la misma en todos los puntos de una superficie equipotencial dada, se deduce que no es necesario trabajo (eléctrico) para mover un cuerpo cargado sobre una de estas superficies. Por tanto, la superficie equipotencial que pasa por cualquier punto es perpendicular a la dirección del campo en dicho punto. Si no fuera así, el campo tendría una componente situada sobre la superficie y habría que realizar trabajo contra las fuerzas eléctricas para mover una carga en dirección de esta componente. Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales son, en consecuencia, perpendiculares entre sí. En general, las líneas de fuerza de un campo son curvas y las superficies equipotenciales son superficies curvas. Para el caso especial de un campo uniforme, en el que las líneas de fuerza son rectas paralelas, las superficies equipotenciales son planos paralelos, perpendiculares a las líneas de fuerza.

Se ha demostrado (véase Sec. 2-7) que las líneas de fuerza en la superficie de un conductor cargado son perpendiculares al conductor si las cargas se encuentran en reposo. Por consiguiente, la superficie de tal conductor es una superficie equipotencial. Además, puesto que el campo dentro de un conductor cargado es nulo, el volumen interior de un conductor es un *volumen equipotencial*, y tiene el mismo potencial que la superficie del conductor.

La figura 3-12 muestra las mismas distribuciones de carga que la figura 2-12 de la sección 2-5. Las líneas de fuerza se han dibujado de

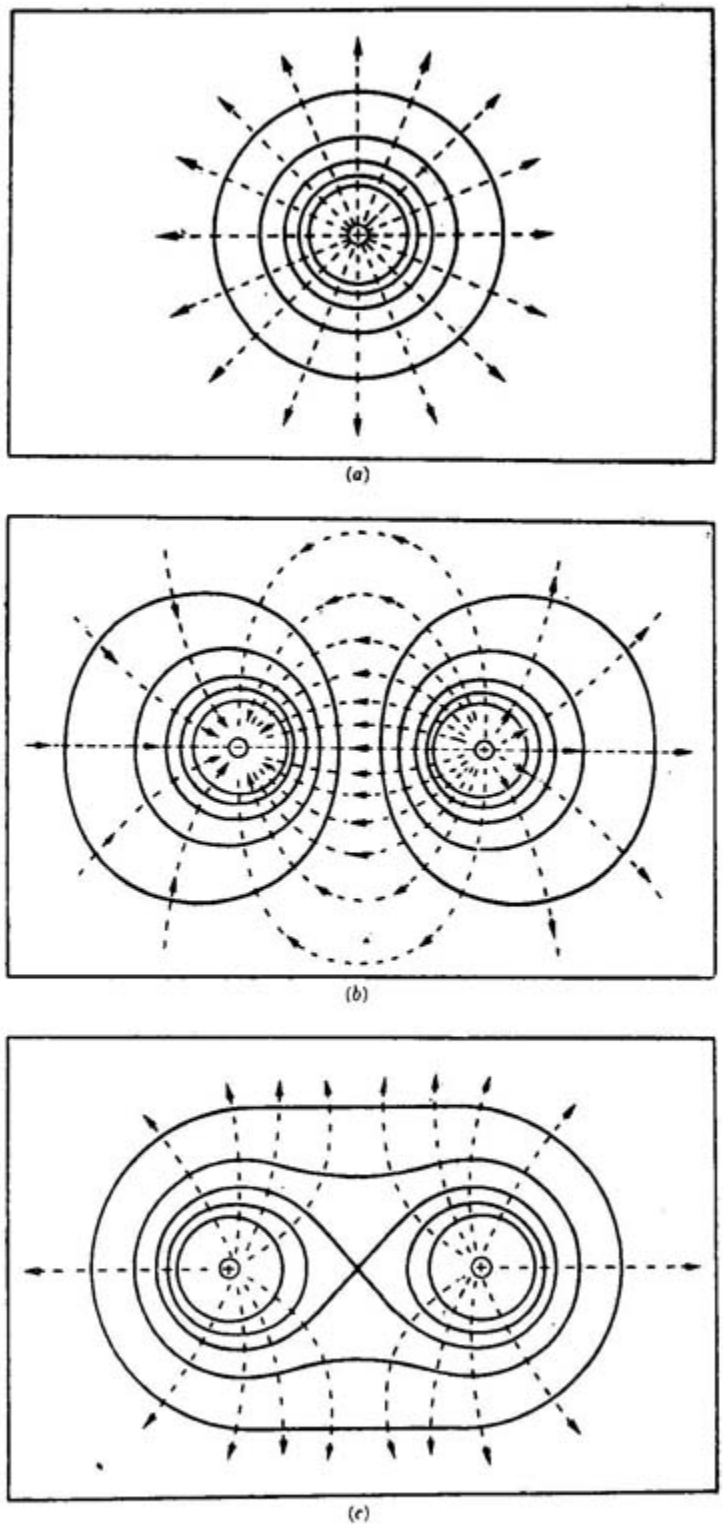


FIG. 3-12.—Superficies equipotenciales (líneas llenas) y líneas de fuerza (líneas de trazos) en la proximidad de cargas puntuales.

trazos y las intersecciones de las superficies equipotenciales con el plano del dibujo están representadas con líneas llenas. El campo real es, naturalmente, tridimensional.

Supongamos que un campo eléctrico dado se ha representado por su retículo de líneas de fuerza y superficies equipotenciales, con un espaciamiento (eléctrico) entre las superficies equipotenciales igual a una misma diferencia de potencial constante ΔV, p. ej., 1 V ó 100 V, y sea Δs la distancia, contada sobre la normal, entre dos superficies equipotenciales. Entonces Δs se cuenta en la dirección del campo y se deduce que

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s} \text{ (aproximadamente), o bien } \Delta s = -\frac{\Delta V}{E}$$

Es decir, cuanto mayor es la intensidad E del campo eléctrico, tanto menor es la distancia perpendicular Δs entre las superficies equipotenciales. Por consiguiente, están más próximas en un campo intenso, y se hallan más separadas en un campo débil.

Las relaciones geométricas entre líneas de fuerza y superficies equipotenciales permiten frecuentemente obtener una idea cualitativa de la distribución de la carga y de la intensidad del campo eléctrico en un

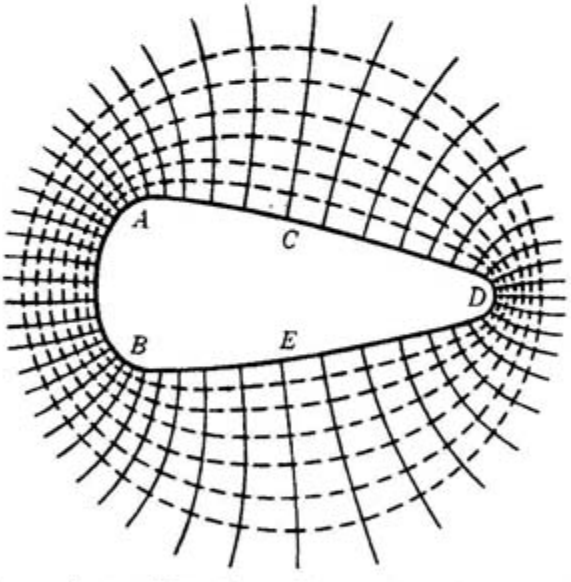


FIG. 3-13.—Superficies equipotenciales (líneas de trazos) y líneas de fuerza (líneas llenas) alrededor de un conductor de forma irregular.

conjunto de conductores en el cual sería difícil, si no imposible, obtener una expresión analítica exacta del resultado deseado; p. ej., supongamos que el conductor de la figura 3-13 tiene una carga positiva, y que deseamos conocer cómo está distribuída la carga sobre su superficie. Sabemos que la superficie del conductor es una superficie equipotencial, y también

que, a distancias grandes comparadas con las dimensiones del cuerpo, las superficies equipotenciales son superficies esféricas, puesto que a distancia suficientemente grande, el cuerpo puede considerarse como una carga puntual. Las intersecciones de las superficies equipotenciales con el plano del dibujo pueden dibujarse partiendo de una que se encuentre exactamente sobre el cuerpo y modificando gradualmente su forma de modo que las intersecciones se aproximen a una circunferencia. Se encontrará que cuanto más pequeño es el radio de curvatura de la superficie, tanto más próximas se hallan las superficies equipotenciales. El menor espaciamiento tiene lugar en la proximidad del punto D; es algo mayor en A y B, y la separación máxima se encuentra frente a las caras C y E. La intensidad del campo eléctrico es, por consiguiente, máxima junto al extremo aguzado D y mínima junto a C y E.

Las líneas de fuerza pueden ahora dibujarse trazándolas en cada punto perpendicularmente a las superficies equipotenciales, una de las cuales es la superficie del conductor, y apretándolas tanto más cuanto menor es la separación entre las superficies equipotenciales.

Por último, puesto que la intensidad del campo eléctrico, justamente fuera de la superficie, es proporcional a la densidad superficial de carga, se deduce que la densidad superficial es máxima en las regiones de radio de curvatura mínimo, y mínima donde el radio de curvatura es máximo.

Obsérvese que aunque la densidad superficial de carga está lejos de ser uniforme sobre la superficie de un cuerpo de forma irregular, el *potencial* es necesariamente constante sobre toda la superficie.

3-10. Reparto de carga entre conductores.—Cuando un conductor cargado se pone en contacto eléctrico con otro que está descargado la carga inicial se reparte entre ambos. Resulta evidente que había de suceder así como consecuencia de las fuerzas mutuas de repulsión entre las partes que componen la carga inicial. No puede decirse exactamente qué carga ha pasado de uno a otro, pero sabemos que ha de ser tal que todos los puntos de ambos conductores queden al mismo potencial. Estudiaremos solamente dos ejemplos: (1) dos esferas separadas por una distancia que es grande comparada con sus radios, haciendo el contacto mediante un hilo, y (2) un conductor cargado que hace contacto interno con un segundo conductor hueco. Estos principios quedarán aclarados mediante ejemplos numéricos.

EJEMPLO 1.—Supongamos que pasa carga eléctrica desde una esfera conductora A de 1 cm de radio, sostenida por un soporte aislador, a otra esfera B de 10 cm de radio sostenida de igual modo, efectuándose la conexión mediante un hilo fino (figura 3-14). Los centros de las esferas están separados por una distancia de

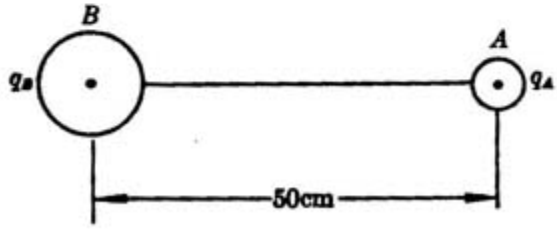


FIG. 3-14.—Paso de carga de una esfera a otra a través de un hilo fino.

50 cm y el hilo es lo bastante fino para que pueda despreciarse la carga que queda sobre él. Se da inicialmente a la esfera más pequeña una carga de 10×10^{-9} coul.

Una vez establecida la conexión, la carga de 10×10^{-9} coul se distribuirá de tal modo que ambas esferas y el hilo alcancen el mismo potencial. Representemos por q_A y q_B las cargas de las esferas, y escribamos la expresión del potencial en el centro de la esfera B. Esto es,

$$V_B = 9 \times 10^9 \left(\frac{q_B}{0{,}10} + \frac{q_A}{0{,}50} \right)$$

Análogamente, en el centro de la otra esfera,

$$V_A = 9 \times 10^9 \left(\frac{q_A}{0{,}01} + \frac{q_B}{0{,}50} \right)$$

Puesto que ambas esferas están al mismo potencial, $V_A = V_B$, o sea,

$$\frac{q_B}{0{,}10} + \frac{q_A}{0{,}50} = \frac{q_A}{0{,}01} + \frac{q_B}{0{,}50},$$

y como $q_A + q_B = 10 \times 10^{-9}$ coul (dato), encontramos:

$$q_B = 9{,}25 \times 10^{-9} \text{ coul};$$
$$q_A = 0{,}75 \times 10^{-9} \text{ coul};$$
$$V = 845 \text{ V}.$$

La densidad superficial de carga sobre la esfera grande es:

$$\sigma_B = \frac{9{,}25 \times 10^{-9}}{4\pi \times (0{,}10)^2} = 7{,}35 \times 10^{-8} \text{ coul/m}^2,$$

mientras que sobre la pequeña resulta:

$$\sigma_A = \frac{0{,}75 \times 10^{-9}}{4\pi \times (0{,}01)^2} = 59{,}7 \times 10^{-8} \text{ coul/m}^2,$$

que constituye otra confirmación de que la carga se acumula en las partes del conductor de pequeño radio de curvatura.

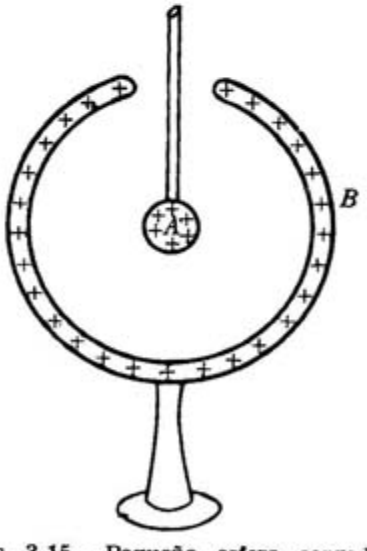


FIG. 3-15.—Pequeña esfera cargada completamente envuelta por otra esfera cargada mayor.

EJEMPLO 2.—Practiquemos en la esfera de 10 cm un orificio lo bastante grande para que pueda pasar la esfera de 1 cm, y supongamos para mayor sencillez que la esfera menor (A) se encuentra en el centro de la esfera mayor (B). (Fig. 3-15). Sea q_B la carga inicial de la esfera B y q_A la de la esfera A. El potencial de B, despreciando cualquier efecto de la pequeña abertura, es:

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_B}{0{,}10} + \frac{q_A}{0{,}10} \right),$$

y el potencial de A,

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_B}{0{,}10} + \frac{q_A}{0{,}01} \right)$$

La diferencia de potencial entre A y B es, por consiguiente,

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_B}{0{,}10} + \frac{q_A}{0{,}01} - \frac{q_B}{0{,}10} - \frac{q_A}{0{,}10}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_A \left(\frac{1}{0{,}01} - \frac{1}{0{,}10}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 90\, q_A. \qquad [3\text{-}39]$$

Por tanto, V_{AB} es positivo y A se encuentra a un potencial superior al de B. Si se establece ahora contacto entre las esferas pasará carga de A a B hasta que $V_{AB} = 0$, o sea, según la Ec. [3-39], hasta que $q_A = 0$, lo que conduce al inesperado resultado de que *toda* la carga de la esfera A se transmite a la esfera B, independientemente de los valores iniciales de la carga y del potencial de B. De este hecho se hace uso en el generador de Van de Graaff, que se describe en la sección siguiente.

En el razonamiento precedente se ha supuesto que la esfera pequeña se encontraba en el centro de la grande, para simplificar el cálculo de los potenciales. Pero, puesto que la carga de la esfera grande no produce ningún campo en los puntos interiores a la misma, no se realiza trabajo al mover la esfera pequeña de un punto a otro dentro de la esfera grande. El potencial de la esfera pequeña es, por tanto, el mismo en todos los puntos interiores, e independientemente de su posición, su potencial será más alto que el del conductor que la rodea, cualquiera que sea la carga que tenga. Además, no es necesario que los cuerpos sean esferas. Un conductor de forma arbitraria, introducido por una pequeña abertura dentro de un conductor hueco, de forma cualquiera, cederá toda su carga al otro conductor cuando se establezca un contacto interno entre ellos.

3-11. Generador de Van de Graaff.—El generador de Van de Graaff utiliza el principio descrito en la sección 3-10, esto es, que si un conductor cargado se pone en contacto *interno* con un segundo conductor hueco, *toda* su carga pasa al conductor hueco, por muy alto que sea el potencial de este último. Así, si no fuera por dificultades de aislamiento, la carga y, por consiguiente, el potencial de un conductor hueco podría alcanzar cualquier valor deseado adicionándole sucesivamente cargas, por contacto interno. En la práctica, puesto que el conductor ha de estar sostenido de algún modo, su potencial máximo quedará limitado a aquel para el cual la proporción en que escape su carga a través del soporte y del aire que lo rodea iguale a la proporción en la cual se le suministra carga.

El generador de Van de Graaff está representado esquemáticamente en la figura 3-16, y la figura 3-17 es una fotografía de la instalación en el M. I. T. (Instituto Tecnológico de Massachusetts). Refiriéndonos a la figura 3-16, A es un conductor esférico hueco, soportado por una columna aisladora B. Una correa de transmisión C pasa por las poleas D, accionada la inferior por un motor, mientras que la superior es libre. El borne E se compone de una serie de puntas agudas que salen de una barra horizontal, y se mantiene a un potencial negativo de algunas decenas de miles de voltios, respecto a tierra por la dínamo auxiliar F. El borne G está construído análogamente, y se mantiene a un potencial positivo respecto

al borne esférico A. El aire que rodea las puntas se ioniza y de cada serie de puntas sale repelida una *rociada* de iones, negativos de E y positivos de G. Algunos de ellos se adhieren por sí mismos a la superficie de la correa móvil, de modo que la mitad que se mueve hacia arriba se carga negativamente y la otra mitad, positivamente. La corriente de iones en los bornes E y G se regula de modo que, primero, se neutralice la carga transportada hacia cada borne y, segundo, se deposite sobre la correa una carga igual y de signo contrario.

La instalación representada en la figura 3-16 está encerrada en la columna de la izquierda de la figura 3-17. La columna de la derecha de dicha figura contiene un tubo gigante de rayos X de unos 6 m de longitud. El cátodo del tubo está dentro de la esfera en la parte superior de esta columna. Los electrones son impulsados hacia abajo por la diferencia de potencial entre las esferas y el suelo (unos 2,5 millones de voltios), y golpean un ánodo metálico montado en una cámara situada por debajo del nivel del suelo. El ánodo se convierte entonces en un manantial de rayos X de corta longitud de onda y gran poder penetrante.

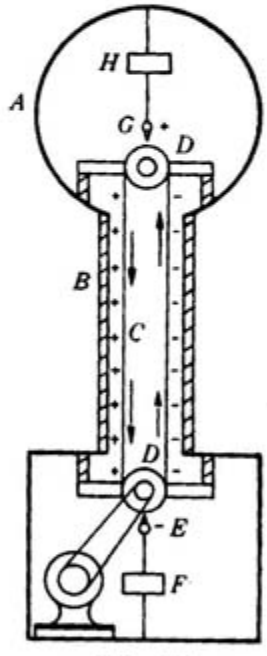


FIG. 3-16.—Diagrama esquemático del generador de Van de Graaff.

FIG. 3-17.—Fotografía del generador de Van de Graaff del Instituto Tecnológico de Massachusetts. *(Por cortesía del M. I. T. News Service.)*

PROBLEMAS

3-1. Un dipolo de pequeñas dimensiones y de momento dipolar 10^{-10} coul-m, se encuentra en el origen, coincidiendo su eje con el eje X. *a*) Calcúlese la integral curvilínea del campo eléctrico a lo largo de una recta que forme un ángulo de 45° con el eje X en el primer cuadrante, desde el infinito a un punto situado a 2 cm del origen, para determinar el potencial en dicho punto. Utilícense las expresiones de las componentes de la intensidad del campo eléctrico creado por un dipolo, dadas en la sección 2-3. *b*) ¿Qué trabajo se requiere para traer una carga de 10^{-9} culombios desde el infinito a dicho punto? *c*) ¿Cuál es la energía potencial de una carga de 10^{-9} coul, en el mismo punto?

3-2. Se hace referencia al problema 2-16 y figura 2-22. *a*) Calcúlese la integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico desde el punto *b* al punto *a*, a lo largo del eje X, y determínese la diferencial de potencial V_{ab}. *b*) Hállense las diferencias de potencial V_{bc} y V_{cd}. *c*) ¿Qué caras del cubo son superficies equipotenciales?

3-3. Supóngase que en la habitación en que estamos trabajando existe un campo uniforme, cuyas líneas de fuerza son horizontales y perpendiculares a una pared. Cuando paseamos hacia la pared de la cual salen las líneas de fuerza, ¿nos dirigimos hacia puntos de potencial superior o inferior?

3-4. En un aparato para determinar la carga e del electrón por el método de Millikan, se requiere un campo eléctrico de $6{,}34 \times 10^4$ V/m para sostener justamente una gota de aceite cargada. Si las láminas están separadas 1,5 cm, ¿qué diferencia de potencial existe entre ellas?

3-5. *a*) Demuéstrese que cuando una partícula de carga y masa constantes es sometida a una aceleración, partiendo del reposo, por medio de un campo eléctrico, su velocidad final es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de potencial a través de la cual es acelerada. *b*) Calcúlese el valor de la constante de proporcionalidad si la partícula es un electrón, la velocidad se mide en m/seg y la diferencia de potencial, en voltios. *c*) A velocidades mayores que 1/10 de la velocidad de la luz, la masa de un cuerpo se hace apreciablemente mayor que su *masa en reposo* y no puede considerarse constante. (La velocidad de la luz es 3×10^8 m/seg.) ¿Con qué voltaje ha de ser acelerado un electrón, suponiendo que no varíe su masa, para adquirir una velocidad que sea 1/10 de la velocidad de la luz? *d*) ¿Cuál sería la velocidad de un deuterón, acelerado con el mismo voltaje? Exprésese la velocidad como fracción de la velocidad de la luz.

3-6. Un *electrón-voltio* es una unidad de energía, igual a la energía cinética de un electrón que ha sido acelerado, partiendo del reposo, con una diferencia de potencial de 1 V. *a*) Exprésese esta energía en julios y en ergios. *b*) ¿Cuál es la velocidad de un electrón cuya energía cinética es 1 electrón-voltio? ¿100 electrones-voltios? *c*) ¿Cuál es la velocidad de un deuterón cuya energía cinética es 100 electrones-voltios?

3-7. Un diodo se compone de un cátodo cilíndrico de 0,05 cm de radio, montado coaxialmente con un ánodo cilíndrico de 0,45 cm de radio. El potencial del ánodo es de 300 V por encima del del cátodo. Un electrón abandona la superficie del cátodo sin velocidad inicial. ¿Cuál es su velocidad: *a*) cuando ha recorrido 2 mm hacia el ánodo; *b*) cuando llega al ánodo?

3-8. Dos cargas puntuales, $q_1 = +40 \times 10^{-9}$ coul y $q_2 = -30 \times 10^{-9}$ coul, están separadas 10 cm. El punto A equidista de ellas, el punto B está a 8 cm de q_1 y a 6 cm de q_2. Calcúlese: *a*) el potencial en el punto A; *b*) el potencial en el punto B; *c*) el trabajo necesario para transportar una carga de 25×10^{-9} coul desde el punto B hasta el punto A.

3-9. Con referencia al problema 2-5, calcúlese el potencial en los puntos *a*, *b*, *c* y *d*.

3-10. Con referencia al problema 2-6, calcúlese el potencial en los puntos *a*, *b*, *c* y *d*.

3-11. ¿Qué trabajo sería necesario para traer una carga positiva puntual de 10^{-9} culombios desde el infinito a cada uno de los puntos *a*, *b* y *c* de la figura 3-5? ¿Qué interpretación tiene el signo negativo?

3-12. En el modelo atómico de Bohr, correspondiente al átomo de hidrógeno, un solo electrón gira alrededor de un solo protón describiendo una circunferencia de radio $5{,}28 \times 10^{-9}$ cm. *a*) ¿Cuál es la energía potencial electrostática del átomo? *b*) ¿Qué diferencia de potencial sería necesaria para acelerar un electrón de modo que adquiriese la misma energía?

3-13. Los potenciales de los puntos *a*, *b*, *c*, *d* y *e* de la figura 3-18, situados

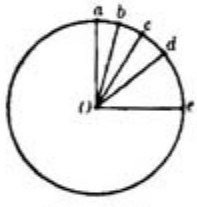


FIG. 3-18.

sobre la circunferencia de radio 1 cm, son: $V_a = 100$ V, $V_b = 90$ V, $V_c = 80$ V, $V_d = 70$ V y $V_e = 60$ V. El potencial en el centro de la circunferencia es 100 V. Sustituyendo dV/ds por $\Delta V/\Delta s$, calcúlense las componentes del campo eléctrico en las direcciones de los radios *Oa*, *Ob*, *Oc*, *Od* y *Oe*.

3-14. *a*) ¿Cuál es el gradiente de potencial, en V/m, a una distancia de 10^{-12} cm del núcleo de un átomo de oro? (Véase el problema 1-5). *b*) ¿Cuál es el gradiente de potencial a una distancia de $5{,}28 \times 10^{-9}$ cm de un protón? (Véase el problema 1-6).

3-15. El potencial en los puntos de un plano está dado por

$$V = \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r}$$

donde r y θ son las coordenadas polares de un punto del plano, y a y b, constantes. Calcúlense las componentes E_r y E_θ de la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto.

3-16. El potencial en los puntos de un plano está dado por

$$V = \frac{ax}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{b}{(x^2 + y^2)^{1/2}},$$

donde x e y son las coordenadas cartesianas de un punto, y a y b, constantes. Calcúlense las componentes E_x y E_y de la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto.

3-17. Se hace referencia al problema 2-20 y figura 2-23. Si la partícula en rotación es un deuterón que se mueve con una velocidad de 10^6 m/seg, y los radios de los cilindros son 5 y 6 cm, respectivamente, calcúlese la diferencia de potencial existente entre los cilindros.

3-18. Dos láminas planas y paralelas están separadas por una distancia de 2 cm. El potencial de una de las láminas es + 500 V y el de la otra es − 500 V. Represéntense en un diagrama las superficies equipotenciales comprendidas entre las láminas y que corresponden a los potenciales de + 250 V, 0 V, y − 250 V.

3-19. El potencial de una esfera conductora cargada positivamente y de radio 5 cm, es 5000 V. No hay ningún otro cuerpo cargado en su proximidad. *a*) Represéntense en un esquema las superficies equipotenciales correspondientes a los potenciales de 4000 V, 3000 V y 2000 V. *b*) Constrúyase una gráfica del potencial en función de la distancia radial al centro de la esfera, desde $r = 0$ hasta $r = 15$ cm.

3-20. La figura 3-19 es la sección de dos largos cilindros huecos coaxiales.

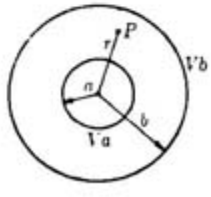


FIG. 3-19.

a) Demuéstrese que el potencial V_r en el punto P está dado por

$$V_r = V_a - V_{ab}\frac{\log \frac{r}{a}}{\log \frac{b}{a}},$$

donde V_a y V_b son los potenciales de los cilindros interior y exterior, y a y b, sus radios. *b*) Sean $V_a = +400$ V, $V_b = -400$ V, $a = 1$ cm, $b = 10$ cm. Calcúlense los radios de las superficies equipotenciales correspondientes a $+200$ V, 0, -200 V. Dibújese un esquema. *c*) Calcúlense las intensidades del campo eléctrico en cada una de estas superficies y también en las superficies de los cilindros. *d*) ¿Cuál sería la intensidad del campo eléctrico en el espacio comprendido entre dos grandes láminas paralelas separadas una distancia de 9 cm, siendo los potenciales de las láminas $+400$ V y -400 V?

3-21. Dos tubos conductores de paredes delgadas y radios respectivos 1 cm y 10 cm, son coaxiales y están aislados entre sí. El cilindro exterior se encuentra al potencial de tierra. *a*) ¿Cuál es el potencial máximo que puede comunicarse al tubo interior, si la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto del espacio comprendido entre ambos tubos no ha de exceder de 5×10^2 V/m? *b*) Hállense, cuando el tubo interior se encuentre a este potencial, el potencial y la intensidad del campo eléctrico en un punto situado a 5 cm del eje del sistema. *c*) Determínese la carga por unidad de longitud sobre cada cilindro.

3-22. Los electrodos de cierto tubo electrónico se componen de dos cilindros coaxiales de radios 1 mm y 3 mm, respectivamente. El electrodo interior se encuentra al potencial de tierra y el electrodo exterior a un potencial de $+150$ V. Los electrones son emitidos desde la superficie del electrodo interior, o cátodo, y acelerados hacia el electrodo exterior, denominado placa o ánodo. Suponiendo que los electrones abandonan el cátodo sin velocidad, y despreciando las fuerzas ejercidas sobre un electrón por los demás situados en el espacio comprendido entre los electrodos: *a*) ¿Cuál es la fuerza, en dinas, sobre un electrón justamente cuando abandona el cátodo? *b*) ¿Y cuando equidista del cátodo y de la placa? *c*) ¿Y en el momento de alcanzar la placa? *d*) ¿Cuál es la aceleración del electrón en cada uno de estos puntos? *e*) ¿Cuál es la velocidad del electrón cuando incide sobre la placa? *f*) ¿Cuál es su energía en electrón-voltios?

3-23. Una esfera conductora de 2 cm de radio tiene una carga de $+100$ unidades electrostáticas. Calcúlese el potencial y la intensidad del campo eléctrico, en los puntos situados a lo largo de una línea radial y a las siguientes distancias del centro de la esfera: 0, 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm y 10 cm. Utilícese el sistema electrostático en el cual $1/4\pi\varepsilon_0 = 1$. Constrúyanse gráficas de V y de E. ¿Cuál es el potencial de la esfera, en voltios?

3-24. Dos esferas conductoras, cada una de las cuales tiene un radio de 2 cm, poseen una carga de $+60$ unidades electrostáticas y están colocadas con sus centros distantes 12 cm. Suponiendo uniforme la densidad de carga sobre cada esfera, calcúlense el potencial y la intensidad del campo eléctrico en puntos distantes 2 cm a lo largo de la línea que une los centros de las esferas. Hágase una gráfica de los resultados y utilícese el sistema electrostático de unidades en el cual $1/4\pi\varepsilon_0 = 1$.

3-25. Se hace referencia al problema 2-16. *a*) Calcúlese, en función de x, la densidad de carga espacial. *b*) ¿Cuántos electrones por milímetro cúbico serían necesarios para producir una densidad de carga espacial igual a la del plano perpendicular al eje X que pasa por el punto a?

3-26. Un triodo puede esquematizarse del siguiente modo. Una superficie plana (cátodo) emite electrones con velocidad inicial despreciable. Paralela al cátodo y a 3 mm de él hay una rejilla de alambre fino a un potencial de 18 V sobre el del cátodo. Una segunda superficie plana (ánodo) está a 12 mm de la rejilla y a un

potencial de 15 V sobre el del cátodo. Supóngase que la rejilla es una superficie equipotencial, y que los gradientes de potencial entre el cátodo y la rejilla, y entre la rejilla y el ánodo, son uniformes. Supóngase también que la malla de la rejilla tiene anchura suficiente para que los electrones pasen libremente a través de ella. *a*) Dibújese un diagrama del potencial en función de la distancia a lo largo de una línea que va del cátodo al ánodo. *b*) ¿Con qué velocidad llegarán los electrones al ánodo? *c*) Si el ánodo tiene un potencial negativo de 18 V respecto al cátodo, ¿qué distancia recorrerán los electrones después de atravesar la rejilla?

3-27. Dos esferas conductoras de radios respectivos 1 cm y 2 cm tienen, cada una, una carga de 10^{-8} coul. Si la distancia entre los centros de las esferas es 1 m, ¿cuál será la carga y el potencial final de cada una cuando se conectan mediante un hilo fino?

3-28. Supóngase que la diferencia de potencial entre el borne esférico de un generador de Van de Graaff y el punto en el cual son esparcidas las cargas sobre la correa que se mueve hacia arriba, es 2 millones de voltios. Si la correa proporciona carga negativa a la esfera a razón de 2×10^{-3} coul/seg y quita carga positiva en la misma proporción, ¿qué potencia es necesaria para mover la polea contra las fuerzas eléctricas?

CAPÍTULO IV

INTENSIDAD Y RESISTENCIA

4-1. Intensidad.—En los problemas puramente electrostáticos, tales como los considerados en los capítulos anteriores, nos ocupamos principalmente de las fuerzas ejercidas entre cargas, del estado final estacionario de distribución de carga producido por estas fuerzas, y del movimiento de partículas cargadas en el vacío. Vamos a tratar a continuación del movimiento de la carga en un conductor cuando se mantiene un campo eléctrico dentro del mismo. Este movimiento constituye una *corriente.*

Se recordará que un conductor es un cuerpo en cuyo interior hay cargas *libres* que se mueven por la fuerza ejercida sobre ellas por un campo eléctrico. Las cargas libres en un conductor *metálico* son electrones negativos. Las cargas libres en un *electrólito* son iones, positivos o negativos. Un *gas* en condiciones adecuadas, como el de un anuncio luminoso de neón o el de una lámpara fluorescente, es también un conductor y sus cargas libres son iones positivos y negativos y electrones negativos.

Hemos visto que cuando un conductor aislado se coloca en un campo eléctrico, las cargas dentro del conductor se reagrupan de modo que el interior del conductor sea una región libre de campo, en toda la cual el potencial es constante. El movimiento de las cargas en el proceso de reagrupación constituye una corriente; pero es de corta duración y se denomina corriente *transitoria.* Si deseamos que circule una corriente permanente en un conductor, hemos de mantener continuamente un campo, o un gradiente de potencial dentro de él. Si el campo tiene siempre el mismo sentido, aunque pueda variar de intensidad, la corriente se denomina *continua.* Si el campo se invierte periódicamente, el flujo de carga se invierte también, y la corriente es *alterna.*

Hay cierto número de dispositivos eléctricos, que estudiaremos posteriormente con más detalle, que tienen la propiedad de mantener constantemente sus bornes a potenciales diferentes. Los más conocidos son la pila seca, la batería de acumuladores y la dínamo. Si los extremos de un hilo metálico se conectan a los bornes de cualquiera de estos dispositivos, se mantiene un gradiente de potencial, o sea un campo eléctrico, dentro del hilo y habrá un movimiento continuo de carga a través de él. Para concretar, si los extremos de un hilo de cobre, de 1 m de longitud, se conectan a los bornes de una batería de 6 V, se establece y mantiene un gradiente de potencial o campo eléctrico de intensidad 6 V/m ó 6 new/coul.

Bajo la influencia de este campo, los electrones libres del hilo metálico

experimentan una fuerza de sentido opuesto al del campo, y son acelerados en el sentido de esta fuerza. (Los otros electrones y los núcleos positivos son también accionados por el campo, pero no son acelerados, por impedirlo las fuerzas de ligadura que mantienen estos electrones unidos al núcleo y los núcleos unidos entre sí formando un sólido.) Los choques con las partículas que quedan fijas en el metal, frenan pronto a los electrones libres o los detienen, después de lo cual vuelven a ser acelerados, y así sucesivamente. Su movimiento es, por tanto, una sucesión de aceleraciones y frenados, pero adquieren cierta velocidad media en sentido opuesto al campo, y supondremos que se mueven uniformemente con esta velocidad media. Los electrones libres participan también de la energía térmica del conductor, pero su movimiento de agitación térmica es un movimiento al azar y para nuestro propósito presente puede no ser tenido en cuenta.

La figura 4-1 representa una porción de un hilo metálico en el cual hay un campo hacia la izquierda y, en consecuencia, un movimiento de

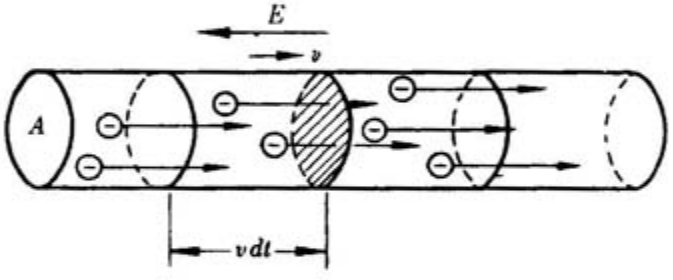


FIG. 4-1.—Movimiento de electrones libres en un hilo metálico.

electrones libres hacia la derecha. Se supone que cada electrón se mueve con la misma velocidad v, y en el tiempo dt cada uno avanza una distancia $v\,dt$. En este tiempo, el número de electrones que cruzan un plano, tal como el rayado en la figura, es el número contenido en una porción de hilo de longitud $v\,dt$, o sea, de volumen $Av\,dt$, siendo A el área de la sección del conductor. Si hay n electrones libres por unidad de volumen, el número de los que cruzan el plano en el tiempo dt es $nAv\,dt$, y si e representa la carga de cada uno, la carga total dq que atraviesa el área en el tiempo dt, es:

$$dq = nevA\,dt. \qquad [4\text{-}1]$$

La cantidad de carga que atraviesa una sección de hilo metálico por unidad de tiempo, o sea dq/dt, se denomina intensidad de la corriente en el hilo. La intensidad se representa por la letra i (ó I):

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt}} \qquad [4\text{-}2]$$

De las Ecs. [4-1] y [4-2], se deduce:

$$i = nevA. \qquad [4\text{-}3]$$

La unidad mks de intensidad de corriente es *un culombio por segundo*, y se denomina *amperio*, en honor del físico francés André Marie Ampère (1775-1836), quien introdujo muchos de los conceptos de electricidad y magnetismo. Las intensidades pequeñas se expresan más adecuadamente en miliamperios (mA) (1 miliamperio $= 10^{-3}$ A) o bien en microamperios (μA) (1 microamperio $= 10^{-6}$ A).

Cuando circula una corriente por un conductor en el cual existen cargas libres de ambos signos, como en el caso de un electrólito, las cargas negativas cruzan la sección en un sentido, y las cargas positivas en el otro. En general, si hay presente un número cualquiera de diferentes clases de partículas cargadas, la carga neta que atraviesa la superficie, en el tiempo dt, es:

$$dq = A dt\,[n_1 q_1 v_1 + n_2 q_2 v_2 + \ldots],$$

y la intensidad de corriente,

$$i = A\,\Sigma nqv.$$

Todos los productos nqv tendrán el mismo signo, puesto que las cargas de signo contrario se moverán en sentidos opuestos.

La distribución de carga en un hilo metálico que transporta una corriente difiere de la distribución estática en un conductor aislado que tiene un *exceso* de carga y que, como hemos visto, queda limitada a la superficie del conductor. No hay *exceso* de carga sobre el hilo que transporta una corriente, por ser iguales las cargas positivas y negativas por unidad de volumen. (Las cargas positivas no están representadas en la figura 4-1.) Los electrones libres en un hilo metálico que transporta una corriente están uniformemente distribuídos por todo el hilo, y la intensidad de corriente que transporta un hilo de sección constante está distribuída uniformemente a través de cualquier sección. (Excepto cuando la corriente es alterna, en cuyo caso hay una tendencia a concentrarse en la superficie.)

La *densidad de corriente* en el hilo, representada por J, se define como la razón de la intensidad de la corriente a la sección transversal. Así,

$$J = \frac{i}{A} = nev. \qquad [4\text{-}4]$$

En rigor, la Ec. [4-4] define la densidad media de corriente a través del área A. Si la corriente no está distribuída uniformemente, se considera un área infinitesimal dA a través de la cual la intensidad es di, y se define la densidad de corriente como

$$J = \frac{di}{dA} \qquad [4\text{-}5]$$

Es interesante calcular la velocidad media de los electrones libres en un conductor por el cual circula una corriente. Consideremos un conductor de cobre de 1 cm de diámetro en el cual la corriente es de 200 A

La densidad de corriente es:

$$J = \frac{i}{A} = \frac{200}{\frac{1}{4}\pi(0{,}01)^2} = 2{,}54 \times 10^6 \text{ A/m}^2.$$

Cálculos previos (Sec. 2-10) han demostrado que en el cobre hay alrededor de $8{,}5 \times 10^{22}$ electrones libres por cm^3, o sea, $8{,}5 \times 10^{28}$ electrones libres por m^3. Por tanto, puesto que $J = nev$,

$$v = \frac{J}{ne} = \frac{2{,}54 \times 10^6}{8{,}5 \times 10^{28} \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = 1{,}9 \times 10^{-4} \text{ m/seg},$$

o sea, aproximadamente, 0,02 cm/seg. Por consiguiente, la velocidad es muy pequeña.

No debe confundirse la velocidad de los electrones libres en un conductor con la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el espacio libre, que es 3×10^8 m/seg.

4-2. Sentido de una corriente.—Parecería lógico definir el sentido de una corriente como igual al del movimiento de los electrones libres. Inmediatamente tropezamos con la dificultad de que en un conductor electrolítico o gaseoso, las cargas libres de ambos signos se mueven en sentidos opuestos. Cualquiera que fuera el sentido adoptado para la corriente, encontraríamos cargas que se mueven en sentido contrario. Puesto que ha de adoptarse algún acuerdo, se ha convenido en considerar el sentido de una corriente como si las cargas que se mueven fuesen todas positivas. Por consiguiente, *en un conductor metálico los electrones se mueven en sentido opuesto al sentido convencional de la corriente;* p. ej. en la figura 4-1, el sentido de la corriente se dice que es de derecha a izquierda, puesto que los electrones se mueven de izquierda a derecha.

Desde ahora adoptamos este convenio, y hablaremos de la corriente en un metal como si consistiese verdaderamente en un movimiento de carga positiva.

4-3. Circuito completo.—Cuando se conectan los extremos de un hilo metálico a dos puntos mantenidos a potenciales fijos, pero distintos, tales como los bornes de una pila o una dínamo, se establecerá una corriente en el hilo, pero el potencial de cada punto del mismo permanece constante con el tiempo. Consideremos un elemento del hilo limitado por dos planos transversales y que se ha rayado en la figura 4-2. Si los electrones del hilo se mueven de izquierda a derecha, está entrando carga negativa al elemento por su cara izquierda y saliendo por su cara derecha. La cantidad de carga que entra en el elemento en cualquier intervalo de tiempo tiene que ser exactamente igual a la que sale, pues de no ser así, la cantidad de carga en el elemento y, en

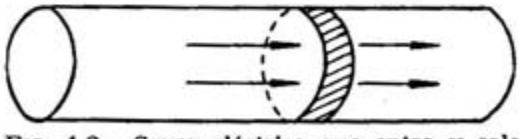


FIG. 4-2.—Carga eléctrica que entra y sale en un pequeño elemento de un hilo conductor.

consecuencia, su potencial variarían. Deducimos que la intensidad tiene que ser la misma en ambas caras del elemento, y, por tanto, que ha de ser igual en *todas* las secciones del hilo. En este aspecto, el flujo de electrones es análogo al de un flúido incompresible.

El hilo conductor y la pila o dínamo a la cual están conectados sus extremos, se dice que forman un circuito completo o *circuito cerrado.* Una pila hidroeléctrica se representa por el símbolo —|+ y una dínamo por —○+, designando el signo + el borne que está normalmente a potencial más elevado. La figura 4-3 es un esquema de este circuito cerrado. La línea marcada con flechas indica el sentido convencional de la corriente. Los electrones circulan en el hilo en sentido contrario. Los iones positivos se mueven, dentro de la pila, en el mismo sentido que el convencional, y los iones negativos, en sentido opuesto.

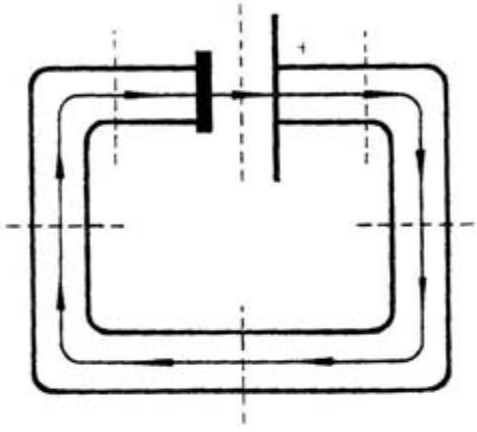


FIG. 4-3.—Circuito cerrado formado por una pila hidroeléctrica y un hilo conductor.

Se han representado varias secciones del circuito por líneas de trazos. La intensidad es igual en todas estas secciones, incluída la que atraviesa la pila. La corriente no es algo que brota del borne positivo de una pila y se consume durante el tiempo que tarda en alcanzar el borne negativo.

Una corriente permanente sólo puede existir en un circuito cerrado, análogo al de la figura 4-3. Si desconectamos el hilo conductor de la pila por cualquiera de sus extremos, o se hace una interrupción en cualquier punto del circuito, la corriente cesa inmediatamente. Se dice que el circuito está *abierto.*

Obsérvese atentamente que el sentido convencional de la corriente es *de más a menos únicamente en el circuito exterior.* Dentro de la pila, el sentido es de menos a más.

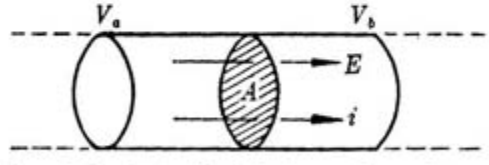


FIG. 4-4.—Intensidad de la corriente dentro de una porción de conductor.

4-4. Conductibilidad eléctrica.— Para mantener una corriente en un conductor ha de haber un campo eléctrico o un gradiente de potencial dentro de él. Las sustancias conductoras difieren entre sí en el valor de la densidad de corriente establecida por un campo eléctrico dado. La figura 4-4 representa una porción de un conductor de sección A, dentro del cual hay una intensidad de corriente (convencional) i y una densidad de corriente $J = \frac{i}{A}$.

El campo eléctrico en la sección rayada es E. La razón de la densidad de corriente a la intensidad del campo eléctrico, o sea, la densidad de corriente por unidad de intensidad del campo eléctrico, se denomina *conductibilidad eléctrica* de la sustancia y se representa por σ:

$$\sigma = \frac{J}{E}, \text{ o bien, } J = \sigma E. \qquad [4\text{-}6]$$

Cuanto mayor es la conductibilidad, tanto mayor es la densidad de corriente para un campo eléctrico dado. La conductibilidad de una sustancia dada varía con la temperatura y en grado muy pequeño con otras condiciones físicas que mencionaremos más adelante. Para muchas sustancias, principalmente los metales, la conductibilidad es independiente de la densidad de corriente. Por el contrario, hay sustancias para las cuales la conductibilidad varía sensiblemente con la densidad de corriente.

La densidad de corriente es un vector que tiene la misma dirección que el campo. La forma vectorial de la Ec. [4-6] es, por consiguiente,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}.$$

La Ec. [4-6] puede ponerse en la siguiente forma: si reemplazamos E por $-\frac{dV}{dx}$, y J por $\frac{i}{A}$, se obtiene:

$$\frac{i}{A} = \sigma\left(-\frac{dV}{dx}\right);$$

$$i = -\sigma A \frac{dV}{dx} \qquad [4\text{-}7]$$

Es interesante observar que esta ecuación es exactamente análoga a la ecuación de la conductibilidad calorífica estacionaria,

$$H = -KA\frac{dt}{dx}$$

La intensidad i de la corriente corresponde a la cantidad de calor por unidad de tiempo, H; la conductibilidad eléctrica, σ, a la conductibilidad calorífica, K, y el gradiente de potencial, $\frac{dV}{dx}$, al gradiente de temperatura, $\frac{dt}{dx}$.

La relación entre la conducción de la electricidad y la conducción del calor es más que una simple analogía matemática. Los electrones libres, que son los que transportan la carga en la conducción eléctrica, desempeñan también un papel importante en la conducción del calor y, por consiguiente, cabe esperar una correlación entre la conductibilidad eléctrica y la térmica. Es un hecho conocido que los buenos conductores de la electricidad, tales como los metales, son buenos conductores del calor, mientras que los malos conductores de la electricidad son también malos conductores del calor.

Razonamientos teóricos, en los cuales no podemos entrar aquí, conducen a la siguiente relación, conocida como *ley de Wiedemann-Franz*, entre las conductibilidades térmica y eléctrica de los metales:

$$\frac{K}{\sigma} = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T,$$

siendo k la constante de Boltzmann, e la carga del electrón y T la temperatura Kelvin.

4-5. Resistencia y resistividad. Ley de Ohm.—Aunque $J = \sigma E$ es la relación fundamental de la conducción eléctrica, es más cómodo en la práctica trabajar con intensidades de corriente y diferencias de potencial, que con densidades de corriente e intensidades de campo eléctrico. Para ello, partiremos de la forma equivalente

$$i = -\sigma A \frac{dV}{dx}, \qquad [4\text{-}7]$$

y consideraremos un conductor de longitud L y sección constante A (Fig. 4-5) por el cual circula una corriente de intensidad i. Sean V_a y V_b los potenciales en sus extremos. Reduciremos el estudio a sustancias para las cuales σ es independiente de J, y supondremos que la temperatura (y cualquier otro factor que influya sobre σ) permanece cons-

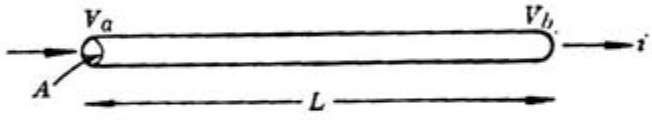


FIG. 4-5.—Conductor de longitud L y sección transversal constante.

tante en todos los puntos del conductor. En estas condiciones i, σ y A son constantes y la Ec. [4-7] puede integrarse fácilmente. Tomando el eje X a lo largo del hilo y el origen en su extremo a, se tiene:

$$i\,dx = -\sigma A\,dV;$$

$$i\int_0^L dx = -\sigma A \int_{V_a}^{V_b} dV;$$

$$iL = \sigma A\,(V_a - V_b);$$

$$i = \frac{\sigma A}{L}(V_a - V_b). \qquad [4\text{-}8]$$

Ésta es la relación deseada entre la intensidad de la corriente en el conductor y la diferencia de potencial entre sus extremos.

El factor $\frac{\sigma A}{L}$ se denomina *conductancia* del hilo conductor. Cuanto mayor es la conductancia, tanto mayor es la intensidad de corriente para una diferencia de potencial dada.

En la práctica, la inversa de la conductancia se denomina *resistencia*, y es utilizada casi universalmente. La resistencia se representa por la

letra R (ó r). Evidentemente, para un conductor homogéneo de sección uniforme y para el cual σ es constante,

$$R = \frac{L}{\sigma A} \qquad [4\text{-}9]$$

Las tablas proporcionan corrientemente las propiedades conductoras de las sustancias en función de la inversa de la conductibilidad, llamada *resistividad*, que se representa por la letra ρ:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

En función de la resistividad, la Ec. [4-9] se convierte en

$$\boxed{R = \frac{\rho L}{A}} \qquad [4\text{-}10]$$

y, en función de la resistencia, la Ec. [4-8] se transforma en

$$i = \frac{V_a - V_b}{R} = \frac{V_{ab}}{R}$$

o bien,

$$\boxed{V_{ab} = Ri} \qquad [4\text{-}11]$$

Obsérvese atentamente que esta relación entre V_{ab}, R e i sólo se aplica cuando el conductor que une a y b es una *resistencia pura*, esto es, no contiene baterías, motores, generadores, etc. En el capítulo próximo se deducirá la expresión general de la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera en un circuito de corriente continua.

Ha de recordarse también que al deducir la Ec. [4-11], a partir de la ecuación fundamental $J = \sigma E$, se supuso la constancia de la conductibilidad σ. Sólo si σ es independiente de J, la resistencia R es una constante independiente de i, y la diferencia de potencial V_{ab} entre los bornes de un conductor es función *lineal* de la intensidad de corriente en el conductor. Esta proporcionalidad directa entre la intensidad de corriente en un conductor metálico y la diferencia de potencial entre sus bornes fué descubierta experimentalmente por el físico alemán Georg Simon Ohm (1789-1854), y se conoce con el nombre de *ley de Ohm*.

Las sustancias para las cuales V_{ab} es función lineal de i (o para las cuales R es constante) se denominan *conductores lineales;* los otros se llaman *conductores no lineales*. Afortunadamente, para mayor sencillez del cálculo, los metales, que son los más usados como conductores, son conductores lineales y su resistencia es independiente de la intensidad. Pero, dado que hay muchas sustancias que no obedecen a la ley de Ohm, esta ley expresa una característica particular de ciertas sustancias y no una propiedad general de la materia.

La unidad mks de resistencia, derivada de la Ec. [4-11], es el *voltio*

por amperio. Una resistencia de un voltio por amperio se denomina *ohmio.* Esto es, *la resistencia de un conductor es un ohmio, si la diferencia de potencial entre los bornes del mismo es un voltio, cuando la intensidad de la corriente en el conductor es un amperio.*

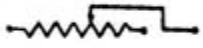
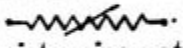
Se utilizan las letras griegas Ω ó ω para designar una resistencia en ohmios. Así, una resistencia de 4,5 V/A ó 4,5 ohmios se escribe:

$$4{,}5\ \Omega \quad \text{ó} \quad 4{,}5\ \omega$$

Las resistencias grandes se expresan mejor en megaohmios (1 megaohmio $= 10^6\ \Omega$) y las resistencias pequeñas en microohmios (1 microohmio $= 10^{-6}\ \Omega$).

Se construyen resistencias que tienen un valor fijo, ocupan poco volumen y cuyo valor es grande comparado con el de las conexiones y contactos del circuito. Estas resistencias fijas se representan por el símbolo .

Las porciones del circuito que tienen resistencia despreciable se representan por líneas rectas.

Una resistencia variable se denomina *reóstato.* Un tipo corriente de reóstato se construye arrollando un hilo sobre un tubo de porcelana, y estableciendo conexiones entre uno de los extremos y un contacto deslizante. Un reóstato está representado por  , o, simplemente, por  .

4-6. Resistencias patrones.—El ohmio, definido en la sección anterior como la resistencia de un conductor en el cual la corriente es de 1 A cuando la diferencia de potencial entre sus bornes es 1 V, se denomina *ohmio absoluto.* Para fines prácticos, el ohmio se ha definido, por convenio internacional, como un patrón. En la fecha en que fué adoptado, 1908, se creyó que este *ohmio internacional* era idéntico al ohmio absoluto. Mediciones posteriores han demostrado que difieren ligeramente, siendo el mejor valor actual

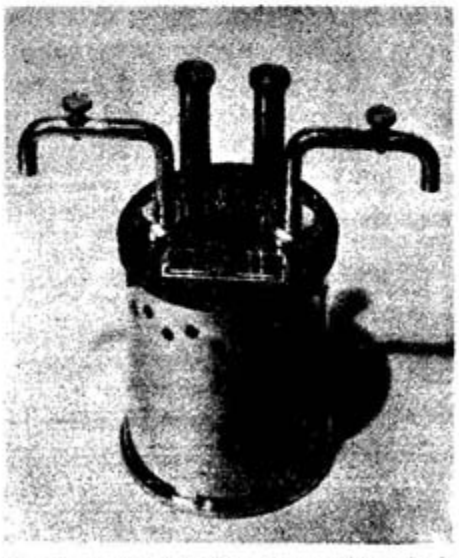


FIG. 4-6.—Resistencia patrón. *(Cortesía de Leeds and Northrup.)*

1 ohmio int. = 1,00048 ohmios abs.

Se define el ohmio internacional como la resistencia ofrecida a una corriente eléctrica constante por una columna de mercurio, a la temperatura de fusión del hielo, de masa 14,4521 g, de sección constante y cuya longitud es de 106,300 cm.

El patrón internacional consiste en una columna de mercurio contenida en un tubo de vidrio, y

no es adecuado, evidentemente, para el trabajo usual de laboratorio. Las llamadas *resistencias patrones* pueden adquirirse en el comercio con valores que alcanzan desde 0,001 Ω hasta 10000 Ω; sus errores no pasan de algunas centésimas por ciento. Se construyen de hilo, generalmente manganina, dado su pequeño coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura, y se montan en una caja metálica a través de la cual puede circular aceite para mantener constante la temperatura (véase figura 4-6). Están provistas de gruesos *bornes de corriente* para la entrada y salida de la corriente en la resistencia, y, además, de un par de *bornes de potencial* entre los cuales la resistencia tiene el valor especificado, y que se usan para medir la diferencia de potencial entre dichos bornes.

4-7. Cálculo de la resistencia.—La resistencia de un conductor homogéneo de sección constante está dada por la Ec. [4-10]:

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

La resistencia es directamente proporcional a la longitud del conductor e inversamente proporcional a su sección transversal. Si el conductor tiene una longitud igual a la unidad y una sección también unidad, la razón $\frac{L}{A}$ es igual a uno, y la resistencia R y la resistividad ρ son numéricamente iguales. Por tanto, la resistividad de una sustancia es igual numéricamente a la resistencia de una muestra de longitud y sección iguales a la unidad.

En el sistema mks, en el cual la unidad de longitud es el metro y la unidad de superficie el metro cuadrado, la unidad de resistividad es el *ohmio-metro*. La resistividad de una sustancia en ohmios-metro es numéricamente igual a la resistencia en ohmios entre las caras opuestas de un cubo de dicha sustancia de 1 m de arista.

Si se utiliza el centímetro como unidad de longitud y el centímetro cuadrado como unidad de sección, las resistividades se expresan en *ohmios-centímetro*.

De la definición de resistividad resulta evidente que las sustancias que tienen resistividades grandes son malos conductores o buenos aisladores. Inversamente, las sustancias de pequeña resistividad son buenos conductores. No existe ningún aislador perfecto ($\rho = \infty$), ni tampoco un conductor perfecto[1] ($\rho = 0$). Existe, sin embargo, gran diferencia en las resistividades de las diferentes sustancias, de modo que, en general, pueden agruparse en dos clases, conductores y aisladores. Véase tabla 4-1.

La resistividad de un metal puro, en un estado cristalino definido, y a temperatura determinada, es una magnitud característica del metal. Las variaciones de estructura cristalina debidas a tratamientos térmicos,

[1] A temperaturas extraordinariamente bajas, cerca del cero absoluto, algunos conductores pierden sus últimos vestigios de resistencia, fenómeno conocido con el nombre de *superconductibilidad*. Una vez iniciada una corriente en tal conductor, continuará por sí misma durante horas y aun días.

deformaciones mecánicas, o impurezas aleadas con el metal aun en cantidades mínimas, pueden tener un efecto muy pronunciado sobre su resistividad; p. ej., la resistividad del cobre comercial recocido, a 20° C, es $1{,}72 \times 10^{-8}$ Ω-m, y la del cobre estirado, $1{,}77 \times 10^{-8}$ Ω-m.

La presión hidrostática aplicada a un metal modifica muy ligeramente su resistividad. La resistividad del bismuto aumenta cuando éste se encuentra en un campo magnético, y esta variación de la resistividad proporciona un método adecuado para la medida de dichos campos. La resistividad del selenio metálico disminuye cuando se ilumina el metal. La luz libera fotoelectrones dentro del metal, haciéndolo mejor conductor.

TABLA 4-1

Resistividades y coeficientes de temperatura

(Valores aproximados a temperaturas próximas a la ambiente)

(Del *Handbook of Chemistry and Physics*, 26.ª ed.)

Sustancia	ρ (ohmios-metro)	α (°C⁻¹)
Aluminio	$2{,}63 \times 10^{-8}$	0,0039
Carbón	3500	−0,0005
Constantán (Cu 60, Ni 40)	49	+0,000002
Cobre (comercial recocido)	1,72	0,00393
Hierro	10	0,0050
Latón	6-8	0,0020
Manganina (Cu 84, Mn 12, Ni 4)	44	0,000000
Mercurio	94	0,00088
Nicrom	100	0,0004
Plata	1,47	0,0038
Plomo	22	0,0043
Wolframio	5,51	0,0045
Ambar	5×10^{14}	
Azufre	10^{15}	
Baquelita	$2 \times 10^{5} - 2 \times 10^{14}$	
Cuarzo (fundido)	75×10^{16}	
Ebonita	$10^{13} - 10^{16}$	
Madera	$10^{8} - 10^{11}$	
Mica	$10^{11} - 10^{15}$	
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	

Multiplicando ρ en ohmios-metro por 10^2, se obtiene ρ en ohmios-centímetro.

La resistividad de todas las sustancias conductoras varía con la temperatura. La figura 4-7 muestra una gráfica de la resistividad en función de la temperatura, para un conductor metálico. La curva puede representarse satisfactoriamente por una ecuación de la forma

$$\rho = \rho_0 + at + bt^2 + \dots,$$

siendo ρ_0 la resistividad a 0° C; a, b, etc., constantes características de cada sustancia, y t, la temperatura centígrada. Para temperaturas no

demasiado grandes pueden despreciarse los términos en t^2 y potencias superiores y escribir

$$\rho = \rho_0 + at. \qquad [4\text{-}12]$$

Es cómodo poner la Ec. [4-12] en la forma

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_0 at}{\rho_0}$$

o bien,

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad [4\text{-}13]$$

donde

$$\alpha = \frac{a}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 t}$$

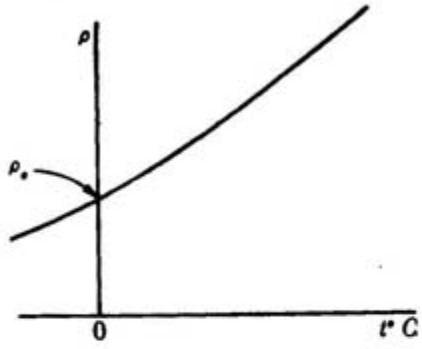


FIG. 4-7.—Variación de la resistividad de un metal con la temperatura.

La magnitud α se denomina *coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura* y es la variación relativa de resistividad al incrementar la temperatura en un grado. Sus dimensiones son *grados recíprocos.*

Puesto que la resistencia de un conductor dado es proporcional a su resistividad, la Ec. [4-13] puede también escribirse:

$$R = R_0(1 + \alpha t) \qquad [4\text{-}14]$$

R_0 es la resistencia a 0° C, y R, la resistencia a t° C.

Las resistividades de los no metales disminuyen al aumentar la temperatura, y sus coeficientes de variación de resistividad con la temperatura son negativos. Los electrólitos tienen también coeficientes de temperatura negativos. En otras palabras, conducen más fácilmente a elevadas temperaturas, lo cual es probablemente debido a la disminución de su viscosidad con la temperatura, lo que ocasiona una menor oposición al transporte de iones a través de ellos. En la tabla 4-1 están indicados los coeficientes de temperatura de algunas sustancias corrientes.

EJEMPLO 1.—¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en el conductor de cobre a que se refiere el ejemplo de la sección 4-1?

La tabla 4-1 da, para la resistividad del cobre, $1{,}72 \times 10^{-8}$ Ω-m y, por consiguiente, su conductividad es $\sigma = \dfrac{1}{1{,}72 \times 10^{-8}} = 5{,}83 \times 10^7$ Ω-m recíprocos. La densidad de corriente, en el ejemplo citado (pág. 87), es $2{,}54 \times 10^6$ A/m². Por tanto,

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{2{,}54 \times 10^6}{5{,}83 \times 10^7} = 4{,}37 \times 10^{-2} \text{ V/m}.$$

EJEMPLO 2.—¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos de dicho conductor, distantes 100 m?

a) Puesto que la intensidad del campo eléctrico, o gradiente de potencial en el conductor, es $4{,}37 \times 10^{-2}$ V/m, la diferencia de potencial entre dos puntos distantes 100 m será:

$$V_{ab} = 4{,}37 \times 10^{-2} \times 100 = 4{,}37 \text{ V}.$$

b) La resolución más corriente consiste en calcular primero la resistencia del hilo mediante la fórmula $R = \rho \dfrac{l}{A}$ y encontrar después la diferencia de potencial a partir de $V_{ab} = Ri$. Tenemos:

$$R = 1{,}72 \times 10^{-8} \times \frac{100}{\frac{1}{4}\pi(0{,}01)^2} = 0{,}0218\ \Omega;$$

$$i = 200 \text{ A (dato)}:$$

$$V_{ab} = Ri = 0{,}0218 \times 200 = 4{,}37 \text{ V},$$

que es la misma solución anterior.

EJEMPLO 3.—La figura 4-8 representa un cable submarino acorazado, compuesto de un conductor metálico central de radio *a* rodeado de un aislador de radio exterior *b*, recubierto de una funda metálica protectora. En condiciones de funcionamiento, el conductor central y la funda se encuentran a potenciales distintos; por consiguiente, habrá un gradiente de potencial entre el conductor y la funda, y, además

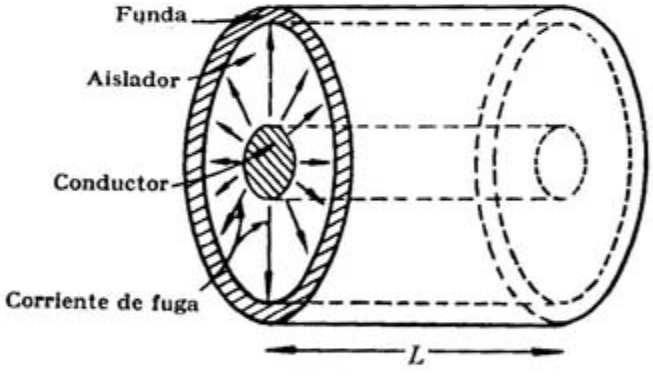


FIG. 4-8.—Corriente radial en un cable submarino blindado.

de la corriente a lo largo del cable, habrá una corriente radial de fuga a través del aislador. ¿Cuál es la resistencia del aislador para esta corriente radial en una longitud L de cable?

Sean V_a y V_b los potenciales respectivos del conductor interior y de la funda, que supondremos constantes a lo largo de la longitud L. Se ha demostrado (véase sección 3-5) que la intensidad del campo eléctrico en un punto del espacio comprendido entre ambos cilindros concéntricos, cuando su diferencia de potencial es V_{ab}, vale:

$$E = \frac{1}{r} \frac{V_{ab}}{\ln b/a}$$

Por tanto,

$$J = \sigma E = \frac{\sigma}{r} \frac{V_{ab}}{\ln b/a};$$

$$i = AJ = 2\pi r L \frac{\sigma}{r} \frac{V_{ab}}{\ln b/a}$$

y

$$R = \frac{V_{ab}}{i} = \frac{\ln b/a}{2\pi L \sigma} = \rho \frac{\ln b/a}{2\pi L}$$

Se observará la analogía entre este problema y el de calcular el flujo calorífico radial en un *aislador térmico* cilíndrico.

4-8. Medidas de intensidad de corriente, diferencia de potencial y resistencia.—Las intensidades de corriente se miden con los instrumentos llamados *galvanómetros* o *amperímetros*. El tipo más corriente se basa en la acción mutua entre un conductor por el cual circula una corriente y un campo magnético, y se describirá en el capítulo X. Para nuestro propósito actual, es suficiente saber que existe este aparato.

Para medir la intensidad de una corriente en puntos tales como *a*, *b*, o *c* de la figura 4-9(*a*), es necesario abrir el circuito e intercalar el amperímetro en el punto, de modo que la corriente que haya de medirse pase *a través* del aparato, como se indica en la figura 4-9(*b*). Un amperímetro es un instrumento de pequeña resistencia, del orden de algunas centésimas o milésimas de ohmio.

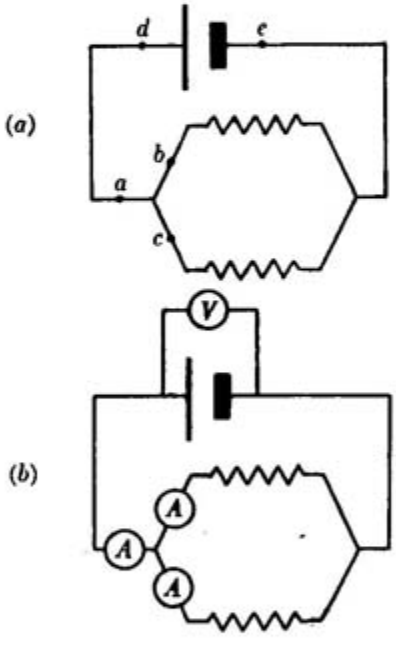


FIG. 4-9.—Montajes de amperímetro y voltímetro.

La diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito puede medirse con un electroscopio o un electrómetro. (Véase Sec. 1-2.) Sin embargo, es más cómodo utilizar algún tipo de *voltímetro*, cuya construcción se describe con más detalle en la sección 10-3. La mayor parte de los voltímetros, a diferencia de los electroscopios y electrómetros, funcionan con corriente. Los bornes del voltímetro se conectan a los puntos entre los cuales ha de medirse la diferencia de potencial. La figura 4-9 (*b*) representa un voltímetro *V* conectado para medir la diferencia de potencial entre los bornes de la pila. Dejando aparte los detalles de construcción, un voltímetro puede considerarse como una resistencia que indica automáticamente la diferencia de potencial entre sus extremos. Las resistencias para un voltímetro de 100 V son del orden de 10000 a 100000 Ω.

La resistencia de un conductor es la razón de la diferencia de poten-

cial entre sus bornes a la intensidad de la corriente que circula por él. El método más directo para medir una resistencia es, por tanto, medir ambas magnitudes y hallar su cociente. El método está aclarado en la figura 4-10. En el circuito (*a*), el amperímetro mide la intensidad i_R en la resistencia, mientras que el voltímetro indica V_{ac} y no la diferencia de potencial V_{ab} entre los bornes de la resistencia. En el circuito (*b*), el voltímetro indica V_{ab}, pero el amperímetro señala la *suma* de las intensidades en la resistencia y en el voltímetro. En consecuencia, cualquiera que sea el circuito que se utilice, han de hacerse correcciones a las lecturas de uno u otro de los instrumentos, a menos que estas correcciones puedan considerarse despreciables. (Véase Sec. 5-5.)

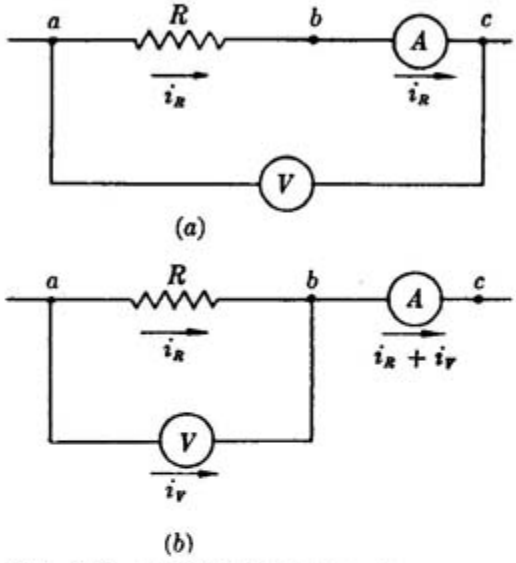


FIG. 4-10.—Medida de resistencias con un amperímetro y un voltímetro.

4-9. Ley de Joule.—Aunque, para mayor sencillez, hemos considerado la corriente en un conductor como si todos los electrones libres se moviesen con la misma velocidad constante v, podemos describir más correctamente el movimiento de los electrones como una serie de movimientos acelerados, cada uno de los cuales termina con un choque contra una de las partículas fijas del conductor. Los electrones ganan energía cinética durante las trayectorias libres entre dos choques, y ceden a las partículas fijas, en cada choque, la misma cantidad de energía que habían ganado. La energía adquirida por las partículas fijas (que son *fijas* sólo en el sentido de que su posición *media* no cambia) aumenta la amplitud de su vibración, o sea, se convierte en calor.

Para deducir la cantidad de calor desarrollada en un conductor, por unidad de tiempo, hallaremos primero la expresión general de la potencia suministrada a una parte cualquiera de un circuito eléctrico. El rectángulo de la figura 4-11 representa una parte de un circuito en el cual hay una corriente (convencional) i que circula de izquierda a derecha. V_a y V_b son los potenciales en los bornes a y b. La naturaleza del circuito comprendido entre a y b puede ser cualquiera, p. ej., conductor, motor, dínamo, batería o una combinación de estos elementos. La potencia suministrada depende únicamente, como demostraremos, de los valores y sentidos relativos de la corriente, y de la diferencia de potencial entre los bornes.

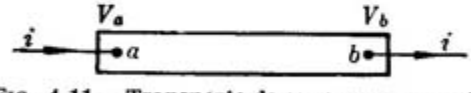


FIG. 4-11.—Transporte de carga en una parte de un circuito.

En un intervalo de tiempo dt entra, en la parte de circuito considerada, una cantidad de carga $dq = i\,dt$ por el borne a, y la misma cantidad sale por el borne b en igual tiempo. Ha habido así un transporte de la carga dq desde un potencial V_a hasta un potencial V_b. La energía dW cedida por la carga es:

$$dW = dq\,(V_a - V_b) = i\,dt\,V_{ab},$$

y la cantidad de energía cedida por unidad de tiempo, o sea, la potencia P suministrada, será:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = iV_{ab}} \qquad [4\text{-}15]$$

Esto es, la potencia es igual al producto de la intensidad de la corriente por la diferencia de potencial. Si la corriente se mide en amperios, o sea, en culombios/seg, y la diferencia de potencial en voltios, o sea, julios/culombio, la potencia resulta medida en julios/seg o vatios, puesto que

$$\frac{\text{culombios}}{\text{seg}} \times \frac{\text{julios}}{\text{culombio}} = \frac{\text{julios}}{\text{seg}} = \text{vatios}.$$

La Ec. [4-15] es una relación perfectamente general que se cumple cualquiera que sea la naturaleza de los elementos del circuito que estén situados entre a y b. Más adelante volveremos sobre esto.

Para el caso especial en que el circuito comprendido entre a y b es una resistencia pura R, toda la energía suministrada se convierte en calor, y entonces la diferencia de potencial V_{ab} está dada por

$$V_{ab} = iR.$$

Por consiguiente,

$$P = iV_{ab} = i \times iR,$$

o bien,

$$P = i^2R. \qquad [4\text{-}16]$$

Para hacer patente más explícitamente que, en este caso especial, la energía aparece en forma calorífica, podemos poner $P = \dfrac{dH}{dt}$, siendo dH la cantidad de calor producida en el tiempo dt. La Ec. [4-16] se convierte entonces en

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = i^2R} \qquad [4\text{-}17]$$

Si el conductor es lineal, es decir, si R es independiente de i, la Ec. [4-17] expresa que *la cantidad de calor producida por segundo es directamente proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente.* Este hecho fué descubierto experimentalmente por Joule en el transcurso de sus medidas del equivalente mecánico del calor, y se conoce con

el nombre de *ley de Joule*. Naturalmente, sólo es ley en el mismo sentido que la ley de Ohm; esto es, expresa una cualidad especial de ciertas sustancias y no una propiedad general de la materia. Una sustancia que obedece la ley de Ohm, obedece necesariamente la ley de Joule, y estas dos leyes no son independientes.

Si en la Ec. [4-17] se expresa la resistencia en ohmios, y la intensidad de corriente en amperios, la cantidad de calor desarrollada por segundo resulta medida en julios/seg o vatios, y puede convertirse fácilmente en calorías en virtud de la relación 1 cal = 4,186 julios.

Obsérvese que la cantidad de calor desarrollada por segundo en un conductor no equivale al aumento de temperatura por segundo del mismo, ya que este último depende del calor específico del conductor y de la cantidad de calor que pueda escapar por segundo del mismo, por conductibilidad, convección y radiación. La cantidad de calor perdida por segundo aumenta cuando se eleva la temperatura del conductor, y la temperatura de un conductor que transporta una corriente se elevará hasta que la cantidad de calor perdida por segundo se haga igual a la cantidad de calor desarrollada por segundo, después de lo cual la temperatura permanece constante. Así, cuando se cierra un circuito a través de una lámpara de incandescencia, la temperatura del filamento se eleva rápidamente hasta que la cantidad de calor perdida por segundo (principalmente por radiación) iguala a la cantidad de calor desarrollada por segundo, i^2R. Por el contrario, un fusible se construye de modo que cuando la intensidad de corriente exceda en él de cierto valor prefijado, el fusible se funda antes de alcanzar la temperatura de equilibrio.

4-10. Valores medio y eficaz de una corriente.—La intensidad de la corriente en una sección de un circuito se define por la ecuación $i = dq/dt$, de la que se deduce inmediatamente

$$dq = i\,dt;$$

por consiguiente, la carga total q que atraviesa una sección en un tiempo finito t, es:

$$q = \int_0^t i\,dt. \qquad [4\text{-}18]$$

Si la intensidad es constante,

$$q = it, \qquad [4\text{-}19]$$

y la cantidad de carga que atraviesa *cualquier* sección de un circuito por el cual circula una corriente de intensidad constante es igual al producto de la intensidad por el intervalo de tiempo. Esta ecuación ha sido utilizada ya en la definición de culombio (Sec. 1-6) como cantidad de carga que atraviesa en un segundo una sección de un conductor por el cual circula una corriente de intensidad constante e igual a un amperio.

Se observará que el término *amperio-segundo* es equivalente a culombio, y que la Ec. [4-19] puede utilizarse para definir otras unidades de

carga. Un *amperio-hora*, p. ej., es la carga que en una hora atraviesa una sección de un circuito por el cual circula una corriente de intensidad constante e igual a un amperio. Evidentemente, 1 A-h = 3600 A-seg = 3600 coul.

El valor medio (i_m o i), durante un intervalo de tiempo, de una corriente de intensidad variable se define como la intensidad de una corriente de intensidad constante que transporta la misma carga en igual tiempo que la corriente variable. La carga q transportada por la corriente constante de intensidad i_m es:

$$q = i_m t,$$

y como ha de ser igual a la carga transportada por la corriente variable,

$$i_m t = \int_0^t i\,dt, \text{ o sea } i_m = \frac{1}{t}\int_0^t i\,dt, \qquad [4\text{-}20]$$

que es la definición ordinaria de valor medio de una magnitud variable. (Véase THOMAS: *Cálculo infinitesimal y Geometría analítica*, Sec. 4-15.)

El valor medio de una corriente variable es una medida de su efecto electrolítico, puesto que el número de iones que pueden ser neutralizados en un electrodo y, por tanto, la masa de sustancia depositada, son directamente proporcionales a la cantidad de carga suministrada al electrodo.

Se ha encontrado experimentalmente que son necesarios 96519 coul para liberar un equivalente-gramo de sustancia en un electrodo de una célula electrolítica. Esta cantidad de carga se denomina *faraday*, o sea,

$$1 \text{ faraday} = 96519 \text{ culombios.}$$

(Un equivalente-gramo es el peso atómico o molecular de un ion, expresado en gramos, dividido por su valencia. Esto es, el equivalente-gramo del ion H^+ es un gramo; el del Cu^{++} es 63,57/2 = 31,79 g, el del SO_4^{--} es 96,06/2 = 48,03 g, etc.)

El faraday puede determinarse de un modo totalmente independiente de cualquier teoría referente a la *atomicidad* de la electricidad. Sin embargo, si se hace la hipótesis razonable de que todos los iones de la misma clase poseen la misma carga, la cantidad de carga de cualquier ion monovalente se obtiene dividiendo el valor del faraday por el número de Avogadro. Por tanto, la carga del ion H^+ es:

$$\frac{96519}{6{,}0228 \times 10^{23}} = 1{,}60248 \times 10^{-19} \text{ coul}$$

que está en excelente acuerdo con el valor hallado por Millikan para la carga e del electrón (véase Sec. 2-9).

El valor medio de la intensidad de la corriente en un circuito puede determinarse experimentalmente midiendo la carga que pasa por cualquier punto del circuito durante un intervalo de tiempo dado. Un método experimental consiste en hacer circular la corriente por una célula electrolítica y calcular la cantidad de carga a partir de la valencia y de la masa de sustancia liberada en un electrodo. De hecho, el amperio *internacional* se define de este modo como *la intensidad constante que deposita 0,001118 gramos de plata por segundo* de una disolución de sal de plata de naturaleza especificada en una célula de características determinadas. La Comisión electrotécnica internacional ha recomendado, sin embargo, el abandono de este patrón en favor de otro basado en las fuerzas magnéticas ejercidas entre conductores que transportan corrientes. Véase sección 11-4.

Consideremos ahora otro tipo de valor medio de una corriente variable, definido en función del efecto calorífico de la corriente. De la Ec. [4-17] se deduce que el calor dH desarrollado en un conductor durante el tiempo dt es:

$$dH = Ri^2\,dt,$$

y durante un intervalo de tiempo finito entre 0 y t, el calor será:

$$H = \int_0^t Ri^2\,dt.$$

Si la intensidad y la resistencia son constantes,

$$H = Ri^2t.$$

El *valor eficaz* de una corriente de intensidad variable durante un intervalo de tiempo dado, se define como la intensidad constante que desarrolla la misma cantidad de calor en cualquier resistencia en el mismo intervalo de tiempo. Si representamos por i_{ef} la intensidad constante, el calor desarrollado por ella en una resistencia R, durante el tiempo t, es:

$$H = i^2_{ef}\,Rt.$$

Puesto que este valor es igual al calor desarrollado por la corriente variable, se tiene:

$$i^2_{ef}Rt = \int_0^t Ri^2\,dt;$$

$$i_{ef} = \sqrt{\frac{1}{t}\int_0^t i^2\,dt}. \qquad [4\text{-}21]$$

Pero $\frac{1}{t}\int_0^t i^2\,dt$ es el valor medio del *cuadrado* de la intensidad, y, por tanto, el valor eficaz es igual a la *raíz cuadrada del valor medio del*

cuadrado de la intensidad, que, de un modo abreviado, se designa ordinariamente como *valor cuadrático medio* de la intensidad, i_{mc}. Obsérvese que el valor cuadrático medio de una corriente variable no es igual al valor medio, que se define como

$$i_m = \frac{1}{t}\int_0^t i\,dt.$$

Consideremos como ejemplo el tipo más común de corriente variable, es decir, una corriente alterna que varía con el tiempo sinusoidalmente, de acuerdo con la relación

$$i = I_0 \operatorname{sen} 2\pi ft$$

donde I_0 es la intensidad máxima y f la frecuencia. (Véase figura 4-12).

El valor medio durante un período es:

$$i_m = \frac{1}{T}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_0 \operatorname{sen} 2\pi ft\,dt.$$

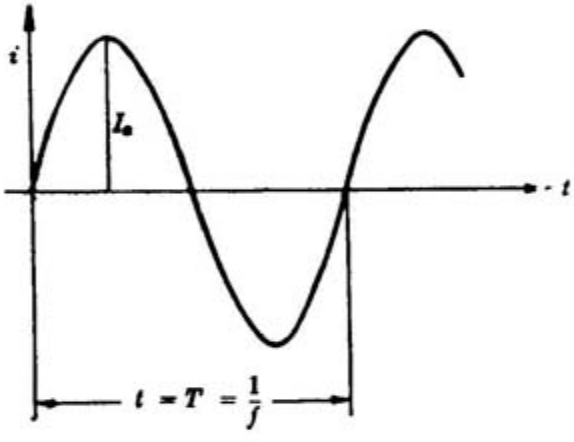


FIG. 4-12.—Corriente alterna sinusoidal.

Representemos $2\pi ft$ por θ, e integremos respecto a θ en lugar de respecto a t. En la expresión a integrar hay que sustituir $2\pi ft$ por θ y dt por $\frac{1}{2\pi f}\,d\theta$, o sea, $\frac{T}{2\pi}\,d\theta$, cambiando los límites de integración, que son ahora 0 y 2π; se tendrá:

$$i_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_0 \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{I_0}{2\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

y el valor medio de la intensidad es nulo, como se deduce evidentemente de la gráfica, dado que el área situada por encima del eje es igual a la situada por debajo.

El valor cuadrático medio de la intensidad es:

$$
\begin{aligned}
i_{mc} = i_{ef} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt} \\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (I_0 \operatorname{sen} 2\pi f t)^2\,dt} \\
&= \sqrt{\frac{I_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta} \\
&= \sqrt{\frac{I_0^2}{2\pi}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{I_0^2}{2}} \\
&= \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ I_0.
\end{aligned}
$$

El efecto calorífico de una corriente alterna sinusoidal es, por tanto, el mismo que el de una corriente continua igual a 0,707 veces el valor máximo de la corriente alterna. En la práctica, los datos de las corrientes alternas se dan en función de sus valores eficaces o valores cuadráticos medios.

PROBLEMAS

4-1. Un hilo conductor transporta una corriente constante de 10 A. ¿Cuántos culombios pasan a través de una sección del hilo en 20 seg? ¿Cuántos electrones?

4-2. Un galvanómetro sensible puede medir una corriente del orden de 10^{-10} A, o sea, una diezmilésima de microamperio. *a*) ¿Cuántos millones de electrones atraviesan, por segundo, una sección de un conductor por el cual circula una corriente de este valor? *b*) ¿Cuál es la velocidad media de los electrones en el conductor, si su sección transversal es 1 mm²? Supóngase que hay $8{,}5 \times 10^{28}$ electrones libres por metro cúbico de conductor. *c*) ¿Cuánto tiempo se requiere, por término medio, para que un electrón avance una distancia de 1 cm a lo largo del conductor?

4-3. Un diodo puede compararse a un cátodo y a un ánodo planos y paralelos, separados 5 mm. El área de cada uno es 2 cm². En la región comprendida entre el ánodo y el cátodo la corriente es transportada únicamente por los electrones. Si la intensidad de la corriente electrónica es 50 mA, y los electrones llegan a la superficie del ánodo con una velocidad de $1{,}2 \times 10^7$ m/seg, calcúlese el número de electrones por milímetro cúbico en el espacio situado justamente fuera de la superficie del ánodo.

4-4. La correa de un generador de Van de Graaff tiene un metro de anchura y lleva una velocidad de 25 m/seg. *a*) Despreciando las fugas, ¿qué cantidad de carga por segundo en culombios-seg tiene que distribuirse sobre la cara de la correa para que corresponda a una intensidad de corriente de 10^{-4} A en la esfera colectora? *b*) Calcúlese la carga por unidad de superficie de la correa, supuesta uniforme.

4-5. Se saca carga de una esfera por medio de un hilo conductor. La carga de la esfera en un instante cualquiera está dada por

$$q = 10^{-3}\varepsilon^{-2t},$$

donde q se mide en culombios y t en segundos. Determínese la intensidad de la corriente en el hilo en los instantes $t = 0$ y $t = 5$ seg.

4-6. *a*) Demuéstrese que la ley de Wiedemann-Franz predice que la razón de la conductibilidad térmica a la conductibilidad eléctrica debe ser igual para todos los metales, a la misma temperatura. *b*) Hállense las conductibilidades térmica y eléctrica de cuatro metales al menos, y compruébese la validez de la predicción anterior.

4-7. ¿Qué intensidad de campo eléctrico es necesaria para crear la misma densidad de corriente en un conductor de aluminio que en el conductor de cobre del EJEMPLO 1 (Sec. 4-7)?

4-8. *a*) ¿Cuál es la densidad de corriente en el hilo de cobre calibre 10, recubierto de goma, cuando la intensidad de corriente es la máxima permitida por la *National Board of Fire Underwriters* (Comisión americana nacional de compañías aseguradoras contra incendios)? Véase la tabla al final del enunciado. Exprésese la respuesta en amperios/m². *b*) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico o gradiente de potencial en el hilo, en voltios/metro? *c*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos del hilo distantes 1 Km?

La *National Board of Fire Underwriters* establece los siguientes límites admisibles para la *capacidad de conducción* del hilo de cobre:

4-9. Se ha encontrado que cuando la diferencia de potencial entre los bornes de una resistencia es 10 V, la intensidad de la corriente en la resistencia es 2 A. *a*) ¿Cuál será la corriente si la diferencia de potencial es 20 V? ¿100 V? *b*) ¿Cuál será la diferencia de potencial si la intensidad de corriente es 10 A? ¿0,10 A? *c*) ¿Cuál es la resistencia del conductor?

4-10. *a*) Con una resistencia construída con hilo de Nicrom se hicieron las siguientes mediciones:

i (amperios)	V_{ab} (voltios)
0,5	2,18
1,0	4,36
2,0	8,72
4,0	17,44

Constrúyase una gráfica que represente V_{ab} en función de i. ¿Obedece el Nicrom a la ley de Ohm? ¿Cuál es la resistencia del hilo expresada en ohmios? *b*) Con una resistencia de *thyrita* se hicieron las siguientes determinaciones:

i (amperios)	V_{ab} (voltios)
0,5	4,76
1,0	5,81
2,0	7,05
4,0	8,56

Constrúyase una gráfica que represente V_{ab} en función de i. ¿Obedece la *thyrita* a la ley de Ohm? ¿Cuál es el valor de la resistencia utilizada?

4-11. Partiendo de la definición del ohmio internacional, calcúlese la resistividad del mercurio a 0° C. La densidad relativa del mercurio es 13,60.

Tamaño calibre B & S	Diámetro, mm	Corriente máxima (A)	
		Aislamiento de goma	Otros aislamientos
0000	11,68	225	325
0	8,25	125	200
10	2,59	25	30
18	1,02	3	5

4-12. *a*) Calcúlese la resistencia de una milla de hilo de cobre calibre 10. Véase la tabla del problema 4-8. *b*) Calcúlese el diámetro requerido, en mm, de un conductor de aluminio de sección circular y que tenga la misma resistencia por milla.

4-13. *a*) Calcúlese la resistencia de 1 Km de hilo de cobre calibre 0. Véase la tabla del problema 4-8. *b*) Calcúlese la diferencia de potencial entre dos puntos separados 1 Km sobre un hilo de cobre-calibre 0, cuando la intensidad de la corriente que circula en el hilo es 25 A.

4-14. Los conductores de la línea de transporte de Boulder Dam son tubos de cobre de 3 cm de diámetro interior y 3,5 cm de diámetro exterior. Calcúlese la resistencia de un conductor de 1 Km de longitud.

4-15. Cada conductor de un cable de cobre de siete cabos (Fig. 4-13) tiene 2,5 mm de diámetro. Calcúlese la resistencia de 300 m de este cable.

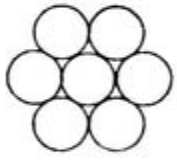


FIG. 4-13.

4-16. Un conductor macizo, de cobre, de 0,5 cm de radio está rodeado por una envoltura aisladora concéntrica de 1 cm de radio exterior. El conductor aislado está protegido por una funda exterior de plomo. Calcúlese: *a*) La resistencia del aislador al flujo radial, en una longitud de 1 Km y de 2 Km. *b*) La corriente de fuga en una longitud de 1 Km si la diferencia de potencial entre el conductor central y la funda es de 100 V. *c*) La densidad de corriente en los puntos de una superficie cilíndrica de radio 0,8 cm. *d*) La intensidad de corriente que atraviesa esta superficie en una longitud de 1 Km. ¿Cómo se compararían las respuestas *b*) y *d*)? La resistividad del aislador es 10^{10} Ω-m.

4-17. Un electrodo de plata de forma esférica que tiene 8 cm de radio es concéntrico con una envoltura esférica metálica de radio interior 10 cm. El espacio intermedio contiene un material aislante de resistividad 10^6 Ω-m. Calcúlese la resistencia del aislador.

4-18. *a*) Demuéstrese que si R_0, R, R_1 y R_2 son las resistencias de un conductor a las temperaturas de 0, t, t_1 y t_2 °C, se tiene:

$$R_2 = R_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1},$$

siendo

$$\alpha = \frac{R - R_0}{R_0 t}$$

b) La resistencia de las bobinas de excitación de un motor, medida a 20°C, resultó ser 54 Ω. Se midió de nuevo la resistencia después de haber funcionado el motor y se encontró que era 60 Ω. ¿Qué temperatura han alcanzado las bobinas? Los devanados son de hilo de cobre.

4-19. La cantidad de calor desarrollada por segundo en una resistencia es 20 w cuando la corriente en ella es 4 A. *a*) ¿Cuál será la cantidad de calor producida por segundo cuando la corriente es 8 A? ¿2 A? *b*) ¿Cuál es la resistencia del conductor?

4-20. Un calentador eléctrico de 660 w está proyectado para funcionar a 120 V. *a*) ¿Cuál es su resistencia? *b*) ¿Qué intensidad de corriente circulará por la resistencia? *c*) ¿Cuál es la cantidad de calor desarrollada en calorías por seg? *d*) Si el voltaje de la línea desciende a 110 V, ¿qué potencia absorberá el calentador, en vatios? (Supóngase constante la resistencia. Realmente cambiará algo a causa de la variación de temperatura.)

4-21. Exprésese la cantidad de calor desarrollada por segundo en una resistencia en función de: *a*) diferencia de potencial e intensidad; *b*) resistencia e intensidad; *c*) diferencia de potencial y resistencia.

4-22. La intensidad en un hilo varía con el tiempo, según la relación

$$i = 4 + 2t^2,$$

donde i se mide en amperios y t en segundos. *a*) ¿Cuántos culombios pasan por una sección transversal del hilo en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 5$ seg y $t = 10$ seg? *b*) ¿Cuál es la intensidad media durante el mismo intervalo de tiempo? *c*) ¿Cuál es la intensidad eficaz?

4-23. La corriente en un hilo varía con el tiempo, según la relación

$$i = 20 \text{ sen } 377t,$$

expresándose i en amperios, t en segundos y $(377t)$ en radianes. *a*) ¿Cuántos culombios pasan por una sección transversal del hilo en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ y $t = 1/120$ seg? *b*) ¿En el intervalo $t = 0$ y $t = 1/60$ seg? *c*) ¿Cuál es la intensidad media en cada uno de los intervalos anteriores? *d*) ¿Cuál es la intensidad eficaz?

4-24. La figura 4-14 representa la gráfica de una corriente alterna rectificada en semionda. Durante los intervalos comprendidos entre $t = 0$ y $t = T/2$ y desde T a $3T/2$, la intensidad está dada por

$$i = I_0 \text{ sen } \frac{2\pi t}{T}$$

Durante los intervalos $t = T/2$ a $t = T$, etcétera, la intensidad es nula. *a*) Calcúlese

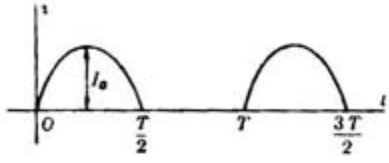


FIG. 4-14.

la intensidad media durante el intervalo comprendido entre 0 y T. *b*) Calcúlese la corriente eficaz durante el mismo intervalo.

4-25. La forma de la onda de una corriente periódica está representada en la figura 4-15. Calcúlense los valores medio y cuadrático medio de la intensidad durante un intervalo de 0,05 seg.

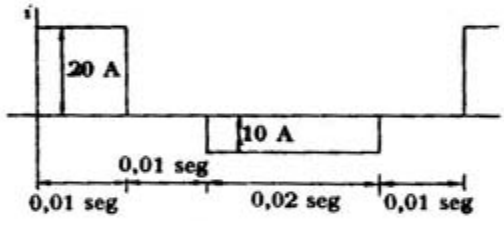


FIG. 4-15.

CAPÍTULO V

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

5-1. Fuerza electromotriz.—Hemos demostrado en el capítulo anterior que para tener una corriente en un conductor es necesario mantener en el mismo un campo eléctrico, o sea, un gradiente de potencial. Hemos demostrado también que para sostener la corriente se necesita un suministro continuo de energía al conductor, que se convierte en calor. La producción de calor en el conductor es un proceso *irreversible* en sentido termodinámico. Esto es, aunque la energía se conserva durante el proceso, el calor producido no puede transformarse de nuevo en energía eléctrica, excepto con las restricciones impuestas por el segundo principio de termodinámica.

Vamos a considerar a continuación otro tipo de transformación energética, *reversible* en sentido termodinámico. Una batería de acumuladores, la dínamo y el motor, son dispositivos en los cuales tienen lugar tales transformaciones. (Hay también otros dispositivos de esta clase pero no nos ocuparemos ahora de ellos.) Consideremos una batería de acumuladores que está accionando el motor de arranque de un automóvil. La energía interna de las sustancias que hay dentro de la batería disminuye y se convierte en energía mecánica útil que acciona el eje del motor de arranque. Después que el motor del automóvil se pone en marcha, se desconecta el motor de arranque y la dínamo envía una corriente de carga, de sentido contrario, a la batería de acumuladores. Las reacciones químicas que tienen lugar en la batería se verifican ahora en sentido inverso, y se produce energía interna con un gasto de trabajo mecánico que ha de ser realizado por el motor del automóvil para accionar la dínamo. Por consiguiente, según el sentido de la corriente que la atraviesa, se verifica en la batería una de estas dos transformaciones:

Energía interna → energía eléctrica

Energía eléctrica → energía interna.

En contraste con la transformación *irreversible* de la energía eléctrica en calor, esto es, transformando la potencia i^2R en calor en una resistencia, la conversión de la energía eléctrica en energía interna en una batería de acumuladores es *reversible*, en el sentido de que la energía interna puede recuperarse completamente y convertirse en energía eléctrica, sin cambios ostensibles en otros cuerpos. [1]

[1] El hecho de que la recuperación no es del 100 % en una batería real de acumuladores bajo las condiciones en las cuales se utiliza, no excluye la posibilidad de una recuperación completa en condiciones adecuadas.

El mecanismo de las transformaciones de energía en un motor o una dinamo, se discutirá con más detalle en capítulos sucesivos. Bastará por ahora enunciar que en estos dispositivos tenemos conversión de energía eléctrica en mecánica (no en interna) o viceversa, y que la conversión puede ser de un 100 % en uno u otro sentido.

Cualquier dispositivo en el cual pueda producirse una transformación reversible entre energía eléctrica y otra forma de energía, se denomina *generador de fuerza electromotriz.*

El valor de la fuerza electromotriz de un generador puede definirse como energía convertida de la forma eléctrica a la forma no eléctrica o viceversa (excluyendo la energía convertida irreversiblemente en calor), por unidad de carga que pasa a través de una sección del generador. Más brevemente, la fuerza electromotriz puede definirse como *trabajo por unidad de carga.* La fuerza electromotriz se representa por el símbolo ε, y se escribe abreviadamente fem [1]. Por consiguiente, si dq es la carga que atraviesa una sección del generador durante el tiempo dt, y dW es la energía transformada en este tiempo, la fem será:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{dW}{dq}} \qquad [5\text{-}1]$$

Puesto que la fuerza electromotriz es trabajo por unidad de carga, la unidad de fem en el sistema mks es el *julio por culombio.* Es la misma unidad que la de potencial, y se utiliza la forma abreviada voltio; por consiguiente, la fem se expresa en voltios. Debe hacerse notar, no obstante, que aunque la fem y el potencial pueden expresarse en la misma unidad, se refieren a conceptos distintos. Más adelante se verá más clara esta diferencia.

El trabajo realizado por el generador en el tiempo dt es:

$$dW = \varepsilon\, dq, \qquad [5\text{-}2]$$

y el efectuado en la unidad de tiempo, o sea, la potencia:

$$P = \frac{dW}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} = \varepsilon i. \qquad [5\text{-}3]$$

Por ejemplo, la fem de una batería corriente de automóvil es de unos 6 V, o sea, 6 julios/coul. Esto quiere decir, que por cada culombio que pasa a través de la batería (o cruza una sección del circuito a la cual está conectada la batería) 6 julios de energía interna se convierten en energía eléctrica si la batería se descarga, o se producen 6 julios de energía interna a expensas de la energía eléctrica, si se está cargando la batería.

[1] El empleo de la palabra *fuerza* en relación con este concepto no es afortunado, puesto que una fem no es una fuerza, sino un trabajo por unidad de carga.

Cuando la corriente en la batería es de 10 A, o sea, 10 coul/seg, la cantidad de energía transformada por unidad de tiempo será:

$$P = \varepsilon i = 6\,\frac{\text{julios}}{\text{coul}} \times 10\,\frac{\text{coul}}{\text{seg}} = 60\,\frac{\text{julios}}{\text{seg}} = 60 \text{ w.}$$

5-2. Ecuación del circuito.—Consideremos ahora un circuito sencillo (Fig. 5-1), con una resistencia R conectada mediante conductores, de resistencia despreciable, a los terminales de un generador, tal como una pila seca o una batería de acumuladores. Sea i la intensidad de la corriente en el circuito. Cuando se conecta cierto número de elementos en el circuito, como en la figura 5-1, formando una sola trayectoria conductora, se dice que están *en serie*. Más adelante consideraremos otros tipos de conexión.

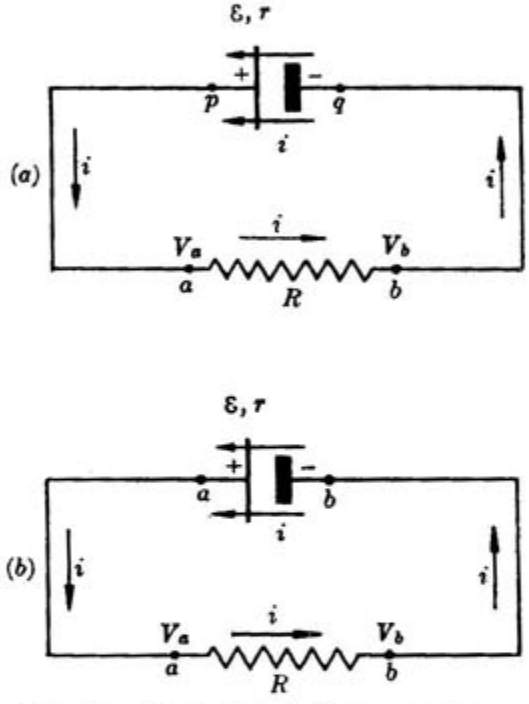


FIG. 5-1.—Generador conectado en serie con una resistencia, por medio de hilos conductores sin resistencia.

Debemos aclarar otro detalle. Los puntos p y a en la figura 5-1 (a) están unidos por un conductor sin resistencia. La diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor es igual al producto de la intensidad de la corriente por la resistencia entre los puntos. Pero, puesto que la resistencia entre p y a es nula, la diferencia de potencial entre ellos es también nula, o en otras palabras, los puntos p y a están al mismo potencial. Por consiguiente, p y a, y, de hecho, todos los puntos del conductor que los una, son *eléctricamente* equivalentes y no es necesario asignarles letras distintas. Lo mismo sucede, evidentemente, con los puntos b y q. El circuito se rotula, por tanto, como indica la figura 5-1 (b).

Si el sentido de la corriente en la resistencia es de a hacia b, el potencial V_a es superior al potencial V_b. El signo + sobre el borne a de la pila indica esta circunstancia.

Aunque, en rigor, la fuerza electromotriz no es magnitud vectorial, es útil asignarle un sentido. Consideraremos arbitrariamente que el sentido de la fem es de − a + dentro del generador, como se indica por una flecha en la figura 5-1.

A continuación deducimos las expresiones de las cantidades de energía transformadas por segundo en las diversas partes del circuito. En la resistencia exterior se produce calor a razón de $\frac{dH_R}{dt} = Ri^2$ unidades por segundo. Encontramos también, como podía esperarse, que todo generador tiene resistencia, que llamaremos *resistencia interna* del genera-

dor, y que representaremos por r. Por consiguiente, la proporción en que se produce calor en la pila es $\frac{dH_r}{dt} = ri^2$. La suma de Ri^2 y ri^2 es la cantidad de energía cedida por segundo, por la carga circulante, en forma de calor, y el generador ha de suministrar energía en la misma proporción. Entonces, en virtud de la Ec. [5-3],

$$\varepsilon i = Ri^2 + ri^2. \qquad [5\text{-}4]$$

Simplificando y despejando i, obtenemos:

$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R + r}} \qquad [5\text{-}5]$$

El principio de conservación de la energía conduce así a una relación extraordinariamente útil entre la intensidad de la corriente, la fem y la resistencia en un circuito sencillo en serie, cuya relación podemos denominar *ecuación del circuito.*

Consideremos ahora un circuito que contiene un generador, dentro del cual se realiza trabajo *por* la carga circulante. Son ejemplos, un motor en el cual se realiza trabajo por la carga y cuyo trabajo aparece en forma de energía mecánica, y también una batería de acumuladores *en carga,* dentro de la cual el trabajo aparece en forma de energía interna. La figura 5-2 representa un circuito en el cual hay un motor, representado por el símbolo —⊂⊃—, que es accionado por una batería. Para generalizar, se ha introducido una resistencia R.

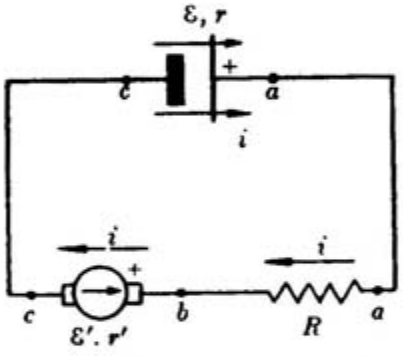


FIG. 5-2.—Circuito en serie con una fuerza electromotriz y otra contraelectromotriz.

La corriente en el motor se dirige de derecha a izquierda, o sea, de b a c. Puesto que la carga circulante cede energía al pasar por el motor, el potencial V_b tiene que ser mayor que el potencial V_c. Por consiguiente, se asigna al borne b del motor el signo positivo, y el sentido de su fem es de c hacia b.

Representemos por ε' la fem del motor, y por r' su resistencia interna. En virtud de la definición de fem, la cantidad de energía convertida por segundo en energía mecánica por el motor es $\varepsilon' i$, y la cantidad convertida por segundo en calor dentro del motor es $r'i^2$. Las cantidades de energía transformadas en calor, por segundo, en la resistencia exterior y en la batería son Ri^2 y ri^2. La cantidad de trabajo realizado por segundo en la batería sobre la carga circulante es εi. Por consiguiente,

$$\varepsilon i = \varepsilon' i + r'i^2 + Ri^2 + ri^2$$

e

$$i = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{R + r + r'}, \qquad [5\text{-}6]$$

o bien,

$$i = \frac{\Sigma\varepsilon}{\Sigma R} \qquad [5\text{-}7]$$

Esta ecuación es, evidentemente, una generalización de la Ec. [5-5] y puede enunciarse: La intensidad de la corriente (en un circuito en serie) es igual a la suma algébrica de las fem del circuito, dividida por la suma de las resistencias del mismo.

Es necesario adoptar un convenio de signos cuando se utiliza la Ec. [5-7]. La regla más sencilla es considerar el sentido de la corriente como sentido positivo en el circuito. Entonces las fem son positivas si tienen el mismo sentido que la corriente, y negativas si tienen sentido contrario. Las resistencias se consideran siempre como positivas. Obsérvese que los signos de la Ec. [5-6] están de acuerdo con este convenio.

Los sentidos *relativos* de la corriente y la fem en los dos dispositivos de la figura 5-2 conducen a las siguientes generalizaciones. Cuando la corriente tiene el *mismo* sentido que la fem, como sucede en la batería, se realiza trabajo *sobre* la carga circulante con un consumo de energía en alguna otra forma. Cuando la corriente tiene sentido *contrario* a la fem, como sucede en un motor, el trabajo es realizado *por* la carga circulante y aparece energía en alguna otra forma. En este último caso, la fem se denomina frecuentemente *fuerza contraelectromotriz.*

5-3. Otra definición de fuerza electromotriz.—Un generador de fem es una porción de un circuito en la cual una energía no eléctrica se transforma reversiblemente en energía eléctrica, o viceversa. En los problemas puramente mecánicos, siempre que se realiza trabajo sobre un cuerpo es posible atribuir este trabajo a una fuerza que actúa sobre el cuerpo mientras éste efectúa cierto recorrido. En algunos generadores de fem, principalmente en los de naturaleza química, el mecanismo por el cual las cargas adquieren energía a expensas de energía química, no es ciertamente tan sencillo como implicaría el enunciar que «las fuerzas químicas» realizan trabajo sobre las cargas cuando éstas se desplazan de un electrodo al otro. Sin embargo, puesto que de hecho se realiza determinada cantidad de trabajo sobre cada unidad de carga cuando ésta atraviesa la batería, se podría hablar de una fuerza *equivalente* de tal magnitud que el trabajo realizado por ella sobre cada unidad de carga circulante sea igual a la fem. Como la existencia de una fuerza que actúe sobre una carga implica un campo eléctrico, podemos hablar igualmente de un campo eléctrico *equivalente* dentro de la batería.

En otros generadores de fem, singularmente en los que producen fem inducida (véase Sec. 12-2), el trabajo realizado sobre la carga circulante puede ser atribuído ciertamente a un campo eléctrico el cual, sin embargo, no es creado por cargas positivas y negativas, sino por un campo magnético variable.

La figura 5-3 representa, en forma esquemática, un generador de fem. El campo *electrostático* creado por las cargas situadas en los bornes positivo y negativo se ha representado por líneas finas. Las líneas gruesas muestran el campo *equivalente*, esto es, el campo que realiza trabajo sobre la carga cuando pasa a través del generador. Obsérvese que su sentido es opuesto al del campo electrostático dentro del generador, y es el mismo que el sentido de la fem, es decir, del borne negativo al positivo. La línea de trazos es una trayectoria cerrada, arbitrariamente elegida, que pasa por el generador.

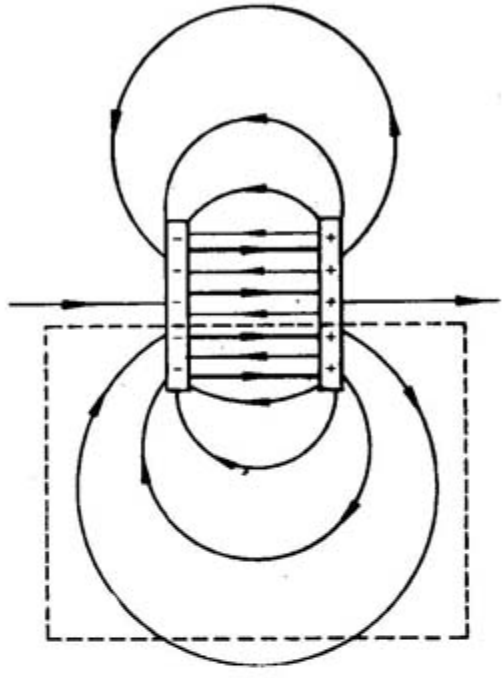


FIG. 5-3.—Diagrama esquemático de un generador de fem.

Calculemos ahora la integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico alrededor de esta trayectoria cerrada. La intensidad del campo eléctrico resultante E, en cada punto es la suma (vectorial) de la intensidad del campo electrostático E_0 y de la intensidad del campo *equivalente* E'. La integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico resultante es entonces la suma de dos términos:

$$\oint E \cos \theta \, ds = \oint E_0 \cos \theta \, ds + \oint E' \cos \theta \, ds.$$

Pero en la sección 3-3 hemos demostrado que en un campo puramente electrostático la integral curvilínea de la intensidad de un campo eléctrico a lo largo de una trayectoria cerrada es nula; de modo que el primer término del segundo miembro desaparece. Esto parece lógico porque si la trayectoria de trazos es recorrida en el sentido de las agujas de un reloj nos movemos en el *mismo* sentido del campo electrostático cuando estamos fuera del generador, y *contra* él si nos hallamos en su interior. La mayor trayectoria exterior, es compensada por ser el campo más débil en esta región. Sin embargo, el campo equivalente sólo existe dentro del generador y es nulo en los puntos exteriores.

El último término del segundo miembro se reduce, por tanto, a la integral curvilínea de E' desde un borne del generador al otro. Pero E' es la fuerza *equivalente* por unidad de carga, de modo que $\oint E' \cos \theta \, ds$ es el trabajo realizado por unidad de carga por las fuerzas del campo *equi-*

valente. Ahora bien: este trabajo es precisamente lo que hemos denominado fuerza electromotriz del generador. Por consiguiente, podemos decir que *la fem de un circuito es igual a la integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico a lo largo del circuito,* donde dicha intensidad del campo eléctrico incluye *todas* las fuerzas que actúan sobre una carga en cualquier punto del circuito:

$$\boxed{\varepsilon = \oint E \cos \theta \, ds} \qquad [5\text{-}8]$$

Esta ecuación se toma a veces como definición de la fem de un circuito, y la utilizaremos posteriormente al deducir la expresión de la velocidad de las ondas electromagnéticas.

5-4. Diferencia de potencial entre puntos de un circuito.—Vamos a deducir a continuación la expresión general de la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de un circuito en serie. La figura 5-4 representa una porción de dicho circuito, en la cual el sentido de la corriente i es de a hacia b. La cantidad de energía cedida por segundo, por la carga circulante, a la porción de circuito comprendida entre a y b es iV_{ab}. En otras palabras, ésta es la potencia suministrada a dicha porción del circuito por el generador o generadores de fem que hay en el resto del circuito (no representado). Puesto que i y ε son del mismo sentido, el primer dispositivo suministra energía en la proporción εi. Al segundo dispositivo se le suministra energía en la proporción $\varepsilon' i$ puesto que i y ε' son de sentido contrario. En la resistencia y en los dispositivos de fem ε y ε' se produce por segundo una cantidad total de calor $(R + r + r')i^2$. Igualando entonces la potencia suministrada a esta porción del circuito a la potencia desarrollada en ella, se tiene:

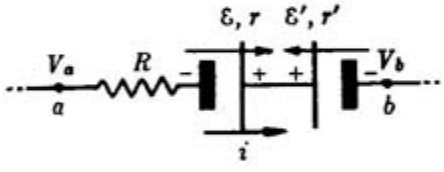


FIG. 5-4.—Porción de circuito con dos fem.

$$iV_{ab} + \varepsilon i = \varepsilon' i + (R + r + r')i^2;$$

$$V_{ab} = (R + r + r')i - (\varepsilon - \varepsilon'); \qquad [5\text{-}9]$$

$$\boxed{V_{ab} = \Sigma Ri - \Sigma\varepsilon.} \qquad [5\text{-}10]$$

Esta es la expresión general deseada para la diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ entre dos puntos cualesquiera a y b de un circuito en serie.

Ha de prestarse especial atención a los signos algébricos. La regla más sencilla es considerar el sentido de a hacia b como sentido positivo. Entonces, las corrientes y las fem son positivas si su sentido es el de a hacia b, y negativas si su sentido es el de b hacia a. Las resistencias son siempre positivas. La diferencia de potencial V_{ab} es siempre positiva si a se encuentra a un potencial superior al de b, negativa si b está a mayor potencial que a. Obsérvese que los signos de la Ec. [5-9] coinciden con estos convenios.

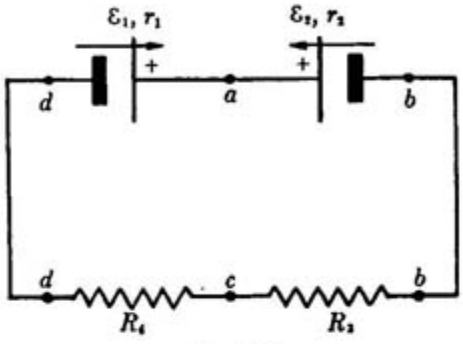


FIG. 5-5.

La Ec. [5-10] se reduce, naturalmente, a la relación conocida $V_{ab} = Ri$ en el caso particular en que a y b son los bornes de una resistencia pura. También contiene implícitamente la ecuación general del circuito, Ec. [5-7]. Esto es, si los puntos a y b coinciden,

$$V_{ab} = 0 = \Sigma Ri - \Sigma\varepsilon, \quad \text{e} \quad i = \frac{\Sigma\varepsilon}{\Sigma R}$$

EJEMPLO 1.—Los datos numéricos correspondientes a la figura 5-5 son: $\varepsilon_1 = 12$ V, $r_1 = 0{,}2\ \Omega$; $\varepsilon_2 = 6$ V, $r_2 = 0{,}1\ \Omega$; $R_3 = 1{,}4\ \Omega$; $R_4 = 2{,}3\ \Omega$; calcúlese: *a*) la intensidad de corriente en el circuito, en magnitud y sentido; *b*) la diferencia de potencial V_{ac}.

a) Parece evidente que la corriente tendrá el sentido de las agujas de un reloj, puesto que $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Sin embargo, para demostrar que no es necesario apoyarse en la intuición para encontrar su sentido, supongamos que tuviera sentido contrario. Entonces, con el convenio de signos de la sección 5-2,

$$\Sigma\varepsilon = -12 + 6 = -6 \text{ V};$$
$$\Sigma R = 4\ \Omega;$$
$$i = \frac{\Sigma\varepsilon}{\Sigma R} = \frac{-6}{4} = -1{,}5 \text{ A}.$$

El significado del signo negativo es sencillamente que se hizo una hipótesis incorrecta respecto al sentido de la corriente. Si se hubiera supuesto el sentido contrario se tendría:

$$\Sigma\varepsilon = 12 - 6 = +6 \text{ V}; \qquad \Sigma R = 4\ \Omega;$$
$$i = \frac{6}{4} = +1{,}5 \text{ A}.$$

Se obtiene en ambos casos el mismo valor numérico, y no es necesario conocer previamente el sentido de la corriente.

b) La diferencia de potencial entre a y c es $V_{ac} = \Sigma Ri - \Sigma\varepsilon$. Se puede llegar de a hasta c por dos recorridos y cualquiera de ellos puede emplearse para calcular V_{ac}. Utilicemos en primer lugar la trayectoria abc. Hemos demostrado ya que la corriente tiene el sentido de las agujas de un reloj. Utilicemos los convenios de signo anteriores.

El sentido de la corriente en la trayectoria *abc* es de *a* hasta *c*; por consiguiente, *i* es positivo y

$$\Sigma Ri = (0{,}1 + 1{,}4)\,(+1{,}5) = +\,2{,}25 \text{ V}.$$

El sentido de ε_2 es de *b* hacia *a*, así:

$$\Sigma\varepsilon = -\,6 \text{ V}.$$

Por tanto,

$$V_{ac} = +\,2{,}25 - (-6) = +\,8{,}25 \text{ V},$$

y dado que

$$V_{ac} = V_a - V_c,$$

$$V_a - V_c = 8{,}25 \text{ V}, \qquad V_a = V_c + 8{,}25 \text{ V}.$$

Esto es, el potencial en el punto *a* excede en 8,25 V al potencial de *c*.

Si pasamos de *a* a *c* por el recorrido *adc*, el término correspondiente a la intensidad de la corriente tiene signo negativo, puesto que su sentido es de *c* hacia *a*. Por tanto,

$$\Sigma Ri = (0{,}2 + 2{,}3)\,(-1{,}5) = -\,3{,}75 \text{ V}.$$

El sentido de ε_1 es de *c* hacia *a*, de donde,

$$\Sigma\varepsilon = -\,12 \text{ V}.$$

Por tanto,

$$V_{ac} = -\,3{,}75 - (-12) = +\,8{,}25 \text{ V}$$

y se obtiene la misma solución, cualquiera que sea el recorrido utilizado.

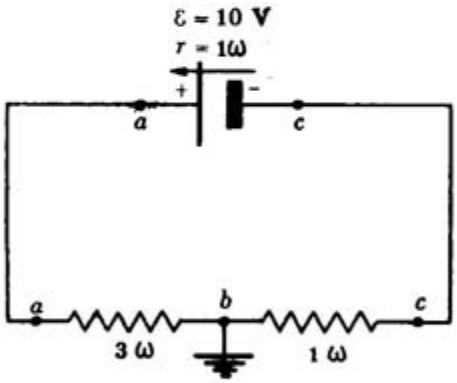


FIG. 5-6.

EJEMPLO 2.—Prácticamente en todos los circuitos, ya se trate de los sistemas de distribución de energía o de pequeñas unidades tales como los amplificadores de radio, hay uno o más puntos del circuito conectados a tierra. A diferencia del potencial de referencia utilizado en la teoría general del campo (que es el de un punto del infinito), cuando se trata de circuitos se supone que el potencial de los puntos conectados a tierra es nulo, y el potencial de cualquier otro punto del sistema se expresa con relación a este potencial de referencia. Consideremos el circuito sencillo de la figura 5-6, que comunica con tierra en el punto *b*. Calculemos los potenciales de los puntos *a* y *c*.

La corriente en el circuito es:

$$i = \frac{10}{5} = 2 \text{ A},$$

y su sentido es el contrario al de las agujas de un reloj. Las diferencias de potencial V_{ab} y V_{bc} son:

$$V_{ab} = Ri = 3 \times 2 = 6 \text{ V} = V_a - V_b;$$

$$V_{bc} = Ri = 1 \times 2 = 2 \text{ V} = V_b - V_c.$$

Puesto que $V_b = 0$, se deduce que

$$V_a = +6 \text{ V}, \quad V_c = -2 \text{ V}.$$

Esto es, el punto a está 6 V *por encima* del potencial de tierra, y el punto c está 2 V *por debajo* del potencial de tierra. La diferencia de potencial V_{ac} puede encontrarse ahora por sustracción:

$$V_{ac} = V_a - V_c = 6 - (-2) = +8 \text{ V}.$$

Como comprobación, podemos pasar de a a c a través de la pila, obteniendo:

$$V_{ac} = \Sigma Ri - \Sigma\varepsilon = -1 \times 2 - (-10) = +8 \text{ V}.$$

5-5. Voltaje en los bornes de un generador.—Resulta cómodo aplicar la forma especial de la ecuación [5-10] cuando los puntos a y b son los bornes de un generador. Entonces hay dos posibilidades, representadas en la figura 5-7 (a) y (b), a saber, que la corriente y la fem sean de sentidos iguales u opuestos. Convengamos en que el punto a corresponda siempre al borne + y el punto b al borne − del generador. Entonces, en la figura 5-7 (a), de acuerdo con el convenio de signos de la sección 5-2, tanto ε como i son negativas y

$$V_{ab} = V_{+-} = \Sigma Ri - \Sigma\varepsilon = -ri - (-\varepsilon) = \varepsilon - ri.$$

En la figura 5-7 (b), ε es negativa, pero i es positiva; por tanto,

$$V_{ab} = V_{+-} = ri - (-\varepsilon) = \varepsilon + ri.$$

La diferencia de potencial *entre los bornes + y − de un generador* es igual, por consiguiente, a la fem del generador disminuída en el producto de la resistencia interior por la intensidad de corriente, cuando la fem y la corriente son del mismo sentido, y aumentada en este producto cuando ambas son de sentidos opuestos. (En este último caso tenemos una fuerza contraelectromotriz.) Cuando la corriente en un generador es nula, el voltaje en los bornes es igual a la fuerza electromotriz. Por tanto, la fem de un generador puede determinarse experimentalmente midiendo el voltaje entre sus bornes en circuito abierto.

Si se mide el voltaje en los bornes con un tipo corriente de voltímetro, ha de ponerse cuidado en que la corriente que atraviesa el voltímetro no ocasione un descenso apreciable del voltaje en los bornes

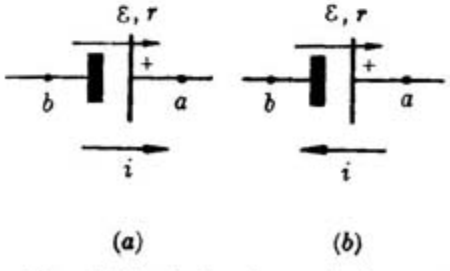


FIG. 5-7.—(a) Corriente y fem en el mismo sentido. (b) Corriente y fem de sentidos contrarios

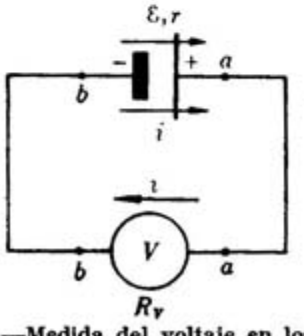


FIG. 5-8.—Medida del voltaje en los bornes de un generador por medio de un voltímetro.

por debajo de la fem. La figura 5-8 representa una pila de fem ε y resistencia interna r con un voltímetro de resistencia R_V conectado a sus bornes. Puesto que el voltímetro proporciona una trayectoria conductora, tenemos un circuito cerrado tan pronto como se conecta a la pila. La corriente en el circuito es:

$$i = \frac{\varepsilon}{R_V + r},$$

y el voltaje en los bornes,

$$V_{ab} = \varepsilon - ri = \varepsilon - r\frac{\varepsilon}{R_V + r} = \varepsilon\left(\frac{1}{1 + \frac{r}{R_V}}\right)$$

Si r es despreciable respecto a R_V, la expresión encerrada entre paréntesis se aproxima a la unidad, y la indicación del voltímetro (V_{ab}) es aproximadamente igual a la fuerza electromotriz. Es evidente que el voltímetro ha de ser, por tanto, un aparato de gran resistencia.

5-6. Potenciómetro.—El potenciómetro es un instrumento que puede utilizarse para medir la fem de un generador sin que pase corriente por él. Tiene, además, un gran número de aplicaciones útiles. En esencia, el potenciómetro equilibra una diferencia de potencial desconocida con una diferencia de potencial variable y medible.

El fundamento del potenciómetro está representado esquemáticamente en la figura 5-9. Una resistencia de hilo *ab* está conectada constantemente a los bornes de un generador de fem ε_1. Un contacto deslizante *c* está conectado a través del galvanómetro *G* a una segunda pila cuya fem ε_2 se desea medir. Se mueve el contacto *c* a lo largo del hilo hasta encontrar una posición en la cual el galvanómetro no presente desviación. (Esto exige que sea $V_{ab} \geq \varepsilon_2$.) Si escribimos las expresiones de V_{cb} para los dos recorridos entre dichos puntos, y recordamos que no pasa corriente por el recorrido inferior, obtenemos:

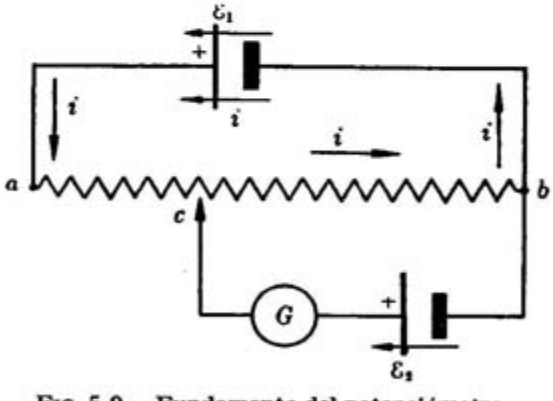
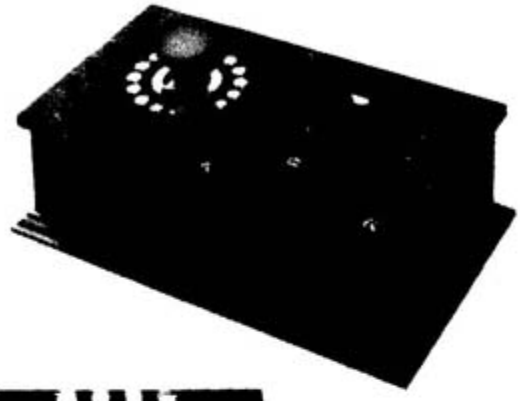


FIG. 5-9.—Fundamento del potenciómetro.

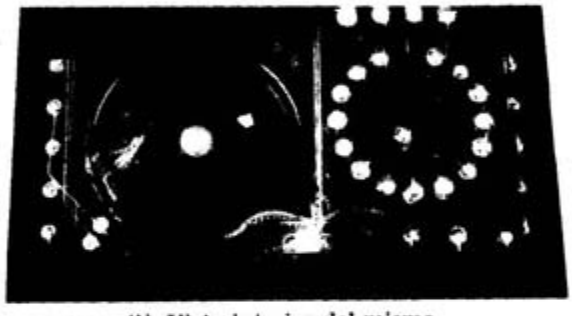
(Recorrido superior) $V_{cb} = iR_{cb}$
(Recorrido inferior) $V_{cb} = \varepsilon_2$.

Por consiguiente, iR_{cb} es *exactamente* igual a la fem ε_2, y entonces puede calcularse ε_2 si se conocen i y R_{cb}. No es necesario hacer la corrección «*ir*» puesto que la corriente en ε_2 es nula.

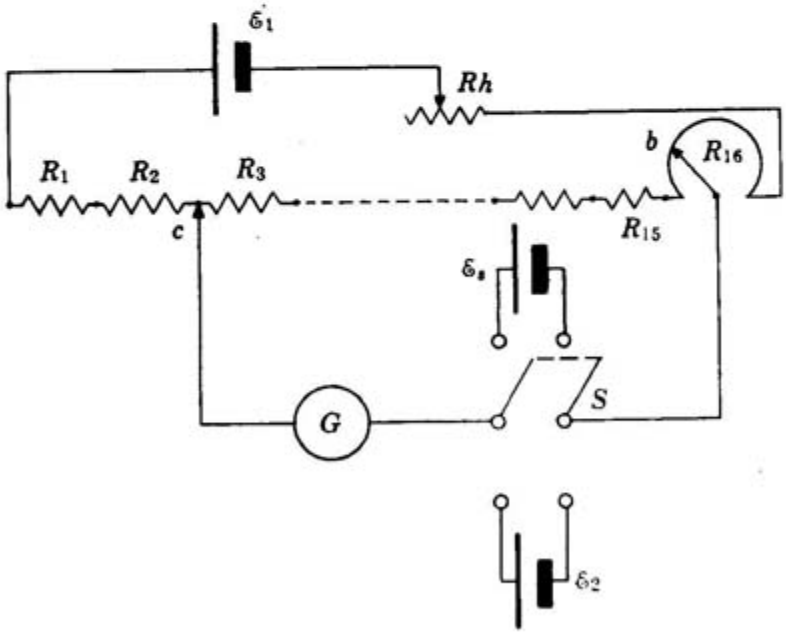
En la práctica, el circuito sencillo del potenciómetro se modifica como indica la figura 5-10. La descripción siguiente se refiere concretamente al potenciómetro *Leeds and Northrup*, tipo escolar. En los instrumentos de alta precisión se introducen to-



(*a*) Vista exterior del potenciómetro para enseñanza.



(*b*) Vista interior del mismo.



(*c*) Esquema del aparato.

FIG. 5-10.
(Cortesía de Leeds & Northrup.)

davía otros perfeccionamientos. Las figuras 5-10 (*a*) y (*b*) son fotografías del aparato; la figura 5-10 (*c*) es un esquema del circuito.

El hilo único de la figura 5-9 es sustituído por dieciséis resistencias R_1, R_2, R_3, ..., R_{15}, R_{16} en serie, de 10 Ω cada una. Sólo la resistencia R_{16} es un hilo que permite el deslizamiento de un contacto móvil. Los contactos móviles *c* y *b* pueden abarcar un número entero de resistencias, más una fracción del hilo de deslizamiento. El potenciómetro se utiliza siempre con una corriente de 0,010 A en el circuito superior. La caída de potencial a través de cada resistencia de 10 Ω es, por tanto, 0,100 V, y el aparato puede calibrarse para leer voltios directamente.

Para asegurar que la corriente en el circuito superior tiene su valor adecuado, se coloca el conmutador *S* en la posición «más alta», conectando la pila patrón de fem conocida ε_s en el circuito inferior. Se sitúan los contactos *c* y *b* en los puntos en los cuales el circuito *debiera* estar equilibrado si la corriente en el circuito superior tuviera el valor correcto, y se ajusta entonces este circuito con el reóstato *Rh* hasta que el galvanómetro *G* no acuse desviación. Después, sin cambiar la posición de *Rh*, se coloca el conmutador *S* en la posición «inferior» y se hace que la corriente en el galvanómetro vuelva a ser nula modificando *c* y *b*. La fem desconocida ε_2 puede leerse directamente por la posición de *c* y *b*.

Durante los tanteos preliminares, se intercala en *serie* con el galvanómetro una resistencia protectora para evitar cualquier avería al galvanómetro o a la pila patrón.

El potenciómetro descrito anteriormente puede apreciar hasta 10^{-4} V. Los instrumentos de alta precisión permiten apreciar hasta 10^{-6} V.

5-7. Conexión de resistencias en serie y en paralelo.—La mayor parte de los circuitos eléctricos no contienen un solo generador y una sola resistencia exterior, sino que comprenden cierto número de fem, resistencias y otros elementos tales como condensadores, motores, etc., conectados entre sí de un modo más o menos complicado. El término general aplicado a tales circuitos es el de *red*. A continuación consideraremos algunos de los tipos más sencillos.

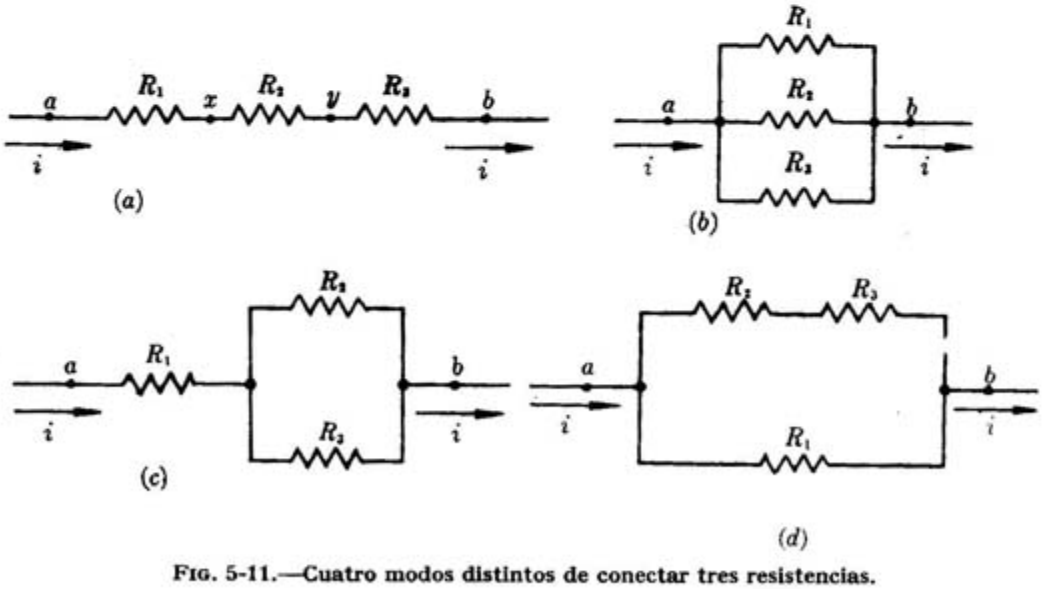


FIG. 5-11.—Cuatro modos distintos de conectar tres resistencias.

La figura 5-11 presenta cuatro modos distintos de conectar tres resistencias R_1, R_2 y R_3. En la figura 5-11 (*a*), las resistencias ofrecen un

recorrido único entre los puntos a y b, y se dice que están conectadas en *serie* entre estos puntos. Cualquier número de elementos de circuito, tales como resistencias, pilas, motores, etc., se dice análogamente que están en serie entre dos puntos si están conectados como en (a), de modo que ofrezcan un recorrido único entre los dos puntos.

Las resistencias de la figura 5-11 (b) se dice que están en *paralelo* entre los puntos a y b. Cada resistencia ofrece un recorrido entre los extremos, y los elementos de circuito (en cualquier número) que se hallen conectados análogamente se dice que están en paralelo.

En la figura 5-11 (c), las resistencias R_2 y R_3 están en paralelo, y su combinación está en serie con la resistencia R_1. En la figura 5-11 (d), R_2 y R_3 están en serie y su combinación está en paralelo con R_1.

Es siempre posible encontrar una sola resistencia que pueda reemplazar a una combinación de resistencias, en cualquier circuito dado, sin modificar la diferencia de potencial entre los bornes de la combinación ni la corriente en el resto del circuito. Esta resistencia se denomina resistencia *equivalente* de la combinación. Si cualquiera de las redes de la figura 5-11 se reemplazase por su resistencia equivalente R, se podría escribir:

$$V_{ab} = Ri \quad \text{o bien} \quad R = V_{ab}/i,$$

siendo V_{ab} la diferencia de potencial entre los bornes de la red e i la intensidad en los puntos a o b. Por consiguiente, el método para calcular una resistencia equivalente es suponer una diferencia de potencial V_{ab} entre los bornes de la red, calcular la corriente correspondiente i (o viceversa) y hallar la razón de una a la otra. Las conexiones en serie y en paralelo son muy frecuentes, de modo que merece la pena deducir fórmulas para estos dos casos especiales.

Si las resistencias están en serie, como en la figura 5-11 (a), la intensidad i que pasa por todas es la misma. Por consiguiente,

$$V_{ax} = iR_1, \quad V_{xy} = iR_2, \quad V_{yb} = iR_3;$$
$$V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = i(R_1 + R_2 + R_3).$$

Ahora bien:

$$V_{ax} = V_a - V_x, \quad V_{xy} = V_x - V_y, \quad V_{yb} = V_y - V_b;$$

por tanto.

$$V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = V_a - V_b = V_{ab};$$
$$V_{ab} = i(R_1 + R_2 + R_3), \quad \text{y}$$
$$\frac{V_{ab}}{i} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Pero V_{ab}/i es, por definición, la resistencia equivalente R. En consecuencia,

$$R = R_1 + R_2 + R_3. \qquad [5\text{-}11]$$

Por tanto, la resistencia equivalente a un número cualquiera de resistencias en serie es igual a la suma de dichas resistencias.

Si las resistencias están en paralelo, como en la figura 5-11 (*b*), la diferencia de potencial entre los bornes de cada una ha de ser la misma e igual a V_{ab}. Si designamos las intensidades en cada resistencia por i_1, i_2 e i_3, respectivamente,

$$i_1 = \frac{V_{ab}}{R_1}, \; i_2 = \frac{V_{ab}}{R_2}, \; i_3 = \frac{V_{ab}}{R_3}$$

Ahora bien: la carga llega al punto *a* por la corriente *i*, y sale por las corrientes i_1, i_2 e i_3. Puesto que la carga no se acumula en *a*, se deduce que

$$i = i_1 + i_2 + i_3,$$

o sea,

$$i = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \frac{V_{ab}}{R_3},$$

o bien,

$$\frac{i}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Y como

$$\frac{i}{V_{ab}} = \frac{1}{R},$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad [5\text{-}12]$$

En consecuencia, para un número cualquiera de resistencias en paralelo, la *inversa* de la resistencia equivalente es igual a la *suma de las inversas* de cada una de ellas.

Para el caso particular de dos resistencias en paralelo,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}, \text{ y } R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Además, puesto que $V_{ab} = i_1 R_1 = i_2 R_2$,

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

y las intensidades de las corrientes transportadas por las dos resistencias en paralelo son inversamente proporcionales a estas resistencias.

Las resistencias equivalentes de las redes (*c*) y (*d*) de la figura 5-11 pueden encontrarse por el mismo método general, pero es más sencillo considerarlas como conjunto de agrupaciones en serie y en paralelo. Así, en (*c*) la combinación en paralelo de R_2 y R_3 se reemplaza primero por su resistencia equivalente, la cual forma después una combinación en serie con la resistencia R_1. En (*d*), la combinación en serie de R_2 y R_3 forma una combinación en paralelo con R_1. Sin embargo, no todas las redes pueden reducirse a combinaciones sencillas en serie y en paralelo, y hay que emplear métodos especiales cuando se utilizan tales redes.

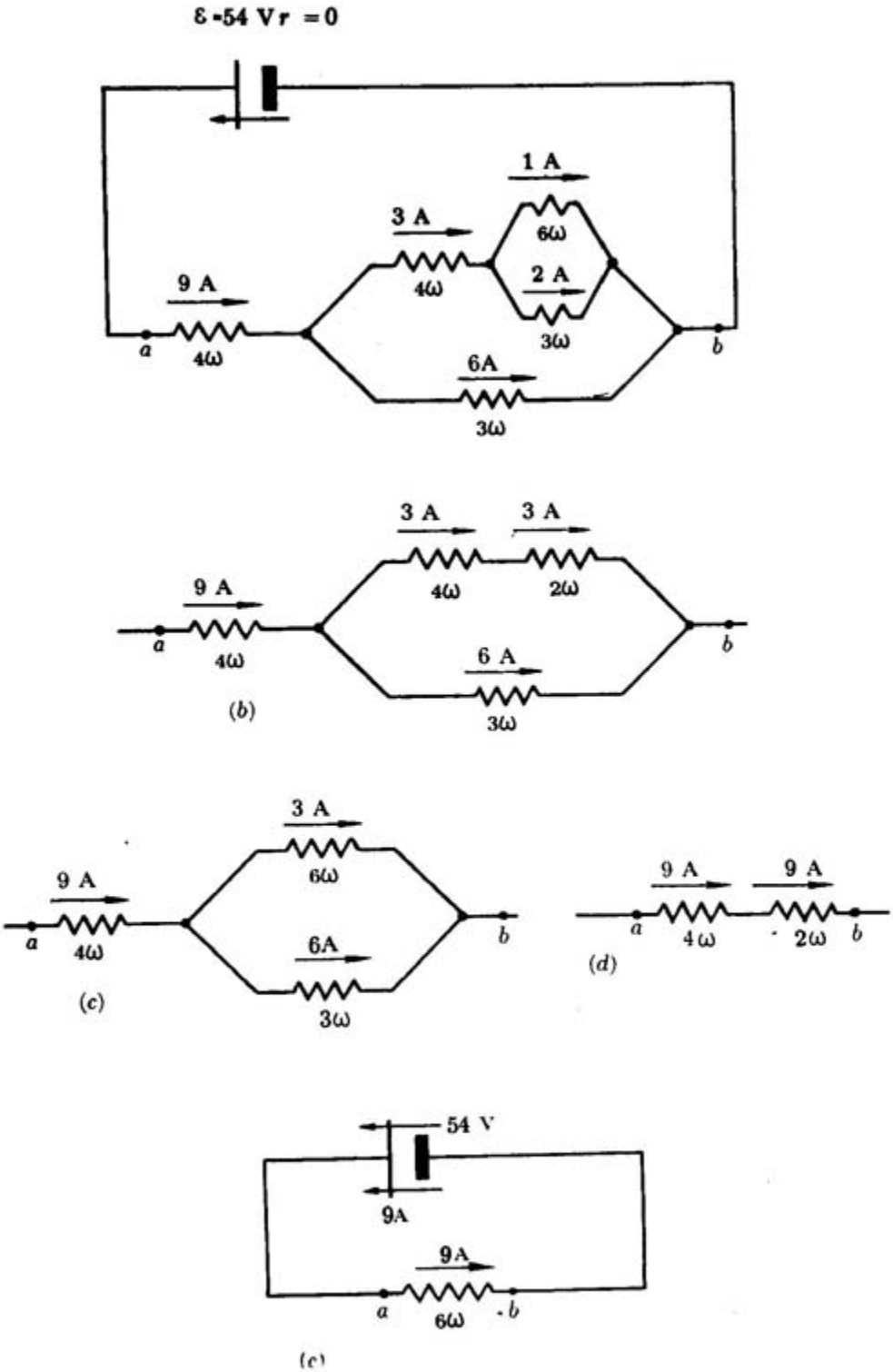


FIG. 5-12.—Pasos sucesivos de la reducción de una red de resistencias a una resistencia equivalente.

EJEMPLO.—Calcúlese la resistencia equivalente de la red de la figura 5-12, y la intensidad de la corriente en cada conductor.

En las partes (*b*) a (*e*) de la figura, se han representado las diversas etapas que permiten la reducción a una sola resistencia equivalente. Para simplificar se ha omitido el generador en todos los esquemas, excepto en el primero y en el último. Las resistencias de 6 Ω y 3 Ω en paralelo de (*a*), equivalen a una sola resistencia de 2 Ω que las reemplaza en (*b*). En (*c*) las resistencias de 4 Ω y 2 Ω en serie, se reemplazan por su resistencia equivalente de 6 Ω. Repitiendo este proceso se llega en (*e*) a una sola resistencia equivalente de 6 Ω.

Recorreremos ahora en sentido inverso la serie de esquemas y calcularemos las intensidades de las corrientes. En el sencillo circuito en serie de (*e*) la intensidad es $i = \frac{\Sigma\varepsilon}{\Sigma R} = \frac{54}{6} = 9$ A. Puesto que la resistencia de 6 Ω en (*e*) reemplaza a las de 4 Ω y 2 Ω en serie, la intensidad en cada una de ellas en (*d*) es también 9 *A*. En (*c*), la intensidad en la resistencia de 4 Ω sigue siendo 9 A, pero las intensidades en las resistencias de 6 Ω y 3 Ω se dividen como indica el esquema. La repetición del procedimiento da la distribución de intensidades en (*a*).

5-8. Redes de resistencias que contienen fem.—La disposición de dos o más generadores de fem no queda definida únicamente diciendo que están conectados en serie o en paralelo; p. ej., dos pilas en serie pueden conectarse como se indica en la figura 5-13 (*a*) o (*b*). La conexión según (*a*) es la asociación *en serie propiamente dicha;* la conexión según (*b*) es *en oposición*. Una agrupación como la de la figura 5-13 (*c*) se denomina *en paralelo, con los polos iguales unidos*, y la de (*d*) *en paralelo, con los polos distintos unidos*.

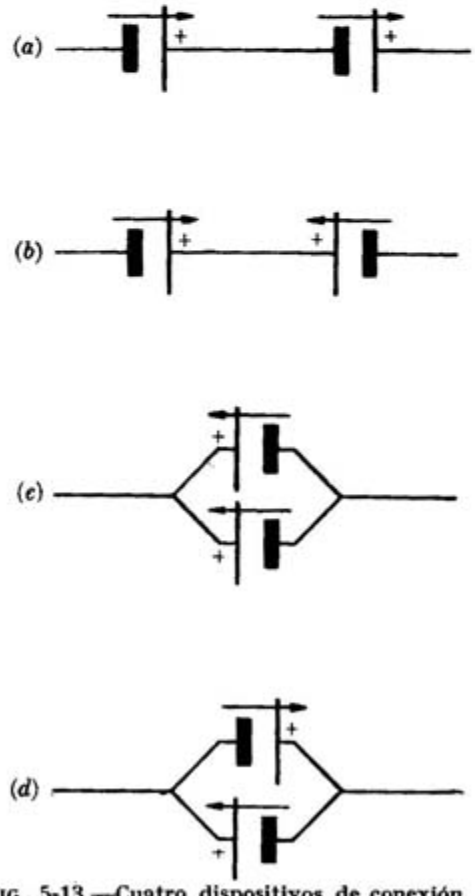


FIG. 5-13.—Cuatro dispositivos de conexión de dos generadores de fem.

Obsérvese que aunque las pilas de la figura 5-13 (*c*) y (*d*) están en paralelo en cuanto concierne al resto del circuito, cada una de estas agrupaciones en sí misma forma un circuito cerrado con las pilas en oposición en el primer caso, y en serie propiamente dicha en el segundo. Por tanto, las expresiones *en serie* y *en paralelo* no se excluyen mutuamente, ni determinan por completo la red. Con frecuencia es necesaria una aclaración más explícita.

La expresión de la intensidad de la corriente en un circuito *en serie*, que contiene cierto número de fem

puede escribirse:

$$i = \frac{\Sigma\varepsilon}{R + \Sigma r}$$

Es evidente que la fem equivalente es la suma algébrica de cada una de las fem, y la resistencia interna equivalente es la suma aritmética de las resistencias internas.

Si cierto número de generadores, cuyas fem son *iguales*, se conectan en paralelo con los polos iguales unidos, según se indica en la figura 5-13 (*c*), la fem equivalente es igual a la de un solo generador y la resistencia interna equivalente se calcula por el método corriente para las resistencias en paralelo. Cuando los generadores tienen fem distintas, o están conectados como indica la figura 5-13 (*d*), el problema se complica y su resolución requiere métodos más generales.

5-9. Reglas de Kirchhoff.—Las redes de resistencias en las cuales las resistencias no forman agrupaciones sencillas, en serie o en paralelo, o en las cuales hay generadores de fem en paralelo, no pueden resolverse, en general, por el método de la resistencia equivalente. Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) enunció por primera vez dos reglas que permiten resolver tales problemas sistemáticamente.

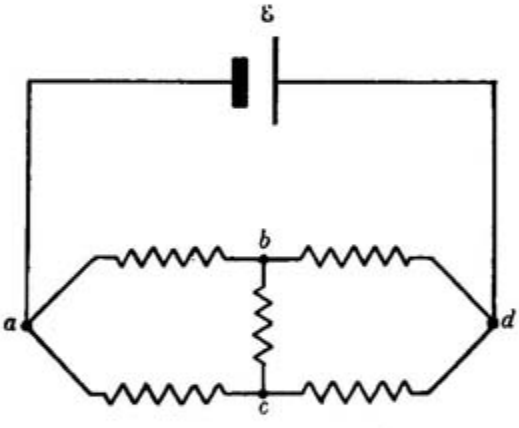


FIG. 5-14.—Circuito para explicar los conceptos de nudos y mallas.

Definiremos, en primer lugar, dos conceptos. Un *nudo* es un punto de la red en el cual se unen tres (o más) conductores. Una *malla* es cualquier recorrido conductor cerrado; p. ej., los puntos *a*, *b*, *c* y *d* de la figura 5-14 son nudos, y las trayectorias *abca*, *abdca*, *abcdεa*, etcétera, son mallas.

Las reglas de Kirchhoff pueden enunciarse como sigue:

REGLA DE LOS NUDOS: *La suma algébrica de las intensidades de las corrientes que se dirigen a cualquier nudo de la red es cero:*

$$\Sigma i = 0.$$

REGLA DE LAS MALLAS: *La suma algébrica de las fem en una malla cualquiera de una red es igual a la suma algébrica de los productos Ri en la misma malla:*

$$\Sigma\varepsilon = \Sigma Ri.$$

La primera regla expresa simplemente que la carga eléctrica no se acumula en ningún nudo de la red. La segunda regla se deduce de la

expresión generalizada de la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito, $V_{ab} = \Sigma Ri - \Sigma\varepsilon$. Esta ecuación fué deducida para un circuito sencillo en serie, en el cual la intensidad de la corriente es la misma en todos los puntos. Las intensidades en las distintas partes de una malla diferirán, en general, una de otra, y el término ΣRi ha de interpretarse como la suma de los productos de cada resistencia por la intensidad de la corriente en *dicha resistencia*. Entonces, si se recorre la malla completamente de modo que el segundo punto coincida con el primero, la diferencia de potencial es nula y $\Sigma\varepsilon = \Sigma Ri$.

El primer paso para aplicar las reglas de Kirchhoff es asignar un valor y un sentido a todas las intensidades desconocidas, y un valor a todas las resistencias incógnitas. Tanto las magnitudes conocidas como las desconocidas se representan en un esquema con los sentidos claramente indicados. La solución se efectúa basándose en los sentidos supuestos. Si una solución de las ecuaciones atribuye valor negativo a una intensidad de corriente o a una fem, su verdadero sentido es opuesto al que le habíamos asignado. En cualquier caso, se obtienen los valores numéricos verdaderos. Por tanto, las reglas proporcionan un método para hallar tanto los *sentidos* como los valores numéricos de las intensidades y fem, y no es necesario conocer de antemano estos sentidos.

Las expresiones Σi, ΣRi y $\Sigma\varepsilon$, son sumas algébricas. Cuando se aplica la regla de los nudos, se considera positiva la intensidad de una corriente si se dirige hacia el nudo, y negativa si se aleja del mismo. (Naturalmente, puede utilizarse el convenio contrario.) Cuando se aplica la regla de las mallas, se elige como positivo un sentido de recorrido de la malla (sea el sentido de las agujas de un reloj o el sentido opuesto). Todas las corrientes y fem que tengan este sentido son positivas, y las que tengan sentido contrario, negativas. Obsérvese que una corriente que tiene sentido positivo en la regla de los nudos, puede tener sentido negativo en el término en el cual aparezca en la regla de las mallas. Obsérvese también que es indiferente el sentido de recorrido de la malla tomado como positivo, pues el resultado al elegir el sentido opuesto hubiera consistido simplemente en obtener la misma ecuación con los signos cambiados. Hay tendencia a suponer que el sentido que debe tomarse como positivo es el sentido de la corriente en la malla; pero, en general, tal elección no es posible, puesto que la corriente en algunos elementos de una malla puede tener el sentido de las agujas de un reloj, y en otros elementos, sentido contrario. Estos y otros detalles serán aclarados con ejemplos.

En redes complicadas, en las cuales intervienen gran número de magnitudes desconocidas, es, a veces, difícil saber cómo puede obtenerse un número suficiente de ecuaciones independientes para poder hallar todas las incógnitas. Se utilizan las siguientes reglas útiles:

1.ª Si hay n nudos en la red, se aplica la regla de los nudos a $n - 1$ de éstos, pudiendo elegirse cualesquiera de ellos. La aplicación de dicha regla al nudo enésimo no proporciona una ecuación independiente.

2.ª Imaginemos la red descompuesta en un número de mallas sencillas, como las piezas de un rompecabezas. Se aplica la regla a cada una de estas mallas.

EJEMPLO.—En la figura 5-15 (*a*) se indican los valores y sentidos de las fem, y los valores de las resistencias. Determínese la intensidad de la corriente en cada rama de la red.

Asignemos un sentido y una letra a cada magnitud desconocida, siendo enteramente arbitrarios los sentidos supuestos. Obsérvese que la intensidad de la corriente en R_3, R_1 y ε_1, es la misma, y, por consiguiente, sólo se requiere una letra. Lo mismo ocurre para la intensidad de la corriente en ε_2, R_2 y R_6.

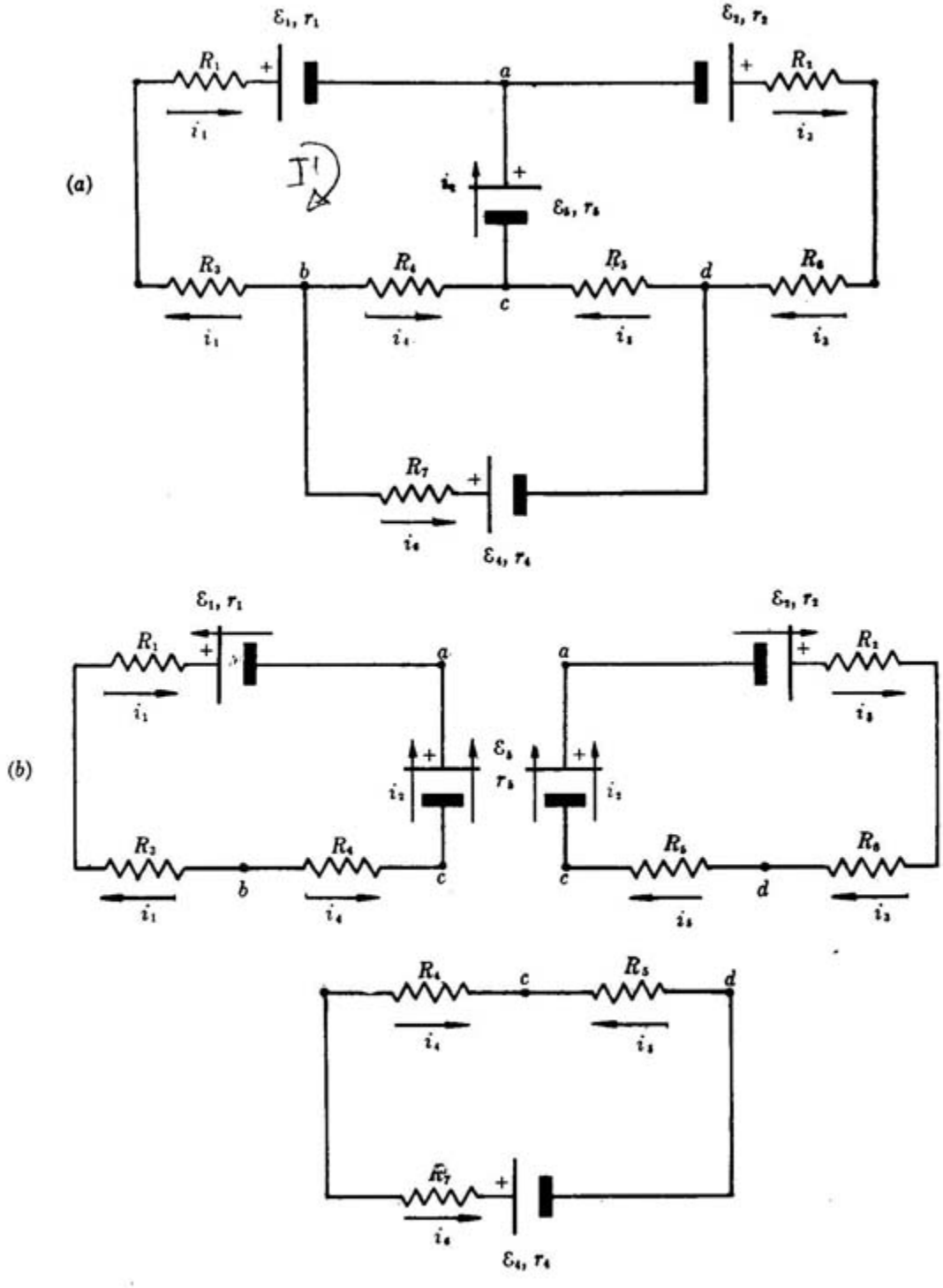


FIG. 5-15.—(*a*) Esquema de un circuito dispuesto para aplicar las leyes de Kirchhoff. (*b*) El mismo circuito cortado en mallas.

Los nudos se designan con las letras a, b, c y d:

En el nudo a, $\quad i_1 + i_2 - i_3 = 0.$
En el nudo b, $\quad - i_1 - i_4 - i_6 = 0.$
En el nudo c, $\quad i_4 + i_5 - i_2 = 0.$

Puesto que hay cuatro nudos, sólo existen tres ecuaciones independientes. Si aplicásemos la regla al cuarto nudo d, se encontraría:

$$i_6 + i_3 - i_5 = 0.$$

Pero si sumamos las tres primeras ecuaciones, el resultado es:

$$- i_6 - i_3 + i_5 = 0,$$

que es la ecuación anterior. Por tanto, no obtenemos ningún resultado nuevo aplicando la regla al nudo d. Sin embargo, hemos obtenido una comprobación de las tres primeras ecuaciones.

En la figura 5-15 (b) se representa el circuito cortado en piezas. Consideremos en cada malla como positivo el sentido de las agujas del reloj. La regla de las mallas proporciona las siguientes ecuaciones:

$$- \varepsilon_1 - \varepsilon_5 = i_1R_1 + i_1r_1 - i_2r_5 - i_4R_4 + i_1R_3$$
$$+ \varepsilon_2 + \varepsilon_5 = i_3r_2 + i_3R_2 + i_3R_6 + i_5R_5 + i_2r_5$$
$$+ \varepsilon_4 = i_4R_4 - i_5R_5 - i_6r_4 - i_6R_7.$$

Se tienen seis ecuaciones independientes para determinar las seis intensidades desconocidas.

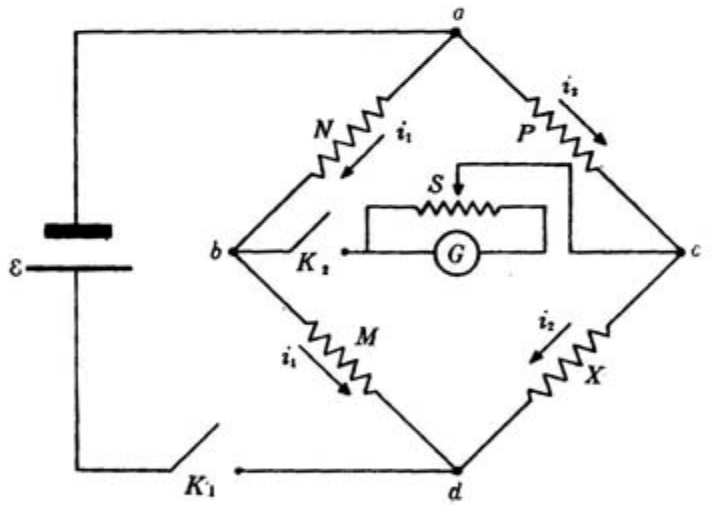


FIG. 5-16.—Esquema del puente de Wheatstone.

5-10. Puente de Wheatstone.—El montaje del puente de Wheatstone se utiliza mucho para efectuar medidas rápidas y precisas de resistencias. Fué inventado en 1843 por el físico inglés Charles Wheatstone. En la figura 5-16, M, N y P son resistencias variables previamente

graduadas, y X representa la resistencia desconocida. Para utilizar el puente se cierran los interruptores K_1 y K_2, y se modifica la resistencia P hasta que el galvanómetro G no experimente desviación. Los puntos b y c están ahora al mismo potencial, o, en otras palabras, la caída de potencial entre a y b es igual a la caída de potencial entre a y c. Asimismo, la caída de potencial entre b y d es igual a la existente entre c y d. Puesto que la intensidad de la corriente en el galvanómetro es nula, la intensidad de la corriente en M es igual a la de N, o sea i_1, y la intensidad de la corriente en P es igual a la de X, o sea i_2. Entonces, dado que $V_{ab} = V_{ac}$, se deduce:

$$i_1 N = i_2 P$$

y puesto que $V_{bd} = V_{cd}$,

$$i_1 M = i_2 X.$$

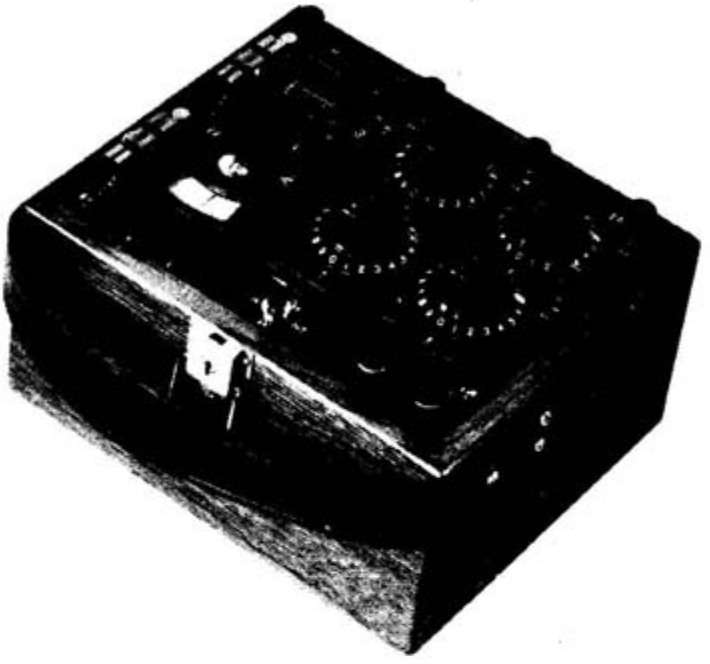
Si se divide la segunda ecuación por la primera, se encuentra:

$$X = \frac{M}{N} P.$$

Por consiguiente, si se conocen M, N y P, puede calcularse X. Para facilitar el cálculo, la razón M/N es en la práctica una cierta potencia entera de 10, tal como 0,01, 1, 100, etc.

Durante los tanteos preliminares, cuando el puente puede estar lejos del equilibrio y V_{bc} puede ser grande, ha de protegerse el galvanómetro con el *shunt* S. Una gran resistencia, comparada con la del galvanómetro, está constantemente conectada entre los bornes del mismo. Cuando el contacto deslizante está en el extremo izquierdo de la resistencia no pasa por el galvanómetro fracción alguna de la corriente que circula entre b y c. En una posición tal como la representada, la parte de resistencia situada a la derecha del contacto deslizante está en serie con el galvanómetro, y su combinación está *shuntada* por la porción de resistencia situada a la izquierda del contacto deslizante. Por consiguiente, sólo una fracción de la corriente pasa a través del galvanómetro. Con el contacto deslizante en el extremo derecho de la resistencia, toda la corriente pasa a través del galvanómetro, excepto la pequeña fracción que pasa a través de la resistencia. Según esto, el galvanómetro está completamente protegido cuando el contacto deslizante está en el extremo izquierdo de la resistencia, y tiene su máxima sensibilidad cuando el contacto está en el extremo derecho.

Si algunas de las resistencias son inductivas (véase Sec. 13-3), los potenciales V_b y V_c pueden tardar tiempos distintos en alcanzar sus valores finales al cerrar K_1, y si el galvanómetro está conectado entre b y c, señalaría una desviación inicial aunque el puente estuviera en equilibrio. Por ello K_1 y K_2 están combinados frecuentemente con una doble llave que cierra primero el circuito de la batería, y a continuación el cir-



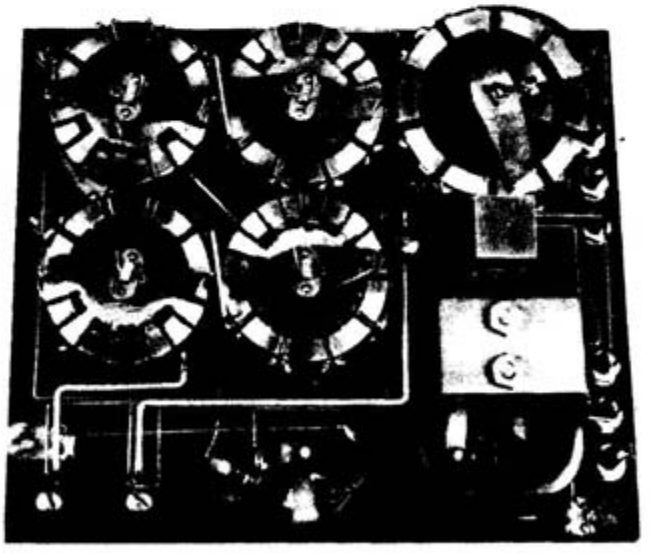


FIG. 5-17.—Puente de Wheatstone portátil. *(Cortesía de Leeds & Northrup.)*

cuito del galvanómetro, después que las corrientes transitorias se hayan extinguido.

Se utilizan puentes portátiles que contienen un galvanómetro y pilas secas. La razón M/N puede hacerse igual a una potencia entera de 10, entre 0,001 y 1000, mediante un solo mando, y el valor de R se obtiene accionando cuatro mandos en forma de diales. La figura 5-17 corresponde a una fotografía de este puente.

5-11. Potencia.—Puesto que nuestro estudio de los circuitos se ha realizado basándose en consideraciones de energía y potencia, poco puede añadirse en esta sección que no sea un resumen de lo expuesto.

La potencia absorbida por cualquier porción de un circuito entre los puntos a y b está dada por

$$P = iV_{ab}. \qquad [5\text{-}13]$$

La potencia se expresa en vatios cuando i se mide en amperios y V_{ab} en voltios. La intensidad se considera positiva si su sentido es de a hacia b en la porción de circuito considerada. Si la potencia absorbida, calculada por esta ecuación, tiene signo negativo, como ocurrirá si la corriente tiene el sentido de b hacia a, o sea, si $V_a < V_b$, la porción de circuito considerada está realmente suministrando potencia al resto del circuito y el valor absoluto de P representa la *potencia suministrada*. La Ec. [5-13] es independiente de la naturaleza del circuito comprendido entre a y b; esto es, el circuito puede componerse de resistencias, motores, baterías, etc., dispuestos de cualquier modo.

Si el circuito entre a y b sólo contiene resistencia, entonces $V_{ab} = Ri$ y

$$P = iV_{ab} = Ri^2 = dH/dt.$$

Esto es, la potencia absorbida es igual a la cantidad de calor desarrollada por unidad de tiempo.

La energía transformada por unidad de tiempo en un generador es igual a εi. Si ε e i son del mismo sentido, se produce energía eléctrica a expensas de alguna otra forma de energía. Si ε e i son de sentidos opuestos (fuerza contraelectromotriz) se produce alguna otra forma de energía a expensas de la energía eléctrica.

EJEMPLO 1.—La figura 5-18 representa una batería y una resistencia en serie. La corriente en el circuito es:

$$i = \frac{12}{5{,}5 + 0{,}5} = 2 \text{ A}.$$

El punto b está a un potencial superior al de a, y

$$V_{ba} = iR = 11 \text{ V},$$

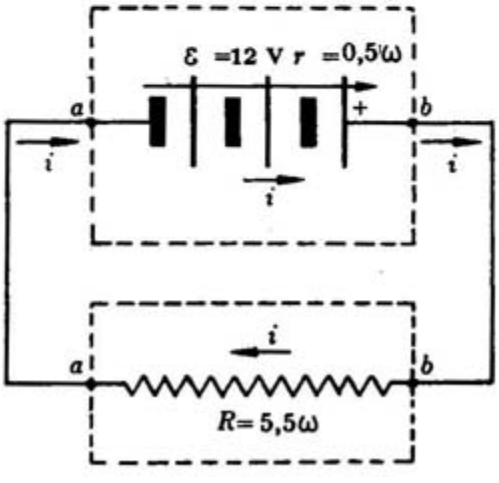


FIG. 5-18.

o bien,

$$V_{ba} = \varepsilon - ir = 12 - (2 \times 0{,}5) = 11 \text{ V}$$

y

$$V_{ab} = - V_{ba} = - 11 \text{ V}.$$

Consideremos, en primer lugar, la parte de circuito encerrada en el rectángulo superior de trazos. El sentido de la corriente en él es de a hacia b. La potencia *absorbida por* esta porción será:

$$P = iV_{ab} = 2 \times (-11) = - 22 \text{ w}.$$

El signo menos significa que se trata en realidad de potencia suministrada por dicha porción de circuito.

En el rectángulo inferior, el sentido de la corriente es de b hacia a. Por tanto,

$$\text{Potencia absorbida} = iV_{ab} = (-2) \times (-11) = + 22 \text{ w},$$

y la potencia es cedida a esta parte del circuito.

Como comprobación, puesto que la energía absorbida por la resistencia se convierte en calor,

$$\frac{dH}{dt} = i^2R = 4 \times 5{,}5 = 22 \text{ w}.$$

La cantidad de energía no eléctrica transformada en energía eléctrica por unidad de tiempo en el generador es:

$$P = \varepsilon i = 12 \times 2 = 24 \text{ w}.$$

La cantidad de calor producida por segundo en el generador resulta:

$$i^2r = 4 \times 0{,}5 = 2 \text{ w}.$$

La potencia suministrada al exterior es, por tanto, $24 - 2 = 22$ w, como se había calculado previamente.

En resumen:

La batería convierte energía no eléctrica en energía eléctrica, en la proporción de 24 julios por segundo, o sea, 24 w.

La cantidad de calor desarrollada por segundo en la batería es de 2 w.

La cantidad de energía suministrada por segundo por la batería al resto del circuito es $24 - 2$, o sea, 22 w.

Esta energía se transforma en calor en la resistencia a razón de 22 julios por segundo, o sea, 22 w.

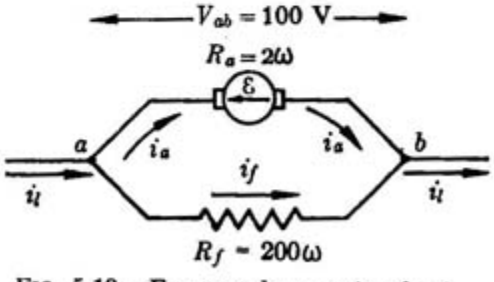


FIG. 5-19.—Esquema de un motor *shunt*.

EJEMPLO 2.—La figura 5-19 es el esquema de un motor *shunt*, siendo la rama superior el circuito del inducido y la inferior los arrollamientos de las bobinas que crean el campo. Cuando el motor está girando, el inducido desarrolla una fuerza contraelectromotriz. (Véase Sec. 5-2.) Si la corriente i de la línea es 5,5 A y V_{ab} es 100 V, calcúlese la potencia mecánica que suministra el motor y su rendimiento.

Los arrollamientos de las bobinas que crean el campo son una resistencia pura. Por tanto,

$$i_f = \frac{100}{200} = 0{,}5 \text{ A.}$$

Según la regla de los nudos,

$$i = i_a + i_f$$
$$5{,}5 = i_a + 0{,}5$$
$$i_a = 5{,}0 \text{ A.}$$

Puesto que ε es una fuerza contraelectromotriz,

$$V_{ab} = \varepsilon + i_a r = i_f \times 200$$
$$100 = \varepsilon + 5 \times 2$$
$$\varepsilon = 90 \text{ V.}$$

ε puede deducirse también de la regla de las mallas. Supongamos que su sentido es de a hacia b y consideremos como sentido positivo el de las agujas de un reloj

$$\Sigma\varepsilon = \Sigma iR$$
$$\varepsilon = 5 \times 2 - 0{,}5 \times 200$$
$$\varepsilon = -90 \text{ V.}$$

Por tanto, el sentido verdadero es de b a a. Se tiene:
Potencia absorbida por el motor completo:

$$P = iV_{ab} = 5{,}5 \times 100 = 550 \text{ w}$$

Cantidad de calor disipada por segundo en las bobinas de campo:

$$i_f^2 R_f = 0{,}25 \times 200 = 50 \text{ w}$$

Cantidad de calor disipada por segundo en el inducido:

$$i_a^2 R_a = 5^2 \times 2 = 50 \text{ w.}$$

Energía eléctrica transformada por segundo en energía mecánica:

$$P = \varepsilon i = 90 \times 5 = 450 \text{ w.}$$

Como comprobación,

$$50 + 50 + 450 = 550 \text{ w.}$$

Si no existe rozamiento mecánico en los cojinetes, ni pérdidas por ventilación, el motor suministra una potencia, en forma mecánica, de 450 w. Si hay rozamiento, una parte de los 450 w se pierde en forma de calor. Despreciando el rozamiento, el rendimiento del motor es:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Potencia suministrada}}{\text{Potencia absorbida}} = \frac{450}{550} = 82\ \%.$$

5-12. Medidas de la energía y de la potencia.—La potencia absorbida o suministrada por el dispositivo X en la figura 5-20 (a) puede medirse por un amperímetro y un voltímetro conectados como se indica, efec-

tuando correcciones, si es necesario, por el hecho de que el amperímetro indica la suma de la intensidad de la corriente en X y la corriente en el voltímetro. Si despreciamos estas correcciones, la potencia en vatios absorbida por X está dada por el producto de la lectura del amperímetro en amperios por la lectura del voltímetro en voltios.

El *vatímetro* es un instrumento que realiza él solo las funciones combinadas del amperímetro y del voltímetro de la figura 5-20(*a*) e indica directamente la potencia. Está basado en el principio del electrodinamómetro que se describe en la sección 10-5 y se compone de una bobina con una aguja indicadora unida a ella, que gira alrededor de un eje, de tal modo que puede oscilar en el campo magnético de una segunda bobina,

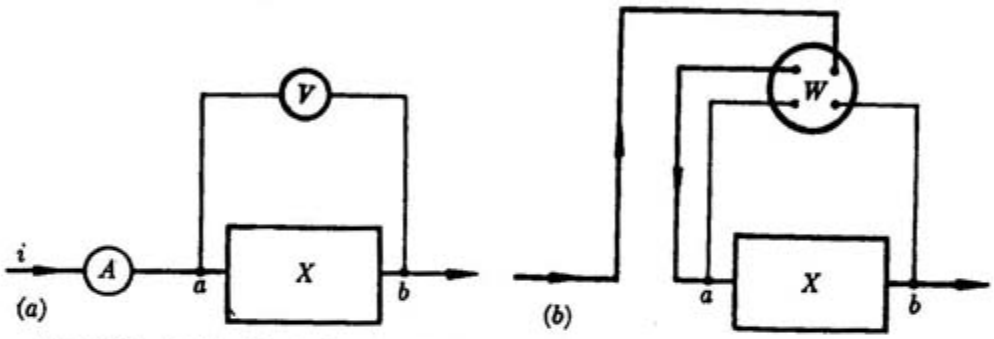


FIG. 5-20.—(*a*) Medida de la potencia por el método del amperímetro y el voltímetro. (*b*) Vatímetro.

y está sometida a un resorte cuyo momento recuperador es proporcional al ángulo girado. El par que tiende a hacer girar la bobina es proporcional al mismo tiempo a la intensidad de la corriente que la recorre y al campo magnético creado sobre la bobina fija, siendo a su vez este campo magnético proporcional a la intensidad de la corriente en la bobina fija. Por consiguiente, si la bobina fija se conecta (con un *shunt* adecuado) como el amperímetro de la figura 5-20(*a*), la intensidad que pasa por ella es proporcional a la intensidad total, y su campo magnético es proporcional a esta intensidad. Si la bobina móvil (con resistencias adecuadas en serie) se conecta como el voltímetro de la figura 5-20(*a*), la intensidad de la corriente que la recorre es proporcional a la diferencia de potencial entre los bornes de X. El momento que tiende a hacer girar la aguja es, por consiguiente, proporcional al producto de la intensidad de la corriente por la diferencia de potencial, o sea, a la potencia absorbida por X. Bajo la influencia de este momento, la bobina gira hasta una posición en la cual el momento recuperador iguala al momento desviador, y como el primero es proporcional al ángulo girado, este último será proporcional a la potencia.

Un vatímetro está provisto de cuatro bornes, dos correspondientes al amperímetro y dos al voltímetro. Las conexiones se realizan como indica la figura 5-20(*b*).

Los *contadores de vatios-hora* indican la *energía* total absorbida o suministrada por un dispositivo, en lugar de la energía *por unidad de tiempo* o potencia. En esencia, consisten en un pequeño motor cuya velocidad angular es proporcional a la potencia absorbida. Esto es,

$$\omega = kp,$$

siendo ω la velocidad angular instantánea, p la potencia instantánea, y k una constante de proporcionalidad. El desplazamiento angular θ durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 será, por tanto,

$$\theta = \int_{t_1}^{t_2} \omega \, dt = k \int_{t_1}^{t_2} p \, dt.$$

Pero $\int_{t_1}^{t_2} p \, dt$ es la energía absorbida durante dicho intervalo de tiempo, de modo que el desplazamiento angular es proporcional a esta energía.

El dispositivo de esferas del contador que se utiliza en la mayor parte de las viviendas, es simplemente un cuenta revoluciones para registrar el desplazamiento angular total del contador. En la práctica, las esferas están agrupadas de modo que incluyen la constante de proporcionalidad e indican directamente la energía en kilovatios-hora.

PROBLEMAS

5-1. Una resistencia de 5 Ω está conectada a los bornes de una batería de fem 12 V, y cuya resistencia interna es 1 Ω, como indica la figura 5-21. El punto *c* está unido a tierra. *a*) ¿Cuál es el sentido (convencional) de la corriente en la batería? ¿Y en el circuito exterior? *b*) ¿Cuántos culombios por segundo saldrán del borne positivo de la batería? ¿Cuántos culombios por segundo entrarán en el borne negativo? ¿Cuántos culombios por segundo entrarán en la resistencia por el punto *b*? ¿Cuántos culombios por segundo saldrán de la resistencia por el punto *c*? *c*) Calcúlense los potenciales en los puntos *a*, *b*, *c* y *d*. *d*) Hállese la diferencia de potencial V_{ad} entre los bornes de la batería. *e*) Calcúlese la diferencia de potencial V_{bc} entre los bornes de la resistencia. *f*) ¿Cuál es la intensidad de la corriente en el conductor que une el punto *c* a tierra?

5-2. En el circuito de la figura 5-21, calcúlese: *a*) la cantidad de energía interna transformada por segundo en energía eléctrica dentro de la batería; *b*) la cantidad de calor desarrollada por segundo en la batería; *c*) la cantidad de calor desarrollada por segundo en la resistencia exterior.

5-3. La figura 5-22 representa una batería de fem 24 V y resistencia interna 1 Ω, entre cuyos bornes hay un reóstato

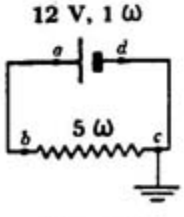


FIG. 5-21.

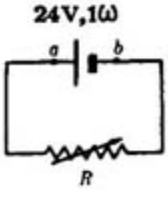


FIG. 5-22.

de resistencia R. *a*) ¿Cuál deberá ser la resistencia R para obtener las siguientes intensidades de corriente: cero, 4 A, 8 A, 12 A, 16 A, 20 A y 24 A? *b*) ¿Cuál es la máxima intensidad de corriente que la batería puede proporcionar en el circuito de la figura 5-22? *c*) Hállese la diferencia de potencial, V_{ab}, entre los bornes de la batería para cada una de las intensidades de corriente citadas en *a*). Represéntense los resultados en una gráfica tomando como abscisas las intensidades y como ordenadas los voltajes en los bornes. *d*) Se fija la resistencia R en 3 Ω y se intercala, en serie, en el circuito una segunda batería de fem ε y resistencia interna despreciable. Calcúlese el valor de ε si la corriente es de 28 A y del mismo sentido que en *a*). Dibújese un esquema indicando claramente la polaridad de la batería. *e*) Lo mismo que en *d*), excepto que la corriente es de 4 A, y de sentido opuesto que en *a*). *f*) Calcúlese la diferencia de potencial entre los bornes de la primera batería en las partes *d*) y *e*) e inclúyanse los valores en la gráfica de la parte *c*). Contéstese a las siguientes preguntas: ¿Es posible que la intensidad de la corriente que circula en una batería exceda a la intensidad de la corriente en corto circuito? ¿Está necesariamente el borne + de una batería a un potencial superior al borne —?

5-4. En la figura 5-23, $\varepsilon_1 = 24$ V, $r_1 = 2\,\Omega$, $\varepsilon_2 = 6$ V, $r_2 = 1\,\Omega$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$. Calcúlese: *a*) la intensidad de la corriente en el circuito;

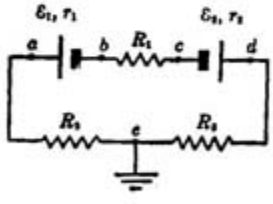


FIG. 5-23.

b) los potenciales en los puntos *a*, *b*, *c* y *d*; *c*) las diferencias de potencial V_{ab} y V_{dc} entre los bornes de las baterías.

5-5. El mismo problema anterior, excepto que la batería de 6 V está invertida.

5-6. La figura 5-24 representa una central G productora de corriente continua, que suministra energía a una factoría distante, mediante una línea de transporte. La diferencia de potencial V_{ba} entre los bornes del generador es

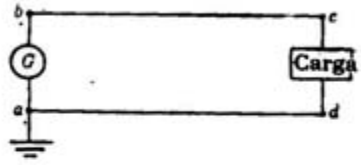


FIG. 5-24.

230 V, y la intensidad de la corriente en la línea es 50 A. Las resistencias de los hilos *bc* y *ad* son de 0,1 Ω cada una. El punto *a* está unido a tierra. *a*) ¿Cuál es el potencial del punto *b*? *b*) ¿Cuál es la caída iR en cada hilo? *c*) ¿Cuál es el potencial del punto *c*? *d*) ¿Cuál es el potencial del punto *d*? *e*) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{cd} en los bornes del receptor? *f*) Represéntese en un esquema cómo han de conectarse los voltímetros para medir las diferencias de potencial citadas en *b*) y *e*).

5-7. La figura 5-25 representa un circuito que contiene un triodo. El sentido de la corriente de electrones dentro del triodo es del cátodo K a la placa o ánodo A, de modo que el sentido convencional es de A a K dentro del triodo. La corriente de la rejilla G es despreciable; y la corriente suministrada por la batería de fem 300 V y resistencia interior despreciable,

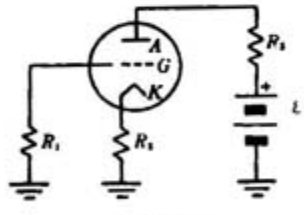


FIG. 5-25.

es 10 mA. La resistencia de R_3 es 10 000 Ω. *a*) ¿Cuánto excede el potencial de placa V_p del potencial de tierra? *b*) ¿Cuánto excede el potencial de la rejilla del poten-

cial de tierra? *c*) Para un funcionamiento adecuado del triodo, el potencial de rejilla debe ser inferior en 15 V al potencial del cátodo. ¿Cuál es el valor correcto de la llamada *resistencia de polarización*, R_2? *d*) ¿Cuál es la diferencia de potencial, V_{pk} entre ánodo y cátodo?

5-8. La resistencia interna de una pila seca aumenta gradualmente con el tiempo, aunque la pila no se utilice. Sin embargo, la fem mantiene perfectamente un valor constante de unos 1,5 V. En el momento de adquirirla y a fines de comprobación de su *edad*, se conecta directamente un amperímetro a los bornes de la pila y se lee la intensidad de la corriente. La resistencia del amperímetro es tan pequeña que la pila está prácticamente en corto circuito. *a*) La corriente en corto circuito de una pila nueva No 6 es de unos 30 A. ¿Cuál es aproximadamente su resistencia interna? *b*) ¿Cuál es la resistencia interna si la corriente en corto circuito es sólo de 10 A? *c*) La corriente en corto circuito de una batería de acumuladores de 6 V, puede llegar a 1 000 A, ¿Cuál es su resistencia interna?

5-9. Cuando se abre el interruptor *S* de la figura 5-26 el voltímetro *V* conectado a los bornes de la pila seca, indica

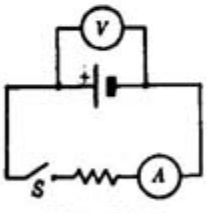


FIG. 5-26.

1,52 V. Cuando se cierra, la indicación del voltímetro desciende a 1,37 V y el amperímetro indica 1,5 A. Calcúlense la fem y la resistencia interna de la pila, sin tener en cuenta las correcciones del amperímetro y voltímetro.

5-10. Una batería de fem 24 V y resistencia interna despreciable está conectada en serie con una resistencia fija de 6 Ω y una resistencia variable *R*, como indica la figura 5-27. Considérese la batería y la resistencia de 6 Ω como fuente de energía, y la resistencia *R* como circuito exterior. Demos a R los valores: 0, 2 Ω, 6 Ω, 18 Ω, 42 Ω, ∞. Para cada valor de *R* calcúlese: *a*) la potencia, εi, suministrada por la batería; *b*) la potencia disipada en forma de calor en la resistencia de 6 Ω; *c*) la potencia suministrada al circuito exterior. Dispónganse los resulta-

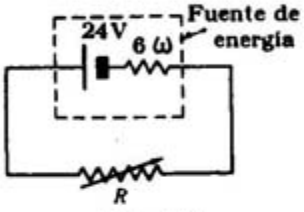


FIG. 5-27.

dos en una tabla. *d*) Constrúyanse gráficas con los resultados de las partes *a*), *b*) y *c*), poniendo la resistencia *R* en abscisas y la potencia en ordenadas. Es suficiente un intervalo de *R* de 0 a 18 Ω. *e*) Se conecta un generador de fem ε y resistencia interior *r* a un circuito exterior de resistencia regulable *R*. Establézcase la expresión general de la potencia suministrada a *R* en función de ε, *r* y *R*. Derívese esta expresión respecto a *R* para determinar la resistencia exterior que hará máxima la potencia suministrada. ¿Coincide este resultado con el de la gráfica de la parte *d*)?

Este problema es un ejemplo del principio más general de *equilibrado de impedancias*, el cual establece que la potencia suministrada por una parte de un circuito a otra es máxima, cuando sus impedancias (en este caso, sus resistencias) son iguales.

5-11. *a*) Demuéstrese que la potencia suministrada a un circuito exterior por una batería o un generador de fem ε y resistencia interna *r*, es máxima cuando la intensidad es la mitad de la correspondiente al corto circuito. *b*) Compárese, cuando la intensidad tiene este valor, la potencia suministrada con la potencia disipada en forma calorífica dentro del generador.

5-12. Una batería de acumuladores cuya fem es 12 V y cuya resistencia interna es 0,1 Ω (realmente las resistencias internas de las baterías de acumuladores comerciales son sólo de unas milésimas de ohmio) ha de cargarse de un manantial de corriente continua a 112 V. *a*) ¿Cuál de los bornes, + ó − de la batería, ha de conectarse al hilo + de la línea? *b*) ¿Cuál sería la intensidad de la corriente de carga si la batería se conectase directamente a la línea? *c*) Calcúlese la resistencia en serie que se requiere para limitar la corriente de carga a 10 A. Con esta resistencia en el circuito, hállese: *d*) la diferencia de potencial entre los bornes de la batería; *e*) la potencia absorbida de la línea; *f*) la potencia disipada en forma de calor en la resistencia en serie; *g*) la potencia *útil* absorbida por la batería.

5-13. En el circuito en serie de la figura 5-28, calcúlense V_{ea}, V_{fc} y V_{gd}. Establézcase en cada caso cuál es el potencial más elevado.

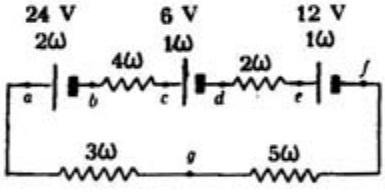


FIG. 5-28.

5-14. Con referencia a la figura 5-11, sea 12 Ω el valor de cada resistencia. *a*) Calcúlese la resistencia equivalente de cada red. *b*) Hállese la cantidad de calor desarrollada por segundo en cada red, en vatios, cuando los bornes de la red están conectados a una línea de 120 V.

5-15. Demuéstrese que cuando dos resistencias están conectadas en paralelo, la resistencia equivalente de la combinación es siempre menor que cualquiera de ellas.

5-16. *a*) La potencia máxima que cierta resistencia de 10 000 Ω puede disipar, sin elevar demasiado su temperatura, es 2 w. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que puede establecerse en los bornes de la resistencia? *b*) Una resistencia de 20 000 Ω ha de conectarse a una diferencia de potencial de 300 V. ¿Qué potencia es necesario que disipe la resistencia para no elevar demasiado la temperatura? *c*) Se desea conectar una resistencia de 1 000 Ω a una diferencia de potencial de 200 V, y se dispone de cierto número de resistencias de 10 w y 1 000 Ω. ¿Cómo deben conectarse?

5-17. *a*) Calcúlese la resistencia equivalente al circuito exterior de la figura 5-29. *b*) Obténganse las lecturas del amperímetro *A* y del voltímetro *V*.

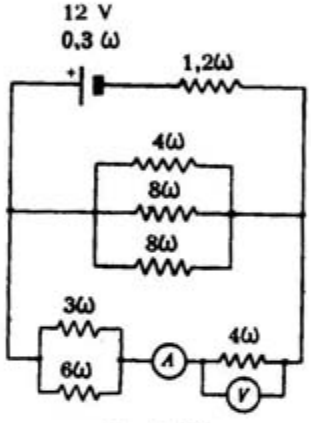


FIG. 5-29.

5-18. La resistencia de determinado galvanómetro es 30 Ω. *a*) ¿Qué resistencia en *shunt* (es decir, en paralelo) ha de ponerse al galvanómetro para que se reduzca la resistencia equivalente a 10 Ω? *b*) Si la diferencia de potencial entre los bornes del galvanómetro es 100 mV, hállese la intensidad de la corriente en el galvanómetro y en el *shunt*.

5-19. Calcúlese la resistencia de 300 m de cierto conductor formado por un núcleo central de hierro de 5 mm de radio, rodeado por una funda de cobre cuyo radio exterior tiene 7,5 mm.

5-20. Calcúlese en la figura 5-30: *a*) la intensidad de la corriente en la batería; *b*) la intensidad de la corriente en cada resistencia; *c*) la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*.

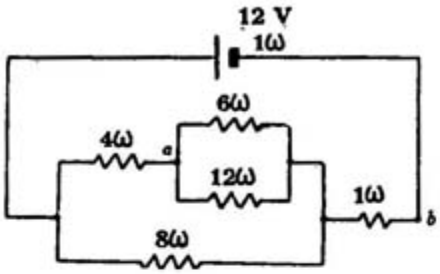


FIG. 5-30.

5-21. *a*) Calcúlese la resistencia de la red de la figura 5-31, entre los bornes *a* y *b*. *b*) ¿Cuál será la diferencia de potencial entre *a* y *b* cuando circule una corriente de 1 A en la resistencia de 4 Ω?

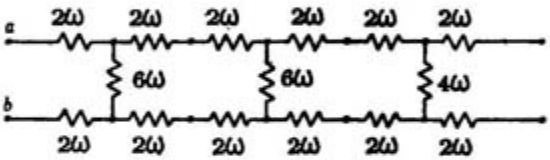


FIG. 5-31.

5-22. Dos resistencias, *A* y *B*, están en paralelo entre sí y asociadas en serie con una resistencia de 200 Ω y una pila seca cuya fem es 1,5 V, y cuya resistencia interna es despreciable. La resistencia de *A* es 100 Ω. Cuando *B* está desconectada de *A*, ha de ponerse en el circuito una resistencia adicional de 50 Ω para que la corriente que pasa por *A* no varíe. Calcúlese la resistencia de *B*.

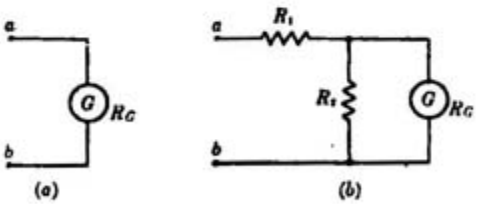


FIG. 5-32.

5-23. La corriente que atraviesa el galvanómetro en la parte (*b*) de la figura 5-32 es $1/n$ de la de parte (*a*) y la resistencia equivalente de la red en la parte (*b*) es igual a la resistencia R_G del galvanómetro. Se mantiene entre los puntos *a* y *b* una diferencia de potencial constante. Hállense las resistencias en serie y derivación, R_1 y R_2, en función de *n* y R_G. Como comprobación numérica, hágase $R_G = 90\,\Omega$, $n = 10$, $V_{ab} = 90$ mV. Calcúlense R_1 y R_2 y la intensidad de la corriente en el galvanómetro para ambos circuitos.

5-24. La pila *A* de la figura 5-33 tiene una fem de 12 V y una resistencia interna de 2 Ω. La pila *B* tiene una fem de 6 V y una resistencia interna de 1 Ω. *a*) Calcúlese la diferencia de potencial V_{ab} cuando está abierto el interruptor *S*. *b*) Cuando el interruptor *S* está cerrado, la intensidad de la corriente en *R* es 3 A y su sentido es de *a* a *b*. Utilícense las reglas de Kirchhoff para obtener las intensidades de corriente en las otras ramas del circuito. *c*) Calcúlese la resistencia *R*. *d*) Hállense la fem y la resistencia interior de una sola pila que equivalga a la asociación de *A* y *B* en paralelo.

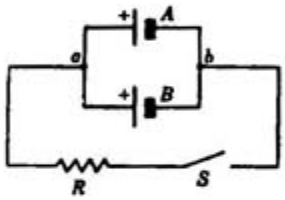


FIG. 5-33.

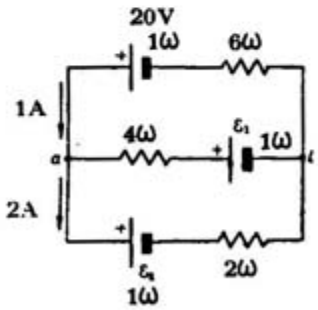


FIG. 5-34.

5-25. Calcúlense las fem ε_1 y ε_2 en el circuito de la figura 5-34, y la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*.

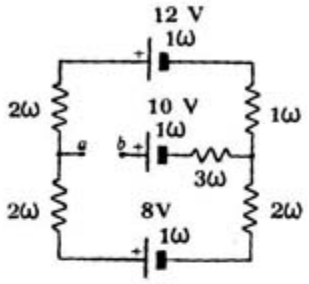


FIG. 5-35.

5-26. *a*) Calcúlese la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* de la figura 5-35. *b*) Si *a* y *b* están conectados, hállese la intensidad de la corriente en la pila de 12 V.

5-27. *a*) Calcúlese el valor y sentido de la intensidad de la corriente en el

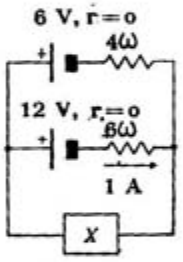


FIG. 5-36.

elemento de circuito X de la figura 5-36. *b*) ¿Qué puede deducirse respecto a la naturaleza de este elemento?

5-28. Tres pilas distintas de fem ε_1, ε_2 y ε_3, y resistencias internas r_1, r_2 y r_3, tienen sus bornes positivos conectados a un punto común *a* y sus bornes negativos a otro punto común *b*. Hállese la expresión de V_{ab}.

5-29. *a*) Calcúlese la resistencia equivalente a la red de la figura 5-37, entre los puntos *a* y *b*, en función de R_1, R_2 y R. *b*) ¿Cuál es la resistencia equivalente

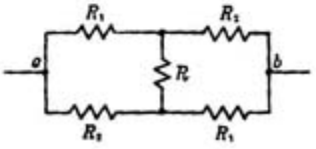


FIG. 5-37.

si $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ y $R = 1\,\Omega$? Compárese con la resistencia equivalente cuando se suprime R.

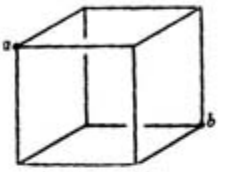


FIG. 5-38.

5-30. Doce barras metálicas, cada una de las cuales tiene una resistencia R, están conectadas formando las aristas de un cubo, como indica la figura 5-38. Calcúlese la resistencia equivalente de la red, entre un par de vértices opuestos tales como *a* y *b*.

5-31. La figura 5-39 es el esquema de un motor *shunt* de corriente continua que funciona en una canalización de 120 V. La resistencia de las bobinas de excitación, R_f, es 240 Ω. La resistencia del

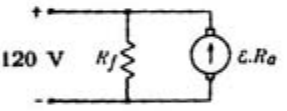


FIG. 5-39.

inducido, R_a, es 3 Ω. Cuando el motor gira, el inducido origina una fuerza contraelectromotriz ε en el sentido de la flecha. El motor toma de la línea una corriente de 4,5 A. Calcúlese: *a*) la intensidad de la corriente de excitación; *b*) la intensidad de la corriente en el inducido; *c*) la fuerza contraelectromotriz ε; *d*) la cantidad de calor desarrollada por segundo en las bobinas de excitación; *e*) la cantidad de calor desarrollada por segundo en el inducido; *f*) la potencia absorbida por el motor; *g*) el rendimiento del motor, si el rozamiento y las pérdidas por ventilación alcanzan 50 w.

5-32. Se hace referencia al motor *shunt* del problema 5-31. Supóngase que los datos se refieren al motor cuando está girando a 1800 rpm, y que la fuerza contraelectromotriz es proporcional a la

velocidad angular. Supóngase que las pérdidas por rozamiento y ventilación son constantes. *a*) Como consecuencia de un aumento de la carga sobre el motor, su velocidad angular disminuye hasta 1 700 rpm. ¿Qué potencia absorbe ahora de la línea? *b*) ¿Qué potencia suministra? *c*) ¿A qué velocidad angular, en rpm, girará el motor cuando se haya suprimido completamente la carga exterior?

5-33. Se hace referencia al problema 5-6. *a*) Calcúlese la potencia suministrada por el generador, la potencia perdida en la línea, y la potencia suministrada a la factoría. *b*) Supóngase que el voltaje en los bornes del generador se duplica y que la potencia suministrada a la factoría se mantiene constante. Determínese la potencia suministrada por el generador y la pérdida de potencia en la línea.

5-34. Indíquese con claridad, sirviéndose de un esquema, cómo deben conectarse los cuatro bornes de un vatímetro para medir la potencia absorbida por el motor de la figura 5-39.

5-35. La tabla de la parte inferior de la página da los valores del voltaje V en los bornes e intensidad i de la corriente de tres lámparas de incandescencia de 110 V.

a) Constrúyase una gráfica voltaje-intensidad para cada lámpara.

b) Hállese la resistencia de cada lámpara para voltajes de 10 V y 110 V. ¿Qué lámpara tiene la máxima y cuál la mínima resistencia a 110 V?

c) ¿Qué lámparas tienen coeficiente térmico de resistencia positivo y cuáles negativo?

d) Calcúlese la potencia real absorbida por cada lámpara a un voltaje de 110 V.

e) Si las lámparas de 110 w y 40 w se conectasen en serie a una línea de 110 V, ¿cuál sería la corriente en cada una y el voltaje en sus bornes? Exprésese la corriente que atraviesa cada lámpara en tanto por ciento de su corriente nominal. (La corriente nominal es la intensidad que circula por cada lámpara cuando se conecta a su voltaje nominal de 110 V.) ¿Qué lámpara brillaría más?

	100 w (wolframio)	40 w (wolframio)	48 w (carbón)
V (V)	i (A)	i (A)	i (A)
5	0,20	0,10	0,009
10	0,25	0,14	0,021
20	0,35	0,17	0,060
40	0,50	0,22	0,15
60	0,62	0,27	0,23
80	0,73	0,31	0,31
100	0,83	0,35	0,39
120	0,91	0,37	0,47

CAPÍTULO VI

FUERZAS ELECTROMOTRICES QUÍMICAS Y TÉRMICAS

6-1. Energía química y fuerza electromotriz.—Cuando una pila eléctrica o una batería de acumuladores forma parte de un circuito cerrado, se produce una corriente. Puede hacerse que esta corriente realice trabajo mecánico o desarrolle calor, procediendo ambas energías de la energía química presente inicialmente en el interior de las baterías. Utilizando el modo de expresión del capítulo V, decimos que en el circuito eléctrico se produce una fem de origen químico por transformación de energía química en eléctrica.

La energía química es consecuencia de las fuerzas existentes entre los átomos que forman las moléculas. A causa de estas fuerzas, las moléculas producidas en una reacción química pueden tener una energía potencial menor que los productos iniciales de la reacción. En una reacción de esta naturaleza, una parte de la energía se libera en forma calorífica y otra como trabajo útil. Inversamente, esta reacción sólo puede transcurrir en sentido opuesto si se suministra energía procedente de algún manantial exterior. En las reacciones que tienen lugar en las pilas eléctricas se han de considerar no sólo las fuerzas entre los distintos átomos sino también entre los átomos y sus electrones orbitales. Estas reacciones se denominan de oxidación y reducción. En una reacción de oxidación un átomo o un grupo de átomos pierde uno o más electrones. Las reacciones en que hay ganancia de electrones son reacciones de reducción.

6-2. Potenciales de electrodo.—Un ejemplo del proceso de pérdida de un electrón, u oxidación, tiene lugar cuando se introduce una lámina de cobre en agua pura; inmediatamente pasan a la disolución iones de cobre. La ecuación química que representa el proceso puede escribirse como sigue:

$$Cu \rightarrow Cu^{++} + 2e^{-}.$$

Desde un punto de vista muy esquemático se puede imaginar que las fuerzas atractivas de las moléculas de agua exceden a las fuerzas de cohesión que mantienen los iones de cobre en su red cristalina. En ausencia de otros fenómenos, tendría lugar un flujo continuo de iones a la disolución; pero puesto que cada ion positivo que entra en la misma deja libres en la lámina dos electrones, ésta adquiere inmediatamente un potencial negativo respecto a la disolución. En consecuencia, los iones de la disolución son atraídos por la lámina de cobre, y cierta fracción de ellos es capturada por la lámina y neutralizada. Cuanto mayor es la carga negativa de la lámina, tanto mayor es la tendencia de los iones

positivos a volver a ella, y tanto menor es el número de iones que escapan a la neutralización. En estado de equilibrio, las cantidades de iones que abandonan la lámina y vuelven a ella por unidad de tiempo son iguales y el potencial de la lámina es suficiente para producir una reacción inversa, igual a la reacción primitiva. La presencia de más iones cobre en la disolución aumenta la velocidad de la reacción inversa y el potencial para el nuevo equilibrio se reduce a un valor menor. Es evidente, por tanto, que el potencial de equilibrio del cobre respecto a la disolución depende de la concentración de iones cobre a su alrededor. Puesto que la velocidad de ambas reacciones es influída en distinto grado por la temperatura del sistema, el potencial de electrodo varía con la temperatura. El proceso de pérdida de electrones se verifica más fácilmente para los elementos que contienen pocos electrones en su capa externa de valencia, como ocurre particularmente para los metales y el hidrógeno.

La ganancia de electrones tiene lugar para un grupo grande de elementos cuya cubierta electrónica externa posee uno o más lugares vacíos dentro de los cuales pueden acomodarse electrones libres. Cuando se cubren estos huecos, la capa se asemeja a la del gas noble más próximo en la tabla periódica y se origina una configuración estable. Los átomos tienen ahora un exceso de electrones negativos y son así iones negativos. Constituye un ejemplo típico el átomo de cloro que puede captar un solo electrón negativo. La presencia del electrón proporciona al cloro una sola carga negativa y el ion cloro resultante tiene una capa exterior completa que es análoga al de su gas noble inmediato, el argón. El proceso no está restringido a átomos aislados, sino que puede tener lugar para grupos de átomos. En el ion sulfato un solo átomo de azufre está unido químicamente a cuatro átomos de oxígeno, y el grupo tiene dos cargas electrónicas negativas.

En la sección 6-4 se estudiará la preparación de un electrodo gaseoso típico (el de hidrógeno). En el caso de un electrodo de cloro gaseoso, se forman iones negativos por la reacción

$$Cl + e^- \rightarrow Cl^-,$$

en la cual se reduce el cloro. Como resultado de la reducción, el electrodo se carga positivamente y su potencial es positivo respecto a la disolución. Tanto para la reducción como para la oxidación se observa el mismo efecto de la temperatura y concentración iónica sobre el potencial de electrodo. Si el electrodo es gaseoso adquiere importancia otro factor más, que es la presión del gas.

6-3. Pilas eléctricas.—Cuando se introduce un solo electrodo en una disolución, forma evidentemente un solo origen de fem. Esta fem puede medirse siempre que dispongamos de algún medio para establecer contacto con la disolución a través de un electrodo que tenga el mismo potencial que ella. En la práctica esto no es posible. La medida absoluta del potencial de un solo electrodo implica métodos especiales de preci-

sión dudosa. Sin embargo, no se plantea ninguna dificultad práctica, porque lo que se mide ordinariamente son diferencias de potencial entre pares de electrodos.

La introducción de un segundo electrodo completa una pila eléctrica. La fem de la pila está determinada en parte por la diferencia entre las fuerzas electromotrices que proceden de los electrodos. Estas fuerzas electromotrices dependen de la naturaleza de los electrodos, de las concentraciones iónicas en el espacio que los rodea, de la temperatura y, en casos especiales, de la presión. En ciertas pilas hay un origen adicional de fem. Lo mismo que se produce una diferencia de potencial entre un electrodo y una disolución, se presentan también diferencias de potencial en el contacto de una disolución con otra. Este efecto es particularmente acusado cuando una disolución concentrada está en contacto con una diluída, y los iones positivos y negativos son de tal naturaleza que se difunden con una diferencia de velocidades considerable.

Puesto que la fem de una pila sin tal contacto líquido es la diferencia de las fuerzas electromotrices de los electrodos, se puede formar un tipo particular de pila con una fem neta manteniendo idénticos todos los factores que afectan a los dos potenciales de electrodo, menos uno. Una de las pilas más interesantes de este tipo es aquella en la cual ambos electrodos son del mismo material y sólo varían las concentraciones de los iones alrededor de los electrodos. Estas pilas son importantes en el estudio de la corrosión. El lector puede imaginar fácilmente un gran número de tipos de pilas distintas que varían sólo o a la vez, en la naturaleza de los electrodos, las concentraciones alrededor de éstos, las temperaturas de los mismos y otros factores que afectan a los potenciales de electrodos individuales.

6-4. Electrodo de hidrógeno.—En un tipo muy importante de pilas, uno de los electrodos se compone de gas hidrógeno a la presión de una atmósfera. La solución tiene una concentración molal de iones hidrógeno igual a la unidad. Se permite que burbujee hidrógeno sobre un electrodo de platino cubierto con platino metálico finamente dividido. De este modo puede obtenerse un contacto efectivo entre el hidrógeno gaseoso y un circuito exterior. El efecto adicional del platino finamente dividido hace que el hidrógeno esté en equilibrio con sus iones manteniéndolo adsorbido en cuya forma presenta una gran superficie. Si se combina este electrodo a 25° C con una serie de otros electrodos en contacto con soluciones de sus iones de concentración molal igual a la unidad, puede obtenerse una escala relativa de potenciales de electrodo, utilizando el hidrógeno como potencial de referencia. Esta escala está dada en la tabla 6-1 y a partir de ella es fácil obtener la diferencia de potencial entre dos electrodos cualesquiera en contacto, a 25° C, con disoluciones de sus iones de concentración molal igual a la unidad, determinando la diferencia entre sus respectivas diferencias de potencial con relación al hidrógeno.[1]

[1] Para una definición rigurosa de disolución molal de concentración unidad, consúltense textos más extensos.

TABLA 6-1

*Potenciales de electrodo**

Electrodo	Ion	Potencial (voltios)
Li	Li^+	−2,96
K	K^+	−2,92
Ca	Ca^{++}	−2,87
Na	Na^+	−2,71
Mg	Mg^{++}	−2,4
Mn	Mn^{++}	−1,05
Zn	Zn^{++}	−0,76
Cr	Cr^{++}	−0,71
Sn	Sn^{++}	−0,13
Pb	Pb^{++}	−0,12
H_2	H^+	0,00
Cu	Cu^{++}	+0,34
Cu	Cu^+	+0,522
Ag	Ag^+	+0,80
Cl_2	Cl^-	+1,36
F_2	F^-	+2,85

* Para otros potenciales consúltese LATIMER-HILDEBRAND: *Reference Book of Inorganic Chemistry*. El convenio de signo utilizado por estos autores es opuesto al adoptado aquí.

6-5. Cálculo de fuerzas electromotrices.—Aplicando métodos termodinámicos es posible obtener una ecuación para la diferencia de potencial de una pila eléctrica en condiciones de equilibrio. En el estudio que vamos a efectuar se dará una forma simplificada que sólo es aplicable a pilas sin contactos líquidos internos, y en las cuales los electrodos son metales puros a y b sumergidos en disoluciones muy diluídas que sólo contienen los iones respectivos. Sea V_{ab} la diferencia de potencial entre los bornes de la pila en condiciones de equilibrio y circuito abierto. Se tiene:

$$V_{ab} = V_a^\circ - V_b^\circ + \left(\frac{RT}{F}\right) \ln \frac{C_a{}^\alpha}{C_b{}^\beta}, \qquad [6\text{-}1]$$

donde V_a° y V_b° son los potenciales de electrodo molales de los metales a y b respecto al hidrógeno que aparecen en la tabla 6-1. R es la constante de los gases perfectos (8,314 julios/grado-mol); F es el faraday (96500 culombios); T, la temperatura Kelvin; C_a y C_b, las concentraciones molales de los iones de los metales a y b; α y β son las fracciones de los números de iones que entran o salen de la disolución a los respectivos metales a y b cuando una carga electrónica pasa a través de la pila. Se han elegido los signos de modo que cuando V_{ab} es positivo, el borne a tiene un potencial superior al de b.

EJEMPLO.—Una pila se compone de un electrodo de plomo y un electrodo de estaño en una disolución homogénea que contiene iones divalentes de estaño a una

concentración de 0,072 moles por litro, y iones divalentes de plomo a una concentración de 0,024 moles por litro. ¿Cuál es la diferencia de potencial a 25° C?

Llamemos respectivamente a y b a los electrodos de plomo y estaño. En cada caso pasan dos cargas electrónicas a través del circuito por cada ion disuelto y, por tanto, $\alpha = \beta = {}^1/_2$

$$V_{ab} = -0{,}12 - (-0{,}13) + \frac{8{,}314 \times 298}{96\,500} \ln \frac{(0{,}024)^{1/2}}{(0{,}072)^{1/2}}$$
$$= -0{,}004 \text{ V.}$$

¿Cuál es la diferencia de potencial a 100° C?

$$V_{ab} = 0{,}01 - \frac{8{,}314 \times 373}{96\,500} \ln \frac{(0{,}024)^{1/2}}{(0{,}072)^{1/2}}$$
$$= 0{,}01 - 0{,}0175$$
$$= -0{,}0075 \text{ V.}$$

¿Cuál es el electrodo +?

A 100° C el electrodo de plomo tiene un potencial inferior al del estaño. El estaño es, por consiguiente, el electrodo positivo.

6-6. Concentración de iones hidrógeno.—El electrodo de hidrógeno puede utilizarse para medir la concentración de iones hidrógeno. En su forma de aplicación más sencilla se construye una pila que tiene dos electrodos de hidrógeno. Uno de ellos se introduce en una disolución 1 normal (para el hidrógeno 1 normal = 1 molal) de iones hidrógeno y el otro en la disolución de concentración desconocida. Con objeto de suprimir uno de los electrodos de hidrógeno y simplificar el dispositivo, el electrodo normal de hidrógeno se sustituye de ordinario por algún otro electrodo de potencial conocido. Uno de los electrodos de referencia más corrientemente utilizado contiene mercurio y cloruro mercurioso saturado (calomelanos) en contacto con disolución 1 normal (1 molal) de cloruro potásico. Se le denomina *electrodo normal de calomelanos* y, a 25° C, tiene un potencial positivo respecto al electrodo normal de hidrógeno de 0,2801 V. Puesto que el electrodo de hidrógeno no es aplicable a determinaciones de tipo rutinario, se han ideado varios electrodos para medir concentraciones de iones hidrógeno. El más corriente es el *electrodo de vidrio*. Consiste en una membrana de vidrio muy delgada que separa una disolución cuya concentración de iones hidrógeno es conocida, de otra de concentración desconocida. El fundamento de su funcionamiento no se sabe con exactitud. Los instrumentos comerciales se gradúan frecuentemente en *unidades de* pH. El pH de una disolución diluída es igual al logaritmo decimal de su concentración de iones hidrógeno, cambiado de signo.

Como ejemplo de cálculo del pH, se puede tomar el de la sangre humana normal. La concentración de iones hidrógeno es 4×10^{-8} normal y el pH será, por consiguiente, 7,4.

6-7. Pila de Daniell.—Uno de los generadores prácticos de energía eléctrica más sencillos es la pila de Daniell. Contiene un electrodo de

cinc sumergido en una disolución de iones cinc (Zn^{++}), y un electrodo de cobre sumergido en una disolución de iones cúpricos (Cu^{++}). Hay presentes también iones negativos, pero no es necesario considerarlos de momento. En algunos casos ambas disoluciones están separadas por un vaso poroso y en otros por densidad. El último tipo, llamado *pila de densidad*, está representado en la figura 6-1. El voltaje máximo se obtiene preparando la pila con una concentración mínima de iones cinc en la capa superior y una disolución saturada de iones cúpricos en la inferior. La saturación de la disolución de sal cúprica se mantiene por un exceso de cristales sólidos de sulfato cúprico colocados en el fondo.

Cuando pasa corriente, el cinc se disuelve y el cobre se deposita sobre el electrodo de cobre. La concentración de los iones cinc en la parte superior de la pila aumenta y, por consiguiente, la fem de la pila disminuye gradualmente con el tiempo.

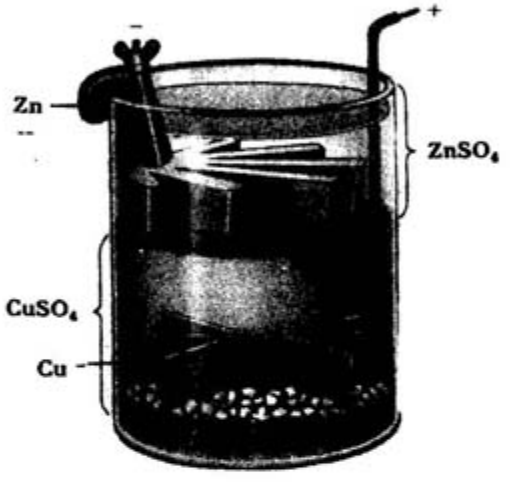


FIG. 6-1.—Pila de Daniell.

Se obtendrá alguna indicación respecto al comportamiento de los iones en la disolución considerando el funcionamiento eléctrico y químico de una pila Daniell recientemente preparada. En estado de equilibrio en circuito abierto las diferencias de potencial de los electrodos respecto al líquido están determinadas por la temperatura y concentración de los iones que los rodean. Aunque las dificultades experimentales impidan la determinación exacta de estos potenciales, se supondrá para el razonamiento siguiente que ambos son negativos.

Puesto que el cinc es mucho más negativo respecto a la disolución que el cobre, este último se encuentra a un potencial superior al del cinc, tal como se representa en la figura 6-2. Al introducir el electrodo de cinc, algunos iones cinc pasan a la disolución y se acumula una pequeña carga positiva alrededor del electrodo de cinc. El mismo efecto ocurre también, en menor escala, alrededor del electrodo de cobre. Cuando se ha alcanzado el equilibrio, la diferencia de potencial dentro de la disolución, producida por la introducción de los electrodos, es neutralizada por un ligero transporte de iones. Después que el transporte ha terminado, la disolución se encuentra a un potencial uniforme. Puesto que el fondo de la pila está saturado con sulfato cúprico, la concentración total de sales disueltas es mayor en el electrodo de cobre que en el de cinc. Esta diferencia de concentración obliga a los iones a difundirse desde la región de concentración elevada a la región de baja concentración. El desplazamiento tanto de iones positivos como negativos mantiene así la

neutralidad eléctrica y las condiciones equipotenciales en el electrólito. En este proceso de transporte, los iones de cobre se difunden hacia arriba y pronto se producen pequeñas superficies de depósito de cobre sobre el cinc; se forman así minúsculas pilas cortocircuitadas y el cinc se disuelve rápidamente.

La pila puede cortocircuitarse estableciendo una conexión de muy pequeña resistencia entre los electrodos. Los electrones fluyen entonces en el circuito exterior desde el cinc al cobre hasta que el cobre y el cinc están al mismo potencial. Las concentraciones de iones alrededor de sus respectivos electrodos se reajustan ahora por sí mismas. Los iones cobre se mueven hacia el cobre puesto que es ahora más negativo respecto a la disolución. Iones cinc pasan a la disolución procedentes del electrodo de cinc, puesto que es ahora menos negativo. Como resultado del cambio de concentración, se establece en la disolución un gradiente de potencial, que obliga a los iones a moverse dentro de la misma, desplazándose

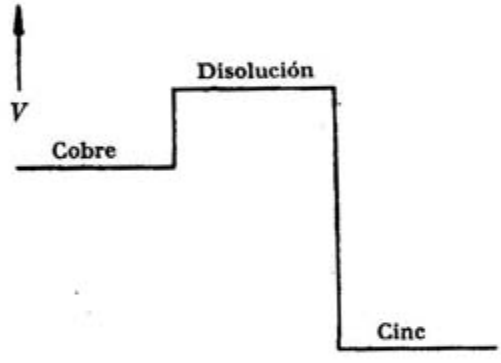


FIG. 6-2.—Potenciales de los electrodos de cobre y de cinc de una pila de Daniell respecto a la disolución.

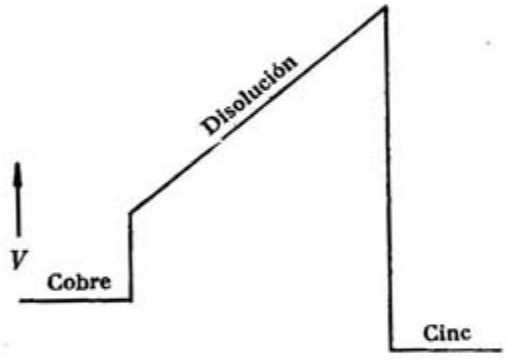


FIG. 6-3.—Potenciales del cobre, del cinc y de la disolución en una pila de Daniell cortocircuitada.

los positivos hacia el cobre y los negativos hacia el cinc. Este estado de cosas se representa en la figura 6-3. La fracción de corriente transportada por los diferentes iones depende de su carga y de la facilidad de su desplazamiento. Los iones sulfato, negativos, del electrólito inicial se mueven de una parte bajo la influencia del campo y de otra por difusión desde la región de concentración elevada a la de concentración baja. Como se disuelven iones cinc en el electrodo de cinc y se desplazan hacia arriba iones sulfato, la concentración de sulfato de cinc aumenta gradualmente en la parte superior de la pila. Los iones cobre positivos que dadas las condiciones de circuito abierto se difunden hacia arriba se encuentran ahora bajo la influencia del campo. Si la corriente es suficientemente intensa, la tendencia a difundirse hacia arriba es totalmente vencida y los iones cobre no pueden desplazarse hacia el electrodo de cinc y se depositan. Por esta razón resulta ventajoso mantener cerrado en todo instante el circuito exterior de la pila Daniell. Dado que la pila Daniell tiene una elevada resistencia interior, la corriente en corto

circuito es pequeña. La resistencia interna procede evidentemente en parte de las fuerzas que se oponen al movimiento de los iones a través del electrólito. Para disminuir la resistencia interna se añaden frecuentemente iones extraños.

La pila Daniell trabaja mejor cuando funciona continuamente en un circuito cerrado de resistencia moderadamente elevada. Las condiciones de trabajo en la pila son entonces las representadas en la figura 6-4. La corriente en el circuito es igual a la fem dividida por la resistencia total (interna y externa) del circuito. La lámina de cobre se encuentra a un potencial superior a la de cinc en una cantidad igual a la caída de voltaje en el circuito exterior. El resto de fem se distribuye a través de la disolución y el campo resultante es menor que en la pila cortocircuitada.

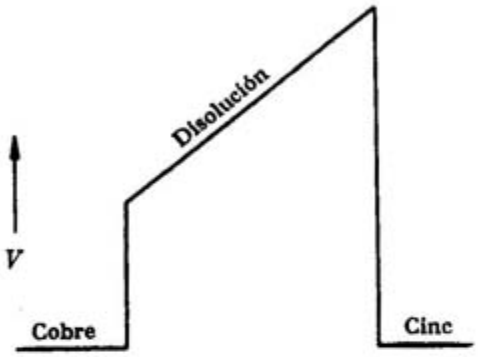


FIG. 6-4.—Potenciales del cobre, del cinc y de la disolución de una pila de Daniell conectada a una resistencia moderadamente elevada.

Orígenes de fem en las pilas.—Resulta instructivo aplicar las ideas desarrolladas en la sección 5-3 a los orígenes de fem en una pila típica sin conexiones líquidas. La figura 6-5 muestra esquemáticamente la situación dentro de la pila. Para facilitar la representación, la distancia entre los iones y los electrodos se ha aumentado mucho. En la práctica será muy pequeña. E_0 representa la parte electrostática del campo, indicada por las flechas finas. E' representa el *campo equivalente* que realiza trabajo sobre la carga cuando pasa a través del origen de fem. Partiendo de a y calculando la integral curvilínea del campo total $E_0 + E'$ a lo largo del circuito a través del electrólito, y volviendo a a a través de la resistencia exterior, se encuentra que la fem total procede de la sola contribución de E' a la integral curvilínea. Así

$$\varepsilon = \oint E' \cos\theta \, ds = \int E_a' \, ds_a - \int E_b' \, ds_b.$$

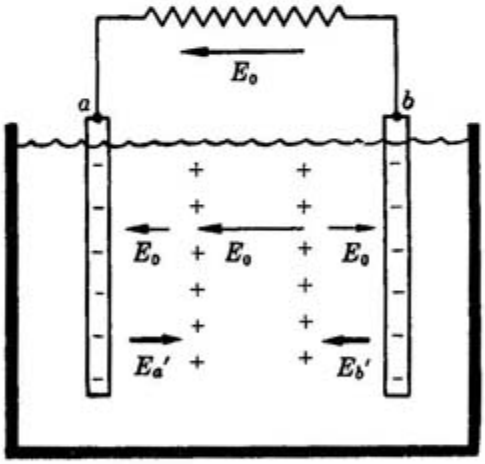


FIG. 6-5.—Campo electrostático y «campo equivalente» en una pila sin conexiones líquidas.

Los efectos de los dos orígenes de fem opuestos son los mismos que si las cargas se encontrasen bajo la acción de los campos equivalentes en los electrodos a y b. En el electrodo a se realiza trabajo positivo sobre las cargas por E'_a y en el electrodo b se efectúa trabajo negativo por E'_b.

6-8. Reversibilidad.—El principio de reversibilidad de las pilas eléctricas es de gran importancia en termodinámica puesto que en una pila eléctrica la energía química puede convertirse reversiblemente (es decir,

cuasi estáticamente) en energía eléctrica. Para que la transformación sea reversible, ha de mantenerse el equilibrio, lo que se consigue intercalando en el circuito exterior algún manantial opuesto de fem que sólo difiera infinitamente poco del de la pila. Si la fem opuesta se aumenta de modo que sólo supere en una cantidad infinitamente pequeña a la de la pila, puede ser reconvertida la energía en ésta, apareciendo de nuevo en forma de energía química. Aunque una pila pueda funcionar reversiblemente mediante cambios infinitesimales, se presentan muchos casos prácticos en los cuales el paso de una cantidad finita de carga eléctrica produce, mediante reacciones secundarias, cambios permanentes en las sustancias de la pila que no es posible corregir por el funcionamiento inverso de la misma. En tales casos la pila es reversible termodinámicamente, pero no lo es en el sentido práctico, ya que no puede ser recargada.

6-9. Polarización.—Durante el funcionamiento de una pila se produce una serie de fenómenos por los cuales se modifican temporalmente las condiciones químicas en la proximidad de los electrodos. El caso más sencillo de polarización se presenta cuando la concentración iónica alrededor de un electrodo se altera por el paso de la corriente. Así, si la corriente en una pila Daniell se aumentase rápidamente hasta un valor instantáneo elevado, la concentración de iones cobre en la proximidad inmediata de la lámina de cobre descendería inmediatamente a un valor muy bajo y, de modo análogo, la concentración en la proximidad del electrodo de cinc se elevaría de súbito. El resultado sería una caída temporal de la fem de la pila. Ésta se recupera rápidamente por difusión de los iones, pero de momento la pila se polariza. Hay muchos casos en los cuales la polarización limita seriamente el funcionamiento de una pila. Uno de los más frecuentes se produce cuando se descargan iones hidrógeno formando hidrógeno gaseoso. Si se reemplaza en la pila Daniell el sulfato de cobre por ácido sulfúrico, en lugar de descargarse en el electrodo de cobre iones cobre, se descargan iones hidrógeno formándose burbujas de hidrógeno gaseoso. Aunque probablemente no se trata de la acción total, uno de los efectos del gas hidrógeno es aumentar la resistencia entre el electrodo y la disolución, elevando la resistencia interna de la pila. En algunos tipos de pilas, se añade al electrólito, en la proximidad del electrodo positivo, una sustancia denominada despolarizante, que reacciona con el hidrógeno evitando la formación de gas libre.

6-10. Pila seca.—Aunque no es reversible en el sentido práctico, la pila seca sigue siendo el manantial pequeño de energía eléctrica más cómodo. El polo positivo es una barra de carbón y el negativo es cinc metálico. El líquido se reemplaza por una pasta que contiene cloruro de cinc y cloruro amónico. Como despolarizador se añade bióxido de manganeso. Aunque muchas baterías de pilas secas de alto potencial se construyen en forma de capas, las pilas aisladas son ordinariamente cilíndricas, teniendo el cinc la forma de un vaso cerrado con el electrodo de carbón en el centro. La pasta ocupa el espacio intermedio y la parte

superior se cierra con una capa de pez o cera. Cuando la pila produce corriente, el cinc metálico se transforma en iones cinc divalentes en el polo negativo. En el polo positivo, se cree que los iones amonio reaccionan con el bióxido de manganeso según la ecuación

$$2NH_4^+ + 2e^- + MnO_2 \rightarrow 2NH_3 + MnO + H_2O.$$

En circuito abierto la fem de una pila seca recién preparada está comprendida entre 1,5 y 1,6 V, dependiendo del estado de los electrodos. Cuando circula corriente, el voltaje entre los bornes desciende, puesto que la despolarización es lenta. Si se deja descansar la pila durante un corto tiempo, la reacción de despolarización se completa y el voltaje entre los bornes aumenta hasta un valor muy próximo al inicial. Después de un uso prolongado, la resistencia interna aumenta hasta que la pila se inutiliza. Se cree que este efecto es debido a un agotamiento del bióxido de manganeso.

6-11. El acumulador de plomo.—Una batería de acumuladores de plomo, cargada, se compone de una serie de láminas positivas de bióxido de plomo y de una serie de láminas negativas de plomo metálico. Las sustancias se depositan sobre un enrejado de plomo metálico y son altamente porosas, de modo que el electrólito puede ponerse en contacto con las placas sobre una gran superficie. La separación se mantiene utilizando madera tratada especialmente o fibra de vidrio.

El electrólito es ácido sulfúrico de densidad 1,31 a 25° C. La fem es 2,1 V por acumulador. Cuando el acumulador funciona, tienen lugar reacciones en las placas. En la lámina positiva, el plomo se reduce pasando de tetravalente a divalente, en virtud de la reacción

$$PbO_2 + SO_4^{--} + 4H^+ + 2e^- \rightarrow PbSO_4 + 2H_2O.$$

Puesto que el sulfato de plomo es poco soluble, se adhiere a la placa cuando se forma. En la lámina negativa, los iones sulfato son neutralizados por la reacción

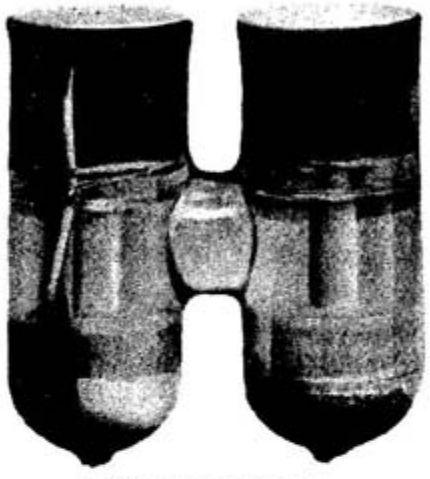
$$Pb + SO_4^{--} \rightarrow PbSO_4 + 2e^-.$$

El sulfato se adhiere de nuevo a la placa. Cuando la bateria se ha descargado, ambas láminas se han convertido casi completamente en sulfato de plomo. La pérdida de iones sulfato del electrólito hace que la densidad descienda, de modo que en el estado de descarga llega a 1,16. En estas condiciones, en circuito abierto, la fem es aproximadamente 1,75 V por acumulador.

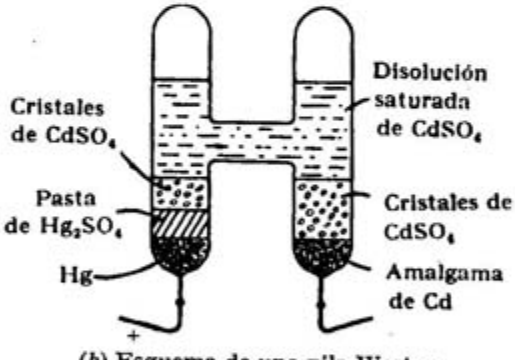
A bajas temperaturas la fem de la batería de acumuladores de plomo en circuito abierto desciende algo, como sucede con otras reacciones electroquímicas. Sin embargo, el efecto más importante es la disminución de la movilidad de los iones a bajas temperaturas, lo cual se traduce en un aumento de la resistencia interna. Así, la diferencia de potencial entre los bornes desciende de un modo anormal cuando pasa la corriente. Como resultado de los efectos combinados de las bajas temperaturas, la

capacidad de arranque de una batería de acumuladores de automóvil es a 0° C sólo, aproximadamente, un 40 % de su valor a 80° C.

6-12. Pilas patrones.—Se ha ideado cierto número de pilas que son extraordinariamente estables, manteniendo una fem fija durante largos intervalos de tiempo. La más corriente de éstas es, probablemente, la pila Weston. Contiene un electrodo de mercurio en contacto con una pasta de sulfato mercurioso, y un electrodo de amalgama de cadmio en contacto con una disolución saturada de sulfato de cadmio, como indica la figura 6-6. La construcción es tal que el paso de pequeñas cantidades de carga en cualquier sentido tiene un efecto despreciable sobre el estado de la pila. La fem de la pila Weston es afectada por la temperatura, no solo por la variación de las fem de los electrodos con la temperatura, sino a causa de que la concentración de la disolución saturada de sulfato de cadmio varía ligeramente con aquélla. No obstante, la variación es pequeña, y la pila Weston se ha adoptado casi universalmente para calibrar un potenciómetro.



(a) Pila patrón Weston.
(Cortesía de Weston Electrical Instrument Corp.)



(b) Esquema de una pila Weston.
FIG. 6-6.

6-13. Electrólisis.—Introduciendo en el circuito de una pila eléctrica un manantial exterior cuya fuerza contraelectromotriz supere infinitamente poco a la fem original, es posible invertir la acción de la pila y transformar energía eléctrica en energía química. Este proceso se denomina *electrólisis*. En la electrólisis el electrodo en el cual se liberan los iones positivos o se neutralizan los negativos se denomina ánodo. El otro electrodo se denomina cátodo. Con objeto de dar una imagen completa del proceso electrolítico, es necesario, en primer lugar, considerar ciertos fenómenos que tienen lugar en una célula electrolítica.

Tensión de descomposición.—Es evidente que en todas las reacciones electrolíticas es necesaria una fem exterior mínima para mantener el sistema en equilibrio. Esta fem ha de ser superada en una cantidad infinitamente pequeña para que pueda producirse una corriente. Se la denomina tensión de descomposición y depende, como de ordinario, de la concen-

tración del electrólito en la proximidad de los electrodos, de las sustancias que forman éstos y del tipo de reacción electrolítica que tiene lugar. Aunque el potencial que se mide realmente es la diferencia de los dos potenciales individuales que existen entre cada electrodo y la disolución, son estos potenciales individuales los importantes.

Muchos potenciales de descomposición se miden de la forma siguiente. Se sumergen electrodos de platino en un electrólito y se aplica una fem exterior variable. El uso de un material inerte, como el platino, permite estudiar la reacción sin la complicación de reacciones extrañas entre los productos de descomposición y los electrodos. Bajo la influencia del campo aplicado, fluyen iones positivos en el electrólito hacia el electrodo negativo y iones negativos hacia el electrodo positivo. Esta separación de iones hace que la célula se polarice hasta neutralizar el campo de los electrodos. Cada electrodo tiene entonces cierto potencial respecto al electrólito. Si se aumenta la diferencia de potencial exterior, se alcanza un valor para el cual la atracción en un electrodo para uno de los grupos de iones vence su tendencia a la disolución, y se depositan moléculas neutras sobre el electrodo. Si se sigue aumentando la diferencia de potencial aplicada se repite el mismo proceso con otro grupo de iones en el otro electrodo. Finalmente se alcanza el potencial de descomposición y se observa una pequeña corriente. Se ha formado ahora una pila eléctrica en la cual los productos de la descomposición electrolítica cubren los electrodos y forman una pila en equilibrio con sus iones que están todavía en disolución. Aunque se emplean electrodos de platino, el caso es idéntico que para cualquier otro electrodo que no sea atacado en el proceso. La adición de varios iones de diferentes tipos a la disolución no altera sustancialmente este estado de cosas. La célula formada es la de la pareja de iones positivos y negativos que tienen entre sí la tensión de descomposición más baja. El potencial para un par de iones dados depende, como de ordinario, de su concentración y de la temperatura.

En ocasiones otras sustancias que se encuentran en disolución pueden reaccionar con los productos recientemente formados en la reacción electrolítica. Los propios electrodos toman parte en esta reacción. Así si el ion cloro se descompone en un electrodo de plata se forma cloruro de plata. La reacción de electrodo más importante es la que tiene lugar en el plateado electrolítico ordinario. En este caso ambos electrodos son de la misma sustancia y con la misma rapidez que los iones desaparecen del electrólito, por precipitación en el cátodo, se forman de nuevo por solución del metal en el ánodo.

Sobretensión.—Una vez que se ha establecido en la célula la fem exterior justamente necesaria para mantenerla en equilibrio puede ser todavía considerablemente menor que la necesaria para realizar la electrólisis a una velocidad satisfactoria. El voltaje adicional necesario se denomina sobretensión. Aunque la sobretensión no está interpretada de forma satisfactoria en todos los casos, procede en parte de la pequeña velocidad de reacción en los electrodos. Lo que se incluye frecuentemente bajo el

término sobretensión son los efectos de polarización que tienen lugar cuando los iones se agotan localmente en los electrodos y no se renuevan con la suficiente rapidez por difusión desde la masa principal de líquido. Este efecto queda reducido en la electrólisis práctica agitando rápidamente la disolución o por rotación de los electrodos. Se origina una consecuencia importante de la sobretensión cuando el potencial del cátodo es suficientemente grande para exceder al potencial de descomposición del hidrógeno. Si en una disolución ácida no hubiese efectos de sobretensión se desprendería normalmente hidrógeno con un resultado perjudicial sobre el depósito electrolítico de metales. De ordinario no llega a alcanzarse la sobretensión necesaria para una producción apreciable de hidrógeno y el fenómeno no se produce.

6-14. Electrólisis del agua.—Cuando se introducen en un electrólito electrodos de platino, las reacciones electrolíticas que se producen dependen de los iones presentes en la disolución, del potencial que existe entre el platino y la disolución y de las tensiones de descomposición de los iones. Si un electrodo de platino pudiera hacerse lo suficientemente negativo respecto a la disolución, se disolverían iones platino. Sin embargo, en condiciones ordinarias si el electrólito es agua pura, adquieren prelación otras dos reacciones de tensión de descomposición muy inferior. Una de éstas es la transformación, en el cátodo, de los iones hidrógeno en gas hidrógeno según la reacción

$$2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2.$$

La otra reacción se produce en el ánodo:

$$2OH^- \rightarrow \tfrac{1}{2}O_2 + H_2O + 2e^-$$

Mediante estas dos reacciones el agua se descompone produciéndose dos moles de hidrógeno por cada mol de oxígeno. Puesto que la resistencia de esta célula electrolítica es extraordinariamente elevada, es costumbre añadir al agua una pequeña cantidad de ácido. Si se añade ácido clorhídrico, el proceso se convierte en la electrólisis de una disolución de ácido clorhídrico. Es adecuado, por tanto, considerar qué modificación se ha introducido por la presencia de iones cloro y de iones adicionales de hidrógeno. La reacción en el cátodo es evidentemente la misma que antes, puesto que sólo intervienen los iones hidrógeno. Tanto los iones hidróxilo (OH^-) como los iones cloro están presentes en el ánodo. Si la concentración de iones cloro es pequeña comparada con la de iones hidróxilo, su tensión de descomposición es suficientemente superior a la del hidróxilo para que sólo se libere oxígeno. Sin embargo, aunque ocurre esto durante un corto tiempo al comienzo de la reacción, el desplazamiento gradual de iones cloro hacia el ánodo produce un aumento de la concentración de iones cloro en este punto y pronto comienza a aparecer el cloro. Por esta razón en la electrólisis del agua se añade de ordi-

nario ácido sulfúrico, en lugar de clorhídrico, puesto que los iones sulfato se descomponen con mucho menor facilidad.

6-15. Energía libre química.—Es frecuentemente de gran importancia en química determinar si ocurrirá o no una reacción cuando ciertas sustancias reaccionantes se ponen en contacto. Existe un método muy adecuado para determinar la tendencia a reaccionar basado en la medida de la cantidad de energía eléctrica que queda libre cuando la reacción tiene lugar en una pila eléctrica en condiciones de equilibrio reversible. En lenguaje termodinámico esta energía se denomina *variación de energía libre* que acompaña a la reacción. Por este método resulta posible determinar si un sistema formado por una disolución 1 molal de sulfato cúprico, cobre metálico, cinc metálico y una disolución 1 molal de sulfato de cinc, reaccionará transformando el cinc en sulfato de cinc y el sulfato de cobre en cobre. Esto puede investigarse construyendo una gran *pila de Daniell* que contenga disoluciones 1 molal de cinc y cobre. La pila debe ser de tamaño tal que el paso en un electrodo de un mol de iones a la disolución y la correspondiente salida de la disolución de una cantidad correspondiente en el otro, no afecte, sustancialmente, a las concentraciones. Se puede permitir entonces que un mol de iones efectúe este paso, en condiciones reversibles, y determinar la cantidad de trabajo eléctrico efectuado. Esto indicará la energía libre por mol que queda disponible en la reacción. Si se permite que el cinc se disuelva y el cobre se precipite como cobre metálico, se desprende una cantidad de energía libre. El valor de esta energía libre será una medida de la tendencia de la reacción a efectuarse.

Un problema adicional es determinar las concentraciones de sulfato de cobre y sulfato de cinc para las cuales la reacción está en equilibrio. Estas concentraciones pueden encontrarse preparando una pila cuyo voltaje sea nulo y determinando la concentración del sulfato de cobre y del sulfato de cinc. Hay que advertir que aunque una reacción presente una gran tendencia a verificarse y sea posible obtener una gran cantidad de energía libre, puede transcurrir con una velocidad infinitesimal. El lector debe considerar el estudio realizado como un simple esbozo dentro de un extenso y fructífero campo de la química.

6-16. Fuerzas electromotrices térmicas.—La transformación de energía eléctrica en calor, en una resistencia, es un proceso irreversible; es decir, no hay medio de recuperar el calor y convertirlo de nuevo en energía eléctrica. Existen, sin embargo, elementos de circuito en los cuales se produce calor a expensas de la energía eléctrica cuando la corriente circula en un sentido, mientras que se produce energía eléctrica a expensas de calor cuando la corriente circula en sentido opuesto. En otras palabras, si no se produjera más que este fenómeno, sería posible enfriar el circuito haciendo circular una corriente por él. Un circuito o porción de circuito en el cual el calor se convierte en energía eléctrica, o viceversa (excluyendo el calor i^2R), se denomina origen de *fuerza electromotriz térmica.*

6-17. Fuerza electromotriz Thomson.—Una explicación completa de la teoría de las fuerzas electromotrices térmicas sobrepasa los fines de esta obra. Todo lo que puede intentarse es hacer que resulte razonable la existencia de tales efectos. Supongamos que una varilla conductora es sostenida por aisladores y que un extremo de la misma se calienta como indica la figura 6-7(*a*), de modo que se establezca un gradiente de temperaturas a lo largo de la barra. Si imaginamos los electrones libres de la varilla como análogos a un gas, puede esperarse que la mayor temperatura de un extremo ocasionará un aumento de presión y una difusión de gas electrónico desde el extremo calentado. La acumulación de carga negativa en el extremo más frío crearía un campo eléctrico dentro de la varilla en el sentido representado por el vector E_0, y la difusión cesaría cuando la fuerza sobre los electrones, debida a este campo, tuviera un valor suficiente para compensar su tendencia a difun-

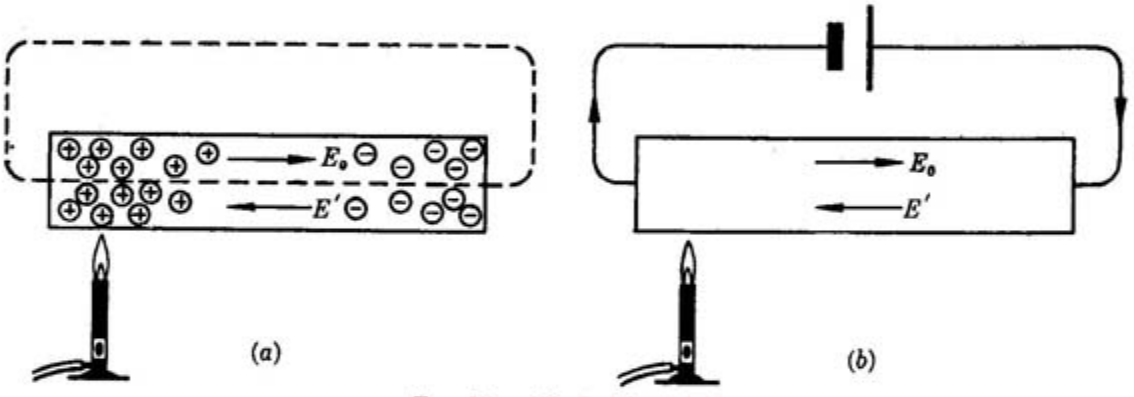


FIG. 6-7.—Efecto Thomson.

dirse a causa de la diferencia de temperatura. Es un hecho experimental que se crea un campo eléctrico en una varilla conductora cuando existe una diferencia de temperatura entre sus extremos, pero la naturaleza insatisfactoria de la teoría esquematizada anteriormente se evidencia al descubrir que en algunos conductores el campo eléctrico está dirigido desde el extremo caliente al frío, mientras que en otros tiene sentido opuesto.

Cuando se ha alcanzado en la varilla el estado estacionario los electrones de su interior están en equilibrio. El campo electrostático ejerce una fuerza sobre los electrones en un sentido, y podemos considerar que la diferencia de temperatura origina un campo equivalente que los impele en sentido opuesto. Se recordará que la fem de un circuito puede definirse como la integral del campo resultante alrededor del circuito. Puesto que la integral curvilínea del campo electrostático a lo largo de una trayectoria cerrada es nula, la integral curvilínea del campo resultante a lo largo de una trayectoria cerrada tal como la de la línea de trazos de la figura 6-7(*a*) se reduce a la integral del campo equivalente a lo largo de la varilla, puesto que este campo equivalente sólo existe dentro

de la varilla y es nulo fuera. Representemos por E' el campo equivalente. El valor de E' en cualquier punto de la varilla depende del gradiente de temperatura dT/dl (T es la temperatura Kelvin) en el punto, y puede escribirse:

$$E' = \sigma \frac{dT}{dl} \qquad [6\text{-}2]$$

El coeficicnte σ, que se conoce como coeficiente de Thomson por haber sido sir William Thomson (más tarde lord Kelvin) quien primero investigó este tipo de fem, es característico del material que forma el conductor, y es función de la temperatura. La fem ε de la varilla es entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int E' dl \\ &= \int \sigma \frac{dT}{dl} dl \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \sigma \, dT, \end{aligned} \qquad [6\text{-}3]$$

donde T_1 y T_2 son las temperaturas en los extremos de la varilla. La fem se denomina *fuerza electromotriz Thomson.*

Puede demostrarse la existencia de una fem Thomson enviando una corriente a través de la varilla como indica la figura 6-7(*b*). Cuando la corriente y la fem tienen sentidos opuestos, la energía eléctrica se convierte en calor a razón de εi por segundo. Cuando la corriente tiene el mismo sentido que la fem, el calor se convierte en energía eléctrica. La cantidad de calor, Ri^2, desarrollada por unidad de tiempo aumenta, por tanto, ligeramente en el primer caso, y disminuye también ligeramente en el segundo. Las fuerzas electromotrices Thomson no son nunca grandes, sino del orden de algunos milivoltios.

Evidentemente, una sola fem Thomson no puede ser utilizada nunca para impulsar una corriente en un circuito cerrado. Si se calienta un anillo metálico en un punto de su periferia y se enfría en otro, se producen fuerzas electromotrices iguales y opuestas en las dos trayectorias desde el punto calentado al punto enfriado. Si se utilizan diferentes metales en las dos trayectorias desde el punto caliente al punto frío, las fuerzas electromotrices Thomson no serán iguales en general, sino que, como demostraremos en la sección siguiente, se desarrollan otras fuerzas electromotrices en las soldaduras de los distintos metales.

6-18. Fuerza electromotriz Peltier.—Cuando dos conductores distintos a la misma temperatura se ponen en contacto como indica la figura 6-8(*a*), habrá una *difusión* de electrones del uno al otro a menos que el *gas electrónico* dentro de cada uno tenga la misma *presión.* (Esta explicación teórica, como la de la fem de Thomson, no ha de entenderse demasiado rígidamente.) La reagrupación de electrones continúa hasta que

se establece en la soldadura un campo eléctrico de intensidad suficiente para que se alcance el equilibrio. La soldadura de ambos metales se convierte entonces en un origen de fem denominada *fuerza electromotriz Peltier* en honor de Jean C. Peltier (1785-1845). La fem Peltier depende de ambos metales y de la temperatura de la soldadura entre ellos. Para dos metales A y B, a la temperatura T, escribiremos la fem Peltier en la forma:

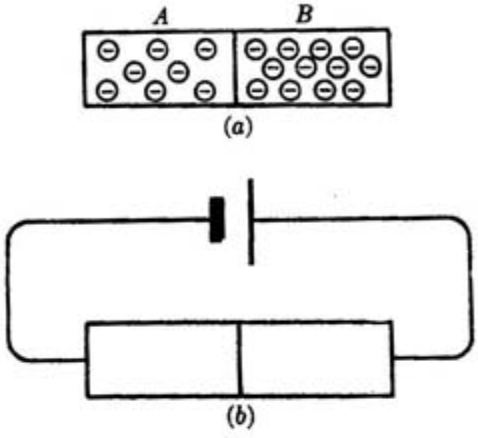


FIG. 6-8.—Efecto Peltier.

$$(\pi_{AB})_T.$$

Las fuerzas electromotrices Peltier, al igual que las Thomson, son de un orden de magnitud de algunos milivoltios. Su existencia puede demostrarse, por tanto, enviando una corriente a través de la soldadura como en la figura 6-8(b), bien en su mismo sentido o en el opuesto. Con los metales antimonio y bismuto, para los cuales la fem Peltier es inusitadamente grande, no es difícil obtener enfriamiento, cuando la corriente y la fem tienen el mismo sentido, superior al calentamiento Ri^2, lo que produce en realidad un descenso efectivo de temperatura en la soldadura.

6-19. Fuerza electromotriz Seebeck.—Consideremos a continuación un circuito cerrado formado por dos metales diferentes A y B como indica la figura 6-9. Las dos soldaduras se encuentran a las temperaturas T_1 y T_2. Hay necesariamente un gradiente de temperatura en ambos metales, de modo que se creará una fem Thomson en cada uno. Por tanto, dado que las soldaduras están a temperaturas distintas, las fuerzas electromotrices Peltier en las soldaduras son distintas. La fem neta en el circuito es entonces la suma algébrica de las dos fuerzas electromotrices Thomson y de las dos fuerzas electromotrices Peltier. La fem neta no es, en general, nula y, por consiguiente, existirá una corriente en el circuito mientras ambas soldaduras estén a temperaturas distintas. Este fenómeno fué observado por primera vez en 1826 por Thomas J. Seebeck (1770-1831) y la fem neta

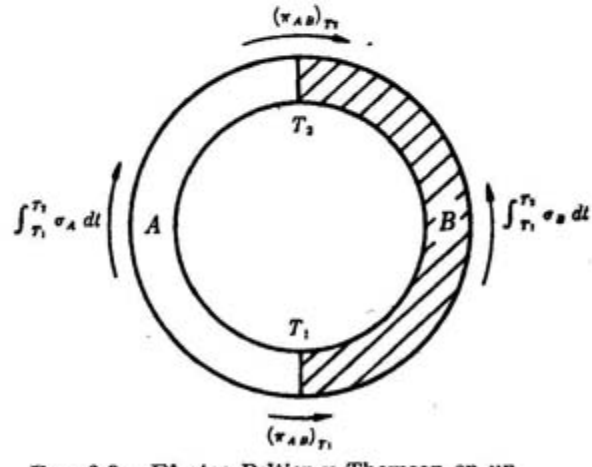


FIG. 6-9.—Efectos Peltier y Thomson en un par termoeléctrico.

se denomina fuerza electromotriz Seebeck. Si las fuerzas electromotrices individuales tienen los sentidos representados en la figura 6-9, y se considera como positivo el sentido de las agujas del reloj, la fem Seebeck es:

$$\varepsilon_{AB} = (\pi_{AB})_{T_2} - (\pi_{AB})_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_B)dT. \qquad [6\text{-}4]$$

El circuito de la figura 6-9 se denomina *par termoeléctrico.*

La fem de un par termoeléctrico no es nunca muy grande, aun con grandes diferencias de temperatura entre las soldaduras, y el efecto no constituye un procedimiento práctico de obtener directamente energía eléctrica a partir de calor. Sin embargo, los pares termoeléctricos tienen un gran valor práctico, como medio de medir temperaturas. La fem del

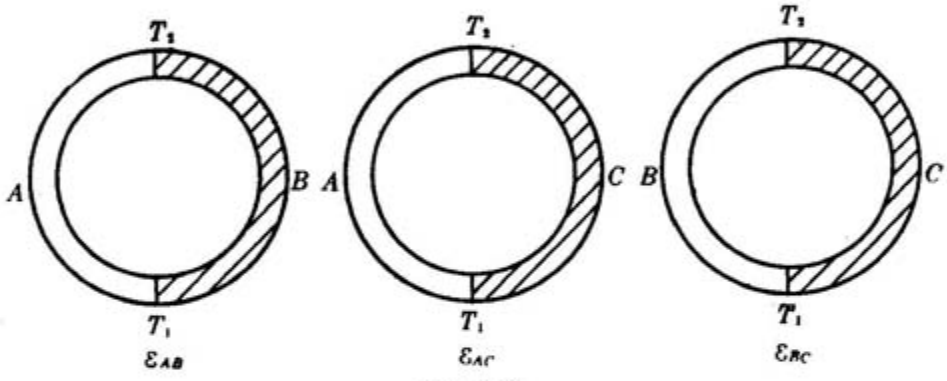


FIG. 6-10.

par depende de la temperatura de las soldaduras. Si se mide, por consiguiente, la fem manteniendo una soldadura a una temperatura conocida, puede determinarse la temperatura de la otra. El intervalo de temperatura en el cual encuentran aplicación los pares termoeléctricos se extiende desde la temperatura más baja obtenible a la del punto de fusión de los metales que forman el par.

Para dos temperaturas de soldaduras dadas, la fem de un circuito compuesto por los metales A y B (ε_{AB}) es igual a la diferencia entre la fem (ε_{AC}) de un circuito formado por los metales A y C y la fem (ε_{BC}) de otro formado por los metales B y C (Fig. 6-10). Esto es,

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{AC} - \varepsilon_{BC}. \qquad [6\text{-}5]$$

Por consiguiente, si se elige cierto metal de referencia C, pueden tabularse las fuerzas electromotrices de los otros respecto a este metal, determinándose por sustracción la fem de cualquier otro par. De ordinario se toma el plomo como metal de referencia.

Puede intercalarse en un circuito termoeléctrico, como el de la figura 6-11(a), un *metal intermedio D*, sin modificar la fem, siempre que los extremos de D se encuentren a igual temperatura. Esto es, la fem de

tal circuito es la misma que la de otro formado solamente por los metales A y B con sus soldaduras a las temperaturas T_1 y T_2.

El circuito del par termoeléctrico ordinario, representado en la figura 6-11(b), utiliza este hecho. Los metales A y B pudieran ser el níquel y el hierro, conectados por hilos de cobre a un galvanómetro G que ocupa una posición adecuada. Una soldadura se encuentra a la temperatura T_2 a medir, y la otra a la temperatura T_1, que puede mantenerse fija fundiendo hielo en un vaso Dewar. La fem es la de un par níquel-hierro con sus soldaduras a las temperaturas T_2 y T_1.

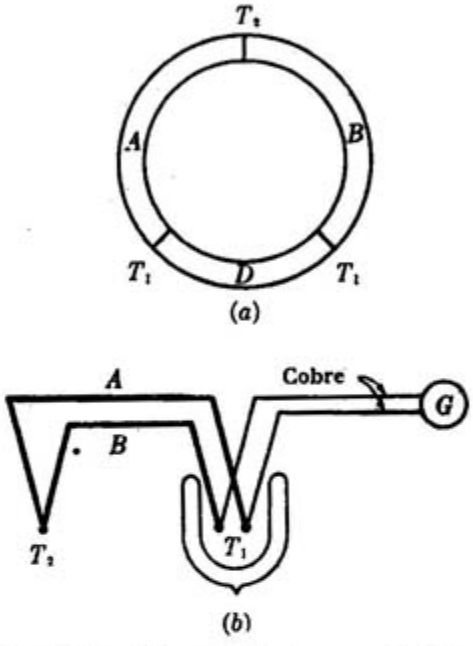


FIG. 6-11.—Interposición de un metal intermedio en un par termoeléctrico.

La fem de un par termoeléctrico suele medirse, como indica la figura 6-11 (b), intercalando un galvanómetro o un voltímetro en un punto adecuado. Tal instrumento sólo indica, naturalmente, la diferencia de potencial entre sus propios bornes, que es menor que la fem del par en el valor de la caída ir en el circuito. Por consiguiente, debe utilizarse un instrumento de resistencia elevada o, lo que es preferible, un potenciómetro.

6-20. Variación de la fem con la temperatura.—Si se conoce cómo varían con la temperatura los coeficientes Thomson y las fuerzas electromotrices Peltier, puede calcularse mediante la Ec. [6-4] la fem neta de un par termoeléctrico. En la práctica se mide ordinariamente la fem en un intervalo de temperaturas de las soldaduras y se expresa mediante una ecuación empírica. Las temperaturas se toman por comodidad en la escala centígrada y se representan por t. Si una de las soldaduras de un par termoeléctrico formado por los metales A y B se encuentra a la temperatura t, y la otra, a t_0, la fem desarrollada por el par puede expresarse muy aproximadamente por la ecuación de segundo grado

$$\varepsilon_{AB} = a_{AB}(t - t_0) + \tfrac{1}{2}b_{AB}\,(t^2 - t_0^2), \qquad [6\text{-}6]$$

en la que los coeficientes a_{AB} y b_{AB} son característicos de los metales A y B. (Para cálculos más precisos puede incluirse un término en t^3.) La tabla 6-2 relaciona los valores de a y de b, respecto al plomo, para cierto número de metales y aleaciones. De la Ec. [6-5] se deduce:

$$a_{AB} = a_{\text{A-plomo}} - a_{\text{B-plomo}}; \quad b_{AB} = b_{\text{A-plomo}} - b_{\text{B-plomo}}.$$

La figura 6-12 representa una gráfica de ε en función de t, para a_{AB} y b_{AB} positivos, manteniendo t_0 constante; resulta evidentemente una parábola. Sin razón que lo justifique, a la derivada, $d\varepsilon/dt$, de la fem respecto de la temperatura se la llama corrientemente *potencia termoeléctrica* del par. La temperatura t_n para la cual $d\varepsilon/dt = 0$, se denomina *temperatura neutra*. Según la Ec. [6-6], si t_0 es constante,

$$\frac{d\varepsilon_{AB}}{dt} = a_{AB} + b_{AB}\, t,$$

y como

$$d\varepsilon/dt = 0 \text{ para } t = t_n,$$

$$t_n = -\frac{a_{AB}}{b_{AB}}$$

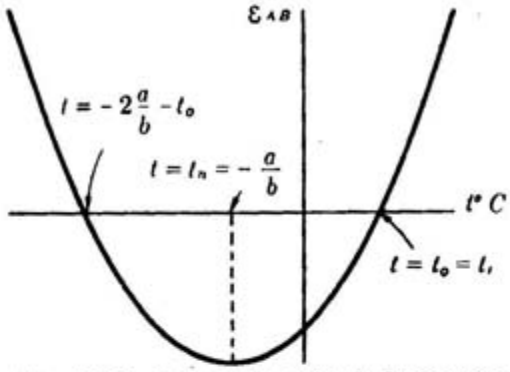


FIG. 6-12.—Fem en función de la temperatura t de la soldadura caliente cuando se mantiene la soldadura fría a la temperatura t_0.

TABLA 6-2

Coeficientes termoeléctricos

Metal de referencia, plomo. ε_{AB} en microvoltios. Cuando ε_{AB} es positiva, el sentido (convencional) de la corriente es, en la soldadura caliente, del metal A al B.

SUSTANCIA	a	b
Antimonio	+35,6	+0,145
Bismuto	−74,4	+0,032
Constantán (60 % Cu, 40 % Ni)	−38,1	+0,0888
Cobre	+ 2,71	+0,0079
Hierro	+16,7	−0,0297
Níquel	−19,1	−3,02
Platino	− 3,03	−3,25

NOTA: Estas cifras deben utilizarse con reservas. Pequeñas cantidades de impurezas, o variaciones en el tratamiento térmico, tienen un efecto muy pronunciado sobre los coeficientes termoeléctricos, y los valores dados sólo deben tomarse como típicos.

La fem es nula a las temperaturas

$$t = t_0 \quad \text{y} \quad t = -\frac{2a_{AB}}{b_{AB}} - t_0,$$

que son las dos raíces de la Ec. [6-6] cuando $\varepsilon_{AB} = 0$. La segunda de estas temperaturas se denomina *temperatura de inversión*, t_i.

Para la mayor parte de los metales o de las aleaciones corrientemente utilizadas en los circuitos de los pares termoeléctricos, el intervalo de

funcionamiento está suficientemente alejado del punto neutro, y la relación entre la fem y la temperatura de la soldadura caliente resulta aproximadamente lineal si se mantiene constante la temperatura de la soldadura fría.

EJEMPLO.—Una de las soldaduras de un par termoeléctrico hierro-cobre se mantiene a 0° C. Calcúlese la temperatura neutra, la temperatura de inversión y la fem cuando la otra soldadura se encuentra a 200° C. Consideremos el hierro como metal A y el cobre como metal B.

En virtud de la tabla 6-2,

$$a_{\text{hierro-plomo}} = 16{,}7, \qquad b_{\text{hierro-plomo}} = -\,0{,}0297,$$

$$a_{\text{cobre-plomo}} = 2{,}71, \qquad b_{\text{cobre-plomo}} = 0{,}0079.$$

Por tanto,

$$a_{\text{hierro-cobre}} = 16{,}7 - 2{,}71 = 14{,}0,$$

$$b_{\text{hierro-cobre}} = -\,0{,}0297 - 0{,}0079 = -\,0{,}0376.$$

La temperatura neutra es

$$t_n = -\frac{a}{b} = -\frac{14{,}0}{-\,0{,}0376} = 372^\circ\,\text{C},$$

y la temperatura de inversión,

$$t_i = -\frac{2a}{b} = 744^\circ\,\text{C}.$$

La expresión general de la fem es

$$\varepsilon_{AB} = 14{,}0\,(t - t_0) - \tfrac{1}{2} \times 0{,}0376\,(t^2 - t_0^2),$$

y para $t = 200^\circ$ C, $t_0 = 0^\circ$ C,

$$\varepsilon_{AB} = 14{,}0 \times 200 - \tfrac{1}{2} \times 0{,}0376 \times (200)^2$$
$$= 2050\mu\text{V} = 2{,}05\ \text{mV}.$$

Puesto que ε_{AB} es positiva, el sentido (convencional) de la corriente es, en la soldadura caliente, del hierro (metal A) al cobre (metal B).

Un razonamiento teórico basado en el segundo principio de termodinámica demuestra que las fuerzas electromotrices Seebeck, Peltier y Thomson están relacionadas mediante las siguientes ecuaciones:

$$(\pi_{AB})_T = T\frac{d\varepsilon_{AB}}{dT}, \qquad [6\text{-}7]$$

$$(\sigma_A - \sigma_B) = -\,T\frac{d^2\varepsilon_{AB}}{dT^2} \qquad [6\text{-}8]$$

EJEMPLO.—Calcúlense las fuerzas electromotrices Peltier y Thomson de un par termoeléctrico hierro-cobre cuyas soldaduras se encuentran a 200° C y 0° C.

En función de las temperaturas centígradas, la Ec. [6-7] se convierte en

$$(\pi_{AB})_t = (t + 273)\left(\frac{d\varepsilon_{AB}}{dt}\right)$$

$$= (t + 273)\,(a_{AB} + b_{AB}t).$$

Por tanto, utilizando los valores de a_{AB} y b_{AB} del ejemplo anterior, se obtienen para las fuerzas electromotrices Peltier en las soldaduras:

$$(\pi_{\text{hierro-cobre}})_{100^\circ\,\text{C}} = 473 \times (14{,}0 - 0{,}0376 \times 200) = 3070\ \mu\text{V},$$

$$(\pi_{\text{hierro-cobre}})_{0^\circ\,\text{C}} = 273 \times 14{,}0 = 3820\ \mu\text{V}.$$

La fem Thomson puede calcularse como sigue: puesto que

$$\frac{d^2\varepsilon}{dT^2} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{d}{dt}(a + bt) = b,$$

tenemos:

$$\text{fem Thomson} = \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_A - \sigma_B)\,dT = \int_{T_1}^{T_2} -T\,\frac{d^2\varepsilon}{dT^2}\,dT$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} -bT\,dT = \frac{b}{2}(T_1^2 - T_2^2)$$

$$= \frac{-0{,}0376}{2}(273^2 - 473^2)$$

$$= 2800\ \mu\text{V}.$$

La fem neta o fem Seebeck es, por tanto,

$$\varepsilon = 3070 - 3820 + 2800 = 2050\ \mu\text{V},$$

que coincide con el resultado del ejemplo anterior.

PROBLEMAS

6-1. Se hace referencia al ejemplo de la sección 6-20. *a*) Calcúlese la fem de un par termoeléctrico hierro-cobre cuando se mantiene una soldadura a 0°C, y la otra, a las temperaturas siguientes: −200°C, 0°C, 372°C, 744°C, 1 000°C. *b*) Repítanse los cálculos para el caso en que una soldadura se mantiene a 200°C. *c*) Constrúyanse gráficas correspondientes a las respuestas de las partes *a*) y *b*). ¿Podría realmente utilizarse la soldadura para medir una temperatura de 1 000°C?

6-2. Una soldadura de un par termoeléctrico cobre-constantán se encuentra a 20°C y la otra a 300°C. *a*) Calcúlese la fem. *b*) ¿Es igual la fem si una soldadura se encuentra a 120°C y la otra a 400°C?

6-3. Calcúlese la fem de un par termoeléctrico bismuto-antimonio cuando una soldadura se encuentra a 0°C, y la otra, a 100°C. Compárese con la fem de un par hierro-cobre cuyas soldaduras estén a las mismas temperaturas.

6-4. *a*) Calcúlese la fem Peltier en una soldadura antimonio-bismuto a la temperatura de 20°C. *b*) Si se envía una corriente de 20 A a través de la soldadura, hállese la cantidad de energía térmica transformada en energía eléctrica por unidad de tiempo, o viceversa. *c*) ¿Cuál debería ser el sentido de la corriente en la soldadura para producir un efecto de enfriamiento?

CAPÍTULO VII

PROPIEDADES DE LOS DIELÉCTRICOS

7-1. Cargas inducidas.—Cuando un cuerpo descargado de cualquier clase, conductor o dieléctrico, se coloca dentro de un campo eléctrico, se produce siempre una redistribución de las cargas del cuerpo. Si el cuerpo es conductor, los electrones libres situados dentro de él se mueven de modo que en el interior del conductor el campo se anule y constituya un volumen equipotencial. Si el cuerpo no es conductor, los electrones y los núcleos positivos de cada molécula se desplazan por la acción del campo, pero puesto que no hay cargas libres que puedan moverse indefinidamente, el interior del cuerpo no se convierte en un volumen equipotencial. La carga neta del cuerpo en ambos casos sigue siendo nula (se supone que el conductor está aislado de otros cuerpos de los cuales pudiera recibir carga), pero ciertas regiones del mismo adquieren un exceso de cargas positivas o negativas, llamadas *cargas inducidas*. En este capítulo nos ocuparemos principalmente de los fenómenos producidos en un dieléctrico cuando se encuentra en un campo exterior; pero, a modo de introducción, consideremos en primer lugar la distribución de cargas en un *conductor*, inicialmente descargado, que tiene forma de lámina, cuando se introduce en el campo creado por dos conductores planos y paralelos que poseen cargas iguales y opuestas. Despreciando la dispersión en los bordes, el campo es uniforme en la región comprendida entre las dos láminas, como indica la figura 7-1(*a*).

En la figura 7-1(*b*) se ha introducido en el campo un conductor descargado, sin tocar a ninguna de las láminas cargadas. Las cargas libres del conductor se reagrupan inmediatamente, tan pronto como el conduc-

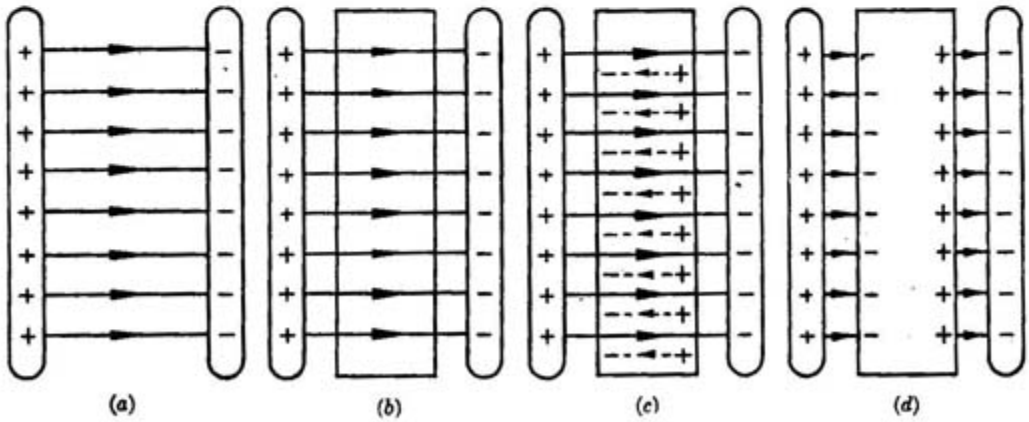


FIG. 7-1.—(*a*) Campo eléctrico entre dos láminas cargadas. (*b*) Introducción de un conductor. (*c*) Cargas inducidas y su campo. (*d*) Campo resultante cuando un conductor se encuentra entre dos láminas cargadas.

tor es introducido en el campo; pero supongamos, por el momento, que no lo hacen así; entonces, el campo penetra en el conductor, y bajo la influencia de este campo los electrones libres del conductor se mueven hacia la superficie izquierda, dejando una carga positiva sobre la superficie derecha. Este movimiento continúa hasta que en todos los puntos dentro del conductor el campo creado por las capas superficiales de carga es igual y opuesto al campo inicial. Después, el movimiento de cargas cesa y las cargas que quedan sobre la superficie del conductor se denominan *cargas inducidas*. La carga neta del conductor continúa siendo nula.

El campo creado por las cargas inducidas está representado por líneas de trazos en la figura 7-1(*c*). El campo resultante está indicado en la figura 7-1(*d*). Dentro del conductor, el campo es nulo en todas partes. En el espacio comprendido entre el conductor y las láminas el campo es el mismo que antes de introducir el conductor. Todas las líneas de fuerza que se inician sobre la lámina positiva terminan sobre las cargas negativas inducidas en la cara izquierda del conductor. Un número igual de líneas de fuerza, que parten de las cargas positivas inducidas sobre la cara derecha del conductor, terminan sobre las cargas negativas de la otra lámina. Las cargas inducidas en las caras del conductor son iguales y de signo opuesto a las cargas iniciales sobre las láminas, y, en lo que concierne al interior del conductor, neutralizan efectivamente las cargas sobre las láminas. Por consiguiente, el campo en el interior del conductor es nulo.

Consideremos el comportamiento de un dieléctrico en el mismo campo eléctrico. Para nuestro propósito actual las moléculas de un dieléctrico

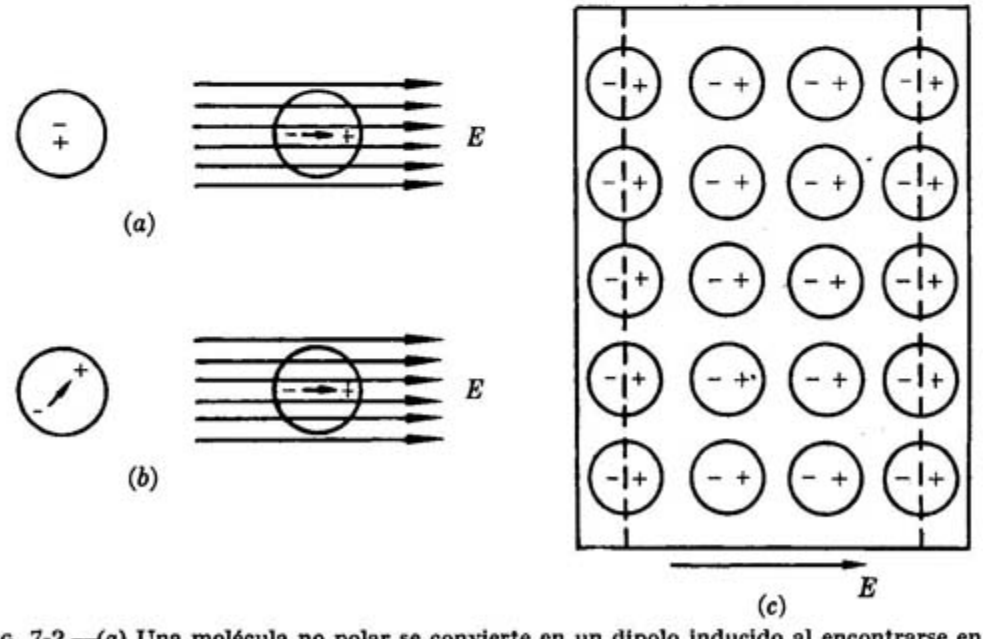


FIG. 7-2.—(*a*) Una molécula no polar se convierte en un dipolo inducido al encontrarse en un campo exterior. (*b*) Una molécula polar o dipolo permanente se orienta en la dirección de un campo exterior. (*c*) Moléculas polarizadas de un dieléctrico en un campo exterior, *E*, dirigido de izquierda a derecha.

pueden clasificarse en *polares* o *no polares*. Una molécula no polar es aquella en la cual *los centros de gravedad* de los protones y electrones coinciden, mientras que en una molécula polar no coinciden. Bajo la influencia de un campo eléctrico las cargas de una molécula no polar se desplazan, como indica la figura 7-2(*a*). Se dice que la molécula se ha *polarizado* por la acción del campo, y se la denomina *dipolo inducido*, de momento dipolar (Sec. 2-3) igual al producto de una de las cargas por la distancia que las separa. El efecto de un campo eléctrico sobre una molécula polar es orientarla en la dirección del campo, como indica la figura 7-2(*b*). El momento dipolar puede aumentar, así, por el campo eléctrico. Una molécula polar se denomina *dipolo permanente*.

Cuando una molécula no polar se convierte en polarizada, entran en juego fuerzas recuperadoras sobre las cargas desplazadas. Éstas son las fuerzas de ligadura entre las partículas que mantienen la molécula unida. En parte, al menos, estas fuerzas son de origen eléctrico; pero, cualquiera que sea su origen, podemos considerarlas del mismo tipo que las fuerzas recuperadoras elásticas, que tienden a juntar las partículas desplazadas como si estuvieran unidas por un resorte. Bajo la influencia de un campo exterior dado, las cargas se separan hasta que la fuerza de ligadura es igual y opuesta a la fuerza ejercida sobre las cargas por el campo. Naturalmente, las fuerzas de ligadura varían en magnitud de una clase de molécula a otra, con las correspondientes diferencias en el desplazamiento producido por un campo dado.

Si la polarización es inducida o debida a la alineación de dipolos permanentes, la distribución de cargas dentro de las moléculas de un dieléctrico situado en un campo exterior será la representada en la figura 7-2(*c*). Tanto el dieléctrico entero como sus moléculas aisladas, se dice que están polarizados. En el interior de las dos capas superficiales infinitamente delgadas que indican las líneas de trazos, hay un exceso de carga, negativa en una capa y positiva en la otra. Estas capas constituyen las cargas superficiales inducidas. Sin embargo, las cargas no son libres, sino que cada una está ligada a un átomo que se encuentra en la superficie o próximo a ella. Dentro del resto del dieléctrico la carga neta sigue siendo nula. El estado interior de un dieléctrico polarizado se caracteriza, por tanto, no por un exceso de carga, sino por un desplazamiento relativo de las cargas dentro de él.

Las cuatro partes de la figura 7-3, que deben compararse atentamente con las de la figura 7-1, aclaran el comportamiento de una lámina de dieléctrico cuando se introduce en el campo creado por un par de láminas planas y paralelas que poseen cargas del mismo valor y signo opuesto. La figura 7-3(*a*) representa el campo inicial. La figura 7-3(*b*) es el estado de cosas existente después de introducir el dieléctrico, pero antes de producirse ninguna redistribución de cargas. La figura 7-3(*c*) representa, por líneas de trazos, el campo creado dentro del dieléctrico por sus cargas superficiales inducidas. Como en la figura 7-1(*c*), este campo es opuesto al campo inicial, pero dado que las cargas en el dieléctrico no son

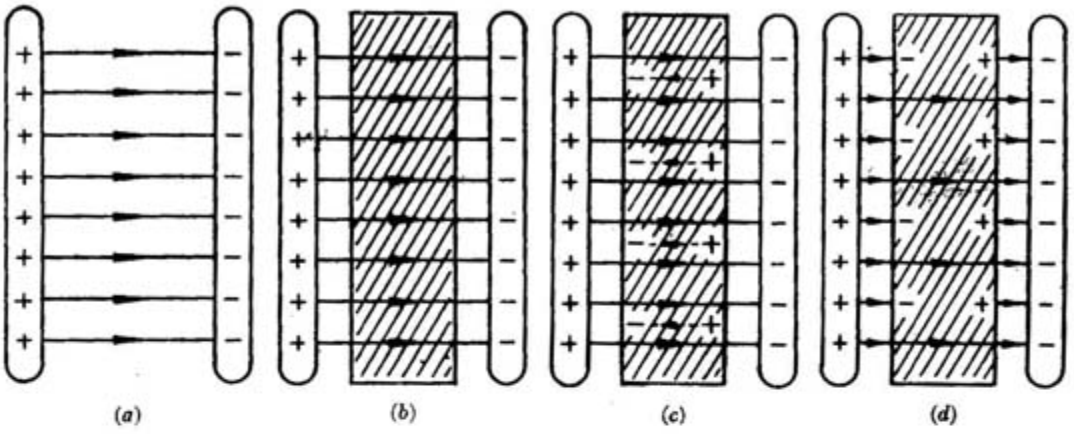


FIG. 7-3.—(*a*) Campo eléctrico entre dos láminas cargadas. (*b*) Introducción de un dieléctrico. (*c*) Cargas inducidas sobre la superficie, y campo creado por ellas. (*d*) Campo resultante cuando se introduce un dieléctrico entre láminas cargadas.

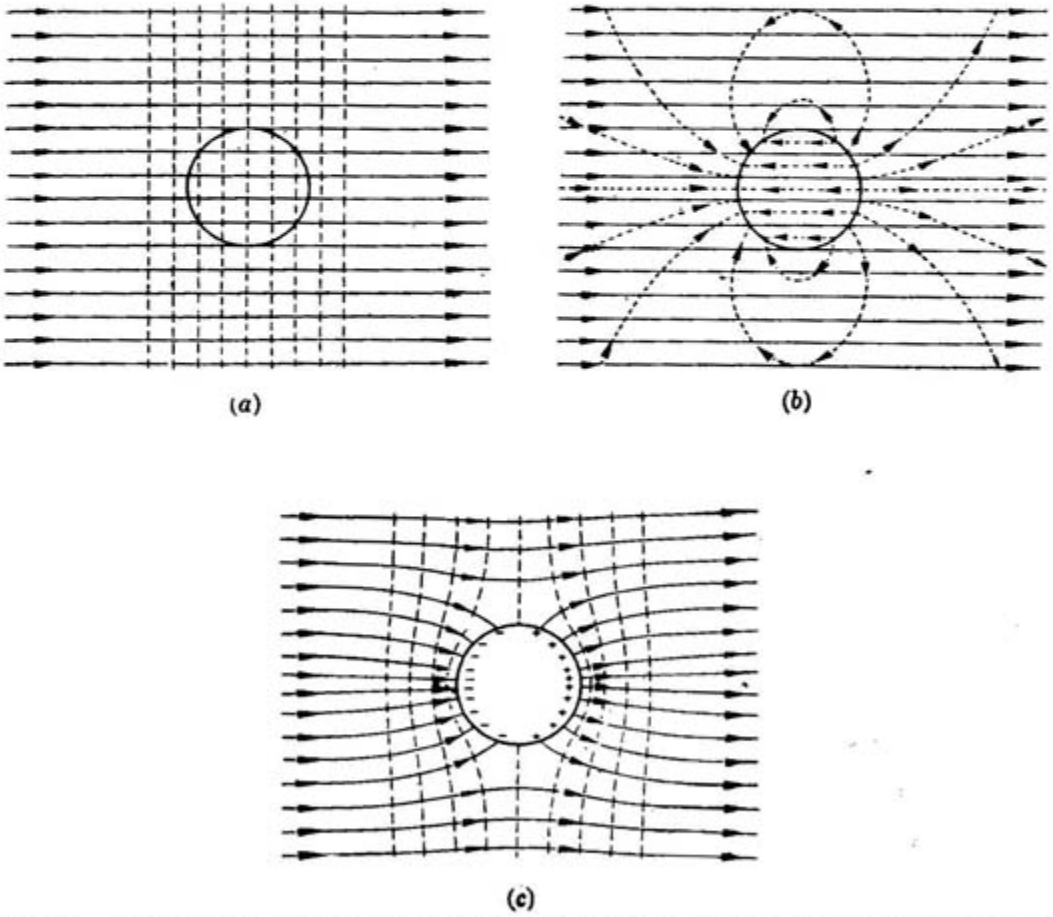


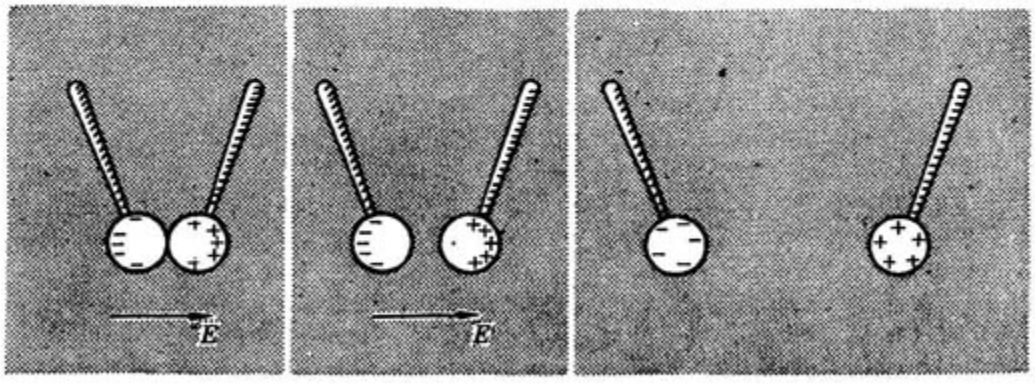
FIG. 7-4.—(*a*) Esfera conductora en un campo eléctrico exterior. (*b*) El campo debido a las cargas inducidas está representado por las líneas de trazos. (*c*) Líneas de fuerza resultantes y superficies equipotenciales de una esfera conductora en un campo eléctrico.

libres de moverse indefinidamente, su desplazamiento no continúa hasta un estado tal que el campo inducido iguale en intensidad al campo inicial. El campo dentro del dieléctrico está, por tanto, *debilitado*, pero no anulado.

El campo resultante está representado en la figura 7-3(*d*). Algunas de las líneas de fuerza que salen de la lámina positiva, penetran en el dieléctrico; otras terminan en las cargas inducidas sobre las caras de este dieléctrico.

7-2. Cargas inducidas sobre esferas.—Tiene cierto interés considerar las cargas inducidas sobre un conductor o aislador esférico cuando se introduce en un campo inicialmente uniforme. La esfera conductora se ha representado en la figura 7-4. Como en la figura 7-1, las cargas libres interiores de la esfera se reagrupan de tal modo que producen un campo nulo en los puntos interiores. El campo de las cargas inducidas está representado por las líneas de trazos de la figura 7-4(*b*), y el campo resultante de este último y del inicial puede verse en la figura 7-4(*c*). Se han representado también las intersecciones con el plano del dibujo de algunas superficies equipotenciales, una de las cuales es la superficie de la esfera. Puesto que las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales son perpendiculares entre sí, las líneas de fuerza cortan a la superficie de la esfera formando ángulo recto.

Las mismas leyes físicas se cumplen cualquiera que sea la forma de un conductor, pero las expresiones matemáticas del campo y de la distribución de carga son extraordinariamente complicadas salvo para esferas y elipsoides. Así, si dos esferas conductoras en contacto se colocan en un campo, una de ellas adquiere un exceso de carga positiva, y la otra, un exceso de carga negativa por haberse producido una distribución de cargas tal que ambas esferas quedan al mismo potencial, anulándose el campo dentro de ellas. Si se separan ligeramente cuando todavía están en el campo y después se sacan de él, las cargas inducidas quedan *atrapadas* sobre las esferas y pueden reconocerse fácilmente con un electroscopio. Véase la figura 7-5.



(*a*) (*b*) (*c*)

FIG. 7-5.—(*a*) Esferas conductoras en contacto dentro de un campo. (*b*) Esferas ligeramente separadas mientras están todavía en el campo. (*c*) Las esferas quedan cargadas con cargas opuestas cuando se suprime el campo.

En la figura 7-6 se representa una esfera dieléctrica colocada en un campo inicialmente uniforme. Como en la figura 7-3, las cargas inducidas en la superficie debilitan el campo en la esfera, pero no lo anulan. Existe campo tanto en el interior como en el exterior de la esfera y, por tanto, la superficie de la misma no es equipotencial, y las líneas de fuerza no la cortan perpendicularmente.

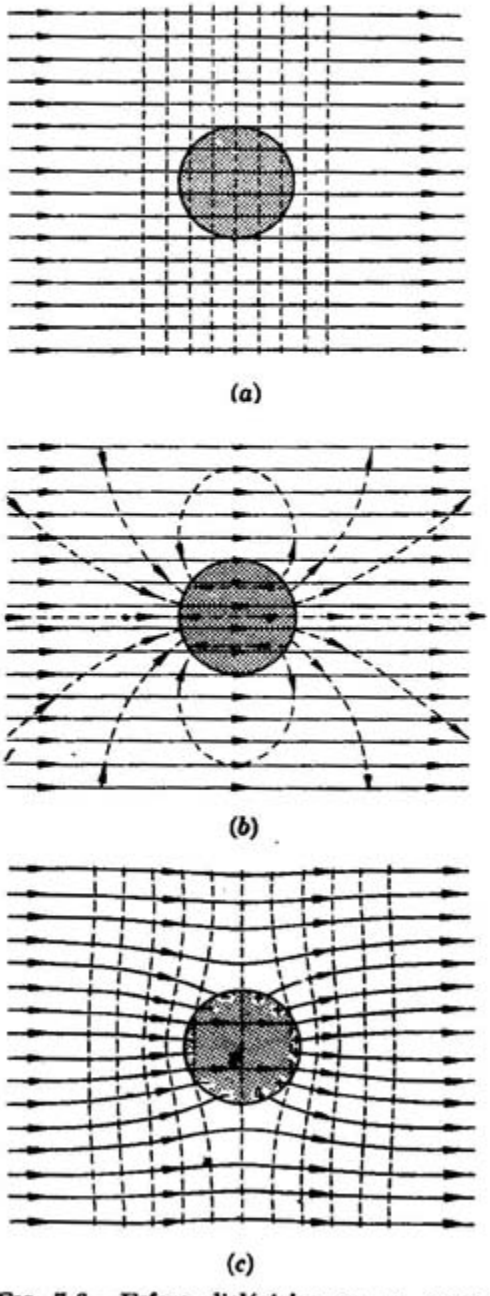


FIG. 7-6.—Esfera dieléctrica en un campo eléctrico inicialmente uniforme.

Las cargas inducidas sobre la superficie de un dieléctrico esférico en un campo exterior proporcionan una explicación de la atracción de una bolita de medula de saúco o de un trocito de papel *descargados*, por una varilla de vidrio, o de ebonita, cargada. En la figura 7-6, cuando el campo exterior es uniforme, la *fuerza* resultante sobre la esfera es nula, puesto que las fuerzas sobre las cargas positivas y negativas inducidas son iguales y opuestas. Sin embargo, si el campo *no* es uniforme, las cargas inducidas están en regiones donde la intensidad del campo eléctrico es diferente y la fuerza que actúa en un sentido no es igual a la que actúa en sentido opuesto.

La figura 7-7 representa una esfera dieléctrica, *B*, descargada,

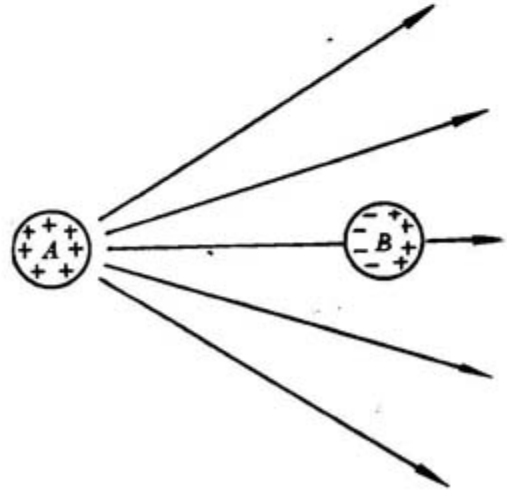


FIG. 7-7.—Esfera dieléctrica descargada, *B*, en el campo radial de una carga positiva, *A*.

dentro del campo radial creado por una carga positiva, A. Las cargas positivas inducidas sobre B experimentan una fuerza dirigida hacia la derecha, mientras que la fuerza sobre las cargas negativas es hacia la izquierda. Puesto que las cargas negativas están más próximas a A que las positivas y, por consiguiente, en un campo más intenso, la fuerza hacia la izquierda es mayor que la fuerza hacia la derecha, y, aunque su carga neta es cero, B experimenta una fuerza resultante dirigida hacia A. El signo de la carga de A no afecta al resultado, como puede verse fácilmente. Además, el efecto no está limitado a los dieléctricos, pues una esfera conductora sería atraída análogamente.

Razonamientos más generales, basados en consideraciones energéticas, demuestran que un cuerpo dieléctrico colocado en un campo eléctrico, no uniforme, experimenta siempre una fuerza que tiende a moverlo desde una región donde el campo es débil a otra región donde el campo es más intenso, siempre que el coeficiente dieléctrico del cuerpo (definido en la sección 7-3) sea mayor que el del medio que lo rodea. Si el coeficiente dieléctrico es menor, se verifica lo contrario.

7-3. Susceptibilidad, coeficiente dieléctrico y capacidad específica de inducción.—El campo entre un par de láminas que poseen cargas opuestas y las cargas inducidas sobre las superficies de un dieléctrico contiguo a las láminas están representados en la figura 7-8. Se supone que el dieléctrico se extiende de una lámina a la otra, pero en el diagrama se ha dejado un pequeño espacio entre sus superficies y las de las láminas, para mayor claridad. Despreciando el efecto de los bordes, la densidad superficial de las cargas inducidas sobre el dieléctrico será uniforme por razón de simetría. Representemos por σ_i la carga inducida por unidad de superficie del dieléctrico, y por σ, la carga por unidad de superficie de las láminas. La primera se llama frecuentemente carga *ligada*, y la segunda, carga *libre*.

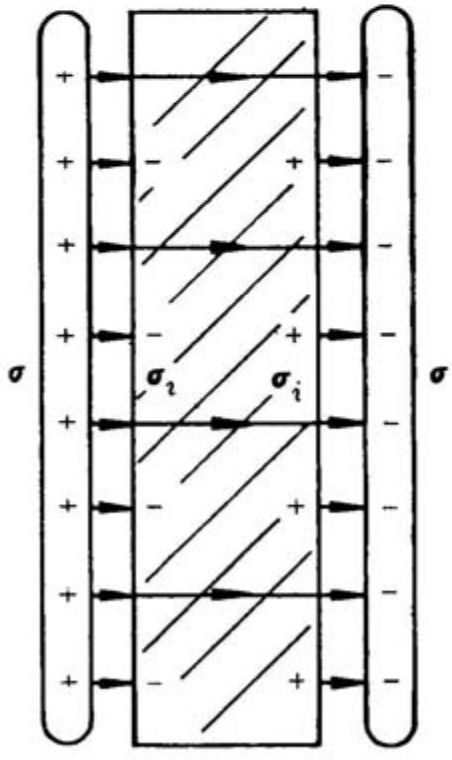


FIG. 7-8.—Cargas inducidas sobre las caras de un dieléctrico en un campo exterior.

Las cargas inducidas neutralizan *una parte* de las cargas libres y reducen la densidad superficial efectiva de σ a $\sigma - \sigma_i$. El campo eléctrico resultante dentro del dieléctrico es, por consiguiente,

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma_i) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma - \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_i. \quad [7\text{-}1]$$

El término $\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$ representa la componente del campo resultante debida a las cargas libres localizadas en las láminas. El término $\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_i$, de sentido contrario, es el creado por las cargas inducidas.

Puesto que las cargas inducidas son originadas por el campo E, su valor dependerá del de E y también del material que forme el dieléctrico. La razón de la densidad de carga inducida σ_i a la intensidad E del campo eléctrico resultante se denomina *susceptibilidad eléctrica* del material y se representa por η:[1]

$$\eta = \frac{\sigma_i}{E}, \quad \sigma_i = \eta E. \qquad [7\text{-}2]$$

Cuanto mayor es la susceptibilidad de un material, tanto mayor es la carga inducida en un campo dado. La experiencia demuestra que a temperatura constante y, en campos que no son demasiado grandes, la susceptibilidad de un material dado es constante e independiente de E. Esto es, la densidad superficial de carga inducida es proporcional al campo resultante. En la columna primera de la tabla 7-1 figuran algunos valores típicos de la susceptibilidad. El término *susceptibilidad del vacío* no es más que una forma de expresión. Tal como hemos definido la susceptibilidad, su valor ha de ser nulo, puesto que en el vacío no existen átomos cuyas cargas puedan ser desplazadas por un campo eléctrico. Las dimensiones de la susceptibilidad son las de una densidad superficial de carga dividida por una intensidad de campo eléctrico, o sea, en el sistema mks,

$$\frac{\text{coul}}{\text{m}^2} : \frac{\text{newton}}{\text{coul}} = \frac{\text{coul}^2}{\text{newton-m}^2}$$

En función de la susceptibilidad, la Ec. [7-1] se convierte en

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma - \frac{1}{\varepsilon_0}\eta E,$$

o sea,

$$E = \frac{\sigma}{\left(1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0}\right)\varepsilon_0} \qquad [7\text{-}3]$$

Representemos el término $\left(1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0}\right)$ por el símbolo K_e,

$$\boxed{K_e = 1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0}} \qquad [7\text{-}4]$$

[1] Véase, sin embargo, la sección 7-6, en la que se da una definición más general de susceptibilidad eléctrica.

y la Ec. [7-3] se convierte entonces en

$$E = \frac{1}{K_e \varepsilon_0} \sigma. \qquad [7\text{-}5]$$

La magnitud K_e se denomina *coeficiente dieléctrico* del material, y la Ec. [7-4] puede considerarse como su definición. Esta magnitud es conocida también por otros nombres, y suele representarse frecuentemente por otros símbolos. Algunos autores la denominan *constante dieléctrica*, y utilizan el símbolo ε. Pero no resulta muy acertado hablar de una *constante*, ya que puede depender de la temperatura y de la intensidad del campo eléctrico.

El coeficiente dieléctrico de una sustancia es un número abstracto, puesto que η/ε_0 también lo es. (Tanto las unidades mks de η como de ε_0 son coul²/newton-m².) En la segunda columna de la tabla 7-1 figuran algunos valores típicos. En el vacío, donde $\eta = 0$, es $K_e = 1$.

Las Ecs. [7-1] y [7-5] son enteramente equivalentes en contenido físico. La primera expresa el campo resultante E en el dieléctrico como *diferencia* entre el campo creado por las cargas libres y el creado por las ligadas. La última expresa el campo como *fracción* del correspondiente a las cargas libres.

Aunque en este caso especial (capa de dieléctrico entre un par de láminas paralelas) la intensidad del campo eléctrico dentro del dieléctrico es $\frac{1}{K_e}$ de su valor antes de introducir este último, no se cumple la misma reducción proporcional del campo en todos los casos; p. ej., si se introduce un dieléctrico esférico en un campo uniforme, como en la figura 7-6. la razón del campo resultante dentro de la esfera al campo original es

$$\frac{3}{K_e + 2}$$

El producto $K_e \varepsilon_0$, que aparece en el denominador de la Ec. [7-5], se denomina *capacidad específica de inducción* del dieléctrico y se representa por ε:

$$\boxed{\varepsilon = K_e \varepsilon_0} \qquad [7\text{-}6]$$

En el vacío, donde $K_e = 1$,

$$\varepsilon = \varepsilon_0.$$

La magnitud ε_0 puede describirse, por tanto, como la *capacidad específica de inducción del vacío*. La expresión no es afortunada, porque en sentido físico las magnitudes susceptibilidad eléctrica η, coeficiente dieléctrico $K_e = 1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0}$ y capacidad específica de inducción $\varepsilon = K_e \varepsilon_0$, son formas diversas de describir el desplazamiento relativo o la orientación de las cargas positivas y negativas situadas en el interior de una sustancia cuando ésta se encuentra en un campo eléctrico exterior. Natu-

ralmente, tales efectos no pueden tener lugar en el vacío, y la expresión «capacidad específica de inducción del vacío» es, en el mejor de los casos, poco afortunada. Sería de desear un perfeccionamiento de la terminología y de la notación en relación con estos conceptos.

Las unidades de ε y ε_0 son evidentemente las mismas, coul²/new-m², puesto que K_e es un número abstracto. En la tercera columna de la tabla 7-1 figuran algunos valores típicos.

Las propiedades dieléctricas de una sustancia están completamente determinadas si se conoce una cualquiera de las tres magnitudes, susceptibilidad eléctrica η, coeficiente dieléctrico K_e o capacidad específica de inducción ε, que están ligadas por las siguientes ecuaciones:

$$K_e = 1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0};$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0 K_e = \varepsilon_0 + \eta; \qquad [7\text{-}7]$$
$$\eta = \varepsilon_0(K_e - 1) = \varepsilon - \varepsilon_0$$

La única razón de introducir estas tres magnitudes es simplificar la forma de ciertas ecuaciones usuales.

TABLA 7-1

Susceptibilidad eléctrica η, coeficiente dieléctrico K_e y capacidad específica de inducción ε

(Datos tomados del *Handbook of Chemistry and Physics*, 26.ª ed.)

Sustancia	η (coul²/new-m²)	$K_e = 1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0}$	$\varepsilon = K_e\,\varepsilon_0$ coul²/new-m²
Vacío	0	1	$\frac{1}{36\pi \times 10^9} = 8{,}85 \times 10^{-12}$
Azufre	26×10^{-12}	4	35×10^{-12}
Ebonita	13—290	2,5—35	22—300
Hielo (—5° C)	17	2,9	26
Madera	13— 60	2,5—8	22— 70
Mica	18— 45	3—6	27— 54
Vidrio	35— 80	5—10	45— 90
Agua	708×10^{-12}	81	717×10^{-12}
Alcohol etílico (0° C)	243	28,4	252
Alcohol etílico (—120° C)	474	54,6	483
Alcohol etílico (congelado)	14	2,7	23
Benceno (180° C)	11	2,3	20
Glicerina (15° C)	491	56	500
Petróleo	9	2	18
Aire (1 atm)		1,00059	
Aire (100 atm)		1,0548	
CO_2 (1 atm)		1,000985	
CO_2 (40 atm)		1,060	
H_2 (1 atm)		1,000264	
Vapor de agua (4 atm)		1,00705	

EJEMPLO 1.—La susceptibilidad eléctrica de una sustancia es $35{,}4 \times 10^{-12}$ coul²/new-m². ¿Cuáles son los valores del coeficiente dieléctrico y de la capacidad específica de inducción para dicha sustancia?

$$\eta = 35{,}4 \times 10^{-12} \text{ coul}^2/\text{new-m}^2.$$

Coeficiente dieléctrico $K_e = 1 + \dfrac{\eta}{\varepsilon_0}$

$$= 1 + \frac{35{,}4 \times 10^{-12}}{8{,}85 \times 10^{-12}}$$

$$= 1 + 4$$

$$= 5 \text{ (sin dimensiones).}$$

Capacidad específica de inducción $\varepsilon = K_e\, \varepsilon_0$

$$= 5 \times 8{,}85 \times 10^{-12}$$

$$= 44{,}3 \times 10^{-12} \text{ coul}^2/\text{new-m}^2.$$

EJEMPLO 2.—Dos láminas paralelas, de 1 m² de superficie, reciben cargas iguales y opuestas de 30 μcoul cada una. Una capa de dieléctrico de capacidad específica de inducción 15×10^{-12} coul²/new-m², ocupa el espacio comprendido entre ambas láminas. Calcúlese: *a*) el campo eléctrico resultante en el dieléctrico; *b*) la densidad superficial de carga inducida sobre las caras del mismo; *c*) la componente del campo resultante en el dieléctrico debida a la carga libre; *d*) la componente debida a la carga inducida.

a) La densidad superficial de carga libre es:

$$\sigma = \frac{q}{A} = 30 \times 10^{-6} \text{ coul/m}^2.$$

El campo eléctrico resultante vale:

$$E = \frac{1}{K_e \varepsilon_0}\,\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\,\sigma$$

$$= \frac{1}{15 \times 10^{-12}} \times 30 \times 10^{-6}$$

$$= 2 \times 10^6 \text{ V/m.}$$

b) Densidad superficial de carga inducida:

$$\sigma_i = \eta E = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, E$$

$$= (15 \times 10^{-12} - 8{,}85 \times 10^{-12}) \times 2 \times 10^6$$

$$= 12{,}3 \times 10^{-6} \text{ coul/m}^2.$$

c) La componente del campo resultante debida a la carga libre es:

$$E_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\sigma$$

$$= \frac{1}{8{,}85 \times 10^{-12}} \times 30 \times 10^{-6}$$

$$= 3{,}39 \times 10^6 \text{ V/m.}$$

d) La componente debida a la carga inducida vale:

$$E_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_i$$
$$= \frac{1}{8{,}85 \times 10^{-12}} \times 12{,}3 \times 10^{-6}$$
$$= 1{,}39 \times 10^6 \text{ V/m}.$$

El sentido es opuesto al de E_0.
El campo eléctrico resultante es:

$$E = E_0 - E_i$$
$$= 3{,}39 \times 10^6 - 1{,}39 \times 10^6$$
$$= 2 \times 10^6 \text{ V/m},$$

que coincide con la solución dada a la parte *a*).

7-4. Generalización del teorema de Gauss. Desplazamiento.—En la sección 2-6 hemos demostrado que el número de líneas de fuerza que atraviesan hacia afuera cualquier superficie cerrada situada en el vacío es igual a la cantidad de carga dentro de la superficie (teorema de Gauss). En lenguaje matemático,

$$\varepsilon_0 \int E \cos\varphi \, dA = q. \quad [7\text{-}8]$$

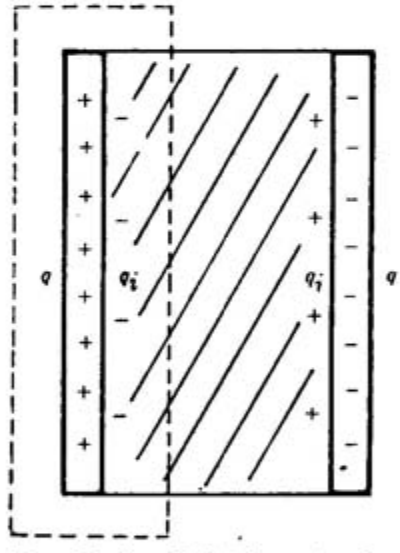


FIG. 7-9.—Lámina dieléctrica entre dos placas cargadas. La línea de trazos representa una superficie gaussiana.

Deseamos ahora generalizar este teorema al caso en que una superficie cerrada, o una parte de ella, atraviesa una sustancia dieléctrica. La figura 7-9 representa una capa de dieléctrico entre dos láminas cargadas con cargas iguales y opuestas, y una superficie de Gauss indicada por la línea de trazos, una parte de la cual atraviesa el dieléctrico. Representamos por σ la densidad superficial de carga sobre las láminas y por σ_i la densidad superficial de carga inducida sobre las caras del dieléctrico. Las cantidades correspondientes de carga son $q = \sigma A$ y $q_i = \sigma_i A$, siendo A el área de las láminas. El campo dentro del dieléctrico es:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma_i) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{A}(q - q_i).$$

Por tanto,

$$EA = \frac{1}{\varepsilon_0}(q - q_i). \quad [7\text{-}9]$$

Pero el producto $\varepsilon_0 EA$ es el número de líneas de fuerza que atraviesan hacia afuera la superficie de Gauss, puesto que el campo es nulo en todos los puntos de dicha superficie situados fuera del dieléctrico. El término $(q - q_i)$ es la carga *neta* encerrada en el interior de la superficie, esto es, la suma algébrica de las cargas libres y de las cargas inducidas. Por tanto, en la Ec. [7-8], la carga q ha de interpretarse como *la suma algébrica de todas las cargas encerradas dentro de la superficie, tanto libres como inducidas.* Para poner de manifiesto explícitamente este resultado, escribiremos la Ec. [7-8] en la forma siguiente:

$$\boxed{\varepsilon_0 \int E \cos \varphi \, dA = q + q_i} \qquad [7\text{-}10]$$

Tanto q como q_i se han escrito en la ecuación general como magnitudes positivas, pero se sobreentiende que hemos de efectuar su suma *algébrica.* Por tanto, si q_i es en realidad una carga *negativa,* como sucede en la figura 7-9, la *suma algébrica* $(q + q_i)$ se convierte en la *diferencia* de los valores absolutos de q y q_i, como en la Ec. [7-9].

Por otra parte, según la Ec. [7-5],

$$E = \frac{1}{K_e} \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma = \frac{1}{\varepsilon} \sigma = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q}{A},$$

y, por tanto,

$$(\varepsilon E) \times A = q. \qquad [7\text{-}11]$$

El producto de la intensidad del campo eléctrico resultante E en un punto cualquiera dentro de un dieléctrico por la capacidad específica de inducción ε en el mismo punto, se denomina *desplazamiento* en el punto, y se representa por D:

$$\boxed{D = \varepsilon E} \qquad [7\text{-}12]$$

Puesto que ε se mide en coul²/new-m², y E, en new/coul, las unidades del desplazamiento son coul/m²; es decir, las mismas que las de la densidad superficial de carga.

El desplazamiento, como el campo eléctrico, es una magnitud vectorial cuya dirección en cada punto es la misma que la del campo eléctrico E[1], pero cuya magnitud es ε veces la de E. Como el campo eléctrico, el desplazamiento puede representarse por líneas llamadas *líneas de desplazamiento.* La tangente a estas líneas en cada punto tiene la dirección del desplazamiento, y si hacemos que el número de estas líneas por unidad de superficie perpendicular a su dirección sea numéricamente igual al desplazamiento, el número de líneas de desplazamiento por unidad de área es igual, en cualquier punto, al número de líneas

[1] En un dieléctrico anisótropo las direcciones de D y E pueden ser distintas.

de fuerza por unidad de superficie en el mismo punto. En el vacío, para el cual $\varepsilon = \varepsilon_0$,

$$D = \varepsilon_0 E.$$

La Ec. [7-11] toma ahora la forma

$$DA = q. \qquad [7\text{-}12]$$

Pero el producto DA es igual al número de líneas de desplazamiento que atraviesan hacia afuera la superficie gaussiana en la figura 7-9, y q es la carga *libre* dentro de la superficie. Podemos generalizar según esto dicha relación y establecer que *la integral de superficie de la componente normal de D extendida a una superficie cerrada es igual a la carga libre encerrada por la superficie:*

$$\boxed{\int D \cos \varphi \, dA = q} \qquad [7\text{-}13]$$

El concepto de desplazamiento, tal como lo hemos definido, no tiene ninguna interpretación física directa análoga a la de fuerza por unidad de carga que dimos para la intensidad E del campo eléctrico. Puede considerarse simplemente como una magnitud auxiliar definida por la ecuación $D = \varepsilon E$, que tiene la propiedad notable de que su integral de superficie extendida a una superficie cerrada es igual a la carga *libre* encerrada por ésta.

EJEMPLO 1.—Calculemos de nuevo el campo eléctrico resultante en el interior del dieléctrico del ejemplo 2 de la sección 7-3, utilizando el concepto de desplazamiento. Cuando se aplica el teorema de Gauss (Ec. [7-13]) a una superficie cerrada que rodee a una cualquiera de las láminas y atraviese el dieléctrico, como indica la figura 7-9, se obtiene:

$$\int D \cos \varphi \, dA = DA = q.$$

Por consiguiente,

$$D = \frac{q}{A} = \sigma = 30 \times 10^{-6} \text{ coul/m}^2,$$

y

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{30 \times 10^{-6}}{15 \times 10^{-12}} = 2 \times 10^6 \text{ V/m}.$$

EJEMPLO 2.—La figura 7-10 representa un par de láminas paralelas cargadas con cargas de signos opuestos, entre las cuales se encuentran dos dieléctricos de espesores d_1 y d_2 y coeficientes dieléctricos K_{e_1} y K_{e_2}. Si E_1 y E_2 son las intensidades de los campos eléctricos en ambos dieléctricos, se tiene:

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = K_{e_1} \varepsilon_0 E_1; \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2 = K_{e_2} \varepsilon_0 E_2. \qquad [7\text{-}14]$$

Construyamos una superficie de Gauss como se indica por las líneas de trazos. Puesto que la carga *libre* dentro de la superficie es nula y el sentido de D es de izquierda a derecha en cada dieléctrico,

$$\int D \cos \varphi \, dA = - D_1 A + D_2 A = 0,$$

o sea,

$$D_1 = D_2. \qquad [7\text{-}15]$$

El desplazamiento es, por consiguiente, el mismo en cada dieléctrico.

De las Ecs. [7-14] y [7-15] deducimos:

$$K_{e_1} E_1 = K_{e_2} E_2$$

o sea,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{K_{e_2}}{K_{e_1}},$$

es decir, los campos eléctricos son inversamente proporcionales a los correspondientes coeficientes dieléctricos.

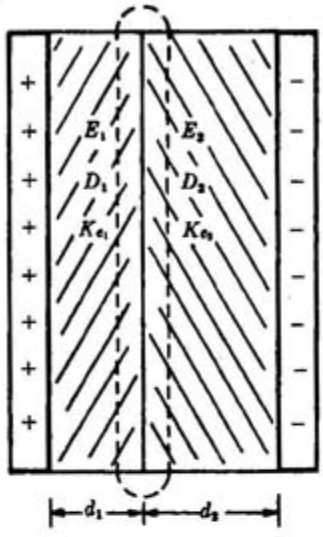


FIG. 7-10.—Dos dieléctricos de coeficientes distintos entre dos láminas cargadas con cargas opuestas.

7-5. Condiciones de contorno. Se ha demostrado en el ejemplo anterior que cuando dos sustancias que tienen coeficientes dieléctricos distintos están *en serie* entre dos láminas paralelas con cargas iguales y de signos opuestos, el desplazamiento D es el mismo en ambos dieléctricos, y los campos eléctricos están relacionados por la ecuación

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2,$$

o sea,

$$K_{e_1} E_1 = K_{e_2} E_2.$$

En este caso especial ambos vectores, D y E, son perpendiculares al plano que separa los dieléctricos. En el caso más general, de un cierto número de dieléctricos de forma arbitraria que se encuentran en un campo eléctrico, las direcciones de D y E pueden formar un ángulo cualquiera con la superficie que separa ambos dieléctricos, y, en general, hay una variación discontinua de las direcciones y magnitudes de D y E al atravesar la superficie de separación.

La figura 7-11 representa una pequeña porción de la superficie límite que separa dos dieléctricos de coeficientes respectivos K_{e_1} y K_{e_2}. El campo se encuentra para cada dieléctrico en el plano de la figura. Tomemos un eje X que coincida con la normal a la superficie, y representemos por φ_1 y φ_2 los ángulos formados por la normal y las respectivas direcciones de los campos.

Vamos a considerar en primer lugar un pequeño cilindro de bases A y altura despreciable, cuya superficie lateral sea perpendicular a la superficie límite. Puesto que no hay carga *libre* dentro de este cilindro,

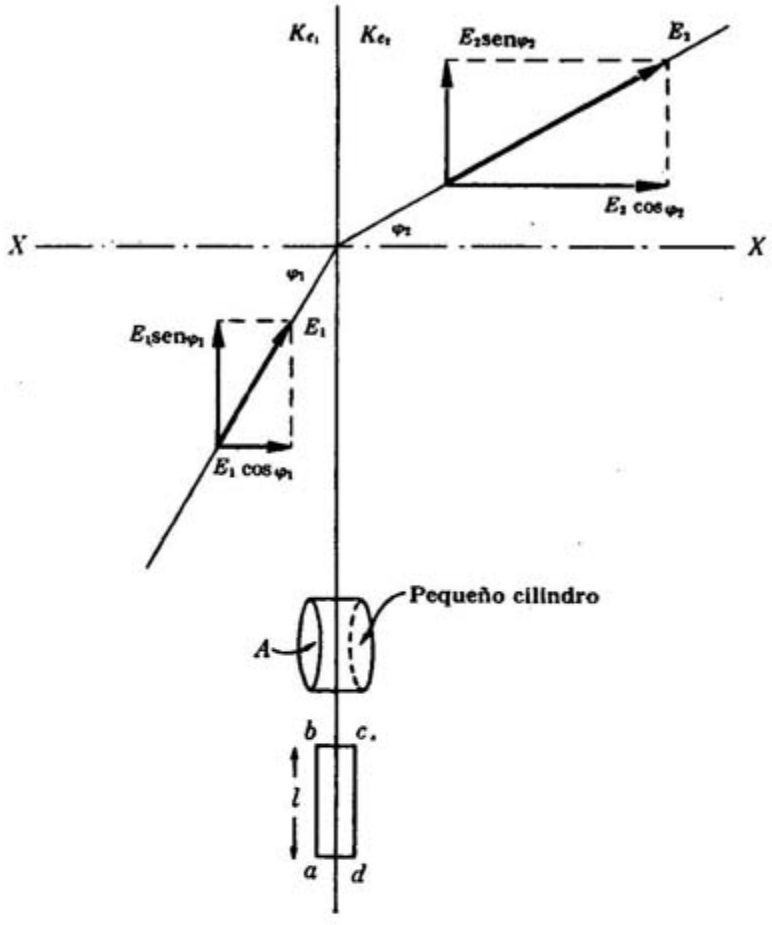


FIG. 7-11.—La componente normal de D y la componente tangencial de E son continuas al atravesar el límite de separación de dos dieléctricos.

la integral de superficie de la componente normal de D extendida a su superficie es nula. La superficie lateral del cilindro es despreciable, por serlo su altura, y lo mismo le sucede a la integral de superficie extendida a dicha superficie lateral. Para la integral de superficie correspondiente a la base de la izquierda, se tiene:

$$-AD_1 \cos \varphi_1,$$

y para la de la derecha,

$$AD_2 \cos \varphi_2.$$

Por consiguiente,

$$-AD_1 \cos \varphi_1 + AD_2 \cos \varphi_2 = 0,$$

y

$$D_1 \cos \varphi_1 = D_2 \cos \varphi_2. \qquad [7\text{-}16]$$

Se deduce que cuando la dirección de un campo eléctrico forma cierto ángulo arbitrario con la superficie que separa ambos dieléctricos,

la componente normal, $D \cos \varphi$, del desplazamiento tiene el mismo valor a ambos lados de la superficie, lo que se expresa corrientemente enunciando que *la componente normal, $D \cos \varphi$, del desplazamiento es continua a través de la superficie límite.*

Consideremos a continuación el contorno cerrado de perímetro *abcd*, que se encuentra en el plano de la figura. Hemos demostrado que, en un campo electrostático, la integral curvilínea de la intensidad E del campo eléctrico a lo largo de un contorno cerrado es nula. (Véase Sec. 3-3.) Los lados *bc* y *ad* del perímetro tienen una longitud despreciable y su contribución a la integral curvilínea es, asimismo, despreciable. A lo largo del lado *ab*, de longitud l, la integral es:

$$lE_1 \operatorname{sen} \varphi_1,$$

y a lo largo de *cd*,

$$-\, lE_2 \operatorname{sen} \varphi_2.$$

Por consiguiente,

$$lE_1 \operatorname{sen} \varphi_1 - lE_2 \operatorname{sen} \varphi_2 = 0,$$

o sea,

$$E_1 \operatorname{sen} \varphi_1 = E_2 \operatorname{sen} \varphi_2. \qquad [7\text{-}17]$$

En consecuencia, *la componente tangencial, $E \operatorname{sen} \varphi$, de la intensidad del campo eléctrico es continua a través de la superficie límite.*

Si se divide la Ec. [7-17] por la Ec. [7-16] se obtiene:

$$\frac{E_1 \operatorname{sen} \varphi_1}{D_1 \cos \varphi_1} = \frac{E_2 \operatorname{sen} \varphi_2}{D_2 \cos \varphi_2},$$

la cual, por ser $D_1 = K_{e_1} \varepsilon_0 E_1$ y $D_2 = K_{e_2} \varepsilon_0 E_2$, se reduce a

$$\frac{1}{K_{e_1}} \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{K_{e_2}} \operatorname{tg} \varphi_2,$$

o sea

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{K_{e_1}}{K_{e_2}}, \qquad [7\text{-}18]$$

relación análoga a la ley de Snell que rige la refracción de un rayo luminoso que atraviesa una superficie límite, por lo cual se la denomina a veces *ley de refracción* de las líneas de fuerza de un campo eléctrico.

7-6. Polarización.—Las cargas inducidas sobre la superficie de un dieléctrico situado en un campo eléctrico constituyen solamente un aspecto de la influencia del campo sobre el dieléctrico. Hemos demostrado que las cargas superficiales aparecen como resultado de la polarización u orientación de las moléculas del dieléctrico, de modo que se trata en realidad de un fenómeno de volumen y no meramente de un fenómeno superficial.

Se define el *momento dipolar* de una molécula polarizada como el producto de una de sus cargas, q, por la distancia que las separa, l. Supon-

gamos, para simplificar, que todas las moléculas polarizadas de un dieléctrico tienen el mismo momento dipolar ql y que hay n de estas moléculas por unidad de volumen, todas ellas alineadas en el mismo sentido. Entonces, el grado de polarización se medirá por el producto del momento dipolar de cada molécula por el número de ellas por unidad de volumen, o sea, el *momento dipolar por unidad de volumen*. Este producto se denomina *polarización* del dieléctrico y se representa por P:

$$P = nql. \qquad [7\text{-}19]$$

El momento dipolar por unidad de volumen puede expresarse de otro modo. Sea q_i la carga inducida en cada superficie de una lámina polarizada de área A y espesor d. Considerando la lámina entera como un gran dipolo, su momento dipolar es $q_i d$ y su momento dipolar por unidad de volumen, o polarización P, será:

$$P = \frac{q_i d}{Ad} = \frac{q_i}{A} = \sigma_i. \qquad [7\text{-}20]$$

Esto es, el *momento dipolar por unidad de volumen es igual* (en este caso especial) *a la densidad superficial de carga inducida*. Si se desea considerar la influencia del campo como fenómeno superficial, lo definiremos en función de la densidad superficial σ_i de carga inducida; pero si lo consideramos como fenómeno de volumen, se definirá en función del momento dipolar por unidad de volumen o polarización P. Ambos son numéricamente iguales, y de sus definiciones se deduce que ambos se expresan como carga por unidad de superficie.

La susceptibilidad eléctrica se definió en la sección 7-3 como razón de la densidad superficial de carga inducida a la intensidad del campo eléctrico resultante:

$$\eta = \frac{\sigma_i}{E}$$

Puesto que la polarización y la densidad de carga inducida son iguales, se puede definir también la susceptibilidad como razón de la polarización a la intensidad del campo eléctrico resultante:

$$\boxed{\eta = \frac{P}{E}, \quad P = \eta E} \qquad [7\text{-}21]$$

La Ec. [7-21], más bien que la anterior Ec. [7-2], constituye realmente la definición correcta de susceptibilidad eléctrica. En el caso especial de una lámina plana de material dieléctrico intercalada en un campo eléctrico perpendicular a sus caras, la polarización es constante a través del dieléctrico e igual numéricamente a la densidad superficial de carga inducida. En casos más generales la carga inducida puede

no estar enteramente confinada en las superficies del dieléctrico, y la polarización variará de un punto a otro. La susceptibilidad eléctrica se define, en cualquier punto, como la razón de la polarización en dicho punto a la intensidad del campo eléctrico en el mismo.

La polarización de un dieléctrico que tiene moléculas polares es debida en parte a dipolos inducidos y en parte a dipolos permanentes que resultan alineados paralelamente al campo. Pudiera parecer a primera vista que todos los dipolos permanentes se orientarán en la dirección del campo, por pequeño que éste sea, pero a esta tendencia a la alineación se opone, sin embargo, la agitación térmica de las moléculas, que tienden a destruir cualquier orientación regular y sustituirla por otra al azar. Cuanto más elevada es la temperatura, tanto mayor será la tendencia hacia la orientación al azar debida al movimiento térmico y menor la susceptibilidad. Por ello, aquellas sustancias cuyas moléculas son dipolos permanentes presentan una variación de la susceptibilidad con la temperatura, mientras que las sustancias no polares no la presentan.

Resulta útil obtener una relación que exprese la polarización de un dieléctrico en función del desplazamiento D y de la intensidad E del campo eléctrico en el dieléctrico. De las Ecs. [7-12] y [7-7] se deduce:

$$D = \varepsilon E = (\varepsilon_0 + \eta) E = \varepsilon_0 E + \eta E,$$

y dado que $\eta E = P$,

$$\boxed{D = \varepsilon_0 E + P} \qquad [7\text{-}22]$$

La Ec. [7-22] constituye una definición del desplazamiento más general que la Ec. [7-12]. Si un dieléctrico es anisótropo su capacidad específica de inducción ε no puede representarse por un simple número y la Ec. [7-12] carece de significado. El desplazamiento D y la intensidad E del campo eléctrico en tal dieléctrico tienen, en general, direcciones distintas. Pero la Ec. [7-22] se aplica en todos los casos, teniendo en cuenta que ha de considerarse como una ecuación vectorial, esto es,

$$D_x = \varepsilon_0 E_x + P_x;$$
$$D_y = \varepsilon_0 E_y + P_y;$$
$$D_z = \varepsilon_0 E_z + P_z.$$

7-7. Fuerzas que se ejercen entre cargas situadas en un dieléctrico. Hemos basado la teoría de la electrostática en la ley de Coulomb entre cargas puntuales,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$$

Cuando se explicó esta ley en el capítulo I, se dijo que aunque la fuerza electrostática pura ejercida sobre una carga puntual por otra

está dada por la expresión anterior, independientemente del medio en el cual se encuentren las cargas, la presencia de un medio afecta a la fuerza *aparente* entre las mismas. Estamos ahora en condiciones de estudiar más a fondo este efecto.

Consideremos en primer lugar un ejemplo cualitativo: sea una esfera cargada suspendida de un hilo aislador dentro de un líquido no conductor, como indica la figura 7-12. El campo creado por la carga induce cargas que aparecen en las superficies del líquido, incluyendo la superficie que está en contacto con el cuerpo cargado. (Se desprecia, para simplificar, la influencia del recipiente.) El campo en cualquier punto es el resultante de los campos producidos por la carga inicial y por las cargas inducidas. Resulta, evidentemente, muy complicado un estudio matemático exacto del problema a causa de la falta de simetría de las cargas inducidas. La dificultad aumentaría si el cuerpo no fuera homogéneo, o si el cuerpo cargado estuviera colocado en un sólido anisótropo, esto es, cuyas propiedades variasen en las distintas direcciones. Sin embargo, si suponemos que el flúido que rodea la carga se extiende hasta el infinito en todas direcciones, y es homogéneo e isótropo, el problema se simplifica considerablemente.

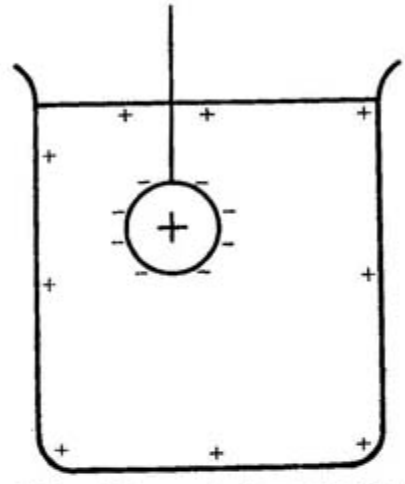


FIG. 7-12.—Esfera cargada suspendida en un líquido no conductor mediante un hilo aislador.

En la figura 7-13 un conductor esférico que tiene una carga positiva q está sumergido en un flúido infinito homogéneo e isótropo de coeficiente dieléctrico K_e, no existiendo ninguna otra carga en su proximidad. Se trata de calcular el valor de la intensidad del campo eléctrico en un punto P, a una distancia r del centro del cuerpo cargado. Las únicas cargas inducidas de que hemos de ocuparnos son las de la superficie del medio que están fuera del conductor e inmediatamente próximas a su superficie. Representemos por q_i el valor de esta carga inducida.

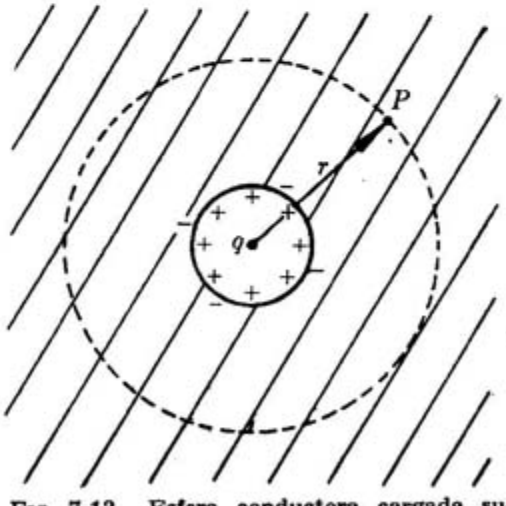


FIG. 7-13.—Esfera conductora cargada sumergida en un flúido infinito homogéneo e isótropo.

Construyamos una superficie de Gauss de forma esférica y radio r

concéntrica con la esfera cargada. El teorema de Gauss establece que

$$\int D \cos \varphi \, dA = q.$$

Por simetría, el valor del desplazamiento es constante en todos los puntos de esta superficie, y su dirección es radial y dirigida hacia afuera. La integral de superficie se reduce entonces a

$$\int D \cos \varphi \, dA = D \times 4\pi r^2 = q,$$

y, por tanto,

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} = \varepsilon E = K_e \varepsilon_0 E,$$

y

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{K_e r^2} \qquad [7\text{-}23]$$

Por otra parte, el teorema de Gauss aplicado a la intensidad del campo eléctrico da:

$$\varepsilon_0 \int E \cos \varphi \, dA = (q - q_i) = 4\pi r^2 E \, \varepsilon_0,$$

de la cual,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q - q_i}{r^2}$$

Podemos igualar ahora las dos expresiones de E:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{K_e r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q - q_i}{r^2},$$

o bien,

$$q - q_i = \frac{q}{K_e} \qquad [7\text{-}24]$$

Vemos, por consiguiente, que la carga *efectiva*, $q - q_i$, de la esfera es igual a la fracción $\frac{1}{K_e}$ de su carga libre q, y, en consecuencia, el campo en P es $\frac{1}{K_e}$ del que existiría en tal punto si no hubiese dieléctrico. Esto es,

$$E = \frac{1}{K_e} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

[Naturalmente, hemos obtenido ya esta expresión para E en el curso del razonamiento (véase Ec. [7-23]) sin calcular el valor de las cargas inducidas, pero es instructivo llevar a cabo este estudio y ver precisa-

mente por qué el campo exterior a la carga ha disminuído por la presencia del dieléctrico.]

Consideremos ahora la fuerza ejercida sobre una segunda esfera conductora colocada en el punto P, que tiene una carga q'. Esta esfera estará también rodeada por cargas inducidas, cuyo valor es, p. ej., q_i'. Además, si los cuerpos están muy próximos, la simetría de las cargas iniciales y de las inducidas es perturbada por el campo de cada carga en el punto en que está situada la otra. Por el contrario, si la distancia entre las esferas es grande comparada con sus dimensiones, este efecto es pequeño y para distancias suficientemente grandes podemos suponer que existe todavía simetría esférica.

Las fuerzas sobre la carga q' son debidas: *a*) a la carga q; *b*) a la carga inducida q_i alrededor de q, y *c*) a la carga inducida q_i' alrededor de q'. Si la carga q_i' está distribuída simétricamente, no produce fuerza neta sobre la carga q', de modo que el único efecto que queda es el del campo creado por las cargas q y q_i, cuyo valor hemos deducido. Puede calcularse, por consiguiente, la fuerza sobre q' bien directamente, en virtud de la ley de Coulomb, considerando que q' ha de ser atraída por la carga neta $q - q_i$, o bien obtenerse a partir de la intensidad del campo eléctrico en el punto en que q' esté localizada. Ambos métodos conducen a

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{K_e r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qq'}{r^2} \qquad [7\text{-}25]$$

La fuerza es, por consiguiente, inferior a su valor en el vacío, que sería

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2},$$

en el factor $1/K_e$.

Una ojeada a los valores de los coeficientes dieléctricos de los gases que figuran en la tabla 7-1 demostrará que la fuerza entre cargas puntuales situadas en el aire es, para los fines prácticos, la misma que si las cargas estuvieran en el vacío.

Teniendo en cuenta la tercera ley de Newton, o considerando el campo creado por las cargas q' y q_i', se demuestra que la fuerza sobre q es igual y opuesta a la que actúa sobre q'.

No debe inferirse que la presencia de un medio disminuye de algún modo la fuerza ejercida sobre q' por *la carga inicial* q. La fuerza entre q y q' es exactamente la misma, estén las cargas en el vacío o en un medio. La reducción de la fuerza neta entre las cargas procede de la carga inducida q_i, de signo opuesto al de q, y localizada en la superficie del dieléctrico contiguo a la carga inicial.

La Ec. [7-25] es una fórmula *aproximada*, deducida para el caso muy especial de dos cuerpos cargados, separados por una distancia grande comparada con sus dimensiones y sumergidos en un flúido homogéneo e isótropo que llena todo el espacio. No constituye una buena aproxi-

mación, en general, cuando no se cumplen estas condiciones, y no es una ley general de la Naturaleza como la ley de Coulomb. Así, si el dieléctrico es un sólido, si las cargas se encuentran sobre cuerpos no conductores, o si el campo es creado por cuerpos polarizados permanentemente, no se cumple la Ec. [7-25].

RESUMEN

El método seguido en este capítulo ha consistido en deducir fórmulas generales mediante razonamientos basados en un caso especial (capa de dieléctrico entre láminas paralelas muy próximas con cargas opuestas). Los pasos de la deducción se resumen a continuación, y para destacar las fórmulas de aplicación *general* se las ha recuadrado. Las fórmulas no recuadradas sólo son válidas para el caso especial de una capa de dieléctrico comprendida entre láminas paralelas. Las ecuaciones se han numerado como en el texto.

La intensidad E del campo eléctrico dentro del dieléctrico es la resultante de los campos creados por las cargas libres y las cargas inducidas:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma - \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_i. \qquad [7\text{-}1]$$

La susceptibilidad eléctrica η se define por la ecuación

$$\sigma_i = \eta E. \qquad [7\text{-}2]$$

(Para una definición más general véase la Ec. [7-21].)

Combinando las Ecs. [7-1] y [7-2] se obtiene:

$$E = \frac{\sigma}{\left(1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0}\right)\varepsilon_0} \qquad [7\text{-}3]$$

El coeficiente dieléctrico K_e se define por la ecuación

$$\boxed{K_e = 1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0}} \qquad [7\text{-}4]$$

Combinando las Ecs. [7-3] y [7-4] se obtiene:

$$E = \frac{1}{K_e\varepsilon_0}\sigma. \qquad [7\text{-}5]$$

La capacidad específica de inducción ε se define por la ecuación

$$\boxed{\varepsilon = K_e\varepsilon_0} \qquad [7\text{-}6]$$

Combinando las Ecs. [7-4] y [7-6] se obtiene:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 + \eta} \qquad [7\text{-}7]$$

El desplazamiento D queda definido por la ecuación

$$\boxed{D = \varepsilon E} \qquad [7\text{-}12]$$

(Para una definición más general véase la Ec. [7-22].)

La polarización P se define así:

$$\boxed{P = \text{momento dipolar por unidad de volumen}}$$

Para el caso especial de una lámina de dieléctrico,

$$P = \sigma_f. \qquad [7\text{-}20]$$

Combinando las Ecs. [7-2] y [7-20] se obtiene:

$$\boxed{P = \eta E} \qquad [7\text{-}21]$$

Obsérvese que la definición general de η está dada por la Ec. [7-21] más bien que por la Ec. [7-2].

Combinando las Ecs. [7-12], [7-7] y [7-21] resulta:

$$\boxed{D = \varepsilon_0 E + P} \qquad [7\text{-}22]$$

La Ec. [7-22], considerada como ecuación vectorial, constituye la definición general de D.

PROBLEMAS

7-1. El coeficiente dieléctrico de cierta sustancia es 3,5. Calcúlese la capacidad específica de inducción y la susceptibilidad de dicha sustancia.

7-2. Dos láminas conductoras con cargas opuestas tienen numéricamente la misma densidad superficial de carga, y están separadas por un dieléctrico de 5 mm de espesor y coeficiente dieléctrico 3. La intensidad del campo eléctrico resultante en el dieléctrico es 10^6 V/m. Calcúlese: *a*) el desplazamiento en el dieléctrico; *b*) la densidad superficial de carga libre sobre las láminas conductoras; *c*) la polarización del dieléctrico; *d*) la densidad superficial de carga inducida sobre la superficie del dieléctrico; *e*) la componente de la intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico debida a la carga libre; *f*) la componente de la inten-

sidad del campo eléctrico debida a la carga inducida.

7-3. Dos láminas conductoras paralelas, separadas una distancia de 5 mm, reciben densidades superficiales de carga iguales y opuestas de 20 μcoul/m^2. El espacio comprendido entre las láminas está ocupado por dos capas de dieléctrico: una de 2 mm de espesor y coeficiente dieléctrico 3, y la otra de 3 mm de espesor y coeficiente dieléctrico 4. Calcúlese: *a*) la intensidad del campo eléctrico en cada dieléctrico; *b*) el desplazamiento en cada uno; *c*) la densidad superficial de carga inducida sobre cada dieléctrico.

7-4. El modelo de Thomson para el átomo de hidrógeno es una esfera de electricidad positiva con un electrón (una carga puntual) en su centro. La carga positiva total es igual a la carga electrónica e. *a*) Demuéstrese que cuando el electrón se encuentra a una distancia r del centro de la esfera de carga positiva, es atraído hacia el centro con una fuerza F dada por

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2 r}{R^3},$$

donde R es el radio de la esfera de carga positiva. (*Véase* problema 2-14.) *b*) ¿Cuál es el momento dipolar inducido de este modelo atómico en un campo exterior de intensidad E?

7-5. Un campo eléctrico uniforme de intensidad 2×10^6 V/m es creado dentro de un gran bloque de una sustancia de coeficiente dieléctrico 3. Se practica en el bloque una cavidad cuya forma es la de un corto cilindro de bases perpendiculares al campo. Calcúlese la intensidad del campo eléctrico dentro de la cavidad, y la densidad superficial de carga inducida sobre las superficies de sus bases. Represéntense en un diagrama las cargas inducidas y las líneas de fuerza.

CAPÍTULO VIII

CAPACIDAD Y CONDENSADORES

8-1. Capacidad de un conductor aislado.—En el capítulo III se demostró que el potencial V, en el vacío, de una esfera conductora cargada está dado por la relación

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}, \quad \text{o sea,} \quad q = 4\pi\varepsilon_0 a V, \qquad [8\text{-}1]$$

siendo q la carga de la esfera y a su radio. La carga de la esfera es proporcional, por tanto, a su potencial. Puede demostrarse que la carga sobre un cuerpo aislado cargado de forma cualquiera es también directamente proporcional a su potencial. Por consiguiente, para cualquier conductor cargado puede escribirse:

$$q \propto V; \quad q = CV,$$

o sea,

$$C = \frac{q}{V}, \qquad [8\text{-}2]$$

donde C es una constante de proporcionalidad que depende del tamaño y de la forma del conductor y que se denomina su *capacidad. La capacidad de un conductor es la razón de su carga a su potencial.* (Se supone el potencial de referencia en el infinito.)

En virtud de la definición, la capacidad se expresa en *culombios por voltio.* Una capacidad de un culombio por voltio se denomina *faradio* (en honor de Michael Faraday).

Según las Ecs. [8-1] y [8-2], la capacidad de un conductor esférico aislado es

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 a. \qquad [8\text{-}3]$$

La capacidad de una esfera es, por tanto, directamente proporcional a su radio.

El término «capacidad» no tiene el mismo significado que puede atribuirse a la *capacidad* de un recipiente. Esta última representa el máximo volumen de líquido que puede contener, mientras que la cantidad de carga que un conductor soporta puede aumentar indefinidamente elevando su potencial, salvo el límite impuesto por el problema de aislamiento. Como hemos visto, la máxima densidad superficial de carga sobre un conductor situado en el aire está limitada por la máxima intensidad del campo eléctrico que el aire puede soportar sin convertirse en conductor.

8-2. Condensadores.—Si cierto número de conductores cargados están próximos unos a otros, el potencial de cada uno de ellos está determinado no sólo por su propia carga, sino por el valor y signo de las

cargas de los otros conductores, y por su forma, tamaño y posición. Así, p. ej., el potencial de una esfera cargada positivamente disminuye si se coloca próxima a la primera una segunda esfera cargada negativamente. La capacidad de la primera esfera (razón de su carga a su potencial) aumenta por la presencia de la segunda. Del mismo modo, la capacidad de la segunda resulta incrementada por la presencia de la primera.

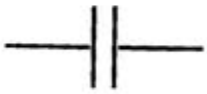
Un caso especial importante se presenta en la práctica cuando dos conductores próximos reciben cargas del mismo valor y signo contrario. Esto se consigue corrientemente conectando ambos conductores, descargados inicialmente, a los bornes de una batería, lo que ocasiona un paso de carga de un conductor al otro. Este dispositivo de dos conductores se denomina *condensador*. El hecho de que cada conductor esté próximo a otro que lleva una carga de signo opuesto, hace posible el paso de cantidades relativamente grandes de carga de uno a otro conductor, con diferencias de potencial relativamente pequeñas.

Se define la capacidad de un condensador como la razón de la carga de cualquiera de los conductores a la diferencia de potencial entre ellos:

$$C = \frac{q}{V_{ab}} \qquad [8\text{-}4]$$

La carga neta del condensador en conjunto es, naturalmente, nula, y la *carga de un condensador* se define como la carga de *cualquiera* de los conductores sin tener en cuenta el signo. La capacidad es *un faradio si para una diferencia de potencial entre los dos conductores de un voltio, la carga transmitida de uno a otro es de un culombio.*

Un condensador se representa por el símbolo



Los condensadores encuentran múltiples aplicaciones en los circuitos eléctricos. Se utiliza un condensador para eliminar la chispa que se produce cuando se interrumpe rápidamente un circuito que posee autoinducción. (Véase Sec. 13-4.) El sistema de encendido de los motores de automóvil tiene para este fin un condensador. Los condensadores se usan en los circuitos de radio para sintonizar, y para *igualar* la corriente rectificada proporcionada por el generador de energía. El rendimiento de la transmisión de energía en corriente alterna puede aumentarse con frecuencia utilizando grandes condensadores para mejorar el factor de potencia (véase Sec. 16-8).

8-3. Condensador de láminas paralelas.—El tipo de condensador más frecuente se compone de dos láminas conductoras paralelas y separadas por una distancia que es pequeña comparada con las dimensiones lineales de las láminas (Fig. 8-1). Prácticamente, todo el campo de este condensador está localizado en el espacio comprendido entre las láminas,

como se representa en la figura. Hay una ligera dispersión del campo hacia el exterior, pero se hace relativamente menor a medida que disminuye la separación de las láminas. Si las láminas están suficientemente próximas, la dispersión puede despreciarse, el campo entre las láminas es uniforme, y las cargas de éstas están uniformemente repartidas sobre sus superficies opuestas. Este dispositivo se denomina *condensador de láminas paralelas* o, simplemente, *condensador plano*.

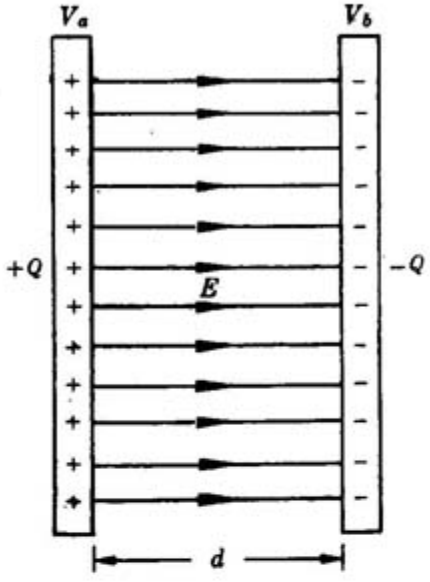


FIG. 8-1.—Condensador plano.

Supongamos en primer lugar que las láminas se encuentran en el vacío. Se ha demostrado que la intensidad del campo eléctrico entre un par de láminas paralelas muy próximas y en el vacío es

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{A},$$

siendo A el área de las láminas y q la carga de *cada* una. Puesto que la intensidad del campo eléctrico o gradiente del potencial es uniforme entre las láminas, la diferencia de potencial entre ellas será

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{qd}{A},$$

siendo d la separación de las láminas. Por consiguiente, la capacidad de un condensador plano en el vacío es

$$C = \frac{q}{V_{ab}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \qquad [8\text{-}5]$$

Debido a que ε_0, A y d son constantes para un condensador dado, la capacidad es una constante, independiente de la carga del condensador, y es directamente proporcional al área de las láminas e inversamente proporcional a su separación. (La forma sencilla de la Ec. [8-5] procede de la introducción del factor 4π en la constante de proporcionalidad de la ley de Coulomb. Si *no* se hubiese escrito explícitamente en esta ley, hubiera aparecido en la Ec. [8-5]. Puesto que, en la práctica, se utiliza esta última ecuación con mucha más frecuencia que la ley de Coulomb, hay ventaja en pasar el factor 4π a la ley de Coulomb.)

Utilizando unidades mks, A se expresa en metros cuadrados, y d, en metros. La capacidad C resultará entonces en faradios.

La Ec. [8-5] indica otra combinación de unidades en que puede expre-

sarse la capacidad específica de inducción. Si despejamos el valor de ε_0 se obtiene:

$$\varepsilon_0 = \frac{Cd}{A},$$

y dado que C se mide en faradios, d en metros y A en metros cuadrados, ε_0 puede expresarse en *faradios por metro*. La capacidad específica de inducción ε de una sustancia, que tiene las mismas dimensiones que ε_0, puede expresarse también en faradios por metro.

Como ejemplo, calculemos el área de las láminas de un condensador plano de un faradio cuando la separación de éstas es de un milímetro y las láminas están en el vacío:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{1 \times 10^{-3}}{8{,}85 \times 10^{-12}}$$

$$= 1{,}13 \times 10^8 \text{ m}^2.$$

Esto corresponde a un cuadrado de 10600 m de lado.

Puesto que el faradio es una unidad de capacidad muy grande, se utilizan como unidades más adecuadas el *microfaradio* ($1\mu f = 10^{-6}$ f), y el *micro-microfaradio* ($1\ \mu\mu f = 10^{-12}$ f); p. ej., un equipo corriente de radio contiene en su generador de potencia varios condensadores cuya capacidad varía de $1\mu f$ a $10\mu f$, mientras que la capacidad de los condensadores de sintonía es del orden de algunos cientos de micro-microfaradios.

Vamos a calcular a continuación la capacidad de un condensador plano cuando el espacio comprendido entre las láminas está ocupado por una sustancia de coeficiente dieléctrico K_e. La intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico es

$$E = \frac{\sigma}{K_e \varepsilon_0} = \frac{1}{K_e \varepsilon_0} \frac{q}{A} \qquad [8\text{-}6]$$

Por consiguiente, la diferencia de potencial entre las láminas será

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{K_e \varepsilon_0} \frac{qd}{A},$$

y la capacidad,

$$C = \frac{q}{V_{ab}} = K_e \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d} \qquad [8\text{-}7]$$

Si representamos por C_0 la capacidad del mismo condensador en el vacío, o sea,

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}, \qquad [8\text{-}8]$$

vemos que la capacidad resulta *multiplicada* por el factor K_e cuando se introduce un dieléctrico entre las láminas. Dividiendo las dos últimas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = K_e. \qquad [8\text{-}9]$$

Esta relación se toma frecuentemente como definición del coeficiente dieléctrico. Esto es, el coeficiente dieléctrico de una sustancia puede definirse como la razón de la capacidad de un condensador dado que tenga dicha sustancia comprendida entre las láminas, a la capacidad del mismo condensador en el vacío.

Para destacar el punto de vista atómico y electrónico, comenzamos en el capítulo anterior la teoría de los dieléctricos por el concepto de susceptibilidad eléctrica η, definida como razón de la densidad de carga inducida a la intensidad del campo eléctrico:

$$\eta = \frac{\sigma_i}{E}$$

El coeficiente dieléctrico K_e se definió por la ecuación

$$K_e = 1 + \frac{\eta}{\varepsilon_0} \qquad [8\text{-}10]$$

Sin embargo, desde el punto de vista experimental, la densidad de carga inducida σ_i no es susceptible de medida directa, de modo que la ecuación que define η es de poco valor para determinar la magnitud de esta propiedad de un dieléctrico. Por el contrario, la Ec. [8-9] proporciona un método directo y relativamente sencillo y preciso de determinar coeficientes dieléctricos, puesto que las capacidades puedén medirse con gran precisión. Por ello, en la práctica, se mide ordinariamente K_e y se utiliza entonces la Ec. [8-10] para calcular η.

EJEMPLO 1.—Las láminas de un condensador plano están separadas 5 mm, tienen 2 m² de área y se encuentran en el vacío. Se aplica al condensador una diferencia de potencial de 10 000 V. Calcúlese: *a*) la capacidad; *b*) la carga de cada lámina; *c*) la densidad superficial de carga; *d*) la intensidad del campo eléctrico, y *e*) el desplazamiento en el espacio comprendido entre las láminas.

a)

$$\begin{aligned} C_0 &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\ &= 8{,}85 \times 10^{-12} \times \frac{2}{5 \times 10^{-3}} \\ &= 3{,}54 \times 10^{-9}\ \text{f} \\ &= 3{,}54 \times 10^{-3}\ \mu\text{f} \\ &= 3540\ \mu\mu\text{f}. \end{aligned}$$

b) La carga del condensador es

$$q = CV_{ab}$$
$$= 3{,}54 \times 10^{-9} \times 10^4$$
$$= 3{,}54 \times 10^{-5} \text{ coul.}$$

c) La densidad superficial de carga es

$$\sigma = \frac{q}{A}$$
$$= \frac{3{,}54 \times 10^{-5}}{2}$$
$$= 1{,}77 \times 10^{-5} \text{ coul/m}^2.$$

d) La intensidad del campo eléctrico:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$$
$$= 36\pi \times 10^9 \times 1{,}77 \times 10^{-5}$$
$$= 20 \times 10^5 \text{ V/m.}$$

El campo eléctrico puede calcularse también como el gradiente del potencial:

$$E = \frac{V_{ab}}{d}$$
$$= \frac{10^4}{5 \times 10^{-3}} = 20 \times 10^5 \text{ V/m.}$$

e) El desplazamiento es

$$D = \varepsilon_0 E$$
$$= 8{,}85 \times 10^{-12} \times 20 \times 10^5$$
$$= 1{,}77 \times 10^{-5} \text{ coul/m}^2.$$

El desplazamiento es igual, naturalmente, a la densidad superficial de carga.

EJEMPLO 2.—Se desconecta del voltaje de carga el condensador cargado del EJEMPLO 1, y se aísla, de modo que la carga de sus láminas permanezca constante. Se introduce entre las láminas una capa de dieléctrico de 5 mm de espesor y coeficiente dieléctrico 5. Calcúlese: *a*) el desplazamiento en el dieléctrico; *b*) la intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico; *c*) la diferencia de potencial entre las láminas del condensador, y *d*) su capacidad.

La introducción de un dieléctrico entre las láminas del condensador modifica la intensidad del campo eléctrico pero no el desplazamiento, puesto que la carga libre se mantiene constante. Por tanto,

a) $D = \sigma = 1{,}77 \times 10^{-5}$ coul/m².

b) La intensidad del campo eléctrico es

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{K_e\varepsilon_0}$$
$$= \frac{1{,}77 \times 10^{-5}}{5 \times 8{,}85 \times 10^{-12}}$$
$$= 4 \times 10^5 \text{ V/m.}$$

c) La diferencia de potencial entre las láminas del condensador se reduce a

$$V_{ab} = Ed$$
$$= 4 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3}$$
$$= 2000 \text{ V.}$$

d) La capacidad es

$$C = \frac{q}{V_{ab}}$$
$$= \frac{3{,}54 \times 10^{-5}}{2000}$$
$$= 1{,}77 \times 10^{-8} \text{ f}$$
$$= 17\,700 \ \mu\mu\text{f.}$$

La capacidad puede calcularse también de esta otra forma:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = K_e \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$
$$= 5 \times 8{,}85 \times 10^{-12} \frac{2}{5 \times 10^{-3}}$$
$$= 17\,700 \ \mu\mu\text{f.}$$

La capacidad es, naturalmente, cinco veces mayor que su valor en el vacío: 3540 $\mu\mu$f.

EJEMPLO 3.—Se elimina la capa de dieléctrico del EJEMPLO 2 y se sustituye por dos láminas, una de espesor 2 mm y coeficiente dieléctrico 5, la otra de 3 mm y coeficiente dieléctrico 2. (Fig. 8-2). Calcúlese: *a*) el desplazamiento en cada dieléctrico; *b*) el campo eléctrico en cada dieléctrico; *c*) la diferencia de potencial entre las láminas del condensador; *d*) su capacidad.

a) La introducción del dieléctrico entre las láminas del condensador no altera el desplazamiento, puesto que la carga libre se mantiene constante. Por tanto,

$$D = \sigma = 1{,}77 \times 10^{-5} \text{ coul/m}^2.$$

b) En la primera capa:

$$E_1 = \frac{D}{K_{e_1} \varepsilon_0}$$
$$= \frac{1{,}77 \times 10^{-5}}{5 \times 8{,}85 \times 10^{-12}}$$
$$= 4 \times 10^5 \text{ V/m.}$$

En la segunda capa:

$$E_2 = \frac{D}{K_{e_2} \varepsilon_0}$$
$$= \frac{1{,}77 \times 10^{-5}}{2 \times 8{,}85 \times 10^{-12}}$$
$$= 10 \times 10^5 \text{ V/m.}$$

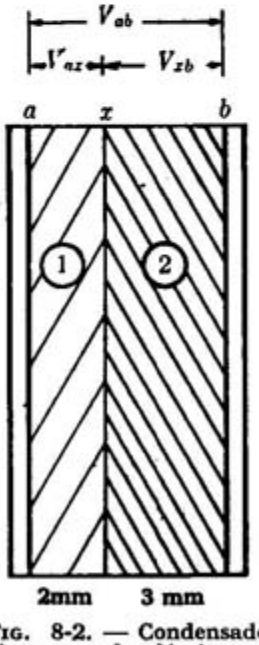


FIG. 8-2. — Condensador plano con dos láminas de espesores diferentes y distintos coeficientes dieléctricos.

c) La diferencia de potencial a través de la primera capa es

$$V_{ax} = E_1 d_1 = 4 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3}$$
$$= 800 \text{ V.}$$

La diferencia de potencial a través de la segunda es

$$V_{xb} = E_2 d_2 = 10^6 \times 3 \times 10^{-3}$$
$$= 3000 \text{ V.}$$

La diferencia de potencial a través del condensador es, por consiguiente,

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xb} = 800 + 3000$$
$$= 3800 \text{ V.}$$

d) La capacidad es

$$C = \frac{q}{V_{ab}}$$
$$= \frac{3{,}54 \times 10^{-5}}{3800}$$
$$= 9{,}33 \times 10^{-9} \text{ f}$$
$$= 9330 \ \mu\mu\text{f.}$$

La capacidad en el vacío era 3540 $\mu\mu$f.

8-4. Otros tipos de condensadores.—Se utilizan a veces como patrones condensadores cilíndricos y esféricos, porque sus capacidades pueden calcularse con precisión a partir de sus dimensiones. Supongamos dos cilindros coaxiales de radios a y b y longitud l (Fig. 8-3), que poseen

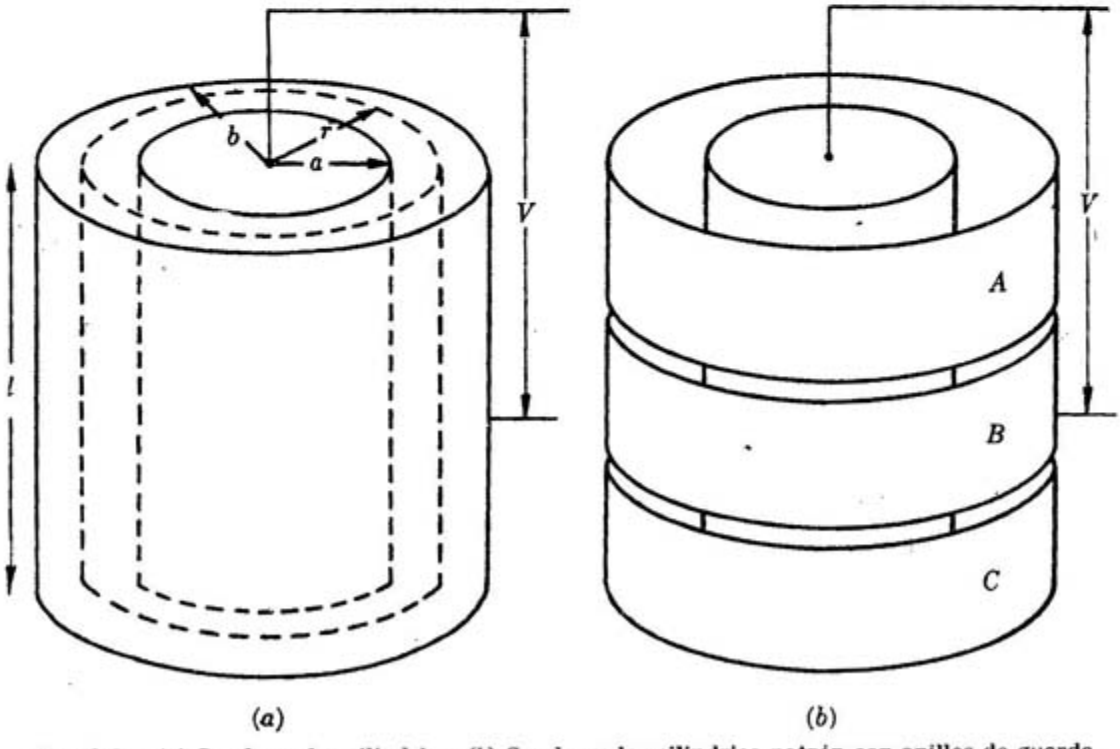


FIG. 8-3.—(*a*) Condensador cilíndrico. (*b*) Condensador cilíndrico patrón con anillos de guarda.

cargas iguales y opuestas $+q$ y $-q$. Tomemos como superficie gaussiana un cilindro de radio r, comprendido entre a y b, y de longitud l. Despreciando los efectos en los extremos, las líneas de desplazamiento sólo cortan a esta superficie a través de la superficie curva de área $2\pi rl$. Representemos por D el desplazamiento a la distancia r del eje. Se tiene:

$$\int D \cos \varphi \, dA = 2\pi r l D = q,$$

$$D = \frac{q}{2\pi r l}$$

Si el espacio comprendido entre los cilindros contiene un dieléctrico de capacidad específica de inducción ε,

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \frac{q}{rl}$$

El valor de la diferencia de potencial entre los cilindros es:

$$V_{ab} = \int_a^b E \, dr = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \frac{q}{l} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon} \frac{q}{l} \ln \frac{b}{a}$$

La capacidad es, por consiguiente,

$$C = \frac{q}{V_{ab}} = 2\pi\varepsilon \frac{l}{\ln \frac{b}{a}} \qquad [8\text{-}11]$$

Para reducir al mínimo los efectos de los extremos, los condensadores cilíndricos patrones se construyen como indica la figura 8-3(b). Las secciones terminales A y C, denominadas *anillos de guarda*, se mantienen al mismo potencial que la sección central B, pero sólo se utiliza la última para la medida. Los efectos de dispersión son transmitidos así a las secciones terminales A y C, que no se utilizan.

Se propone al lector, como ejercicio, demostrar que la capacidad de dos esferas concéntricas es

$$C = 4\pi\varepsilon \frac{ab}{b - a} \qquad [8\text{-}12]$$

Los condensadores variables, cuya capacidad puede modificarse a voluntad (entre ciertos límites), son muy usados en los circuitos de sintonía de los aparatos radiorreceptores. Generalmente son condensadores de aire, de capacidad relativamente pequeña, y están formados por cierto número de láminas metálicas paralelas y fijas, conectadas entre sí, que constituyen una de las *armaduras* del condensador, mientras que un

segundo conjunto de placas móviles también conectadas entre sí forman la otra *armadura* (Fig. 8-4). Haciendo girar un eje sobre el cual están montadas las placas móviles, el segundo conjunto se intercala entre el primero en una extensión mayor o menor. El área efectiva del condensador es sólo la de la porción intercalada.

Un condensador variable se representa por el símbolo

La mayor parte de los condensadores tienen un dieléctrico sólido entre sus láminas. Un tipo corriente es el de papel y hoja metálica, en el cual las láminas son bandas de hoja metálica y el dieléctrico es una hoja de papel impregnado de cera. Enrollando estas cintas, puede obtenerse un condensador de varios microfaradios en un volumen relativamente pequeño. La *botella de Leyden*, construída recubriendo con hoja metálica una parte de las superficies interior y exterior de un frasco de vidrio, es en esencia un condensador plano cuyo dieléctrico es el vidrio.

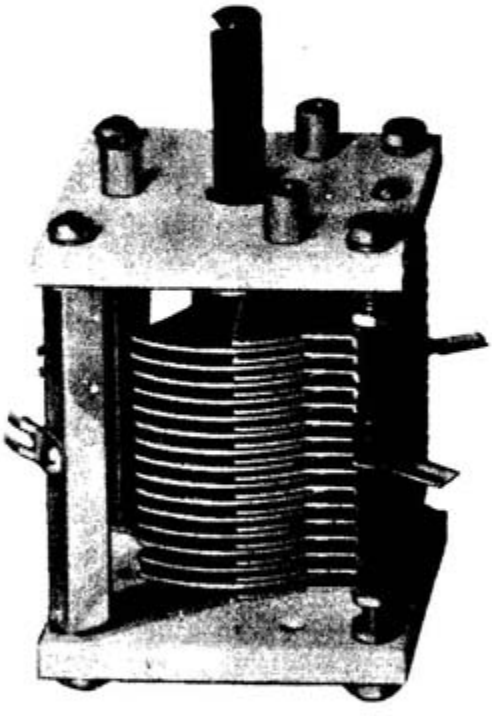


FIG. 8-4.—Condensador variable de aire. *(Cortesía de A. D. Cardwell Mfg. Corp.)*

La función del dieléctrico sólido colocado entre las láminas es triple. Primero, resuelve el problema mecánico de mantener dos grandes capas metálicas a una distancia muy pequeña sin ningún contacto real. Segundo, puesto que su rigidez dieléctrica es mayor que la del aire, aumenta la diferencia máxima de potencial que el condensador es capaz de resistir *sin romperse*. Tercero, debido a que su capacidad específica de inducción es mayor que la del vacío o la del aire, la capacidad de un condensador de dimensiones dadas es varias veces mayor que si las láminas estuvieran en el vacío o en el aire.

Los condensadores electrolíticos utilizan como dieléctrico una capa extremadamente delgada de óxido no conductor entre una lámina de metal y una solución conductora. A causa del pequeño espesor del dieléctrico, ciertos condensadores electrolíticos de dimensiones relativamente pequeñas pueden tener una capacidad del orden de 50 μf.

8-5. Corrientes de carga y descarga de un condensador.—Cuando se

conecta un condensador descargado a dos puntos que se encuentran a potenciales distintos, el condensador no se carga instantáneamente, sino que adquiere cierta carga por unidad de tiempo que depende de su capacidad y de la resistencia del circuito[1]. La figura 8-5 representa un condensador y una resistencia conectados en serie a dos puntos entre los cuales se mantiene una diferencia de potencial V_{ab}. Sea i la intensidad de la corriente en el circuito en cierto instante posterior al cierre del interruptor S, y q la carga del condensador en el mismo instante. Se tienen las siguientes ecuaciones:

$$i = dq/dt$$
$$V_{ax} = q/C$$
$$V_{xb} = iR$$
$$V_{ab} = V_{xa} + V_{xb}$$

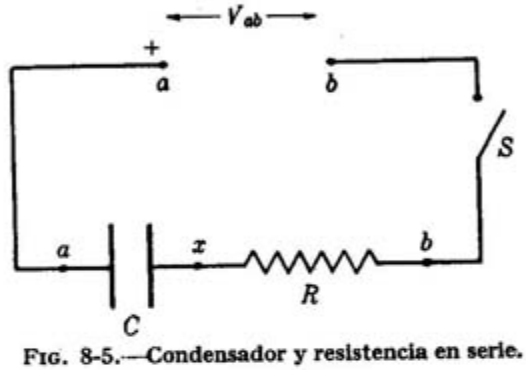


FIG. 8-5.—Condensador y resistencia en serie.

Estas ecuaciones pueden combinarse entre sí, dando:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q - \frac{V_{ab}}{R} = 0, \quad [8\text{-}13]$$

y, por tanto,

$$q = CV_{ab}\,(1 - \varepsilon^{-t/RC}). \qquad [8\text{-}14]$$

(ε representa en este caso, como se comprende fácilmente, la base de los logaritmos neperianos y no la capacidad específica de inducción).

Puesto que CV_{ab} es igual a la carga final Q del condensador, se puede escribir:

$$q = Q\,(1 - \varepsilon^{-t/RC}). \qquad [8\text{-}15]$$

La figura 8-6 representa la gráfica de la Ec. [8-15]. Se ve que la carga del condensador se aproxima asintóticamente a su valor final y se requiere, por consiguiente, un tiempo infinito para que el condensador alcance su carga final. Queda, sin embargo, perfectamente definido el tiempo necesario para incrementar la carga hasta una fracción cualquiera determinada de su valor final, y se encuentra en la práctica que para valores cualesquiera de R y C basta un tiempo muy corto para que la carga aumente hasta un valor esencialmente igual a su valor final.

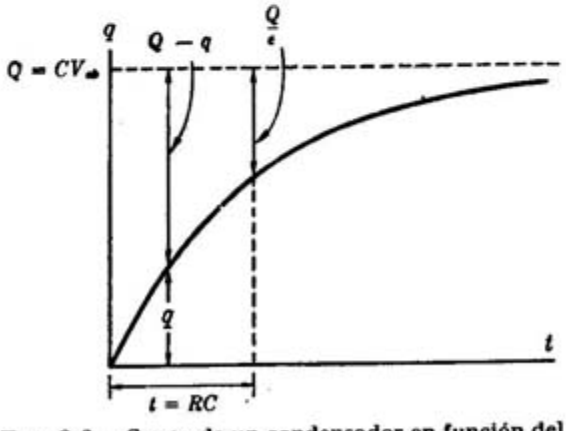


FIG. 8-6.—Carga de un condensador en función del tiempo, para el caso de un circuito con capacidad y resistencia.

[1] En la sección 13-3 se estudiará el efecto de la autoinducción que no se tiene ahora en cuenta.

En un instante t cualquiera, la diferencia entre la carga final Q y la carga q ya adquirida es, según la Ec. [8-15],

$$Q - q = Q\varepsilon^{-t/RC}.$$

Si hacemos esta diferencia igual a Q/ε y despejamos el valor de t, se encuentra:

$$t = RC.$$

Esto es, el producto RC es igual al tiempo necesario para que la carga del condensador aumente hasta una fracción $1/\varepsilon = 1/2{,}71 = 0{,}369$ de su valor final, y se denomina *constante de tiempo* del circuito. Para un condensador dado este tiempo es tanto mayor cuanto mayor es la resistencia, y viceversa. Así, aunque la forma general de la gráfica de q en función de t es la misma cualquiera que sea la resistencia, esta curva sube rápidamente hasta su valor final si R es pequeña, y lentamente si R es grande.

Como ejemplo, si $C = 1$ μf $= 10^{-6}$ f, y $R = 1$ megaohmio $= 10^6$ ohmios, la constante de tiempo es:

$$RC = 10^6 \times 10^{-6} = 1 \text{ seg}$$

y el condensador adquiere $(1 - 0{,}369)$, o sea, el 63 % aproximadamente de su carga final en un segundo.

Si $R = 1000\ \Omega$,

$$RC = 0{,}001 \text{ seg},$$

y si $R = 10$ megaohmios

$$RC = 10 \text{ seg}.$$

Dado que $i = dq/dt$, la ecuación que da la corriente de carga puede obtenerse a partir de la Ec. [8-15] por diferenciación. Se encuentra:

$$i = \frac{V_{ab}}{R}\,\varepsilon^{-t/RC} \qquad [8\text{-}16]$$

La corriente de carga inicial (para $t = 0$) es, por tanto, la misma que si el circuito sólo contuviese la resistencia R, y la corriente disminuye exponencialmente en la misma forma que aumenta la carga, descendiendo a un valor igual a $1/\varepsilon$ de su valor inicial después de transcurrido un tiempo igual a la constante de tiempo.

Si se desconecta el condensador de la línea y se conectan los bornes entre sí a través de una resistencia R, es fácil demostrar que la carga que queda sobre cada lámina al cabo de un tiempo t es:

$$q = Q\varepsilon^{-t/RC}$$

siendo Q la carga inicial, y que la corriente de descarga viene dada por

$$i = \frac{Q}{RC}\,\varepsilon^{-t/RC}$$

$$= \frac{V_{ab}}{R}\,\varepsilon^{-t/RC},$$

donde V_{ab} es la diferencia de potencial inicial entre los bornes del condensador.

8-6. Condensadores en serie y en paralelo.—La capacidad de un condensador se define como la razón de la carga Q sobre cualquiera de las láminas a la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador. La carga Q puede considerarse como la carga desplazada que pasa por cualquier punto del circuito exterior durante el proceso de carga.

La capacidad *equivalente de una red* de condensadores se define, análogamente, como la razón de la carga desplazada a la diferencia de potencial entre los bornes de la red. Por tanto, el método para calcular la capacidad equivalente de una red consiste en suponer una diferencia de potencial entre los bornes de la misma, calcular la carga correspondiente y hallar la razón de la carga a la diferencia de potencial.

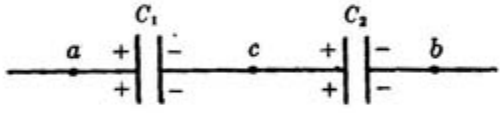


FIG. 8-7.—Dos condensadores en serie.

Si dos condensadores de capacidades C_1 y C_2, respectivamente, se conectan en serie, como en la figura 8-7, y se mantienen los terminales a y b a una diferencia de potencial V_{ab}, se tiene:

$$Q_1 = C_1 V_{ac}, \quad Q_2 = C_2 V_{cb},$$
$$V_{ab} = V_{ac} + V_{cb}.$$

Pero Q_1 ha de ser igual a Q_2, puesto que el proceso de carga (considerando el movimiento de la carga positiva) consiste en el paso de carga desde la lámina derecha del condensador 2, a través del circuito, hasta la lámina izquierda del condensador 1, y de la lámina derecha del condensador 1 a la lámina izquierda del condensador 2. Por consiguiente, si Q representa la carga de cada condensador,

$$V_{ac} = \frac{Q}{C_1}, \quad V_{cb} = \frac{Q}{C_2},$$

y

$$V_{ab} = V_{ac} + V_{cb} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

Finalmente, como Q/V_{ab} es por definición la capacidad equivalente C,

$$\frac{V_{ab}}{Q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Es decir, que la inversa de la capacidad equivalente de un número cualquiera de condensadores en serie es igual a la suma de las inversas de las capacidades individuales. También, dado que

$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2 = C_3 V_3, \text{ etc.},$$

cuando cierto número de condensadores se conectan en serie, las diferencias de potencial entre las armaduras de cada condensador son inversamente proporcionales a sus capacidades, puesto que las cargas de todos ellos son iguales.

Si dos condensadores están conectados en paralelo, como en la figura 8-8, la diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador es la misma, y la carga total desplazada es la suma de las cargas individuales. Por consiguiente,

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V_{ab} + C_2 V_{ab} = V_{ab}\,(C_1 + C_2),$$

$$\frac{Q}{V_{ab}} = C = C_1 + C_2.$$

O sea, la capacidad equivalente de cualquier número de condensadores en paralelo es igual a la suma de las capacidades individuales.

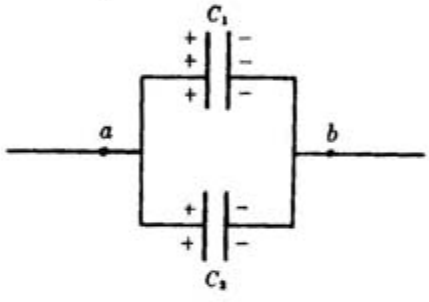


FIG. 8-8.—Dos condensadores en paralelo.

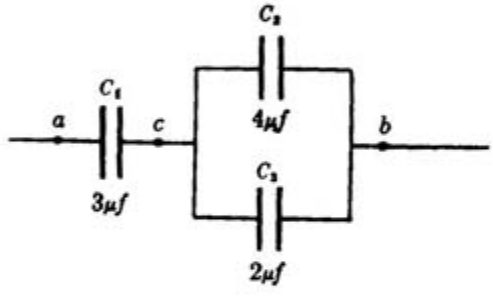


FIG. 8-9.—Red sencilla de condensadores.

EJEMPLO.—Se hace referencia a la figura 8-9. Si el punto b se pone en comunicación con tierra y el punto a se mantiene a un potencial de + 1200 V, calcúlese la carga de cada condensador y el potencial del punto c.

Los condensadores de 4 μf y de 2 μf, están en paralelo, y equivalen, por consiguiente, a un solo condensador de capacidad:

$$C = 4 + 2 = 6\ \mu f.$$

Este condensador equivalente está en serie con el condensador de 3 μf. Por tanto, la capacidad equivalente C_0 de la red es

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

o bien,

$$C_0 = 2\ \mu f.$$

La carga sobre el condensador equivalente es

$$Q = C_0 V = 2 \times 10^{-6} \times 1200 = 2{,}4 \times 10^{-3}\ \text{coul.}$$

Ésta ha de ser igual a la carga del condensador de 3 μf, y a la suma de las cargas de los condensadores de 4 μf y 2 μf.

Ahora bien:

$$V_{ac} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2{,}4 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-6}} = 800 \text{ V}.$$

$$V_{ac} = V_a - V_c = 800 \text{ V}, \quad V_a = 1200 \text{ V}, \therefore V_c = 400 \text{ V}$$

y

$$V_{cb} = V_c - V_b = 400 - 0 = 400 \text{ V}.$$

Por consiguiente,

$$Q_2 = C_2 V_{cb} = 4 \times 10^{-6} \times 400 = 1{,}6 \times 10^{-3} \text{ coul},$$
$$Q_3 = C_3 V_{cb} = 2 \times 10^{-6} \times 400 = 0{,}8 \times 10^{-3} \text{ coul},$$
$$Q_2 + Q_3 = (1{,}6 + 0{,}8) \times 10^{-3} = 2{,}4 \times 10^{-3} \text{ coul}.$$

Si la red contiene conexiones transversales, como las de la figura 8-10, no es posible considerarla como agrupaciones en serie y paralelo. Tales redes se resuelven por una generalización evidente de las reglas de Kirchhoff. Por ejemplo, la suma algébrica de las diferencias de potencial entre C_1, C_3 y C_4 ha de ser nula, y análogamente para C_2, C_5 y C_3. También ha de ser nula la suma algébrica de las cargas sobre las armaduras de los condensadores conectadas a los nudos x e y.

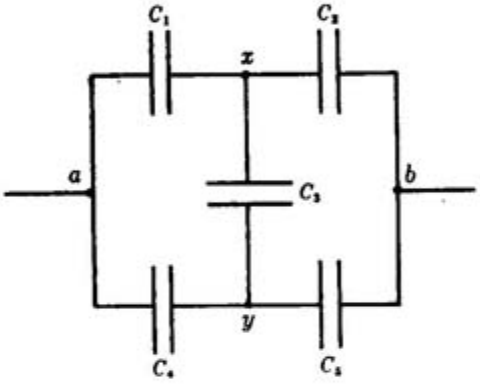


FIG. 8-10.—Red de condensadores que exige la generalización de las reglas de Kirchhoff.

8-7. Energía de un condensador cargado.—El proceso de carga de un condensador consiste en el paso de carga desde la armadura de menor a la de mayor potencial, y, por consiguiente, requiere consumo de energía. Imaginemos que el proceso de carga comienza con ambas láminas completamente descargadas, y que después sacamos repetidamente pequeñas cargas de una de las armaduras y las pasamos a la otra. En cierta etapa de este proceso, cuando la cantidad total de carga transportada ha alcanzado el valor q, la diferencia de potencial entre las láminas será

$$V_{ab} = \frac{q}{C},$$

y el trabajo dW, necesario para transportar la pequeña carga siguiente dq, es

$$dW = V_{ab}\, dq = \frac{1}{C} q\, dq.$$

El trabajo total realizado en el proceso de carga, mientras la carga aumenta desde cero hasta su valor final Q, será

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^Q q\, dq,$$

o bien,

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad [8\text{-}17]$$

La energía se expresa en julios cuando Q se expresa en culombios y C en faradios.

Puesto que $V_{ab} = \dfrac{Q}{C}$, la Ec. [8-17] equivale a

$$W = \frac{1}{2}CV_{ab}^2 = \frac{1}{2}QV_{ab}, \qquad [8\text{-}18]$$

donde V_{ab} representa ahora la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador cuando su carga es Q.

8-8. Densidad de energía en un campo eléctrico.—Las leyes de la electricidad y del magnetismo, tal como aparecen hoy, puede decirse que tienen un doble aspecto. De una parte tratan de las *partículas* cargadas, las fuerzas que se ejercen entre ellas, sus energías cinética y potencial y la forma en que se desplazan. De otra parte se ocupan de los *campos* eléctricos y magnéticos en el espacio que rodea las partículas. En muchos problemas, especialmente en los que se refieren a las ondas electromagnéticas, se concede importancia a los campos y no a las partículas. Uno de los conceptos más útiles de la teoría de los campos es el de la energía asociada a un campo eléctrico o magnético.

Desde este punto de vista, la energía de un condensador cargado se considera que está asociada al campo eléctrico del condensador y no a las cargas de sus armaduras, y que se halla distribuída en dicho campo a razón de cierta cantidad de energía por unidad de volumen, o *densidad de energía*. Puesto que el campo de un condensador de láminas paralelas es uniforme, la densidad de energía es también probablemente uniforme, e igual a la energía total dividida por el volumen del campo. Este último está dado por el producto del área A de las láminas del condensador por su distancia d. Por tanto,

$$\text{densidad de energía} = \frac{\frac{1}{2}QV_{ab}}{Ad}$$

Pero

$$\frac{Q}{A} = \sigma = \varepsilon E$$

y

$$\frac{V_{ab}}{d} = E.$$

Por consiguiente,

$$\text{densidad de energía} = \frac{\varepsilon E^2}{2} \qquad [8\text{-}19]$$

Como $D = \varepsilon E$ la fórmula última puede escribirse:

$$\text{densidad de energía} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon} \qquad [8\text{-}20]$$

En el sistema mks, la densidad de energía se expresa en julios por metro cúbico.

Aunque las Ecs. [8-19] y [8-20] se han deducido para el caso especial de un campo uniforme pueden utilizarse para la densidad de energía en un punto cualquiera de un campo no uniforme, refiriéndose D y E al punto particular en cuestión.

8-9. Fuerza entre las armaduras de un condensador.—Existe, naturalmente, una fuerza de atracción entre las cargas positiva y negativa localizadas sobre las armaduras de un condensador. Esta fuerza puede calcularse aplicando la ley de Coulomb a un par de cargas infinitesimales situadas sobre las láminas y realizando una doble integración para ambas láminas. Si las láminas se encuentran en equilibrio mecánico, la fuerza eléctrica ha de ser equilibrada por una fuerza mecánica. Esta última es proporcionada por las monturas de las armaduras en el caso de un condensador de aire, o por el propio dieléctrico en un condensador de papel y hojas metálicas. La fuerza *eléctrica* entre las cargas situadas sobre las láminas es la misma esté vacío el espacio entre las láminas u ocupado por un dieléctrico. Pero si existe un dieléctrico entre ellas, queda sometido a un esfuerzo por el campo eléctrico, fenómeno conocido con la denominación de *electrostricción*. Como consecuencia del esfuerzo en el dieléctrico, este último ejercerá, en general, fuerzas mecánicas sobre las armaduras. Estas últimas están en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas, en parte eléctricas y en parte mecánicas, y el problema general es complicado por intervenir a la vez fuerzas electrostáticas y elásticas. El aspecto elástico se reduce al caso más sencillo si el dieléctrico es un flúido (líquido o gas), puesto que el único tipo de esfuerzo que puede existir en un flúido en reposo es una presión hidrostática. Éste es el único caso que consideraremos y si se desean más precisiones debe consultarse una obra más extensa.

Para comprender el origen del esfuerzo creado en un dieléctrico situado en un campo eléctrico, consideremos el caso especial de dos láminas circulares sumergidas en un gran depósito de líquido, como indica la figura 8-11(a). Cada lámina se encuentra en equilibrio bajo la acción de: a) la fuerza debida a la atracción de las cargas situadas sobre la otra lámina, b) la fuerza ejercida por el líquido situado entre las láminas, c) la fuerza ejercida por el líquido exterior a las láminas y d) la fuerza mecánica ejercida por los apoyos. Si las láminas se encuentran en el vacío, la fuerza mecánica d) ha de ser igual y opuesta a la fuerza eléctrica a). Si las láminas están sumergidas en el flúido, la fuerza mecánica necesaria para mantener el equilibrio ha disminuído respecto a su valor en el vacío en el efecto que resulta de las fuerzas b) y c).

Hemos de examinar los fenómenos que tienen lugar en el líquido en dos regiones: la de dispersión del campo, en la proximidad de los bordes de las láminas, y la límite, donde hace contacto con aquéllas. La región de dispersión está indicada en la figura 8-11(b). Se ha representado, en forma exagerada, una molécula de líquido por un círculo situado encima de

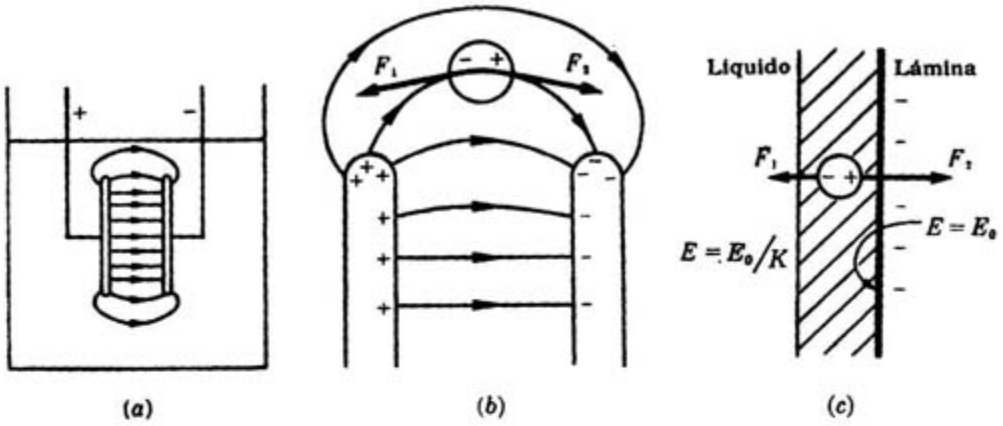


FIG. 8-11.—Condensador plano con un dieléctrico líquido.

las láminas. La dirección general del campo en la molécula es de izquierda a derecha, y la molécula resulta polarizada como se indica por los signos + y −. Pero debido a que las líneas de fuerza son cóncavas hacia abajo, las fuerzas F_1 y F_2 sobre las cargas inducidas están ambas ligeramente inclinadas por debajo de la horizontal; por consiguiente, hay una fuerza resultante dirigida hacia abajo sobre esta molécula particular. Es evidente que todas las moléculas que se encuentran en la región de dispersión del campo, situada en la proximidad de los bordes de las láminas, experimentarán una fuerza que tira de ellas hacia el centro de las mismas. Según esto, se desplazarán una pequeña distancia y comprimirán el líquido en el espacio comprendido entre las láminas hasta que se establezca una presión hidrostática suficiente para equilibrar la fuerza eléctrica dirigida hacia adentro. El exceso de presión entre las láminas respecto a la presión exterior obliga al líquido a separar las láminas. La fuerza mecánica que los soportes han de ejercer para mantener el equilibrio es inferior, por tanto, a la fuerza de atracción eléctrica entre las láminas. Pero no es éste el único efecto.

La capa límite de líquido adyacente a la lámina de la derecha se ha representado en la figura 8-11(*c*). En el interior del líquido, como hemos demostrado, la intensidad del campo eléctrico es E_0/K_e, siendo E_0 el campo creado por las cargas libres y K_e el coeficiente dieléctrico del líquido. *Fuera* del líquido, es decir en la superficie de la lámina, la intensidad es E_0. El incremento del campo eléctrico desde el valor E_0/K_e hasta E_0 no es discontinuo, sino que tiene lugar en una pequeña región (de espesor igual a unos cuantos diámetros moleculares) indicada por el rayado. Una molécula de esta región, representada por el círculo, se polariza del modo que se indica. Pero dado que la carga inducida positiva se encuentra en una región de mayor intensidad que la carga negativa, la fuerza ejercida hacia la derecha es mayor que la dirigida hacia la izquierda. Esto tiene como efecto aumentar más la presión ejercida por

el líquido contra la lámina cargada y, por consiguiente, reducir la fuerza que han de ejercer los apoyos para mantener el equilibrio.

Como en tantos otros casos, puede soslayarse tanto el cálculo de las fuerzas sobre los dipolos inducidos como el del incremento de presión, si se utilizan consideraciones energéticas. Carguemos las láminas y desconectémoslas de la línea, de modo que la carga Q sobre cada lámina permanezca constante. Imaginemos que se tira de las láminas para separarlas ligeramente y calculemos la fuerza igualando el trabajo realizado al incremento de energía del sistema. Sea A el área de cada lámina, x la distancia entre ellas y F la fuerza ejercida sobre cada una por sus soportes. El trabajo dW realizado al producir un pequeño incremento dx en la distancia que las separa es

$$dW = F\,dx.$$

Según la Ec. [8-20], la densidad de energía en el flúido es

$$\text{densidad de energía} = \frac{D^2}{2\varepsilon},$$

siendo ε la capacidad específica de inducción del flúido. El volumen de flúido comprendido entre las láminas es Ax, de modo que la energía W en el campo será

$$W = \frac{D^2}{2\varepsilon} Ax.$$

La variación de energía cuando x se incrementa en dx es

$$dW = \frac{D^2}{2\varepsilon} A\,dx.$$

Igualando el trabajo realizado al incremento de energía se obtiene:

$$F\,dx = \frac{D^2}{2\varepsilon} A\,dx,$$

y, por tanto,

$$F = \frac{D^2}{2\varepsilon} A.$$

Puesto que $D = \sigma = Q/A$, y $\varepsilon = K_e\,\varepsilon_0$, la fuerza puede escribirse también

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon A} = \frac{1}{K_e}\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \qquad [8\text{-}21]$$

Si las láminas se encuentran en el vacío, $K_e = 1$ y la fuerza es

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

La última ecuación puede obtenerse también aplicando la ley de Coulomb y realizando la integración mencionada al comienzo de esta

sección. La fuerza necesaria para mantener las láminas en equilibrio está dada por la Ec. [8-21], y se ha reducido, por tanto, en el factor $1/K_e$ como consecuencia de la electrostricción. Éste constituye otro ejemplo de la ley general de que la fuerza neta entre conductores cargados situados en un flúido dieléctrico se reduce en el factor $1/K_e$ respecto a su valor en el vacío.

La fuerza mecánica entre dos láminas cargadas con cargas opuestas se utiliza en un tipo de voltímetro electrostático, llamado *electrómetro de discos*, que se representa en la figura 8-12. Un disco circular A rodeado de un anillo de guarda B-B, muy ajustado, forma una de las armaduras de un condensador plano. Tanto A como B se mantienen al mismo potencial, mientras que la armadura C se encuentra a un potencial distinto. Se suspende la armadura A de uno de los brazos de una balanza de brazos iguales. La fuerza de atracción entre A y C puede medirse directamente mediante el contrapeso W.

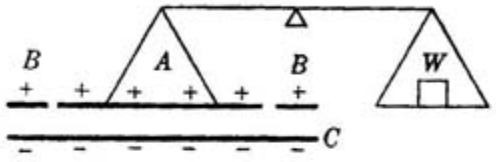


FIG. 8-12.—Esquema de un electrómetro de discos.

Puesto que la carga que se ejerce sobre A es proporcional a la diferencia de potencial entre A y C, la fuerza de atracción es proporcional, según la Ec. [8-21], al cuadrado de esta diferencia de potencial. El aparato no tiene un gran valor práctico, pero es un instrumento absoluto en el sentido de que no requiere calibrado, sino únicamente un conocimiento preciso de sus dimensiones.

8-10. Corriente de desplazamiento.—La figura 8-13 representa un circuito que contiene en serie una fuente de fem, una resistencia, un condensador y un interruptor. Cuando se cierra el interruptor el condensador se carga y la corriente en el circuito está dada por la Ec. [8-16]. Hemos establecido que una corriente consiste en un flujo de carga, y que la corriente es la misma en todas las secciones transversales de un circuito en serie.

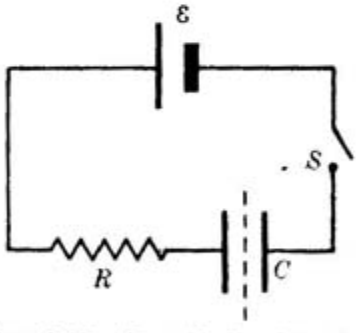


FIG. 8-13.—Capacidad, resistencia y fem en serie.

Es evidente, sin embargo, que este enunciado ha de modificarse si el circuito contiene un condensador como el de la figura 8-13. El dieléctrico entre las láminas del condensador es, razonablemente, un cuerpo no conductor y, por tanto, la corriente de *conducción* en cualquier sección transversal que pase por el condensador (tal como la indicada por la línea de puntos) es necesariamente nula. La corriente de conducción es la misma en todas las secciones transversales del circuito, *excepto* en las que pasan por el dieléctrico; como resultado de la corriente penetran electrones libres dentro de una armadura del condensador y obligan a otros electrones libres a salir de la otra, pero no *fluyen* electrones libres *a través* del dieléctrico.

El físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) apuntó que revisando o generalizando nuestra definición de corriente, se podía decir que la corriente, con la nueva definición, es la misma en todas las secciones del circuito *incluyendo las que cortan el dieléctrico.*

Representemos por q la carga que posee el condensador en cierto instante. La corriente de conducción i en la línea es la velocidad a la cual se suministra o elimina carga a cada lámina del condensador, o sea, es la derivada de q respecto al tiempo:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

El desplazamiento D en el dieléctrico es

$$D = \sigma = \frac{q}{A},$$

o sea,

$$q = DA,$$

donde A es el área de las láminas del condensador. Entonces,

$$\frac{dq}{dt} = A\frac{dD}{dt},$$

e

$$i = A\frac{dD}{dt} \qquad [8\text{-}20]$$

Maxwell propuso denominar *corriente de desplazamiento* a la expresión $A\dfrac{dD}{dt}$, que debe considerarse *como una corriente en el dieléctrico:*

$$i_D = \text{corriente de desplazamiento} = A\frac{dD}{dt} \qquad [8\text{-}21]$$

De aquí se deduce que la expresión $\dfrac{dD}{dt}$ representa la *densidad de la corriente de desplazamiento:*

$$J_D = \text{densidad de la corriente de desplazamiento} = \frac{dD}{dt} \qquad [8\text{-}22]$$

La corriente de desplazamiento tiene, evidentemente, las mismas dimensiones que la corriente de conducción, ya que D puede expresarse en coul/m². Entonces, según la Ec. [8-22], la corriente (de conducción) en la línea es igual a la corriente (de desplazamiento) en el dieléctrico; y la corriente es la misma en todas las secciones transversales del circuito, incluídas las que cortan el dieléctrico, aunque el circuito no puede considerarse *cerrado* en el sentido de constar de una trayectoria conductora continua. Con otras palabras, todos los circuitos pueden considerarse como cerrados aunque una parte de ellos sea un aislador tal como el dieléctrico de un condensador.

Naturalmente, ningún dieléctrico real es un aislador perfecto y, por tanto, además de la corriente de desplazamiento, habrá, en general, una corriente de conducción a través del dieléctrico de cualquier condensador cargado. Así, si la corriente en un conductor varía, la intensidad del campo eléctrico y, por tanto, el desplazamiento en el conductor variarán también, y habrá en el conductor una corriente de desplazamiento además de la corriente de conducción. La corriente real en cualquier sección transversal de un circuito se considera como suma de las corrientes de conducción y desplazamiento en dicha sección. En la mayor parte de los casos las corrientes de conducción en los dieléctricos son despreciables comparadas con las corrientes de desplazamiento, y las corrientes de desplazamiento en los conductores son despreciables comparadas con las corrientes de conducción. Sin embargo, para las corrientes de alta frecuencia la corriente de desplazamiento en los conductores puede llegar a ser un factor importante.

En la sección 7-6 hemos demostrado que

$$D = \varepsilon_0 E + P.$$

Se deduce de aquí que la densidad, $\dfrac{dD}{dt}$ de la corriente de desplazamiento puede escribirse como suma de dos términos:

$$J_D = \frac{dD}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} + \frac{dP}{dt}$$

El segundo término del segundo miembro, dP/dt, representa una densidad de corriente *de conducción* en el sentido de que mientras la polarización en un dieléctrico está variando, hay un paso real de cargas desplazadas (ligadas) a través de una sección del dieléctrico. El primer término, $\varepsilon_0 \dfrac{dE}{dt}$, no representa ningún movimiento de partículas cargadas, sino que es el término que ha de añadirse para hacer igual la corriente en todos los puntos. Si las armaduras de un condensador se encuentran en el vacío, el término dP/dt es necesariamente nulo, y toda la corriente de desplazamiento depende de la derivada de la intensidad del campo eléctrico.

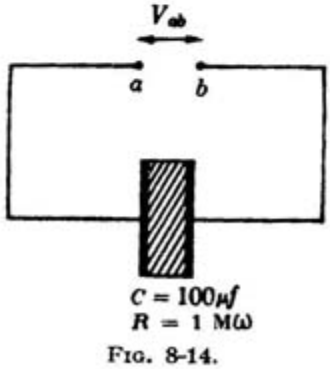


FIG. 8-14.

EJEMPLO.—La figura 8-14 representa un condensador *con fugas*, cuya capacidad es de 100 μf y su resistencia de $10^6\ \Omega$, conectado entre los puntos *a* y *b*, cuya diferencia de potencial puede variarse a voluntad. Consideremos los casos siguientes:

1) Se conecta el condensador durante largo tiempo a una diferencia de potencial constante de 100 V. La corriente a través del dieléctrico y la carga del condensador han alcanzado, por tanto, valores estacionarios. Puesto que la carga del con-

densador no varía, el desplazamiento en el dieléctrico es constante y la *corriente* de desplazamiento es nula. Hay una corriente de conducción a través del dieléctrico,

$$i = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{100}{10^6} = 10^{-4} \text{ A},$$

y una corriente igual en la línea.

2) Se aumenta la diferencia de potencial entre a y b, desde 100 V y de modo uniforme a razón de 10 V/seg, es decir:

$$V_{ab} = 100 + 10t.$$

Calcúlense las corrientes de conducción y desplazamiento al cabo de 20 segundos.

La corriente de conducción en el dieléctrico en el instante t es

$$i_{\text{cond}} = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{100 + 10t}{10^6}$$
$$= 10^{-4} + 10^{-5}t,$$

y para $t = 20$ seg,

$$i_{\text{cond}} = 3 \times 10^{-4}\text{A}.$$

El desplazamiento en el dieléctrico en un instante cualquiera t es

$$D = \frac{q}{A} = \frac{CV_{ab}}{A} = \frac{10^{-4}(100 + 10t)}{A} = \frac{1}{A}(10^{-2} + 10^{-3}t),$$

y la corriente de desplazamiento:

$$i_{\text{despl}} = A\frac{dD}{dt} = A\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{A}(10^{-2} + 10^{-3}t)\right]$$
$$= 10 \times 10^{-4} \text{ A}.$$

La corriente de desplazamiento es constante, puesto que el desplazamiento aumenta en proporción también constante.

La corriente en la línea al cabo de 20 seg será, por consiguiente,

$$i_{\text{línea}} = i_{\text{condensador}} = i_{\text{cond}} + i_{\text{despl}}$$
$$= 3 \times 10^{-4} + 10 \times 10^{-4}$$
$$= 13 \times 10^{-4} \text{ A}.$$

Esto es, hay en la línea una corriente de conducción de 13×10^{-4} A, mientras que en el dieléctrico hay una corriente de conducción de 3×10^{-4} A y una corriente de desplazamiento de 10×10^{-4} A. La corriente total es la misma en todas las secciones transversales del circuito.

PROBLEMAS

8-1. Calcúlese en microfaradios la capacidad de la Tierra considerándola como un conductor esférico colocado en el vacío. Tómese para radio terrestre 6730 Km.

8-2. El papel dieléctrico en un condensador de hoja metálica, tiene 0,005 cm de espesor. Su coeficiente dieléctrico es 2,5 y su rigidez dieléctrica 50×10^6 V/m. *a*) ¿Qué superficie de papel, y de

hoja de estaño, se necesita para construir un condensador de 0,1 μf? *b*) Si la intensidad del campo eléctrico en el papel no excede de la mitad de la rigidez dieléctrica, ¿cuál es la máxima diferencia de potencial que puede aplicarse al condensador? *c*) Calcúlese la resistencia del dieléctrico si su resistividad es 10^{14} Ω-m.

8-3. Dedúzcase la Ec. [8-12] por el método utilizado en la sección 8-4.

8-4. Complétese la deducción de la Ec. [8-14] a partir de la Ec. [8-13].

8-5. Un condensador de 10 μf se conecta a una diferencia de potencial de 100 V a través de una resistencia de 1 megaohmio. *a*) Calcúlese la carga del condensador en los instantes siguientes después de efectuada la conexión: 0,5 seg, 10 seg, 20 seg, 100 seg. *b*) Calcúlese la corriente de carga en los mismos instantes. *c*) ¿Cuánto tiempo se requeriría para que el condensador adquiriese su carga final, si la corriente de carga permaneciese constante en su valor inicial? *d*) Calcúlese el tiempo necesario para que la carga aumente desde cero hasta 5×10^{-4} coul. *e*) Constrúyanse gráficas de los resultados de las partes *a*) y *b*) para un intervalo de tiempo de 20 seg.

8-6. Un condensador de capacidad C_1 se carga a una diferencia de potencial V_1. Se conectan sus bornes a los de otro condensador descargado, de capacidad C_2, a través de una resistencia R. Calcúlese la expresión de la diferencia de potencial entre las armaduras del primer condensador en un instante cualquiera t después de conectado el segundo.

8-7. El circuito de la figura 8-15 se utiliza para obtener una onda de voltaje

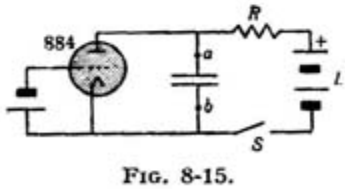


FIG. 8-15.

en *dientes de sierra*. El tubo 884 es un pequeño tiratrón lleno de gas e inicialmente no es conductor. Al cerrar el interruptor S se carga el condensador a través de la resistencia R. Cuando el voltaje V_{ab} alcanza un valor crítico, el tubo se hace repentinamente conductor. El condensador se descarga entonces a través del tubo y V_{ab} disminuye casi instantáneamente a un valor pequeño llamado voltaje de mantenimiento. Cuando se alcanza este voltaje el tubo deja de nuevo de ser conductor y el ciclo se repite. Sean $\varepsilon = 300$ V, $R = 200\,000$ Ω y $C = 0{,}05$ μf. Supóngase que el voltaje crítico para el que el tubo comienza a conducir es 210 V, y que el voltaje de mantenimiento es nulo. *a*) ¿En qué instante después de cerrado el interruptor S comienza el tubo a conducir? *b*) Calcúlese la diferencia de potencial V_{ab} entre las armaduras del condensador en instantes iguales a 1/4, 1/2 y 3/4 del de la parte *a*). *c*) Constrúyase una gráfica de V_{ab} en función del tiempo.

8-8. Se carga un condensador de capacidad C conectándolo, a través de una resistencia R, a los bornes de una batería de fem ε y resistencia interna despreciable. *a*) ¿Cuánta energía suministra la batería durante el proceso de carga? *b*) ¿Qué fracción de esta energía aparece en forma de calor en la resistencia?

8-9. La capacidad de un condensador de radio puede variar desde 50 μμf hasta 950 μμf girando el mando desde 0° hasta 180°. Con el mando puesto en 180° el condensador se conecta a una batería de 400 V. Después de la carga, se desconecta el condensador de la batería y se retrocede el mando a 0°. *a*) ¿Cuál es la carga sobre el condensador? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador cuando el mando indica 0°? *c*) ¿Cuál es la energía del condensador en esta posición? *d*) ¿Qué trabajo es necesario para hacer girar el mando, si despreciamos el rozamiento?

8-10. Un condensador de aire, que se compone de dos láminas paralelas, muy próximas, tiene una capacidad de 1000 μμf. La carga de cada lámina es 1 μcoul. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre

las láminas? *b*) Si se mantiene constante la carga, ¿cuál será la diferencia de potencial entre las láminas si duplicamos la distancia entre ellas? *c*) ¿Qué trabajo se necesita para efectuar este desplazamiento.

8-11. Un condensador de 20 μf está cargado a una diferencia de potencial de 1000 V. Las armaduras del condensador cargado se conectan a las de un condensador descargado de 5 μf. Calcúlese: *a*) la carga inicial del sistema; *b*) la diferencia final de potencial entre las armaduras de cada condensador; *c*) la energía final del sistema; *d*) la disminución de energía cuando se conectan los condensadores.

8-12. Un condensador de 1 μf y otro de 2 μf se conectan en serie a una red de suministro de 1000 V. *a*) Calcúlese la carga de cada condensador y la diferencia de potencial entre las armaduras de cada uno de ellos. *b*) Los condensadores cargados se desconectan de la red y ellos entre sí, y se vuelven a conectar con las armaduras del *mismo* signo unidas. Calcular la carga y el voltaje finales en cada uno de ellos.

8-13. Un condensador de 1 μf y otro de 2 μf se conectan en paralelo a una línea de 1000 V. *a*) Calcúlese la carga de cada condensador y su voltaje. *b*) Los condensadores cargados se desconectan de la red y ellos entre sí, y se vuelven a conectar con las armaduras de *distinto* signo juntas. Calcúlese la carga final de cada uno y su voltaje.

8-14. Calcúlese en la red de la figura 8-16: *a*) la carga sobre cada condensador; *b*) la diferencia de potencial entre sus armaduras; *c*) la energía total almacenada en los tres condensadores.

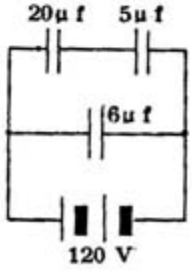


Fig. 8-16.

8-15. Calcúlese, en la red de la figura 8-17, la carga de cada condensador y la intensidad de la corriente en la batería.

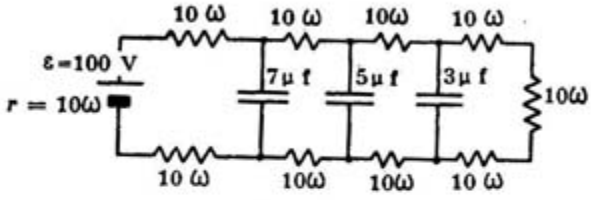


Fig. 8-17.

8-16. En la figura 8-18, cada condensador C_3 tiene 3 μf y cada condensador C_2 tiene 2 μf. *a*) Calcúlese la capacidad equivalente de la red comprendida entre los puntos *a* y *b*. *b*) Calcúlese la carga de cada uno de los condensadores próximos

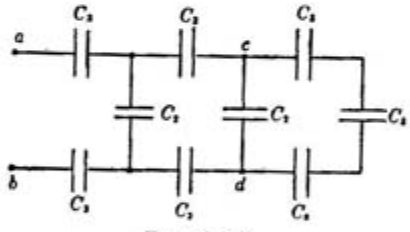


Fig. 8-18.

a *a* y *b*, cuando $V_{ab} = 900$ V. *c*) Calcúl V_{cd} cuando $V_{ab} = 900$ V.

8-17. Calcúlese, en la red de la figu 8-19, la capacidad equivalente entre lo puntos *a* y *b*.

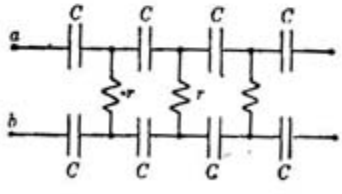


Fig. 8-19.

8-18. Se hace referencia al Ejemplo 2 (Sec. 8-3). Supongamos que el condensador plano se mantiene conectado al voltaje de carga de 10 000 V, cuando el di-

eléctrico está entre las láminas. ¿Cuáles hubieran sido entonces el desplazamiento y la intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico, así como la densidad superficial de carga de las láminas del condensador?

8-19. Se hace referencia al EJEMPLO 3 de la sección 8-3. *a*) Calcúlese la polarización P en cada dieléctrico. *b*) Hállese la densidad superficial de carga inducida en las superficies de cada dieléctrico. *c*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga neta o resultante en la superficie de contacto entre ambos dieléctricos? *d*) ¿Cuál es el potencial en esta superficie, si la armadura negativa del condensador está conectada a tierra?

8-20. Una esfera conductora de radio a, situada en el vacío, tiene una carga Q. *a*) ¿Cuál es la densidad de energía en el campo eléctrico creado por la esfera en los puntos interiores a una delgada cubierta esférica de radio r ($r > a$) y espesor dr? *b*) ¿Cuál es la energía total en la cubierta? *c*) Intégrese la expresión anterior para encontrar la energía total del campo creado por la esfera. *d*) Iguálese esta energía a la de un condensador cargado, $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$, para deducir la expresión de la capacidad de una esfera. Compárese con la Ec. [8-3].

8-21. Dos cilindros coaxiales de longitud l y radios a y b poseen cargas Q iguales y opuestas, según indica la figura 8-3. El espacio comprendido entre los cilindros contiene un dieléctrico de capacidad específica de inducción ε. *a*) ¿Cuál es la densidad de energía en el dieléctrico, en los puntos interiores a una delgada capa cilíndrica de radio r ($a < r < b$) y espesor dr? *b*) ¿Cuál es la energía total de la capa? *c*) Intégrese la expresión anterior para calcular la energía total en el dieléctrico. *d*) Iguálese esta energía a la del condensador cargado, $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$, para deducir la expresión de la capacidad de un condensador cilíndrico. Compárese con la Ec. [8-11].

8-22. La resistencia del dieléctrico de un condensador de 0,1 μf es 100 megaohmios. El coeficiente dieléctrico del primero es 3. Supóngase que la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador en cierto instante es 1000 V y que aumenta a razón de 10^6 V/seg. Calcúlese la corriente de conducción en el dieléctrico, la corriente de desplazamiento en el mismo y la corriente en los conductores unidos a los bornes del condensador.

8-23. El valor comercial de cincuenta condensadores de 1 μf, para 600 V, es el mismo que el de una batería de acumuladores de 6 V y 120 A-h. Compárese la energía obtenible de la batería totalmente cargada con la almacenada en los cincuenta condensadores, cargado cada uno a una diferencia de potencial de 600V.

MAGNETISMO

CAPÍTULO IX

EL CAMPO MAGNÉTICO

9-1. Magnetismo.—Los primeros fenómenos magnéticos observados estuvieron relacionados, sin duda, con los llamados imanes *naturales*, que son trozos de un mineral de hierro encontrado junto a la antigua ciudad de Magnesia (de donde viene el término *magnético)*. Estos imanes naturales tienen la propiedad de atraer al hierro no imantado, siendo el efecto más pronunciado en ciertas regiones del imán llamadas *polos*. Era conocido por los chinos, antes del año 121 de nuestra era, que una barra de hierro, después de haber sido colocada cerca de un imán natural, adquiría y conservaba esta propiedad de los imanes naturales, y que si dicha barra se suspendía libremente de modo que pudiera girar alrededor de un eje vertical se colocaba aproximadamente en la dirección norte-sur. El uso de los imanes para facilitar la navegación puede hacerse remontar al siglo undécimo al menos.

El estudio de los fenómenos magnéticos se limitó durante muchos años a los imanes obtenidos de este modo. Hasta 1819 no se demostró que existía relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos. En aquel año, el físico danés Hans Christian Oersted (1770-1851) observó que un imán que puede girar alrededor de un eje (una aguja magnética) se desviaba al encontrarse en la proximidad de un hilo conductor que transportaba una corriente. Doce años más tarde, tras intentos que duraron varios años, Faraday observó que se producía en un circuito una corriente instantánea, cuando en otro circuito próximo se establecía o se interrumpía una corriente. Poco tiempo después se descubrió que el movimiento de un imán acercándose o alejándose del circuito producía el mismo efecto. Joseph Henry (1797-1878), físico americano que más tarde llegó a ser el primer director de la Smithsonian Institution, se había anticipado un año, aproximadamente, a los descubrimientos de Faraday, pero puesto que Faraday fué quien primero publicó sus resultados, se le atribuye generalmente el mérito del descubrimiento. El trabajo de Oersted demostró que podían producirse efectos magnéticos por el movimiento de cargas eléctricas, y el de Faraday y Henry que podían obtenerse corrientes por el movimiento de imanes.

Actualmente se cree que los llamados fenómenos magnéticos proceden de las fuerzas originadas entre cargas eléctricas en movimiento. Esto es, las cargas móviles ejercen fuerzas *magnéticas* entre sí, además de las fuerzas puramente *eléctricas* o *electrostáticas* dadas por la ley de Coulomb. Comenzaremos, por consiguiente, el estudio del magnetismo considerando las fuerzas que existen entre cargas móviles y dejaremos la cuestión de los polos magnéticos para un capítulo posterior, donde serán estu-

diados en relación con las propiedades magnéticas de la materia en general.

Puesto que los electrones están en movimiento alrededor del núcleo atómico, y cada electrón parece estar en rotación constante alrededor de un eje que pasa por él, cabe esperar que cada átomo presente efectos magnéticos, y, de hecho, se ha encontrado que es así. La posibilidad de que las propiedades magnéticas de la materia fueran consecuencia de minúsculas corrientes atómicas, fué sugerida por primera vez por Ampère, en 1820. Hasta hace pocos años no ha sido posible la comprobación de esta idea.

Como en el caso de las fuerzas electrostáticas, el medio en el cual se mueven las cargas puede tener un efecto pronunciado sobre las fuerzas magnéticas observadas entre ellas. En el capítulo presente supondremos que las cargas se encuentran en el vacío. Para todos los fines prácticos, los resultados se aplicarán igualmente a cargas y conductores que están en el aire.

9-2. Campo magnético. Inducción.—En vez de ocuparnos directamente de las fuerzas ejercidas por una carga móvil sobre otra, resulta más cómodo adoptar el punto de vista de que una carga móvil crea un *campo magnético* en el espacio que la rodea, y es este campo el que ejerce una fuerza sobre otra carga que se mueve en él. Además del campo magnético creado alrededor de una carga móvil, existe el campo electrostático que rodea la carga, esté ésta o no en movimiento.[1] Una segunda partícula cargada, situada en estos campos combinados, experimenta una fuerza debida al campo eléctrico, ya se halle en movimiento o en reposo. El campo magnético ejerce una fuerza sobre ella únicamente si está en movimiento.

Se dice que existe un campo magnético en un punto si (además de la fuerza electrostática) *se ejerce una fuerza sobre una carga móvil que pase por dicho punto.*

El campo eléctrico creado por cargas móviles o por corrientes es, en muchos casos, tan pequeño que la fuerza electrostática sobre una carga móvil puede despreciarse comparada con la fuerza magnética.

Existen dos aspectos en el problema de calcular las fuerzas magnéticas ejercidas entre cargas móviles. El primero consiste en determinar el valor y dirección del campo magnético en un punto, tomando como datos los correspondientes a la carga móvil que crea el campo, y el segundo, en calcular el valor y dirección de la fuerza ejercida sobre una carga móvil en un campo dado. Comenzaremos por el segundo aspecto del problema; esto es, aceptaremos por ahora que las cargas móviles y las corrientes crean campos magnéticos, y estudiaremos las leyes que determinan la fuerza que se ejerce sobre una carga móvil en el campo.

---

[1] Con objeto de determinar un movimiento es necesario algún sistema de referencia. La formulación precisa de la expresión de los campos ligados a cargas móviles y las fuerzas experimentadas por ellas, requiere un cuidadoso análisis de las hipótesis inherentes al sistema de referencia y al papel del observador. Se remite al lector interesado en estas cuestiones a la obra de J. A. STRATTON *Electromagnetic Theory*.

Hay muchas analogías entre campos eléctricos y magnéticos, aunque ambos son esencialmente diferentes en cuanto a su naturaleza y se refieren a un conjunto de fenómenos por entero distintos. Lo mismo que el eléctrico, el campo magnético es una magnitud vectorial que tiene en cada punto un cierto valor y una determinada dirección. Además, lo mismo que resultó útil introducir dos vectores eléctricos E y D para describir distintos aspectos de un campo eléctrico, conviene considerar dos vectores campo magnético, B y H, relacionados análogamente. Comenzaremos estudiando el vector *inducción magnética*, B.

Un campo magnético, como un campo eléctrico, puede representarse por líneas llamadas *líneas de inducción*, cuya dirección en cada punto es la del vector *inducción magnética*. Por convenio, el número de estas líneas por unidad de superficie normal a su dirección se hace igual al valor de la inducción. Por consiguiente, la inducción en un punto puede expresarse en *líneas por unidad de superficie*. En el sistema mks una línea de inducción se denomina *weber* y, en este sistema, la inducción magnética B se expresa en *webers por metro cuadrado* (wb/m^2). Un submúltiplo es la milésima de la unidad anterior, que se denomina *miliweber por metro cuadrado* (mwb/m^2) y es frecuentemente más adecuada.

Aunque no lo utilizaremos en este libro, hay otro sistema de unidades llamado *sistema electromagnético* en el cual se expresan frecuentemente las magnitudes magnéticas. La unidad de carga eléctrica en este sistema es igual a 10 coul. La unidad de intensidad de corriente es igual a 10 coul por segundo, o sea, 10 A. Las unidades de masa, longitud y tiempo son las del sistema cgs.

En el sistema electromagnético una línea de inducción se denomina *maxwell*, y la inducción magnética se expresa en *maxwells por centímetro cuadrado*. Un maxwell por centímetro cuadrado se denomina *gauss*. No hay expresión similar en el sistema mks para un weber por metro cuadrado. Un gauss, o un maxwell por centímetro cuadrado, corresponde a una inducción magnética de una diezmilésima de weber por metro cuadrado:

$$1 \text{ wb/m}^2 = 10^4 \text{ maxwells/cm}^2 = 10^4 \text{ gauss.}$$

Puesto que $1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$, se deduce que

$$1 \text{ weber} = 10^8 \text{ maxwells.}$$

Los mayores valores de la inducción magnética que pueden obtenerse en los laboratorios son del orden de 10 wb/m^2, o sea 100000 gauss, y en el campo magnético terrestre la inducción es sólo de algunas cienmilésimas de weber por metro cuadrado, esto es, algunas décimas de gauss.

El número total de líneas de inducción que atraviesan una superficie se denomina *flujo magnético* a través de la superficie y se representa por Φ. Del estudio realizado en la sección 2-5 se deduce evidentemente que, en general,

$$\Phi = \int B \cos \varphi \, dA, \qquad [9\text{-}1]$$

y en el caso especial en que B es uniforme y normal a la superficie finita A:

$$\Phi = BA. \qquad [9\text{-}2]$$

En el sistema mks, el flujo magnético se expresa en webers. Puesto que la inducción en un punto es igual al flujo por unidad de superficie, se denomina con frecuencia *densidad de flujo.*

9-3. Fuerza sobre una carga móvil.—La figura 9-1 (a) representa una región en la cual la densidad de flujo magnético es uniforme y perpendicular al plano Y-Z. Esto es, las líneas de inducción son rectas

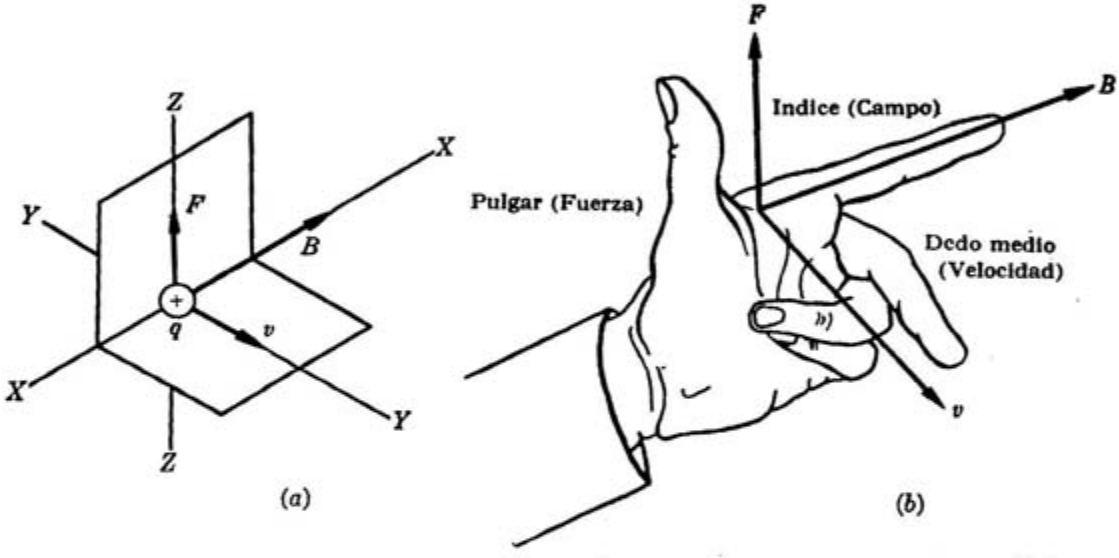


FIG. 9-1.—(a) Carga móvil en dirección perpendicular a un campo magnético uniforme. (b) Regla de la mano izquierda.

paralelas al eje X e igualmente espaciadas. Una carga positiva q, que se mueve con velocidad v, perpendicularmente a la dirección de la inducción, está sometida, según demuestra la experiencia, a una fuerza F en la dirección indicada, perpendicular a su velocidad v y a la inducción B. El valor de esta fuerza está dado por

$$F = q\,v\,B. \qquad [9\text{-}3]$$

En el sistema mks, la fuerza F resulta medida en newtons cuando q se expresa en culombios, v en m/seg y B en wb/m^2.

Los vectores B, v y F forman una terna de ejes rectangulares. La relación entre sus sentidos puede recordarse por la regla de *la mano izquierda,* que utiliza los dedos pulgar, índice y medio para representar estas direcciones mutuamente perpendiculares [Fig. 9-1(b)].

El dedo índice señala el sentido del campo; el dedo medio, el sentido de la velocidad, y el dedo pulgar, el sentido de la fuerza. (El sentido de la

fuerza ejercida sobre una carga negativa es opuesto al de la fuerza sobre una carga positiva).

La figura 9-1 representa un caso especial en el cual la velocidad de la carga móvil es perpendicular a la dirección del campo. Con más generalidad, si el vector velocidad, v, forma un ángulo φ con el vector inducción, B, como indica la figura 9-2, el valor de la fuerza ejercida sobre la carga está dado por

$$\boxed{F = q\,v\,B \operatorname{sen} \varphi} \qquad [9\text{-}4]$$

Por consiguiente, la fuerza es proporcional a la *componente* de la velocidad (v sen φ) perpendicular a la dirección de la inducción magnética. La *dirección* de la fuerza es siempre perpendicular al plano determinado por v y B. De la figura 9-2 resulta evidente que cuando $\varphi = 90°$, el caso se reduce al de la figura 9-1, y cuando $\varphi = 0$ ó $180°$, la carga móvil *no* está sometida a ninguna fuerza.

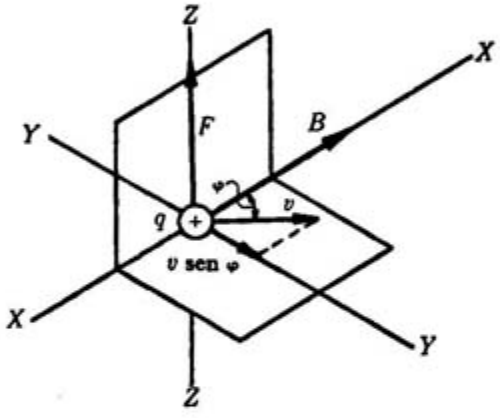


FIG. 9-2.—Carga móvil en una dirección que forma cierto ángulo con un campo magnético uniforme.

El producto vectorial de dos vectores se define como un vector cuyo módulo es el producto de los módulos de ambos vectores por el seno del ángulo que forman. Su dirección es perpendicular al plano determinado por los dos vectores y su sentido es el de avance de un tornillo, roscado a derechas, cuando se le hace girar de modo que el primer vector coincida con el segundo. (Véase THOMAS: *Cálculo infinitesimal y Geometría analítica*, Sec. 13-4.) Según esta definición, resulta evidente que la fuerza $\vec{F}$ que se ejerce sobre una carga q móvil con la velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético de densidad de flujo $\vec{B}$ es, utilizando la notación vectorial,

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B} \qquad [9\text{-}5]$$

La Ec. [9-4] puede utilizarse para *definir* la inducción magnética. Esto es,

$$B = \frac{F}{q\,v \operatorname{sen} \varphi} \text{ (Definición de } B\text{).}$$

Traducido en palabras, *el valor de la inducción magnética en un punto es el cociente obtenido al dividir la fuerza que se ejerce sobre una carga móvil que pasa por el punto, por el producto de la carga y de la componente de su velocidad perpendicular a la inducción.* (Compárese con la definición correspondiente de intensidad del campo eléctrico E dada en la Sec. 2-1.) Por tanto, en el sistema mks, la inducción magnética puede expresarse tam-

bién en newtons por (culombio-metro por segundo). Puesto que un amperio es un culombio por segundo, estas unidades son equivalentes a newtons por amperio-metro. En la práctica se utiliza mucho más frecuentemente la expresión webers por metro cuadrado.

Cuando v y B son perpendiculares, como se indica en la figura 9-1, la fuerza sobre una carga móvil es máxima para una velocidad dada. La *dirección* del vector inducción en un punto puede definirse, por tanto, como *la perpendicular al plano determinado por la fuerza máxima sobre una carga móvil y la velocidad de la carga.* Más adelante describiremos métodos experimentales más prácticos, compatibles con las definiciones anteriores, para determinar el valor y dirección del vector inducción magnética.

El sentido de un campo eléctrico es, por definición, el mismo que el de la fuerza sobre una carga positiva. Es difícil comprender a primera vista por qué no se ha definido del mismo modo el sentido de un campo magnético, es decir, como el sentido de la fuerza sobre una carga *móvil* positiva, pero reflexionando un poco se ve que tal definición no es posible. Sea la dirección de un campo magnético en el punto P, figura 9-3, perpendicular al plano del dibujo alejándose del lector. Los vectores B y las líneas de inducción se ven entonces de punta. Un vector que se aleja del lector se representa por una cruz (×) que puede imaginarse como la cola de una flecha. Un vector dirigido hacia el lector se indica por un punto (•), que corresponde a la punta de la flecha. El mismo convenio se utiliza para representar el sentido de una corriente cuando es perpendicular al plano del dibujo.

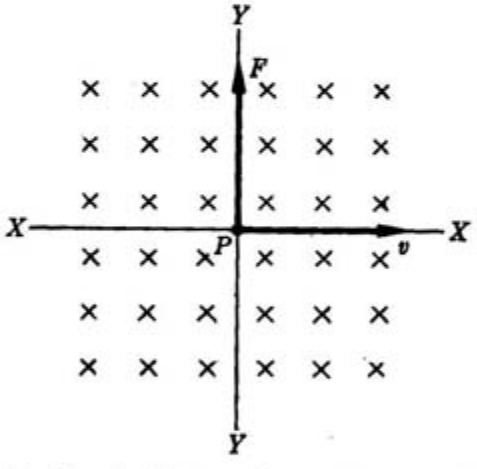


FIG. 9-3.—La fuerza sobre una carga móvil y la velocidad de la carga son siempre perpendiculares entre sí.

Una carga positiva colocada en P, móvil en el sentido indicado por la flecha v, experimenta una fuerza F. Si la velocidad tuviera el sentido positivo del eje Y, la fuerza estaría dirigida en el sentido negativo del eje X, etc.; es decir, F y v son siempre perpendiculares. Puesto que en un punto de un campo magnético *no existe una dirección fija* en la cual se ejerza la fuerza sobre una carga móvil, no puede utilizarse la dirección de la fuerza para definir la dirección del campo.

Sin embargo, puede decirse que, independientemente de la dirección en que se mueva la carga, *la fuerza se encuentra siempre en el plano del diagrama* de la figura 9-3. Por tanto, cuando se describen campos magnéticos ha de definirse un *plano* y no una recta. Pero la dirección del campo magnético define un plano perpendicular a dicha dirección, del mismo modo que un vector velocidad angular define un plano de rotación perpendicular a este vector. La orientación particular en este plano del vector fuerza queda fijada por la condición de que ha de ser perpendicular a la velocidad.

EJEMPLO.—Un electrón es lanzado en un campo magnético de densidad de flujo $B = 10$ wb/m² con una velocidad de 3×10^7 m/seg en una dirección que forma ángulo recto con el campo. Calcúlese la fuerza magnética sobre el electrón y compárese con el peso del mismo.

La fuerza magnética es

$$F = q\,v\,B = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{7} \times 10 = 4{,}8 \times 10^{-11} \text{ new.}$$

La fuerza gravitatoria o peso del electrón será

$$F = mg = 9 \times 10^{-31} \times 9{,}8 = 8{,}8 \times 10^{-30} \text{ new.}$$

Por consiguiente, la fuerza gravitatoria es despreciable comparada con la fuerza magnética.

9-4. Órbitas en los campos magnéticos de partículas cargadas.— Sea una partícula cargada positivamente situada en O en un campo magnético uniforme de densidad de flujo B y supongamos que se comunica a dicha partícula una velocidad v en una dirección perpendicular al campo. (Fig. 9-4.) La regla de la mano izquierda indica que se ejerce sobre la partícula en dicho punto una fuerza F, vertical y dirigida hacia arriba, igual a qvB. Puesto que la fuerza es perpendicular a la velocidad, no afectará al valor de esta velocidad, sino que modifica simplemente su dirección. En puntos tales como P y Q las direcciones de la fuerza y la velocidad se habrán modificado según se indica, pero el valor de la fuerza permanece invariable porque los valores de q, v y B son constantes. La partícula se mueve, por tanto, bajo la acción de una fuerza cuyo valor es constante, pero cuya dirección es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. La órbita recorrida por la partícula es, por tanto, una circunferencia descrita con velocidad tangencial constante v, y F es la fuerza centrípeta. Como se tiene

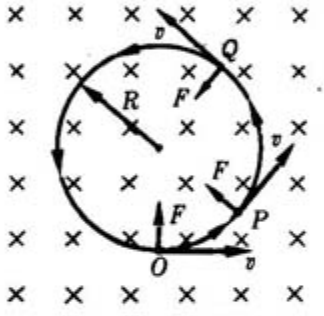


FIG. 9-4.—La órbita de una partícula cargada en un campo magnético uniforme es una circunferencia cuando la velocidad inicial es perpendicular al campo.

$$\text{fuerza centrípeta} = \frac{mv^2}{R}$$

resulta:

$$qvB = \frac{mv^2}{R},$$

y el radio de la órbita circular es

$$R = \frac{mv}{Bq}$$

Si la dirección de la velocidad inicial no es perpendicular al campo, la partícula se mueve describiendo una hélice. La proyección de esta hélice sobre un plano perpendicular al campo es una circunferencia de radio

$$\frac{mv \operatorname{sen} \varphi}{Bq}$$

La velocidad axial a lo largo de la hélice es constante e igual a

$$v \cos \varphi,$$

siendo φ el ángulo formado por v y B.

9-5. Ciclotrón.—El ciclotrón es un aparato ideado en 1931 por los doctores Ernest O. Lawrence y M. Stanley Livingston, de la Universidad de California, en Berkeley, con el fin de conseguir un haz de partículas atómicas cargadas que posean una gran velocidad. A pesar de su tamaño y complicación, la teoría de su funcionamiento es muy sencilla.

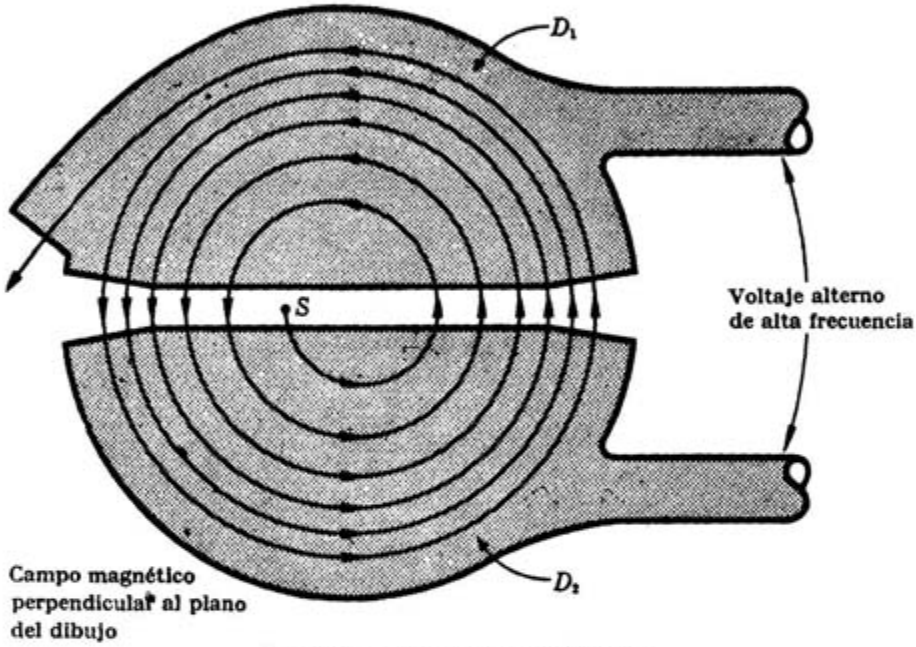


FIG. 9-5.—Esquema de un ciclotrón.

La parte fundamental del ciclotrón es un par de cámaras metálicas que tienen forma análoga a las mitades de una caja cilíndrica que ha sido cortada por uno de sus diámetros. (Véase Fig. 9-5.) Estas cámaras huecas se denominan «des» (D) a causa de su forma, y tienen los bordes de sus diámetros paralelos y ligeramente separados entre sí. Un manantial de iones—se utilizan comúnmente los núcleos cargados positivamente del hidrógeno pesado (deuterones)—se coloca cerca del punto medio del espacio que queda entre las «des». Estas últimas se conectan a los bornes de un circuito eléctrico del mismo tipo que el utilizado en un transmisor de radio. De este modo el potencial entre las «des» es obligado a cambiar rápidamente varios millones de veces por segundo, de modo que el campo eléctrico en el espacio comprendido entre las «des» está dirigido primero hacia una y luego hacia la otra, mientras que, a causa del efecto de pantalla de las mismas, el espacio comprendido dentro de cada una es una región de campo eléctrico nulo.

Ambas «des» están encerradas dentro de un recipiente metálico cilíndrico algo más grande, pero aisladas de él por haberse hecho el vacío dentro de dicho recipiente. El aparato completo está colocado entre los polos de un potente electroimán que proporciona un campo magnético cuya dirección es perpendicular a las bases del recipiente cilíndrico.

Consideremos un ion de carga $+q$ y masa m, emitido por el manantial de iones S en el instante en que D_1 (Fig. 9-5) es positiva. El ion es acelerado por el campo eléctrico creado entre las «des» y entra en la región libre de campo (eléctrico) situada dentro de D_2 con una velocidad v_1, por ejemplo. Puesto que su movimiento es perpendicular al campo magnético, describirá una trayectoria circular de radio

$$r_1 = \frac{mv_1}{Bq}$$

Si a continuación, durante el tiempo necesario para que el ion complete una semicircunferencia, el campo *eléctrico* ha cambiado de sentido estando ahora dirigido hacia D_1, el ion será acelerado de nuevo mientras cruza el espacio entre las «des» y entrará en D_1 con una velocidad mayor, v_2. En consecuencia, describirá un semicírculo de mayor radio dentro de D_1 para salir de nuevo al espacio comprendido entre las «des».

La velocidad angular ω del ion es

$$\omega = \frac{v}{r} = B\frac{q}{m}$$

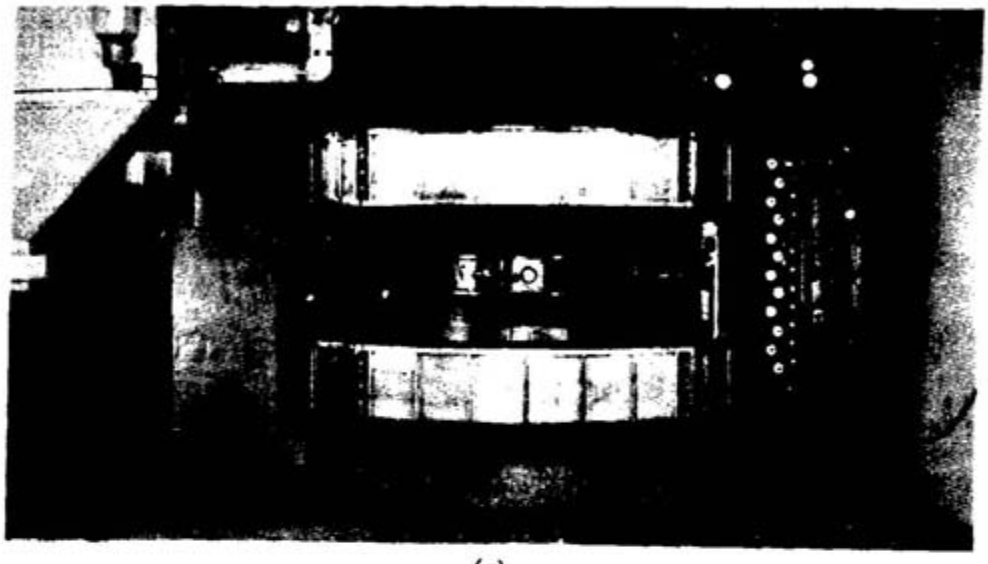
Por consiguiente, la velocidad angular es *independiente de la velocidad del ion y del radio de la circunferencia* que describe, dependiendo sólo de la inducción magnética y de la razón q/m correspondiente al ion. Por tanto, si el campo eléctrico se invierte al cabo de intervalos de tiempo iguales al tiempo necesario para que el ion realice una semirrevolución, el campo en el espacio comprendido entre las «des» tendrá siempre el sentido adecuado para acelerar el ion cada vez que cruce dicho espacio. Lo que hace factible el ciclotrón es, pues, el hecho de que el tiempo de rotación es independiente del radio. ya que la regularidad de los intervalos de inversión es realizada automáticamente por el circuito de *radio* al cual están conectadas las «des».

La trayectoria de un ion es una especie de espiral, compuesta de arcos semicirculares de radio cada vez mayor, unidos por segmentos cortos a lo largo de los cuales el radio aumenta. Si R representa el radio exterior de las «des» y $v_{\text{máx}}$ la velocidad del ion cuando describe una trayectoria de este radio, se tendrá

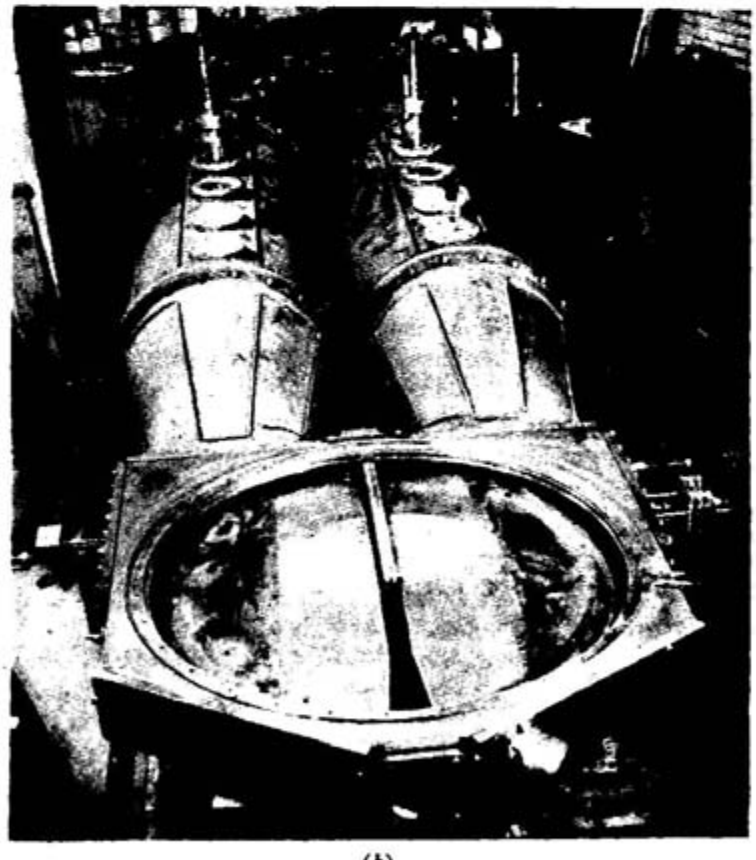
$$v_{\text{máx}} = BR\frac{q}{m},$$

y la energía cinética correspondiente será

$$\frac{1}{2}mv^2_{\text{máx}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2R^2,$$



(*a*)



(*b*)

FIG. 9-6.—Ciclotrón del Instituto Tecnológico de Massachusetts.

La diferencia de potencial V que se requeriría para producir la misma energía cinética en un solo paso, como en el generador de Van de Graaff, puede calcularse mediante la relación

$$\frac{1}{2}mv^2_{\text{máx}} = qV,$$

o sea,

$$V = \frac{1}{2}\frac{q}{m}B^2R^2. \qquad [9\text{-}7]$$

Si los iones son deuterones,

$$\frac{q}{m} = 4{,}8 \times 10^7 \text{ coul/Kg}.$$

En el ciclotrón del Instituto Tecnológico de Massachusetts, B es, aproximadamente, 1,8 wb/m² y $R = 0{,}48$ m. Por consiguiente,

$$V = \tfrac{1}{2} \times 4{,}8 \times 10^7 \times (1{,}8)^2 \times (0{,}48)^2$$
$$= 18 \times 10^6 \text{ V, o sea, 18 millones de voltios,}$$

y los deuterones tienen la misma velocidad que si se hubiesen acelerado con una diferencia de potencial de 18 millones de voltios.

La figura 9-6(*a*) es una fotografía del ciclotrón del Instituto Tecnológico de Massachusetts, y la figura 9-6(*b*) representa las «des» separadas del espacio comprendido entre los polos del electroimán. La tapa de la cámara exterior de vacío aparece quitada en esta fotografía. La barra colocada en el espacio comprendido entre las «des» sostiene el manantial de iones. Las partículas aceleradas pueden sacarse de la cámara a través de una ventana de fina hoja metálica pasando al tubo corto de la parte inferior derecha.

El ciclotrón funciona con éxito únicamente con partículas de masa relativamente grande, tales como protones o deuterones, y no puede utilizarse para acelerar electrones, por la razón siguiente: con objeto de que una partícula pueda permanecer en fase con el campo eléctrico alterno, su velocidad angular, Bq/m, tiene que permanecer constante. Ahora bien: aunque q y B son constantes, no puede decirse lo mismo de la masa m. Esta última crece al aumentar la velocidad a causa de los efectos de relatividad. Para una energía dada, la velocidad de un electrón es mucho mayor que para un protón o un deuterón, que tiene una masa mucho mayor, y el aumento relativista de masa es, en consecuencia, más pronunciado; p. ej., la masa de un electrón acelerado a 2 millones de voltios es, aproximadamente, cinco veces su masa en reposo, mientras que la masa de un deuterón acelerado a 2 millones de voltios difiere de su masa en reposo sólo en un 0,01 %, aproximadamente. En consecuencia, los electrones se desfasan muy rápidamente del campo eléctrico y no llegan al espacio comprendido entre las «des», en el instante adecuado para

ser acelerados. Esta dificultad no se produce en el generador tipo Van de Graaff, y puede ser también superada con un nuevo dispositivo llamado *betatrón*, descrito en la sección 12-4.

9-6. Medida de e/m.—La razón e/m, de la carga a la masa de un electrón, fué medida por primera vez por sir J. J. Thomson, en 1897, en el laboratorio Cavendish, en Cambridge, Inglaterra. El aparato utilizado por Thomson era un tubo de vidrio con la forma indicada en la figura 9-7, del cual se había extraído la mayor parte del aire. Se mantiene una diferencia de potencial de algunos miles de voltios entre el

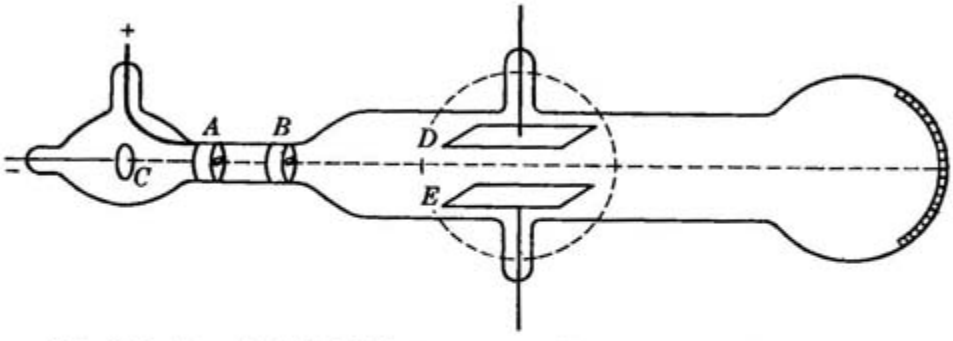


FIG. 9-7.—Aparato de J. J. Thomson para medir la razón e/m de los electrones.

ánodo A y el cátodo C. Los pocos iones positivos que están siempre presentes en un gas, producidos por radiactividad o radiación cósmica, son acelerados hacia el cátodo por el campo eléctrico que existe en el espacio comprendido entre el ánodo y el cátodo. Cuando estos iones rápidos golpean el cátodo, liberan electrones de su superficie y estos electrones son acelerados en sentido opuesto hacia el ánodo A. Los choques fortuitos entre ellos y los átomos de gas residual mantienen el suministro de iones positivos. Este mecanismo de liberación de electrones de una superficie se denomina *emisión secundaria*.

En la época en que estos experimentos fueron realizados se desconocía la naturaleza de la corriente de electrones, y las partículas que la componían (si es que se trataba de partículas) se denominaron *rayos catódicos*.

La mayor parte de los electrones emitidos en el cátodo son detenidos por el ánodo, pero un haz estrecho pasa a través de una rendija practicada en el ánodo y de una segunda rendija en el diafragma metálico B. El extremo del tubo se recubre por la parte interior con una sustancia fluorescente, y el punto de impacto del haz de electrones aparece como una señal luminosa brillante. Excepto por el mecanismo de la emisión electrónica, el tubo es en esencia el mismo que el utilizado actualmente en los oscilógrafos de rayos catódicos y receptores de televisión.

El tubo está provisto de dos láminas metálicas D y E entre las cuales se establece un campo eléctrico vertical, y por medio de un electroimán exterior puede establecerse un campo magnético perpendicular al plano

del esquema, dentro de la región acotada por la línea de trazos. Si el campo eléctrico está dirigido hacia arriba, y no hay campo magnético, la corriente de electrones se desviará hacia abajo, mientras pasa entre las láminas, y su desviación puede observarse sobre la pantalla fluorescente. Si sólo existe campo magnético, dirigido desde el plano del dibujo hacia afuera, la corriente de electrones se desviará hacia arriba. Ajustando adecuadamente los campos eléctrico y magnético, puede hacerse que la desviación sea nula. En estas condiciones, la fuerza eléctrica eE sobre un electrón en la región en que atraviesa el campo es igual y opuesta a la del campo magnético evB:

$$eE = evB, \quad \text{o bien} \quad v = E/B, \qquad [9\text{-}8]$$

de la cual puede deducirse la velocidad de los electrones.

Suprimamos ahora el campo eléctrico. La corriente de electrones se moverá en el campo magnético describiendo un arco de circunferencia, siendo el radio de ésta, como hemos visto, $R = mv/eB$. En consecuencia,

$$e/m = v/RB,$$

y combinando esta ecuación con la [9-8], obtenemos:

$$e/m = E/RB^2.$$

El radio R puede deducirse del desplazamiento de la señal fluorescente, de la extensión del campo magnético y de la distancia del campo a la pantalla, y, por tanto, puede calcularse e/m.

Se han introducido muchas modificaciones en el método original de Thomson para determinar e/m. El valor más preciso que puede darse hasta la fecha es

$$\frac{e}{m} = 1{,}7589 \times 10^{11} \text{ coul/Kg}. \qquad [9\text{-}9]$$

En cierto sentido, estos experimentos de Thomson constituyen el *descubrimiento* del electrón, aunque sólo midieron la razón de la carga del electrón a su masa, y la carga de un electrón individual no fué determinada hasta 12 años más tarde por Millikan. Si se hace la hipótesis de que la carga electrónica es numéricamente igual a la carga de un ion hidrógeno, puede calcularse la masa del electrón conociendo su carga y la razón de su carga a su masa. Sobre esta hipótesis dedujo Thomson que la masa de un electrón valía, aproximadamente, 1/1860 veces la masa de un átomo de hidrógeno, que era, hasta entonces, la partícula más ligera conocida. Estaba así abierto el camino para el estudio de las partículas subatómicas y la estructura de los *indivisibles* átomos, materia que ha dominado el campo de las investigaciones físicas durante los últimos cuarenta años.

Debe mencionarse que Thomson y uno de sus discípulos, H. A. Wilson, señalaron el camino para realizar las mediciones posteriores de Millikan

de la carga del electrón, al intentar medir esta magnitud determinando la carga *total* de una nube de gotitas de agua. La gran contribución de Millikan fué su éxito al efectuar mediciones sobre una gotita aislada.

Si introducimos en la Ec, [9-9] el valor de e basado en las determinaciones de Millikan, encontramos para la masa del electrón:

$$m = 9{,}1072 \times 10^{-31}\ \text{Kg} = 9{,}1072 \times 10^{-28}\ \text{g}.$$

Ahora bien, la masa de un átomo de hidrógeno es

$$\frac{1{,}00813}{6{,}0254 \times 10^{23}} = 1{,}6731 \times 10^{-24}\ \text{g}.$$

Por consiguiente, la masa del electrón es sólo 1/1836 de la masa de un átomo de hidrógeno.

9-7. Espectrógrafo de masas.—Como ejemplo del movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos y magnéticos, describiremos brevemente un tipo de *espectrógrafo de masas*. El espectrógrafo de masas es un instrumento análogo, en principio, al aparato de Thomson para determinar la razón de la carga a la masa de un electrón, pero utilizado para determinar la masa de iones cargados positivamente. El primer aparato fué ideado por Thomson, pero se han realizado muchas modificaciones y mejoras por otros investigadores, principalmente por Aston en Inglaterra, y Dempster y Bainbridge en Norteamérica.

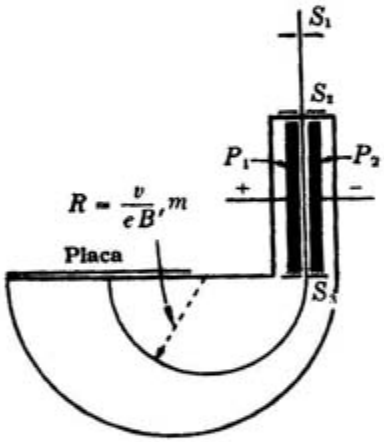


FIG. 9-8.—Espectrógrafo de masas de Bainbridge que utiliza un selector de velocidades.

Un espectrógrafo de masas ideado por Bainbridge está representado esquemáticamente en la figura 9-8. S_1 y S_2 son láminas metálicas, en cada una de las cuales hay una rendija estrecha cuya dimensión longitudinal es perpendicular al plano de la figura. La lámina S_1 se mantiene a un potencial de algunos miles de voltios sobre el de S_2. Los iones positivos producidos en el espacio situado por encima de S_1 pasan a través de la rendija de esta lámina y son acelerados hacia S_2 por el campo eléctrico. Consideraremos únicamente iones con una sola carga, esto es, que han perdido un electrón y, por consiguiente, tienen una carga positiva de valor e. Comoquiera que no todos los iones tienen la misma velocidad cuando entran en la rendija S_1, sus velocidades serán, por tanto, distintas cuando salen de S_2.

El paso siguiente del aparato es un *filtro de velocidades* que selecciona únicamente los iones que tienen una velocidad prefijada. Se mantiene entre las láminas P_1 y P_2 un campo eléctrico, dirigido de izquierda a derecha, y un campo magnético perpendicular al plano de la figura.

Debajo de las láminas P_1 y P_2 hay colocada una tercera rendija S_3, y sólo pueden pasar a través de la rendija S_2 aquellos iones que no son desviados por los campos eléctrico y magnético perpendiculares situados entre S_2 y S_3, esto es, aquellos que tienen una velocidad tal que la fuerza magnética ejercida sobre ellos queda exactamente compensada por la fuerza eléctrica, o sea,

$$Ee = evB$$

y

$$v = \frac{E}{B}$$

En la región situada debajo de S_3 hay un campo magnético B' perpendicular al plano de la figura, pero no hay campo eléctrico. En esta región un ion se mueve describiendo una trayectoria circular de radio

$$R = \frac{mv}{eB'} = \left(\frac{v}{eB'}\right) m.$$

Con el filtro de velocidades se consigue que todos los iones de esta región tengan la misma velocidad. En consecuencia, la razón v/eB' es la misma para todos los iones, y el radio R es directamente proporcional a la masa m del ion. Los iones de masas diferentes describen trayectorias semicirculares distintas, e inciden sobre una placa fotográfica después de haber efectuado una semirrevolución. La emulsión depositada sobre la placa queda impresionada cuando actúan sobre ella los iones, exactamente igual que si hubiera estado expuesta a la luz. Puesto que las dimensiones longitudinales de las rendijas son perpendiculares al plano de la figura, las trayectorias semicirculares son como cintas encorvadas, y cada trayectoria produce una línea sobre la placa en el punto en que es alcanzada por ella. La distancia de cualquier línea a la rendija S_3 es dos veces el radio de la trayectoria en la cual se mueve cada ion particular, y puesto que los radios son proporcionales a las masas, diferencias iguales de masa se traducen en separaciones iguales de las líneas sobre la placa fotográfica revelada. El aparato dispersa el haz de iones en un *espectro de masas*, como un prisma dispersa un haz de luz en un espectro; de ahí el nombre de *espectrógrafo de masas*.

El espectrógrafo de masas se utiliza principalmente para el estudio de los *isótopos*. Esta denominación se refiere a aquellos átomos que tienen el mismo número atómico, pero masa diferente. Puesto que el número atómico es igual al número de electrones del átomo, y las propiedades *químicas* de un átomo dependen sólo del número y disposición de sus electrones, los isótopos no pueden separarse por procedimientos químicos, aunque, naturalmente, sí quedan separados en el espectrógrafo de masas. Las diferencias de masa proceden del distinto número de neutrones del núcleo.

La mayor parte de los elementos son mezclas de isótopos; p. ej., el oxígeno se presenta siempre como una mezcla de tres isótopos. Al más

abundante (99,76 %) se le asigna arbitrariamente un peso atómico exacto de 16,0000. Los otros dos tienen, respecto al primero, pesos atómicos 17,0045 (proporción = 0,04 %) y 18,005 (proporción = 0,20 %). El peso atómico medio no es, por tanto, 16,0000 exactamente, sino ligeramente superior. (Sin embargo, los químicos asignan el valor exacto de 16,0000 a este valor medio, por lo cual las escalas de pesos atómicos de los físicos y de los químicos no coinciden.) Tomaremos como segundo ejemplo el cloro, cuyo peso atómico es 35,46 y es una mezcla de 75,4 % de un isótopo de peso atómico 34,980 y 24,6 % de un isótopo de peso atómico 36,978, todos respecto a la escala física.

El número entero más próximo al peso atómico de un isótopo se denomina su *número de masa* y se escribe como exponente. El número de los electrones extranucleares, o sea, el número de protones del núcleo, se escribe en la parte inferior y a la izquierda del símbolo químico. Así, el oxígeno es una mezcla de $_8O^{16}$, $_8O^{17}$ y $_8O^{18}$, mientras que el cloro es una mezcla de $_{17}Cl^{35}$ y $_{17}Cl^{37}$.

FIG. 9-9.—El espectro de masas del germanio señala la presencia de isótopos de números másicos 70, 72, 73, 74, 76. *(Cortesía del doctor K. T. Bainbridge.)*

Las masas del protón y del neutrón, en la escala física, son muy próximas a la unidad. Puesto que el átomo de oxígeno contiene ocho electrones, su núcleo ha de contener ocho protones. Por tanto, todos los isótopos del oxígeno tiene ocho protones en el núcleo, pero $_8O^{16}$ tiene ocho neutrones, $_8O^{17}$ nueve neutrones y $_8O^{18}$ diez neutrones.

La figura 9-9 es una reproducción de una placa que muestra los isótopos del germanio, tal como son separados por un espectrógrafo de masas. Las cifras son los números másicos de los isótopos.

9-8. Fuerza sobre un conductor que transporta una corriente.—Cuando un conductor que transporta una corriente se encuentra en un campo magnético, se ejercen fuerzas magnéticas sobre los electrones en movimiento dentro del conductor. Estas fuerzas se transmiten a la sustancia que forma el conductor y, por tanto, el conductor, en conjunto, experimenta una fuerza o un momento, o ambas cosas a la vez. Un motor eléctrico y el cuadro móvil de un galvanómetro están sometidos durante su funcionamiento al momento ejercido sobre un devanado que transporta la corriente y que se encuentra en un campo magnético.

La figura 9-10 representa una porción de un conductor rectilíneo de longitud l y sección A, dentro del cual circula una corriente de intensidad i. Un campo magnético, de densidad de flujo $\boldsymbol{B}$, es perpendicular al conductor. Puesto que la fuerza sobre el conductor en conjunto es la resultante de las fuerzas ejercidas sobre las cargas móviles situadas en su interior, expresaremos la intensidad de la corriente en el conductor

en función del número n de cargas móviles por unidad de volumen, de la carga q de cada una de ellas, y de su velocidad v. Hemos demostrado (Sec. 4-1) que esta relación es

$$i = nqvA.$$

La fuerza f sobre cada carga será

$$f = qvB.$$

El número de cargas en la longitud l es

$$N = nlA.$$

Por consiguiente, la fuerza resultante será

$$F = Nf = nlAqBv,$$

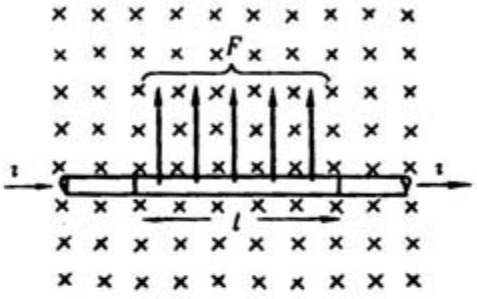


FIG. 9-10.—Fuerza sobre un conductor rectilíneo de longitud l perpendicular a un campo magnético, de densidad de flujo B, que se aleja del lector.

y puesto que $i = nqvA$, se puede escribir:

$$F = ilB. \qquad [9\text{-}9]$$

Si la dirección del conductor forma un ángulo φ con la dirección del campo, se deduce evidentemente de la Ec. [9-4] que se tiene, en general,

$$\boxed{F = iBl \operatorname{sen} \varphi} \qquad [9\text{-}10]$$

Si el conductor no es rectilíneo, el campo magnético no es uniforme o tienen lugar ambas cosas a la vez, la relación

$$\boxed{dF = iBdl \operatorname{sen} \varphi} \qquad [9\text{-}11]$$

da el valor de la fuerza sobre un elemento de conductor de longitud dl en un punto en que la inducción es B, y φ, el ángulo formado por dl y B. En general, tanto B como φ varían de un punto a otro a lo largo del conductor.

La dirección de la fuerza dF es perpendicular al plano determinado por dl y B, y su sentido puede deducirse mediante la regla de la mano izquierda, si el dedo medio apunta en el sentido de la corriente convencional en el conductor.

Utilizando la notación vectorial, la Ec. [9-11] se escribe:

$$d\vec{F} = i\vec{dl} \times \vec{B}$$

El vector $\vec{dl}$ tiene la dirección y sentido de la corriente, y $\vec{dF}$ coincide con el producto vectorial de $\vec{dl}$ y $\vec{B}$.

9-9. Fuerza y momento sobre un circuito completo.—La fuerza resultante y el momento sobre un circuito completo situado en un campo magnético pueden calcularse a partir de la Ec. [9-11] mediante una integración extendida a todos los elementos del circuito. Vamos a considerar tres casos sencillos.

1. *Cuadro rectangular.*—En la figura 9-11 se representa un cuadro rectangular de hilo conductor cuyas dimensiones son a y b. La normal

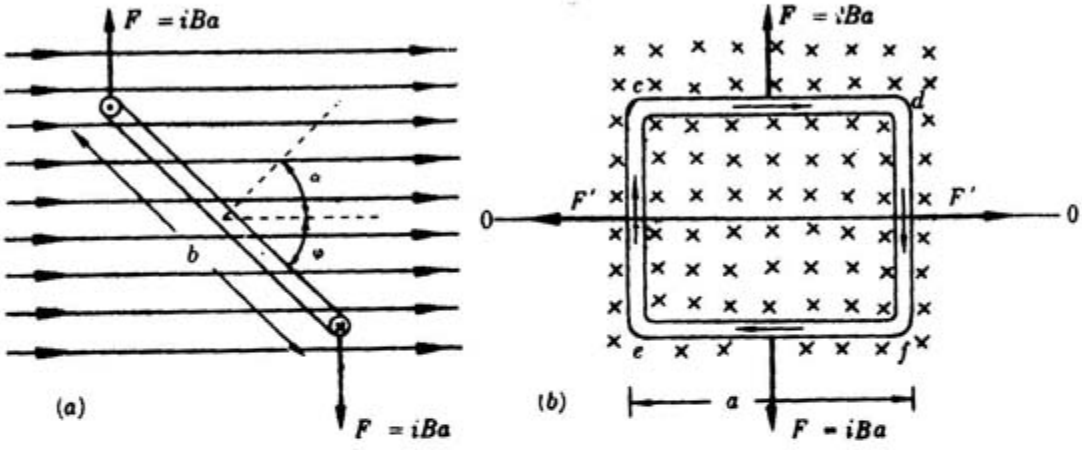


FIG. 9-11.—Cuadro rectangular de hilo que transporta una corriente, situado en un campo magnético uniforme.

al plano del cuadro forma un ángulo α con la dirección de un campo magnético uniforme. El cuadro puede girar alrededor de un eje OO, y transporta una corriente de intensidad i. (Ha de idearse un dispositivo para hacer entrar y salir la corriente en el cuadro, o bien para intercalar un generador. Esto se ha omitido en el esquema para simplificar.)

Los lados cd y ef del cuadro son perpendiculares al campo. Por tanto, se ejercen sobre ellos fuerzas iguales y de sentido opuesto, de valor

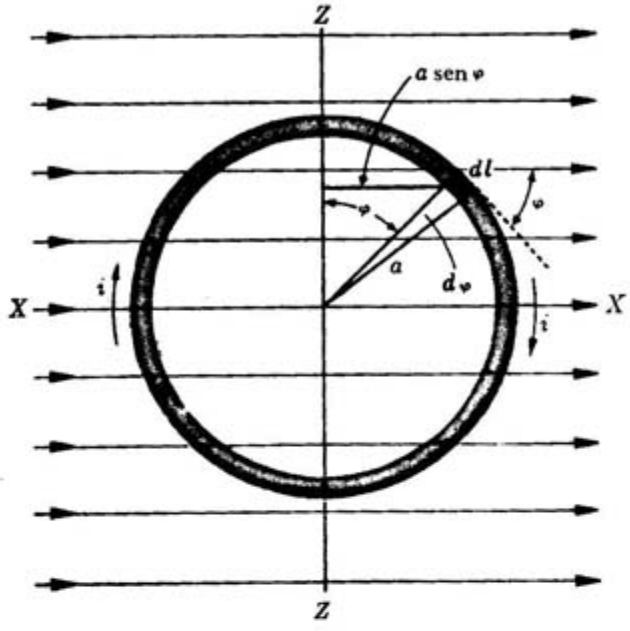
$$F = iaB,$$

dirigidas, verticalmente hacia arriba la que se ejerce sobre cd, y verticalmente hacia abajo la ejercida sobre ef.

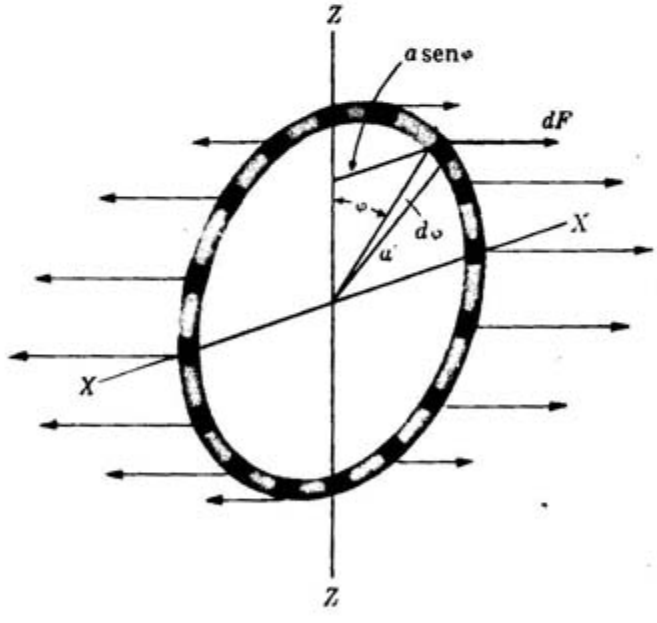
Los lados ce y df forman un ángulo φ con el campo. Sobre ellos actúan fuerzas iguales y de sentido opuesto, de valor

$$F' = ibB \operatorname{sen} \varphi,$$

dirigida hacia la derecha la que se ejerce sobre df, y hacia la izquierda la ejercida sobre ce. [Estas fuerzas están, en realidad, distribuídas a lo largo de cada lado del cuadro y son representadas como fuerzas únicas en la figura 9-11(b).] La *fuerza* resultante sobre el cuadro es evidente-



(a)



(b)

FIG. 9-12.—Fuerzas que actúan sobre una espira circular de hilo que transporta una corriente en un campo magnético uniforme.

mente nula, dado que las fuerzas ejercidas sobre los lados opuestos son iguales y de sentido opuesto. El *momento* resultante, por el contrario, no es nulo, ya que las fuerzas sobre los lados *cd* y *ef* constituyen un par, de momento

$$\tau = iaB \times b \text{ sen } \alpha. \qquad [9\text{-}12]$$

El momento es máximo cuando $\alpha = 90^o$, o sea, cuando el plano del cuadro es paralelo al campo, y es nulo para $\alpha = 0$, siendo el plano del cuadro perpendicular al campo. La posición de equilibrio estable es aquella en la cual el lado *cd* es el más elevado.

Dado que *ab* es el área *A* del cuadro, la Ec. [9-12] puede escribirse:

$$\tau = iAB \text{ sen } \alpha.$$

Si el cuadro es un devanado con espiras muy próximas, que tiene *N* vueltas, entonces, evidentemente,

$$\tau = NiAB \text{ sen } \alpha.$$

Una superficie plana de área *A* puede representarse por un vector $\vec{A}$ perpendicular a la superficie. Tomemos como sentido del vector aquel en el que avanzaría una tuerca sobre un tornillo roscado a derechas si se hiciese girar aquélla en el sentido de la corriente *i*. Podemos escribir entonces

$$\vec{\tau} = i\vec{A} \times \vec{B},$$

siendo $\vec{\tau}$ el vector momento del par ejercido sobre el cuadro.

2. *Espira circular.*—En la figura 9-12(*a*) se representa una espira circular de radio *a* por la cual circula una corriente *i*. El plano de la espira coincide con el *X-Z* y se encuentra en un campo magnético uniforme de densidad de flujo *B*, paralelo al eje *X*.

La fuerza dF sobre un elemento dl ($=ad\varphi$) de la espira está dirigida hacia el lector en la figura 9-12(*a*). Su valor es

$$dF = iBdl \text{ sen } \varphi = iBa \text{ sen } \varphi \, d\varphi.$$

Las flechas pequeñas de la figura 9-12(*b*) muestran que las fuerzas sobre otros elementos de longitud dl varían de un punto a otro de la espira. Para evitar confusión no se han representado en la figura las líneas de flujo magnético.

El momento de la fuerza dF respecto al eje *Z* es

$$d\tau = dF \times a \text{ sen } \varphi = iBa^2 \text{ sen}^2 \varphi \, d\varphi,$$

y el momento total,

$$\tau = \int d\tau = iBa^2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \varphi \, d\varphi = iB\pi a^2.$$

Pero πa^2 es simplemente el área de la espira, de modo que

$$\tau = iAB. \qquad [9\text{-}12]$$

Esta expresión coincide con la del par ejercido sobre un cuadro rectangular paralelo al campo magnético, y puede demostrarse que se cumple también para una espira plana de forma cualquiera.

Si la normal al plano de la espira forma un ángulo α con el campo, se tiene:

$$\tau = iAB \operatorname{sen} \alpha. \qquad [9\text{-}13]$$

3. *Solenoide.*—Un devanado helicoidal de hilo conductor se denomina *solenoide.* Si el solenoide está devanado con las vueltas muy próximas puede compararse con aproximación aceptable, a cierto número de espiras circulares que se encuentran en planos perpendiculares a su eje longitudinal. El momento total que actúa sobre un solenoide situado en un campo magnético es simplemente la suma de los momentos sobre cada una de las espiras. Por consiguiente, para un solenoide de N vueltas, en un campo magnético uniforme de densidad de flujo B:

$$\tau = NiAB \operatorname{sen} \alpha,$$

siendo α el ángulo formado por el eje del solenoide y el sentido del campo.

El par es máximo cuando la inducción es paralela a los planos de cada espira individual, o sea, perpendicular al eje longitudinal del solenoide. El efecto de este par, si el solenoide puede girar libremente, es llevarlo a una posición en la cual cada espira es perpendicular al campo, y el eje del solenoide, paralelo al mismo.

Aunque hasta aquí hemos hablado poco de los imanes permanentes, se recordará probablemente que el comportamiento del solenoide, que acabamos de considerar, es el mismo que el de una barra imantada o una aguja magnética, en el sentido de que tanto el solenoide como el imán, si pueden girar libremente, se colocarán por sí mismos con sus ejes paralelos al campo magnético. El comportamiento de una barra imantada se explica corrientemente atribuyendo el momento sobre ella a fuerzas magnéticas ejercidas sobre *polos* situados en sus extremos. Vemos, sin embargo, que tal interpretación no es necesaria en el caso del solenoide. ¿No puede suceder que los electrones que giran en una barra de hierro imantada sean equivalentes a la corriente en el devanado del solenoide, y que el par observado tenga la misma causa en ambos ejemplos? Más adelante volveremos sobre esta cuestión.

PROBLEMAS

9-1. La inducción magnética o densidad de flujo B en cierta región es 2 wb/m², y su sentido es el sentido positivo del eje X en la figura 9-13. *a*) ¿Cuál es el flujo magnético que atraviesa la superficie *abcd* en dicha figura? Exprésese la solución en webers y en maxwells. *b*) ¿Cuál es el flujo magnético que atraviesa la superficie *becf*? *c*) ¿Cuál es el flujo magnético que atraviesa la superficie *aefd*?

9-2. Cada uno de los círculos designados por letras, en los vértices del cubo de la figura 9-14, representa una carga positiva q, que se mueve con velocidad v en el sentido indicado. La región en que se encuentra la figura es un campo

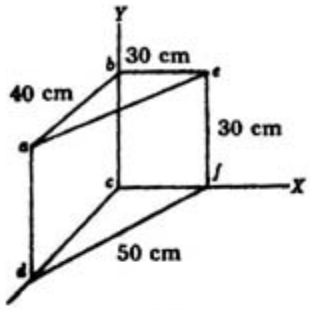


FIG. 9-13.

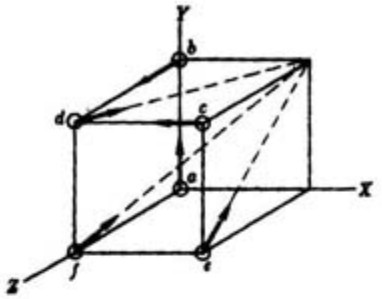


FIG. 9-14.

magnético uniforme, de densidad de flujo B, paralelo al eje X y dirigido hacia la derecha. Cópiese la figura, calcúlese el valor y sentido de la fuerza que se ejerce sobre cada carga y represéntense las fuerzas en la figura dibujada.

9-3. Un deuterón recorre una trayectoria circular de radio 40 cm, en un campo magnético de densidad de flujo 1,5 wb/m². *a*) Calcúlese la velocidad del deuterón. *b*) Hállese el tiempo necesario para que dé una semirrevolución. *c*) ¿Con qué diferencia de potencial tendría que ser acelerado el deuterón para adquirir esta velocidad?

9-4. Un electrón tiene en el punto A de la figura 9-15 una velocidad v_0 de 10^7

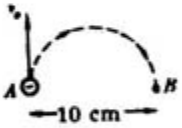


FIG. 9-15.

m/seg. Calcúlese: *a*) el valor y sentido de la inducción magnética que obligará al electrón a seguir la trayectoria semicircular de A a B; *b*) el tiempo necesario para que el electrón se mueva desde A hasta B.

9-5. *a*) ¿Cuál es la velocidad de un haz de electrones si la acción simultánea de un campo eléctrico de intensidad 34×10^4 V/m y de un campo magnético de densidad de flujo 2×10^{-3} wb/m², no produce desviación de los electrones, siendo ambos campos perpendiculares al haz y perpendiculares entre sí? *b*) Represéntese en un diagrama la orientación relativa de los vectores v, E y B. *c*) ¿Cuál es el radio de la órbita del electrón cuando se suprime el campo eléctrico?

9-6. Supongamos que la intensidad del campo eléctrico entre las láminas P_1 y P_2 (Fig. 9-8) es 150 V/cm, y la inducción magnética en ambos campos magnéticos es 0,5 wb/m². Si el manantial contiene los tres isótopos del magnesio, ${}_{12}Mg^{24}$, ${}_{12}Mg^{25}$ y ${}_{12}Mg^{26}$, y los iones no tienen más que una carga, hállese la distancia entre las líneas formadas por los tres isótopos sobre la placa fotográfica. Supóngase que los pesos atómicos de los isótopos son iguales a sus números másicos.

9-7. La figura 9-16 representa una espira circular de 20 cm de radio formada por un hilo que transporta una corriente de 20 A en el sentido de las agujas de un reloj. La espira se encuentra en un campo magnético uniforme de densidad de flujo 0,8 wb/m², perpendicular al plano del dibujo y alejándose del lector. *a*) Calcúlese y represéntese en un esquema el valor y sentido de la fuerza ejercida por el campo sobre los tres elementos som-

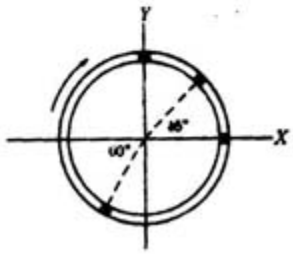


FIG. 9-16.

breados, cada uno de los cuales tiene una longitud de 1 cm. *b*) Resuélvase el mismo problema si la dirección del campo es paralela al eje X y dirigida hacia la derecha.

9-8. Un anillo conductor de 4 cm de radio se encuentra en un plano perpendicular a la dirección central de un campo magnético divergente de simetría radial, como el representado en la figura 9-17. La densidad de flujo en el espacio ocupado por el propio anillo es 0,1 wb/m² y la dirección del campo forma en todos los puntos del anillo un ángulo de 60° con

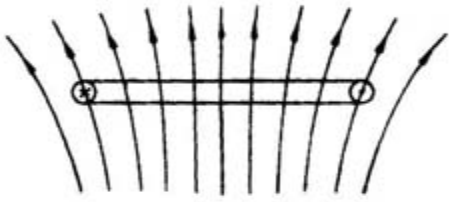


FIG. 9-17.

el plano del mismo. Hállense la magnitud y dirección de la fuerza que se ejerce sobre el anillo cuando la corriente en él es de 15,9 A.

9-9. Calcúlese la tensión en una espira circular de hilo flexible, de radio a, que transporta una corriente I y se encuentra en un campo magnético uniforme de densidad de flujo B perpendicular al plano de la espira.

9-10. El cuadro rectangular de la figura 9-18 puede girar alrededor del eje Y y transporta una corriente de 10 A en el sentido indicado. *a*) Si el cuadro se encuentra en un campo magnético uniforme de densidad de flujo 0,2 wb/m², paralelo al eje X, calcúlese la fuerza en dinas sobre cada lado del cuadro, y hállese en dinas-centímetro el par necesario para mantener el cuadro en la posición indicada. *b*)

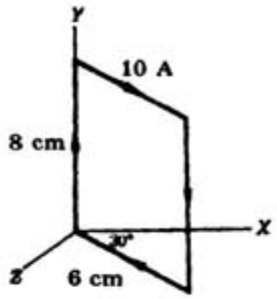


FIG. 9-18.

La misma cuestión que en *a*) excepto que el campo es paralelo al eje Z. *c*) ¿Qué par sería necesario si el cuadro pudiera girar alrededor de un eje que pasase por su centro, paralelo al eje Y?

9-11. El cuadro rectangular de hilo conductor de la figura 9-19 tiene una masa de 0,1 g por centímetro de longitud, y gira alrededor del lado ab como sobre un eje sin razonamiento. La corriente en el cuadro tiene el sentido indicado y una

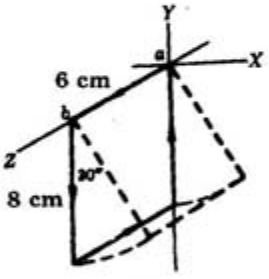


FIG. 9-19.

intensidad de 10 A. *a*) Calcúlense la magnitud y sentido del campo magnético, paralelo al eje Y, que producirá al cuadro una desviación hasta que su plano forme un ángulo de 30° con el plano Y-Z. *b*) Considérese el caso en que el campo es paralelo al eje X.

CAPÍTULO X

GALVANÓMETROS, AMPERÍMETROS Y VOLTÍMETROS
MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA

10-1. Galvanómetro.—Cualquier dispositivo utilizado para detectar o medir una corriente se denomina galvanómetro, y la mayor parte de estos instrumentos están basados en el par ejercido sobre una bobina colocada en un campo magnético. La forma primitiva de galvanómetro fué simplemente el aparato de Oersted, esto es, una aguja imantada colocada debajo del conductor por el cual circula la corriente que se desea medir. El conductor y la aguja están alineados con la dirección Norte-Sur cuando no pasa corriente por el conductor. La desviación de la aguja, cuando circula corriente en el conductor, constituye una medida de la intensidad de la misma. La sensibilidad de este galvanómetro se incrementó arrollando el hilo conductor sobre un cuadro colocado en un plano vertical, con la aguja imantada en su centro. Lord Kelvin perfeccionó los instrumentos de este tipo a partir de 1890, en grado tal, que su sensibilidad apenas es sobrepasada por ninguno de los aparatos de que podemos disponer actualmente.

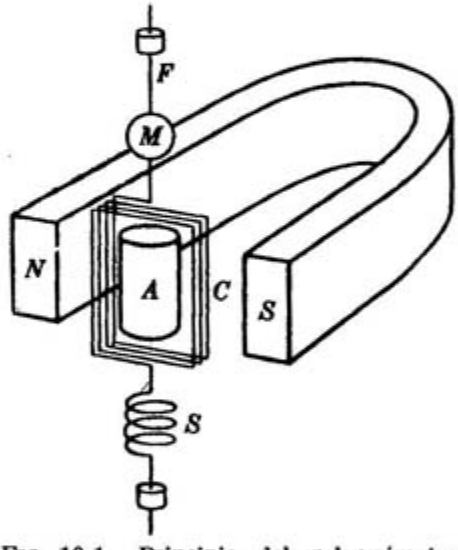


FIG. 10-1.—Principio del galvanómetro D'Arsonval.

Prácticamente todos los galvanómetros utilizados en la actualidad son del tipo D'Arsonval de cuadro móvil o de cuadro que puede girar alrededor de un eje, y en ellos se han cambiado los papeles del imán y del cuadro. El imán es mucho mayor y fijo, mientras que el elemento móvil es un cuadro ligero que puede oscilar en el campo del imán.[1] El esquema de un galvanómetro de cuadro móvil está representado en la figura 10-1. El campo magnético de un imán en herradura cuyos polos se designan por N y S se concentra en la proximidad del cuadro C mediante el cilindro de hierro dulce A. El cuadro se compone de unas 10 ó 20 vuel-

[1] El campo magnético que rodea un imán permanente se estudiará con más detalle en el Cap. XV. Para nuestro propósito actual, podemos dar por supuesto que en la región comprendida entre los polos del imán de la figura 10-1 existe un campo cuyo sentido general es de N a S.

tas de hilo de cobre aislado arrollado sobre un marco rectangular y suspendido mediante un fino hilo conductor o una delgada cinta, F, que proporciona un par recuperador cuando el cuadro se desvía de su posición de equilibrio, y sirve también para hacer llegar la corriente al cuadro. El otro borne del cuadro se conecta a una espiral floja, S, que sirve como segundo conductor, y ejerce un control despreciable sobre el cuadro.

Cuando se envía una corriente a través del cuadro, actúan fuerzas horizontales sobre sus lados verticales, produciendo un par alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. El cuadro gira en el sentido de este par y al cabo de cierto tiempo se detiene en una posición tal que el momento recuperador ejercido por la suspensión superior iguala al momento del par que hace desviar el cuadro a causa de las fuerzas laterales. Se observa el ángulo desviado con ayuda de un haz luminoso que se refleja sobre un pequeño espejo, M, sujeto a la suspensión superior, sirviendo el haz de luz como aguja indicadora sin peso. Puesto que la luz incidente sobre el espejo se refleja formando un ángulo de reflexión igual al de incidencia, una rotación θ del espejo desvía el haz de luz un ángulo 2θ. Es práctica general observar el haz reflejado sobre una escala situada a una distancia de un metro del galvanómetro.

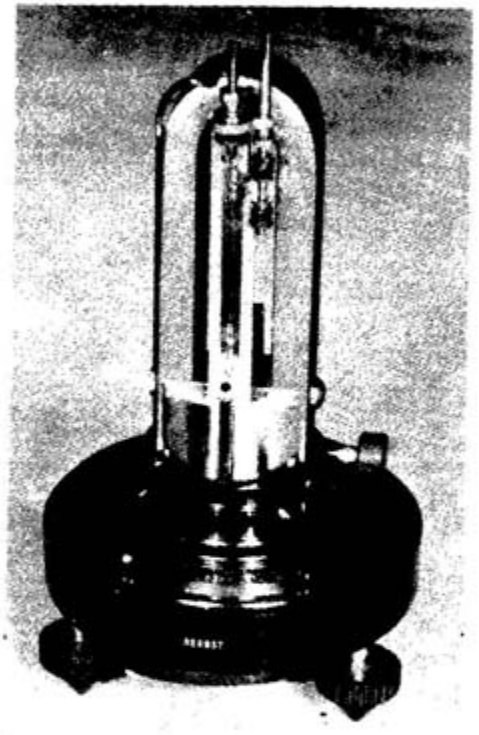


FIG. 10-2.—Galvanómetro D'Arsonval. *(Cortesía de Leeds and Northrup.)*

Se define la *sensibilidad* de un galvanómetro como la intensidad de corriente que debe circular por el cuadro del galvanómetro para producir un desplazamiento del haz reflejado de un milímetro, sobre una escala situada a un metro de distancia del aparato. Las sensibilidades típicas varían desde 0,01 μA (10^{-8} A) hasta 0,0001 μA (10^{-10} A) por cada división de 1 mm, a un metro de distancia. La figura 10-2 es la fotografía de un galvanómetro de gran sensibilidad.

Para una intensidad dada de la corriente que circula por el cuadro del galvanómetro, la desviación es directamente proporcional a la densidad de flujo, al número de vueltas del cuadro y a su superficie, e inversamente proporcional a la constante de torsión k ($\tau = -k\theta$) de la suspensión. Por otra parte, aumentando el número de vueltas y la superficie del cuadro, y disminuyendo la constante de torsión de la suspensión

aumenta el período de oscilación y, por consiguiente, el aparato tarda en alcanzar su posición de equilibrio. En la práctica ha de buscarse un término medio entre la sensibilidad y el período de oscilación.

A causa de la forma del campo en el cual oscila el cuadro móvil, las desviaciones de un galvanómetro D'Arsonval no son directamente proporcionales a la intensidad de la corriente que circula por el cuadro, excepto para ángulos relativamente pequeños. Por consiguiente, estos instrumentos se utilizan principalmente como instrumentos de *cero*, esto es, en dispositivos tales como el puente de Wheatstone o un potenciómetro, en los cuales se ajustan los otros elementos del circuito de modo que la corriente que pase por el galvanómetro sea nula.

10-2. Galvanómetro de cuadro móvil alrededor de un eje fijo.—Este galvanómetro, que, en esencia, tiene el mismo fundamento que el D'Ar-

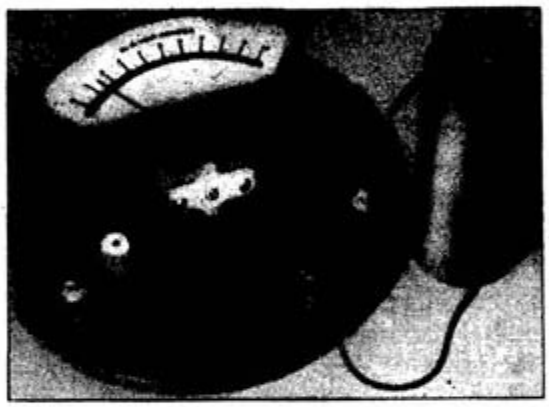


FIG. 10-3.—Galvanómetro de cuadro pivotado, modificado para utilizarlo como amperímetro o voltímetro. A la izquierda puede verse una resistencia en serie. *(Cortesía de Houghton Mifflin Company.)*

sonval, difiere de él en dos aspectos. Uno de ellos es que el cuadro, en lugar de estar suspendido por un hilo fino está pivotado sobre dos asientos de ágata. Por consiguiente, el instrumento puede utilizarse en cualquier posición y es mucho más robusto y cómodamente portátil. La segunda diferencia es que el campo magnético permanente se modifica utilizando piezas polares de hierro dulce unidas al imán permanente, como indica la figura 10-3, de modo que el cuadro se mueve en un campo que es en todas partes radial. Las fuerzas ejercidas sobre los conductores laterales del cuadro son siempre perpendiculares al plano del mismo, y la desviación angular del cuadro es directamente proporcional a la intensidad de la corriente que circula por él. El momento recuperador es producido por dos muelles, que sirven de conductores de la corriente. Como aguja indicadora se utiliza un largo tubo de aluminio, aplastado en su extremidad en un plano vertical.

El par producido por el rozamiento de los cojinetes de ágata, aunque

pequeño, es mayor que el de un hilo soporte. Por consiguiente, los momentos desviador y recuperador han de ser considerablemente mayores que el momento de rozamiento, y los instrumentos de cuadro pivotado no pueden ser tan sensibles como los del tipo D'Arsonval. La intensidad mínima de corriente que puede señalar el aparato es del orden de 0,1 μA.

Además del tipo doblemente pivotado, se utilizan otras muchas modificaciones; p. ej., el cuadro puede descansar sobre un solo pivote, ganando algo en sensibilidad, pero sacrificando la robustez.

10-3. Amperímetros y voltímetros.—El cuadro de un galvanómetro de cuadro pivotado se desvía a causa de la acción mutua entre el campo del imán permanente y la corriente del cuadro. Supondremos que la desviación es proporcional a esta corriente. Puesto que el cuadro y los conductores unidos a él son conductores metálicos que obedecen a la ley de Ohm, la corriente en el cuadro es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre los bornes del aparato. Por consiguiente, la desviación del instrumento es proporcional a la diferencia de potencial entre sus bornes lo mismo que a la corriente que pasa por él, y puede graduarse para medir la diferencia de potencial o la intensidad de la corriente.

Por ejemplo, supongamos que la resistencia del cuadro y conductores de un galvanómetro de cuadro pivotado es 20 Ω, y que el galvanómetro se desvía toda la escala para una intensidad de corriente en el cuadro de 10 mA, o sea, 0,010 A. La diferencia de potencial entre los bornes, con una corriente de 0,010 A, es

$$V = iR = 0{,}010 \times 20 = 0{,}20 \text{ V}.$$

La escala del instrumento podría calibrarse, por consiguiente, para indicar o bien desde cero a 0,010 A, o bien desde cero hasta 0,20 V. Según esto, si en un circuito determinado la aguja señalase la mitad de la escala, se podría deducir que la corriente que atraviesa el galvanómetro era 0,005 A, y también que la diferencia de potencial entre los bornes del mismo era 0,10 V.

Se explicó anteriormente (Sec. 4-8) que un amperímetro ha de conectarse en serie en un circuito, y, por consiguiente, tiene que ser un instrumento de pequeña resistencia, mientras que un voltímetro, que es conectado en paralelo entre los puntos cuya diferencia de potencial se desea medir, necesita tener una resistencia relativamente elevada. Las limitaciones físicas impuestas al tamaño del cuadro pivotado impiden el uso de un hilo muy grueso para obtener una baja resistencia, o bien un gran número de vueltas para obtener una resistencia elevada. Sin embargo, introduciendo una resistencia pequeña dispuesta en paralelo con el cuadro pivotado *(shunt)*, o una gran resistencia en serie con él, puede modificarse cualquier galvanómetro para servir de amperímetro o de voltímetro.

Como aclaración, consideremos el galvanómetro de cuadro pivotado descrito en el ejemplo precedente, cuya resistencia era 20 Ω y que se des-

viaba toda la escala cuando circulaba por él una corriente de 0,010 A.

Supongamos que se desea convertir este instrumento en un amperímetro que se desvíe toda la escala para una corriente de 10 A. El cuadro y su *shunt* están representados esquemáticamente en la figura 10-4. Se supone que la intensidad de la corriente es 10,0 A. Si el aparato ha de desviarse toda la escala para esta intensidad de corriente en la línea, la corriente que atraviesa el cuadro ha de ser de 0,010 A. En consecuencia, la corriente en el *shunt* será

$$10 - 0{,}010 = 9{,}99 \text{ A}.$$

Puesto que las intensidades de las corrientes son inversamente proporcionales a las resistencias,

$$0{,}01/9{,}99 = R_{sh}/20$$

y R_{sh}, resistencia requerida para el *shunt*, es 0,0200 Ω (con tres cifras exactas). La resistencia del amperímetro en conjunto es:

$$R = \frac{20 \times 0{,}02}{20{,}02} = 0{,}0200\,\Omega,$$

de modo que se tiene un instrumento de baja resistencia que requiere 10 A para desviarse toda la escala.

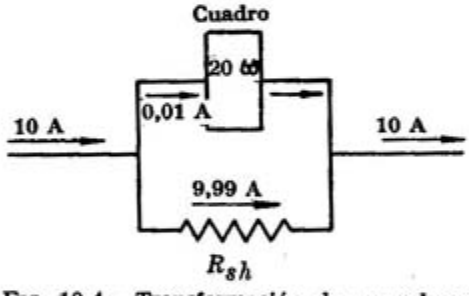


FIG. 10-4.—Transformación de un galvanómetro en un amperímetro utilizando un *shunt*.

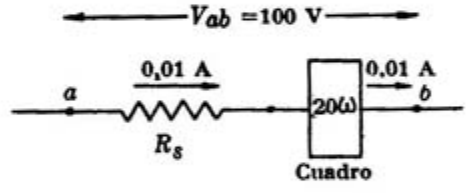


FIG. 10-5.—Transformación de un galvanómetro en un voltímetro con ayuda de una resistencia en serie.

Puesto que es difícil fijar con precisión la resistencia del *shunt*, suele construirse ésta ligeramente mayor y el ajuste final se realiza intercalando una resistencia en serie con la bobina móvil. El *shunt* está encerrado ordinariamente en la caja del aparato, aunque en algunos modelos se disponen *shunts* exteriores.

Supongamos ahora que se desea modificar el mismo galvanómetro para utilizarlo como voltímetro que se desvíe toda la escala para una diferencia de potencial de 100 V entre sus bornes. El cuadro y sus resistencias en serie están indicadas en la figura 10-5. Sea $V_{ab} = 100$ V. La intensidad de la corriente en el cuadro móvil ha de ser 0,010 A. Por consiguiente,

$$0{,}010 = 100/(R_s + 20),$$

y R_s, resistencia en serie requerida, es 9980 Ω.

La resistencia del voltímetro en conjunto es 10000 Ω y se tiene un instrumento de gran resistencia por el cual pasan solamente 0,010 A con una diferencia de potencial de 100 V entre sus bornes. Resulta, paradójicamente, que un amperímetro puede considerarse como un voltímetro de alcance reducido, que mide la diferencia de potencial entre los extremos de la pequeña resistencia del *shunt*, mientras que un voltímetro es un amperímetro sensible que mide la intensidad de la corriente en una gran resistencia.

10-4. Galvanómetro balístico.—Se utiliza un galvanómetro balístico para medir la *cantidad de electricidad* transportada por una corriente de corta duración, como, p. ej., la de carga o descarga de un condensador. Esto es, mide $\int i\,dt$ en lugar de i. Aunque cualquier galvanómetro de cuadro móvil puede utilizarse como balístico, los instrumentos proyectados especialmente para este fin tienen cuadros con momentos de inercia algo mayores, y suspensiones con pares recuperadores algo menores, que los correspondientes a los instrumentos proyectados para medir intensidades de corriente.

El impulso del momento ejercido sobre el cuadro de un galvanómetro durante el paso de una corriente transitoria produce un incremento igual del momento cinético del cuadro. Entonces éste comienza a oscilar hasta que su energía cinética inicial se haya convertido en energía potencial de la suspensión. Se mide el ángulo máximo de la oscilación, que puede demostrarse es proporcional a la cantidad de electricidad que ha pasado por el cuadro. Obsérvese que el proceso es completamente análogo al que tiene lugar en un péndulo balístico que recibe el impacto de un proyectil.

Para deducir la relación que existe entre la carga y el ángulo correspondiente a la desviación máxima, representemos por I el momento de inercia de la bobina del galvanómetro, por A su área, por N el número de espiras y por B la densidad de flujo del campo en el cual oscila. El par que actúa sobre la bobina, en el instante en que circula por ella una corriente i, es (Sec. 9-8)

$$\tau = NiBA.$$

El impulso del momento aplicadó a la bobina durante el tiempo que pasa la corriente vale

$$\int \tau\,dt = NBA \int i\,dt = NBAq,$$

y puesto que el impulso del momento es igual a la variación del momento cinético.

$$I\omega_0 = NBAq,$$

donde ω_0 es la velocidad angular inicial comunicada a la bobina.

La energía cinética inicial de la bobina será

$$\mathrm{EC} = \tfrac{1}{2}I\omega_0^2.$$

Si θ_m es el ángulo correspondiente a la desviación máxima, y k es el momento producido por la suspensión (momento recuperador $= -k\theta$), la energía potencial de la suspensión en esta posición de máxima desviación es

$$EP = \tfrac{1}{2}k\theta_m^2.$$

Igualando las energías cinética y potencial se obtiene:

$$q = \left(\frac{\sqrt{Ik}}{NBA}\right)\theta_m = C\theta_m, \qquad [10\text{-}1]$$

donde C representa el valor de la expresión encerrada entre paréntesis. La cantidad de carga desplazada a través del galvanómetro resulta así proporcional a la desviación máxima, como se quería demostrar. Aunque la Ec. [10-1] indica cómo influyen las constantes del galvanómetro en su sensibilidad y sirve, por consiguiente, como base para su diseño, la constante de proporcionalidad C se encuentra de ordinario experimentalmente observando la desviación debida al paso a través del aparato de una carga conocida. Por ejemplo, puede descargarse a través de él un condensador de capacidad dada cargado a una diferencia de potencial determinada.

Se ha despreciado en la deducción anterior el amortiguamiento del galvanómetro, que será tenido en cuenta en la sección 12-9.

10-5. Electrodinamómetro.—El galvanómetro D'Arsonval y sus modificaciones solamente son adecuados para la medida de la intensidad de corriente y diferencia de potencial en corriente continua. Si se envía una corriente alterna a través del cuadro de dicho instrumento, el sentido del momento desviador se invierte cuando cambia el sentido de la corriente, y puesto que el momento de inercia del elemento móvil es demasiado grande para seguir las variaciones de la corriente en el caso de las frecuencias comerciales de 60 ciclos por segundo o mayores, los aparatos no indican desviación.

Un modo de obtener una desviación permanente con corriente alterna es emplear un *electrodinamómetro*, en el cual el cuadro o bobina móvil se desvía, no por la acción del campo de un imán permanente, sino por el campo de una segunda bobina fija. Si la corriente en la segunda bobina cambia con la misma frecuencia que en la bobina móvil, el campo magnético se invierte, siempre que se invierta también el sentido de la corriente en la bobina móvil, y el momento desviador, aunque pulsante, es siempre del mismo sentido. El elemento móvil toma entonces una posición en la cual el momento recuperador iguala al momento *medio* desviador. Este mismo dispositivo se utiliza en el *vatímetro*. (Sec. 5-12.)

El par que se ejerce en cierto instante sobre la bobina móvil de un electrodinamómetro es proporcional al producto de la intensidad de la corriente que circula en ese instante en la bobina, por la densidad de flujo creada en ese mismo instante por la bobina fija. Esta última es proporcional a la corriente que circula por la bobina fija. Si las dos bobinas se conectan en serie la corriente es la misma en ambas. Por consiguiente, si i es la corriente instantánea,

$$\tau = k_1 iB, \quad B = k_2 i,$$

y

$$\tau = k_1 k_2 i^2$$

siendo k_1 y k_2 constantes de proporcionalidad, y τ, el momento del par instantáneo.

El par *medio* es proporcional a la *intensidad cuadrática media* lo que origina que la escala de un electrodinamómetro no sea uniforme, sino que esté más apretada hacia el cero.

Debido a los pequeños campos disponibles, los movimientos del electrodinamómetro no pueden ser tan sensibles como en los que emplean imanes permanentes.

10-6. Motor de corriente continua.—El motor de corriente continua está representado esquemáticamente en la figura 10-6. El inducido A, es un cilindro de acero dulce laminado para hacer mínimas las pérdidas por corrientes de Foucault (véase la sección 12-10) y montado sobre un árbol que puede girar alrededor de su eje. Alojados en ranuras longitudinales practicadas sobre la superficie del inducido hay cierto número de conductores de cobre, C. La corriente entra y sale en estos conductores mediante escobillas de grafito que hacen contacto con un cilindro segmentado dispuesto sobre el eje, llamado *colector* (no representado en la figura 10-6). El colector es un dispositivo automático de conmutación que mantiene las corrientes en los conductores en los sentidos indicados en la figura, cualquiera que sea la posición del inducido.

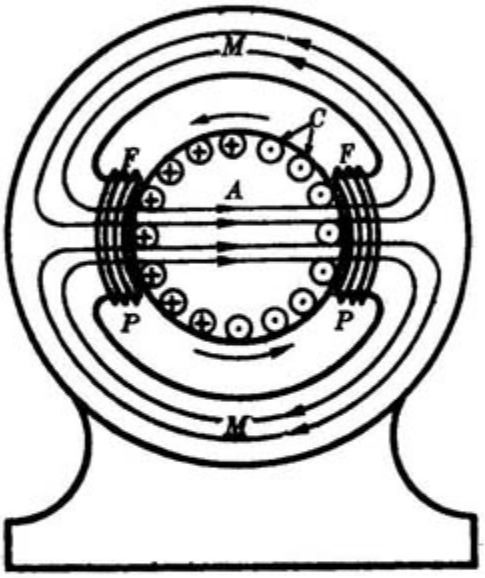


FIG. 10-6.—Esquema de un motor de corriente continua.

La corriente de las bobinas de excitación F, F crea un campo magnético que, a causa de la forma de las piezas polares P,P, es aproximadamente radial en el espacio comprendido entre ellas y el inducido. La carcasa, M, M del motor proporciona una trayectoria para el campo magnético, de pequeña reluctancia (Sec. 15-11). Algunas de las líneas de inducción se han indicado en la figura por líneas finas.

La aplicación de la regla de la mano izquierda demuestra que, con los sentidos relativos del campo y de la corriente en el inducido que se han dibujado, la fuerza lateral a que está sometido cada conductor es tal que origina un momento sobre el inducido de sentido contrario al de las agujas de un reloj. Cuando el motor gira, el inducido produce energía mecánica a expensas de la energía eléctrica. Por consiguiente, ha de engendrar una fuerza contraelectromotriz. Ésta es una fem *inducida*, y será estudiada posteriormente en el capítulo XII. Las bobinas de excitación, por el contrario, son fijas y se comportan como una resistencia pura.

Si el inducido y las bobinas de excitación (inductor) se conectan en serie, se tiene un motor *serie;* si se conectan en paralelo, un motor *shunt.* En algunos motores, las bobinas de excitación tienen dos devanados, uno en serie con el inducido y otro en paralelo con él; el motor se denomina entonces *compound.* Los tres circuitos eléctricos correspondientes están representados en la figura 10-7. Para un estudio más detenido consúltese una obra sobre máquinas de corriente continua.

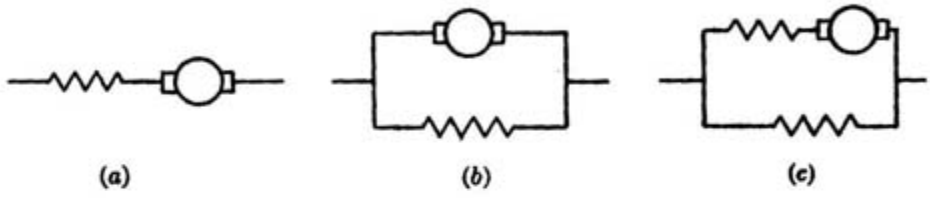


FIG. 10-7.—Tres sistemas de conectar el inducido y las bobinas de excitación (inductor) en un motor de corriente continua: (*a*) *Serie.* (*b*) *Shunt.* (*c*) *Compound.*

Los intercambios de energía en el motor *shunt* de corriente continua han sido ya estudiados en el ejemplo 2 de la sección 5-11 que conviene leer de nuevo.

PROBLEMAS

10-1. El cuadro de un galvanómetro de cuadro pivotado tiene 50 vueltas y abarca un área de 6 cm². La inducción magnética en la región en la cual se mueve el cuadro es de 100 gauss y radial. La constante de torsión del resorte es k = 0,1 dinas-cm/grado. Calcular la desviación angular del cuadro para una corriente de 1 mA.

10-2. La resistencia del cuadro de un galvanómetro es 25 Ω, y la corriente necesaria para desviar toda la escala, 20 mA. *a*) Demuéstrese en un esquema cómo puede convertirse el galvanómetro en un amperímetro que indique 5 A para la escala completa, y calcúlese el *shunt. b*) Demuéstrese en un esquema cómo puede convertirse el galvanómetro en un voltímetro que indique 150 V para una desviación correspondiente a la escala completa, y calcúlese la resistencia en serie que ha de utilizarse.

10-3. La figura 10-8 representa el devanado interior de un voltímetro de *tres escalas,* cuyos bornes de conexión están marcados con +, 3V, 15V y 150V. La resistencia del cuadro móvil, R_G, es 15 Ω, y el paso de una corriente de 1 mA en el cuadro produce una desviación correspondiente a toda la escala. Calcúlense las resistencias R_1, R_2, R_3, y la resistencia total del aparato para cada una de estas escalas.

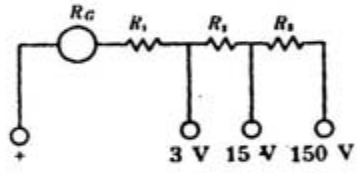


FIG. 10-8.

10-4. Cierto voltímetro para corriente continua tiene una resistencia de *mil ohmios por voltio.* ¿Qué corriente, en miliamperios, se requiere para que experimente una desviación de 1 V?

10-5. La resistencia del cuadro de un galvanómetro de cuadro pivotado es de 10 Ω, y una corriente de 0,02 A le hace desviarse toda la escala. Se desea convertir este galvanómetro en un amperímetro

que señale 10 A para la escala completa. El único *shunt* disponible tiene una resistencia de 0,03 Ω. ¿Qué resistencia R ha de conectarse en serie con el cuadro? (Véase Fig. 10-9.)

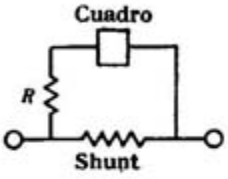


FIG. 10-9.

10-6. Un par termoeléctrico tiene una resistencia total de 1 Ω y está conectado directamente a los bornes de un galvanómetro de resistencia 15 Ω. La fem del par es 4 mV. La corriente producida es demasiado grande para el galvanómetro, de modo que se desea un *shunt* que reduzca la corriente en el galvanómetro a la mitad de su valor inicial. Calcúlese la resistencia del *shunt* requerido.

10-7. Un voltímetro de 150 V tiene una resistencia de 20 000 Ω. Cuando se conecta en serie con una gran resistencia R, a una línea de 110 V, el voltímetro señala 5 V. Calcúlese el valor de la resistencia R. (Este problema indica un método para medir grandes resistencias.)

10-8. Una resistencia de 600 Ω y otra de 400 Ω están conectadas en serie a una línea de 90 V. Un voltímetro montado entre los extremos de la resistencia de 600 Ω, señala 45 V. *a*) Calcúlese la resistencia del voltímetro. *b*) Hállese la indicación del mismo voltímetro cuando se conecta entre los extremos de la resistencia de 400 Ω.

10-9. Dos resistencias idénticas de 60 000 Ω cada una están conectadas en serie a una línea de corriente continua de 800 V. Entre los extremos de una de ellas se conecta un voltímetro cuya resistencia es 30 000 Ω. *a*) ¿Cuál es la indicación del voltímetro? *b*) ¿Cuál ha de ser la potencia que deben disipar las resistencias para que ninguna de ellas se queme cuando el voltímetro esté conectado?

10-10. En la figura 10-10, el punto *a* se mantiene a un potencial constante por encima del potencial de tierra. $R_1 = 20\,000\,\Omega$. $R_2 = R_3 = 10\,000\,\Omega$. Un voltímetro de 150 V cuya resistencia es 15 000 Ω indica 45 V cuando se conecta entre el punto *c* y tierra. *a*) ¿Cuál era el potencial del punto *c* por encima del de tierra antes de conectar el voltímetro? *b*) ¿Cuál es el potencial del punto *a* por encima del potencial de tierra?

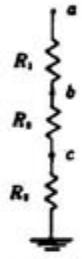


FIG. 10-10.

10-11. Las escalas de un voltímetro de *tres escalas* (véase problema 10-3) son 1,5 V, 3 V y 15 V. La resistencia del instrumento entre sus bornes de 15 V (es decir, entre el borne + y el borne marcado con 15 V) es 1500 Ω. *a*) ¿Cuál es la resistencia entre los bornes de 1,5 V y entre los bornes de 3 V? *b*) Cuando se conecta una pila entre los bornes de 1,5 V el instrumento señala 1,42 V y cuando la misma pila se conecta entre los bornes de 3 V el aparato señala 1,48 V. Calcúlese la fem y la resistencia interna de la pila.

10-12. Dos voltímetros de 150 V, uno de resistencia 15 000 Ω y otro de resistencia 150 000 Ω, se conectan en serie a una línea de corriente continua de 120 V. Calcúlese la indicación de cada voltímetro.

10-13. Los tres voltímetros A, B y C de la figura 10-11 tienen el mismo alcance pero resistencias distintas. $R_A = 1200\,\Omega$, $R_B = 1000\,\Omega$, $R_C = 800\,\Omega$. Cuando se

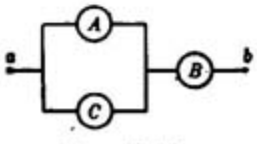


FIG. 10-11.

conectan en la forma indicada a una diferencia de potencial constante V_{ab}, el voltímetro A indica 4,8 V y el B 10 V. ¿Cuál será la indicación de cada voltímetro cuando se conecten en serie a la misma diferencia de potencial V_{ab}?

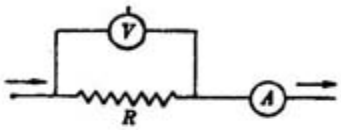


FIG. 10-12.

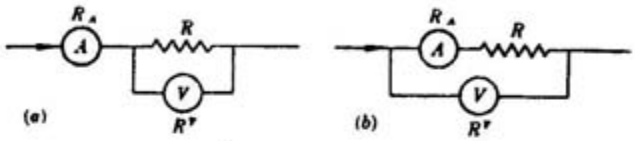


FIG. 10-13.

10-14. El voltímetro V de la figura 10-12, indica 117 V y el amperímetro A señala 0,130 A. La resistencia del voltímetro es 9000 Ω y la del amperímetro 0,015 Ω. Calcúlese: *a*) la resistencia R; *b*) la potencia absorbida por R.

10-15. Sean A y V las indicaciones del amperímetro y del voltímetro de la figura 10-13. Sus resistencias son R_A y R_V. *a*) Hállese en cada circuito el error cometido al calcular la verdadera resistencia R mediante la ecuación $R = V/A$, es decir, determínese la diferencia entre R y V/A. Si *no* han de hacerse correcciones a las lecturas de los aparatos y si R se determina de forma aproximada, ¿qué circuito sería preferible?

10-16. Un electrodinamómetro cuya resistencia (ambas bobinas en serie) es 50 Ω, tiene una escala de 100 divisiones igualmente espaciadas a cada lado del cero y se desvía 36 divisiones en el sentido de las agujas de un reloj cuando es atravesado por una corriente de 9 mA. ¿Qué resistencia adicional se requiere para transformar este instrumento en un voltímetro que se desvíe toda la escala cuando se aplique a sus bornes una diferencia de potencial de 120 V?

10-17. La resistencia del cuadro móvil del galvanómetro G en la figura 10-14 es 25 Ω y se desvía toda la escala cuando circula por él una corriente de intensidad

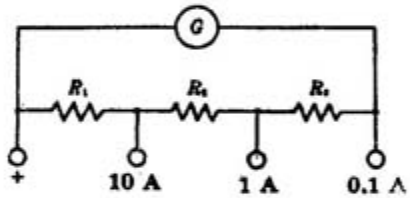


FIG. 10-14.

0,010 A. Calcúlense los valores de las resistencias R_1, R_2 y R_3, necesarias para convertir el galvanómetro en un amperímetro de varias escalas que experimente la desviación máxima con corrientes de intensidades 10 A, 1 A y 0,1 A.

CAPÍTULO XI

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE O UNA CARGA MÓVIL

11-1. Campo magnético de un elemento de corriente.—Una carga eléctrica en movimiento crea, en el espacio que la rodea, un campo magnético. Una segunda carga, móvil en un campo magnético, experimenta una fuerza. Los dos capítulos precedentes se dedicaron a considerar el segundo aspecto del problema, esto es, a estudiar las fuerzas que se ejercen sobre cargas móviles o conductores que transportan una corriente cuando se encuentran en un campo magnético. Se admitió la existencia del campo. En este capítulo volveremos a la primera parte del problema y relacionaremos el valor y dirección de un campo magnético con el movimiento de las partículas cargadas que lo producen. En la práctica, las cargas móviles que crean un campo magnético son, generalmente, las que constituyen la corriente en un conductor. Comenzaremos, por consiguiente, estudiando el campo magnético que rodea a un conductor por el cual circula una corriente.

Las primeras observaciones registradas sobre campos magnéticos creados por corrientes fueron las de Oersted, quien descubrió que una aguja imantada que puede girar alrededor de un eje, y está próxima a un hilo conductor por el cual circula una corriente, tiende a colocarse con su eje longitudinal perpendicular al conductor. Experiencias posteriores realizadas por Biot y Savart, y por Ampère, condujeron a una relación que permite calcular la densidad de flujo en cualquier punto del espacio que rodea a un circuito por el cual pasa una corriente.

El circuito puede imaginarse dividido en pequeños elementos de longitud dl, uno de los cuales se ha representado en la figura 11-1. Las cargas móviles de cada elemento crean un campo en todos los puntos del espacio, y el campo del circuito completo, en cualquier punto, es el resultante de los campos infinitesimales creados en el mismo punto por todos los elementos del circuito. El sentido del campo infinitesimal dB creado en el punto P por el elemento dl está representado en la figura 11-1. El vector dB se encuentra *en* un plano perpendicular a dl, y es *perpendicular* al plano determinado por dl y la recta que une P y dl. Se deduce de esto que las líneas de inducción, a las cuales son tangentes los vectores, son circunferencias que se encuentran en planos perpendiculares al eje del elemento. El sentido de estas líneas es el de las agujas de un reloj cuando se miran en el sentido convencional de la corriente en el elemento dl. El sentido puede también definirse como aquel según el cual tendría que hacerse girar un tornillo de rosca a derechas, para

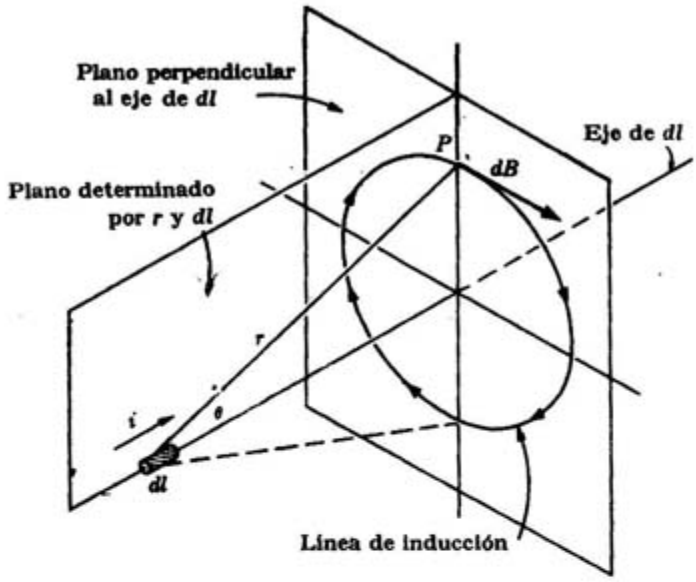


FIG. 11-1.—Campo magnético debido a un elemento de corriente.

que avanzase en el sentido de la corriente. Esta relación entre las líneas de inducción y la corriente se denomina *regla del tornillo*.

Otra regla útil es imaginar el elemento sujeto con la mano derecha y con el pulgar extendido en el sentido de la corriente. Los otros dedos rodean entonces el elemento en el sentido de las líneas de flujo.

El valor de dB está dado por la siguiente ecuación:

$$dB = k' \frac{idl \operatorname{sen} \theta}{r^2}, \qquad [11\text{-}1]$$

siendo r la distancia entre dl y el punto P, y θ el ángulo formado por r y dl. Esta ecuación se denomina frecuentemente *fórmula de Ampère*, o *ley de Ampère*, pero debe ser atribuída a Biot, quien la propuso por vez primera en 1820.

El factor k' que figura en la Ec. [11-1] es una constante de proporcionalidad cuyo valor, como en el caso de la constante k de proporcionalidad de la ley de Coulomb, depende de las unidades elegidas. Si se definen independientemente las unidades de densidad de flujo, intensidad de corriente y longitud, la constante k' ha de determinarse experimentalmente. Por otra parte, cabe asignar cualquier valor arbitrario a k' y a las unidades de dos cualesquiera de las magnitudes que figuran en la Ec. [11-1], y esta ecuación puede utilizarse para definir la unidad de la tercera magnitud. El último procedimiento es el realmente adoptado. En el sistema mks, k' se hace igual exactamente a 10^{-7} webers por amperio-metro, y la Ec. [11-1] (o con más exactitud, una ecuación deducida de ella) se utiliza para definir la unidad de intensidad de corriente, el amperio. En

el sistema electromagnético, k' se hace igual a la unidad, y la Ec. [11-1] define entonces la unidad de intensidad de corriente en este sistema; es decir, la unidad cegesimal electromagnética de intensidad de corriente.

Con objeto de eliminar el factor 4π de otras ecuaciones deducidas de la ley de Biot, y que se utilizan con más frecuencia que esta ley, es conveniente definir una nueva constante de proporcionalidad μ_0 mediante la ecuación

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = k', \quad \mu_0 = 4\pi k'.$$

Esta forma de proceder es análoga a la de reemplazar la constante de proporcionalidad k de la ley de Coulomb por el factor $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Con cuatro cifras exactas, se tiene:

$$\mu_0 = 4\pi k' = 12{,}57 \times 10^{-7} \text{ wb/A-m},$$

$$k' = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ wb/A-m}.$$

La ley de Biot se convierte entonces en

$$\boxed{dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idl \operatorname{sen} \theta}{r^2}} \qquad [11\text{-}2]$$

Se deduce de esta ecuación que la densidad de flujo dB debida a un elemento de corriente es nula en todos los puntos del eje de este elemento, puesto que sen $\theta = 0$ en dichos puntos. Para un punto situado a una distancia dada, r, del elemento, la densidad de flujo es máxima en un plano que pasa por dicho elemento y lo corta perpendicularmente ya que $\theta = 90°$ y sen $\theta = 1$ en todos los puntos de ese plano.

La expresión de la densidad de flujo resultante en cualquier punto del espacio, debida a un circuito completo, es

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{idl \operatorname{sen} \theta}{r^2} \text{ (suma geométrica).} \qquad [11\text{-}3]$$

extendiéndose la integración a todo el circuito (o circuitos) que crean el campo, y teniendo en cuenta que la integral se refiere a la *suma geométrica* de los vectores densidad de flujo infinitesimales. Salvo en casos relativamente sencillos, en que todos los vectores infinitesimales correspondientes al punto dado tienen la misma dirección, es necesario descomponerlos según tres ejes e integrar separadamente sus componentes, como hicimos al calcular campos eléctricos y gravitatorios.

En su forma diferencial la ley de Biot no puede, como es lógico, comprobarse directamente, puesto que no es posible obtener un elemento aislado de un circuito que transporte corriente.

Sin embargo, cabe comparar experimentalmente la expresión integrada que da el campo creado por un circuito completo, y en todos los casos los resultados de la fórmula coinciden con los de la experiencia.

La Ec. [11-3] puede considerarse como otra definición de la inducción del campo magnético en un punto, análoga a la definición de intensidad del campo eléctrico mediante la relación

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \text{ (suma geométrica).}$$

Si hay materia en el espacio que rodea el circuito, la densidad de flujo en un punto no es debida enteramente a las corrientes que circulan por los conductores, sino en parte a la imantación de esta materia. Las propiedades magnéticas de la materia se discutirán con más detalle en los capítulos XIV y XV. Sin embargo, a menos que estén presentes hierro o alguna otra sustancia ferromagnética, este efecto es tan pequeño que aunque en rigor la Ec. [11-2] sólo se cumple para conductores que se encuentran en el vacío, puede utilizarse en la práctica, sin ninguna corrección, para conductores situados en el aire o en la proximidad de cualquier sustancia no ferromagnética.

Utilizando la notación vectorial, la Ec. [11-2] se convierte en

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3} \qquad [11\text{-}4]$$

La intensidad i es un escalar, $\vec{r}$ es el vector dirigido desde el elemento de corriente $\vec{dl}$ al punto en el cual ha de calcularse $\vec{dB}$ y r es el módulo de este vector. Las direcciones y sentidos relativos de $\vec{dB}$, $\vec{dl}$ y $\vec{r}$, tal como quedan determinados utilizando, p. ej., la regla del tornillo roscado a derechas, se deducen inmediatamente del hecho de que el vector $\vec{dB}$ tiene la misma dirección y sentido que el producto vectorial de $\vec{dl}$ y $\vec{r}$.

11-2. Campo magnético de un conductor rectilíneo.—Utilicemos la ley de Biot para calcular la densidad de flujo magnético en un punto P exterior a un conductor rectilíneo por el cual circula una corriente. Hagamos coincidir en la figura 11-2 el eje X con el conductor y tomemos el eje Z de modo que pase por el punto. La dirección del campo dB creado en el punto P por un elemento de longitud dx se encuentra en el plano YZ y es perpendicular al plano XZ, puesto que tanto r como dx se encuentran en este plano. El campo resultante en P es, por consiguiente, la suma *aritmética* de todos los elementos dB de campo y la integración puede realizarse directamente. El cálculo se simplifica si se elige como variable independiente θ en lugar de x. Examinando la figura vemos que se verifica: $r = a \operatorname{cosec} \theta$, $x = a \cot \theta$ y $dx = a\, d(\cot \theta) = -a \operatorname{cosec}^2 \theta\, d\theta$.

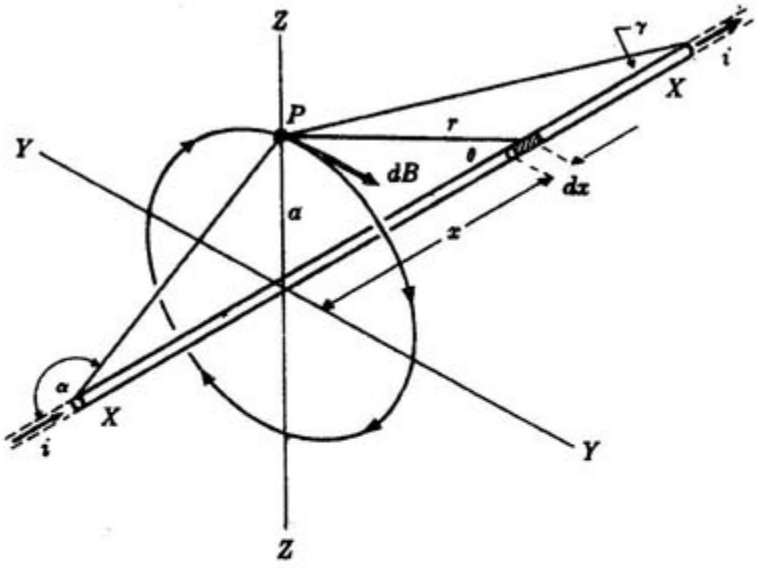


FIG. 11-2.—Campo creado por un conductor rectilíneo.

Por tanto,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i\, dx \operatorname{sen} \theta}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{a} \int_\alpha^\gamma \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{a} (\cos \gamma - \cos \alpha). \qquad [11\text{-}5]$$

Si el hilo es muy largo comparado con la distancia a, y el punto P no está demasiado próximo a su extremo, se tiene $\gamma = 0$, $\alpha = \pi$. y

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{a} \qquad [11\text{-}6]$$

Esta relación fué deducida por Biot y Savart partiendo de observaciones experimentales antes de descubrirse la forma diferencial de la Ec. [11-2]. Se denomina ley de Biot y Savart.

A semejanza de la intensidad del campo eléctrico que rodea a un hilo o cilindro cargados, el vector inducción magnética que rodea a un hilo conductor por el cual circula una corriente es inversamente proporcional a la *primera* potencia de la distancia radial contada desde el hilo. A diferencia del campo eléctrico que rodea a un hilo cargado, que es radial, las líneas de inducción magnética son *circunferencias* concéntricas con el hilo y situadas en planos perpendiculares a él. Se observará que cada línea de inducción es una línea cerrada, y, en este aspecto, las líneas de inducción difieren también de las líneas de fuerza de un campo eléctrico que terminan sobre cargas positivas o negativas. Esta propiedad de las líneas de inducción es cierta cualquiera que sea la forma del circuito que crea el campo; cada línea de inducción se cierra sobre sí misma.

11-3. Integrales curvilíneas y de superficie de la inducción magnética. Puesto que las líneas de inducción son siempre curvas cerradas, se deduce que si se construye una *superficie* cerrada en un campo magnético, toda línea de inducción que penetre en la superficie tiene que salir de ella, dado que ninguna línea puede terminar ni engendrarse dentro del espacio limitado por la superficie. Por consiguiente, *la integral de superficie de la componente normal de B extendida a una superficie cerrada es siempre nula*, a diferencia de lo que ocurre con la integral de superficie de la componente normal de la intensidad E del campo eléctrico, que es igual a q/ε_0, siendo q la carga encerrada dentro de la superficie:

$$\boxed{\int B \cos \varphi \, dA = 0} \qquad [11\text{-}7]$$

Puede obtenerse otra generalización útil, análoga a la anterior, considerando la *integral curvilínea* de la inducción a lo largo de una curva cerrada. Se recordará que dicha integral se obtiene formando en cada punto de la curva el producto de un elemento de longitud de la misma por la componente de la inducción en la dirección de este elemento, e integrando estos productos (Sec. 11-3). La integral curvilínea a lo largo de una curva cerrada se escribe:

$$\oint B \cos \theta \, dl, \qquad [11\text{-}8]$$

siendo θ el ángulo formado por un elemento cualquiera dl y la dirección de la inducción B en el elemento. Como ha de hacerse un convenio de

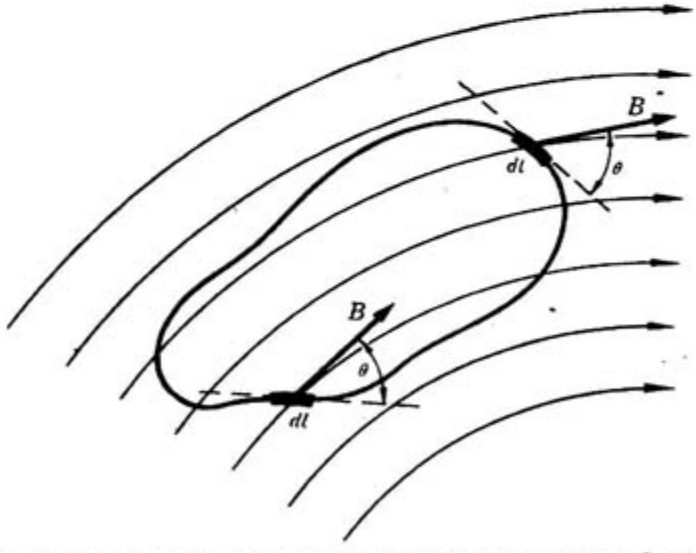


FIG. 11-3.—La integral curvilínea de B a lo largo de la curva cerrada es la suma de los productos $B \cos \theta \, dl$ tomados en cada punto de la curva.

signos al recorrer la curva, tomaremos como positivo el sentido de las agujas del reloj.

Vamos a calcular la expresión general de la integral curvilínea estudiando el caso especial del campo creado alrededor de un largo conductor rectilíneo. Consideremos en primer lugar la curva cerrada representada por la circunferencia de trazo lleno de la figura 11-4(*a*), de radio r y concéntrica con el conductor. La corriente i tiene el sentido que se aleja del lector. Las líneas de inducción están representadas por circunferencias de trazos. La inducción en cada punto es tangente a la circunferencia, puesto que en la Ec. [11-8] $\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$. El valor de B en cada punto de la circunferencia es

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r},$$

y la integral se transforma en

$$\oint B\cos\theta\, dl = \oint \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\, dl = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\, 2\pi r = \mu_0 i.$$

Consideremos a continuación el contorno *abcd* de la figura 11-4(*b*), formado por los lados *ab* y *cd* dirigidos según los radios y los lados *bc* y *da* que son arcos que subtienden un ángulo α y tienen por radios r_2 y r_1. A lo largo de *ab* y *cd* el ángulo θ es $\pi/2$ y $\cos\theta = 0$, por lo que estos lados no contribuyen al valor de la integral. Un elemento de longitud situado a lo largo de *ad* o *bc* puede escribirse:

$$dl = r_1\, d\alpha;\ dl = r_2\, d\alpha.$$

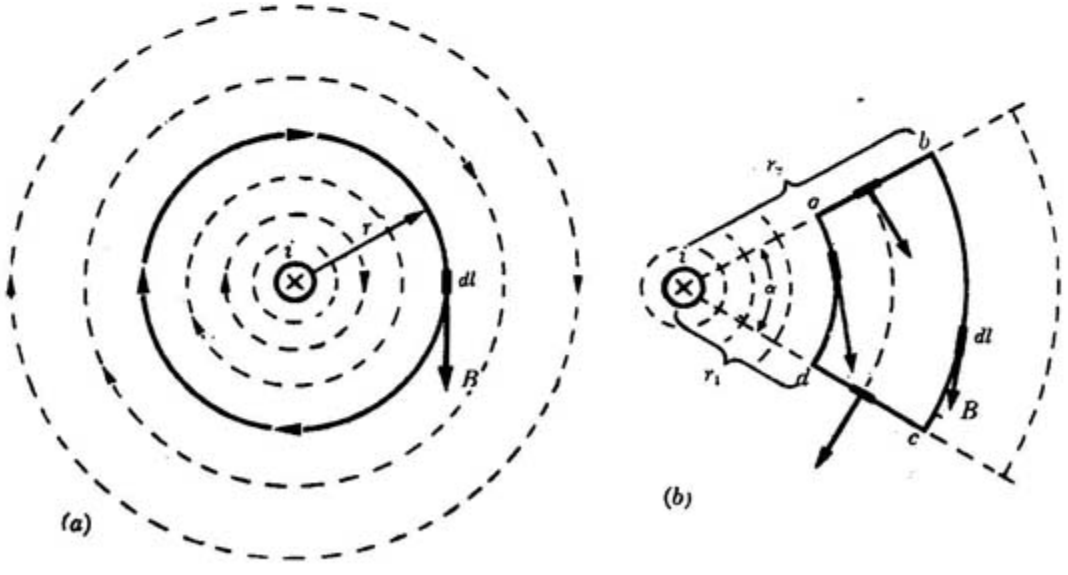


FIG. 11-4.—Integral curvilínea de la inducción magnética a lo largo de una curva cerrada. (*a*) Cuando encierra una corriente. (*b*) Cuando no encierra corriente.

La contribución del lado *bc* a la integral es

$$\int \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r_2} r_2 \, d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} i\alpha,$$

ya que $\theta = 0$ a lo largo de este lado.

La contribución del lado *da* es

$$-\int \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r_1} r_1 \, d\alpha = -\frac{\mu_0}{2\pi} i\alpha,$$

puesto que $\theta = \pi$ a lo largo de este lado (*dl* y *B* tienen sentidos opuestos). En consecuencia, la integral curvilínea alrededor del contorno *abcd* es nula.

Estos dos casos especiales pueden generalizarse para un contorno cerrado de forma cualquiera, del siguiente modo: *La integral curvilínea de la inducción magnética alrededor de cualquier curva cerrada es igual al producto de μ_0 por la corriente que circula a través de la superficie limitada por la curva.* Si no existe corriente a través de la superficie limitada por la curva, la integral es nula. De acuerdo con el convenio de que el sentido de giro sobre el contorno cuando se mira una de las caras es el de las agujas del reloj, la corriente se considera positiva si su sentido es el de alejamiento del observador, como sucede en la figura 11-4:

$$\boxed{\oint B \cos\theta \, dl = \mu_0 i} \qquad [11\text{-}9]$$

En la sección 15-12 se dará otra generalización más de la Ec. [11-8] cuando existen sustancias imantadas.

Utilizando notación vectorial, estas integrales curvilínea y de superficie se escriben como sigue:

La Ec. [11-7] se convierte en

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \qquad [11\text{-}10]$$

siendo $d\vec{A}$ un vector dirigido hacia afuera del elemento de superficie dA.

La Ec. [11-9] toma la forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i. \qquad [11\text{-}11]$$

11-4. Fuerza entre conductores paralelos. Amperio.—La figura 11-5 (*a*) representa una porción de dos conductores largos, rectilíneos y paralelos, separados por una distancia *a*, y que transportan corrientes cuyas intensidades respectivas son *i* e *i'*, ambas del mismo sentido. Puesto que cada conductor se encuentra en el campo magnético creado por el otro,

experimentará una fuerza. La figura 11-5(*b*) muestra algunas de las líneas de inducción creadas por la corriente del conductor inferior. El valor del vector B en el conductor superior es

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i}{a}$$

En virtud de la Ec. [9-10], la fuerza sobre un trozo del conductor superior, de longitud l, será

$$F = i'lB = \frac{\mu_0}{4\pi}\, l\,\frac{2ii'}{a},$$

y la fuerza sobre la unidad de longitud es, por consiguiente,

$$\frac{F}{l} = i'\,B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2ii'}{a}$$

La regla de la mano izquierda demuestra que el sentido de la fuerza sobre el conductor superior es hacia abajo. Hay una fuerza por unidad de longitud, igual y opuesta, sobre el conductor inferior, como puede verse considerando el campo que rodea al conductor superior, o teniendo en cuenta la tercera ley de Newton. En consecuencia, ambos conductores se atraen mutuamente.

Si se invierte el sentido de la corriente en cualquiera de los conductores, las fuerzas cambian también de sentido. Dos conductores paralelos que transportan corrientes de sentido contrario se repelen.

El hecho de que dos conductores rectilíneos paralelos ejerzan fuerzas de atracción o repulsión mutuas se ha tomado como base para definir el amperio en el sistema mks. El amperio se define como sigue:

Un amperio es la corriente invariable que, circulando por dos conductores paralelos de longitud infinita y separados por una distancia de un metro, en el vacío, produce sobre cada conductor una fuerza de 2×10^{-7} *new por metro de longitud.*

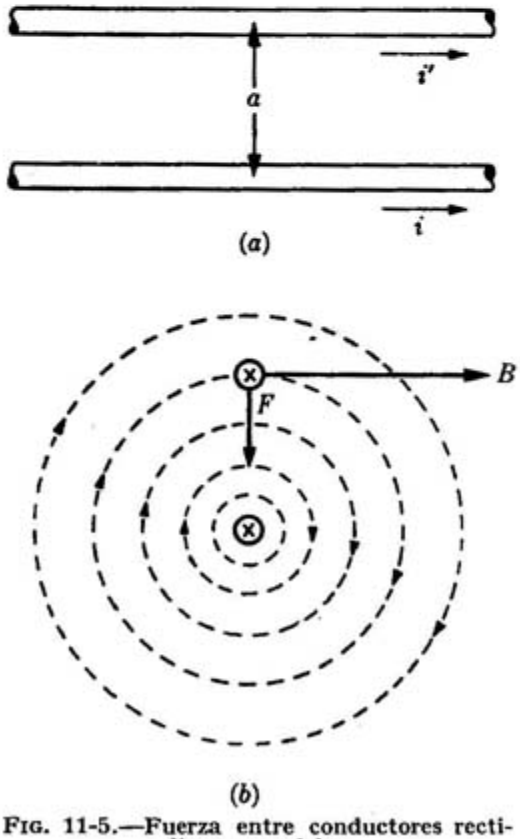


FIG. 11-5.—Fuerza entre conductores rectilíneos paralelos.

Se deduce de esta definición, y de la ecuación precedente, que el valor numérico de μ_0 en el sistema mks (racionalizado) es exactamente $4\pi \times 10^{-7}$, o sea,

$$\mu_0 = 12{,}57 \times 10^{-7} \text{ wb/A-m},$$

con cuatro cifras exactas.

El culombio se define ahora, a partir del amperio, como la cantidad de electricidad que atraviesa en un segundo una sección de un circuito por el cual circula una corriente constante de un amperio. Se deduce de esto que la unidad de carga en el sistema mks queda definida a partir de la fuerza entre cargas *móviles*, en contraste con el sistema electrostático, en el cual la unidad electrostática de carga se define en función de la fuerza electrostática que se ejerce entre cargas fijas. En virtud de la definición anterior, el amperio puede establecerse, en principio, con ayuda de una regla de un metro y una balanza de resorte. Para la determinación práctica del amperio como patrón se utilizan bobinas de hilo conductor en lugar de conductores rectos, y su separación es sólo de algunos centímetros. El instrumento completo es capaz de medir intensidades de corriente con un alto grado de precisión, y se denomina *electrodinamómetro*.

El amperio definido anteriormente, en función de la fuerza entre conductores, se denomina *amperio absoluto*. El *amperio internacional* se definió en la sección 4-10 a partir de la cantidad de plata depositada por unidad de tiempo en un vaso electrolítico determinado. Cuando se definió el amperio internacional se creyó que era igual al amperio absoluto, pero medidas más precisas realizadas posteriormente han demostrado una ligera diferencia. El mejor valor obtenido hasta la fecha es:

$$1 \text{ amperio internacional} = 0{,}99986 \text{ amperios absolutos}.$$

Un *voltio internacional* se define como la diferencia de potencial entre los extremos de un ohmio internacional (Sec. 4-6) cuando la corriente que circula por él es un amperio internacional. La diferencia de potencial entre dos puntos es un *voltio absoluto* si es preciso efectuar el trabajo de un julio para trasladar un culombio absoluto de un punto al otro, siendo el culombio absoluto un amperio absoluto-segundo. El voltio absoluto difiere muy ligeramente del voltio internacional, siendo su mejor valor

$$1 \text{ voltio internacional} = 1{,}00034 \text{ voltios absolutos}.$$

11-5. Campo creado por una espira circular.—La figura 11-6 representa una espira circular de hilo conductor. Sea a el radio de la espira e i la corriente que circula por ella. Es necesario, naturalmente, un origen de fem para mantener la corriente, y cabe así imaginar que se ha hecho un corte en la espira para la inserción de un pequeño origen de fem, o bien considerar que la corriente entra y sale de la espira lateralmente mediante dos largos conductores. Las corrientes en estos conductores son de sentidos opuestos y sus efectos magnéticos se anulan mutuamente.

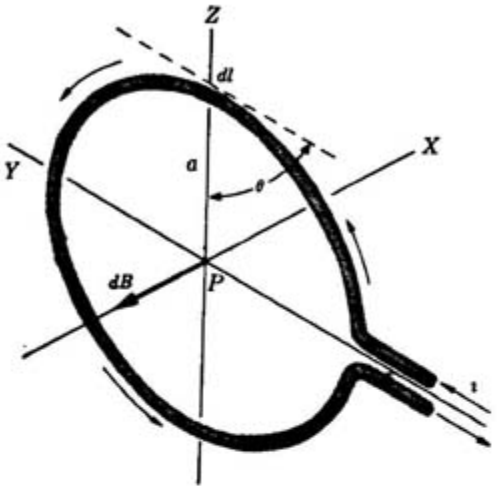


FIG. 11-6.—Campo en el centro de una espira circular.

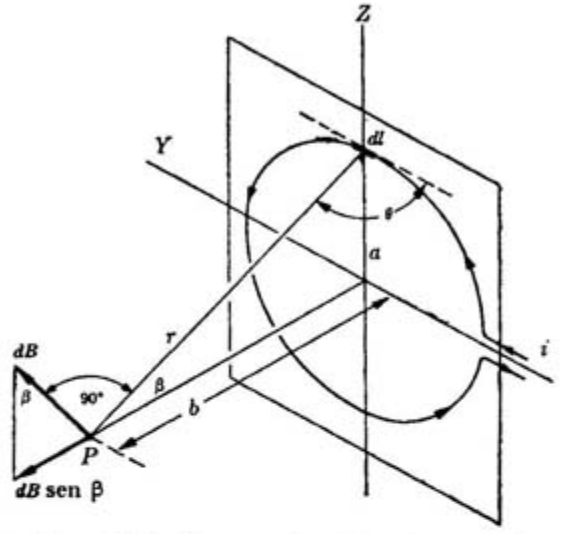


FIG. 11-7.—Campo sobre el eje de una espira circular.

Calcularemos en primer lugar la inducción en el centro, P, de la espira. Cada elemento dl se encuentra en el plano Y-Z lo mismo que cualquiera de las distancias a al punto P desde cada uno de los elementos dl. Puesto que la dirección de cada vector dB en P es perpendicular al plano Y-Z, o sea, se encuentra a lo largo del eje X, el campo magnético resultante puede encontrarse directamente por integración de los vectores dB para cada elemento. El ángulo θ formado por dl y a es 90° y sen $\theta = 1$. Por consiguiente,

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i\, dl \operatorname{sen} \theta}{a^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{a^2} \int dl.$$

Pero $\int dl$ es sencillamente la longitud de la circunferencia de la espira, o sea, $2\pi a$. Por tanto,

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{i}{a} \qquad [11\text{-}12]$$

Consideremos a continuación un punto sobre el eje de la espira, pero no en su centro (Fig. 11-7). La densidad de flujo dB en P, producida por la corriente que circula por el elemento dl, se encuentra en el plano X-Z, perpendicular a r. Es evidente que los demás vectores dB producidos por los otros elementos no tienen la misma dirección, sino que se encuentran sobre la superficie de un cono cuyo vértice está en P. Por ello ha de descomponerse cada uno en sus componentes para integrar éstas separadamente. Sin embargo, puede verse, por simetría, que las componentes perpendiculares al eje X se anulan entre sí, de modo que sólo han de sumarse las componentes dB sen β, a lo largo del eje X. El

ángulo θ formado por cada elemento dl y su correspondiente r es 90°. Por tanto,

$$B = \int dB \operatorname{sen} \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i\, dl \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \frac{ia \operatorname{sen} \beta}{r^2} = \frac{\mu_0}{2} \frac{ia^2}{r^3} = \frac{\mu_0}{2} \frac{ia^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \qquad [11\text{-}13]$$

Si $b = 0$, la Ec. [11-13] se reduce a la Ec. [11-12].

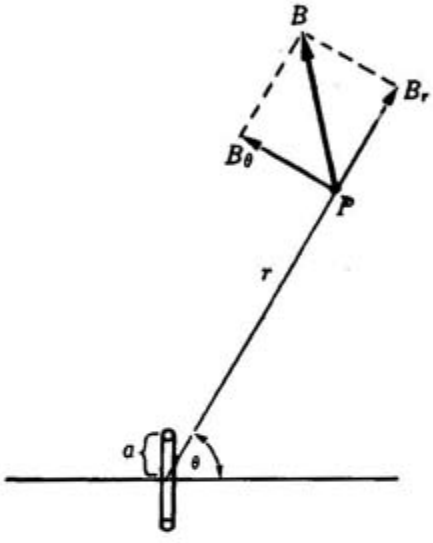


FIG. 11-8.—Campo de una espira circular en un punto muy alejado.

La inducción en puntos no situados sobre el eje de la espira puede calcularse por el mismo método, pero los cálculos resultan prolijos y los resultados sólo pueden expresarse por series infinitas cuando se utilizan funciones ordinarias. No obstante, para grandes distancias a la espira, comparadas con su radio, las ecuaciones toman una forma sencilla cuando se utilizan coordenadas polares. Sea B la inducción en el punto B, figura 11-8, y descompongámosla en una componente B_r en la dirección de las r crecientes y otra B_θ perpendicular a r y en el sentido de las θ crecientes. (Obsérvese que r y θ son coordenadas polares y no tienen el mismo significado que en las Figs. 11-6 y 11-7.)

Si a es despreciable frente a r, se tiene, aproximadamente,

$$\left.\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0}{2}\, ia^2 \frac{\cos \theta}{r^3} \\ B_\theta &= \frac{\mu_0}{4}\, ia^2 \frac{\operatorname{sen} \theta}{r^3} \end{aligned}\right\} \qquad [11\text{-}14]$$

Multiplicando numerador y denominador por π, estas ecuaciones pueden ponerse en la siguiente forma:

$$B_r = \frac{\mu_0}{2\pi}\, i\pi a^2 \frac{\cos \theta}{r^3};$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\, i\pi a^2 \frac{\operatorname{sen} \theta}{r^3}$$

El producto πa^2 es el área A de la espira y el factor $\mu_0 i\pi a^2$, o sea $\mu_0 iA$, se denomina *momento magnético* de la espira y se representa por M:

$$M = \mu_0 iA \qquad [11\text{-}15]$$

El momento magnético de una espira es un vector, definido según la notación vectorial como

$$\vec{M} = \mu_0 i \vec{A},$$

donde $\vec{A}$ es un vector perpendicular al plano de la espira.

Aunque el estudio anterior se ha hecho para una espira circular, el momento magnético de una espira de forma cualquiera se define por la Ec. [11-15]. Las componentes de la densidad de flujo, a distancias grandes de la espira, pueden escribirse:

$$\left.\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{4\pi}\, 2M \frac{\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta &= \frac{1}{4\pi}\, M \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3} \end{aligned}\right\} \qquad [11\text{-}16]$$

Obsérvese que estas ecuaciones tienen la misma forma que las dadas en la sección 2-3 para las componentes E_r y E_θ de la intensidad del campo eléctrico creado por un dipolo eléctrico de momento P a una distancia grande comparada con la longitud del dipolo. (El factor μ_0, que corresponde al ε_0 no aparece en estas expresiones porque se incluyó en la definición del momento magnético.) Esto quiere decir que el campo B que rodea a una espira que transporta una corriente es geométricamente idéntico al campo E que rodea un dipolo, cuando la distancia es grande comparada con las dimensiones de la espira o del dipolo. Cerca de la espira o del dipolo la analogía desaparece.

El par ejercido sobre una espira que transporta una corriente puede expresarse también en función del momento magnético de la espira. En la Ec. [9-13] hemos demostrado que el momento del par es

$$\tau = iBA \operatorname{sen}\alpha.$$

En virtud de la Ec. [11-15],

$$iA = \frac{M}{\mu_0}$$

Por consiguiente,

$$\tau = \frac{1}{\mu_0} MB \operatorname{sen}\alpha.$$

Si en lugar de una sola espira, como en la figura 11-6, se tiene una bobina de N espiras apretadas que todas tienen muy aproximadamente el mismo radio, cada vuelta contribuye de la misma forma a la creación del campo y las Ecs. [11-12] y [11-13] se convierten en

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ni}{a} \qquad [11\text{-}17]$$

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{Nia^2}{(a^2+b^2)^{3/2}} \qquad [11\text{-}18]$$

En la figura 11-9 se han representado algunas de las líneas de inducción que rodean a una espira circular y se encuentran en un plano que pasa por el eje. En realidad el campo es, naturalmente, tridimensional y puede imaginarse si se supone que se hace girar el plano alrededor del eje X-X. Obsérvese que cada línea de inducción es una curva cerrada.

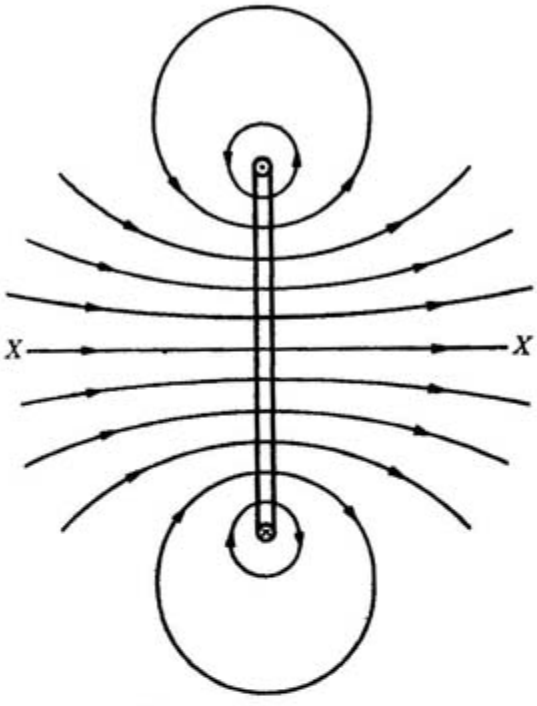


FIG. 11-9.—Líneas de inducción que rodean a una espira circular.

Puede verse ahora que las posiciones de equilibrio estable de las espiras representadas en las figuras 9-11 y 9-12 son aquellas para las cuales dentro del área abarcada por la espira la inducción del campo creado por ella tiene la misma dirección que el campo exterior. Con otras palabras, si una espira puede girar libremente se colocará en un plano tal que el flujo que atraviesa el área abarcada por ella tenga el máximo valor posible. Esto se confirma en todos los casos y constituye una ley general útil. Por ejemplo, si se hace circular una corriente a través de una espira de hilo flexible y forma irregular, colocada en un campo magnético exterior, la espira tomará una forma circular con su plano perpendicular al campo y de forma que su propio flujo se sume al del campo. La misma consecuencia puede deducirse, naturalmente, considerando las fuerzas laterales que se ejercen sobre los elementos del conductor.

11-6. Campo de un solenoide.—La densidad de flujo producida en cualquier punto por una corriente que circula en un arrollamiento solenoidal es simplemente la resultante de las densidades de flujo creadas en dicho punto por cada espira del solenoide. Para encontrar la densidad de flujo en un punto P sobre el eje del solenoide (Fig. 11-10) consideremos un elemento longitudinal dx de un solenoide, a una distancia axial x de P. Representemos por l la longitud del solenoide y por N el número

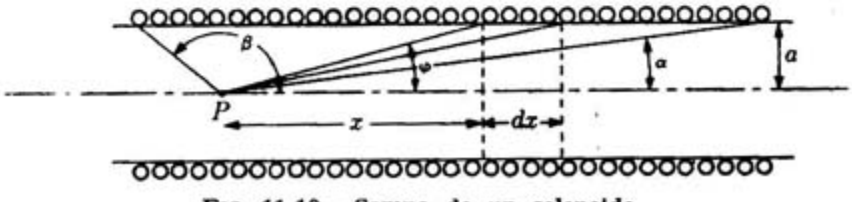


FIG. 11-10.—Campo de un solenoide.

de espiras de su arrollamiento. El número de éstas por unidad de longitud es entonces N/l, y el número de espiras en la longitud dx es $\frac{N}{l}\,dx$. (Suponemos que puede admitirse que cada espira se encuentra en un plano perpendicular al eje del solenoide.)

La densidad de flujo en P creada por la corriente i que circula por el elemento de longitud dx es, en virtud de la Ec. [11-13],

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ni}{l}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx.$$

Utilicemos como variable independiente el ángulo φ en lugar de x. Se tiene:

$$x = a\cot\varphi, \quad dx = -\,a\operatorname{cosec}^2\varphi\,d\varphi$$

y

$$B = -\frac{\mu_0}{2}\frac{Ni}{l}\int_\beta^\alpha \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\frac{Ni}{l}(\cos\alpha - \cos\beta).$$

Obsérvese que esta ecuación se aplica a *cualquier* punto del eje y no está restringida a los puntos interiores al solenoide.

En cualquier punto del eje dentro de un largo solenoide y no demasiado próximo a cualquiera de sus extremos, $\alpha = 0$, $\beta = 180^\circ$. Por tanto, para cada uno de estos puntos,

$$B = \mu_0\frac{Ni}{l} \qquad [11\text{-}19]$$

En un punto del eje, en uno de los extremos de un largo solenoide, $\alpha = 0$, $\beta = 90^\circ$ (o viceversa). Por tanto, en cualquiera de los extremos,

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ni}{l}, \qquad [11\text{-}20]$$

y la densidad de flujo en cualquiera de los extremos es la mitad que en el centro. Sin embargo, el campo es muy aproximadamente constante, excepto cerca de los extremos, y las líneas de inducción entran y salen del solenoide en regiones relativamente pequeñas próximas a sus extremos. Véanse la figura 11-11 y el problema 11-15.

Aunque la Ec. [11-19] se ha deducido para un punto situado sobre el eje del solenoide, constituye una buena aproximación para un punto cualquiera interior al mismo y no demasiado próximo a sus extremos.

Un arrollamiento tal como el esquematizado en la figura 11-12 se denomina *toroide*. Puede imaginarse que es un solenoide que se ha encorvado hasta adquirir una forma circular, de modo que sus extremos se han unido. Prácticamente todo el flujo magnético se confina en el interior

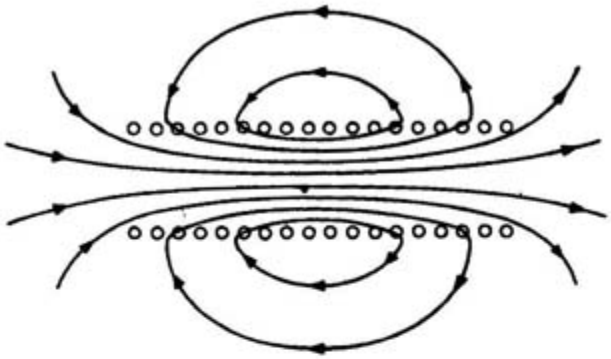


FIG. 11-11.—Líneas de inducción que rodean un solenoide.

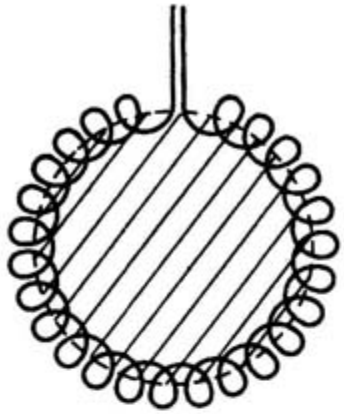


FIG. 11-12.—Toroide.

del toroide, y la densidad de flujo en cualquier punto, dentro del arrollamiento, está dada por la Ec. [11-19], en la cual l representa la longitud de la *circunferencia media* del toroide.

Como ejemplo de la simplificación que introduce en algunos problemas el uso de la relación deducida en la sección 11-3, vamos a utilizarla para calcular por otro método la densidad de flujo en el interior de un toroide. Calculemos la integral curvilínea a lo largo de la trayectoria cerrada representada por la línea de puntos de la figura 11-12. La superficie abarcada por la trayectoria es la rayada. Cada una de las N espiras del arrollamiento del toroide atraviesa una vez esta superficie, y la corriente total que la atraviesa es Ni. La inducción a lo largo de la trayectoria es paralela a ella y, por simetría, es constante en todos los puntos. Representemos por B la inducción y por l la longitud de la trayectoria. La integral curvilínea vale, en este caso, Bl y, en virtud de la Ec. [11-9],

$$Bl = \mu_0 Ni,$$

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l},$$

que coincide con la Ec. [11-19].

11-7. Campo de una carga puntual móvil.—La inducción magnética en los puntos que rodean a un elemento de corriente y que está dada por la expresión

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, dl \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

puede considerarse como resultante de la inducción debida a todas las cargas móviles que circulan por el elemento, contribuyendo cada carga en igual proporción si todas se mueven con la misma velocidad. Hemos demostrado que la corriente en un conductor puede escribirse:

$$i = nqvA,$$

siendo n el número de cargas móviles por unidad de volumen, q la carga de cada una, y v, su velocidad común. Se deduce que

$$i\,dl = nqvA\,dl.$$

Pero $nqA\,dl$ es simplemente la cantidad de carga en el elemento, que representaremos por dq. El campo dB puede escribirse entonces:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{v\,dq \operatorname{sen}\theta}{r^2}$$

Por consiguiente, el campo creado por una carga finita q, que se desplaza con velocidad v, es

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{vq \operatorname{sen}\theta}{r^2} \qquad [11\text{-}21]$$

siendo θ el ángulo formado por v y r, y B perpendicular al plano determinado por v y r. Si son varias las cargas que crean el campo:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum\frac{qv \operatorname{sen}\theta}{r^2} \text{ (suma geométrica)} \qquad [11\text{-}22]$$

Cabe tomar esta ecuación, en lugar de la ley de Biot, como punto de partida para el estudio del campo magnético que rodea a las cargas móviles y a las corrientes, y puede considerarse como definición de la inducción magnética B, en lugar de la Ec. [11-3].

Consideremos ahora dos cargas, q y q', que se mueven con las velocidades respectivas v y v' y que se encuentran separadas por una distancia r. El campo magnético creado por la carga q, en el punto del espacio ocupado por q', es, en virtud de la Ec. [11-22],

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \operatorname{sen}\theta}{r^2},$$

y la fuerza sobre la carga q',

$$F = q'v'B \operatorname{sen}\varphi,$$

siendo φ el ángulo formado por v' y B, y F perpendicular al plano determinado por v' y B. Combinando estas ecuaciones encontramos:

$$F_{\text{mag}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \operatorname{sen}\theta\cdot q'v' \operatorname{sen}\varphi}{r^2}, \qquad [11\text{-}23]$$

donde la fuerza se ha escrito F_{mag} para indicar que tiene un origen *magnético*. Esta ecuación debe compararse con la ley de Coulomb que se cumple para la fuerza *eléctrica* entre cargas:

$$F_{\text{elec}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$$

Un procedimiento perfectamente lógico de desarrollar la teoría de la electricidad y el magnetismo sería partir de estas dos ecuaciones como leyes experimentales que rigen la fuerza entre cargas eléctricas. El segundo miembro de cada ecuación puede descomponerse en dos factores:

$$F_{\text{elec}} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right] \times [q'] \qquad [11\text{-}24]$$

y

$$F_{\text{mag}} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \operatorname{sen}\theta}{r^2}\right] \times [q'v' \operatorname{sen}\varphi]. \qquad [11\text{-}25]$$

El primer factor encerrado entre corchetes se refiere únicamente en ambas ecuaciones a la carga q, y el segundo, a la carga q'. Los términos que sólo se refieren a la carga q son los que se han descrito como *campos* creados por esta carga. El campo eléctrico es

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \qquad [11\text{-}26]$$

y el campo magnético,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \operatorname{sen}\theta}{r^2} \qquad [11\text{-}27]$$

Las Ecs. [11-24] y [11-25] se convierten en

$$F_{\text{elec}} = Eq',$$
$$F_{\text{mag}} = Bq'v' \operatorname{sen}\varphi.$$

En el caso más general existe simultáneamente un campo eléctrico y un campo magnético en un punto, y la fuerza sobre una carga móvil en este punto es

$$\begin{aligned} F &= F_{\text{elec}} + F_{\text{mag}} \text{ (suma geométrica)} \\ &= Eq' + Bq'v' \operatorname{sen}\varphi, \end{aligned}$$

donde q' es el valor de la carga móvil, v' el valor de su velocidad y φ el ángulo formado por B y v'.

PROBLEMAS

11-1. Un largo conductor rectilíneo que transporta una corriente de 200 A, atraviesa una caja de madera de forma cúbica, entrando y saliendo de ella por orificios practicados en los centros de las caras opuestas, como indica la figura 11-13. La longitud de cada arista de la caja es 20 cm. Considérese un elemento del conductor de 1 cm de longitud situado en el centro de la caja y sustitúyanse los infinitésimos ds y dB por las cantidades finitas pequeñas Δs y ΔB. Calcúlese el valor de la inducción magnética ΔB producida por este elemento en los puntos designados por las letras a, b, c, d, y e de la figura 11-13. Los puntos a, c y d se encuentran en los centros de las caras del cubo, b es el punto medio de una arista,

y el punto c está en un vértice. Cópiese la figura y represéntense por vectores los valores y sentidos relativos de los vectores inducción.

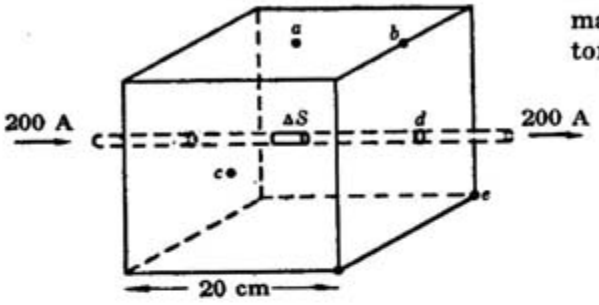


FIG. 11-13.

11-2. Se ha doblado un hilo conductor en forma de hexágono regular, cuyo lado mide 20 cm. El conductor transporta una corriente de 100 A. Calcúlese la inducción magnética en el centro de la espira.

11-3. Una espira cuadrada de 6 m de lado transporta una corriente de 5 A. Calcúlese la densidad de flujo magnético en un punto distante 4 m del centro del cuadrado y situado sobre una recta perpendicular a su plano y que pasa por su centro.

11-4. Un largo conductor horizontal AB permanece en reposo sobre la superficie de una mesa (Fig. 11-14). Otro conductor, CD, tiene 100 cm de longitud y está colocado en el plano vertical que

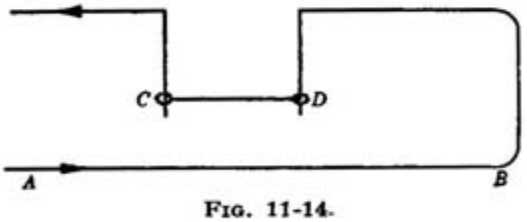


FIG. 11-14.

pasa por el primero, pudiendo deslizar hacia arriba y hacia abajo sobre dos guías metálicas C y D. Los dos conductores están conectados por medio de contactos deslizantes y transportan una corriente de 50 A. La masa del conductor CD es 0,05 g/cm. ¿Hasta qué altura de equilibrio se elevará el conductor CD?

11-5. El largo conductor AB (figura 11-15) transporta una corriente de 20 A. El cuadro rectangular, cuyo lados de mayor longitud son paralelos al conductor, transporta una corriente de 10 A.

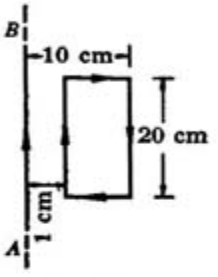


FIG. 11-15.

Hállense el valor y sentido de la fuerza resultante ejercida sobre el cuadro por el campo magnético creado por el conductor.

11-6. Dos conductores rectilíneos, muy largos y paralelos, figura 11-16, están separados por una distancia de 40 cm. La corriente en cada conductor es 20 A.

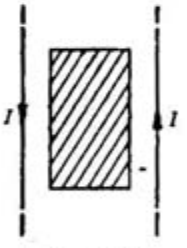


FIG. 11-16.

a) Calcúlese la densidad de flujo magnético en un punto situado en el plano de ambos conductores y a igual distancia de ellos. *b*) Hállese el flujo total que atraviesa el área rayada. Cada lado del rectángulo dista 10 cm del eje de su conductor más próximo y tiene 25 cm de longitud.

11-7. Un anillo de madera, representado en sección en la figura 11-17, está atravesado, a lo largo de su eje, por un largo conductor rectilíneo que transporta una corriente de intensidad i. Calcúlese el

número total de líneas de flujo (webers) dentro del material que forma el anillo.

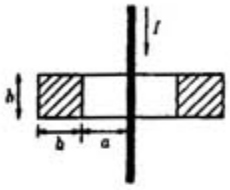


FIG. 11-17.

11-8. Una cinta metálica rectilínea larga y delgada, cuya anchura es b, transporta una corriente constante de intensidad i. La densidad de corriente es uniforme. Dedúzcase la expresión de la densidad de flujo magnético en un punto situado en el plano de la cinta y a una distancia a del borde más próximo de la misma.

11-9. Una bobina plana que tiene 100 espiras, de 5 cm de radio, transporta una corriente de 2 A. Hállese la densidad de flujo magnético en puntos del eje de la bobina situados a las siguientes distancias de su centro: 0, 2 cm, 5 cm, 8 cm y 10 cm. Represéntense los resultados en una gráfica. Compárense estos resultados con la solución del problema 2-11.

11-10. Dos espiras circulares de hilo, cada una de las cuales tiene un radio a, están colocadas de modo que sus planos sean paralelos y la distancia entre sus centros a, siendo la línea que une dichos centros perpendicular a los planos de ambas espiras. Dedúzcase una expresión para la inducción del campo magnético en el punto de esta línea situado a igual distancia de los planos de las espiras. Las intensidades de las corrientes en las espiras son iguales y tienen el mismo sentido en ambas. Como ejemplo numérico, supóngase $a = 20$ cm, y que cada espira se sustituye por una bobina plana de 100 vueltas, siendo la corriente de 5 A.

11-11. Dos espiras circulares, ambas de radio a, y que transportan corrientes de igual intensidad e igual sentido, están dispuestas con sus planos paralelos y separados por una distancia b. Calcúlese la inducción magnética en el centro de cada espira.

11-12. Hállese la inducción magnética en el punto P (Fig. 11-18). Se trata de tres espiras circulares dispuestas como

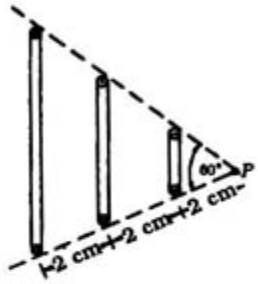


FIG. 11-18.

se indica en la figura, y que transportan una corriente de 8 A. El radio de la espira mayor es 3 cm.

11-13. Un gran número, N, de espiras de hilo conductor fino están arrolladas sobre una esfera de madera, formando una sola capa y muy próximas unas a otras, con los planos de todas ellas perpendiculares al eje de la esfera, y cubriendo completamente su superficie. La intensidad de la corriente en el hilo es i. Hállese la densidad de flujo magnético en el centro de la esfera.

11-14. Un disco delgado de material dieléctrico, que tiene en total una carga $+Q$ distribuída uniformemente sobre su superficie, gira alrededor de un eje perpendicular a la superficie del disco y que pasa por su centro, con una velocidad de n vueltas por segundo. Calcúlese la inducción magnética en el centro del disco.

11-15. Un solenoide cuya longitud es 20 cm y su radio 2 cm está formado por 200 vueltas de hilo estrechamente arrolladas. La corriente que pasa por el solenoide es 5 A. Calcúlese y represéntese en una gráfica la inducción magnética en puntos situados sobre el eje del solenoide y a las siguientes distancias de su centro: 0, 4 cm, 8 cm, 10 cm, 12 cm, 16 cm, 20 cm.

11-16. Sobre un anillo de madera cuyo diámetro medio es 10 cm, se ha arrollado

muy apretado un devanado toroidal de 500 vueltas. Hállese la densidad de flujo en un punto de la circunferencia media del anillo cuando la intensidad de la corriente en el devanado es 0,3 A.

11-17. Se ha doblado una varilla de sección cuadrada, de 2 cm de lado, para formar un anillo de radio interior 7 cm, soldándose los extremos como indica la figura 11-19. Se arrolla alrededor de este anillo, en forma toroidal, hilo conductor

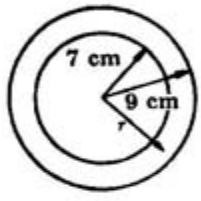


FIG. 11-19.

de modo que se forme una bobina de 1 600 espiras por la cual se hace circular una corriente de 2 A. *a*) Calcúlese la inducción magnética a una distancia *r* del centro del toroide. *b*) ¿Cuál es el flujo total a través de cualquier sección del anillo?

11-18. Un largo tubo cilíndrico de cobre cuyos radios interior y exterior miden 1 cm y 2 cm, respectivamente, transporta una corriente de 200 A. Determínese la inducción magnética a las siguientes distancias del eje del tubo: 0,5 cm; 1,5 cm; 4 cm.

11-19. Las cargas positivas puntuales q_1 y q_2 de la figura 11-20 se mueven en las direcciones indicadas con velocidades v_1 y v_2. *a*) ¿Cuál es la inducción magnética creada por la carga q_1 en el punto ocupado por q_2? *b*) Calcúlese la magnitud y

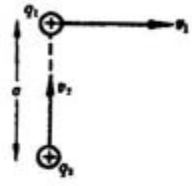


FIG. 11-20.

dirección de la fuerza que actúa sobre q_2. *c*) ¿Cuál es la inducción magnética creada por la carga q_2 en el punto ocupado por q_1? *d*) ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre q_1? *e*) ¿Qué deducimos de la tercera de estas respuestas respecto a la tercera ley de Newton?

11-20. Un cable coaxial está formado por un conductor macizo de radio 1 cm, situado sobre el eje de un conductor cilíndrico hueco de radio interior 2 cm y exterior 2,5 cm. El conductor interior transporta una corriente constante de 20 A en cierto sentido y el conductor exterior una corriente constante de 20 A en sentido opuesto. Calcúlese el valor de la inducción magnética a las siguientes distancias del eje del cable: 0,5 cm, 1,5 cm, 2,2 cm, 3 cm.

CAPÍTULO XII

FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA

12-1. Fuerza electromotriz producida por movimiento.—Nuestra producción y distribución actual en gran escala de la energía eléctrica no sería factible económicamente si los únicos generadores de fem disponibles fueran de naturaleza química, tales como pilas secas. El desarrollo de la Electrotecnia, hasta alcanzar su estado actual, comenzó con Faraday y Henry, quienes independientemente y casi al mismo tiempo descubrieron los fundamentos en que se basa la producción de fem inducida y los métodos por los cuales la energía mecánica puede convertirse directamente en energía eléctrica.

La figura 12-1 representa un conductor de longitud l situado en un campo magnético uniforme, perpendicular al plano del dibujo y en el sentido que se aleja del lector. Si se pone el conductor en movimiento hacia la derecha, con una velocidad v, perpendicular a la longitud del mismo y al campo magnético, cada partícula cargada situada dentro del conductor experimenta una fuerza $F = qBv$ dirigida a lo largo del conductor. El sentido de la fuerza ejercida sobre una carga negativa es de a a b en la figura 12-1, mientras que la fuerza sobre una carga positiva es de b a a.

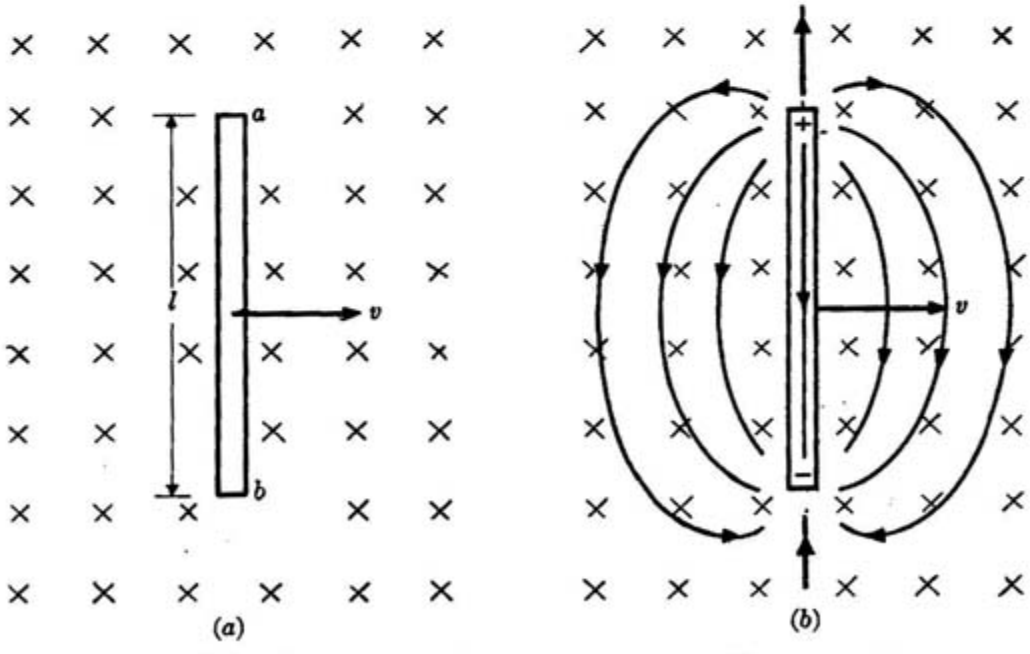


FIG. 12-1.—Conductor móvil en un campo magnético uniforme.

El conductor está en las mismas condiciones que si se encontrase en un campo eléctrico de intensidad Bv, cuyo sentido fuera de b a a. Los electrones libres en el conductor se moverán en el sentido de la fuerza que actúa sobre ellos hasta que la acumulación de un exceso de carga en los extremos del conductor establezca un campo electrostático tal que la fuerza resultante sobre cada carga situada dentro del conductor sea nula. El aspecto general de este campo electrostático se indica en la figura 12-1(b). El extremo superior del conductor adquiere un exceso de carga positiva, y el extremo inferior un exceso de carga negativa. Barnet demostró que esta separación de carga tiene realmente lugar en un conductor móvil en un campo magnético, realizando un experimento equivalente a cortar la barra por su centro mientras se encuentra todavía en movimiento. Se observó que el extremo superior estaba cargado positivamente, y el inferior, negativamente.

Imaginemos ahora que el conductor móvil desliza sobre otro conductor fijo en forma de U, tal como se representa en la figura 12-2. No hay fuerza magnética sobre las cargas que están dentro del conductor fijo, pero dado que se encuentra en el campo electrostático que rodea al conductor móvil, se establecerá una corriente dentro de él, siendo el sentido (convencional) de esta corriente el mismo que el de las agujas de un reloj, o sea, de b a a. Como resultado de esta corriente, el exceso de carga en los extremos del conductor móvil se reduce; el campo electrostático dentro del conductor móvil se debilita, y las fuerzas magnéticas producen un nuevo desplazamiento de electrones libres dentro de él, de a a b. Mientras se mantenga el movimiento del conductor habrá, por consiguiente, un desplazamiento continuo de electrones, en sentido contrario al de las agujas de un reloj, alrededor del circuito o una corriente convencional en el mismo sentido. El conductor móvil se comporta como un generador de fuerza electromotriz, y se dice que se ha *inducido* dentro del conductor una *fuerza electromotriz*, producida por un movimiento, cuya magnitud vamos a calcular.

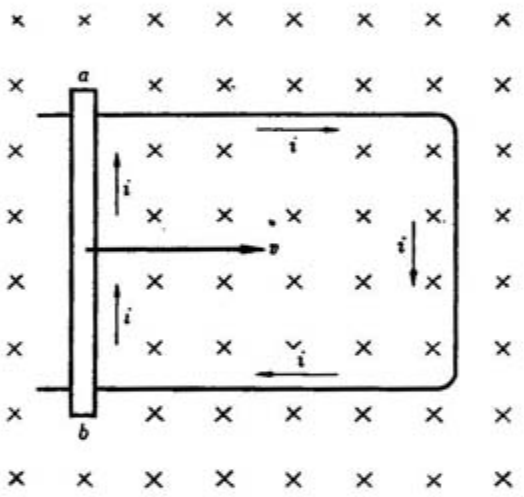


FIG. 12-2.—Corriente producida por el movimiento de un conductor en un campo magnético.

Se definió la fuerza electromotriz como razón del trabajo realizado sobre la carga circulante a la cantidad de carga desplazada que pasa por un punto del circuito. Sea i la intensidad de la corriente en el circuito de la figura 12-2. A causa de la existencia de esta corriente se ejerce una fuerza hacia la izquierda sobre el conductor móvil por el campo, y, en

consecuencia, es necesaria una fuerza exterior, suministrada por algún agente que produzca trabajo, para mantener el movimiento. El trabajo realizado por este agente es el efectuado sobre la carga circulante y, por tanto, mediante este dispositivo se obtiene la transformación directa de energía mecánica en energía eléctrica.

La fuerza sobre el conductor móvil es

$$F = ilB.$$

La distancia recorrida en el tiempo dt,

$$ds = vdt,$$

y el trabajo realizado será

$$dW = Fds = ilB \times vdt.$$

Pero el producto de i por dt es la carga dq desplazada en este tiempo. Por consiguiente,

$$dW = Blvdq,$$

y la fem, dW/dq, es, por tanto,

$$\boxed{\varepsilon = Blv} \qquad [12\text{-}1]$$

Si B se expresa en wb/m², l en metros y v en m/seg, la fem resulta en julios por culombio, o voltios, como puede comprobarse fácilmente.

Otra definición de la fem en un circuito es (Sec. 5-3):

$$\varepsilon = \oint E \cos \theta \, dl$$

El significado de E en esta ecuación es fuerza neta por unidad de carga. En el problema que se estudia han de incluirse tanto las fuerzas eléctricas como las magnéticas. La fuerza neta sobre una carga q es

$$\begin{aligned} F &= F_{elec} + F_{mag} \\ &= Eq + Bqv \operatorname{sen} \varphi, \end{aligned}$$

y por ser sen $\varphi = 1$, la fuerza por unidad de carga será

$$\frac{F}{q} = E + Bv,$$

siendo E el campo electrostático creado por las cargas desplazadas y B el campo magnético exterior. Entonces,

$$\varepsilon = \oint (E + Bv) \cos \theta \, dl = \oint E \cos \theta \, dl + \oint Bv \cos \theta \, dl.$$

Se ha demostrado en la sección 3-3 que la integral curvilínea de un campo *electrostático* a lo largo de una curva cerrada es nula. Por consiguiente,

$$\oint E \cos \theta \, dl = 0.$$

En el segundo término, v es nula en la parte fija del circuito, de modo que la integral se extiende solamente a lo largo de la varilla móvil, y siendo $\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$, se tiene:

$$\oint Bv \cos\theta \, dl = Bv \int dl = Bvl,$$

y

$$\varepsilon = Bvl,$$

que es la misma Ec. [12-1].

Los sentidos relativos de la fem, campo y movimiento, pueden recordarse por la *regla de la mano derecha*. (Fig. 12-3.) Se extiende el pulgar, el índice y el dedo medio de la mano derecha de modo que formen direcciones perpendiculares entre sí. Si el dedo pulgar indica el sentido del movimiento, y el dedo índice el sentido del campo, el dedo medio señalará el sentido (convencional) de la corriente, si se trata de un circuito cerrado.

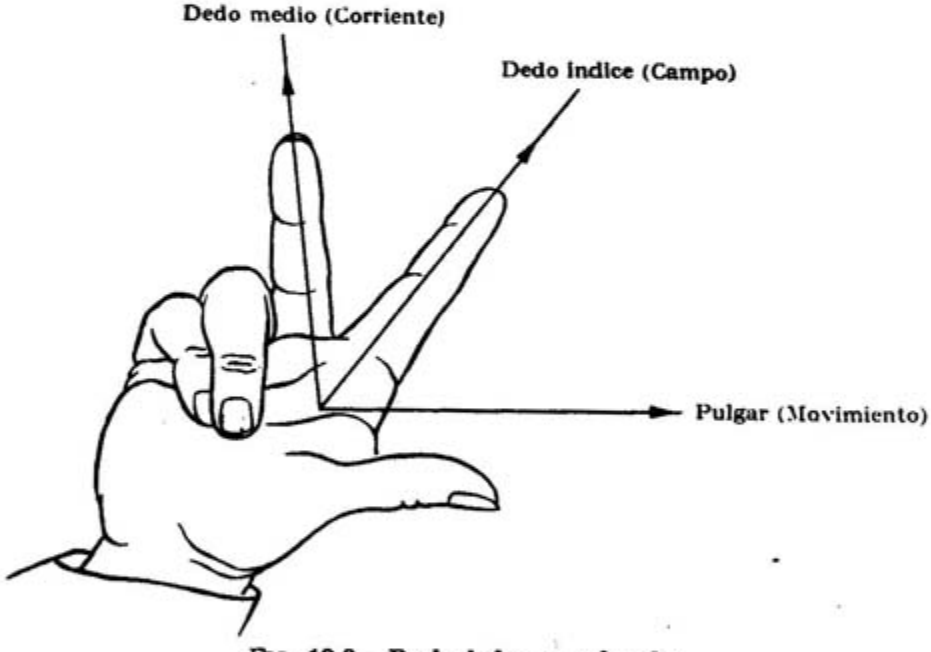


FIG. 12-3.—Regla de la mano derecha.

Es importante observar que en este problema intervienen dos velocidades (o componentes de la velocidad) y dos fuerzas Las cargas dentro del conductor móvil de la figura 12-2 tienen una componente de la velocidad v dirigida hacia la derecha a causa de que son transportadas por el conductor móvil. Como resultado de esta velocidad de transporte experimentan una fuerza dirigida en el sentido longitudinal de la barra (hacia arriba en la Fig. 12-2) y si la barra forma parte de un circuito cerrado, esta fuerza ocasiona un arrastre de carga hacia arriba a lo largo de la barra. (Describimos el fenómeno considerando el movimiento de las cargas positivas.) Tan pronto como las cargas adquieren una componente de velocidad hacia arriba, se produce una segunda componente de fuerza que, en virtud de la regla de la mano izquierda, está dirigida hacia la izquierda (Fig. 12-2). Esta fuerza es perpendicular a la dirección longitudinal de la barra y no afecta a la circulación de la carga, sino que origina una fuerza sobre la barra que se opone a su movimiento hacia la derecha. En consecuencia, ha de

aplicarse sobre la barra una fuerza exterior para mantener su movimiento y la energía suministrada al circuito es precisamente el trabajo realizado por esta fuerza exterior.

Se supone que se produce una fem en la barra aun en ausencia de circuito cerrado aunque, naturalmente, no puede producirse una corriente permanente a menos que se disponga de dicho circuito. Si el conductor forma parte de un circuito cerrado, la corriente resultante se denomina *corriente inducida.*

La Ec. [12-1] se dedujo para el caso especial de un campo magnético uniforme, siendo velocidad, conductor y campo magnético mutuamente perpendiculares. La ecuación general es

$$d\varepsilon = Bv\,dl \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \qquad [12\text{-}2]$$

siendo dl un elemento de longitud que se mueve con la velocidad v, B la densidad de flujo en el punto en el cual se encuentra dl, θ el ángulo formado por B y dl y φ el ángulo formado por v y la normal al plano determinado por dl y B (Fig. 12-4). Si dl es perpendicular a B, se tiene $\theta = 90°$ y $\operatorname{sen}\theta = 1$. Si v es perpendicular a dl y B, $\varphi = 0$ y $\cos\varphi = 1$. La Ec. [12-2] se reduce entonces a la Ec. [12-1].

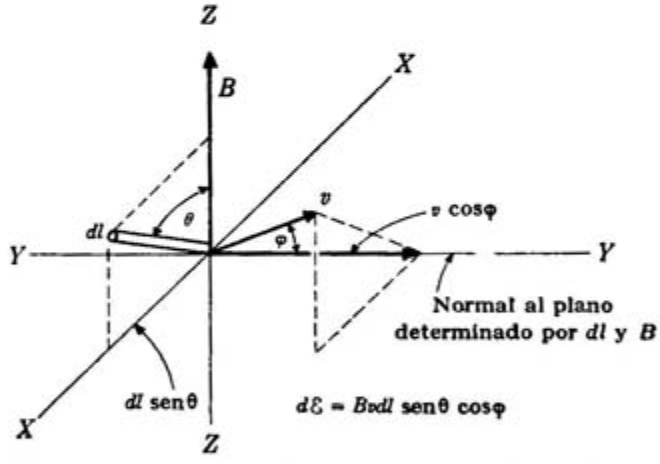


FIG. 12-4.—$d\varepsilon = B \times (dl \operatorname{sen}\theta) \times (v \cos\varphi)$.

Utilizando la notación vectorial, la Ec. [12-2] puede escribirse:

$$d\varepsilon = (\vec{B} \times \vec{dl})\cdot\vec{v}.$$

EJEMPLO.—La inducción B, en la región comprendida entre los polos de un electroimán, es 0,5 wb/m². Calcúlese la fem inducida en un conductor rectilíneo de 10 cm de longitud, normal a B y que se mueve perpendicularmente a B y a su propia dirección longitudinal, con una velocidad de 1 m/seg.

La fem inducida es

$$\varepsilon = Blv \operatorname{sen}\theta \cos\varphi,$$
$$\theta = 90°,\ \varphi = 0,$$
$$B = 0{,}5 \text{ wb/m}^2,\ l = 0{,}10 \text{ m},\ v = 1 \text{ m/seg};$$
$$\varepsilon = 0{,}5 \times 0{,}1 \times 1 = 0{,}05 \text{ V}.$$

12-2. Ley de Faraday.—La fem inducida en el circuito de la figura 12-2 puede considerarse desde otro punto de vista. Mientras el conductor se ha movido hacia la derecha una distancia *ds*, el área abarcada por el circuito cerrado *abcd* (Fig. 12-5) ha disminuído en

$$dA = lds,$$

y la variación del flujo magnético que atraviesa la superficie limitada por el circuito es

$$d\Phi = -BdA = -lBds.$$

Dividiendo los dos miembros de esta ecuación por *dt*, obtenemos:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = lB\frac{ds}{dt} = lBv. \qquad [12\text{-}3]$$

Pero el producto *lBv* es igual a la fem inducida ε, y, por tanto, la Ec. [12-3] establece que *la fem inducida en el circuito es numéricamente igual a la derivada respecto al tiempo, cambiada de signo, del flujo que lo atraviesa:*

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}} \qquad [12\text{-}4]$$

Tal como se ha obtenido, la Ec. [12-4] parece simplemente otra forma de escribir la Ec. [12-1], que se refiere a la fem inducida en un conductor móvil. Resulta, sin embargo, que la relación anterior tiene una significación mucho más profunda de lo que pudiera esperarse de su deducción. Esto es, se encuentra que es aplicable a cualquier circuito a través del cual se produce una variación de flujo por un medio cualquiera, aunque no haya movimiento de ninguna parte del circuito y, por consiguiente, no pueda atribuirse directamente la fem a una fuerza ejercida sobre una carga móvil.

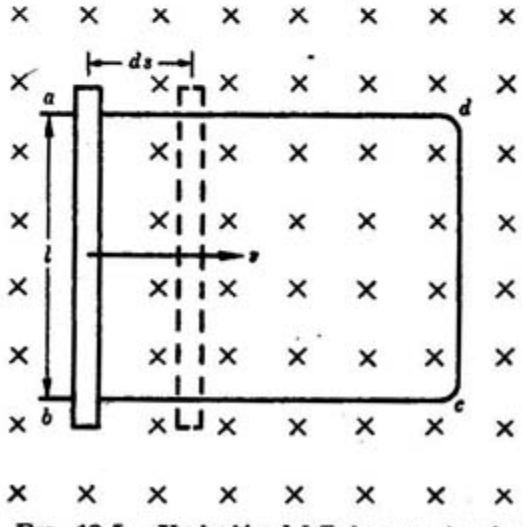


FIG. 12-5.—Variación del flujo que atraviesa el circuito *abcd*.

Supongamos, p. ej., que dos espiras de hilo conductor están colocadas como indica la figura 12-6. Una corriente que circula por el circuito 1 crea un campo magnético cuyo valor en todos los puntos es proporcional a esta corriente. Una parte de este flujo pasa a través del circuito 2, y si la corriente en el circuito 1 aumenta o dismi-

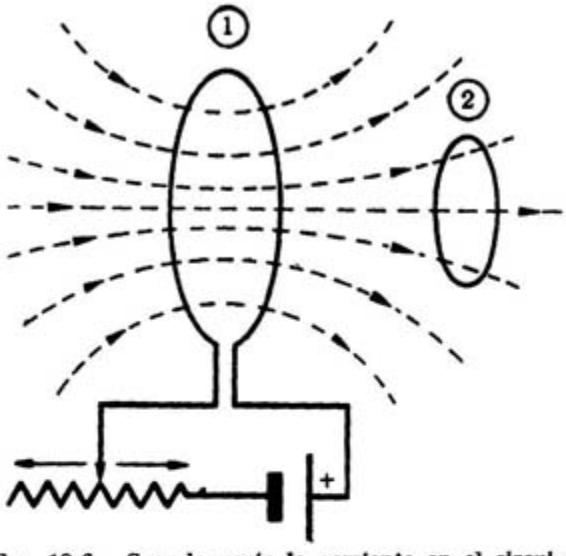


FIG. 12-6.—Cuando varía la corriente en el circuito (1), varía el flujo magnético que atraviesa el circuito (2).

nuye, el flujo a través del circuito 2 variará también.

El circuito 2 no es móvil en un campo magnético y, por consiguiente, no se habrá producido fem debida al movimiento de un conductor en un campo magnético. Pero hay una variación del flujo que lo atraviesa y se encuentra experimentalmente que en el circuito 2 aparece una fem de valor $\varepsilon = -d\Phi/dt$.

En el caso de la figura 12-6 es evidente que la fem no puede suponerse creada por una parte determinada del circuito 2; la fem es engendrada en todo el circuito.

La fem inducida puede expresarse también como sigue. Puesto que

$$\Phi = \int B \cos \varphi \, dA,$$

diferenciando ambos miembros se obtiene:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int \frac{d(B \cos \varphi)}{dt} dA, \qquad [12\text{-}5]$$

relación que se conoce con el nombre de *ley de Faraday*.

Utilicemos de nuevo la definición de fem en la forma

$$\varepsilon = \oint E \cos \theta \, dl.$$

Cuando se combina la expresión anterior con la ley de Faraday, se obtiene:

$$\oint E \cos \theta \, dl = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int \frac{d(B \cos \varphi)}{dt} dA, \qquad [12\text{-}6]$$

siendo la primera, la integral curvilínea a lo largo del circuito, y la segunda, una integral de superficie extendida al área limitada por aquél. En el capítulo XVII utilizaremos la Ec. [12-6] para deducir la velocidad de las ondas electromagnéticas.

Para resumir: siempre que varía con el tiempo el flujo que atraviesa el circuito, se produce en él una fem inducida. El flujo puede hacerse variar de dos modos: 1.º, por el movimiento de un conductor, como en el caso de la figura 12-2; 2.º, por un cambio en el valor del flujo que atra-

viesa un circuito fijo, como en el caso de la figura 12-5. Para el caso 1.º, la fem puede calcularse bien a partir de

$$\varepsilon = lBv,$$

(o la relación más general $d\varepsilon = Bv\,dl$ sen θ cos φ) o bien de

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Para el caso 2.º, la fem sólo puede calcularse por la ecuación

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int \frac{d(B\cos\varphi)}{dt}\,dA. \qquad [12\text{-}7]$$

EJEMPLO.—Con cierta intensidad de corriente en el circuito 1 de la figura 12-5, pasa un flujo de 5×10^{-4} wb por el circuito 2. Cuando se interrumpe el circuito 1, el flujo se anula en un tiempo de 0,001 seg. ¿Cuál es la fem media inducida en el circuito 2?

La disminución media del flujo en el circuito 2 es

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{5 \times 10^{-4}}{0{,}001} = 0{,}5 \text{ wb/seg.}$$

La fem media inducida es, por tanto, 0,5 V.

12-3. Ley de Lenz.—H. F. E. Lenz (1804-64) fué un físico alemán que, sin conocer los trabajos de Faraday y Henry, repitió casi simultáneamente muchos de sus descubrimientos. La ley que lleva su nombre constituye una regla útil para conocer el sentido de una fem inducida. Esta ley establece que

El sentido de una fem inducida es tal que se opone a la causa que la produce.

La ley ha de interpretarse de distinto modo según la *causa* particular que produce la fem.

Si la fem es *producida* por el movimiento de un conductor en un campo magnético, se *opone* a esta causa, creando una corriente (siempre que exista circuito cerrado) de sentido tal que la fuerza sobre esta corriente es opuesta al sentido del movimiento del conductor. Hay, por consiguiente, una *oposición* al *movimiento* del conductor.

Si la fem es *producida* por la variación del flujo que atraviesa un circuito cerrado, la corriente resultante de dicha fem es de sentido tal que crea por sí misma un flujo, el cual, dentro del plano del circuito, es: *a*) *opuesto* al flujo original si este flujo está *aumentando*; *b*) del *mismo* sentido que el flujo inicial si este último está *disminuyendo*. Por tanto, hay una *oposición*, no al flujo mismo, sino a su *variación*.

12-4. Betatrón.—El acelerador de inducción magnética, o betatrón, es una aportación reciente al grupo de aparatos destinados a acelerar partículas cargadas, para alcanzar grandes velocidades. Fué inventado, en 1941, por Donald W. Kerst, de la Universidad de Illinois. El aparato

original de Kerst era capaz de acelerar electrones hasta energías de 2 millones de electrón-voltios. Un segundo aparato construído por la General Electric Company produjo 20 millones de electrón-voltios, y en 1945 se terminó un tercer modelo que puede acelerar electrones hasta una energía de 100 millones de electrón-voltios. La descripción siguiente se refiere a la máquina de 100 millones de electrón-voltios.

Un tubo de vidrio en el que se ha hecho el vacío, de forma toroidal y sección elíptica, de 74 pulgadas de diámetro exterior y 58 pul-

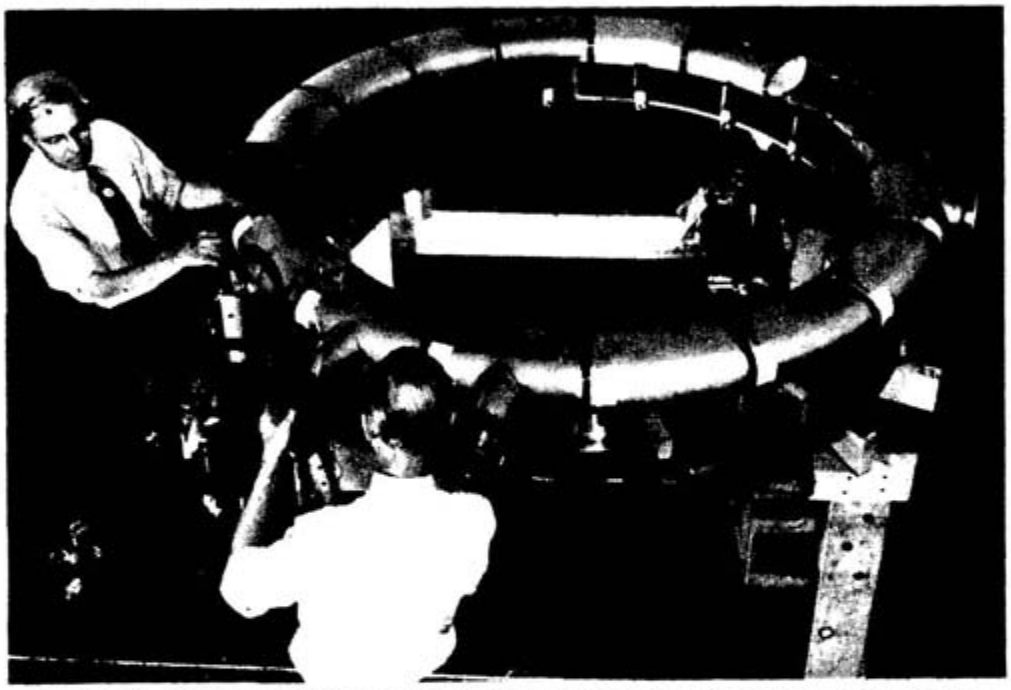


FIG. 12-7.—Montando el gran tubo vacío del betatrón. *(Cortesía de General Electric Co.)*

gadas de diámetro interior, está colocado horizontalmente en el espacio comprendido entre las piezas polares de un electroimán. Por las bobinas del electroimán circula una corriente alterna de 60 ciclos/seg, de modo que el flujo magnético que atraviesa el plano del toroide se invierte, desde su valor máximo en un sentido hasta su valor máximo en sentido opuesto, en 1/120 seg. Electrones acelerados por una diferencia de potencial de unos 50000 V son lanzados tangencialmente dentro del tubo y obligados por el campo magnético a describir dentro del mismo una órbita circular de 66 pulgadas de diámetro. En cada revolución son acelerados por el mismo voltaje (400 V, aproximadamente) que se obtendría por inducción en una sola espira a través de la cual el flujo variase con igual velocidad. El acelerador puede compararse con un transformador ordinario, en el cual los arrollamientos del secundario de muchas vueltas han sido reemplazados por los electrones del tubo vacío. Los electrones son acelerados por el campo magnético *variable* y al mismo

tiempo obligados a moverse en una órbita circular por la *existencia* del campo magnético. La velocidad adquirida es tan grande que un electrón puede dar 250000 revoluciones en el tiempo necesario para que el flujo aumente desde cero hasta su valor máximo. Puesto que cada revolución es equivalente a una aceleración producida por una diferencia de potencial de 400 V, la energía final es 250000 × 400, o sea, 100 millones de electrón-voltios.

En una etapa determinada del proceso de aceleración se puede enviar a las bobinas del electroimán un impulso adicional de corriente. Esto obliga a los electrones a salir de su trayectoria circular y golpear sobre un blanco, que se convierte entonces en un manantial de rayos X, de longitud de onda extremadamente corta y de gran poder penetrante.

Obsérvese que el aumento relativista de masa con la velocidad, que no permite la aceleración de electrones en el ciclotrón, no impide su aceleración en este aparato, puesto que adquieren su energía cinética final en menos de un ciclo de variación del campo magnético y no tienen que permanecer en fase con el campo durante un gran número de ciclos.

La figura 12-7 es una fotografía que representa el conjunto del tubo de vacío. La fotografía de la contraportada es una vista frontal del acelerador.

12-5. Dínamo de disco de Faraday.—El dispositivo representado en la figura 12-2 no es, evidentemente, adecuado como pieza real de un equipo para suministrar corriente a un circuito. Generalmente, la potencia mecánica disponible se encuentra sobre el eje de alguna máquina giratoria tal como una turbina o un motor de combustión interna, y por ello se prefiere algún mecanismo en el cual la fem se produzca en un conductor en rotación. Uno de los primeros dispositivos de este tipo fué ideado por Faraday y denominado *dínamo de disco.*

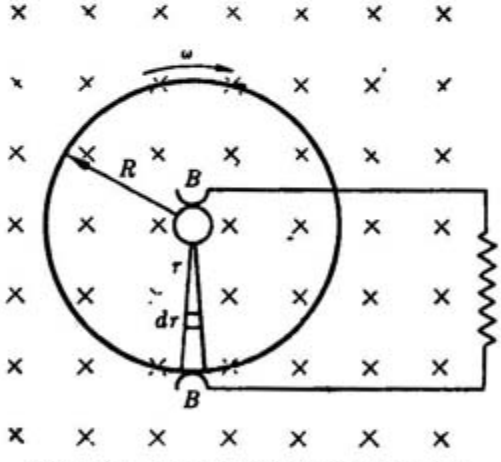


FIG. 12-8.—Dínamo de disco de Faraday.

La figura 12-8 representa un disco metálico de radio R girando alrededor de un eje que pasa por su centro. El disco se encuentra en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la figura. Las escobillas B-B hacen contacto deslizante con el eje y el borde del disco, y están conectadas a los bornes del circuito exterior. Consideremos un elemento radial del disco que se encuentra entre ambas escobillas. Un segmento de longitud dr se mueve perpendicularmente al disco con una velocidad

$$v = \omega r$$

y, por consiguiente, se induce en él una fem de magnitud

$$d\varepsilon = B\omega r\, dr.$$

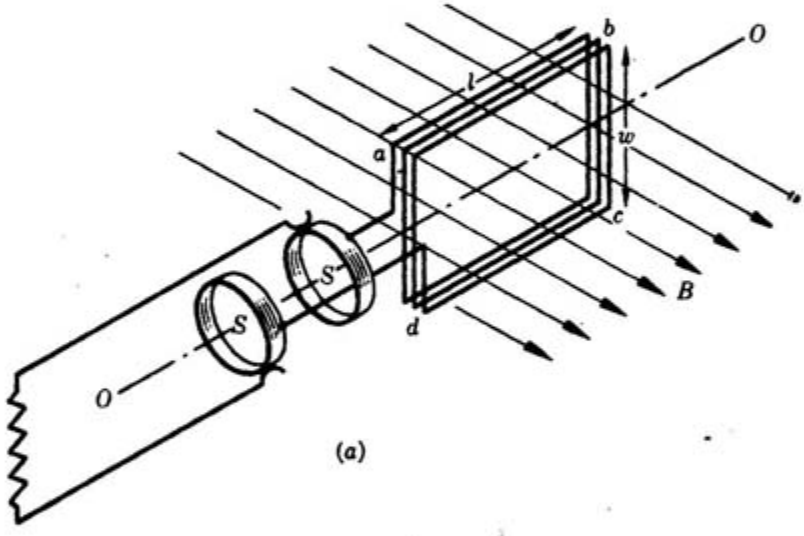
Puesto que los segmentos que se encuentran entre el eje y el borde están conectados en serie, la fem en el elemento radial completo es

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = B\omega \int_0^R r dr = \frac{B\omega R^2}{2} \qquad [12\text{-}8]$$

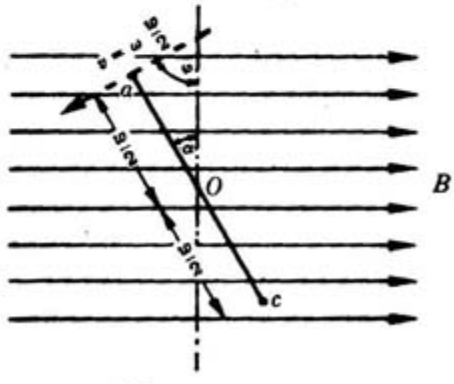
La misma fem se induce, naturalmente, en cualquier otro elemento radial, y puesto que todos estos elementos están en paralelo, el disco entero puede considerarse como un origen de fem de magnitud dada por la Ec. [12-8], siendo el borde uno de los terminales, y el eje, el otro.

A causa de las fuerzas electromotrices relativamente pequeñas que pueden obtenerse con este aparato, no se utiliza industrialmente.

12-6. Fem inducida sobre un cuadro en rotación.—El fundamento de la forma actual de dínamo está representado en la figura 12-9. Un



(a)



(b)

FIG. 12-9.—Fundamento de la dínamo.

cuadro rectangular *abcd* de N espiras muy próximas gira alrededor de un eje *OO*, que es perpendicular a un campo magnético uniforme cuya densidad de flujo es B. Los terminales del cuadro están conectados a anillos *rozantes S-S*, concéntricos con el eje del cuadro y que pueden girar con él, pero aislados entre sí. Escobillas apoyadas contra estos anillos conectan el cuadro al circuito exterior. El campo magnético de una dínamo industrial es creado por un electroimán, y el cuadro está devanado sobre un cilindro de hierro. Se denomina *inducido* el conjunto del cuadro y del cilindro. Para una descripción más detallada, véase el capítulo XVI.

El valor de la fem inducida en el cuadro de la figura 12-9 puede calcularse a partir, bien de la derivada del flujo que atraviesa el cuadro, o de las velocidades de sus lados perpendiculares al campo magnético.

En el instante en que el plano de la bobina forma un ángulo α con la normal al campo, según indica la figura 12-9(*b*), el flujo que atraviesa el cuadro es

$$\Phi = AB \cos \alpha,$$

siendo A el área abarcada por él. La derivada del flujo es, por tanto,

$$\frac{d\Phi}{dt} = -AB \operatorname{sen} \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

La fem inducida en cada vuelta de hilo del cuadro es igual a $-\dfrac{d\Phi}{dt}$, y si el cuadro tiene N espiras, la fem inducida valdrá

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = NAB\omega \operatorname{sen} \alpha, \qquad [12\text{-}9]$$

siendo $\omega = d\alpha/dt$ la velocidad angular del cuadro.

De otra forma, si w es la anchura y l la longitud de la espira, la velocidad tangencial de los lados *ab* y *cd* es

$$v = \omega \frac{w}{2}$$

y la fem engendrada por el movimiento será

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Blv \cos \varphi \\ &= \tfrac{1}{2}Bl\omega w \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$

(No existe fem producida por el movimiento de los lados *bc* y *da*. ¿Por qué?) Puesto que estas fuerzas electromotrices están dispuestas en serie, la fem neta en las N espiras será

$$\varepsilon = NBlw\omega \operatorname{sen} \alpha$$

y como

$$lw = A,$$

$$\varepsilon = NBA\omega \operatorname{sen} \alpha,$$

que coincide con la Ec. [12-9].

Es fácil demostrar que la Ec. [12-9] se aplica a un cuadro de forma cualquiera, que gire alrededor de un eje perpendicular a un campo magnético uniforme.

Según la Ec. [12-9], la fem es máxima cuando el plano del cuadro es paralelo al campo, y nula cuando es perpendicular al mismo. Esto está de acuerdo con el hecho de que en la posición paralela los lados *ab* y *cd* se mueven normalmente al campo, mientras que en la posición perpendicular, su movimiento es paralelo al mismo. La fem máxima es

$$\varepsilon_{máx} = NBA\omega.$$

Por consiguiente, la Ec. [12-9] puede escribirse:

$$\varepsilon = \varepsilon_{máx} \text{ sen } \alpha.$$

Si ω es constante,

$$\alpha = \omega t, \text{ o bien, } \alpha = 2\pi f t$$

y, por consiguiente,

$$\varepsilon = \varepsilon_{máx} \text{ sen } 2\pi f t, \quad [12\text{-}10]$$

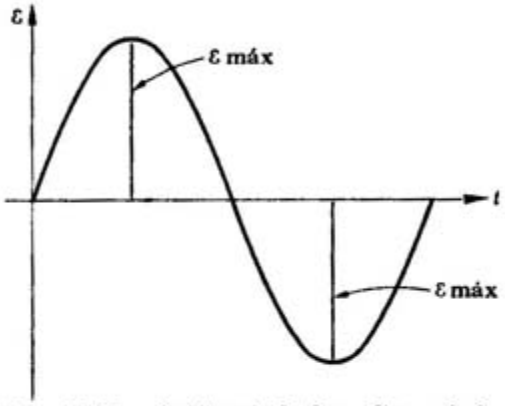


FIG. 12-10.—Gráfica de la fem alterna inducida en el cuadro de la figura 12-9.

que pone de manifiesto explícitamente la relación entre la fem instantánea y el tiempo t. La Ec. [12-9] se ha representado gráficamente en la figura 12-10. El cuadro giratorio es la forma más sencilla de *generador de corriente alterna* o *alternador*.

12-7. Generador de corriente continua o dínamo.—Un cuadro de hilo conductor que gira en un campo magnético desarrolla, como hemos visto, una fem alterna sinusoidal. Puede obtenerse fem de un solo sentido

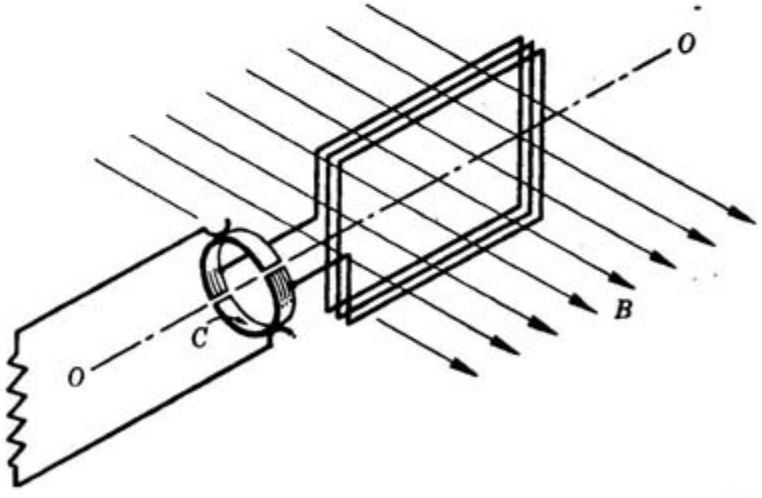


FIG. 12-11.—Anillo colector partido para obtener fem de un solo sentido.

conectando cada terminal del cuadro a la mitad de un anillo partido llamado *colector* o *conmutador*. [Véase Fig. 12-11.] En el instante en que se invierte en el cuadro la fem, se intercambian las conexiones al circuito exterior, y la fem entre los terminales, aunque pulsante, tiene siempre el mismo sentido.

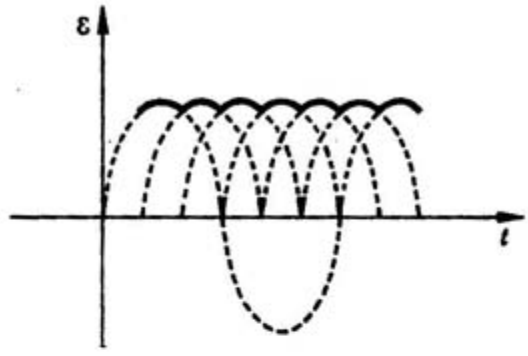


FIG. 12-12.—Fem de un solo sentido obtenida con un inducido compuesto de 6 cuadros con 12 segmentos conmutadores o delgas.

Se obtiene en la práctica una fem más uniforme arrollando un gran número de espiras sobre el inducido y poniendo en contacto cada espira con su propio par de segmentos de conmutación. Las escobillas hacen conexión con cada espira durante un tiempo muy corto que corresponde al instante en que la fem se encuentra próxima a su valor máximo. Así, si hubiera seis espiras en el inducido igualmente espaciadas sobre su circunferencia, se producirían seis fuerzas electromotrices como se indica por las curvas de trazos de la figura 12-12. La diferencia de potencial en los bornes del generador se representa por la línea de trazo grueso.

Nos encontramos ahora en condiciones de comprender por qué el inducido de un motor origina una fuerza contraelectromotriz, hecho que fué enunciado sin demostración en la sección 5-2. Un inducido de motor es simplemente una bobina (o bobinas) que giran de un modo continuo en un campo magnético. El inducido es obligado a girar por las fuerzas ejercidas sobre la corriente enviada a él por el generador de fem al cual están conectados los bornes del motor. Por el hecho de girar, se produce una fem dentro del inducido opuesta a la fem exterior. Cada motor es, pues, necesariamente también un generador.

12-8. Método de la bobina exploradora para la medida de flujo magnético.—Un método experimental muy útil para medir la densidad de flujo en un punto de un campo magnético, es el que vamos a describir a continuación. El aparato consiste en un galvanómetro balístico conectado por conductores flexibles a los terminales de una pequeña bobina, de espiras muy apretadas, llamada *bobina exploradora*. Supongamos en primer lugar, para mayor sencillez, que la bobina exploradora se coloca con su plano perpendicular a un campo magnético de densidad de flujo B. Si el área encerrada por la bobina es A, el flujo Φ a través de ella es $\Phi = BA$. Ahora bien: si se da rápidamente a la bobina un cuarto de vuelta alrededor de uno de sus diámetros, de modo que su plano quede paralelo al campo o se lleva rápidamente de su posición a otra en la cual se sabe que el campo es nulo, el flujo que la atraviesa disminuye rápidamente del valor BA a cero. Durante el tiempo que el flujo está disminuyendo, se induce en la bobina una fem de corta duración y se comunica al galva-

nómetro balístico un *impulso*. Se anota la desviación máxima alcanzada por el galvanómetro.

La corriente que pasa por el galvanómetro en cualquier instante es:

$$i = e/R,$$

siendo R la resistencia conjunta del galvanómetro y de la bobina exploradora, e la fem inducida instantánea e i la corriente instantánea. Puesto que $e = -N d\Phi/dt$, la corriente instantánea será:

$$i = -\frac{N}{R}\frac{d\Phi}{dt},$$

de donde:

$$idt = -\frac{N}{R}d\Phi,$$

$$\int_0^t idt = -\frac{N}{R}\int_\Phi^0 d\Phi = \frac{N\Phi}{R}$$

Pero

$$\int_0^t idt = q,$$

o sea,

$$q = N\Phi/R, \quad \Phi = Rq/N, \qquad [12\text{-}10]$$

y

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{Rq}{NA} \qquad [12\text{-}11]$$

La desviación máxima de un galvanómetro balístico es proporcional a la cantidad de electricidad que pasa por él. (Véase Sec. 10-4.) Por consiguiente, si se conoce esta constante de proporcionalidad, puede determinarse q y con ella obtener Φ y B.

En rigor, aunque este método proporciona correctamente el flujo total que atraviesa la bobina, sólo se mide la densidad *media* de flujo sobre el área de la bobina. Pero, si el área es suficientemente pequeña, el resultado se aproxima mucho a la densidad de flujo en el centro de la bobina, por ejemplo.

La Ec. [12-11] constituye aún otra posible *definición* de la inducción magnética además de las Ecs. [9-4], [11-3] y [11-22].

El estudio precedente supone que el plano de la bobina es inicialmente perpendicular a la dirección del campo. Si se está *explorando* un campo cuya dirección no es conocida de antemano, puede utilizarse el mismo aparato para encontrar la dirección, realizando una serie de experimentos en los cuales la bobina se coloca en un punto dado del campo y en distintas orientaciones, sacándola del campo desde cada orientación. La desviación del galvanómetro será máxima para aquella orientación particular en la cual el plano de la bobina sea perpendicular al campo. Por este método puede encontrarse la magnitud y dirección de un campo desconocido.

Puesto que la bobina exploradora está conectada constantemente a los terminales del galvanómetro, éste estará amortiguado y, por consiguiente, o tiene que calibrarse con la bobina conectada, o hay que realizar las correcciones que se mencionan en la sección próxima.

12-9. Amortiguamiento de un galvanómetro.—Supongamos un galvanómetro balístico conectado como indica la figura 12-13(*a*), para medir la cantidad de carga de un condensador. Cerremos momentáneamente el interruptor *S*, permitiendo al condensador descargarse a través del galvanómetro, y abrámoslo inmediatamente después. El impulso de corriente inicia la oscilación del cuadro del galvanómetro, y, dado que está girando en un campo magnético, se induce en él una fem. Sin embargo, la corriente a través de él es nula, puesto que el interruptor ha sido abierto y no hay

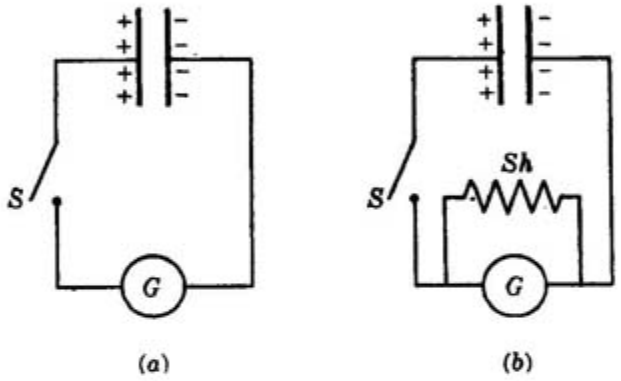


FIG. 12-13.—Descarga de un condensador a través de un galvanómetro balístico.

circuito cerrado. Sobre el movimiento del cuadro actúan únicamente la suspensión y el rozamiento. Si este último no existiese en absoluto, el cuadro oscilaría indefinidamente con movimiento armónico de rotación.

Supongamos ahora que la resistencia *Sh* de la figura 12-13(*b*) está conectada en forma de *shunt* entre los bornes del galvanómetro, y repitamos el experimento. El movimiento del galvanómetro quedará perturbado por dos razones. En primer lugar, una parte de la corriente de descarga del condensador pasará por el *shunt* y el impulso comunicado al cuadro será, en consecuencia, menor. En segundo lugar, el galvanómetro y el *shunt* forman ahora un circuito cerrado aun cuando el interruptor *S* esté abierto, de modo que habrá una corriente en el cuadro oscilante. Las fuerzas producidas sobre esta corriente engendrarán un par sobre el cuadro, y, en virtud de la ley de Lenz, el sentido de este par es tal que se opone al movimiento del carrete y ayuda a llevarlo a la posición de reposo. Desde el punto de vista energético, una parte de la energía cinética del cuadro oscilante se convierte en calor, desarrollado por las corrientes inducidas. Según esto, el movimiento del carrete es *armónico amortiguado.*

Es evidente que cuanto menor sea la resistencia del *shunt*, mayor será la corriente inducida y el amortiguamiento. Con un *shunt* de resistencia

suficientemente pequeña, el movimiento deja de ser oscilatorio, haciendo el galvanómetro una sola oscilación y volviendo lentamente a la posición de equilibrio. La resistencia particular para la cual el movimiento deja justamente de ser oscilatorio se denomina *resistencia externa de amortiguamiento crítico*, y cuando está *shuntado* con esta resistencia se dice que el galvanómetro tiene el *amortiguamiento crítico*. Con una resistencia mayor, el galvanómetro se halla *infraamortiguado*, y con una resistencia menor, *sobreamortiguado*. Puesto que la presencia del amortiguamiento reduce la oscilación máxima de un galvanómetro balístico, cuando existe amortiguamiento ha de generalizarse la sencilla teoría de la sección 10-4, la cual supone que toda la energía cinética del cuadro se convierte en energía potencial de la suspensión. El estudio completo demuestra que la cantidad de electricidad transportada es todavía proporcional al ángulo máximo de desviación, aunque con una constante de proporcionalidad distinta. Sin embargo, si el galvanómetro se calibra con la misma resistencia externa con que va a ser usado, la nueva constante queda automáticamente determinada.

En muchos instrumentos de cuadro pivotado, tales como amperímetros portátiles y voltímetros, el amortiguamiento necesario está *montado*, por decirlo así, en el cuadro móvil, arrollando dicho cuadro sobre una armazón ligera de aluminio. La propia armazón forma entonces un circuito cerrado y las corrientes inducidas en este circuito llevan rápidamente al reposo el cuadro oscilante.

12-10. Corrientes de Foucault.—Hasta aquí sólo hemos considerado ejemplos en los cuales las corrientes resultantes de las fem inducidas estaban obligadas a seguir trayectorias bien definidas suministradas por los hilos y aparatos del circuito exterior. En muchas piezas de aparatos eléctricos, sin embargo, hay masas metálicas móviles en un campo magnético, o situadas en un campo magnético variable, dando esto por resultado la producción de corrientes inducidas que circulan en el volumen

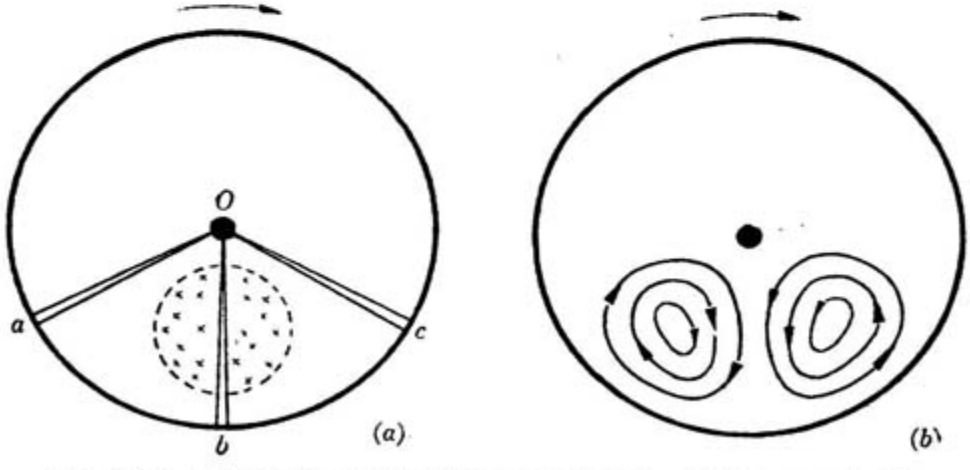


FIG. 12-14.—Corrientes de Foucault producidas en un disco en rotación.

del metal. A causa de su naturaleza general circulatoria se denominan *corrientes en torbellino* o *corrientes de Foucault.*

Consideremos un disco que gira en un campo magnético perpendicular a su plano, tal como el de la dínamo de disco, pero limitado a una porción determinada de su superficie, como se indica en la figura 12-14(*a*). El elemento *Ob* se mueve en el campo y se produce en él una fem inducida. Los elementos *Oa* y *Oc* no se encuentran en el campo y, por tanto, no se produce en ellos fem, aunque proporcionan, sin embargo, junto con todos los demás elementos localizados fuera del campo, trayectorias conductoras de retorno por las cuales las cargas positivas desplazadas a lo largo de *Ob* pueden volver desde *b* hacia *O*. Se establece, por tanto, una circulación general de corrientes en torbellino sobre el disco, en forma algo semejante a lo que se representa esquemáticamente en la figura 12-14(*b*).

La aplicación de la regla de la mano izquierda o de la ley de Lenz demuestra que las corrientes en la proximidad del radio *Ob* experimentan una fuerza que se opone al movimiento del disco, mientras que las corrientes de vuelta no experimentan tal fuerza, dado que se encuentran fuera del campo. La acción mutua entre las corrientes de Foucault y el campo se traduce, por tanto, en una acción de frenado sobre el disco. El aparato encuentra algunas aplicaciones técnicas y se conoce con el nombre de *freno por corrientes de Foucault.*

Como segundo ejemplo de corrientes de Foucault, consideraremos el núcleo de un transformador de corriente alterna, representado en la figura 12-15. La corriente alterna que circula por los arrollamientos del transformador crea un flujo alternativo dentro del núcleo, y se engendra una fem inducida en los arrollamientos del secundario a causa del cambio continuo de flujo que los atraviesa. Pero el núcleo de hierro es también conductor, y cualquier sección, tal como la *A-A*, puede considerarse como formada por cierto número de circuitos conductores cerrados, uno dentro de otro. El flujo a través de cada uno de estos circuitos cambia continuamente, de modo que hay una circulación de corrientes en torbellino en todo el volumen del núcleo, encontrándose las trayectorias en planos perpendiculares al flujo. Estas corrientes en torbellino son muy perjudiciales, a causa de la

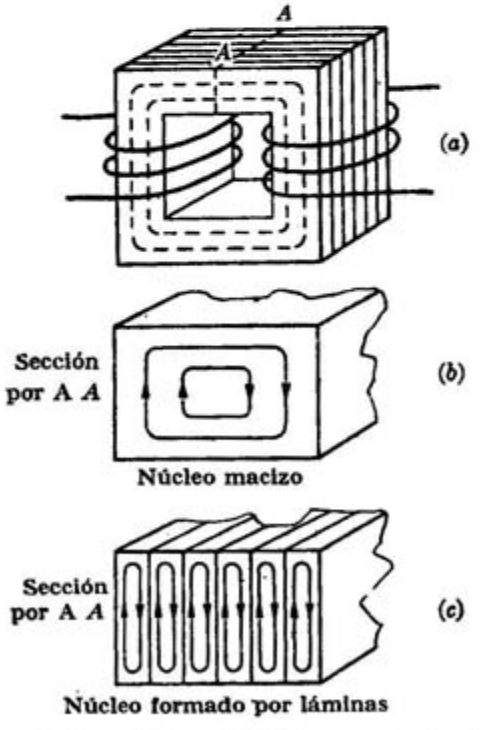


FIG. 12-15.—Reducción de las corrientes de Foucault utilizando un núcleo formado por láminas.

gran cantidad de calor, i^2R, que producen, y también a causa del flujo que ellas mismas crean.

En todos los transformadores reales, las corrientes de Foucault son eliminadas, aunque no completamente, por el empleo de un núcleo formado por láminas o capas delgadas. La resistencia eléctrica entre las superficies de las láminas (debida a una oxidación natural o a una capa de barniz aislante) reduce las corrientes de torbellino a cada lámina individual. La longitud de la trayectoria resultante aumenta grandemente, con el aumento consiguiente de la resistencia. Por tanto, aunque la fem inducida no se ha modificado, las intensidades y sus efectos caloríficos se han reducido al mínimo.

En los transformadores de núcleo abierto o carretes de inducción, se utiliza frecuentemente como núcleo un haz de hilos de hierro. En los pequeños transformadores en los cuales las pérdidas por corrientes de Foucault han de reducirse a un valor mínimo, se utilizan núcleos de hierro obtenidos a alta presión con hierro pulverizado.

PROBLEMAS

12-1. La barra conductora AB de la figura 12-16 hace contacto con las guías metálicas CA y DB. El aparato se encuentra en un campo magnético uniforme de densidad de flujo 500 mwb/m², perpendicular al plano de la figura. *a*) Calcúlese la magnitud y sentido de la fem inducida

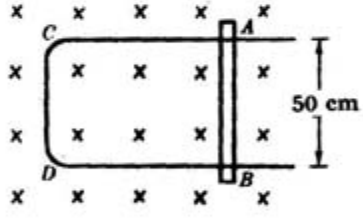


FIG. 12-16.

en la barra cuando se mueve hacia la derecha con una velocidad de 4 m/seg. *b*) Si la resistencia del circuito $ABCD$ es 0,2 Ω (supuesta constante), hállese la fuerza necesaria para mantener la barra en movimiento. No se tendrá en cuenta el rozamiento. *c*) Compárese la cantidad de trabajo mecánico por unidad de tiempo que realiza la fuerza (Fv) con la cantidad de calor desarrollada por segundo en el circuito (i^2R).

12-2. La figura 12-17 es una vista lateral de la misma barra y guías metálicas que aparecen en la 12-16, excepto que la inducción magnética forma un ángulo de 60° con el plano del cuadro $ABCD$.

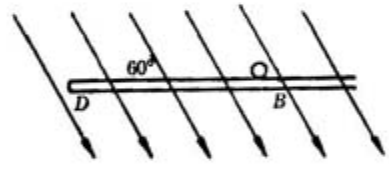


FIG. 12-17.

Calcúlese la fem inducida. La densidad de flujo es 500 mwb/m² y la velocidad de la barra 4 m/seg hacia la derecha.

12-3. En la figura 12-18, AB representa una varilla metálica que se mueve

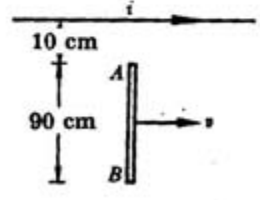


FIG. 12-18.

con una velocidad constante v de 2 m/seg paralelamente a un largo conductor rectilíneo en el cual la corriente i es de 40 A.

Calcúlese la fem inducida en la varilla. ¿Qué extremo de la varilla se encuentra a mayor potencial?

12-4. El largo conductor rectilíneo de la figura 12-19 transporta una corriente alterna dada por

$$i = I_m \operatorname{sen} \omega t,$$

siendo i la intensidad instantánea e I_m la intensidad máxima de la corriente. Ob-

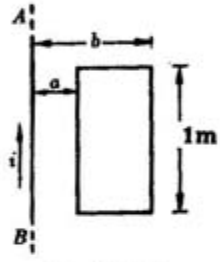


FIG. 12-19.

ténganse las expresiones de: *a*) el flujo instantáneo que atraviesa el contorno rectangular; *b*) la fem inducida en el contorno en cualquier instante.

12-5. Sobre un tubo de cartulina hay dos arrollamientos de hilo conductor aislado, como se indica en la figura 12-20. Los terminales *a* y *b* del arrollamiento *A* pueden conectarse a un generador de fem por intermedio de un interruptor inversor.

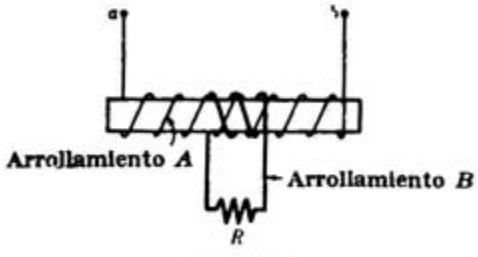


FIG. 12-20.

Dedúzcase si la corriente inducida circula en la resistencia R de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, en los siguientes casos: *a*) cuando la corriente en el arrollamiento *A* es de *a* a *b* y su intensidad aumenta; *b*) si la corriente va de *b* a *a* y disminuye; *c*) si la corriente es de *b* a *a* y aumenta.

12-6. La órbita de un electrón en un betatrón es una circunferencia de radio $R = 1$ m. Supongamos que el electrón se mueve en esta órbita con una velocidad tangencial $v = 3 \times 10^7$ m/seg. *a*) ¿Qué densidad de flujo se requiere para mantener el electrón en esta órbita si se supone constante el valor de la velocidad? *b*) Si la densidad de flujo es constante sobre el plano de la órbita y se aumenta a razón de 100 (wb/m²)/seg, ¿cuál es el voltaje equivalente que acelera el electrón en cada revolución?

12-7. Un disco metálico de 10 cm de radio gira con una velocidad angular de 3 600 rpm alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro. El disco se encuentra en un campo magnético uniforme de densidad de flujo 200 mwb/m², paralelo al eje del disco. *a*) Calcúlese la indicación de un milivoltímetro conectado a escobillas que hacen contacto con el borde y con el eje del disco. *b*) Represéntense en un diagrama los sentidos de rotación y del campo magnético si el borde del disco es positivo respecto a su eje.

12-8. Una espira circular de hilo conductor de 4 cm de radio gira con una velocidad angular de 1 800 rpm alrededor de un diámetro que es perpendicular a un campo magnético uniforme de densidad de flujo 0,5 wb/m². *a*) ¿Cuál es la fem instantánea inducida en la espira cuando su plano forma un ángulo de 30° con la dirección del flujo? *b*) ¿Cuál es el ángulo que forma el plano de la espira con el flujo, si la fem instantánea tiene el mismo valor que la fem media para una semirrevolución?

12-9. La sección de una bobina exploradora de espiras apretadas es 1,5 cm² y tiene 20 espiras con una resistencia total de 4 Ω. La bobina está conectada, mediante conductores de resistencia despreciable, a un galvanómetro balístico de 16 Ω de resistencia. Hállese la cantidad de electricidad que pasa por el galvanómetro cuando la bobina se lleva rápidamente fuera de la región en que $B = 1{,}8$ wb/² a un punto en el cual el

campo magnético es nulo. El plano de la bobina, cuando se encuentra en el campo, forma un ángulo de 60° con la inducción magnética.

12-10. Un solenoide de 50 cm de longitud y 8 cm de diámetro tiene un arrollamiento de 500 espiras. Una bobina formada por 20 espiras apretadas, de hilo aislado, rodea al solenoide en su punto medio, y los terminales de la bobina se conectan a un galvanómetro balístico. La resistencia conjunta de bobina, galvanómetro y conductores es 25 Ω. *a*) Calcúlese la cantidad de electricidad que pasa por el galvanómetro cuando la corriente en el solenoide disminuye rápidamente desde 3 A hasta 1 A. *b*) Trácese un esquema del aparato, indicando claramente los sentidos de los arrollamientos del solenoide, y de la bobina, y el de la corriente en el solenoide. ¿Cuál es el sentido de la corriente en la bobina cuando disminuye la corriente en el solenoide?

CAPÍTULO XIII

AUTOINDUCCIÓN

13-1. Inducción mutua.—Se ha demostrado que se induce una fem en un circuito fijo cuando aumenta o disminuye el flujo magnético ligado al circuito. Si la variación de flujo es producida por una corriente variable que circula en un segundo circuito, es cómodo expresar la fem inducida en función de esta corriente variable, en vez de utilizar la variación de flujo.

La figura 13-1 representa la sección de dos bobinas de espiras apretadas formadas por hilo conductor. La corriente que circula por el circuito 1 crea un campo magnético en la forma indicada, y una parte de su flujo atraviesa el circuito 2. Puesto que toda línea de inducción es una línea cerrada, cada línea que atraviesa el área del circuito 2 está ligada a este circuito del mismo modo que se encuentran unidos dos eslabones de una cadena. Si el circuito contiene N_2 espiras, y es Φ el flujo que atraviesa cada espira, el producto $N_2\Phi$ es el *flujo total ligado* al circuito 2. La unidad mks de flujo ligado es el *weber-vuelta*.

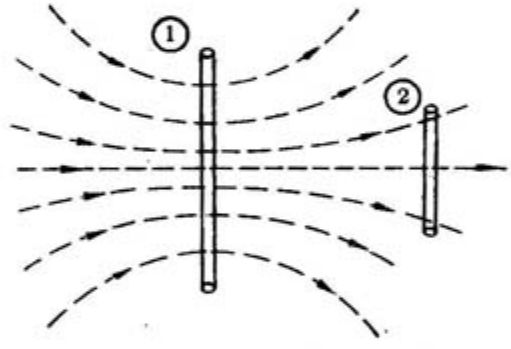


FIG. 13-1.—El flujo creado por la corriente que circula por la bobina (1) atraviesa la bobina (2).

Para una corriente dada que circula por el circuito 1, el flujo ligado al circuito 2 depende de la forma y dimensiones del dispositivo; pero, independientemente de éste, la densidad de flujo en cada punto del campo es directamente proporcional a la corriente que circula por el circuito 1.[1] Por tanto, *el flujo ligado al circuito 2 es proporcional también a la corriente que circula por el circuito 1, y puede escribirse:*

$$\Phi_{21} = Ki_1,$$

donde Φ_{21} significa el flujo ligado al circuito 2, debido a la corriente i_1 que circula por 1, y K es una constante de proporcionalidad.

Si varía i_1, variará también Φ_{21} y aparecerá en el circuito 2 una fem de valor

$$\varepsilon_2 = -N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -N_2K\frac{di_1}{dt},$$

siendo N_2 el número de espiras del circuito 2. (Se supone que el circuito 2

[1] Excepto si existen materiales ferromagnéticos. Véase Cap. XV.

es una bobina de espiras apretadas, de modo que cada una es atravesada por el mismo flujo.)

Representemos el producto N_2K por una sola constante M. Entonces,

$$\boxed{\varepsilon_2 = -M\frac{di_1}{dt}} \qquad [13\text{-}1]$$

o sea,

$$M = -\frac{\varepsilon_2}{di_1/dt} \qquad [13\text{-}2]$$

El factor M se denomina *coeficiente de inducción mutua*, o más brevemente, *inducción mutua* de los dos circuitos. La *inducción mutua* de dos circuitos puede definirse como *la razón de la fem inducida en un circuito a la derivada respecto al tiempo de la corriente en el otro.* La unidad de inducción mutua, en el sistema mks, es el voltio por amperio por segundo, que se denomina *henrio* en honor de Joseph Henry. La inducción mutua de dos circuitos es un *henrio si se induce en uno de los circuitos una fem de un voltio cuando la corriente en el otro varía a razón de un amperio por segundo.*

Puede demostrarse que se obtiene la misma inducción mutua cualquiera que sea el circuito que se tome como punto de partida. Esto es, en dos circuitos, entre los cuales existe inducción mutua, se induce la misma fem en uno cualquiera de ellos cuando la corriente en el otro varía en una proporción dada.

Puede deducirse otra expresión para la inducción mutua, del modo siguiente:

$$\varepsilon_2 = -N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}$$

Multiplicando por dt e integrando se obtiene:

$$N_2\Phi_{21} = Mi_1 + \text{constante.}$$

Dado que

$$\Phi_{21} = 0 \text{ cuando } i_1 = 0,$$

$$N_2\Phi_{21} = Mi_1,$$

y

$$\boxed{M = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1}} \qquad [13\text{-}3]$$

Según hemos dicho anteriormente, se tendrá también:

$$\boxed{M = \frac{N_1\Phi_{12}}{i_2}} \qquad [13\text{-}4]$$

Esto es, la *inducción mutua de dos circuitos es la razón del flujo ligado a uno cualquiera de ellos a la corriente que circula por el otro.* La inducción mutua será, naturalmente, grande cuando los circuitos estén dispuestos de modo que una gran parte del flujo creado por la corriente que circule por uno cualquiera de ellos atraviese el otro; p. ej., cuando ambos se encuentran devanados sobre el mismo núcleo de hierro. Como se deduce de las Ecs. [13-3] o [13-4], la inducción mutua puede expresarse también en *webers-vueltas por amperio.* La inducción mutua entre dos circuitos es un *henrio si al circular por uno cualquiera de ellos una corriente de un amperio, el flujo que atraviesa el otro es un weber-vuelta.*

EJEMPLO 1.—Un largo solenoide de longitud l, sección A y que tiene N_1 espiras, lleva devanada en su centro una pequeña bobina de N_2 espiras, como indica la figura 13-2. Calcúlese la inducción mutua de ambos circuitos.

Consideremos el largo solenoide como circuito 1. Una corriente i_1 que circula por él crea un campo en su centro

$$B = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{l}$$

El flujo a través de la sección central es:

$$\Phi = BA = \mu_0 \frac{AN_1 i_1}{l}$$

Puesto que todo este flujo atraviesa la bobina 2,

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} = \mu_0 \frac{AN_1 N_2}{l} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{voltios por (A/seg)} \\ \text{webers-vueltas/A} \\ \text{henrios} \end{array} \right\}$$

Si $l = 1$ m, $A = 10$ cm$^2 = 10^{-3}$ m^2, $N_1 = 1000$ espiras, $N_2 = 20$ espiras,

$$M = \frac{12{,}57 \times 10^{-7} \times 10^{-3} \times 1000 \times 20}{1}$$

$= 25{,}1 \times 10^{-6}$ henrios
$= 25{,}1 \times 10^{-3}$ milihenrios
$= 25{,}1$ microhenrios.

EJEMPLO 2.—¿Cuál es la fem inducida en el circuito 2 cuando la corriente en el circuito 1 varía a razón de 10 A/seg?

$$\varepsilon_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$

$$= -25{,}1 \times 10^{-6} \times 10 = -251\ \mu\text{V}.$$

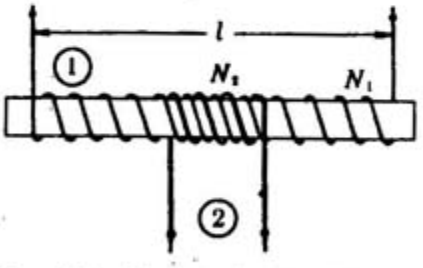


FIG. 13-2.—Pequeña bobina (2) devanada en el centro de una bobina (1) mucho más larga.

13-2. Autoinducción.—En los ejemplos anteriores de fem inducida, el flujo magnético ligado al circuito en el cual se induce la fem ha sido creado por algún agente exterior. Ahora bien: siempre que circula una

corriente por un circuito, esta corriente crea un campo que está ligado a su propio circuito y que varía cuando lo hace la corriente. En consecuencia, en cualquier circuito en el que varíe una corriente, se induce una fem a causa de la variación de su propio campo. (Fig. 13-3.) Esta fem se denomina *fuerza electromotriz autoinducida;* p. ej., cuando el contacto deslizante del reóstato (Fig. 13-3) se mueve hacia un lado o hacia otro, el flujo que atraviesa la espira varía e induce una fem en el circuito. Como en el caso de la inducción mutua, es cómodo referir la fem inducida a la corriente variable, en lugar de hacerlo al flujo.

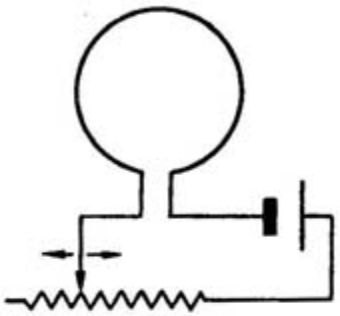


FIG. 13-3.—Circuito para demostrar la existencia de autoinducción.

El número de líneas de fuerza ligadas a un circuito dado, debido a la intensidad de la corriente que pasa por él, dependerá de la forma, dimensiones del circuito, número de espiras, etc. Como además la densidad de flujo en un punto cualquiera es directamente proporcional a la intensidad de la corriente que lo produce[1], el flujo resulta, por tanto, proporcional también a la intensidad. Según esto, podemos escribir:

$$\Phi = Ki,$$

siendo K un factor que depende de la forma, dimensiones, etc. del circuito, y que es constante para un circuito dado. Si el circuito tiene N espiras y todo el flujo atraviesa cada espira, se deduce:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -NK\frac{di}{dt},$$

o bien, si NK se representa por una sola letra L,

$$\boxed{\varepsilon = -L\frac{di}{dt}} \qquad [13\text{-}5]$$

La constante L se denomina *coeficiente de autoinducción*, o simplemente, *autoinducción* del circuito. Cuando ε se expresa en voltios y di/dt en amperios por segundo, L viene medido en *henrios.*

El coeficiente de autoinduccion de un circuito es un henrio si se induce en el circuito una fem de un voltio cuando la corriente en el mismo varía a razón de un amperio por segundo.

Como en el caso de la inducción mutua, otro punto de vista consiste en igualar las expresiones de la fem autoinducida:

$$N\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt},$$

[1] Excepto si hay presentes sustancias ferromagnéticas. Véase Cap. XV.

de lo cual se deduce:

$$N\,d\Phi = L\,di$$

y

$$N\Phi = Li + \text{constante}.$$

Dado que $\Phi = 0$ para $i = 0$,

$$N\Phi = Li,$$

$$\boxed{L = \frac{N\Phi}{i}} \qquad [13\text{-}6]$$

Puede definirse, por consiguiente, la autoinducción de un circuito como *el flujo ligado por unidad de intensidad* (en unidades mks, número de webers-vueltas por amperio). La autoinducción de un circuito es *un henrio si una intensidad de corriente de un amperio produce en el circuito un flujo ligado de un weber-vuelta.*

Un circuito, o una parte de circuito que se comporta de este modo, se denomina *autoinducción* y se representa por el símbolo —▬▬—.

El sentido de la fem de autoinducción se encuentra mediante la ley de Lenz. La *causa* de la fem es un aumento o disminución de la intensidad de la corriente. Si la intensidad de la corriente aumenta, el sentido de la fem inducida es opuesto al de la corriente. Si la corriente disminuye, la fem y la corriente son del mismo sentido. De este modo, la fem inducida se opone a la *variación* de la intensidad de la corriente, y no a la corriente misma (véase Fig. 13-4).

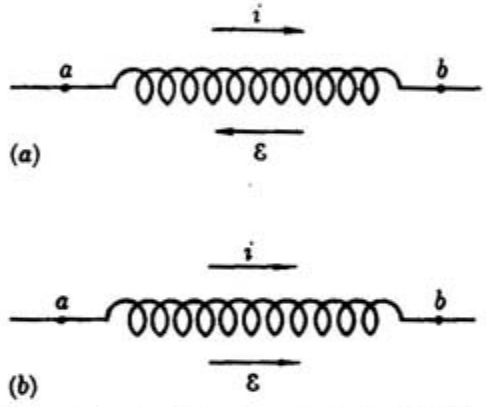


FIG. 13-4.—Sentido de una fem autoinducida: (*a*) i aumenta, ε es opuesta a i, el punto a está a un potencial superior al de b. (*b*) i disminuye, ε e i son del mismo sentido, b está a un potencial superior al de a. ($R = 0$).

EJEMPLO 1.—Calcúlese la autoinducción de un arrollamiento toroidal de longitud media l y sección A, que tiene N espiras.

La densidad de flujo dentro del volumen encerrado por el arrollamiento es:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l},$$

y el flujo,

$$\Phi = BA = \mu_0 \frac{ANi}{l}$$

Puesto que todo el flujo atraviesa cada espira,

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \mu_0 \frac{AN^2}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{voltios por (A/seg)} \\ \text{webers-vueltas/A} \\ \text{henrios} \end{array} \right\}$$

Sea $l = 1$ m, $A = 10$ cm$^2 = 10^{-3}$ m^2, $N = 1000$ vueltas. Entonces

$$L = \frac{12{,}57 \times 10^{-7} \times 10^{-3} \times 10^{6}}{1}$$

$$= 1{,}26 \times 10^{-3} \text{ henrios}$$

$$= 1{,}26 \text{ milihenrios.}$$

EJEMPLO 2.—Si la corriente en la bobina anterior aumenta a razón de 10 amperios por segundo, calcúlese el valor y sentido de la fem autoinducida.

$$\varepsilon = -L\frac{di}{dt}$$

$$= -1{,}26 \times 10^{-3} \times 10 = -12{,}6 \text{ mV.}$$

Puesto que la corriente está aumentando, el sentido de esta fem es opuesto al de la corriente.

13-3. Producción de una corriente en un circuito inductivo.—Una resistencia inductiva, por la cual circula una corriente que aumenta de intensidad, se convierte en un generador de fem cuyo sentido es opuesto al de la corriente. Como consecuencia de esta fuerza contraelectromotriz, la intensidad de la corriente en un circuito inductivo no alcanzará su valor final en el instante mismo de cerrar el circuito, sino que aumentará en una proporción que depende de la autoinducción y resistencia del mismo. Existe una gran analogía entre el incremento de la corriente en una autoinducción y el aumento de carga de un condensador. (Véase Sec. 8-5.)

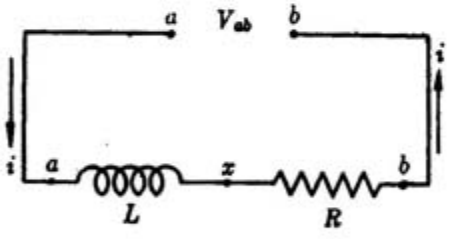


FIG. 13-5.—Diferencia de potencial constante a través de una autoinducción y una resistencia en serie.

La figura 13-5 representa una autoinducción sin resistencia y una resistencia no inductiva en serie, entre dos puntos mantenidos a una diferencia de potencial constante V_{ab}. Sea i la intensidad de la corriente en el circuito un cierto instante después de efectuar la conexión, y di/dt su derivada. Se tiene

$$V_{ab} = \Sigma iR - \Sigma\varepsilon,$$

$$\varepsilon = -L\frac{di}{dt}$$

Combinando estas ecuaciones resulta:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i - \frac{V_{ab}}{L} = 0, \qquad [13\text{-}7]$$

y, por tanto,

$$\boxed{i = \frac{V_{ab}}{R}\,(1 - \varepsilon^{-Rt/L})} \qquad [13\text{-}8]$$

Puesto que V_{ab}/R es igual a la corriente final en el circuito, o sea I, podemos escribir:

$$i = I\,(1 - \varepsilon^{-Rt/L}). \qquad [13\text{-}9]$$

En la figura 13-6 aparece representada una gráfica de la Ec. [13-9]. Como en el caso de un conjunto de resistencia y condensador, se requiere un tiempo infinito para que la corriente alcance su valor final; pero, para cualquier valor de R/L que pueda encontrarse en la práctica, basta un tiempo muy corto para que la corriente alcance esencialmente su valor final.

La *constante de tiempo* del circuito, o sea, el tiempo para que la intensidad aumente hasta $1 - \frac{1}{\varepsilon}$ de su valor final es:

$$t = \frac{L}{R}$$

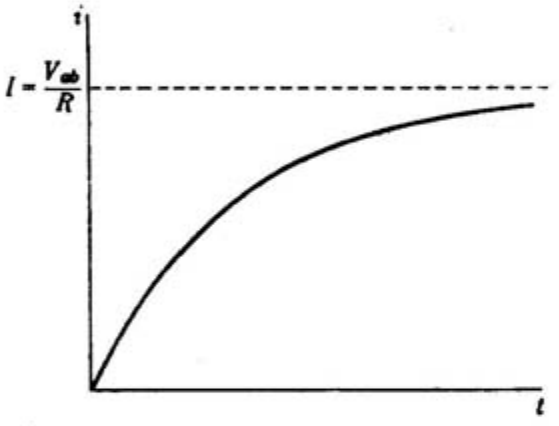


FIG. 13-6.—Establecimiento de la corriente en un circuito que contiene autoinducción y resistencia.

Por consiguiente, para un circuito con una resistencia dada, este tiempo es tanto mayor cuanto más elevado es el valor de la autoinducción, y viceversa. Así aunque la gráfica que representa i en función de t tiene la misma forma general, cualquiera que sea la autoinducción, la corriente crece rápidamente hasta su valor final si L es pequeño, y lentamente si L es grande.

La diferencia de potencial entre los bornes de la autoinducción de la figura 13-5 es:

$$V_{ax} = \Sigma iR - \Sigma\varepsilon = L\frac{di}{dt}$$

Diferenciando la Ec. [13-9] para obtener di/dt, encontramos:

$$V_{ax} = V_{ab}\varepsilon^{-Rt/L} \qquad [13\text{-}10]$$

El voltaje completo V_{ab} de la línea aparece, por tanto, en los terminales de la autoinducción en el instante de cerrar el circuito ($t = 0$), y la diferencia de potencial entre sus bornes disminuye exponencialmente hacia cero cuando la corriente aumenta.

En el estudio anterior se han supuesto, para simplificar, como unidades independientes la autoinducción y la resistencia del circuito. En realidad, cualquier autoinducción tendrá cierta resistencia ligada a ella. Los puntos a y b de la figura 13-5 pueden considerarse como los bornes de la autoinducción, y V_{ab} como la diferencia de potencial entre ellos. Las diferencias de potencial V_{ax} y V_{xb} consideradas separadamente pierden su significado. La misma expresión se obtiene para la corriente en el circuito. Si hay una resistencia exterior además de la que corresponde a la autoinducción, el término R en la Ec. [13-9] se refiere a la resistencia equivalente de todo el circuito.

EJEMPLO.—Una autoinducción de 3 henrios y resistencia 6 Ω se conecta a los bornes de una batería de fem 12 V y resistencia interna despreciable. *a*) Calcúlese el crecimiento inicial de la intensidad de la corriente en el circuito. *b*) Determínese el crecimiento de la corriente en el instante en que la intensidad es 1 A. *c*) ¿Cuál es la intensidad instantánea de la corriente, 0,2 seg después de cerrado el circuito?

a) En virtud de la Ec. [13-7],

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_{ab}}{L} - \frac{R}{L} i.$$

La intensidad inicial de la corriente es cero. Por consiguiente, el crecimiento inicial de la intensidad de corriente será:

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_{ab}}{L} = \frac{12}{3} = 4 \text{ A/seg.}$$

b) Cuando $i = 1$ A,

$$\frac{di}{dt} = \frac{12}{3} - \frac{6}{3} \times 1 = 2 \text{ A/seg.}$$

c) En virtud de la Ec. [13-8],

$$i = \frac{V_{ab}}{R}(1 - \varepsilon^{-Rt/L}) = \frac{12}{6}(1 - e^{-6 \times 0,2/3}) = 2\,(1 - \varepsilon^{-0,4})$$

$$= 2\,(1 - 0,672) = 0,65 \text{ A.}$$

13-4. Energía asociada a una autoinducción.—Cuando se cierra el interruptor de la figura 13-7, la corriente en el circuito aumenta desde cero hasta un valor final V_{ab}/R. En el instante en que la corriente es i y crece en la proporción di/dt,

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xb} = L\frac{di}{dt} + Ri.$$

Por consiguiente, la potencia suministrada al circuito en este instante es:

$$P = iV_{ab}, \text{ o sea:}$$

$$P = Li\frac{di}{dt} + i^2R. \qquad [13\text{-}11]$$

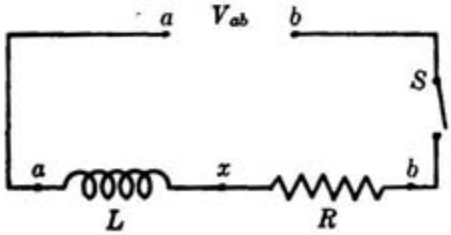


FIG. 13-7.—En cualquier instante después de cerrado el interruptor S, $V_{ab} = L\frac{di}{dt} + Ri$.

El último término del segundo miembro es la potencia suministrada a (o sea, la cantidad de calor desarrollada en) la resistencia. El primero es la potencia suministrada a la autoinducción. En consecuencia, se suministra energía a la autoinducción mientras la corriente está aumentando. Cuando la corriente ha alcanzado su valor final estacionario, $di/dt = 0$ y cesa el suministro de potencia a la autoinducción. La energía que ha sido suministrada a la autoinducción se utiliza para establecer el campo magnético que rodea a ésta, quedando *almacenada* en dicho campo como energía potencial. Si se abre el interruptor, desaparece el campo magnético y la energía pasa de nuevo al circuito. Esta energía cedida es la que mantiene el arco que se observa a veces cuando se abre un interruptor en un circuito inductivo. La energía asociada al campo magnético de la corriente transportada por una autoinducción puede calcularse del modo siguiente. Según la Ec. [13-11], la potencia instantánea suministrada a la autoinducción es:

$$P = \frac{dW}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$

Por tanto,

$$dW = Li\,di,$$

y

$$W = \int dW = \int_0^I Li\,di,$$

o sea

$$\boxed{W = \tfrac{1}{2}LI^2} \qquad [13\text{-}12]$$

siendo W la energía suministrada mientras la corriente aumenta desde cero hasta el valor I. Se cede la misma cantidad de energía cuando la corriente desciende a cero (véase para un estudio más detenido la Sec. 17-2).

En la figura 13-7 se han representado la autoinducción y la resistencia del circuito como unidades independientes. El mismo estudio se aplica a una bobina de resistencia R y autoinducción L.

13-5. Autoinducciones en serie.—Las autoinducciones, como otros dispositivos eléctricos, se conectan frecuentemente en serie, en paralelo o bien formando redes más complicadas. La autoinducción *equivalente* a cualquier red se define como la razón de la fem total inducida (la de autoinducción más la de inducción mutua) entre los bornes de la red, a la derivada respecto al tiempo de la corriente que origina dicha fem. Sólo consideraremos aquí el caso de autoinducciones en serie.

Para el caso especial de dos bobinas cuyas autoinducciones son, respectivamente, L_1 y L_2 y entre las cuales la inducción mutua es M, la autoinducción equivalente a ambas, conectadas en serie, puede deducirse fácilmente como sigue. Supongamos que las bobinas están colocadas como indica la figura 13-8, de modo que el flujo que atraviesa cada una, debido a la corriente que circula por la otra, tiene la misma dirección

que el flujo debido a la corriente de la propia bobina. Entonces, si la corriente varía, ambas fuerzas electromotrices, de autoinducción y de inducción mutua, tendrán el mismo sentido:

$$\text{fem en la bobina 1} = \text{fem autoinducida} + \text{fem de inducción mutua}$$

$$= L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt};$$

$$\text{fem en la bobina 2} = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt};$$

$$\text{fem neta} = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt},$$

y, en virtud de su definición, la autoinducción equivalente es:

$$L = L_1 + L_2 + 2M. \qquad [13\text{-}13]$$

Si una de las bobinas está invertida, de modo que el flujo que atraviesa cada una debido a la corriente que circula por la otra tiene sentido opuesto al flujo de la propia bobina, las fuerzas electromotrices de autoinducción y de inducción mutua tienen en cada bobina sentidos opuestos. De aquí,

$$\text{fem neta} = \left[L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}\right] + \left[L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}\right]$$

y

$$L = L_1 + L_2 - 2M. \qquad [13\text{-}14]$$

Evidentemente, si la forma y dimensiones del circuito son tales que ninguna fracción del flujo ligado a una bobina atraviesa la otra, la inducción mutua es nula, y la autoinducción equivalente es simplemente la suma de las autoinducciones de ambas.

Las Ecs. [13-13] y [13-14] indican la posibilidad de construir una *autoinducción variable* conectando en serie dos bobinas, una de las cuales pueda girar respecto a la otra. Así, aunque L_1 y L_2 son constantes, M varía con la posición angular de la bobina móvil. Una construcción usual consiste en devanar ambas bobinas sobre moldes esféricos, uno de los cuales puede girar dentro del otro. La autoinducción (equivalente) del dispositivo varía entonces continuamente en el intervalo comprendido entre $L_1 + L_2 + 2M$ y $L_1 + L_2 - 2M$.

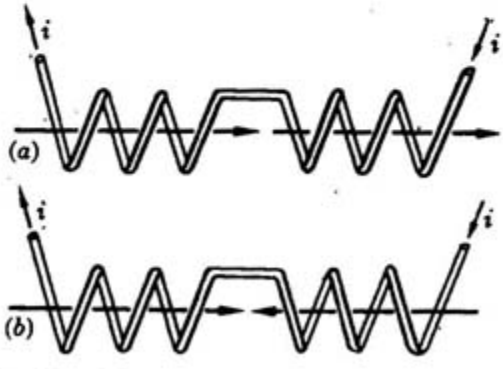
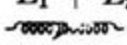


FIG. 13-8.—Dos autoinducciones en serie. (*a*) Flujos del mismo sentido. (*b*) Flujos de sentido opuesto.

El símbolo  representa una autoinducción variable.

Un método experimental para determinar la inducción mutua de dos bobinas consiste en medir la autoinducción equivalente de ambas dispuestas en serie, primero de modo que se sumen sus flujos y después con sus flujos opuestos. Denominando a estos valores L' y L'', respectivamente, se deduce:

$$M = \frac{L' - L''}{4} \qquad [13\text{-}15]$$

Si ambas bobinas están devanadas sobre el mismo núcleo de hierro, como sucede en un transformador, o si estando las espiras muy próximas, una bobina se encuentra a continuación de la otra, todo el flujo creado por una de ellas atraviesa prácticamente a todas las espiras de la otra. Ahora bien, por definición,

$$L_1 = \frac{N_1\Phi_1}{i_1}, \quad L_2 = \frac{N_2\Phi_2}{i_2};$$

$$M = \frac{N_1\Phi_{12}}{i_2} = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1}$$

Pero $\Phi_{12} = \Phi_2$, y $\Phi_{21} = \Phi_1$,

como resulta evidente de la significación de los subíndices.

Por tanto, $M = \dfrac{N_1\Phi_2}{i_2}$,

y $M = \dfrac{N_2\Phi_1}{i_1}$

Multiplicando estas ecuaciones y reagrupando factores se obtiene:

$$M^2 = \frac{N_1\Phi_1}{i_1} \times \frac{N_2\Phi_2}{i_2} = L_1L_2.$$

Por consiguiente, $M = \sqrt{L_1L_2}$. [13-16]

La inducción mutua de ambas bobinas es la media geométrica de sus autoinducciones.

En la práctica, la autoinducción y la inducción mutua se miden ordinariamente con ayuda de un puente de Wheatstone modificado, usando corriente alterna en lugar de continua. (Véase cualquier texto sobre medidas eléctricas.) La inducción mutua de dos circuitos puede medirse también con ayuda de un galvanómetro balístico. La figura 13-9 representa los dos circuitos cuya inducción mutua ha de

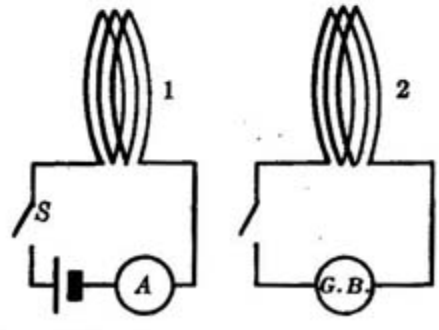


FIG. 13-9.—Aparato para medir la inducción mutua de dos circuitos.

medirse. Al cerrar el interruptor S, la corriente en el circuito 1 aumenta rápidamente desde cero hasta un valor I_1, que puede medirse mediante el amperímetro A. Durante el establecimiento de esta corriente se ha inducido una fem e_2 en el circuito 2. La corriente en el circuito 2 es, por consiguiente, en cualquier instante,

$$i_2 = \frac{e_2}{R_2},$$

siendo R_2 la resistencia total del circuito 2.
Pero

$$e_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Por tanto,

$$i_2 = \frac{N_2}{R_2} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{M}{R_2} \frac{di_1}{dt} + \frac{L_2}{R_2} \frac{di_2}{dt};$$

$$i_2 dt = \frac{N_2}{R_2} d\Phi = \frac{M}{R_2} di_1 + \frac{L_2}{R_2} di_2;$$

y

$$q = \int_0^\infty i_2 dt = \frac{N_2}{R_2} \int_0^{\Phi_{21}} d\Phi = \frac{M}{R_2} \int_0^{I_1} di_1 + \frac{L_2}{R_2} \int_0^0 di_2$$
$$= \frac{N_2}{R_2} \Phi_{21} = \frac{M}{R_2} I_1,$$

siendo Φ_{21} el flujo final que atraviesa el circuito 2 cuando i_1 ha alcanzado su valor final I_1. Los límites de la última integral son ambos cero, debido a que las corrientes inicial y final en el circuito 2 son nulas. En consecuencia, si se mide la desviación máxima y el galvanómetro ha sido calibrado previamente, pueden calcularse tanto Φ_{21} como M.

PROBLEMAS

13-1. Una bobina circular A, de 50 espiras de hilo fino y 4 cm² de sección transversal, está colocada en el centro de una bobina circular B, de 20 cm de radio y que tiene 100 espiras. Los ejes de ambas bobinas coinciden. *a*) ¿Cuál es su inducción mutua? *b*) ¿Cuál es la fem inducida en la bobina A cuando la corriente en la bobina B disminuye a razón de 50 A/seg? *c*) ¿Cuál es la derivada respecto al tiempo del flujo que atraviesa la bobina A en este instante? *d*) Dibújese un esquema e indíquense claramente los sentidos relativos de la corriente en la bobina B y de la fem inducida en la bobina A.

13-2. En la figura 13-10, A y B son dos pequeñas bobinas de espiras apretadas cuyos planos son paralelos entre sí y perpendiculares a la recta OO. *a*) ¿Qué ángulo θ debe formar con OO la recta

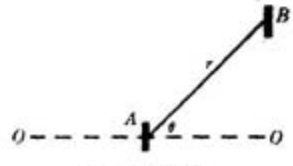


FIG. 13-10.

que une los centros para que sea mínima la inducción mutua entre las bobinas? Se considera que la distancia r es grande comparada con los radios de las bobinas. *b*) Para una distancia dada r, ¿cuál es el valor de θ para el cual la inducción mutua es máxima?

13-3. Una bobina rectangular de espiras apretadas y de dimensiones 10 cm por 20 cm, tiene 100 espiras. La bobina está próxima a un largo conductor rectilíneo que forma parte de un circuito cerrado, siendo los lados más largos de la bobina paralelos al conductor. El resto del segundo circuito se encuentra alejado de la bobina. Hállese la inducción mutua

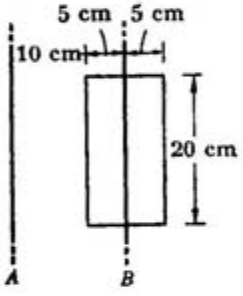


FIG. 13-11.

de los circuitos: *a*) cuando el conductor rectilíneo dista 10 cm del lado más próximo de la bobina, como en A, figura 13-11; *b*) cuando el hilo conductor se encuentra en la posición B de la misma figura.

13-4. La autoinducción de una bobina formada por 100 espiras apretadas es 5 milihenrios. ¿Cuál es el flujo que atraviesa la bobina cuando la corriente que circula por ella es 10 mA?

13-5. Demúestrese que la constante de tiempo de una autoinducción es L/R.

13-6. La resistencia de una autoinducción de 10 henrios es 200 Ω. La autoinducción se conecta de pronto a una diferencia de potencial de 10 V. *a*) ¿Cuál es la intensidad final constante de la corriente en la autoinducción? *b*) ¿Cuál es el crecimiento inicial de la intensidad de la corriente? *c*) ¿Cuál es el crecimiento de la intensidad de la corriente cuando su valor es la mitad de la intensidad final? *d*) ¿Qué tiempo ha transcurrido después de cerrado el circuito hasta que la intensidad es igual al 99 % de su valor final? *e*) Calcúlese la intensidad de la corriente en los siguientes instantes, después de cerrado el circuito: 0, 0,025 seg, 0,05 seg, 0,075 seg. 0,10 seg. Represéntense los resultados en una gráfica.

13-7. Una autoinducción de resistencia R y coeficiente de autoinducción L, se conecta en serie con una resistencia no inductiva de resistencia R_0, a una diferencia de potencial constante V_{ab} (Fig. 13-12). *a*) Calcúlese la expresión de la diferencia de potencial V_{cb} entre

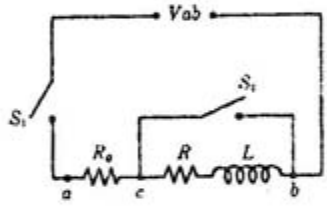


FIG. 13-12.

los extremos de la autoinducción en un instante cualquiera t después de cerrar el interruptor S_1. *b*) Sea $V_{ab} = 20$V, $R_0 = 50\ \Omega$, $R = 150\ \Omega$, $L = 5$ henrios. Efectúese el cálculo para algunos puntos y constrúyanse gráficas de V_{ac} y V_{cb} correspondientes a un intervalo de tiempo entre cero y dos veces la constante de tiempo del circuito.

13-8. Después que la intensidad de la corriente en el circuito de la figura 13-12 ha alcanzado su valor final constante, se cierra el interruptor S_2, quedando así cortocircuitada la autoinducción. ¿Cuál será el valor y sentido de la corriente en S_2, 0,01 seg después de cerrar el interruptor S_2?

13-9. Se hace referencia a la autoinducción del ejemplo al final de la sección 13-3. *a*) ¿Cuál es la potencia suministrada a la autoinducción en el instante en que la intensidad de la corriente

que circula en ella es 0,5 A? *b*) ¿Cuál es la cantidad de calor producida por segundo en este instante? *c*) ¿Cuánto aumenta por segundo en este instante la energía del campo magnético? *d*) ¿Qué cantidad de energía ha quedado almacenada en el campo magnético cuando la intensidad de la corriente ha alcanzado su valor final constante?

13-10. Se hace referencia al ejemplo 1 de la sección 13-1. Sea 10 Ω la resistencia de la bobina 2. Si los bornes de esta bobina se conectan a un galvanómetro balístico de resistencia 20 Ω, ¿cuántos culombios circulan por el circuito del galvanómetro cuando la corriente en el solenoide aumenta rápidamente de cero a 5 A?

CAPÍTULO XIV

PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA

14-1. Introducción.—En los capítulos precedentes hemos estudiado los campos magnéticos creados por cargas móviles o por corrientes que circulan en los conductores, cuando las cargas o los conductores están en el aire (o, hablando rigurosamente, en el vacío). Todos sabemos, sin embargo, que las piezas de los equipos técnicos tales como transformadores, motores y generadores, que utilizan los campos magnéticos creados por una corriente, contienen siempre hierro o una aleación de hierro en su estructura, con el doble fin de aumentar el flujo magnético y de limitarlo a una región deseada. Además, mediante el uso de imanes permanentes, como sucede en los galvanómetros o micrófonos de imán permanente, los campos magnéticos pueden producirse sin circulación aparente de carga.

En consecuencia, vamos a considerar a continuación las propiedades magnéticas que hacen tan útiles al hierro y a algunas pocas sustancias ferromagnéticas. Veremos que las propiedades magnéticas no están reducidas a las sustancias ferromagnéticas, sino que las presentan también *todas* las demás sustancias (en mucha menor escala, sin duda). Desde el punto de vista de la Electrotecnia, las sustancias ferromagnéticas son las de mayor interés, pero es también importante el estudio de las propiedades magnéticas de otras sustancias, porque ofrecen un medio más de penetrar en la naturaleza íntima de la materia en general.

La existencia de propiedades magnéticas en una sustancia puede demostrarse suspendiendo mediante un hilo fino una pequeña muestra esférica de la misma y colocándola entre los polos de un potente electroimán. Todos sabemos que si la muestra es de hierro o de una sustancia *ferromagnética*, será atraída hacia la región en que el campo es más intenso. No es tan conocido el hecho de que cualquier sustancia será siempre influída por el campo, aunque en un grado extremadamente pequeño comparado con el correspondiente a un material tal como el hierro. Mientras que unas sustancias, como este metal, son forzadas a entrar en la región de intensidad máxima del campo, otras son obligadas a dirigirse hacia la región en que el campo es más débil. Las primeras se denominan *paramagnéticas* y las segundas, *diamagnéticas*. Todas las sustancias, incluso los líquidos y los gases, quedan comprendidas dentro de uno de estos dos grupos. Naturalmente, los líquidos y los gases han de estar contenidos dentro de algún recipiente, y habrán de hacerse las debidas correcciones para tener en cuenta las propiedades del recipiente y las del medio (generalmente, aire) en el cual se encuentra la muestra.

14-2. Origen de los efectos magnéticos.—Nuestra descripción de las propiedades eléctricas de una sustancia dada en el capítulo VII se basó en el comportamiento de una muestra en forma de lámina, introducida en el campo creado por dos placas paralelas con cargas contrarias. El campo eléctrico está enteramente limitado a la región comprendida entre las placas si su separación es pequeña, y, por tanto, una lámina situada entre las mismas ocupará por completo todos los puntos del espacio en el cual exista campo eléctrico. Sin embargo, una muestra de esta forma no es tan adecuada para el estudio de los efectos magnéticos, puesto que las líneas de inducción magnética son líneas cerradas y no hay modo de producir un campo magnético que esté reducido a la región comprendida entre dos superficies muy próximas. En cambio, el campo magnético dentro de un enrollamiento toroidal de espiras próximas, está limitado completamente al espacio encerrado por el enrollamiento. Según esto, tomaremos este campo para estudiar las propiedades magnéticas, teniendo la muestra forma de anillo sobre cuya superficie se arrolla el hilo conductor. Tal muestra se denomina *anillo de Rowland*, desde que Rowland hizo uso de él para realizar su trabajo experimental y teórico sobre electricidad y magnetismo. El enrollamiento de hilo que se hace alrededor de la muestra se denomina *magnetizante* y la corriente que circula por él, *corriente magnetizante*.

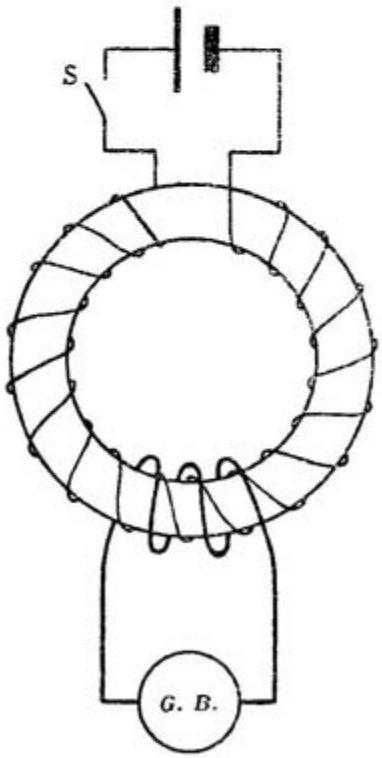


FIG. 14-1.—Muestra magnética en forma de anillo, con un arrollamiento toroidal.

La densidad de flujo magnético dentro del espacio encerrado por un arrollamiento toroidal, *en el vacío*, es (véase sección 11-6):

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l} \qquad [14\text{-}1]$$

Supongamos ahora que la misma bobina está devanada sobre un anillo de Rowland, y que un segundo arrollamiento está colocado sobre el anillo como indica la figura 14-1, con sus terminales conectados a un galvanómetro balístico. La densidad de flujo dentro del anillo puede medirse, como se explicó en la sección 12-8, abriendo rápidamente el interruptor S y anulando la corriente magnetizante. Si se hace esto, *la densidad de flujo determinada por la desviación del galvanómetro balístico no coincide con la calculada mediante la Ec.* [14-1]. Si el núcleo es una sustancia ferromagnética, el valor de la densidad de flujo será enormemente mayor; si es una sustancia paramagnética será ligeramente mayor, y si es una

sustancia diamagnética será ligeramente menor que el valor calculado. Las diferencias en los dos últimos casos son, de hecho, tan pequeñas, que este método no es práctico para investigar sobre estas sustancias, pero su fundamento es más sencillo que el de otros métodos y así no tendremos en cuenta las dificultades experimentales.

El aumento o disminución de flujo en el núcleo, por encima o por debajo del debido a la corriente magnetizante, procede de los efectos magnéticos de los electrones que entran en la constitución de todos los átomos. Existen razones para creer (y los efectos que estamos considerando ahora forman parte de la comprobación experimental) que estos electrones se mueven alrededor de los núcleos atómicos, o bien, si el caso no es tan sencillo como hemos enunciado, crean campos magnéticos que son los mismos que si girasen. Además de esto, el electrón tiene un giro *(spin)* alrededor de un eje que pasa por él. Las propiedades magnéticas del átomo de hierro son debidas casi enteramente al hecho de que tiene un exceso de cuatro electrones cuyo *spin* no está compensado, esto es, hay cuatro electrones más girando en un sentido, que en el opuesto. A causa del *spin* de estos electrones, cada átomo está asociado a un campo magnético.

Excepto para los materiales ferromagnéticos, que pueden formar imanes permanentes, ninguna sustancia presenta propiedades magnéticas, si no se encuentra en un campo magnético exterior. Se deduce de esto que, en estado normal, las corrientes electrónicas en un trozo de sustancia compensarán sus efectos magnéticos. En algunas sustancias la compensación es completa dentro de cada átomo, mientras que en otras puede haber un efecto magnético ostensible en cada átomo, pero en un grupo de átomos algo grande las corrientes o *spins* están orientados de modo que sus efectos magnéticos se compensan. Sin embargo, un campo magnético exterior alterará la orientación normal de los circuitos electrónicos o *spins*, o variará la velocidad de rotación de los electrones.

Cualquier átomo en el cual hay una circulación neta de carga se denomina *dipolo magnético*. Si una sustancia compuesta de esta clase de átomos se encuentra en un campo magnético, cada uno de estos átomos quedará influído por el campo, del mismo modo que una espira que transporta una corriente. Esto es, se ejercerá un momento sobre las corrientes electrónicas por la acción del campo, de tal modo que se dispondrán con sus planos perpendiculares al campo y con la inducción de cada una en el mismo sentido que la del campo exterior. El aumento observado en la densidad de flujo en un anillo de sustancia paramagnética o ferromagnética, por encima del valor correspondiente al vacío, es debido al flujo aportado por las corrientes electrónicas que existen dentro de la sustancia.

La tendencia hacia la alineación uniforme de los dipolos magnéticos, con sus campos propios paralelos al campo magnético exterior, está perturbada por la agitación térmica de los átomos, que tiende a establecer una distribución al azar. Cuanto mayor es la temperatura, tanto mayor

es la tendencia hacia la distribución al azar y menor el efecto de alineación. Las sustancias paramagnéticas o ferromagnéticas, son, por consiguiente, análogas a un dieléctrico cuyos átomos son dipolos *eléctricos* permanentes.

La explicación del diamagnetismo está basada en los fenómenos de producción de fem inducida. La figura 14-2 representa un solo circuito electrónico cuyo plano es perpendicular a la dirección de un campo exterior. (El término *exterior* significa el campo, exceptuado el creado por el electrón considerado.) Cuando se mira en el sentido de este campo (de izquierda a derecha en la Fig. 14-2), la carga *positiva* que circula sobre la trayectoria en el sentido de las agujas de un reloj crea un flujo representado por las líneas de trazos, que dentro del plano de la trayectoria es de izquierda a derecha.

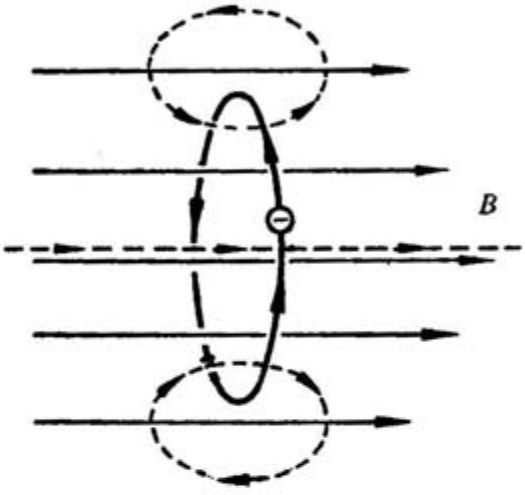


FIG. 14-2.—Circuito electrónico aislado, en un campo magnético exterior.

Supongamos ahora que aumenta el campo magnético exterior, aumentando, p. ej., la corriente que lo produce. Se inducirá una fem en el circuito electrónico, a causa de la variación de flujo que lo atraviesa, siendo el sentido de la fem inducida, de acuerdo con la ley de Lenz, tal que se *opone* al *aumento* de flujo. Puesto que el electrón que gira está creando un campo magnético en el mismo sentido que el campo exterior, la fem inducida le obliga a girar más lentamente que antes. El aumento de flujo es, por tanto, menor que el que sería de otro modo. Obsérvese que la acción sobre un electrón giratorio es la misma, en principio, que la que se ejerce al acelerar los electrones en un betatrón.

Para mayor sencillez, la corriente en la figura 14-2 se ha dibujado con su plano perpendicular al campo exterior y con su propio flujo en el mismo sentido que el flujo exterior. Puede demostrarse que se producirá un efecto análogo, independientemente de la orientación de la órbita electrónica; la reacción del electrón giratorio se opone a cualquier aumento de flujo exterior.

Se deduce de esto que la densidad de flujo en el núcleo de un toroide, rodeado de un enrollamiento magnetizante por el cual circula una corriente, tiene siempre un valor inferior al que tendría en el vacío por este fenómeno de fem inducida, y si éste fuera el único efecto presente, todas las sustancias serían diamagnéticas. Sin embargo, si los átomos de una sustancia son dipolos magnéticos, esto es, si hay una preponderancia de corrientes electrónicas en un sentido sobre las de sentido opuesto, se superponen los efectos paramagnéticos (alineación) a los diamagnéticos.

Si el paramagnetismo excede al diamagnetismo, la sustancia es paramagnética. Si el paramagnetismo es pequeño o no existe, la sustancia es diamagnética.

14-3. Corrientes superficiales equivalentes.—La figura 14-3 (*b*) es la sección transversal del núcleo de un anillo de Rowland. Las circunferencias pequeñas representan las corrientes electrónicas o *spins*. Excepto en la periferia de la sección, cualquier parte de cada circuito es contigua a otro circuito, y en los puntos de contacto, las corrientes tienen sentidos opuestos. Por consiguiente, en los puntos interiores las corrientes se compensan mutuamente entre sí. Sin embargo, las porciones externas de los circuitos más exteriores no quedan compensadas y, por tanto, el conjunto de circuitos electrónicos equivale a una corriente que rodea la periferia de la sección, según indica la figura 14-3(*c*).

La figura 14-3 debe compararse con la 7-3, que aclara cómo se compensan entre sí las cargas de polarización en el volumen de un dieléctrico, aunque quedan capas descompensadas de cargas inducidas superficiales en las caras opuestas de aquél. La corriente superficial de la figura 14-3(*c*) es análoga a estas cargas superficiales. Los números de amperios-vueltas de las corrientes superficiales pueden sumarse (o restarse) a los del arrollamiento magnetizante, o bien cabe imaginar que las corrientes crean por sí mismas un flujo que se suma (o se resta) al flujo creado por la corriente magnetizante.

14-4. Susceptibilidad, permeabilidad y excitación magnéticas.—La densidad de flujo magnético B en un punto cualquiera es la resultante del debido a las corrientes en los conductores y a las corrientes superficiales equivalentes en la sustancia magnética. Podemos imaginar que la superficie de un cuerpo imantado está recubierta de hilo que transporta en cada punto una corriente igual a la corriente superficial equivalente. Entonces, si dl_s es la longitud de un elemento de este arrollamiento ficticio, e i_s es la corriente superficial que transporta, la densidad de flujo en cualquier punto será:

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i\,dl\,\text{sen}\,\theta}{r^2}+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i_s\,dl_s\,\text{sen}\,\theta}{r^2}, \qquad [14\text{-}2]$$

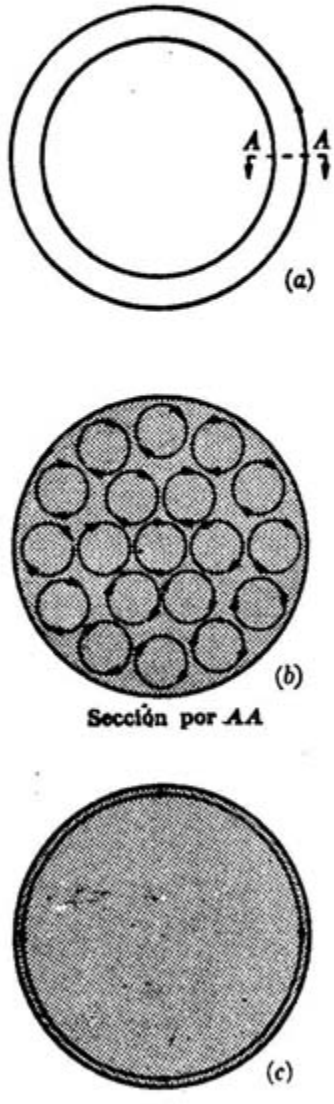


FIG. 14-3.—(*a*) Anillo de Rowland. (*b*) Corrientes electrónicas en la sección *A-A*. (*c*) Corrientes superficiales equivalentes.

expresión en la que el primer término incluye la corriente en cualesquiera conductores reales, y el segundo, las corrientes equivalentes en las superficies de los cuerpos imantados.

En el caso especial de un anillo de Rowland de espiras apretadas, en el que la corriente magnetizante y las corrientes superficiales equivalentes tienen la misma forma y dimensiones, la integración de la ecuación anterior conduce a

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l} + \mu_0 \left(\frac{Ni}{l}\right)_s, \qquad [14\text{-}3]$$

siendo Ni/l el número de amperios-vueltas por unidad de longitud en los arrollamientos, y $(Ni/l)_s$, el número de amperios-vueltas por unidad de longitud de las corrientes superficiales equivalentes. El último término de las Ecs. [14-2] y [14-3] será negativo si el material del anillo es diamagnético.

Definamos ahora un segundo vector campo magnético, H, que desempeña en los fenómenos magnéticos el mismo papel que el vector D en los fenómenos dieléctricos. Para nuestros fines presentes puede definirse H por la ecuación

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \frac{i\, dl \operatorname{sen} \theta}{r^2} \qquad [14\text{-}4]$$

Esto es, H se calcula del mismo modo que la densidad de flujo B, pero con la diferencia de que la constante de proporcionalidad μ_0 no aparece en su definición, incluyéndose en él solamente las corrientes en los conductores reales y *no* las corrientes superficiales equivalentes. *Obsérvese atentamente que la Ec.* [14-4] *no es la definición completa de H.* Para un estudio más detallado véase la sección 15-7.

El valor de H en cada punto se denomina excitación magnética, y suele expresarse en *amperios por metro*, según puede deducirse fácilmente de su definición. Lo mismo que la inducción magnética, la magnitud y dirección de H pueden representarse por líneas denominadas *líneas de fuerza magnética*. La dirección del vector excitación magnética en un punto cualquiera es tangente a la línea de fuerza magnética que pasa por el punto, y el número de líneas por unidad de superficie perpendicular a su dirección se hace numéricamente igual al valor de H. Obsérvese que en lo que concierne a sus dimensiones, la excitación magnética, expresada en amperios por metro, es análoga a la intensidad del campo eléctrico, que se expresa en voltios por metro.

El cálculo de la Ec. [14-4] para los arrollamientos de un anillo de Rowland da para el valor de H, en cualquier punto dentro del anillo,

$$H = \frac{Ni}{l} \qquad [14\text{-}5]$$

Esto es, *en este caso especial*, la excitación magnética es igual al número de amperios-vueltas por metro en los arrollamientos magnetizantes.

Volvamos ahora a la Ec. [14-3],

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l} + \mu_0 \left(\frac{Ni}{l}\right)_s$$

El primer término del segundo miembro es la densidad de flujo creada por la corriente que circula en los arrollamientos magnetizantes; el segundo es la densidad de flujo debida a las corrientes superficiales equivalentes. Puesto que las corrientes superficiales son provocadas por la corriente de los arrollamientos magnetizantes, la densidad de flujo creada por las corrientes superficiales dependerá del número de amperios-vueltas por unidad de longitud en los arrollamientos magnetizantes, y, por tanto, del valor de H. Definimos una propiedad de la sustancia, llamada *susceptibilidad magnética*, que representamos por χ, como *la razón de densidad de flujo debida a las corrientes superficiales, a la excitación magnética* H:[1]

$$\boxed{\chi = \frac{\mu_0 (Ni/l)_s}{H}, \quad \mu_0 (Ni/l)_s = \chi H} \qquad [14\text{-}6]$$

Pero
$$H = \frac{Ni}{l}$$

así que
$$\chi = \mu_0 \frac{(Ni/l)_s}{Ni/l}$$

Obsérvese que la definición de susceptibilidad magnética es análoga a la de susceptibilidad dieléctrica. (Véase Sec. 7-3.) Las unidades de la susceptibilidad magnética son las mismas que las de μ_0, webers/amperio-metro o henrios/metro, puesto que tanto $(Ni/l)_s$ como H se miden en amperios por metro. En la tabla 14-1 figuran algunos valores típicos. La *susceptibilidad magnética del vacío* es, naturalmente, cero, ya que sólo pueden existir corrientes superficiales equivalentes sobre sustancias magnéticas. Las susceptibilidades magnéticas de las sustancias diamagnéticas son negativas.

A temperatura constante, y para valores relativamente pequeños de H, las susceptibilidades magnéticas de las sustancias para y diamagnéticas son constantes, es decir, independientes de H; o lo que es igual, las corrientes superficiales equivalentes son proporcionales a H. Las susceptibilidades de las sustancias ferromagnéticas no son constantes, sino que varían ampliamente con H. Véase sección 15-1.

Sustituyendo Ni/l por H y $\mu_0(Ni/l)_s$ por χH, la Ec. [14-3] puede escribirse:

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 H + \chi H \\ &= (\mu_0 + \chi)H. \end{aligned} \qquad [14\text{-}7]$$

[1] Véase, sin embargo, el estudio que sigue a la Ec. [14-16].

TABLA 14-1

Susceptibilidades de sustancias para- y diamagnéticas

Sustancia	Temp., °C	χ (henrios/metro)
Aluminio	18	$1{,}03 \times 10^{-11}$
Alumbre férrico amónico	−258	948
Alumbre férrico amónico	17	48,7
Anhídrido carbónico (gaseoso)	20	−0,68
Bismuto	18	−2,12
Carbono (diamante)	20	−0,78
Carbono (grafito)	20	−5,6
Cerio	18	24
Cloruro cúprico	18	15
Cloruro férrico	20	135
Cobre	18	−0,14
Mercurio	18	−0,30
Nitrógeno (gaseoso)	20	−0,54
Oxígeno (líquido)	−219	487
Oxígeno (gaseoso)	20	167
Plata	18	−0,32
Plomo	18	0,19
Zinc	18	−0,25

Representemos el término $\mu_0 + \chi$ por el símbolo μ. Entonces,

$$\boxed{\mu = \mu_0 + \chi} \qquad [14\text{-}8]$$

y la Ec. [14-7] toma la forma sencilla

$$\boxed{B = \mu H} \qquad [14\text{-}9]$$

La magnitud μ recibe la denominación de *permeabilidad* de la sustancia. Sus dimensiones son, evidentemente, las mismas que las de μ_0 y χ, es decir, henrios/metro. En el vacío, para el cual $\chi = 0$, es $\mu = \mu_0$. La constante de proporcionalidad μ_0 puede considerarse, por consiguiente, como *la permeabilidad del vacío.*

Con frecuencia es cómodo definir todavía otra magnitud, representada por K_m y denominada *permeabilidad relativa* de una sustancia, como la razón de la permeabilidad de la sustancia a la del vacío:

$$\boxed{K_m = \frac{\mu}{\mu_0}} \qquad [14\text{-}10]$$

La permeabilidad relativa se representa a veces por el símbolo μ_r. Naturalmente, es un número abstracto y tiene el mismo valor numérico en cualquier sistema de unidades. La permeabilidad relativa puede ex-

TABLA 14-1

Susceptibilidades de sustancias para- y diamagnéticas

Sustancia	Temp., °C	χ (henrios/metro)
Aluminio	18	$1{,}03 \times 10^{-11}$
Alumbre férrico amónico	−258	948
Alumbre férrico amónico	17	48,7
Anhídrido carbónico (gaseoso)	20	−0,68
Bismuto	18	−2,12
Carbono (diamante)	20	−0,78
Carbono (grafito)	20	−5,6
Cerio	18	24
Cloruro cúprico	18	15
Cloruro férrico	20	135
Cobre	18	−0,14
Mercurio	18	−0,30
Nitrógeno (gaseoso)	20	−0,54
Oxígeno (líquido)	−219	487
Oxígeno (gaseoso)	20	167
Plata	18	−0,32
Plomo	18	0,19
Zinc	18	−0,25

Representemos el término $\mu_0 + \chi$ por el símbolo μ. Entonces,

$$\boxed{\mu = \mu_0 + \chi} \qquad [14\text{-}8]$$

y la Ec. [14-7] toma la forma sencilla

$$\boxed{B = \mu H} \qquad [14\text{-}9]$$

La magnitud μ recibe la denominación de ***permeabilidad*** de la sustancia. Sus dimensiones son, evidentemente, las mismas que las de μ_0 y χ, es decir, henrios/metro. En el vacío, para el cual $\chi = 0$, es $\mu = \mu_0$. La constante de proporcionalidad μ_0 puede considerarse, por consiguiente, como *la permeabilidad del vacío.*

Con frecuencia es cómodo definir todavía otra magnitud, representada por K_m y denominada *permeabilidad relativa* de una sustancia, como la razón de la permeabilidad de la sustancia a la del vacío:

$$\boxed{K_m = \frac{\mu}{\mu_0}} \qquad [14\text{-}10]$$

La permeabilidad relativa se representa a veces por el símbolo μ_r. Naturalmente, es un número abstracto y tiene el mismo valor numérico en cualquier sistema de unidades. La permeabilidad relativa puede ex-

presarse en función de la susceptibilidad magnética, si se combinan las Ecs. [14-8] y [14-10], con lo que se obtiene:

$$\boxed{K_m = 1 + \frac{\chi}{\mu_0}} \qquad [14\text{-}11]$$

La permeabilidad relativa, K_m, es la magnitud magnética análoga al coeficiente dieléctrico K_e (véase Sec. 7-3). Sería muy apropiada la denominación de *coeficiente magnético*, pero la llamaremos permeabilidad relativa para coincidir con la costumbre.

La permeabilidad relativa del vacío es, evidentemente, la unidad, puesto que, para el vacío, $\chi = 0$, o sea, $\mu = \mu_0$. Las permeabilidades relativas de las sustancias para y ferromagnéticas son mayores que la unidad, y las de las sustancias diamagnéticas menores que la unidad. Sin embargo, las susceptibilidades magnéticas de las sustancias para y diamagnéticas son tan pequeñas (véase tabla 14-1) que sus permeabilidades relativas son prácticamente iguales a la unidad. Sólo para las sustancias ferromagnéticas es apreciable la diferencia.

Las propiedades magnéticas de una sustancia quedan completamente determinadas si se conoce una cualquiera de las tres magnitudes: susceptibilidad magnética χ, permeabilidad relativa K_m o permeabilidad μ. Estas tres magnitudes están relacionadas por las ecuaciones de definición:

$$\mu = \mu_0 + \chi,$$

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{\chi}{\mu_0}$$

La única razón de introducir las tres es simplificar la forma de ciertas ecuaciones de uso frecuente.

La permeabilidad, μ, de una sustancia y la permeabilidad, μ_0, del vacío son análogas a la capacidad específica de inducción, ε, y a la capacidad específica de inducción del vacío, ε_0.

El coeficiente dieléctrico, K_e, que es igual a $\varepsilon/\varepsilon_0$, pudiera denominarse también *capacidad específica de inducción relativa.*

EJEMPLO 1.—La susceptibilidad magnética del alumbre férrico amónico (tabla 14-1) es 948×10^{-11} henrios/m. Calcúlense su permeabilidad y su permeabilidad relativa.

$$\chi = 948 \times 10^{-11} \text{ h/m}$$

$$K_m = 1 + \frac{\chi}{\mu_0}$$

$$= 1 + \frac{948 \times 10^{-11}}{12{,}57 \times 10^{-7}}$$

$$= 1 + 0{,}00754$$

$$= 1{,}00754 \text{ (sin dimensiones)}$$

$$\mu = \mu_0 + \chi$$
$$= 12{,}57 \times 10^{-7} + 0{,}0948 \times 10^{-7}$$
$$= 12{,}66 \times 10^{-7} \text{ h/m}$$

o bien

$$\mu = K_m \mu_0$$
$$= 1{,}00754 \times 12{,}57 \times 10^{-7}$$
$$= 12{,}66 \times 10^{-7} \text{ h/m}$$

EJEMPLO 2.—Un anillo de Rowland, hecho de hierro, cuya longitud de la circunferencia media es 30 cm y cuya sección es 1 cm², está arrollado uniformemente con 300 espiras de hilo conductor. Las medidas efectuadas con un galvanómetro balístico y una bobina exploradora que rodea al anillo, según indica la figura 14-1, demuestran que cuando la intensidad de la corriente en el arrollamiento es 0,032 A, el flujo en el anillo es 2×10^{-6} wb. Calcúlese: *a*) la densidad de flujo en el anillo; *b*) la excitación magnética; *c*) el número de amperios-vuelta por metro de las corrientes superficiales equivalentes, comparando con los del arrollamiento magnetizante; *d*) la permeabilidad, la permeabilidad relativa y la susceptibilidad magnética del material que constituye el anillo.

a) Densidad de flujo, $B = \dfrac{\Phi}{A}$

$$= \frac{2 \times 10^{-6}}{10^{-4}}$$
$$= 2 \times 10^{-2} \text{ wb/m}^2.$$

b) Excitación magnética, $H = \dfrac{Ni}{l}$

$$= \frac{300 \times 0{,}032}{0{,}30}$$
$$= 32 \text{ A-vueltas/m.}$$

c) En virtud de las Ecs. [14-6] y [14-7],

$$\left(\frac{Ni}{l}\right)_s = \frac{B}{\mu_0} - H$$
$$= \frac{2 \times 10^{-2}}{12{,}57 \times 10^{-7}} - 32$$
$$= 1{,}59 \times 10^4 - 32$$
$$= 15\,900 \text{ A-vueltas/m (equivalentes),}$$

número muy superior a sólo 32 A-vueltas/m en el arrollamiento magnetizante.

d) Permeabilidad, $\mu = \dfrac{B}{H}$

$$= \frac{2 \times 10^{-2}}{32}$$
$$= 6250 \times 10^{-7} \text{ wb/A-m.}$$

Permeabilidad relativa, $K_m = \dfrac{\mu}{\mu_0}$

$$= \frac{6250 \times 10^{-7}}{12{,}57 \times 10^{-7}}$$

$$= 498 \text{ (sin dimensiones).}$$

Susceptibilidad magnética,

$$\chi = \mu - \mu_0$$

$$= 6250 \times 10^{-7} - 12{,}57 \times 10^{-7}$$

$$= 6240 \times 10^{-7} \text{ h/m},$$

o bien,

$$\chi = \mu_0 (K_m - 1)$$

$$= 12{,}57 \times 10^{-7} (498 - 1)$$

$$= 6240 \times 10^{-7} \text{ h/m},$$

o, finalmente,

$$\chi = \frac{\mu_0 (Ni/l)_s}{H}$$

$$= \frac{12{,}57 \times 10^{-7} \times 1{,}59 \times 10^4}{32}$$

$$= 6240 \times 10^{-7} \text{ h/m}.$$

Calculemos ahora la autoinducción de un arrollamiento toroidal efectuado sobre un anillo de Rowland de permeabilidad μ. Según las ecuaciones [14-5] y [14-9], la densidad de flujo en el anillo es:

$$B = \mu H = \mu \frac{Ni}{l}$$

El flujo total que atraviesa cualquier sección del anillo será:

$$\Phi = BA,$$

y el coeficiente de autoinducción,

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{NBA}{i} = \mu \frac{AN^2}{l} = K_m \mu_0 \frac{AN^2}{l} \qquad [14\text{-}12]$$

Puesto que la autoinducción L_0 del mismo arrollamiento en el vacío es

$$L_0 = \mu_0 \frac{AN^2}{l}, \qquad [14\text{-}13]$$

vemos que la autoinducción queda multiplicada por el factor K_m cuando la bobina está devanada sobre una sustancia dada. Sin embargo, como pone de manifiesto la tabla 14-1, a menos que el anillo esté formado por una sustancia ferromagnética, la autoinducción es prácticamente igual a la del vacío. Obsérvese también que puesto que la permeabilidad rela-

tiva de un material ferromagnético no es constante, la autoinducción de una bobina que posee un núcleo de material ferromagnético tampoco es constante.

Si se dividen las Ecs. [14-12] y [14-13] se obtiene:

$$K_m = \frac{L}{L_0}, \qquad [14\text{-}14]$$

y la permeabilidad relativa de una sustancia puede definirse como la razón de la autoinducción de un toroide cuyo núcleo está formado por la sustancia, a la autoinducción del mismo toroide en el vacío. Esta definición es totalmente análoga a la del coeficiente dieléctrico K_e de una sustancia en función de la capacidad de un condensador (Ec. [8-9]).

14-5. Imantación.—Las corrientes equivalentes sobre la superficie de un cuerpo imantado sólo constituyen un aspecto de la influencia de un campo magnético sobre el cuerpo. Lo mismo que la *polarización* P de un dieléctrico interpreta la formación de cargas superficiales inducidas en función del desplazamiento de carga dentro del volumen del dieléctrico, así la *imantación* de una sustancia interpreta las corrientes superficiales en función de la reagrupación de las corrientes electrónicas internas.

Se ha definido el *momento magnético* de una espira cerrada como el producto $\mu_0 ia$, siendo i la intensidad de la corriente en la espira, y a, su área. Supongamos, para simplificar, que todas las corrientes electrónicas de un material imantado tienen el mismo momento magnético $\mu_0 ia$ y que hay n de tales espiras por unidad de volumen, todas alineadas con sus planos paralelos. El momento magnético por unidad de volumen dentro de la sustancia es entonces igual al producto del momento magnético de cada espira por el número de espiras por unidad de volumen. Este producto se denomina *intensidad de imantación* o simplemente *imantación* y se representa por la letra $\mathfrak{I}$.

La imantación es una magnitud vectorial, cuya dirección es la misma que la de la densidad de flujo magnético debido a las corrientes electrónicas.

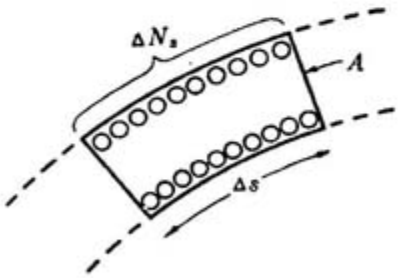


FIG. 14-4.—Corrientes superficiales equivalentes en un corto elemento de anillo de Rowland.

El momento magnético por unidad de volumen de un cuerpo uniformemente imantado puede expresarse también en función de las corrientes superficiales equivalentes. Consideremos un corto elemento de un anillo de Rowland correspondiente a una longitud Δs sobre la circunferencia (Fig. 14-4). Representemos por ΔN_s el número de espiras de las corrientes superficiales equivalentes sobre esta longitud. Estableciendo la proporcionalidad correspondiente, se tiene:

$$\frac{\Delta N_s}{\Delta s} = \frac{N_s}{l},$$

$$\Delta N_s = \frac{N_s \, \Delta s}{l}$$

El momento magnético de cada espira es $\mu_0 i_s A$, de modo que el momento magnético total del elemento es:

$$\Delta N_s \times \mu_0 i_s A = \mu_0 \frac{N_s i_s A \, \Delta s}{l}$$

El volumen del elemento es $A \, \Delta s$, y el momento magnético por unidad de volumen será, por consiguiente,

$$\mathcal{J} = \frac{\mu_0 \dfrac{N_s i_s A \, \Delta s}{l}}{A \, \Delta s}$$

o sea,

$$\mathcal{J} = \mu_0 \left(\frac{Ni}{l}\right)_s \qquad [14\text{-}15]$$

Esto es, el momento magnético por unidad de volumen es igual al producto de μ_0 por los amperios-vueltas equivalentes por unidad de longitud. Si se desea considerar la influencia del campo exterior como un efecto de superficie, según se hizo anteriormente, la describiremos en función de las corrientes superficiales equivalentes. Si se desea considerarla como un efecto de volumen, hablaremos de la intensidad de imantación o momento magnético por unidad de volumen. Ambas magnitudes son directamente proporcionales.

La imantación puede expresarse en función de la susceptibilidad. De la definición de esta última, resulta:

$$\mu_0 \left(\frac{Ni}{l}\right)_s = \chi H,$$

y, por tanto,

$$\mathcal{J} = \chi H, \qquad \chi = \frac{\mathcal{J}}{H} \qquad [14\text{-}16]$$

La Ec. [14-16] es realmente la definición general correcta de susceptibilidad magnética, en lugar de la Ec. [14-6]. En el caso especial de un anillo de Rowland, la imantación es constante en todo el material que forma el anillo y directamente proporcional a los amperios-vueltas equivalentes por unidad de longitud. En casos más generales, las corrientes equivalentes pueden no estar totalmente confinadas en la superficie de un cuerpo, y variar la imantación de un punto a otro. Se define la susceptibilidad magnética en un punto cualquiera, como la razón de la imantación en dicho punto a la excitación magnética en el mismo.

Una de las muchas ecuaciones que relacionan B y H es:

$$B = \mu_0 H + \chi H,$$

y puesto que

$$\mathcal{J} = \chi H,$$

$$\boxed{B = \mu_0 H + \mathcal{J}} \qquad [14\text{-}17]$$

El primer término del segundo miembro es la contribución a B de la corriente magnetizante; el segundo es la contribución de las corrientes electrónicas internas.

EJEMPLO.—Calcúlese la imantación en el núcleo de hierro del anillo de Rowland del ejemplo anterior.

En dicho ejemplo encontramos:

$$B = 2 \times 10^{-2}\ \text{wb/m}^2, \quad H = 32\ \text{A-vueltas/m}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mu_0 H &= 12{,}57 \times 10^{-7} \times 32 \\ &= 0{,}00402 \times 10^{-2}\ \text{wb/m}^2. \end{aligned}$$

Es decir, ésta es la densidad de flujo debida a la corriente magnetizante, o sea, la densidad de flujo que existiría en el vacío.

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= B - \mu_0 H \\ &= 2 \times 10^{-2} - 0{,}00402 \times 10^{-2} \\ &= 2 \times 10^{-2}\ \text{wb/m}^2, \end{aligned}$$

y prácticamente todo el flujo se debe a la imantación, o sea, a las corrientes electrónicas.

RESUMEN

El método seguido en este capítulo ha consistido en deducir fórmulas generales mediante razonamientos basados en un caso especial (anillo de Rowland). Las etapas de la deducción se resumen a continuación, habiéndose destacado las fórmulas de aplicación general encerrándolas en un recuadro. Las fórmulas no recuadradas son correctas para el caso especial de un anillo de Rowland. Las ecuaciones se han numerado como en el texto.

La densidad de flujo B en un anillo de Rowland es la suma de las densidades de flujo creadas por la corriente de los arrollamientos, y por las corrientes superficiales equivalentes:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l} + \mu_0 \left(\frac{Ni}{l}\right)_s \qquad [14\text{-}3]$$

Se define la excitación magnética H por la ecuación

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \frac{i\, dl \operatorname{sen} \varphi}{r^2} \qquad [14\text{-}4]$$

(Para una definición más general, véase Sec. 15-7.)

En el caso especial del anillo de Rowland, la integración de la Ec. [14-4] da:

$$H = \frac{Ni}{l} \qquad [14\text{-}5]$$

Se define la susceptibilidad magnética χ por la ecuación:

$$\mu_0 (Ni/l)_s = \chi H. \qquad [14\text{-}6]$$

(Para una definición más general véase Sec. 14-5.)

Combinando las Ecs. [14-3], [14-5] y [14-6] se obtiene:

$$\boxed{B = \mu_0 H + \chi H = (\mu_0 + \chi)H} \qquad [14\text{-}7]$$

Se define la permeabilidad por la ecuación:

$$\boxed{\mu = (\mu_0 + \chi)} \qquad [14\text{-}8]$$

Entonces de las Ecs. [14-7] y [14-8] resulta:

$$\boxed{B = \mu H} \qquad [14\text{-}9]$$

Se define la permeabilidad relativa por la ecuación:

$$\boxed{K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{\chi}{\mu_0}} \qquad \begin{matrix}[14\text{-}10]\\ [14\text{-}11]\end{matrix}$$

Definimos la imantación $\mathcal{I}$ como *el momento magnético por unidad de volumen*. Para el caso especial de un anillo Rowland,

$$\mathcal{I} = \mu_0 (Ni/l)_s. \qquad [14\text{-}15]$$

Combinando las Ecs. [14-6] y [14-15] se obtiene:

$$\boxed{\mathcal{I} = \chi H} \qquad [14\text{-}16]$$

Obsérvese que la definición general de χ es la Ec. [14-16], en lugar de la Ec. [14-6].

Si se combinan las Ecs. [14-7] y [14-16], resulta:

$$\boxed{B = \mu_0 H + \mathcal{I}} \qquad [14\text{-}17]$$

PROBLEMAS

14-1. Calcúlese, a partir de los datos de la tabla 14-1, las permeabilidades relativas de: *a*) bismuto; *b*) oxígeno líquido, y *c*) nitrógeno gaseoso.

14-2. Supongamos que el anillo de Rowland del ejemplo 2 de la sección 14-4, está formado por: *a*) aluminio; *b*) plata. Calcúlese, para una corriente de 0,032 A en el arrollamiento magnetizante, cuál es, para cada uno de los materiales, el número de amperios-vueltas/metro de las corrientes superficiales equivalentes. Compárese con los del anillo de hierro.

CAPÍTULO XV

FERROMAGNETISMO

15-1. Ferromagnetismo.—La densidad de flujo en un anillo de Rowland puede ser de cientos y aun miles de veces mayor que la debida únicamente a la corriente magnetizante. Además, la densidad de flujo no es función lineal de la excitación magnética H o, en otras palabras, la permeabilidad μ no es constante. Para complicar aún más la cuestión, la permeabilidad depende de la historia (magnética) del hierro, fenómeno denominado *histéresis*. En efecto, puede existir un flujo en el hierro aun en ausencia de campo exterior; cuando el hierro se encuentra en este estado se denomina *imán permanente*.

Cualquier sustancia que presenta las propiedades anteriormente mencionadas, se denomina *ferromagnética*. El hierro, el níquel y el cobalto son los únicos elementos ferromagnéticos, pero puede presentar también

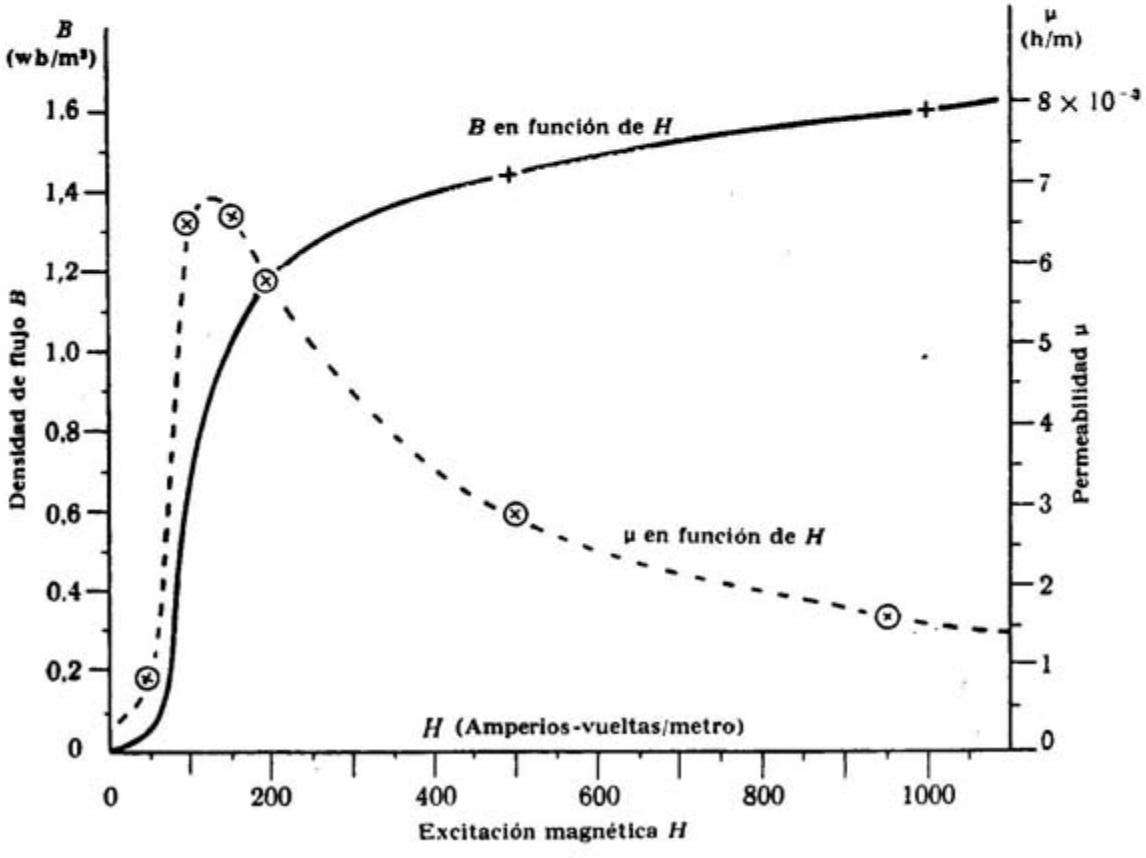


FIG. 15-1.—Curvas de imantación y de permeabilidad del hierro templado.

estas propiedades un cierto número de aleaciones cuyos componentes no son ferromagnéticos.

A causa de la relación complicada entre la densidad de flujo B y la excitación magnética H en una sustancia ferromagnética, no es posible expresar B mediante una función analítica de H. En lugar de esto, se da la relación entre ambas magnitudes mediante una tabla, o bien se representa B por una gráfica, en función de H. La curva se denomina *curva de imantación* de la sustancia.

En la figura 15-1 se ha representado la curva de imantación de una muestra de hierro templado. La permeabilidad μ, igual a la razón de B a H, puede obtenerse en cualquier punto de la curva, dividiendo la densidad de flujo B en dicho punto, por la correspondiente excitación magnética H; p. ej., si $H = 150$ A-vueltas/m, $B = 1{,}01$ wb/m², y

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1{,}01}{150} = 0{,}00675 = 67500 \times 10^{-7} \text{ wb/A-m.}$$

Es evidente que la permeabilidad no es constante. La curva de trazos de la figura 15-1 es la gráfica que representa a μ como función de H.

La tabla 15-1 abarca un amplio intervalo de valores para la misma muestra, e incluye también valores de la permeabilidad relativa K_m, de la imantación $\mathcal{J}$ y de la susceptibilidad χ. De la tabla se deduce que cuando H es pequeña, todo el flujo es debido prácticamente a la imantación (o sea, a las corrientes superficiales equivalentes). Para valores de H superiores a 1000 A-vueltas/m hay un aumento muy pequeño de la iman-

TABLA 15-1

Propiedades magnéticas del hierro templado

Excitación magnética	Densidad de flujo	Permeabilidad	Imantación	Permeabilidad relativa	Susceptibilidad magnética
H A-vueltas/m	B wb/m²	$\mu = B/H$ henrios/m	$\mathcal{J} = B - \mu_0 H$ wb/m²	$K_m = \mu/\mu_0$	$\chi = \mu - \mu_0$ henrios/m
0	0	3100×10^{-7}	0	250	3100×10^{-7}
10	0,0042	4200	0,0042	330	4200
20	0,010	5000	0,010	400	5000
40	0,028	7000	0,028	560	7000
50	0,043	8600	0,043	680	8600
60	0,095	16000	0,095	1270	16000
80	0,45	56000	0,45	4500	56000
100	0,67	67000	0,67	5300	67000
150	1,01	67500	1,01	5350	67500
200	1,18	59000	1,18	4700	59000
500	1,44	28800	1,44	2300	28800
1000	1,58	15800	1,58	1250	15800
10000	1,72	1720	1,71	137	1710
100000	2,26	226	2,13	18	213
800000	3,15	39	2,15	3,1	26

tación, y la susceptibilidad disminuye de forma acusada. En esta región se dice que el hierro se convierte en *saturado*. El aumento posterior de B es debido casi exclusivamente al aumento de la corriente magnetizante.

15-2. Temperatura de Curie.—La permeabilidad de las sustancias ferromagnéticas disminuye al aumentar la temperatura, y la permeabilidad relativa desciende prácticamente a la unidad a una temperatura (diferente para las distintas sustancias) llamada *temperatura de Curie*. Por encima de la temperatura de Curie, el hierro es paramagnético pero no ferromagnético. En la figura 15-2 se ha representado la variación de la permeabilidad magnética con la temperatura de una muestra de hierro. H se mantiene constante e igual a 800 000 A-vueltas/m. La temperatura de Curie para esta muestra es 760°C, aproximadamente.

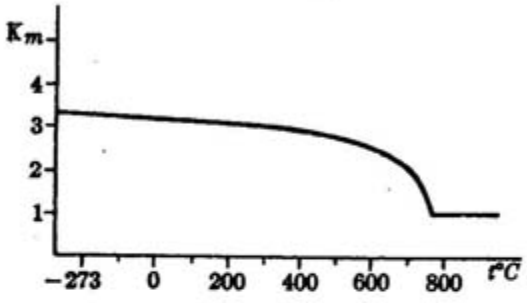


FIG. 15-2.—Permeabilidad relativa de una muestra de hierro sometida a una excitación magnética constante de 800 000 A-vueltas/m. La temperatura de Curie es 760° C, aproximadamente.

15-3. Histéresis.—Una curva de imantación, tal como la representada en la figura 15-1, expresa la relación entre la densidad de flujo B en una sustancia ferromagnética y la excitación correspondiente H, *siempre que la muestra se encuentre inicialmente desimantada y la excitación magnética aumente de un modo continuo desde cero*. Así, en la figura 15-3, si la corriente magnetizante en el arrollamiento de un anillo desimantado aumenta de un modo continuo, desde cero hasta que la excitación magnética corresponda a la abscisa Oe, la densidad de flujo B está dada por la ordenada Of. Si, partiendo del estado desimantado, la excitación magnética se aumenta, primero desde cero hasta Og, y después se hace *disminuir* hasta Oe, el estado magnético de la muestra viene representado por la trayectoria $Oabc$. La densidad de flujo cuando la excitación magnética se ha reducido hasta Oe está representada por la ordenada Oh en lugar de la Of. Si se anula ahora la corriente magnetizante, la curva continúa hasta el punto d, en el cual la densidad de flujo es Od.

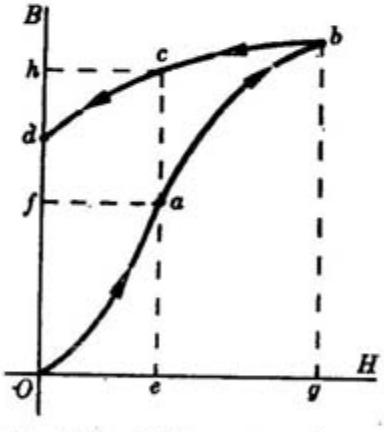


FIG. 15-3.—Gráfica que explica el fenómeno de histéresis.

Se ve que la densidad de flujo en la muestra no depende únicamente de la excitación magnética, sino también de la historia magnética de la misma. Por decirlo así, la muestra tiene *memoria* magnética y *recuerda* que había sido imantada hasta el punto b, aunque se haya suprimido

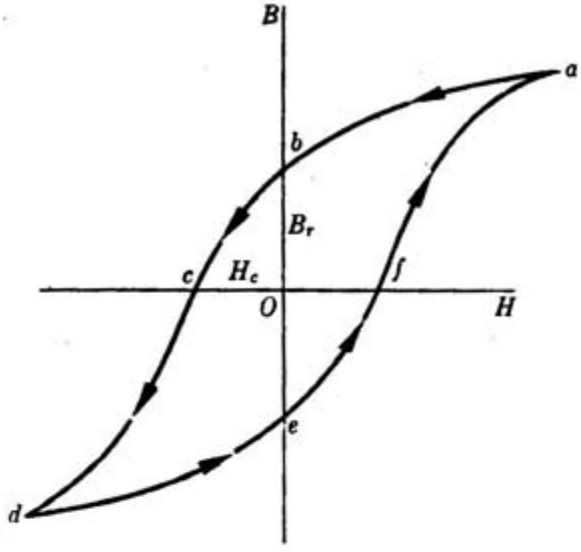


FIG. 15-4.—Ciclo de histéresis.

después la corriente magnetizante. En el punto *d* se ha convertido en un *imán permanente*. Este comportamiento de la sustancia, evidenciado por el hecho de que la curva *B-H* no coincide, al disminuir *H*, con la obtenida cuando *H* aumenta, se denomina *histéresis*. El término significa literalmente *quedarse atrás*.

En muchas piezas de aparatos eléctricos, tales como transformadores y motores, hay masas de hierro situadas en campos magnéticos cuyo sentido cambia continuamente. Esto es, la excitación magnética *H* aumenta desde cero hasta cierto valor máximo en un sentido, después se anula, aumenta hasta el mismo valor máximo, pero en sentido opuesto, disminuye hasta anularse y continúa repitiendo este ciclo indefinidamente. La densidad de flujo *B* dentro del hierro, se invierte también, pero en la forma indicada en la figura 15-4, describiendo una curva cerrada en el plano *B-H*, llamada *ciclo de histéresis*. La figura 15-3 puede considerarse como el comienzo de dicho ciclo de histéresis.

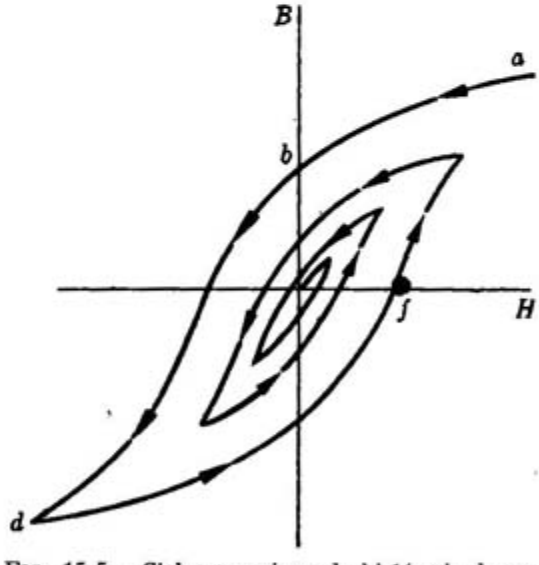


FIG. 15-5.—Ciclos sucesivos de histéresis durante el proceso de desimantación de una sustancia ferromagnética.

Los valores positivos de *H* o de *B* (Fig. 15-4) indican que los sentidos positivos de estas magnitudes son, p. ej., los que corresponden al sentido de las agujas de un reloj en un anillo de Rowland, mientras que los valores negativos significan que los sentidos son contrarios al de las agujas de un reloj. El valor y sentido de *H* quedan determinados solamente por la corriente en el enrollamiento, mientras que los de *B* dependen de las propiedades magnéticas de la muestra, y de su historia.

La ordenada *Ob* u *Oe* (Fig. 15-4) representa la densidad de flujo que queda en la muestra cuando se ha anulado la excitación magnética

y miden el *magnetismo remanente* o *remanencia* de la muestra, que se designa por B_r. La abscisa Oc u Of representa la excitación magnética, de sentido contrario, necesaria para anular la densidad de flujo después que la muestra ha sido imantada a saturación en sentido opuesto, y mide la *fuerza coercitiva* H_c. ¿Cuál es la permeabilidad en los puntos b, c, e y f?

La curva de imantación Oab (Fig. 15-3) corresponde a la muestra inicialmente desimantada. Se puede preguntar cómo ha podido obtenerse, dado que al suprimir la corriente magnetizante la densidad de flujo en la sustancia no se anula. Una muestra puede ser desimantada invirtiendo la corriente magnetizante un cierto número de veces y disminuyendo su intensidad en cada inversión. Véase la figura 15-5.

Los efectos de histéresis introducen una dificultad análoga al medir el flujo en una muestra. En ausencia de histéresis, el flujo se anula cuando se suprime la corriente magnetizante, y un galvanómetro balístico conectado a una bobina exploradora que rodea la muestra indica el flujo que previamente la atravesaba. Pero puesto que B no se anula cuando H se reduce a cero, las desviaciones del galvanómetro balístico sólo indican las *variaciones* de flujo que corresponden a los cambios de la fuerza magnetizante. Por tanto, en la práctica, el ciclo completo de histéresis ha de trazarse por etapas, midiendo los cambios de flujo que acompañan a las variaciones de la corriente magnetizante.

Es de desear, evidentemente, que un material destinado a construir imanes permanentes tenga una gran remanencia para que el imán sea *fuerte*, y una gran fuerza coercitiva para que la imantación no sea destruída por campos magnéticos accidentales. La tabla 15-2 da algunos valores típicos. *Alnico 5* es una de las aleaciones más recientemente descubiertas que se utilizan para fabricar imanes permanentes. Es evidente su superioridad respecto al acero al carbono, que ha sido la sustancia utilizada durante muchos años.

TABLA 15-2

Remanencia y fuerza coercitiva de las sustancias utilizadas en la fabricación de imanes permanentes

Sustancia	Composición (por 100)	B_r (wb/m²)	H_c A-vueltas/m
Acero al carbono . .	98 Fe, 0,86 C, 0,9 Mn	0,95	$3{,}6 \times 10^3$
Acero al cobalto . .	52 Fe, 36 Co, 7 W, 3,5 Cr, 0,5 Mn, 0,7 C	0,95	18×10^3
Alnico 2	55 Fe, 10 Al, 17 Ni, 12 Co, 6 Cu	0,76	42×10^3
Alnico 5	51 Fe, 8 Al, 14 Ni, 24 Co, 3 Cu	1,25	44×10^3

Una consecuencia de los fenómenos de histéresis es la producción de calor en el interior de una sustancia ferromagnética siempre que es obligada a describir su ciclo de histéresis. Este calor se origina por una especie de rozamiento interno cuando los dominios magnéticos (véase Sec. 15-4) que existen dentro de la sustancia cambian de sentido, y puede demostrarse que el calor producido por unidad de volumen en cada ciclo es proporcional al área abarcada por el ciclo de histéresis. En consecuencia, si una sustancia ferromagnética ha de estar sometida a un campo que cambia continuamente de sentido (p. ej., el núcleo de un transformador) es de desear que el ciclo de histéresis de la sustancia sea estrecho para reducir al mínimo las pérdidas por desprendimiento de calor. Afortunadamente, pueden obtenerse aceros o aleaciones de acero que unen a una elevada permeabilidad pequeñas pérdidas por histéresis.

Para deducir la expresión del calor desarrollado por unidad de volumen y por ciclo, consideremos un anillo de Rowland, de longitud media l y sección transversal A, que tiene un arrollamiento de N espiras alrededor de su circunferencia. Si la corriente en el arrollamiento es i se tiene:

$$H = \frac{Ni}{l}$$

Supongamos que en un tiempo dt la corriente se incrementa de i a $i + di$. El incremento di de la corriente produce un incremento dH de la excitación magnética, un incremento dB de la densidad de flujo y un incremento $d\Phi = A\,dB$ del flujo. A causa de este incremento de flujo, aparece en el arrollamiento una fem inducida, de valor

$$\varepsilon = N\frac{d\Phi}{dt}$$

La potencia suministrada durante este tiempo, excluídas las pérdidas Ri^2 en el arrollamiento, es

$$P = \varepsilon i.$$

La energía suministrada vale

$$dW = P\,dt,$$

y la energía total suministrada en un ciclo será:

$$W = \oint dW,$$

donde el símbolo $\oint$ significa que la integración ha de realizarse en el diagrama B-H, a lo largo del ciclo de histéresis. Combinando las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$W = Al\oint H\,dB.$$

Pero $\oint H\,dB$ representa el área encerrada por el ciclo de histéresis y, puesto que $Al = V$ es el volumen del anillo, tenemos:

Calor por unidad de volumen por ciclo = área del ciclo de histéresis.

Si B se expresa en webers por metro cuadrado y H en A-vueltas/m, el calor resulta medido en julios por metro cúbico, por ciclo.

En general, no es posible expresar H como función sencilla de B, de modo que la integral no puede calcularse analíticamente. Por consiguiente, se dibuja el ciclo de histéresis y se mide su área con un planímetro, debiendo tenerse en cuenta cualquier diferencia de escalas al representar B y H.

15-4. La teoría de los dominios.— Recientes estudios sobre el ferromagnetismo han demostrado que en una sustancia ferromagnética existen pequeñas regiones llamadas *dominios*. Estos dominios son de tamaño microscópico, pero suficientemente grandes para contener de 10^{12} a 10^{15} átomos. Dentro de cada dominio los momentos magnéticos de todos los electrones giratorios son paralelos entre sí; o dicho de otro modo, cada dominio está imantado a saturación. Los sentidos de los campos magnéticos de los dominios, en el hierro, son paralelos a uno o a otro de los ejes cristalográficos, pero en el hierro no imantado hay una variación al azar del sentido de un dominio a otro, de modo que el campo magnético resultante de una muestra de tamaño algo grande es nulo [Fig. 15-6(*a*)].

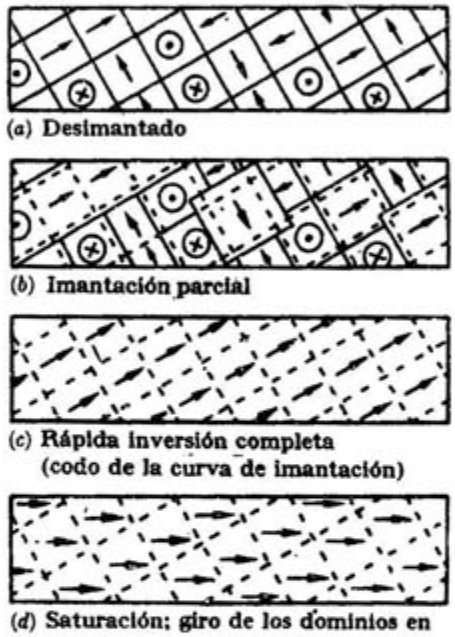


FIG. 15-6.—Esquema para aclarar la variación de la estructura de los dominios en un solo cristal, al aumentar el campo magnético exterior dirigido de izquierda a derecha. Por comodidad, los dominios están representados por cubos; se cree, sin embargo, que son largos y estrechos.

Variaciones de tipo distinto pueden tener lugar en los dominios cuando la muestra se encuentra en un campo exterior. En campos débiles, los cambios consisten primero en rotaciones de los sentidos de imantación de los dominios tendiendo a aproximarse al paralelismo con el campo exterior, y segundo, en movimiento de los límites de los dominios. Aquellos dominios para los cuales la imantación es aproximadamente paralela al campo exterior, aumentan de tamaño a expensas de los dominios contiguos, en los cuales la imantación forma ángulos mayores con el campo exterior [Fig. 15-6(*b*)].

En campos más intensos, para los que la curva de imantación tiene mayor pendiente, todos los dominios giran rápidamente 90° ó 180° hasta hacerse paralelos al eje del cristal que está más próximo al sentido del campo magnético exterior [Fig. 15-6(*c*)].

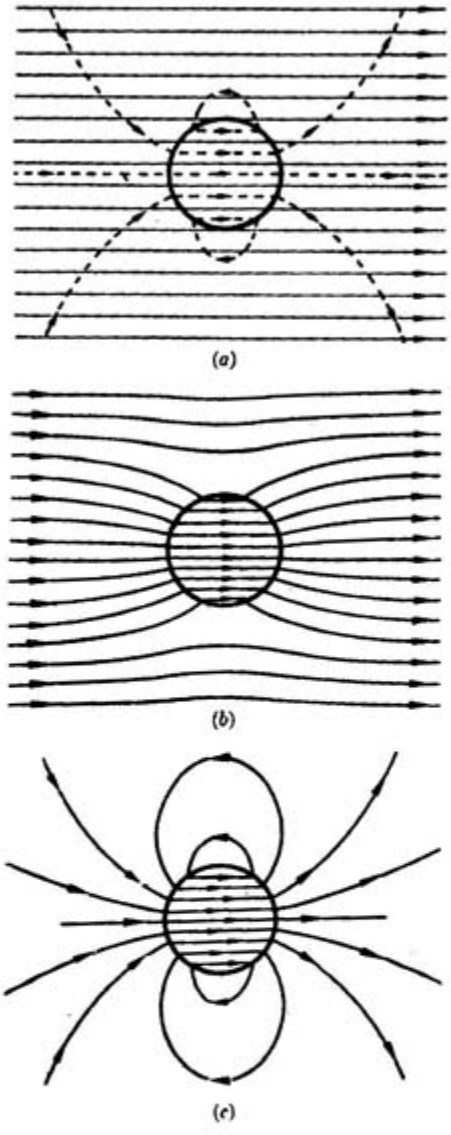


FIG. 15-7.—Imantación de una esfera ferromagnética en un campo magnético uniforme.

Finalmente, en campos intensos la imantación de todos los dominios gira de un modo continuo hasta hacerse paralela al campo exterior [Fig. 15-6(*d*)], y toda la muestra se encuentra saturada.

El *efecto de Barkhausen*, que es más pronunciado en la parte más pendiente de la curva de imantación, demuestra que la imantación tiene lugar por etapas discontinuas cuando los dominios giran ángulos grandes. Si se rodea una barra de sustancia ferromagnética con una bobina exploradora conectada a un amplificador de radio, y se coloca la barra en un campo magnético exterior que puede aumentar o disminuir de un modo continuo, se oye un sonido crepitante en un altavoz conectado al amplificador. Cuando cada dominio, por turno, cambia de sentido, induce un corto y rápido impulso de corriente en la bobina exploradora y estos impulsos se perciben en el altavoz como un ruido.

15-5. Polos magnéticos.—Una muestra de material ferromagnético, en forma de anillo, simplifica la exposición de muchos de los conceptos relacionados con las propiedades magnéticas de la materia, por el hecho de que el campo magnético de tal anillo está confinado enteramente a su interior. Ocupémonos ahora de la imantación de un cuerpo cuyo campo se extiende a la región que lo rodea. El ejemplo más conocido es la aguja imantada, o un imán en forma de barra o de herradura. Pero éstos constituyen problemas algo complicados y estudiaremos, por tanto, en primer lugar la imantación de una esfera homogénea e isótropa en un campo uniforme.

Cuando se coloca una esfera en un campo que antes de introducir éste era uniforme, la esfera se imanta de un modo análogo a como se polariza una esfera dieléctrica en un campo eléctrico. En la figura 15-7(*a*) las líneas llenas son las líneas de inducción del campo uniforme inicial y las líneas de trazos son las líneas de inducción debidas a la esfera imantada. (Ésta es la contribución a la inducción de los circuitos electrónicos situados dentro de la esfera o de sus corrientes superficiales equivalentes.)

Debe efectuarse una detenida comparación de las figuras 15-7 y 7-4. Obsérvese la diferencia; las líneas del campo eléctrico inducido, en la figura 7-4, comienzan sobre cargas positivas y terminan sobre cargas negativas y, por consiguiente, están dirigidas de derecha a izquierda dentro de la esfera, mientras que las líneas de inducción de la figura 15-7(*a*) son cerradas y su sentido dentro de la esfera es de izquierda a derecha.

La figura 15-7(*b*) representa el campo real después de introducir la esfera, esto es, el campo resultante del campo de la esfera y del campo inicial. En los puntos *exteriores*, el campo se modifica del mismo modo que el campo que rodea a una esfera dieléctrica polarizada, en un campo eléctrico [compárese con la Fig. 7-4(*c*)]; sin embargo, en los puntos *interiores*, la inducción aumenta en el caso magnético, mientras que en el caso eléctrico la intensidad del campo eléctrico disminuye.

Si la esfera de la figura 15-7 es ferromagnética, entonces a causa de los efectos de histéresis retiene cierta parte de su imantación cuando se la saca del campo transformándose así en un *imán permanente*. Las líneas de inducción fuera y dentro de tal esfera imantada están representadas en la figura 15-7(*c*).

Puesto que el campo magnético fuera de la esfera imantada es geométricamente idéntico al campo eléctrico fuera de una esfera dieléctrica polarizada, *pudiera* atribuirse el campo magnético exterior de la esfera a *cargas magnéticas* ficticias inducidas sobre su superficie. De hecho, antes que las relaciones entre fenómenos eléctricos y magnéticos se interpretasen con la precisión actual, se supuso que el magnetismo era debido realmente a cargas magnéticas o, como fueron denominadas, *polos* magnéticos. Los polos magnéticos *norte* corresponden a cargas positivas y los polos *sur* a cargas negativas. A pesar de que no se cree ya en la existencia de cargas magnéticas, es cómodo, sin embargo, en muchos casos utilizar el concepto de polo magnético, y calcular el campo de un cuerpo imantado a partir de sus polos en lugar de hacerlo en función de sus corrientes superficiales equivalentes.

El término correspondiente a *cantidad de carga eléctrica* es *intensidad de polo magnético*. En el sistema mks, la unidad de intensidad de polo resulta ser *el weber*, como se explicará en breve. La intensidad de polo se representa por la letra m, que corresponde a q o Q para las cantidades de carga. La esfera imantada de la figura 15-7 tiene polos magnéticos distribuídos por toda su superficie, aunque con una densidad superficial que no es uniforme. Los polos norte están distribuídos sobre la semiesfera de la cual salen las líneas de inducción, y los polos sur sobre la semiesfera por la cual entran las líneas de inducción.

La intensidad de polo de un cuerpo imantado puede expresarse en función de su imantación interior. La intensidad de polo, m, dentro de cualquier volumen es igual (con signo cambiado) a la integral de superficie de la imantación $\mathfrak{I}$, extendida a la superficie que limita el volumen, relación exactamente análoga (salvo el signo menos) al teorema de Gauss para el desplazamiento eléctrico D y la carga q:

$$m = -\int \mathcal{J} \cos \theta \, dA. \qquad [15\text{-}1]$$

En esta ecuación, un valor positivo de m indica un polo norte, e $\mathcal{J}$ se considera positiva si está dirigida hacia afuera.

Para dar una definición más concreta, consideremos un imán permanente en forma de barra cilíndrica, dentro de la cual supondremos que la imantación es la misma en todos los puntos y dirigida de izquierda a derecha. La integral de superficie de $\mathcal{J}$ extendida a cualquier cilindro corto situado enteramente dentro del imán, tal como el próximo a su centro de la figura 15-8, es nula puesto que $\mathcal{J}$ está dirigida hacia dentro en una cara y hacia afuera en la otra. En consecuencia, no hay polos en el interior del imán. Sin embargo, para un corto cilindro en el extremo derecho de la barra del imán, la integral de superficie es $-\mathcal{J}A$ en la cara de la izquierda y se anula en la cara de la derecha, puesto que $\mathcal{J} = 0$ fuera del imán. Esto es,

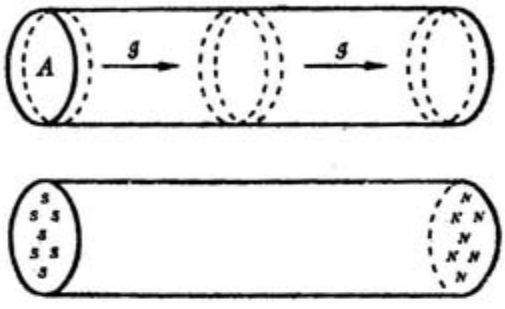


FIG. 15-8.—Polos magnéticos en un imán cilíndrico.

$$-\int \mathcal{J} \cos \theta \, dA = -(-\mathcal{J}A) = \mathcal{J}A = m,$$

y, dado que m es positiva, hay localizado en el extremo derecho del imán un polo norte de intensidad $m = \mathcal{J}A$. Por un razonamiento idéntico, resulta que en el extremo izquierdo del imán existe un polo sur de igual intensidad.

La *intensidad de polo por unidad de área*, m/A, en cualquier extremo, es:

$$\frac{m}{A} = \mathcal{J}$$

O sea, que en este caso, la intensidad de polo por unidad de área es igual a la imantación. La intensidad de polo por unidad de área es análoga en magnetismo a la carga eléctrica por unidad de área o densidad superficial de carga, y está relacionada con la imantación del mismo modo que la densidad superficial de carga lo está con la polarización en el caso especial de una lámina plana de dieléctrico. Dado que $\mathcal{J}$ se expresa en wb/m², la intensidad de polo por unidad de área también se expresará en wb/m² y, en consecuencia, la intensidad de polo se mide en webers y su unidad es el weber, como habíamos anticipado.

15-6. Campo magnético terrestre.—En primera aproximación, el campo magnético terrestre coincide con el campo exterior a una esfera iman-

tada uniformemente. La figura 15-9 representa una sección de la Tierra. La línea gruesa vertical es su eje de rotación, y los polos norte y sur *geográficos* se han designado por N_G y S_G. La dirección de la (supuesta) imantación interna forma un ángulo de unos 15° con el eje terrestre. La línea de puntos indica el plano del ecuador magnético, y las letras N_M y S_M designan los llamados polos *magnéticos* norte y sur. Obsérvese atentamente que las líneas de inducción salen de la superficie terrestre por todo el hemisferio sur magnético y entran por el hemisferio norte

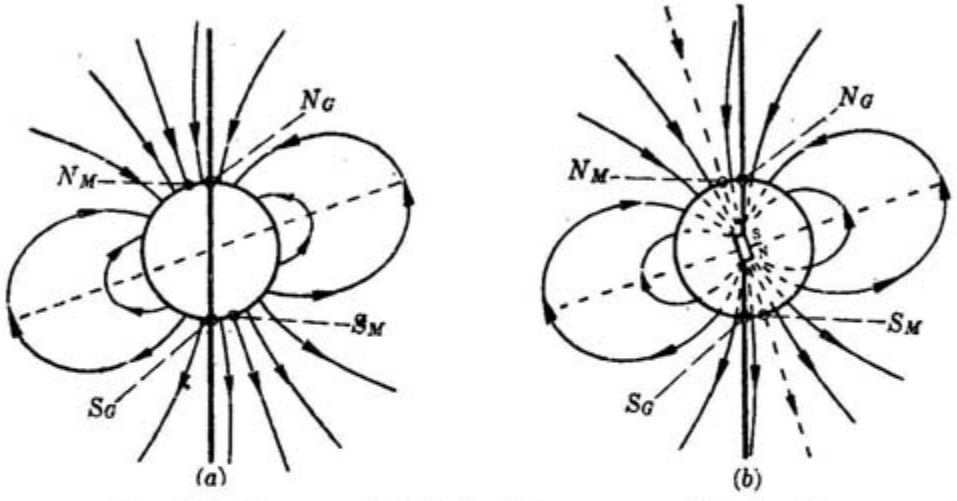


FIG. 15-9.—Esquema simplificado del campo magnético terrestre.

magnético. Por consiguiente, si deseamos referir el campo terrestre a polos magnéticos, hemos de suponer, tomando como base esta hipótesis sobre el estado magnético interno de la Tierra, que hay distribuídos polos magnéticos *norte* por toda la superficie del hemisferio magnético *sur*, y polos magnéticos *sur* por toda la superficie del hemisferio magnético *norte*, lo cual puede dar lugar a muchas confusiones. Los polos norte y sur magnéticos, considerados como puntos de la superficie terrestre, son simplemente aquellos puntos en los cuales el campo es vertical. Las coordenadas geográficas del primero son: 70° de latitud N y 96° de longitud O.

Es interesante observar que resultaría el mismo campo en los puntos *exteriores* si el magnetismo terrestre fuera debido a una pequeña barra imantada próxima a su centro, como indica la figura 15-9(*b*), con el polo sur del imán señalando hacia el polo norte magnético. El campo dentro de la Tierra es diferente en ambos casos, pero, por razones evidentes, no es posible la comprobación experimental de ninguna de estas hipótesis.

Excepto en el ecuador magnético, el campo magnético terrestre no es horizontal. El ángulo que forma el campo con la horizontal se denomina *inclinación magnética*. En Cambridge, Massachusetts (próximo a 45° N), el valor del campo magnético terrestre es alrededor de $5{,}8 \times 10^{-5}$ wb/m²

y el ángulo de inclinación, unos 73°. Por consiguiente, la componente horizontal en Cambridge es alrededor de $1{,}7 \times 10^{-5}$ wb/m², y la componente vertical, $5{,}5 \times 10^{-5}$ wb/m², aproximadamente. En las latitudes magnéticas norte, la componente vertical está dirigida hacia abajo, mientras que en las latitudes magnéticas sur lo está hacia arriba. El ángulo de inclinación en los polos magnéticos es, naturalmente, 90°.

El ángulo formado por la componente horizontal y la verdadera dirección norte-sur se denomina *declinación*. En Cambridge, Massachusetts, la declinación es en la actualidad alrededor de 15° O, esto es, una aguja de una brújula señala 15° hacia el oeste del norte verdadero.

El campo magnético terrestre no es simétrico, como pudiera suponerse considerando el dibujo idealizado de la figura 15-9. En realidad es muy complicado, variando irregularmente la inclinación y la declinación sobre la superficie terrestre, y variando también con el tiempo.

15-7. Definición general de excitación magnética.—Es un hecho familiar que un cuerpo puede imantarse bien colocándolo en la proximidad de un imán permanente, o bien enviando una corriente a través de un arrollamiento de hilo efectuado alrededor del mismo. Al establecer las ecuaciones que expresan el estado magnético de una muestra en forma de anillo de Rowland, se consideró conveniente introducir la magnitud H, que puede imaginarse como *causa* de la imantación. Se definió H por la ecuación

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \frac{i\, dl \operatorname{sen} \theta}{r^2}, \qquad [15\text{-}2]$$

pero se advirtió que esta definición no era completa. Comprobaremos ahora que efectivamente es así, puesto que la *causa* de la imantación de un cuerpo cualquiera puede ser la presencia de cuerpos imantados en vez de corrientes circulando por conductores. En consecuencia, ha de añadirse un término a la definición de H para tener en cuenta los efectos de tales cuerpos.

El estado magnético de un cuerpo imantado puede expresarse de tres modos distintos, pues cabe dar: *a*) la imantación en todos los puntos interiores del cuerpo, *b*) las corrientes superficiales equivalentes, o *c*) la intensidad de los polos magnéticos. Si se conoce uno cualquiera de estos datos, resulta posible calcular los otros dos; p. ej., si la imantación $\mathcal{I}$ dentro de un cilindro de longitud l y sección A es uniforme, entonces la corriente superficial equivalente por unidad de longitud, alrededor de la superficie lateral será, según la Ec. [14-15],

$$\left(\frac{Ni}{l}\right)_s = \frac{\mathcal{I}}{\mu_0},$$

y la intensidad de polo por unidad de superficie en ambas caras es:

$$\frac{m}{A} = \mathcal{I}$$

Los efectos magnéticos producidos por un cuerpo imantado pueden expresarse en función de uno cualquiera de estos tres aspectos de su estado magnético. Es costumbre utilizar el tercero, es decir, los polos del cuerpo imantado.

Si los polos son suficientemente pequeños, o están lo bastante alejados del punto en el cual ha de calcularse H, cabe considerarlos como polos *puntuales*. El término adicional de H se calcula entonces a partir de la intensidad de los polos y de sus distancias, por la ecuación

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \Sigma \frac{m}{r^2} \text{ (suma vectorial).} \qquad [15\text{-}3]$$

De un modo más general, si los polos están distribuídos sobre superficies o en el interior de volúmenes, se calcula H por la ecuación

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{dm}{r^2} \text{ (suma vectorial).}$$

Esto es, el campo H de los polos magnéticos varía en razón inversa del cuadrado de la distancia, como el campo E de una carga eléctrica. El sentido de H es el de alejamiento de un polo norte y acercamiento hacia un polo sur. La definición completa de excitación magnética es, por consiguiente,

$$H = \left[\frac{1}{4\pi} \int \frac{i\, dl \operatorname{sen} \theta}{r^2} + \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{dm}{r^2}\right] \text{ (suma vectorial).} \qquad [15\text{-}4]$$

EJEMPLO.—En la figura 15-10, un largo conductor rectilíneo, perpendicular al plano del papel, transporta una corriente de intensidad i. Una barra imantada, que tiene en sus extremos polos puntuales de masa m, descansa sobre el plano del papel. ¿Cuál es el valor y sentido de la excitación magnética H en el punto P?

Los vectores H_i, H_N y H_S representan las componentes de H debidas, respectivamente, a la corriente y a los polos N y S del imán. Consideremos primero H_i. La densidad de flujo B en el punto P, debida a la corriente de intensidad i, es:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{a},$$

y puesto que en el vacío, $H = \dfrac{B}{\mu_0}$,

$$H_i = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{a}$$

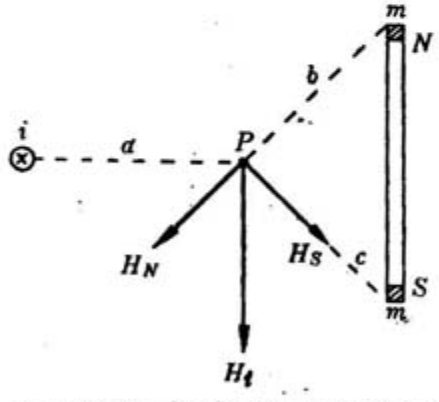


FIG. 15-10.—Excitación magnética en un punto del espacio debida a los polos del imán y a la corriente del conductor.

Naturalmente, se hubiera obtenido el mismo resultado integrando el primer término de la Ec. [15-4].

Las componentes H_N y H_S son, respectivamente,

$$H_N = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{b^2};$$

$$H_S = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{c^2}$$

La resultante de estos tres vectores es la excitación magnética H en el punto P.

15-8. Imantación de una barra.—Podemos comprender ahora por qué la imantación de una barra es un fenómeno tan complejo. Supongamos una barra de hierro colocada en un campo magnético que era uniforme antes de introducir la barra; p. ej., el campo en el centro de un largo solenoide. El valor de H en cualquier punto, antes de introducir la barra, está dado por el primer término de la Ec. [15-4], puesto que no existen polos. Además, si se mantiene constante la corriente en el solenoide, esta componente de H permanece a su vez constante después de introducir la barra.

Su valor está dado por

$$H_t = \frac{Ni}{l}$$

Tan pronto como se introduce la barra se convierte en un imán y aparecen en sus extremos polos norte y sur. Las líneas de fuerza de H_m, componente de H producida por los polos, se han representado en la figura 15-11 por las líneas de trazos. Se observará que el sentido de esta componente dentro de la barra es opuesto al de H_t. Además, el valor de H_m no es el mismo en todos los puntos, sino que es grande en la proximidad de los polos y mucho más débil en el centro de la barra. La excitación magnética resultante varía, por tanto, considerablemente de un punto a otro de la barra, no quedando ésta uniformemente imantada, y sus polos no permanecen confinados en sus caras extremas, como en el ejemplo idealizado de la figura 15-8. No es posible llevar a cabo analíticamente un estudio exacto del problema, ya que habría de tenerse en cuenta la forma de la curva de imantación del hierro. Sin embargo, los polos estarán, más o menos, localizados en los extremos de la barra y su contribución a la excitación magnética en los

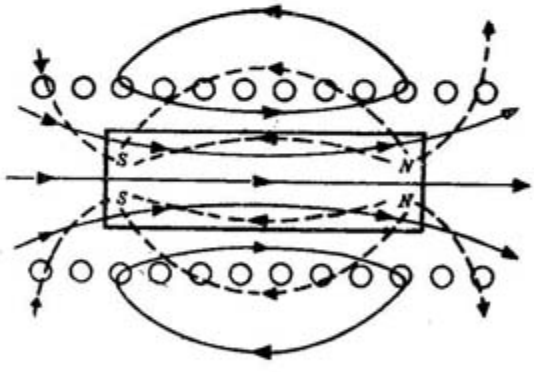


FIG. 15-11.—Líneas de fuerza magnética H, que rodean una barra de hierro colocada en el interior de un solenoide. Las líneas continuas representan a H_t, campo del solenoide; las líneas de trazos representan a H_m, campo de la barra imantada.

puntos próximos al centro será pequeña. En consecuencia, la excitación magnética en el centro está determinada principalmente por la corriente del solenoide, y puede calcularse conociendo esta corriente y el número de espiras por unidad de longitud. Si la longitud de la barra es superior a unas 10 veces su diámetro, el campo inverso o *desmagnetizante* en su centro, debido a sus polos, puede en general despreciarse.

Resultará ahora evidente por qué se eligió un anillo de Rowland para iniciar el estudio de la imantación, ya que no existen polos y el campo H se debe enteramente a la corriente en los arrollamientos magnetizantes.

15-9. Par de fuerzas ejercido sobre una barra imantada.—Una barra imantada (o una aguja de brújula) se dispone, si está libre para girar, de modo que su eje coincida con la dirección del campo exterior en el cual está colocada. El par que la orienta en la dirección del campo se atribuye frecuentemente a fuerzas ejercidas sobre los polos del imán. Tratemos de armonizar este punto de vista con el de las corrientes superficiales equivalentes.

En la figura 15-12(a) se ha representado un solenoide de longitud l y sección A, que tiene N espiras y transporta una corriente i. El solenoide

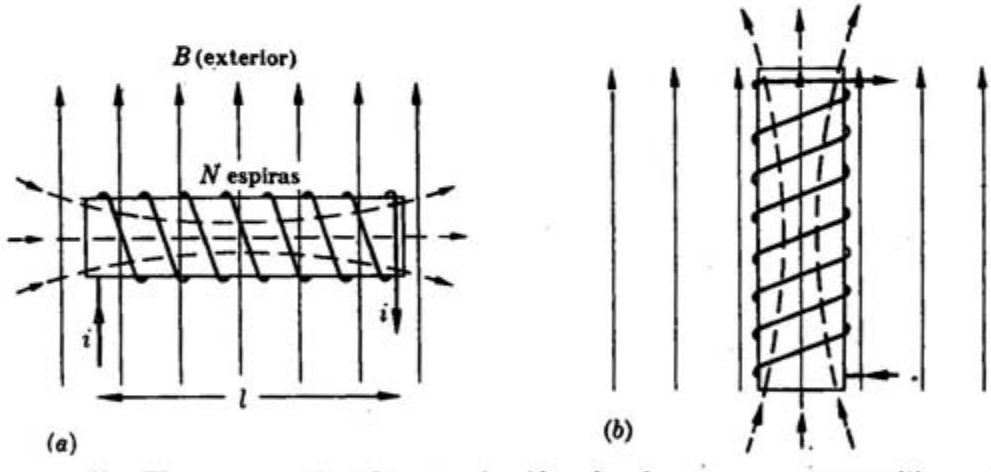


FIG. 15-12.—El par que actúa sobre un solenoide colocado en un campo magnético es ta que lo hace girar hasta la posición (b).

se encuentra en un campo magnético exterior, de densidad de flujo B y perpendicular a l, estando el sistema en el vacío o en el aire. El momento del par ejercido sobre las N espiras del solenoide es:

$$\tau = BNiA.$$

El sentido del par es tal que tiende a hacer girar el solenoide hacia una posición en la cual las líneas de inducción que atraviesan cada espira, debidas a la corriente en la misma, tienen idéntica dirección y sentido que la inducción exterior. La posición de equilibrio está representada en la figura 15-12(b).

La figura 15-13 representa una barra imantada con sus corrientes superficiales equivalentes y sus polos N y S, situada también en un campo exterior perpendicular al imán. Si $(Ni)_s$ representa el número de amperios-vueltas equivalentes de las corrientes superficiales, el momento del par ejercido sobre el imán es:

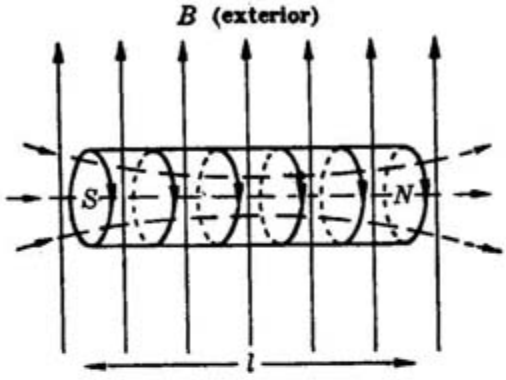


FIG. 15-13.—Barra imantada con sus corrientes superficiales equivalentes y sus polos N y S.

$$\tau = B(Ni)_s A.$$

Pero hemos demostrado que

$$\mathcal{J} = \mu_0 \left(\frac{Ni}{l}\right)_s = \frac{m}{A}$$

y, por tanto,

$$(Ni)_s = \frac{ml}{\mu_0 A} \qquad [15\text{-}5]$$

En consecuencia,

$$\tau = B\frac{ml}{\mu_0 A} A = \frac{B}{\mu_0} ml.$$

Dado que el sistema está en el vacío o en el aire,

$$\frac{B}{\mu_0} = H,$$

y

$$\tau = Hml. \qquad [15\text{-}6]$$

(Obsérvese que B y H se refieren al campo *exterior* y no al propio campo del imán. El imán no puede ejercer un par sobre sí mismo.)

Cabe interpretar esta ecuación como sigue. Supongamos que sobre cada polo del imán, de intensidad m, se ejerce una fuerza

$$F = Hm, \qquad [15\text{-}7]$$

teniendo esta fuerza el mismo sentido que H si actúa sobre un polo norte y opuesto a H si lo hace sobre un polo sur (Fig. 15-14). Puesto que los polos están separados por una distancia l, el momento del par ejercido sobre el imán es:

$$\tau = Fl = Hml,$$

que coincide con la Ec. [15-6].

Por consiguiente, podemos considerar el par como debido a las corrientes superficiales equivalentes, y calcularlo mediante la ecuación

$$\tau = B(Ni)_s A,$$

o debido a fuerzas ejercidas sobre los polos del imán y obtenerlo a partir de la ecuación

$$\tau = Hml.$$

Para completar este estudio debemos deducir aún otra relación más. La excitación magnética en un punto P, situado a una distancia r de un polo puntual de intensidad m, es, según la Ec. [15-3],

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m}{r^2}$$

En virtud de la Ec. [15-7], la fuerza sobre un segundo polo puntual de intensidad m', situado en P, es:

$$F = Hm'.$$

Por consiguiente, la fuerza ejercida por un polo sobre el otro será:

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{mm'}{r^2} \quad [15\text{-}8]$$

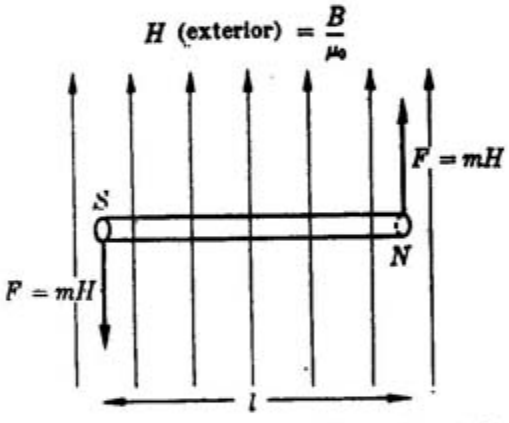


FIG. 15-14.—Par sobre una barra imantada interpretado como consecuencia de las fuerzas que actúan sobre los polos.

Si los polos son iguales la fuerza es repulsiva; si son distintos, la fuerza es atractiva.

Esta ecuación tiene precisamente la misma forma que la ley de Coulomb, que expresa la fuerza entre cargas puntuales, y a veces se toma como punto de partida para deducir todas las ecuaciones del magnetismo. Sin embargo, puesto que ahora se cree que los fenómenos magnéticos de las sustancias imantadas son realmente debidos a sus electrones giratorios, y que los *polos* de un cuerpo imantado son sólo un artificio matemático cómodo, parece preferible fundamentar las ecuaciones del magnetismo sobre la ley general que expresa la fuerza que se ejerce entre cargas móviles.

15-10. Momento magnético. Magnetómetro.—Escribamos la Ec. [15-5] en la forma

$$ml = \mu_0(Ni)_s A.$$

El segundo miembro es, por definición, el momento magnético total de las corrientes superficiales equivalentes de una barra imantada. Por consiguiente, el momento magnético del imán puede expresarse también como producto de la intensidad de polo por la distancia, ml. En esta forma resulta completamente análoga al momento p de un dipolo eléctrico,

$$p = ql,$$

y resulta ahora evidente por qué se aplicó el término *dipolo* al par de cargas eléctricas. Si representamos el momento magnético por el símbolo único M, se tiene:

$$M = ml,$$

y la Ec. [15-6] puede escribirse:

$$\tau = HM, \quad M = \frac{\tau}{H} \qquad [15\text{-}9]$$

En el estudio anterior hemos supuesto los polos puntuales y concentrados en los extremos del imán. Pero suceda o no esto, cualquier barra imantada experimentará cierto par de momento τ en un punto en que la excitación magnética es H. Cabe utilizar, por consiguiente, la ecuación [15-9],

$$M = \frac{\tau}{H},$$

como un método experimental para determinar el momento magnético *efectivo* o *equivalente* de cualquier barra imantada. Es decir, el momento magnético M puede *definirse* como la razón del momento ejercido sobre la barra a la excitación magnética exterior. Inversamente, si se conoce el momento magnético M de un imán, puede medirse una excitación magnética desconocida si se determina el momento del par que ejerce sobre el imán. Este procedimiento se denomina *método del magnetómetro* para medir la excitación magnética, o para comparar las excitaciones magnéticas en dos puntos.

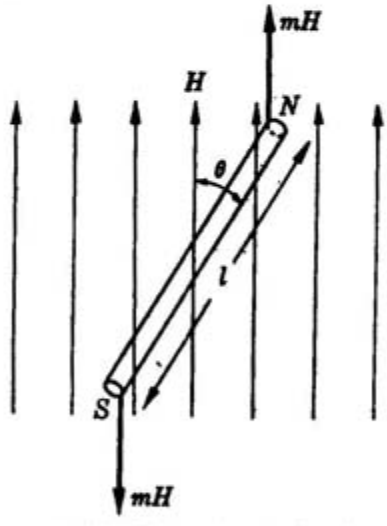


FIG. 15-15.—Barra imantada pivotada en su centro, oscilando en un campo magnético uniforme.

La figura 15-15 representa una vista superior de una barra imantada colocada en un campo horizontal H. El imán puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro, bien por estar suspendido de un hilo soporte, o pivotado como una aguja de brújula.

Cuando se desplaza el imán de su posición de equilibrio un ángulo θ, el par recuperador es:

$$\tau = -mH \times l \operatorname{sen} \theta$$
$$= -HM \operatorname{sen} \theta.$$

Se introduce el signo menos puesto que se trata de un par *recuperador* y el momento es, por definición, igual a $-HM$ sen θ aunque los polos no estén concentrados en los extremos del imán.

Si θ es pequeño se puede reemplazar sen θ por θ:

$$\tau = -HM\theta.$$

Ésta es la condición necesaria para el movimiento armónico de rotación y, por consiguiente, el imán oscila alrededor de su posición de equilibrio con un período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{HM}},$$

donde I_0 es el momento de inercia del imán respecto a su centro de gravedad. La excitación magnética H puede calcularse, por tanto, si se conocen los otros factores.

Midiendo los períodos T_1 y T_2 en dos puntos en que las excitaciones magnéticas son, respectivamente, H_1 y H_2, se tiene:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}},$$

por lo que puede determinarse la *razón* de H_2 a H_1 sin conocer I_0 ni M.

15-11. Circuito magnético.—Como hemos visto, cada línea de inducción es una línea cerrada. Aunque no hay nada que fluya a lo largo de estas líneas, es útil establecer una analogía entre las trayectorias

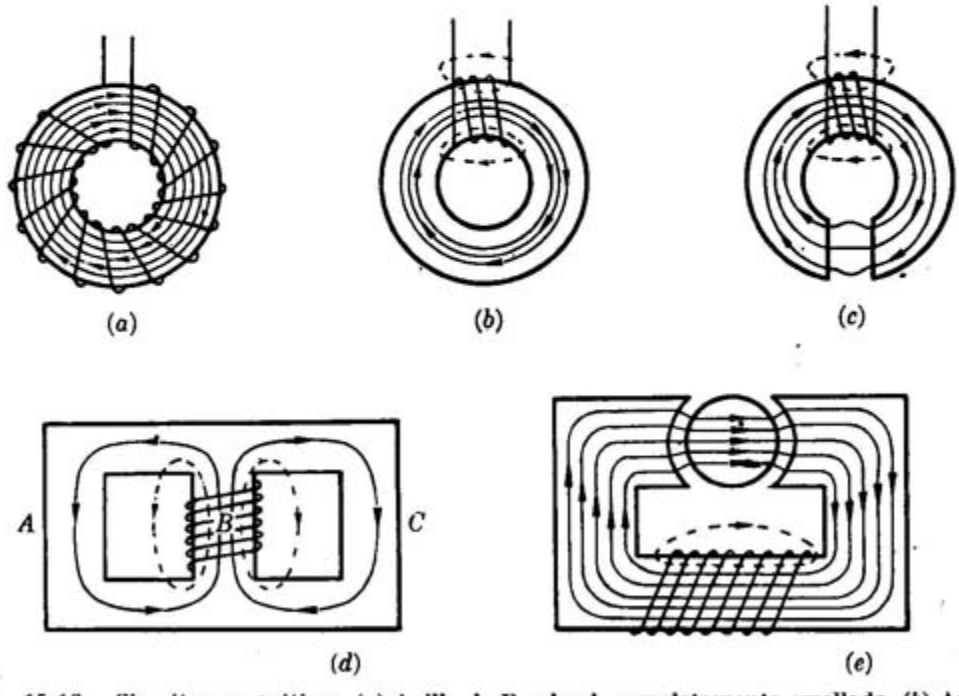


FIG. 15-16.—Circuitos magnéticos. (*a*) Anillo de Rowland, completamente arrollado. (*b*) Anillo de Rowland, parcialmente arrollado, mostrando dispersión de flujo. (*c*) Dispersión en un entrehierro de aire. (*d*) Dispersión en un núcleo de transformador. (*e*) Dispersión en el núcleo de un motor o generador.

cerradas de las líneas de flujo y un circuito cerrado conductor por el cual circula una corriente. La región ocupada por el flujo magnético se denomina *circuito magnético*, del cual el ejemplo más sencillo es el anillo de Rowland. Cuando el enrollamiento sobre la superficie del anillo es muy apretado, todas las líneas de flujo están prácticamente confinadas en el mismo [Fig. 15-16(*a*)]. Aun cuando el enrollamiento estuviera limitado a una pequeña porción del anillo, como en la figura 15-16(*b*), la permeabilidad de éste es tan grande, respecto a la del aire que lo rodea, que la mayor parte del flujo queda todavía confinado en la sustancia que forma el anillo. La pequeña parte que vuelve después de efectuar un recorrido en el aire se denomina *flujo disperso* y se ha representado por líneas de trazos.

Si el anillo contiene un espacio de aire, como sucede en la figura 15-16(*c*), se producirá cierta dispersión de líneas de flujo en el espacio (entrehierro), pero la mayor parte del flujo se confina de nuevo en una trayectoria bien definida. Este circuito magnético puede imaginarse constituído por un anillo de hierro *en serie* con un entrehierro de aire.

La figura 15-16(*d*) representa la sección de un núcleo de transformador de tipo corriente. Aquí el circuito magnético se ha dividido, y puede considerarse que las partes A y C están *en paralelo* entre sí y en serie con la parte B.

La figura 15-16(*e*) es el circuito magnético de un motor o de un generador. Los dos entrehierros están en serie con la parte de hierro del circuito.

Uno de los problemas importantes al proyectar un aparato en el cual hay un circuito magnético, es calcular la densidad de flujo que ocasionaría una corriente conocida, en un enrollamiento determinado y sobre un núcleo dado; o inversamente, proyectar un núcleo y un arrollamiento para producir una densidad de flujo deseada. Vamos a considerar ahora este problema, aunque naturalmente, no se tendrán en cuenta, para simplificar, muchos factores que se presentan en la práctica.

Consideremos, en primer lugar, un anillo cerrado (sin entrehierro) de sección uniforme. Hemos demostrado que dentro del anillo,

$$B = \mu H = \mu \frac{Ni}{l},$$

y, dado que $\Phi = BA$,

$$\Phi = \mu \frac{NiA}{l},$$

o sea,

$$\Phi = \frac{Ni}{l/\mu A} \qquad [15\text{-}10]$$

Ahora bien: la resistencia R de un conductor de sección uniforme A, longitud l y resistividad ρ está dada por

$$R = \rho \frac{l}{A},$$

o sea, en función de la conductividad σ ($\sigma = 1/\rho$),

$$R = \frac{l}{\sigma A}$$

Si dicho conductor está conectado a los bornes de un generador de fem, de resistencia interna despreciable, la ecuación del circuito se convierte en

$$I = \frac{\text{fem}}{l/\sigma A}$$

La forma de esta ecuación es la misma que la de la Ec. [15-10], correspondiendo la intensidad de la corriente al flujo magnético, la magnitud Ni a la fuerza electromotriz, y $l/\mu A$, a la resistencia. Teniendo en cuenta esta analogía, el numerador de la Ec. [15-10] se denomina *fuerza magnetomotriz*, y el denominador, *reluctancia* del circuito magnético:

$$\text{Fuerza magnetomotriz (fmm)} = Ni, \qquad [15\text{-}11]$$

$$\text{Reluctancia } (\mathcal{R}) = l/\mu A, \qquad [15\text{-}12]$$

y la Ec. [15-10] puede escribirse:

$$\Phi = \frac{\text{fmm}}{\mathcal{R}} \qquad [15\text{-}13]$$

La fuerza magnetomotriz se expresa, evidentemente, en *amperios-vueltas*, y la reluctancia, en *amperios-vueltas por weber*. La reluctancia de un circuito magnético es el número necesario de amperios-vueltas por weber de flujo magnético en el circuito.

La ventaja de escribir la expresión del flujo en un circuito magnético en la forma que indica la Ec. [15-13] aparece más clara cuando se considera un circuito que contiene un entrehierro (o con mayor generalidad, cuando el circuito se compone de partes de diferentes permeabilidades, longitudes y secciones). Resulta que la *reluctancia equivalente* de tal circuito puede calcularse del mismo modo que la resistencia equivalente de una red de conductores; p. ej., un anillo que contiene un entrehierro corresponde a dos resistencias en serie, y la reluctancia equivalente del circuito es la suma de las reluctancias del anillo y del entrehierro. Las ramas A y C [Fig. 15-16(d)] están en paralelo, y la inversa de su reluctancia equivalente es la suma de las inversas de las reluctancias de las ramas aisladas. Para un circuito magnético *serie* se tiene:

$$\Phi = \frac{\text{fmm}}{\Sigma\mathcal{R}} = \frac{\text{fmm}}{\Sigma(l/\mu A)} = \frac{\text{fmm}}{l_1/\mu_1 A_1 + l_2/\mu_2 A_2 + \ldots}, \qquad [15\text{-}14]$$

siendo l_1, l_2, etc., las longitudes de las diversas partes del circuito; μ_1, μ_2, etcétera, las permeabilidades correspondientes, y A_1, A_2, etc., las secciones.

Los resultados anteriores son correctos, con gran aproximación, si la dispersión de flujo es pequeña.

EJEMPLO 1.—La longitud de la circunferencia media de un anillo de Rowland es 50 cm y su sección 4 cm². Utilícese la curva de permeabilidad de la figura 15-1 y calcúlese la fuerza magnetomotriz necesaria para establecer un flujo de 4×10^{-4} wb en el anillo. ¿Cuál es la corriente necesaria si el anillo tiene un enrollamiento de 200 vueltas de hilo?

La densidad de flujo deseada es:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{4 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-4}} = 1 \text{ wb/m}^2$$

En virtud de la figura 15-1, la permeabilidad para esta densidad de flujo es, aproximadamente, 65×10^{-4} wb/A-m. Por consiguiente, la reluctancia será:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} = \frac{0{,}5}{65 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^{-4}} = 1{,}92 \times 10^5 \text{ A-vueltas/wb},$$

y, puesto que fmm $= \Phi\mathcal{R}$, la fuerza magnetomotriz necesaria es:

$$\text{fmm} = 4 \times 10^{-4} \times 1{,}92 \times 10^5 = 77 \text{ A-vueltas}.$$

Si el anillo está enrollado con 200 vueltas, la corriente requerida es 0,385 A.

EJEMPLO 2.—Si cortamos en el anillo un entrehierro de un milímetro de longitud, ¿qué corriente es necesaria para mantener el mismo flujo?

La reluctancia del entrehierro de aire es:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 A} = \frac{10^{-3}}{12{,}57 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^{-4}} = 20 \times 10^5 \text{ A-vueltas/wb}.$$

Despreciando la pequeña variación de longitud del hierro, su reluctancia es la misma que anteriormente, o sea, $1{,}92 \times 10^5$ A-vueltas/wb. Así vemos que la reluctancia del entrehierro, aunque sólo tiene 1 mm de longitud, es diez veces mayor que la de la parte de hierro del circuito. La reluctancia del circuito completo es ahora $20 \times 10^5 + 1{,}92 \times 10^5 = 22 \times 10^5$ A-vueltas/wb. El número de amperios vueltas necesario es 880, y la intensidad de corriente correspondiente 4,4 A.

Si se desea calcular el flujo o la densidad de flujo creado por una fmm dada en un circuito magnético que tiene un entrehierro, el problema no puede resolverse tan fácilmente. Para calcular la reluctancia, ha de conocerse la permeabilidad, y el valor de ésta depende de la densidad de flujo, que es precisamente la magnitud que se trata de calcular. Sin embargo, puede obtenerse una solución por un proceso de aproximación. Se supone un valor de la densidad de flujo y se busca la permeabilidad correspondiente sobre la gráfica o en la tabla. Se calcula entonces la reluctancia utilizando este valor de la permeabilidad, y se calcula la fmm mediante la ecuación fmm $= \Phi\mathcal{R}$. Si la densidad de flujo supuesta era correcta, esta fmm sería igual a Ni. Si no fueran iguales, se supone un nuevo valor del flujo y se repite el proceso. Al cabo de unos pocos ensayos un calculista experimentado es capaz de asegurar una aproximación tan grande como se desee.

15-12. Deducción de la ecuación del circuito magnético.—Al deducir la ecuación del flujo en un circuito magnético será útil comenzar por generalizar la Ec. [11-9], la cual establece que la integral curvilínea de la inducción magnética a lo largo de una curva cerrada es igual a μ_0 veces la corriente que atraviesa la superficie limitada por la curva:

$$\oint B \cos \theta \, dl = \mu_0 i.$$

La figura 15-17 es la sección de un anillo de Rowland. Los pequeños círculos fuera del anillo representan los arrollamientos magnetizantes, y los interiores, las corrientes superficiales equivalentes. La circunferencia de trazos es una línea de flujo cerrada de longitud l, habiéndose sombreado la superficie limitada por ella. La densidad de flujo en el anillo es:

$$B = \mu_0 \left[\left(\frac{Ni}{l} \right) + \left(\frac{Ni}{l} \right)_s \right],$$

y, por consiguiente,

$$Bl = \mu_0 \left[(Ni) + (Ni)_s \right]$$

Pero, en este caso especial, Bl es igual a la integral curvilínea de B a lo largo de la circunferencia de trazos, mientras que la suma $[(Ni) + (Ni)_s]$ es la corriente *total* que atraviesa el área rayada, corriente magnetizante más corrientes superficiales equivalentes.

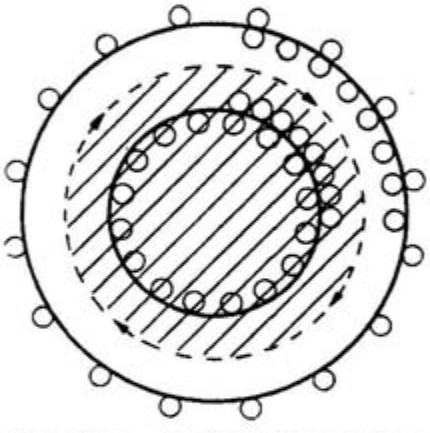


FIG. 15-17.—Sección transversal de un anillo de Rowland.

De otro modo, cuando una curva cerrada se encuentra en el interior de una sustancia imantada, *la integral curvilínea de B a lo largo de la curva es igual a μ_0 veces la corriente neta total que atraviesa la superficie encerrada; es decir, corriente magnetizante más corrientes superficiales equivalentes.*

Por otra parte, se define la excitación magnética H, como el campo debido a la corriente magnetizante más el campo debido a los polos, si existen. Si el anillo es cerrado, como indica la figura 15-17, no hay polos, y según la Ec. [15-4] tenemos:

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \frac{i \, dl \operatorname{sen} \theta}{r^2} = \frac{Ni}{l},$$

Por consiguiente,

$$\oint H \cos \theta \, dl = \oint \frac{Ni}{l} \, dl = Ni$$

y la integral curvilínea de H es igual al número de amperios-vueltas del arrollamiento.

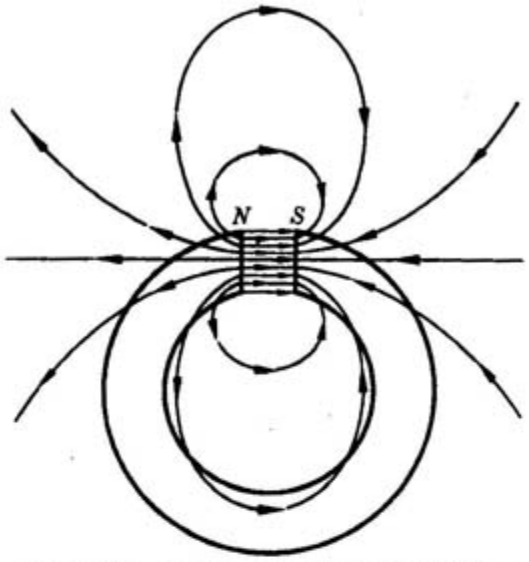


FIG. 15-18.—Campo H debido a los polos correspondientes al entrehierro de un anillo de Rowland.

Si existe en el anillo un entrehierro, como sucede en la figura 15-16(*c*), aparecen polos en las caras del mismo y su campo se suma vectorialmente al campo de los arrollamientos magnetizantes. El campo H en la proximidad de los polos es análogo al campo E en la proximidad de un par de cargas + y −, como indica la figura 15-18. Dentro del entrehierro, este campo tiene el sentido de las agujas del reloj, y dentro del material del anillo tiene sentido contrario. Calculando la integral curvilínea de H a lo largo de la curva de puntos, resulta una contribución positiva de la porción de curva situada dentro del entrehierro, y una contribución negativa de la parte interior al hierro. No es difícil demostrar que ambas se compensan exactamente, es decir, que la integral curvilínea de la parte de H que resulta de los polos del imán es nula. (La demostración es idéntica a la utilizada para probar que en un campo electrostático $\oint E \cos\theta \, dl = 0$.) Por consiguiente, la integral curvilínea de H alrededor de cualquier curva cerrada es igual a la corriente neta *magnetizante* que atraviesa la superficie cerrada.

Para resumir, se tiene:

$$\oint B \cos\theta \, dl = \mu_0 \times \text{corriente neta total que atraviesa la superficie encerrada}$$

$$= \mu_0 [Ni + (Ni)_s]. \qquad [15\text{-}15]$$

$$\oint H \cos\theta \, dl = \text{corriente neta magnetizante que atraviesa la superficie encerrada}$$

$$= Ni. \qquad [15\text{-}16]$$

Estas ecuaciones deben compararse con las Ecs. [7-10] y [7-13] de la sección 7-4, que se refieren a integrales de superficie análogas en un campo eléctrico, cuando la superficie se encuentra dentro de una sustancia polarizada.

Apliquemos ahora la Ec. [15-16] a un circuito magnético. Tomemos

como curva cerrada la que limita el área sombreada de la figura 15-19. Sea l_1 la longitud de dicha curva que se encuentra dentro del hierro, y l_2 la longitud en el entrehierro de aire. Debido a la presencia de polos en los extremos del hierro que forman la rendija, la excitación magnética en el hierro no es la misma que en el entrehierro. Sea H_1 la excitación magnética en el hierro, y H_2, en el entrehierro, y sean μ_1 y μ_2 las correspondientes permeabilidades. Supondremos que H_1 y H_2 son uniformes en sus respectivas regiones. La integral curvilínea de H a lo largo de la curva que limita la superficie rayada se reduce entonces a

$$H_1 l_1 + H_2 l_2.$$

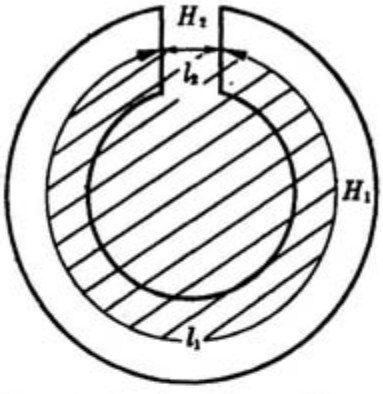


FIG. 15-19.—Circuito magnético con un entrehierro.

Cada espira del arrollamiento magnetizante atraviesa una vez el área rayada. Si hay N espiras en el arrollamiento la corriente magnetizante a través del área rayada es Ni. En consecuencia, de la Ec. [15-16] se deduce:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = Ni \qquad [15\text{-}17]$$

La magnitud B es la densidad de flujo debida a las corrientes que circulan por los conductores y a los circuitos electrónicos o corrientes superficiales equivalentes. Los flujos creados por estos tipos de manantiales se asemejan en que ambos están formados por líneas cerradas que rodean a las corrientes que los originan. Las líneas de inducción en el circuito magnético son, por tanto, continuas alrededor del circuito, y el *flujo que atraviesa cualquier sección es el mismo que el que atraviesa a otra.* (Esta conclusión puede comprobarse experimentalmente realizando medidas con la bobina exploradora.) Por consiguiente, si A_1 y A_2 son las secciones transversales del hierro y del entrehierro, y Φ es el flujo del circuito:

$$B_1 = \frac{\Phi}{A_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi}{A_2},$$

y en el hierro tenemos:

$$B_1 = \mu_1 H_1, \quad \text{o} \quad H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{\Phi}{\mu_1 A_1},$$

mientras que en el entrehierro,

$$H_2 = \frac{\Phi}{\mu_2 A_2}$$

Introduciendo estos valores en la Ec. [15-17], obtenemos:

$$\frac{\Phi l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\Phi l_2}{\mu_2 A_2} = Ni$$

o, finalmente,

$$\Phi = \frac{Ni}{\dfrac{l_1}{\mu_1 A_1} + \dfrac{l_2}{\mu_2 A_2}}$$

15-13. Energía por unidad de volumen en un campo magnético.—Se ha demostrado que se requiere cierta cantidad de energía, $\frac{1}{2}Li^2$, para establecer una corriente i en una autoinducción L. Es costumbre asociar esta energía al campo magnético de la autoinducción, y considerarla distribuída por el campo con una cierta densidad. La expresión que da la densidad de energía se deduce fácilmente con ayuda de un anillo de Rowland, dentro del cual el campo magnético tiene un valor constante, de modo que, por simetría, la energía por unidad de volumen es constante en todo el volumen del anillo.

Cuando la corriente en los arrollamientos es i, la energía asociada con el campo es:

$$W = \tfrac{1}{2}Li^2.$$

Hemos demostrado que la autoinducción puede definirse como

$$L = \frac{N\Phi}{i},$$

y que el flujo dentro de un arrollamiento toroidal es:

$$\Phi = \frac{Ni}{l/\mu A} = BA = \mu HA.$$

Combinando estas ecuaciones, y recordando que el volumen del anillo es Al, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Densidad de energía} = \frac{W}{Al} &= \tfrac{1}{2}BH \\ &= \tfrac{1}{2}\mu H^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\,\frac{B^2}{\mu} \end{aligned}$$

En el sistema mks, la densidad de energía se expresa en julios por metro cúbico. Obsérvese que estas expresiones son idénticas en su forma a las de la densidad de energía en un campo eléctrico (Sec. 8-8).

PROBLEMAS

15-1. Partiendo de los datos de la tabla 15-1, constrúyase una gráfica de K_m en función de B para el hierro templado, en un intervalo de B desde cero hasta 1,5 wb/m².

15-2. La tabla 15-3 relaciona los valores de H y B para una muestra comercial de acero al silicio, laminado en caliente, material que se emplea con frecuencia en los núcleos de los transformadores. *a*) Constrúyanse las gráficas de B y μ en función de H, para un intervalo desde $H = 0$ hasta $H = 1000$ A-vueltas/m. *b*) ¿Cuál es la permeabilidad máxima? *c*) ¿Cuál es la permeabilidad inicial ($H = 0$)? *d*) ¿Cuál es la permeabilidad cuando es $H = 800\,000$ A-vueltas/m?

TABLA 15-3

Propiedades magnéticas de un acero al silicio

Excitación magnética H $\frac{\text{A-vueltas}}{\text{m}}$	Densidad de flujo B $\frac{\text{wb}}{\text{m}^2}$
0	0
10	0,050
20	0,15
40	0,43
50	0,54
60	0,62
80	0,74
100	0,83
150	0,98
200	1,07
500	1,27
1000	1,34
10000	1,65
100000	2,02
800000	2,92

15-3. Supongamos una barra cilíndrica de Alnico 5, de 1 cm de diámetro y 10 cm de longitud que está imantada uniforme y permanentemente con una intensidad de imantación de 1,2 wb/m². *a*) ¿Cuál es la intensidad de polo en los extremos del imán? *b*) ¿Cuál es el momento magnético del imán? *c*) ¿Cuál es el momento del par ejercido sobre el imán cuando está suspendido en el aire perpendicularmente a un campo magnético de densidad de flujo 1 mwb/m². *d*) Compárese el valor de H en el campo anterior con la fuerza coercitiva del Alnico 5.

15-4. Un enrollamiento solenoidal de 100 vueltas de hilo está devanado sobre una varilla de madera de las mismas dimensiones que la barra imantada del problema 15-3. ¿Qué intensidad de corriente ha de enviarse a través del hilo para que el momento del par que actúa sobre el solenoide en un campo exterior sea igual al momento del par que se ejerce sobre la barra imantada?

15-5. Trácese un esquema de las líneas de inducción de una esfera diamagnética en un campo exterior uniforme.

15-6. Se hace referencia a la figura 15-10. Sea 8 cm la longitud del imán y $m = 10^{-5}$ wb su intensidad de polo. Sean: $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 5$ cm e $i = 100$ A. Calcúlese el valor de la excitación magnética H en el punto P.

15-7. Un anillo de Rowland tiene una sección de 2 cm², una longitud de circunferencia media de 30 cm, y su enrollamiento tiene 400 vueltas. Calcúlese la intensidad de corriente necesaria para crear una densidad de flujo de 0,1 wb/m² en el anillo: *a*) si el anillo es de hierro templado (tabla 15-1); *b*) si el anillo es de acero al silicio (tabla 15-3). *c*) Repítanse los cálculos anteriores si la densidad de flujo deseada es 1,2 wb/m².

15-8. Se hace referencia al Ejemplo 2 (Sec. 15-11). Calcúlese la intensidad de corriente requerida para establecer un flujo de 4×10^{-4} wb en el anillo, si es de acero al silicio (tabla 15-3).

15-9. Se hace referencia al Ejemplo 2 (Sec. 15-11). Calcúlese el flujo en el anillo si la corriente en los arrollamientos es 6 A.

15-10. Se hace referencia al Ejemplo 2 (Sec. 15-11). *a*) Calcúlese la densidad de energía en el entrehierro y en el hierro.

b) Calcúlese la cantidad de energía en el entrehierro y en el hierro.

15-11. Un hilo de cobre de radio a transporta una corriente constante i. *a*) ¿Cuál es la densidad de flujo en un punto interior del hilo, a una distancia r de su eje? *b*) Calcúlese la densidad de energía magnética en los puntos situados dentro de una capa cilíndrica delgada de radio r, espesor dr y longitud l. *c*) Hállese la energía magnética total dentro de una porción de hilo de longitud l. *d*) Calcúlese la autoinducción del hilo, por unidad de longitud, debida al flujo interior.

CAPÍTULO XVI

CORRIENTES ALTERNAS

16-1. Circuito en serie en corriente alterna.—En la sección 12-6 se explicó que un cuadro de hilo conductor, que gira con velocidad angular constante en un campo magnético uniforme, produce una fem alterna sinusoidal. Este sencillo dispositivo es el prototipo de los generadores industriales de corriente alterna, o alternadores, representándose en la figura 16-1 la estructura del inductor y del inducido. Alrededor de la circunferencia interna del *estator* están distribuídos cierto número de pares de polos. Como cada conductor situado sobre la superficie del inducido o *rotor* corta el campo magnético, se produce en él una fem inducida, en determinado sentido cuando el conductor pasa por un polo norte y en sentido opuesto cuando pasa por un polo sur. La fem inducida es, por consiguiente, alterna, y el número de ciclos completos en cada vuelta es igual al número de *pares* de polos. Esta disposición multipolar permite alcanzar una frecuencia suficientemente grande sin que sea necesario utilizar una velocidad angular peligrosamente elevada.

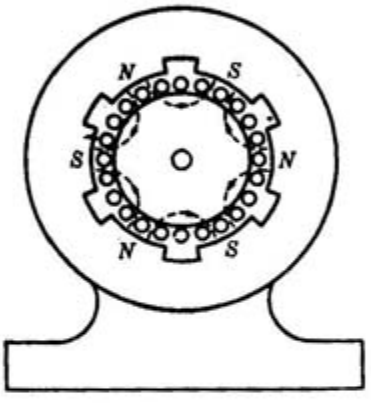


FIG. 16-1.—Esquema de un generador industrial de corriente alterna.

La fem inducida de un alternador industrial puede diferir de la forma sinusoidal perfecta, pero, a menos que no se diga expresamente otra cosa, supondremos en este capítulo que utilizamos un alternador que mantiene entre sus bornes una diferencia de potencial sinusoidal dada por

$$v = V_m \operatorname{sen} 2\pi f t, \qquad [16\text{-}1]$$

siendo v la diferencia de potencial instantánea, V_m la diferencia de potencial máxima y f la frecuencia, igual al número de revoluciones por segundo del rotor multiplicado por el número de pares de polos. En Norteamérica, para muchos de los alternadores, $f = 60$ ciclos/seg.

Vamos a determinar ahora la intensidad de corriente que se obtiene en un circuito cuando se mantiene entre sus bornes una diferencia de potencial sinusoidal alterna. Sea un circuito constituído por una resistencia, una autoinducción y un condensador, conectados en serie entre los bornes de un alternador, como se representa en la figura 16-2. La diferencia de potencial instantánea entre a y b es la suma de las diferencias de potencial instantáneas entre los bornes de R, L y C. Esto es,

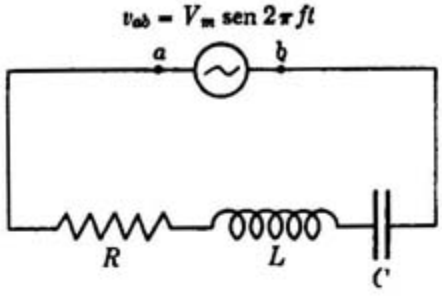


FIG. 16-2.—Circuito formado por una resistencia, una autoinducción y una capacidad dispuestas en serie.

$$V_m \operatorname{sen} 2\pi ft = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C},$$

siendo i, di/dt y q la intensidad instantánea de la corriente, su derivada respecto al tiempo y la carga del condensador, respectivamente.

Derivando esta ecuación respecto a t, y sustituyendo dq/dt por i, se obtiene:

$$2\pi f V_m \cos 2\pi ft = R\frac{di}{d} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i.$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución es:

$$i = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}} \operatorname{sen}(2\pi ft - \varphi) + A\varepsilon^{-bt},$$

donde

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}}{R}$$

Esta ecuación parece complicada pero su interpretación no es difícil.

Consideremos en primer lugar el término $A\varepsilon^{-bt}$. Las magnitudes A y b dependen de las constantes del circuito y de las condiciones iniciales, esto es, de los valores de V, i, di/dt y q en el instante de cerrar el circuito. El factor ε^{-bt} decrece exponencialmente con el tiempo y se hace despreciable al cabo de un tiempo suficiente (de ordinario muy pequeño). Este factor es *transitorio* y aunque en la práctica las diferencias de potencial y las corrientes transitorias pueden adquirir valores peligrosamente grandes, no los tendremos en cuenta y sólo consideraremos el primer término, que se denomina solución del *estado estacionario*.

Se ve que la corriente correspondiente al estado estacionario varía sinusoidalmente con el tiempo, lo mismo que el voltaje entre los bornes. Su valor máximo es:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}}$$

La intensidad de la corriente en el estado estacionario puede escribirse, por tanto,

$$i = I_m \operatorname{sen}(2\pi ft - \varphi). \qquad [16\text{-}2]$$

La frecuencia de la intensidad de la corriente es, por tanto, la misma que la del voltaje, pero ambas difieren en la fase, o sea, están desfasadas un ángulo φ.

Introduzcamos las siguientes simplificaciones:

$$2\pi fL = X_L,$$

$$\frac{1}{2\pi fC} = X_C,$$

$$2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC} = X_L - X_C = X,$$

$$\sqrt{R^2 + X^2} = Z.$$

Entonces,

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{V_m}{Z}, \qquad [16\text{-}3]$$

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{X}{R} \qquad [16\text{-}4]$$

La magnitud Z se denomina *impedancia* del circuito; X es la *reactancia*, y X_L y X_C son la *reactancia inductiva* y la *reactancia capacitiva*, respectivamente. Las impedancias y las reactancias se expresan en ohmios.

La intensidad máxima de corriente está relacionada con la máxima diferencia de potencial por una ecuación que tiene la misma forma que la ley de Ohm, para las corrientes continuas, correspondiendo la impedancia Z a la resistencia R.

16-2. Medias cuadráticas o valores eficaces.—Los valores instantáneos de una intensidad de corriente, fem o diferencia de potencial alternas, varían de un modo continuo desde un valor máximo en un sentido, pasando por cero, hasta un máximo en sentido opuesto, y así sucesivamente. Es más cómodo estudiar las corrientes alternas considerando sus *valores cuadráticos medios* en lugar de sus valores máximos.

El valor cuadrático medio de la intensidad de una corriente variable se define como el valor de la intensidad de una corriente constante que desarrollase la misma cantidad de calor en igual tiempo y en la misma resistencia, y por esta razón se denomina al valor cuadrático medio, *valor eficaz* de la corriente variable.

La derivada respecto al tiempo de la cantidad de calor desarrollada en una resistencia R, que transporta una corriente alterna sinusoidal $i = I_m \operatorname{sen} \omega t$, es:

$$i^2R = I_m{}^2R \operatorname{sen}^2 \omega t.$$

La cantidad total de calor desarrollada en un tiempo T, igual a un período, es:

$$H = \int_0^T i^2R dt = I_m{}^2R \int_0^T \operatorname{sen}^2 \omega t\, dt = \tfrac{1}{2}\, I_m{}^2RT.$$

La cantidad de calor desarrollada por una corriente de intensidad constante I_e en el mismo tiempo es:

$$H = I_e^2 RT.$$

Puesto que por definición de I_e las cantidades de calor son iguales,

$$I_e^2 RT = \tfrac{1}{2} I_m^2 RT, \qquad I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Por consiguiente, *si la intensidad de una corriente varía sinusoidalmente*, su valor eficaz es $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ veces su valor máximo. Asimismo, el valor eficaz de una diferencia de potencial que varíe sinusoidalmente es $1/\sqrt{2}$ veces su valor máximo; p. ej., cuando se dice que la diferencia de potencial alterno entre los dos cables de una línea de suministro doméstico es 110 V, ello significa que la diferencia de potencial eficaz es 110 V, y, por consiguiente, la diferencia de potencial máxima será $110 \times \sqrt{2} = 155$ V.

Dividiendo por $\sqrt{2}$ el primero y el último miembros de la Ec. [16-3], obtenemos:

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{V_m/\sqrt{2}}{Z},$$

o sea,

$$I_e = \frac{V_e}{Z} \qquad [16\text{-}5]$$

De ahora en adelante, se interpretará que las letras I, ε o V sin subíndices, se refieren a los valores eficaces de las magnitudes correspondientes. La Ec. [16-5] se escribirá, por tanto,

$$I = \frac{V}{Z}$$

Consideremos ahora los factores que determinan la resistencia, reactancia e impedancia de un circuito. En primer lugar, la resistencia de un conductor que transporta una corriente alterna puede no ser la misma que la resistencia del mismo conductor cuando transporta una corriente constante. La diferencia se debe al hecho de que la densidad de corriente en un hilo que transporta una corriente alterna no es uniforme en toda la sección del mismo, sino mayor junto a la superficie. Este fenómeno se conoce con el nombre de efecto cortical o «efecto *skin*». La sección efectiva del conductor se reduce y su resistencia aumenta. El efecto cortical es originado por la fem autoinducida creada por las variaciones del flujo interno en un conductor, y es mayor cuanto más elevada es la frecuencia. Aunque este efecto es un factor importante para las frecuencias utilizadas en radio, puede despreciarse de ordinario para las fre-

cuencias de 60 ciclos/seg. La resistencia real de un conductor, a cualquier frecuencia, se denomina su *resistencia eficaz* para aquella frecuencia. A menos que explícitamente se diga otra cosa, no tendremos en cuenta el efecto cortical y supondremos que la resistencia de un conductor es independiente de la frecuencia.

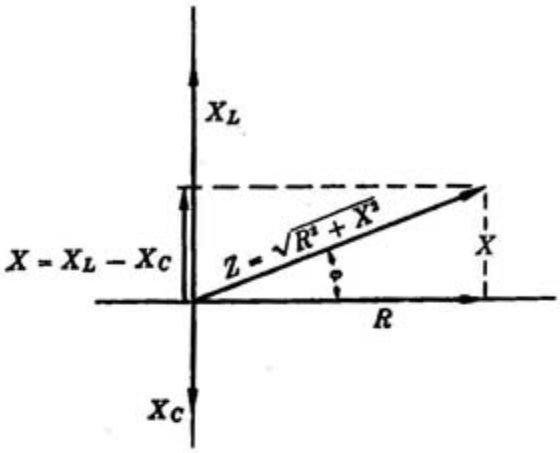


FIG. 16-3.—Diagrama del vector impedancia correspondiente al circuito en serie de la figura 16-2.

La reactancia de una autoinducción, $X_L = 2\pi fL$, es proporcional a la vez al coeficiente de autoinducción y a la frecuencia. Si hay un núcleo de hierro asociado al inductor, entonces el coeficiente de autoinducción no es constante, pero de nuevo para mayor sencillez no tendremos en cuenta esta variación.

La reactancia capacitiva, $X_C = 1/2\pi fC$, es inversamente proporcional a la capacidad y a la frecuencia.

La relación entre la impedancia Z de un circuito en serie y los valores de R, X_L y X_C puede representarse gráficamente considerando todas estas magnitudes como vectores. La resistencia R se representa por un vector situado sobre el eje X, y cuyo sentido coincide con el sentido positivo del mismo; y las reactancias X_L y X_C por vectores situados sobre el eje Y y en los sentidos positivo y negativo, respectivamente. La impedancia es el vector suma geométrica o resultante de estos tres vectores. Véase la figura 16-3, denominada *diagrama del vector impedancia* del circuito. Esta figura se ha dibujado para el caso $X_L > X_C$ y, por tanto, X es positiva. Si $X_L < X_C$, resulta X negativa y se dirige hacia abajo en vez de hacia arriba.

EJEMPLO.—Una resistencia de 600 Ω está conectada en serie con una autoinducción de 0,5 henrios y una capacidad de 0,2 μf. Calcúlese la impedancia del circuito y dibújese el diagrama del vector impedancia: *a*) para la frecuencia de 400 ciclos/seg; *b*) para 600 ciclos/seg.

a) Para 400 ciclos/seg:

$$X_L = 2\pi \times 400 \times 0{,}5 = 1256\ \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \times 400 \times 0{,}2 \times 10^{-6}} = 1990\ \Omega,$$

$$X = X_L - X_C = 1256 - 1990 = -734\ \Omega,$$

$$Z = \sqrt{(600)^2 + (-734)^2} = 949\ \Omega.$$ [Véase Fig. 16-4(*a*).]

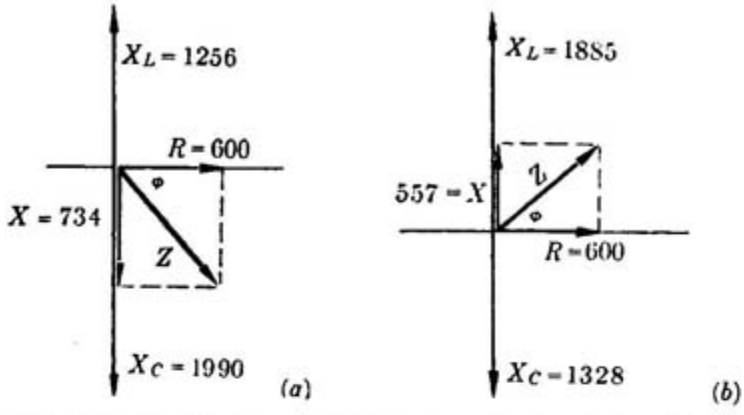


FIG. 16-4.—Diagramas del vector impedancia correspondientes al ejemplo de la sección 16-2. (*a*) $f = 400$ ciclos; (*b*) $f = 600$ ciclos.

b) Para 600 ciclos/seg:

$$X_L = 2\pi \times 600 \times 0{,}5 = 1885\ \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \times 600 \times 0{,}2 \times 10^{-6}} = 1328\ \Omega,$$

$$X = X_L - X_C = 1885 - 1328 = 557\ \Omega,$$

$$Z = \sqrt{(600)^2 + (557)^2} = 818\ \Omega.$$ [Véase Fig. 16-4(*b*).]

16-3. Relación entre las fases del voltaje y de la intensidad de corriente.—La intensidad eficaz en un circuito en serie es igual a la razón del voltaje eficaz a la impedancia del circuito. Consideremos ahora la *fase* de la intensidad de corriente respecto a la del voltaje. Las Ecs. [16-1], [16-2] y [16-4] pueden escribirse juntas para mayor comodidad,

$$v = V_m \operatorname{sen} 2\pi ft,$$

$$i = I_m \operatorname{sen} (2\pi ft - \varphi),$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{X}{R}$$

El producto $2\pi ft$ representa un ángulo (en radianes), y su valor en cualquier instante t se denomina *fase* del voltaje. Análogamente, la magnitud $(2\pi ft - \varphi)$ se denomina fase de la intensidad de la corriente. Se dice que la corriente presenta una *diferencia de fase* con el voltaje, o que está *desfasada* un ángulo φ respecto al voltaje. Puesto que la reactancia X puede ser positiva o negativa, lo mismo le sucede al ángulo φ. Si $X_L > X_C$, X es entonces positiva, φ es positivo, y los máximos, mínimos, etc., de la intensidad de la corriente aparecen en instantes posteriores que los que corresponden al voltaje. Se dice que la intensidad está *retrasada* respecto al voltaje. Por el contrario, si $X_L < X_C$, X es negativa, φ también es negativo y la intensidad está *avanzada* respecto al voltaje.

El ángulo φ puede determinarse inmediatamente mediante el diagrama del vector impedancia, puesto que $\operatorname{tg}\varphi = X/R$. Véanse las figuras 16-4(*a*) y 16-4(*b*).

Como caso especial, es evidente que si un circuito está formado por una resistencia pura conectada a una diferencia de potencial alterna,

$$X = 0, \quad Z = R, \quad \varphi = 0,$$

y la intensidad y el voltaje están *en fase*, como indica la figura 16-5(*a*).

Si el circuito se compone de una autoinducción pura,

$$R = 0, \quad Z = X_L, \quad \varphi = +\frac{\pi}{2},$$

y la intensidad está retrasada respecto al voltaje un ángulo de $\pi/2$ radianes, o 90°, según indica la figura 16-5(*b*).

Si el circuito contiene sólo capacidad,

$$R = 0, \quad Z = X_C, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2},$$

y la intensidad está avanzada respecto al voltaje un ángulo de 90°, como indica la figura 16-5(*c*)

La *intensidad* de la corriente tiene la misma fase en todas las partes de un circuito en serie; o sea, es máxima en la resistencia, la autoinducción y el condensador al mismo tiempo; nula en los tres un instante después; máxima, pero de sentido opuesto, otro instante todavía posterior, y así sucesivamente.

16-4. Diferencia de potencial entre los puntos de un circuito recorrido por una corriente alterna.—La diferencia de poten-

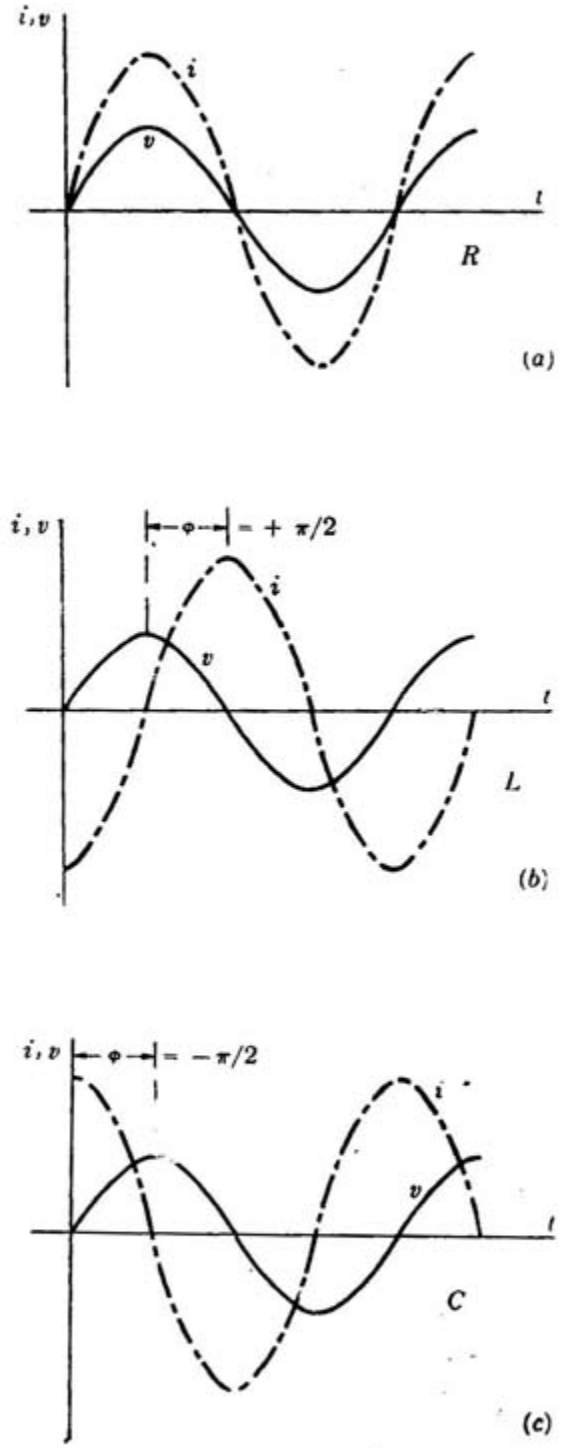


FIG. 16-5.—Relaciones entre las fases, de la diferencia de potencial y de la intensidad de la corriente, en el caso de circuitos especiales en los que hay únicamente: (*a*) resistencia; (*b*) autoinducción; (*c*) capacidad.

cial eficaz entre dos puntos cualesquiera de un circuito en serie es igual al producto de la intensidad eficaz por la impedancia del circuito entre los dos puntos considerados, siempre que no exista ninguna fem comprendida entre ellos:

$$V_{ab} = IZ_{ab}$$

La diferencia de fase φ entre V_{ab} e I es:

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{X_{ab}}{R_{ab}}$$

En la figura 16-6, la impedancia Z_{ab} entre a y b es igual a R, puesto que no hay otros elementos de circuito entre estos puntos. Por consiguiente, $V_{ab} = IR$ y $\varphi = \text{arc tg } 0 = 0$. Esto es, *la diferencia de potencial entre los terminales de una resistencia pura está en fase con la intensidad de la corriente en la resistencia.* Entre los puntos b y c, $Z_{bc} = X_L$, $V_{bc} = IX_L$, $\varphi = \text{arc tg}\,\infty = +\pi/2$. *La diferencia de potencial entre los extremos de una autoinducción pura está avanzada 90° respecto a la intensidad.* Entre los puntos c y d, $Z_{cd} = X_C$, $V_{cd} = IX_C$, $\varphi = \text{arc tg}\,(-\infty) = -\pi/2$. *La diferencia de potencial entre los bornes de un condensador está retrasada 90° respecto a la corriente en el condensador.*

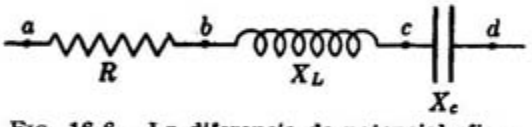


FIG. 16-6.—La diferencia de potencial eficaz V_{ad} entre los extremos del circuito *no* es igual a la suma aritmética de las diferencias de potencial V_{ab}, V_{bc}, V_{cd}.

Como ejemplo numérico, si la intensidad eficaz I de la corriente en la figura 16-6 es 5 A, $R = 8\,\Omega$, $X_L = 6\,\Omega$, $X_C = 12\,\Omega$, tenemos:

$V_{ab} = IR = 40$ V, v_{ab} e i están en fase;

$V_{bc} = IX_L = 30$ V, v_{bc} está avanzada 90° respecto a i;

$V_{cd} = IX_C = 60$ V, v_{cd} está retrasada 90° respecto a i.

La impedancia Z_{ad} del circuito completo es:

$$\sqrt{8^2 + (6 - 12)^2} = 10\,\Omega,$$

y la diferencia de potencial eficaz V_{ad}, en los extremos del circuito, será:

$$V_{ad} = IZ_{ad} = 5 \times 10 = 50 \text{ V},$$

aunque

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = 130 \text{ V}.$$

Este ejemplo explica uno de los resultados inesperados que se producen en los circuitos recorridos por corrientes alternas; a saber: la suma de las diferencias de potencial eficaces entre los extremos de cierto número de elementos de un circuito en serie, *no* es igual a la diferencia de potencial eficaz entre los extremos del circuito en conjunto. Esta anomalía se explica, no obstante, sencillamente. si se tienen en cuenta

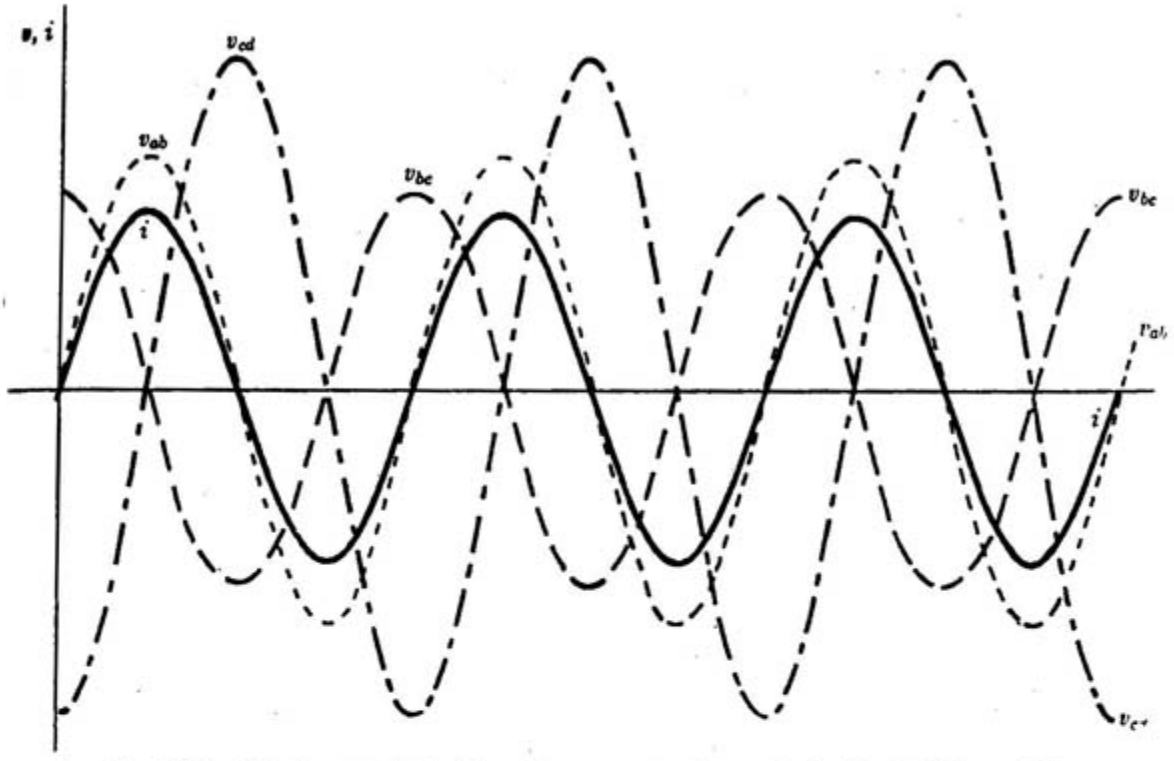


FIG. 16-7.—Relaciones entre las fases de v_{ab}, v_{bc}, v_{cd} e i para el circuito de la figura 16-6.

las relaciones de fase entre las diferencias de potencial de las distintas partes.

La figura 16-7 debe estudiarse cuidadosamente. La línea llena representa la intensidad instantánea de la corriente, la misma en todas las partes del circuito, y que tiene un valor máximo de $5\sqrt{2}$ A. Las otras tres curvas representan las diferencias de potencial instantáneas entre a y b; b y c, y c y d, cuyos valores máximos son $40\sqrt{2}$, $30\sqrt{2}$ y $60\sqrt{2}$ V, respectivamente, y cuyas diferencias de fase con relación a i son las representadas.

La diferencia de potencial *instantánea* v_{ad} es igual a la suma de las diferencias de potencial instantáneas v_{ab}, v_{bc} y v_{cd}. Si se suman las tres curvas de trazos, la curva obtenida representa, por tanto, la diferencia de potencial instantánea entre a y d. Esta curva está representada en la figura 16-8. Su valor máximo es $50\sqrt{2}$ V, y su valor eficaz 50 V, como debía ser. Está retrasada 37° respecto a la intensidad de corriente, lo cual coincide con el valor de φ calculado por la fórmula

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{6 - 12}{8} = -0{,}75; \text{ de donde } \varphi = -37^\circ$$

16-5. Diagramas de vector rotatorio.—La dificultad evidente de dibujar e interpretar diagramas tales como los de las figuras 16-7 y 16-8 hace deseable introducir algún método gráfico más sencillo para repre-

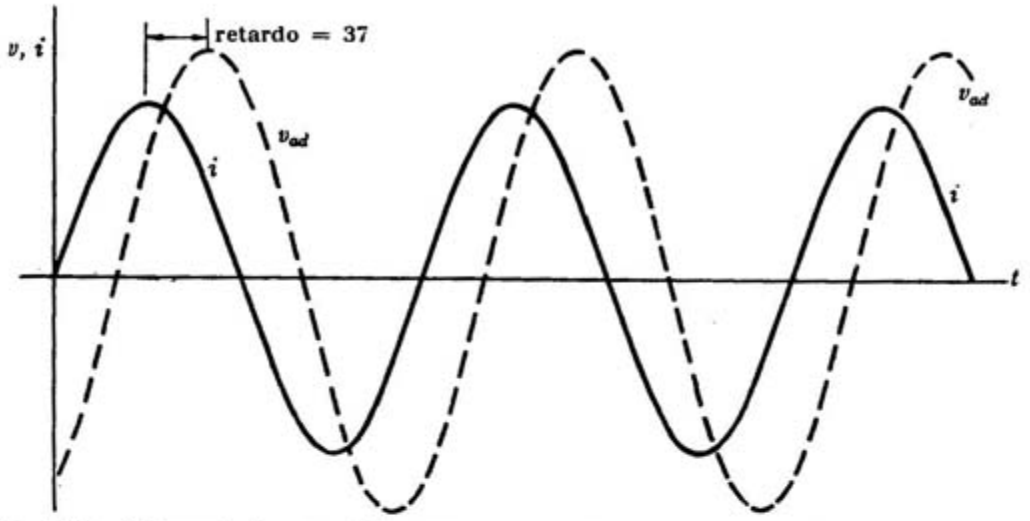


FIG. 16-8.—Diferencia de potencial instantánea v_{ad} e intensidad de la corriente i en el circuito de la figura 16-6.

sentar las relaciones de fase entre intensidades y diferencias de potencial en los circuitos de corriente alterna, lo que puede conseguirse como sigue. Supongamos que se desea representar una corriente que varíe sinusoidalmente, de frecuencia f y valor máximo I_m. Construyamos un vector I_m como el de la figura 16-9 a cierta escala conveniente, e imaginemos que este vector esté girando alrededor de O en sentido contrario al de las agujas de un reloj con una velocidad angular uniforme $\omega = 2\pi f$ rad/seg. Si el vector ocupa la posición horizontal en el instante $t = 0$, su proyección o componente sobre un eje vertical, en cualquier instante t, será igual al valor de la corriente en dicho instante, puesto que según la figura 16-9 la componente vertical es:

$$I_m \text{ sen } \theta = I_m \text{ sen } 2\pi ft = i.$$

Naturalmente, el diagrama sólo representa el valor de i en un instante determinado, pero el lector puede suplir la rotación mentalmente, y seguir las fluctuaciones de i cuando I_m gira. Este método es equivalente al que se utiliza para representar un movimiento armónico simple por la proyección sobre un diámetro de un punto que se mueve en una circunferencia con velocidad angular constante.

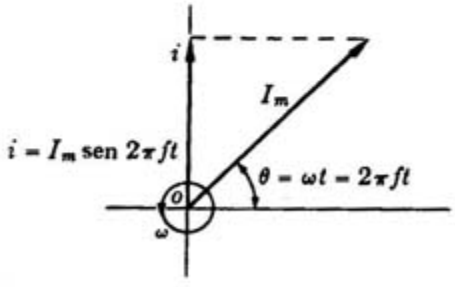


FIG. 16-9.—Representación de una corriente alterna por medio de un vector rotatorio.

Si se desea representar en el mismo diagrama los valores instantáneos de una diferencia de potencial dada $v = V_m \text{ sen } (2\pi ft - \varphi)$, que tenga la misma frecuencia que la corriente, pero retrasada respecto a ésta un ángulo φ, se construye un segundo vector de longitud V_m a cierta escala conveniente, pero

desplazado respecto a I_m un ángulo φ en el sentido de las agujas de un reloj. Cuando ambos vectores giran en sentido contrario al de las agujas del reloj, es evidente que los valores instantáneos de v presentarán siempre un retardo de fase φ respecto a los de i.

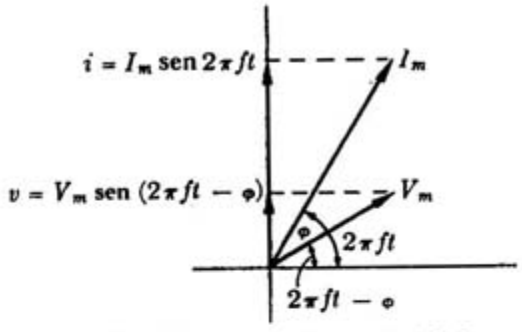


FIG. 16-10.—Representación vectorial de una diferencia de potencial y una corriente alternas.

Tomemos de nuevo como ejemplo el circuito de la figura 16-6, y representemos por este método del vector rotatorio la intensidad y las diferencias de potencial entre los extremos de las distintas partes del circuito. Para representar la intensidad de la corriente bastará un solo vector I_m, figura 16-11, ya que éste tiene el mismo valor y la misma fase en todas las partes del circuito. La diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia está representada por el vector $V_{m_{ab}}$ que tiene la misma dirección que I_m, puesto que v_{ab} e i están en fase, y cuya longitud es $40\sqrt{2}$ V. Análogamente, los vectores $V_{m_{bc}}$ de longitud $30\sqrt{2}$ V y $V_{m_{cd}}$ de longitud $60\sqrt{2}$ V representan la diferencia de potencial avanzada entre los bornes de la autoinducción y la diferencia de potencial retardada entre los bornes del condensador. Las componentes de cada uno de estos vectores, y la rotación de todo el diagrama pueden ser suplidas mentalmente por el lector. Cuando los vectores giran, sus componentes verticales experimentan las mismas variaciones que las ordenadas de las cuatro curvas de la figura 16-7.

¿Qué sucede con las diferencias de potencial entre a y d, de la figura 16-6? El valor instantáneo de esta diferencia de potencial se encontró en la figura 16-8 sumando las ordenadas de las tres curvas de trazos de la figura 16-7. Utilizando el diagrama del vector rotatorio, esto se obtiene sumando las componentes verticales de $V_{m_{ab}}$, $V_{m_{bc}}$ y $V_{m_{cd}}$. Pero la suma de las componentes verticales de estos vectores es igual a la componente vertical de su suma geométrica o resultante. Por tanto, si esta resultante se obtiene por cualquier método adecuado, como el de la figura 16-12, su componente vertical representa la diferencia de potencial instantánea entre los extremos del circuito, y el ángulo φ, que forma con I_m, indica la diferencia de fase del circuito en conjunto. La propia resultante repre-

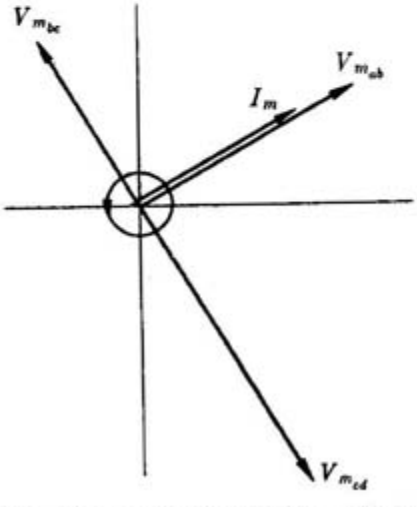


FIG. 16-11.—Representación vectorial de i, V_{ab}, V_{bc} y V_{cd} para el circuito de la figura 16-6.

senta, por tanto, la diferencia de potencial máxima entre a y d, o sea $V_{m_{ad}}$.

Aunque el diagrama del vector rotatorio es esencialmente un método para representar valores instantáneos, en la práctica se utiliza casi siempre exclusivamente con los valores eficaces y las diferencias de fase. Si imaginamos que se modifica la escala de las figuras 16-11 ó 16-12 en el factor $\sqrt{2}$, los mismos vectores que representan valores máximos, corresponderán en la nueva escala a valores eficaces, permaneciendo invariables los ángulos que representan diferencias de fase. Por ello es práctica normal construir estos diagramas con los vectores que representan los valores eficaces en lugar de los valores máximos. Si se desean los valores instantáneos sólo es necesario imaginar multiplicada por $\sqrt{2}$ la longitud de todos los vectores y suponer el diagrama en rotación.

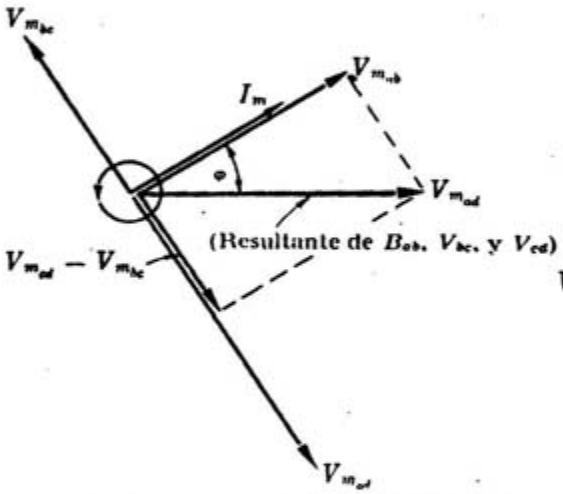


FIG. 16-12.—Representación vectorial de V_{ad} e i para el circuito de la figura 16-6.

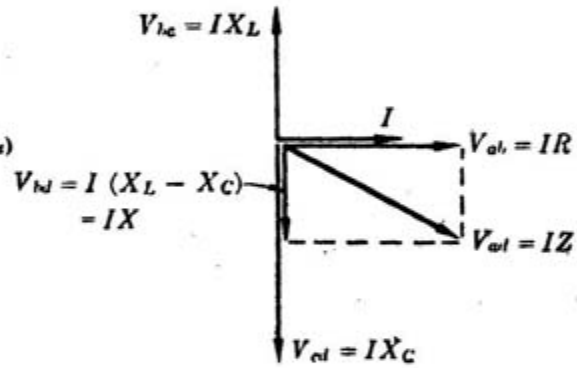


FIG. 16-13.—Diagrama vectorial para el circuito de la figura 16-6, donde los vectores representan valores eficaces.

Es completamente arbitraria la orientación que se dé al diagrama vectorial. En un circuito en serie se comienza de ordinario por dibujar el vector intensidad formando un ángulo cualquiera y se construyen los otros vectores con la orientación relativa adecuada. Se omiten generalmente los ejes X e Y.

La figura 16-13 es la misma figura 16-12, salvo que el vector intensidad es horizontal y que la escala se ha modificado para que los vectores representen valores eficaces. Puesto que $V_{ab} = IR$, $V_{bc} = IX_L$, $V_{cd} = IX_C$ y $V_{ad} = IZ$, los vectores voltaje están relacionados exactamente del mismo modo que los vectores en un diagrama de vector impedancia tal como el de la figura 16-3. En efecto, el diagrama del vector voltaje de un circuito en serie puede obtenerse a partir de su diagrama de vector impedancia, multiplicando cada vector resistencia, reactancia o impedancia por la intensidad.

16-6. Circuitos en paralelo.—Consideremos el acoplamiento en paralelo de los elementos del circuito de la figura 16-14(*a*). La diferencia de potencial instantánea v_{ab} en los extremos de las dos derivaciones es la misma. La intensidad i_1 en la derivación superior (capacitiva) estará avanzada respecto a v_{ab}; la de la derivación inferior (inductiva) estará retardada. Según la regla de los nudos de Kirchhoff, la intensidad *instantánea* I_l de la línea es igual a la suma de las intensidades *instantáneas* i_1 e i_2. El diagrama vectorial del circuito está dibujado en la figura 16-14(*b*). El vector V_{ab} representa la diferencia de potencial común entre los extremos de cada derivación, y los vectores I_1 e I_2, las intensidades. I_1 está avanzada respecto a V, un ángulo $\varphi_1 = \text{arc tg } X_1/R_1$; I_2 está retrasada respecto a V un ángulo $\varphi_2 = \text{arc tg } X_2/R_2$. La intensidad en la línea está representada por I_l, suma geométrica de I_1 e I_2, y φ es la diferencia de fase entre la intensidad en la línea y V.

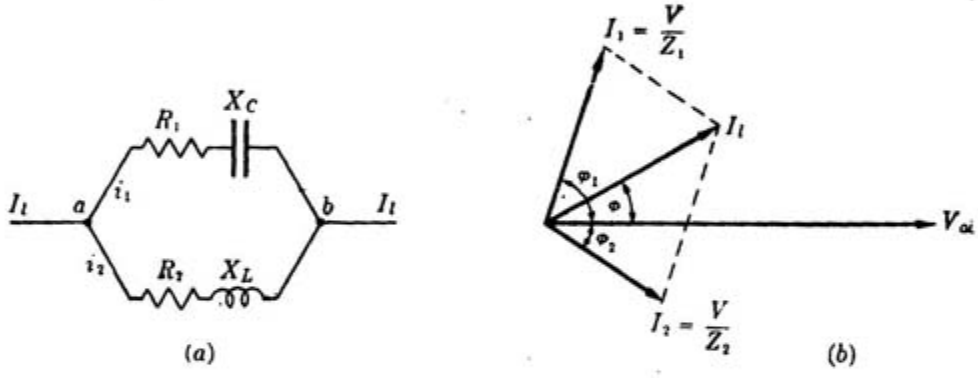


FIG. 16-14.—(*a*) Agrupación en paralelo de elementos de circuito. (*b*) Diagrama vectorial correspondiente.

Se define la *impedancia equivalente* del circuito como la razón de V_{ab} a la intensidad en la línea I_l. Es evidente que si V_{ab} y las constantes del circuito son conocidas (datos), el cálculo de I_l lleva consigo el cálculo de las intensidades individuales en ambas derivaciones, y sus diferencias de fase. Por consiguiente, la impedancia equivalente puede expresarse en función de las resistencias y reactancias de las derivaciones. La expresión que resulta es algo complicada y no la daremos, aunque puede deducirse fácilmente mediante la figura 16-14(*b*).

16-7. Resonancia.—Un caso particular de interés se presenta en un circuito en serie que contiene autoinducción y capacidad, cuando L, C y f tienen valores tales que $2\pi fL = 1/2\pi fC$, esto es, cuando $X_L = X_C$. Entonces $X = 0$, $Z = R$ y $\varphi = \text{arc tg } X/R = 0$. La impedancia del circuito es simplemente igual a su resistencia, y la intensidad está en fase con la diferencia de potencial entre los bornes del circuito. La corriente que atraviesa un circuito resonante en serie, si su resistencia es pequeña, será grande, y la diferencia de potencial entre los bornes de la autoinducción y de la capacidad puede ser mucho mayor que la que existe a través de todo el circuito.

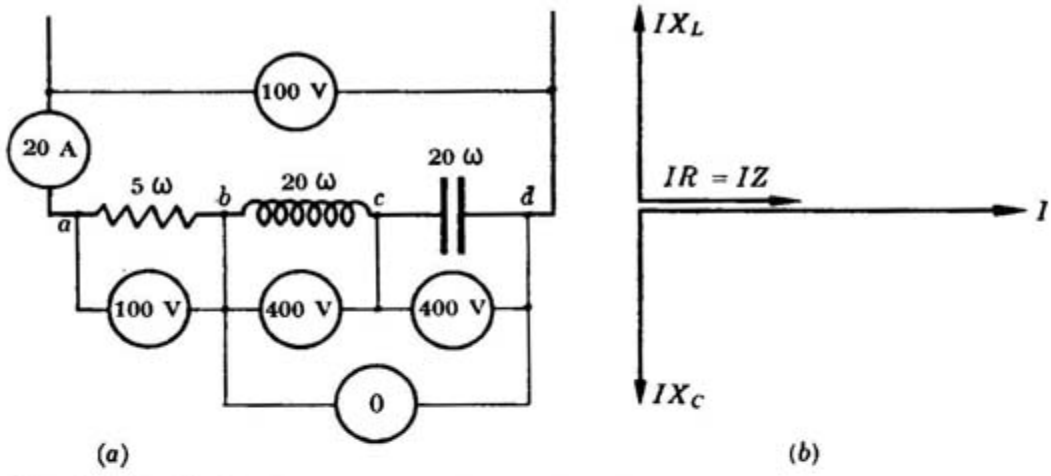


FIG. 16-15.—(*a*) Circuito resonante en serie. (*b*) Diagrama vectorial correspondiente.

Como ejemplo, consideremos un circuito en serie en el cual $R = 5\ \Omega$, $X_L = 20\ \Omega$, $X_C = 20\ \Omega$, conectado a una diferencia de potencial alterna cuyo valor eficaz es 100 V [Fig. 16-15(*a*)]. La intensidad de la corriente en el circuito es:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A}.$$

La diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia,

$$V = IR = 20 \times 5 = 100 \text{ V}.$$

La diferencia de potencial entre los bornes de la autoinducción,

$$V = IX_L = 20 \times 20 = 400 \text{ V}.$$

La diferencia de potencial entre las armaduras del condensador,

$$V = IX_C = 20 \times 20 = 400 \text{ V}.$$

Y la diferencia de potencial entre los extremos de la combinación autoinducción-capacidad (V_{bd}) es:

$$V = IX = 0.$$

El diagrama del vector rotatorio para un circuito resonante en serie está representado en la figura 16-15(*b*). Se verá que las diferencias de potencial instantáneas entre los extremos de la autoinducción y del condensador están desfasadas 180°, y aunque los valores eficaces de cada una pueden ser grandes, su resultante en todo instante es nula. En consecuencia un voltímetro aplicado entre *b* y *d*, figura 16-15(*a*), indicará cero.

La figura 16-16(*a*) representa un circuito en paralelo en el cual $X_L = X_C$, siendo R la misma en cada derivación. La intensidad eficaz es, por consiguiente, igual en cada derivación, estando una de estas corrientes

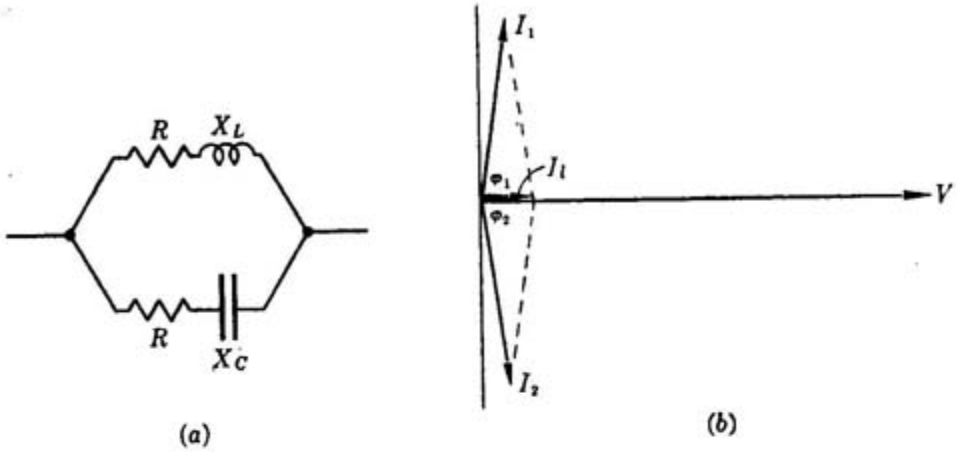


FIG. 16-16.—(*a*) Circuito resonante en paralelo ($X_L = X_C$). (*b*) Diagrama vectorial correspondiente.

retardada y la otra adelantada el mismo ángulo respecto a la diferencia de potencial. Si X_L y X_C son mucho mayores que R, las diferencias de fase son aproximadamente 90° y, como resulta evidente de la figura 16-16(*b*), la intensidad I_l en la línea es mucho menor que la intensidad en cada derivación. De otra forma, la impedancia equivalente, V/I_l, del circuito en conjunto es muy elevada, mucho mayor que la de una cualquiera de las derivaciones. De modo bastante paradójico, cuanto menor es la resistencia, mayor es la impedancia, ya que cuando R tiende a cero, las diferencias de fase tienden a 90°, y la corriente de la línea tiende a cero. Se dice que el circuito está en *resonancia paralela*.

Debe evitarse la resonancia en las líneas de transporte de energía, puesto que, indudablemente, resultarán intensidades de corriente y diferencias de potencial elevadas en ciertas partes del circuito. Por el contrario, en los circuitos de radio se aprovecha la ventaja de la resonancia en el proceso de *sintonización*. El circuito de antena de un radiorreceptor contiene una autoinducción y un condensador en serie. Las estaciones emisoras comprendidas dentro del intervalo de frecuencia del receptor inducen en este circuito fuerzas electromotrices de frecuencias iguales a las frecuencias portadoras de dichas estaciones. Cuando el condensador de sintonía se ajusta de modo que el circuito esté en resonancia con la frecuencia de una estación deseada, la intensidad de corriente que corresponde a aquella frecuencia particular es grande, y se obtiene una diferencia de potencial también grande entre las armaduras del condensador; pero, como un condensador sólo puede estar en resonancia para una frecuencia, las otras estaciones no producirían más que intensidades y diferencias de potencial despreciables, y, por consiguiente, no serán oídas.

La condición necesaria para la resonancia es:

$$2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC}$$

de la cual deducimos:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1/C}{L}} \qquad [16\text{-}6]$$

Se recordará que esta ecuación tiene la misma forma que la de la frecuencia de un sistema mecánico oscilante, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. La autoinducción representa la masa inerte y la capacidad corresponde a la inversa de la constante recuperadora. En efecto, la frecuencia f dada por la Ec. [16-6] puede considerarse como la frecuencia *natural* del circuito eléctrico (Sec. 17-1), y el circuito resuena cuando la frecuencia que lo hace oscilar es igual a este valor.

16-8. Potencia en los circuitos de corriente alterna.—La potencia instantánea suministrada a un dispositivo eléctrico en el cual hay una corriente alterna es igual al producto de la diferencia de potencial instantánea entre los extremos del dispositivo por la intensidad instantánea de la corriente. La potencia instantánea P varía como indica la figura 16-17, en la cual la gráfica de la potencia se ha obtenido multiplicando las curvas que representan v e i:

$$P = vi \text{ (valores instantáneos).}$$

Hemos demostrado que se suministra energía a un dispositivo eléctrico si el sentido de la corriente en él es del borne de potencial más elevado al de potencial más bajo. Si el sentido de la corriente es del borne de potencial más bajo al de potencial más alto, el dispositivo está suministrando energía al circuito. Entre los puntos a y b de la figura 16-17, donde las curvas v e i son ambas positivas, tenemos el primer caso, y se suministra energía al dispositivo. Entre los puntos b y c, la diferencia de potencial está invertida, mientras que el sentido de la corriente no se

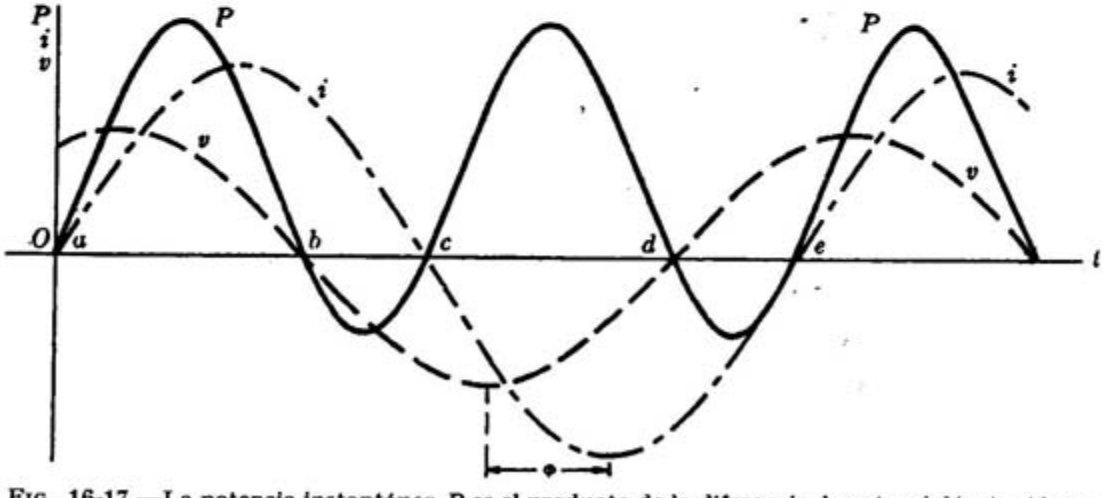


FIG. 16-17.—La potencia instantánea P es el producto de la diferencia de potencial instantánea por la intensidad instantánea de la corriente.

ha modificado. Por consiguiente, durante este intervalo el dispositivo restituye energía al circuito. Entre c y d, tanto v como i han cambiado de sentido, y se suministra de nuevo energía al dispositivo. Donde la curva de potencial es positiva, como entre a y b, o c y d, se suministra energía al dispositivo (una cantidad por segundo igual a la ordenada de la curva de potencia) y donde la curva es negativa, como entre b y c, la energía es restituída al circuito.

La cantidad total de energía suministrada en el tiempo t está representada gráficamente por el área *neta* comprendida entre la curva de potencia y el eje Ot, durante dicho tiempo, o analíticamente por

$$W = \int_0^t P\,dt.$$

La potencia media es igual a la energía total suministrada dividida por el tiempo, o sea,

$$\frac{W}{t} = P_{media} = \frac{1}{t}\int_0^t P\,dt.$$

Cuando se habla de *la* potencia suministrada a un dispositivo que se encuentra en un circuito de corriente alterna, quiere decirse potencia media. La potencia eficaz carece de sentido. En general, v e i están desfasadas un ángulo φ; esto es,

$$v = V_m \operatorname{sen} \omega t,$$

$$i = I_m \operatorname{sen} (\omega t - \varphi).$$

Si se efectúa el producto de v por i, y después se calcula la media durante un intervalo de tiempo igual a un período se obtiene:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T V_m I_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) dt$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} \cos \varphi, \quad \text{o sea,}$$

$$\boxed{P = VI \cos \varphi} \qquad [16\text{-}7]$$

Esto es, la potencia media suministrada a un dispositivo que se encuentra en un circuito de corriente alterna, es igual al producto de la diferencia de potencial eficaz, por la intensidad de corriente eficaz y por el coseno del ángulo de desfase. La magnitud $\cos \varphi$ se denomina *factor de potencia* del dispositivo. Según sea la naturaleza del dispositivo, dicho factor puede tener cualquier valor comprendido entre cero (cuando $\varphi = 90°$) y la unidad (cuando $\varphi = 0°$).

Un factor de potencia nulo significa que el dispositivo consiste en una reactancia pura, inductiva o capacitiva. En virtud de la Ec. [16-7], la potencia media suministrada a dicho dispositivo es nula, lo cual es cierto evidentemente, dado que la energía suministrada a un condensador o a una autoinducción se emplea en crear un campo eléctrico o un campo magnético, y toda esta energía se recupera cuando el campo desaparece posteriormente.[1] Durante las fases del ciclo en las cuales el campo disminuye, la reactancia restituye energía al circuito y ayuda a girar al generador.

Si el circuito contiene a la vez resistencia y reactancia (y ningún dispositivo mecánico tal como un motor), se tiene:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}, \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

y la Ec. [16-7] se convierte en

$$P = \frac{VIR}{Z},$$

y dado que

$$\frac{V}{Z} = I,$$

$$P = I^2R \qquad [16\text{-}8]$$

como en el caso de la corriente continua. Naturalmente, si el circuito contiene un motor, $\operatorname{tg}\varphi$ no es igual a X/R, y la Ec. [16-8] no es aplicable. Sin embargo, la Ec. [16-7] es cierta para cualquier circuito.

Un factor de potencia pequeño (ángulo grande de avance o retraso) es un inconveniente en los circuitos que transportan energía, pues con una diferencia de potencial dada, es necesaria una corriente de gran intensidad para suministrar una potencia determinada, con las consiguientes pérdidas de calor en las líneas de transporte. Como muchos tipos de maquinaria de corriente alterna transportan corriente en retraso respecto al potencial, este caso puede presentarse. Cabe corregirlo conectando un condensador en paralelo con la carga. La corriente avanzada del condensador compensa la corriente retrasada de la otra rama del circuito. El condensador por sí mismo no absorbe potencia neta de la línea.

Un motor sincrónico con su campo *superexcitado* toma también de la línea una corriente avanzada y se utiliza a veces para corregir el factor de potencia.

La potencia suministrada a (o por) un dispositivo en corriente continua puede medirse con un amperímetro y un voltímetro o por un vatímetro. En un circuito de corriente alterna la potencia no puede medirse

[1] Excepciones: *a*) Si existe histéresis, no se recupera toda la energía suministrada al circuito. *b*) A frecuencias elevadas la energía es *radiada* desde el circuito en forma de ondas electromagnéticas.

con un amperímetro y un voltímetro, ya que cada uno de ellos sólo indica los valores eficaces y no se tienen en cuenta las relaciones de fase o factor de potencia. Un electrodinamómetro tipo vatímetro, por el contrario, incluye automáticamente la corrección debida al factor de potencia e indica la verdadera potencia suministrada. El mismo tipo de vatímetro se utiliza para medidas en corriente continua o en corriente alterna.

El par desviador instantáneo τ de un electrodinamómetro es proporcional al producto de las intensidades instantáneas en las bobinas fija y móvil. Cuando se conecta como vatímetro, una de estas intensidades es proporcional a la intensidad en la línea y la otra a la diferencia de potencial. Esto es,

$$\tau = kvi,$$

siendo k una constante de proporcionalidad. Pero

$$v = V_m \operatorname{sen} \omega t,$$
$$i = I_m \operatorname{sen} (\omega t - \varphi).$$

Por consiguiente,

$$\tau = kI_m V_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t - \varphi).$$

Con corriente alterna, la desviación del vatímetro es proporcional al par *medio*, o sea, a

$$\bar{\tau} = \frac{k}{T} \int_0^T I_m V_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) dt,$$

y, en virtud de la Ec. [16-7],

$$\bar{\tau} = kVI \cos \varphi = kP,$$

siendo la desviación proporcional a la potencia media.

Si se conectan simultáneamente en corriente alterna, como se indica en la figura 16-18, un amperímetro, un voltímetro y un vatímetro, pueden medirse V, I y P independientemente. Éste es un método experimental mediante el cual se mide el factor de potencia de un dispositivo.

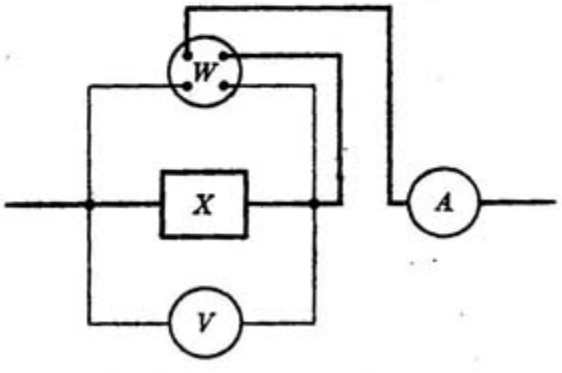


FIG. 16-18.—Medida del factor de potencia de un circuito utilizando simultáneamente un amperímetro, un voltímetro y un vatímetro para corriente alterna.

16-9. Transformador.—Por razones de rendimiento es conveniente transportar la energía eléctrica a potenciales elevados e intensidades de corriente pequeñas, con la reducción consiguiente de la cantidad de calor I^2R perdida por segundo en la línea de transporte. Por otra

parte, las condiciones de seguridad y de aislamiento de las partes móviles requieren voltajes relativamente bajos en los equipos generadores, en los motores y en las instalaciones domésticas. Una de las propiedades más útiles de los circuitos de corriente alterna es la facilidad y rendimiento elevado con que pueden variarse, por medio de transformadores, los valores de los voltajes (e intensidades de las corrientes).

En principio, el transformador se compone de dos enrollamientos aislados eléctricamente entre sí y devanados sobre el mismo núcleo de hierro (Fig. 16-19). Una corriente alterna que circula por uno de los enrollamientos, crea en el núcleo un campo magnético alterno. La mayor parte de este flujo atraviesa el otro enrollamiento e induce en él una fem alterna. La potencia es transmitida así de un enrollamiento a otro por medio del flujo del núcleo. El enrollamiento al cual se suministra potencia se denomina *primario*, y el que cede potencia es el *secundario*. Cualquiera de los enrollamientos puede utilizarse como primario. El símbolo de un transformador con un núcleo de hierro es .

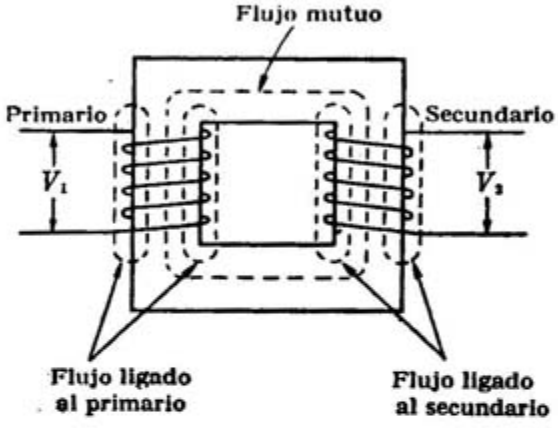


FIG. 16-19.—Transformador con núcleo de hierro.

En cualquier transformador real las líneas de flujo no están confinadas enteramente en el hierro, sino que algunas de ellas vuelven a través del aire como indica la figura 16-19. La parte de flujo que atraviesa a la vez los enrollamientos primario y secundario, se denomina flujo *mutuo*. La parte que sólo atraviesa el primario es el *flujo ligado al primario*, y la parte de flujo que atraviesa únicamente el secundario es el *flujo ligado al secundario*.

La potencia obtenida de un transformador es necesariamente inferior a la potencia suministrada al mismo, a causa de las inevitables pérdidas en forma calorífica. Estas pérdidas consisten en el calentamiento I^2R de los devanados primario y secundario (pérdidas del cobre), y en la histéresis y corrientes de Foucault en el núcleo (pérdidas del núcleo). La histéresis se reduce al mínimo utilizando hierro que tenga un ciclo de histéresis estrecho, y las corrientes de Foucault se reducen al mínimo con un núcleo formado por láminas. A pesar de estas pérdidas, los rendimientos de los transformadores sobrepasan el 90 %, y en las grandes instalaciones pueden alcanzar el 99 %.

Para simplificar, consideremos un transformador ideal en el cual no haya pérdidas ni fugas de flujo. Supongamos que el circuito secundario está abierto. El enrollamiento primario funciona entonces simplemente como una autoinducción. La corriente en el primario, que es pequeña,

está retrasada 90° respecto al voltaje del primario y se denomina corriente *magnetizante*, I_m. La potencia suministrada al transformador es nula. El flujo del núcleo está en fase con la corriente del primario. Puesto que el mismo flujo atraviesa tanto el primario como el secundario, la fem inducida *por vuelta* es la misma en ambos. La razón de la fem inducida en el secundario a la fem inducida en el primario es igual, por consiguiente, a la razón del número de vueltas del secundario al primario, o sea,

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

En el caso ideal supuesto, las fuerzas electromotrices inducidas ε_1 y ε_2 son iguales numéricamente a los voltajes correspondientes V_1 y V_2 en los bornes. Por consiguiente, eligiendo adecuadamente la razón de los números de vueltas, N_2/N_1, puede obtenerse en el secundario cualquier voltaje que se desee partiendo de un voltaje dado en el primario. Si $V_2 > V_1$, tenemos un transformador *elevador*, si $V_2 < V_1$, un transformador *reductor*.

El diagrama vectorial de un transformador ideal está representado en la figura 16-20 para una razón de espiras $N_2/N_1 = 2$. Las fuerzas electromotrices inducidas tanto en el primario como en el secundario, siendo proporcionales y de signo opuesto a la derivada del flujo, estarán retrasadas 90° respecto a éste, pero puesto que la fem (ε_1) inducida en el primario es una fuerza contraelectromotriz, el voltaje (V_1) en los bornes del primario es opuesto a ella en fase. ($V_1 = -\varepsilon_1$.)

Consideremos a continuación el efecto de cerrar el circuito secundario. La corriente I_2 en el secundario (Fig. 16-21) y su fase φ_2 dependerán, naturalmente, de la naturaleza del circuito secundario. Se ha supuesto en la figura 16-21 que la carga es inductiva y, por consiguiente, I_2, está retardada respecto a V_2. Tan pronto como se cierra el circuito secundario, éste ha de suministrar cierta potencia (excepto cuando $\varphi_2 = 90°$) y, en

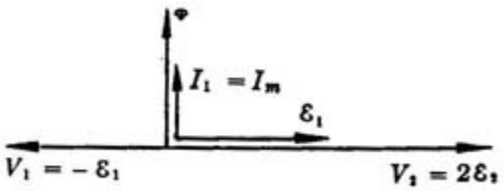


FIG. 16-20.—Diagrama vectorial de un transformador ideal funcionando en vacío. La corriente en el secundario es nula, y la corriente en el primario es, únicamente, la corriente magnetizante.

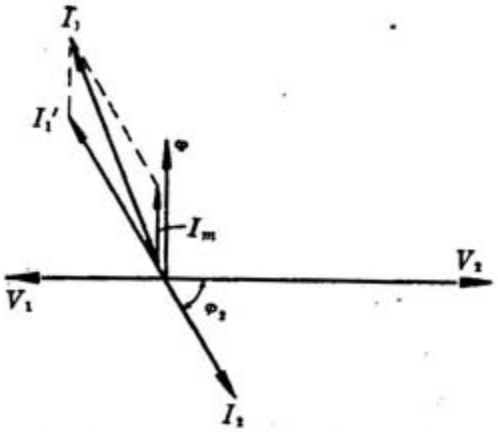


FIG. 16-21.—Diagrama vectorial de un transformador ideal sometido a una carga inductiva.

virtud de consideraciones energéticas, ha de suministrarse una cantidad igual de potencia al primario. El proceso por el cual el transformador es capaz de absorber la necesaria cantidad de potencia es como sigue. Cuando el circuito secundario está abierto, el flujo del núcleo es producido únicamente por la corriente del primario, pero cuando se cierra el circuito secundario, tanto la corriente del primario como la del secundario crean flujo en el núcleo. En virtud de la ley de Lenz, la corriente del secundario tiende a debilitar el flujo del núcleo y, por consiguiente, a disminuir la fuerza contraelectromotriz en el primario. Pero (en ausencia de pérdidas), la fuerza contraelectromotriz en el primario ha de ser igual al voltaje en los bornes del primario que suponemos fijo. La corriente en el primario aumenta, por consiguiente, hasta que el flujo del núcleo se restablece en su valor inicial, sin carga. El vector I_1' de la figura 16-21 representa la *variación* que tiene lugar en la corriente del primario cuando el secundario suministra la intensidad I_2. Esta variación está en oposición de fase con la intensidad I_2 del secundario y es de valor tal que su fuerza magnetomotriz (N_1I_1') es igual y opuesta a la fuerza magnetomotriz (N_2I_2) de la corriente en el secundario. Esto es,

$$N_2I_2 = N_1I_1',$$

o sea,

$$\frac{I_2}{I_1'} = \frac{N_1}{N_2} \qquad [16\text{-}9]$$

La intensidad resultante en el primario, I_1, es la suma vectorial de I_1' y de la corriente magnetizante I_m. Pero en la práctica la corriente magnetizante no es nunca superior a un tanto por ciento pequeño de la corriente de plena carga. En consecuencia, I_1 e I_1' son prácticamente iguales y se puede escribir de un modo aproximado teniendo en cuenta la Ec. [16-9],

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \qquad [16\text{-}10]$$

Esto es, las corrientes del primario y del secundario son *inversamente* proporcionales a los números de espiras de los arrollamientos primario y secundario.

El efecto de la dispersión de flujo y las resistencias de los arrollamientos requiere que el voltaje en los bornes del primario sea algo mayor que la fem inducida en el primario, y no esté desfasada exactamente 180° respecto a ella. Análogamente, el voltaje en los bornes del secundario es algo menor que la fem inducida en el secundario, y está algo desfasado respecto a ella.

16-10. Corriente alterna trifásica.—Terminaremos este capítulo con un breve estudio de la corriente alterna trifásica. Una bobina que gira a velocidad angular constante en un campo magnético uniforme desarrolla una fem alterna sinusoidal. Supongamos que hay tres bobinas devanadas sobre un inducido como indica la figura 16-22(*a*), con sus planos

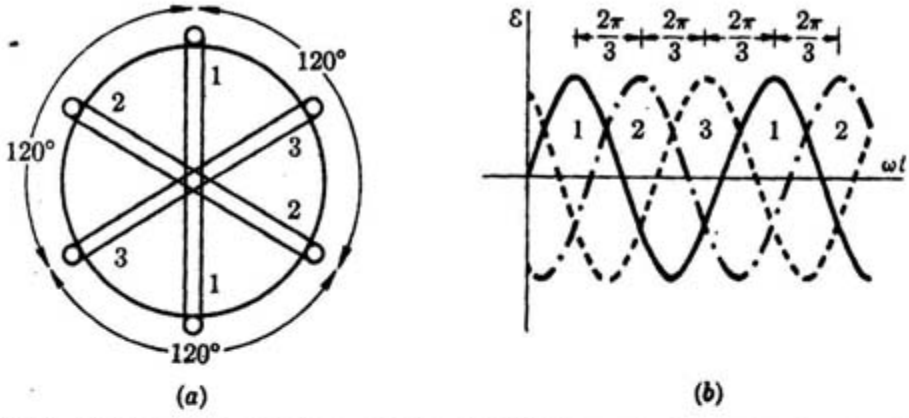


FIG. 16-22.—(*a*) Alternador trifásico sencillo. (*b*) Relaciones de fase entre las tres fuerzas electromotrices correspondientes.

desplazados entre sí ángulos de 120°, o sea, $2\pi/3$ radianes. Si el inducido gira con velocidad angular constante en un campo magnético uniforme, las relaciones de fase de las fuerzas electromotrices desarrolladas en las tres bobinas son las indicadas en la figura 16-22(*b*). Las tres fuerzas electromotrices sinusoidales se han numerado de modo que se correspondan con las tres bobinas de la figura 16-22(*a*). La fem en la bobina 2 está retrasada en $2\pi/3$ radianes respecto a la de la bobina 1, y la fem de la bobina 3 está retrasada respecto a la de la bobina 2 en igual cantidad.

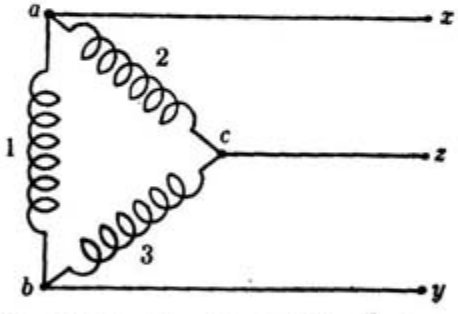


FIG. 16-23.—Conexión en triángulo de un alternador trifásico.

Sería perfectamente posible proveer a cada bobina de su propio conjunto de anillos rozantes y escobillas para utilizar cada una de ellas como generador independiente que suministra corriente alterna monofásica a su propio circuito. Sin embargo, en lugar de esto se conectan entre sí las tres bobinas como se indica esquemáticamente en la figura 16-23. Los tres puntos comunes *a*, *b* y *c* se conectan a anillos rozantes y los tres hilos del circuito externo trifásico parten de escobillas que hacen contacto con estos tres anillos.[1]

Un par cualquiera de terminales, tales como x e y, y y z o x y z, es un origen de corriente alterna monofásica del mismo voltaje que el producido por una cualquiera de las bobinas. Consideremos, p. ej., los terminales x e y. Éstos están conectados directamente a la bobina 1, y también a las bobinas 2 y 3 en serie. Las diferencias de potencial instantáneas entre los bornes de las tres bobinas son iguales a las fuerzas electromotrices instantáneas. Esto es,

[1] Este dispositivo se denomina conexión en triángulo. También se utiliza frecuentemente la conexión en estrella.

$$V_{ab} = V_{xy} = e_1 = E_m \operatorname{sen} 2\pi ft;$$

$$V_{ca} = V_{zx} = e_2 = E_m \operatorname{sen} (2\pi ft - 2\pi/3);$$

$$V_{bc} = V_{yz} = e_3 = E_m \operatorname{sen} (2\pi ft - 4\pi/3).$$

Si consideramos los puntos a y b como los bornes de las bobinas 2 y 3 conectadas en serie,

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{ac} + V_{cb} = -(V_{ca} + V_{bc}) \\ &= -E_m [\operatorname{sen} (2\pi ft - 2\pi/3) + \operatorname{sen} (2\pi ft - 4\pi/3)] \\ &= -E_m [\operatorname{sen} 2\pi ft \cos 2\pi/3 - \cos 2\pi ft \operatorname{sen} 2\pi/3 \\ &\quad + \operatorname{sen} 2\pi ft \cos 4\pi/3 - \cos 2\pi ft \operatorname{sen} 4\pi/3]. \end{aligned}$$

Pero

$$\cos 2\pi/3 = \cos 4\pi/3, \quad \operatorname{sen} 2\pi/3 = -\operatorname{sen} 4\pi/3.$$

Por tanto,

$$V_{ab} = -E_m [2 \operatorname{sen} 2\pi ft \cos 2\pi/3].$$

Como $\cos 2\pi/3 = -1/2$, esta expresión se reduce a

$$V_{ab} = E_m \operatorname{sen} 2\pi ft,$$

que es igual a la fem instantánea en la bobina 1. En consecuencia, la bobina 1, de una parte, y la conexión en serie de las bobinas 2 y 3, de otra, son manantiales idénticos de fem en paralelo, y la diferencia de potencial entre los bornes x e y es la misma que entre los bornes de una sola bobina. Si un voltímetro de corriente alterna conectado a x e y indica 110 V, también indicará 110 V conectado a y y z o a x y z. Naturalmente, el voltaje entre y y z está retardado $2\pi/3$ radianes respecto al voltaje entre x e y, y el voltaje entre x y z en otros $2\pi/3$ radianes.

Describiremos a continuación el fundamento del motor de inducción trifásico. La figura 16-24(a) es un diagrama del estator. Los arrollamientos alrededor de dos pares de polos opuestos, tales como los numerados como 1 y 1′, están en serie, lo mismo que los 2 y 2′, y 3 y 3′. Los arrollamientos de los tres pares de polos están conectados entre sí según indica la figura 16-24(b), y a los tres terminales de la red de corriente alterna

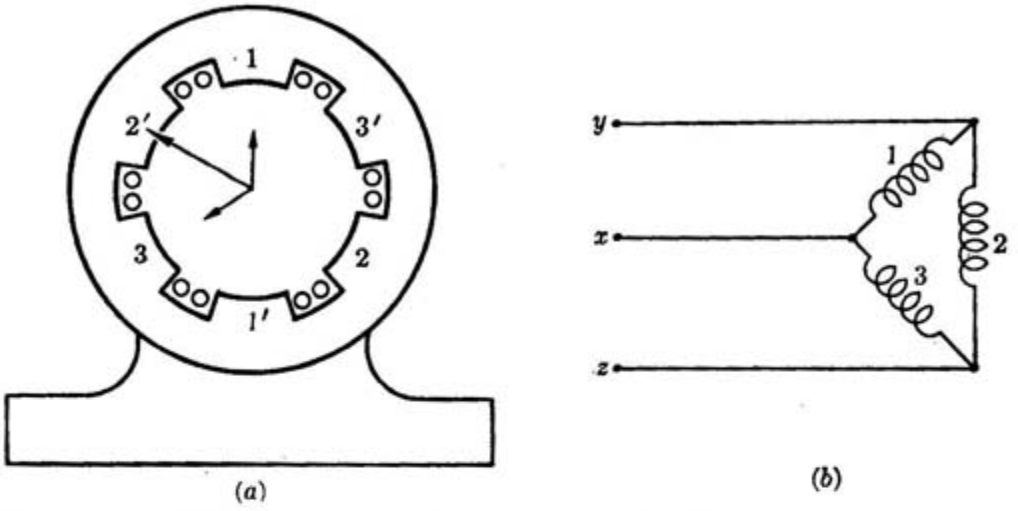


FIG. 16-24.—(*a*) Estator de un motor de inducción trifásico. (*b*) Interconexión de los arrollamientos del estator.

trifásica. Las intensidades en los tres arrollamientos se hallan, por tanto, desfasadas $2\pi/3$ radianes.

Los polos están devanados de forma que en los instantes en que la intensidad en una fase cualquiera es positiva [es decir, por encima del eje en la figura 16-22(*b*)] el polo que no lleva acento de la figura 16-24(*a*) es norte, y el que lleva acento, sur; p. ej., en el instante en que la intensidad en la fase 2 es máxima positiva, el polo 2 es un polo norte de intensidad máxima y el 2′ es un polo sur, asimismo de máxima intensidad. La observación de la figura 16-22(*b*) indica que, en este instante, las intensidades en las fases 1 y 3 son negativas. En consecuencia, en este instante los polos 1 y 3 son sur y los polos 1′ y 3′ son norte.

El campo magnético en el espacio comprendido entre los polos es resultante de tres campos que se diferencian $2\pi/3$ radianes en *fase*, y que difieren también en *azimut* en $2\pi/3$ radianes. Así, según muestra la figura 16-25, los campos creados por los tres pares de polos tienen las direcciones señaladas y varían entre los valores máximos indicados, representados por flechas finas. Las flechas gruesas indican los valores y sentidos de las tres componentes en el instante en que la intensidad en la fase 2 es máxima y positiva. Puede demostrarse que el campo resultante es constante en magnitud pero que gira en el plano del diagrama con una frecuencia igual a la de la red trifásica.

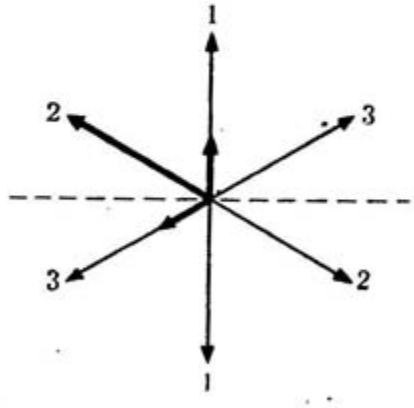


FIG. 16-25.—Campos creados por los tres pares de polos de la figura 16-24(*a*).

El valor y dirección del campo resultante en cualquier instante se calcula como sigue. Representemos por B_m la densidad máxima de flujo magnético debida a un par de polos cualesquiera, supuesta igual para los tres pares. Los valores instantáneos de las densidades de flujo son:

$$B_1 = B_m \operatorname{sen} 2\pi ft,$$

$$B_2 = B_m \operatorname{sen}\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$B_3 = B_m \operatorname{sen}\left(2\pi ft - \frac{4\pi}{3}\right)$$

La componente según el eje X de la densidad de flujo resultante es:

$$\begin{aligned} B_x &= B_1 + B_2 \cos\frac{2\pi}{3} + B_3 \cos\frac{4\pi}{3} \\ &= B_m \operatorname{sen} 2\pi ft \\ &\quad + B_m \operatorname{sen}\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3} \\ &\quad + B_m \operatorname{sen}\left(2\pi ft - \frac{4\pi}{3}\right)\cos\frac{4\pi}{3} \\ &= \tfrac{3}{2} B_m \operatorname{sen} 2\pi ft. \end{aligned}$$

La componente según el eje Y de la densidad de flujo resultante es:

$$\begin{aligned} B_y &= B_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + B_3 \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \\ &= B_m \operatorname{sen}\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \\ &\quad + B_m \operatorname{sen}\left(2\pi ft - \frac{4\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \\ &= -\tfrac{3}{2} B_m \cos 2\pi ft. \end{aligned}$$

El valor de la densidad de flujo resultante será:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \tfrac{3}{2} B_m,$$

que es constante.

El ángulo α formado por la densidad de flujo resultante y el eje Y es:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_x}{B_y} = -\operatorname{tg} 2\pi ft.$$

El campo resultante gira, por consiguiente, con una frecuencia f igual a la de la red de corriente trifásica.

Cuando un conductor se mueve respecto a un campo magnético, se induce en él una fem. De acuerdo con la ley de Lenz, la fuerza lateral sobre las corrientes inducidas es de sentido tal que se opone al movimiento relativo. Por consiguiente, si un conductor, capaz de girar alrededor de

un eje, se encuentra en el campo magnético rotatorio creado dentro del estator, figura 16-24(*a*), las fuerzas laterales sobre las corrientes inducidas se oponen al movimiento relativo entre él y el campo rotatorio. En otras palabras, se ejerce sobre el conductor un par de sentido tal que le obliga a girar con el campo, constituyendo un motor de inducción trifásico.

Aunque siempre se ejerce un par sobre un conductor de forma cualquiera, en la práctica se utiliza un rotor que tiene un núcleo cilíndrico de hierro laminado con conductores de cobre alojados en ranuras longitudinales dispuestas sobre su superficie y conectados entre sí por anillos de cobre situados en los extremos del rotor. A causa de la forma de la parte de cobre del rotor, se le denomina rotor en *jaula de ardilla.*

Una de las ventajas principales de este tipo de motor es que no hay conexiones eléctricas en las partes móviles, evitándose escobillas, colector y anillos rozantes. Solamente el estator que, por supuesto, es fijo, está conectado a la red trifásica. No hay ninguna clase de conexión eléctrica con el rotor.

PROBLEMAS

16-1. *a*) ¿Cuál es la reactancia de una autoinducción de 1 henrio a la frecuencia de 60 ciclos/seg? *b*) ¿Cuál es la autoinducción de una bobina cuya reactancia es de 1 Ω a 60 ciclos/seg? *c*) ¿Cuál es la reactancia de un condensador de 1 μ*f* de capacidad para una frecuencia de 60 ciclos/seg? *d*) ¿Cuál es la capacidad de un condensador cuya reactancia es de 1 Ω a 60 ciclos/seg?

16-2. *a*) Calcúlese la reactancia de una autoinducción de 10 henrios para las frecuencias de 60 ciclos/seg y 600 ciclos/seg. *b*) Hállese la reactancia de un condensador de 10 μ*f* para las mismas frecuencias. *c*) ¿Para qué frecuencia es la reactancia de una autoinducción de 10 henrios igual a la de un condensador de 10 μ*f*?

16-3. Una autoinducción de reactancia 10 Ω y un condensador de reactancia 25 Ω (medidas a 60 ciclos/seg) se encuentran conectados en serie con una resistencia de 10 Ω a una línea de corriente alterna de 60 ciclos y diferencia de potencial eficaz 100 V. *a*) Calcúlese el voltaje entre los bornes de cada parte del circuito. *b*) Hállense las expresiones del voltaje y de la intensidad instantáneas en la línea.

16-4. En la figura 16-26, $I = 5$ A, $R = 8\,\Omega$, $X_L = 6\,\Omega$, $X_C = 12\,\Omega$. Calcúlense V_{ab}, V_{bc}, V_{cd}, V_{ad}, y la diferencia de fase entre la intensidad de la corriente y el voltaje en la línea.

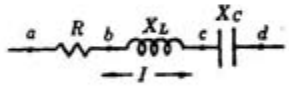


FIG. 16-26.

16-5. Una resistencia de 400 Ω está en serie con una autoinducción de 0,1 henrio y un condensador de 0,5 μ*f*. Calcúlese la impedancia del circuito y dibújese el diagrama del vector impedancia: *a*) a la frecuencia de 500 ciclos/seg; *b*) a la frecuencia de 1000 ciclos/seg. Hállese, en cada caso, la diferencia de fase entre la intensidad de la corriente y el voltaje en la línea, y dígase si la intensidad de la corriente está retrasada o adelantada.

16-6. *a*) Una resistencia pura y una autoinducción pura están en serie y conectadas a una línea de corriente alterna de 100 V. Un voltímetro para corriente alterna da la misma lectura cuando se conecta en paralelo a la resistencia y a la autoinducción. ¿Cuánto

señala? *b*) Los valores de la resistencia y de la autoinducción de la parte *a*) se modifican de modo que un voltímetro colocado en paralelo con la autoinducción señale 50 V. ¿Cuál será la indicación del voltímetro cuando se conecte en paralelo con la resistencia?

16-7. El voltaje eficaz entre los bornes de un generador de corriente alterna es 100 V y la llamada frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ es 500 rad/seg. Entre los bornes del generador hay conectados en serie una resistencia de 3 Ω, un condensador de 50 μf y una autoinducción que puede variarse de 10 a 80 milihenrios. El voltaje máximo ($V_{máx}$) entre las armaduras del condensador no debe exceder de 1200 V. *a*) ¿Cuál es la máxima intensidad de corriente eficaz admisible en el circuito en serie? *b*) ¿Hasta qué valor puede aumentarse la autoinducción sin sobrepasar el límite de seguridad?

16-8. Una bobina de resistencia 10 Ω y cuya autoinducción es 15 milihenrios se halla en serie con una resistencia de 12 Ω y un condensador de 200 μf de capacidad, y el conjunto conectado a una línea de corriente alterna de 100 V y 60 ciclos. Calcúlese el voltaje entre los terminales de la bobina.

16-9. Los puntos *a* y *b* de la figura 16-27 son los terminales de una línea de corriente alterna de 60 ciclos. El voltaje

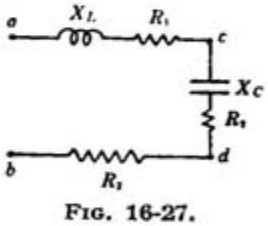


FIG. 16-27.

eficaz entre *a* y *b* es 130 V. Si $R_1 = 6\,\Omega$, $R_2 = R_3 = 3\,\Omega$, $X_C = 3\,\Omega$, $X_L = 8\,\Omega$, calcúlese: *a*) la intensidad de la corriente en el circuito; *b*) el voltaje entre *a* y *c*; *c*) el voltaje entre *c* y *d*.

16-10. Las reactancias de una autoinducción y un condensador son iguales para una frecuencia f_0. Represéntense en el mismo diagrama las reactancias de la autoinducción y del condensador en función de la frecuencia para un intervalo de frecuencias comprendido entre cero y $2f_0$. Represéntese también la reactancia de ambos asociados en serie.

16-11. Si las reactancias X_L y X_C del problema 16-4 corresponden a la frecuencia de 60 ciclos/seg, calcúlese la frecuencia para la cual estaría el circuito en resonancia.

16-12. El voltaje entre los bornes del generador de corriente alterna de la figura 16-28 es 150 V, y $R = 10\,\Omega$, $X_L = 50\,\Omega$,

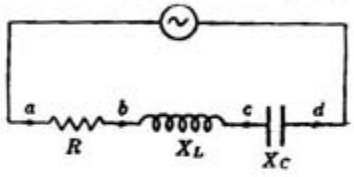


FIG. 16-28.

$X_C = 50\,\Omega$. Calcúlese la intensidad de la corriente en el circuito, y V_{ab}, V_{bc}, V_{cd}, V_{bd}, V_{ad}. Trácese el diagrama del vector rotatorio del circuito.

16-13. Un condensador de 2 μf, una autoinducción de 2 henrios y una resistencia *R* están en serie y conectados a un generador de corriente alterna cuya diferencia de potencial entre los bornes es 100 V. Calcúlese la intensidad de la corriente en el circuito para los siguientes valores de la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$: 0, 200, 400, 500, 600, 800; rad/seg: *a*) para $R = 100\ \Omega$; *b*) para $R = 500\ \Omega$. Trácense gráficas de los resultados, poniendo *I* en ordenadas y ω en abscisas.

16-14. Un condensador de capacidad 6⅔μf está conectado en serie con una bobina a un generador de corriente alterna de 1,2 V y frecuencia regulable. Variando la frecuencia se observa que la intensidad de la corriente alcanza su máximo valor eficaz de 0,2 A cuando la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ es 50 000 rad/seg. *a*) Hállese la resistencia y autoinducción de la bobina. *b*) ¿Cuál es la intensidad de la corriente cuando $\omega = 150\,000$ rad/seg? *c*) ¿Cuál es el voltaje máximo entre las armaduras del condensador a esta frecuencia?

16-15. Una resistencia R, una autoinducción L y un condensador C se encuentran conectados en serie a un generador de corriente alterna de voltaje constante en los bornes. *a*) ¿Para qué frecuencia, expresada en función de R, L y C, será máximo el voltaje en los bornes de la autoinducción? *b*) ¿Para qué frecuencia será máximo el voltaje entre los bornes del condensador?

16-16. Calcúlese la potencia suministrada a los circuitos de los problemas 16-3 y 16-4, utilizando las ecuaciones $P = I^2R$ y $P = VI \cos \theta$.

16-17. Dos alternadores V_1 y V_2 de la misma frecuencia, figura 16-29, están conectados en serie y suministran 150 w a una bobina. Un voltímetro de corriente alterna indica 40 V cuando se conecta

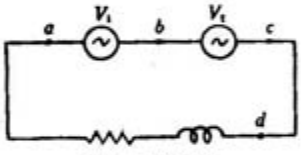


FIG. 16-29.

entre a y b, mientras que señala 30 V entre b y c y 50 V entre a y c. Un amperímetro de corriente alterna intercalado en la línea entre c y d indica 5 A. *a*) Represéntese en un diagrama cómo ha de conectarse un vatímetro para medir la potencia suministrada a la bobina. *b*) ¿Cuál es la diferencia de fase entre los voltajes de los alternadores? *c*) Hállense la resistencia, reactancia, impedancia y factor de potencia de la bobina.

16-18. Se conecta una impedancia Z a una línea de corriente alterna de 100 V y 60 ciclos. Al conectar un condensador de 265 μf, en paralelo con la impedancia, la corriente en la línea se reduce a la mitad de su primer valor y está en fase con el voltaje de la línea. Calcúlese la potencia suministrada a la impedancia.

16-19. En el circuito de la figura 16-30 se tiene: $V_{ab} = 100$ V, $f = 60$ ciclos/seg, $C = 26{,}5$ μf, $L = 0{,}265$ hen-

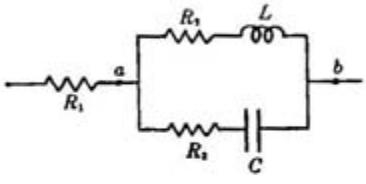


FIG. 16-30.

rio, $R_1 = R_2 = R_3 = 5\ \Omega$. *a*) Calcúlese la impedancia equivalente entre los puntos a y b. *b*) Obténgase la corriente en cada resistencia. *c*) Constrúyase el diagrama vectorial del circuito.

16-20. Un circuito absorbe 330 w de una línea de corriente alterna a 110 V y 60 ciclos. El factor de potencia es 0,6 y la corriente está retrasada respecto al voltaje. *a*) Calcúlese la capacidad del condensador en serie, que produciría un factor de potencia unidad. *b*) ¿Qué potencia será absorbida entonces de la red de suministro?

CAPÍTULO XVII

OSCILACIONES ELÉCTRICAS Y ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

17-1. Oscilaciones eléctricas.—Cuando se estudió en la sección 8-5 la descarga de un condensador a través de una resistencia, no se tuvo en cuenta el efecto de autoinducción en el circuito. Vamos a considerar ahora cómo queda afectada la descarga por la autoinducción, comenzando primero por un circuito en el cual la resistencia es despreciable.

La figura 17-1(*a*) representa esquemáticamente un condensador cargado, un interruptor y una autoinducción de resistencia despreciable. En el instante de cierre del circuito, el condensador comienza a descargarse a través de la autoinducción. En un instante posterior, representado en la figura 17-1(*b*), el condensador se ha descargado completamente y la diferencia de potencial entre sus armaduras (o en los terminales de la autoinducción) se ha anulado. Entre tanto, la corriente en la autoinducción ha creado un campo magnético en el espacio que la rodea. Este campo magnético disminuye ahora, induciendo en la autoinducción una fem del mismo sentido que la corriente. La corriente, por consiguiente, persiste aunque con un valor decreciente, hasta que el campo magnético ha desaparecido y el condensador se ha cargado en sentido opuesto a su polaridad inicial, según indica la figura 17-1(*c*). El proceso se repite ahora por sí mismo en sentido opuesto y, en ausencia de pérdidas de energía,

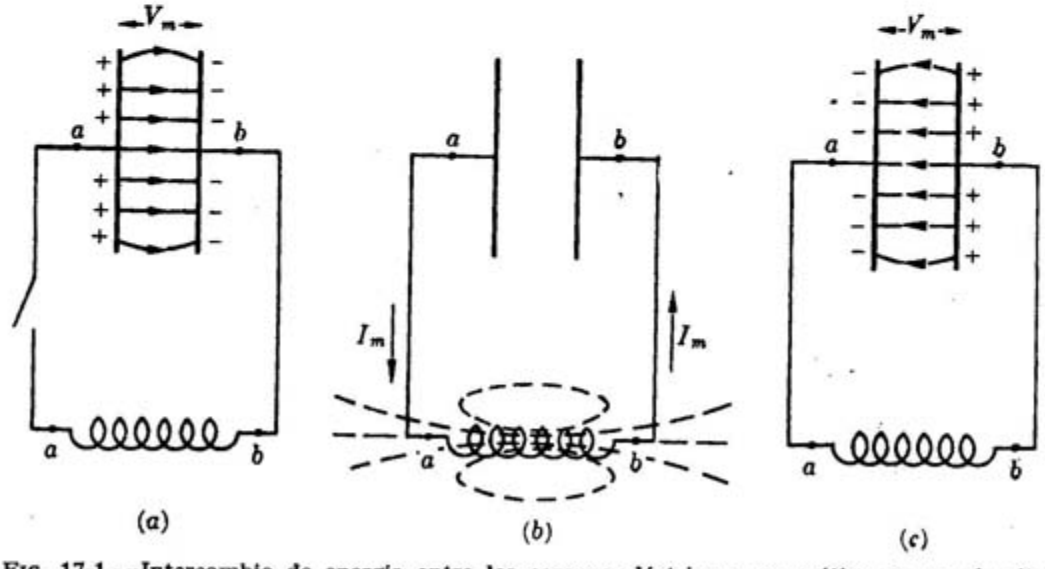


FIG. 17-1.—Intercambio de energía entre los campos eléctrico y magnético en un circuito oscilante.

las cargas del condensador oscilarán hacia adelante y hacia atrás indefinidamente.

Este proceso se denomina *oscilación eléctrica.*

Los puntos a y b de la figura 17-1(a) pueden considerarse como los terminales del condensador o de la autoinducción. Por consiguiente,

$$V_{ab} = \frac{q}{C} = L\frac{di}{dt}$$

Puesto que $i = -dq/dt$ (el signo menos aparece porque q está disminuyendo) se tiene:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}, \text{ y, por tanto,}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Esta ecuación es la misma ecuación diferencial del movimiento armónico simple. Su solución es:

$$q = Q\cos 2\pi ft$$

donde

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

y Q es la carga inicial del condensador. Por consiguiente, la carga fluctúa u *oscila* de modo completamente análogo a como lo hace una masa suspendida de un resorte. La frecuencia f se denomina *frecuencia natural* del circuito. Obsérvese que esta frecuencia es aquella para la cual el circuito está en resonancia. Esto es, un circuito eléctrico, como un sistema mecánico, resuena cuando la frecuencia impulsante es igual a la frecuencia natural.

La intensidad en el circuito puede encontrarse derivando respecto a t:

$$i = -\frac{dq}{dt} = 2\pi fQ \operatorname{sen} 2\pi ft.$$

El coeficiente $2\pi fQ$ es igual, evidentemente, a la intensidad máxima I_m. Por tanto,

$$i = I_m \operatorname{sen} 2\pi ft. \qquad [17\text{-}1]$$

La corriente es, por consiguiente, alterna sinusoidal y está desfasada 90° respecto a la carga.

Desde el punto de vista energético, las oscilaciones de un circuito eléctrico consisten en un intercambio de energía entre el campo eléctrico del condensador y el campo magnético de la autoinducción, permaneciendo constante la energía total asociada al circuito. De nuevo encon-

tramos analogía entre este hecho y la transformación de energía cinética a potencial, y viceversa, en un sistema mecánico oscilante.

La energía del condensador en cualquier instante es $\frac{1}{2} Cv^2$, y la de la autoinducción es $\frac{1}{2} Li^2$; por consiguiente,

$$\tfrac{1}{2} Cv^2 + \tfrac{1}{2} Li^2 = \tfrac{1}{2} CV_m^2 = \tfrac{1}{2} LI_m^2 = \text{constante},$$

siendo v e i los valores instantáneos, y V_m e I_m los valores máximos de la diferencia de potencial y de la intensidad de la corriente, respectivamente.

17-2. Oscilaciones amortiguadas.—Vamos a ampliar el estudio efectuado en la sección anterior para tener en cuenta el efecto de la resistencia en el circuito. Según la figura 17-2 tenemos:

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} - iR = 0. \qquad [17\text{-}2]$$

Después de sustituir i por $-\dfrac{dq}{dt}$ y $\dfrac{di}{dt}$ por $-\dfrac{d^2q}{dt^2}$, la Ec. [17-2] se convierte en

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \qquad [17\text{-}3]$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación del movimiento armónico amortiguado de un sistema masa-resorte[1]. Si la resistencia no es demasiado grande ($R^2 < 4L/C$), la carga del condensador oscila con *movimiento armónico amortiguado* y

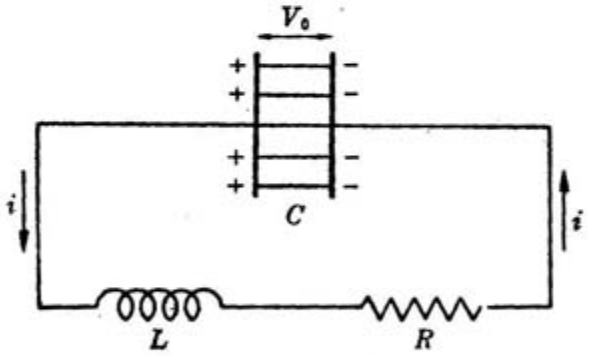


FIG. 17-2.

$$q = \frac{f_0}{f_1} Q\varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}} \cos\,(2\pi f_1 t + \varphi),$$

donde

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}},$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

y $$\cos\varphi = \frac{f_1}{f_0}$$

La frecuencia, f_1, de la oscilación es menor que la frecuencia f_0 en el correspondiente circuito no amortiguado, es decir, cuando $R = 0$. La amplitud no es constante, sino que disminuye con el tiempo a causa de la presencia del factor exponencial $\varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}}$.

La intensidad puede hallarse a partir de la relación

$$i = -\,dq/dt.$$

[1] Véase *Fundamentos de Física*, I, Sec. 14-8.

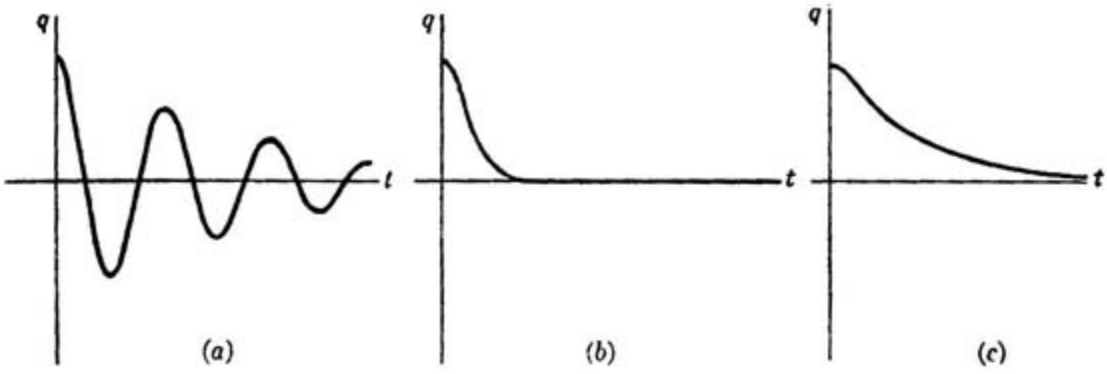


FIG. 17-3.—Características de la descarga en un circuito que contiene: R, L y C. (a) Oscilación, $R < 2\sqrt{L/C}$. (b) Amortiguamiento crítico, $R = 2\sqrt{L/C}$. (c) Superamortiguamiento, $R > 2\sqrt{L/C}$.

Esto conduce a la ecuación

$$i = I_m \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}} \operatorname{sen} 2\pi f_1 ,$$

donde

$$I_m = \frac{2\pi f_0^2 Q}{f_1} \qquad [17\text{-}4]$$

Obsérvese que esta ecuación se reduce a la [17-1] cuando $R = 0$.

Si $R = 2\sqrt{L/C}$, la descarga deja de ser oscilante. La carga del condensador disminuye asintóticamente hacia cero y se dice que el circuito tiene *amortiguamiento crítico*. Si $R > 2\sqrt{L/C}$, el circuito está *superamortiguado*. Los tres casos están representados en la figura 17-3.

17-3. Oscilaciones entretenidas.—El efecto de la resistencia en un circuito oscilante es disipar la energía del circuito transformándola en calor. Las oscilaciones pueden ser entretenidas en un circuito si se dispone de algún medio que permita restituir la energía en la misma proporción que desaparece. Actualmente, el método más corriente de conseguirlo consiste en utilizar las propiedades amplificadoras de un tubo termoiónico.

En la figura 17-4 está representado un circuito denominado de *rejilla sintonizada*. La autoinducción L y el condensador C_1 comprenden el circuito sintonizado. Las fluctuaciones de potencial del punto a producen

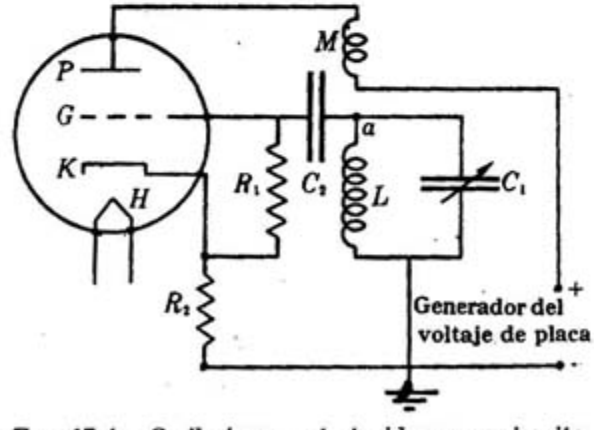


FIG. 17-4.—Oscilaciones entretenidas en un circuito de «rejilla sintonizada».

variaciones correspondientes en el potencial de la rejilla G, a través del condensador C_2. Estas variaciones del potencial de rejilla producen variaciones en la corriente de placa que ocasionan un transporte de energía desde el generador de voltaje de placa a la autoinducción L, a través de la inducción mutua M, entre la bobina de placa y el circuito sintonizado. Si se eligen adecuadamente las constantes del circuito, se suministra energía a éste en la misma proporción que se disipa.

El cátodo y la rejilla se mantienen a sus potenciales relativos adecuados mediante las caídas iR en las resistencias R_1 y R_2.

17-4. Radiación.—En ausencia de histéresis, la energía almacenada en el campo eléctrico de un condensador, o en el campo magnético de una autoinducción, vuelve al circuito cuando el condensador se descarga o desaparece la corriente en la autoinducción, siempre que estos fenómenos tengan lugar lentamente. Por el contrario, si los campos son obligados a cambiar con rapidez, no toda la energía vuelve al circuito, sino que parte de ella escapa permanentemente en forma de *energía electromagnética radiante*. Por consiguiente, cualquier circuito en el cual circula una corriente alterna es un generador de ondas electromagnéticas. De un modo más general, se emite energía radiante siempre que una carga es acelerada. Una corriente alterna o un circuito oscilante son simplemente métodos adecuados para acelerar cargas.

De las relaciones que según hemos demostrado existen entre los efectos eléctricos y magnéticos puede deducirse (véase Sec. 17-5) que las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío con una velocidad de 3×10^8 m/seg, que coincide con la velocidad de la luz. En efecto, un haz luminoso es un tren de ondas electromagnéticas de frecuencia mucho más elevada (por consiguiente, de longitud de onda más corta) que las ondas de un circuito oscilante, pero exactamente de la misma naturaleza.

La velocidad, la frecuencia y la longitud de onda de las ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío están relacionadas por la conocida ecuación

$$c = f\lambda,$$

siendo c la velocidad de la luz en el vacío.

La eficacia de un circuito como radiador depende, en alto grado, de su forma y dimensiones. Si el campo eléctrico está localizado, p. ej., entre las láminas muy próximas de un condensador, la energía radiada por segundo es relativamente pequeña. Cuando las láminas están separadas y el campo entre ellas tiene un valor apreciable en un volumen mayor, la eficacia del circuito como radiador aumenta. El caso límite se alcanza cuando el circuito se ha reducido al de la figura 17-5; esto es, a un conductor rectilíneo con un generador cualquiera de corriente alterna en su centro. Las dos mitades del conductor forman las *armaduras* del condensador, teniendo el campo eléctrico en un cierto instante la forma general representada por las líneas de trazos. Cuando la polaridad del generador se invierte, el campo se invierte también. Puesto que en

cada inversión se mueven cargas a lo largo del conductor, éste está rodeado a su vez por un campo magnético, representado por líneas continuas que son circunferencias cuyos centros están sobre el conductor. El campo magnético se invierte también a cada inversión de la corriente. El campo eléctrico alrededor del conductor es análogo al campo que rodea un dipolo eléctrico (Fig. 2-8), y el conjunto del campo eléctrico y el campo magnético es el que resultaría si el momento eléctrico del dipolo variase de valor sinusoidalmente de acuerdo con la relación

$$p = p_m \operatorname{sen} 2\pi f t,$$

siendo p el valor instantáneo y p_m el valor máximo del momento eléctrico. Por ello se considera frecuentemente al conductor como un *dipolo oscilante*.

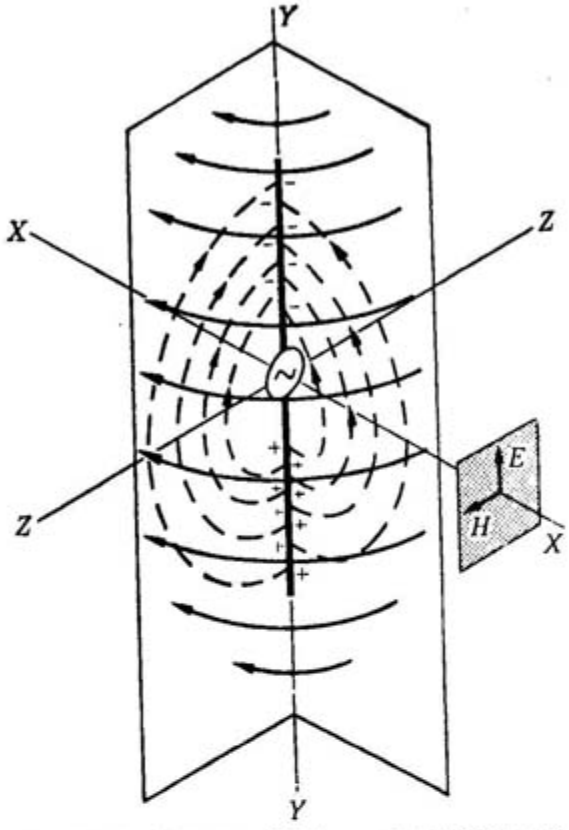


FIG. 17-5.—Campos eléctrico y magnético que rodean un dipolo oscilante. Campo eléctrico, líneas de trazos; campo magnético, líneas continuas.

Si se mira el conductor a lo largo del eje X en la figura 17-5 el campo eléctrico y el campo magnético dentro de un área pequeña (tal como la sombreada) son perpendiculares entre sí. El vector intensidad del campo eléctrico, E, es vertical, o sea paralelo al eje Y; el vector excitación magnética, H, es paralelo al eje Z. Cerca del conductor, estos campos presentan una diferencia de fase de 90°, puesto que en el instante en que el condensador está totalmente cargado y el campo eléctrico es máximo, la intensidad de la corriente y el campo magnético son ambos nulos. Más lejos del conductor, y por razones que son demasiado complejas para exponerlas en este lugar, la diferencia de fase cambia y los campos están en concordancia de fase. Su posición mutua en el espacio no varía; es decir, el campo eléctrico es paralelo al conductor y el campo magnético perpendicular a él.

Un *frente de onda* se define como una superficie, en cuyos puntos el vector E (o el vector H) están en fase. Una línea en el sentido de la propagación, perpendicular al frente de onda, se denomina *rayo*. A distancia suficiente del conductor los frentes de onda pueden considerarse como superficies planas. La figura 17-6 representa una porción del eje X a una distancia considerable del conductor. Las ondas avanzan hacia la derecha. Si la corriente alterna del radiador es sinusoidal, el valor y sentido del

campo eléctrico en todos los puntos de un plano perpendicular al eje X puede representarse por la ordenada de la curva sinusoidal rotulada en la figura 17-6 con la letra E. La curva designada por H indica el valor y dirección del campo magnético en todos los puntos de los planos perpendiculares al eje X. Ambas curvas E y H o, más correctamente, las variaciones del campo que representan, avanzan hacia la derecha con una velocidad de 3×10^8 m/seg.

Los sentidos relativos de los vectores E, H, y del vector V, que tiene el sentido de la propagación, están siempre relacionados como se indica en la figura 17-7. Una regla útil para recordar estas posiciones relativas es imaginar que el eje V es un tornillo con la hélice a derechas, sobre el cual hay una tuerca que soporta los vectores E y H. Si la tuerca se gira en sentido tal que tienda a llevar E a la posición ocupada por H, según se indica por la flecha curva de la figura, el sentido de *avance* de la tuerca es el sentido de propagación.

La longitud de onda de las ondas luminosas es del orden de 5×10^{-5} cm. Las longitudes de onda de las ondas de radio son del orden de 100 m. Así, las primeras son mucho más cortas que las dimensiones de los aparatos ópticos, mientras que las últimas son mucho más largas que las dimensiones de las lámparas de radio ordinarias. La construcción, en los últimos años, de aparatos capaces de engendrar ondas electromagnéticas de frecuencia muy elevada, cuya longitud de onda es de unos pocos centímetros, ha abierto un campo de investigación completamente nuevo, en el cual, por primera vez, las dimensiones de un aparato son del mismo orden de magnitud que la longitud de onda de las ondas engendradas o recibidas.

Resulta que, cuando intervienen longitudes de onda (o frecuencias) de este orden, muchos conceptos tales como los de resistencia e impedancia, que son enteramente adecuados al manejar corrientes continuas, o corrientes alternas de una frecuencia de 60 ciclos/seg, pierden gran parte de su significación. Pierde importancia el movimiento de cargas en los

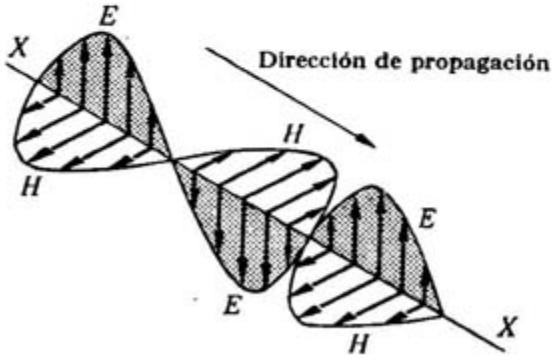


FIG. 17-6.—Variaciones del campo eléctrico y de la excitación magnética en la propagación de una onda electromagnética.

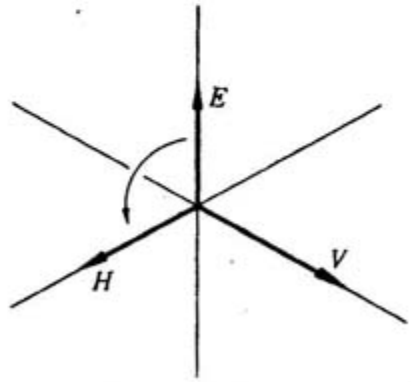


FIG. 17-7.—Posiciones relativas del campo eléctrico E, excitación magnética H y velocidad de propagación V en una onda plana electromagnética polarizada.

conductores y la adquieren las variaciones de las intensidades del campo eléctrico y de la excitación magnética en el espacio exterior a los conductores o encerrado por éstos. Aunque se utilizan todavía conductores para transportar energía de un punto a otro, el conductor puede considerarse simplemente como una guía de las ondas electromagnéticas y se denomina *guía de la onda*.

17-5. Velocidad de las ondas electromagnéticas.—El hecho culminante de la teoría electromagnética fué su predicción de que un circuito oscilante debe ser un origen de ondas electromagnéticas, que se propagan con una velocidad que coincide exactamente (dentro de los errores experimentales) con la velocidad observada. La teoría fué desarrollada por Maxwell en 1864, y las primeras comprobaciones experimentales fueron llevadas a cabo por Hertz en 1887. Una exposición completa de la teoría de la radiación electromagnética ha de reservarse naturalmente para textos más avanzados, pero las ideas fundamentales y la ecuación de la onda pueden exponerse sin gran dificultad. Necesitamos utilizar las siguientes relaciones:

1) La integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico E, a lo largo de un contorno cerrado, es igual a la derivada respecto al tiempo, cambiada de signo, del flujo magnético que atraviesa el contorno:

$$\oint E \cos \theta \, dl = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Si el campo magnético es perpendicular al plano del contorno, B es la densidad media del flujo y A el área del contorno, se tiene:

$$\Phi = AB,$$

y dado que

$$B = \mu H,$$

se deduce:

$$\oint E \cos \theta \, dl = - \mu A \frac{dH}{dt} \qquad [17\text{-}5]$$

2) La integral curvilínea de la excitación magnética H, a lo largo de un contorno cerrado, es igual a la intensidad que atraviesa el contorno:

$$\oint H \cos \theta \, dl = i. \qquad [17\text{-}6]$$

3) En una región en la que el campo eléctrico varía existe una *corriente de desplazamiento*. La densidad de la corriente de desplazamiento es:

$$J = \frac{dD}{dt} = \varepsilon \frac{dE}{dt} \qquad [17\text{-}7]$$

En la deducción de la Ec. [17-6], i representó la corriente de conducción (movimiento real de cargas) a través del plano del contorno. Maxwell

dió el paso audaz de asegurar que debía cumplirse lo mismo para las corrientes de desplazamiento, y experimentalmente encontramos que sucede así. Entonces, dado que $i = JA$, las Ecs. [17-6] y [17-7] pueden combinarse para dar

$$\oint H \cos \theta \, dl = \varepsilon A \frac{dE}{dt} \qquad [17\text{-}8]$$

Las Ecs. [17-5] y [17-8] tienen la misma forma, expresando una de ellas una relación entre la integral curvilínea de E y la derivada respecto a t de H, y la otra una relación entre la integral curvilínea de H y la derivada respecto a t de E.

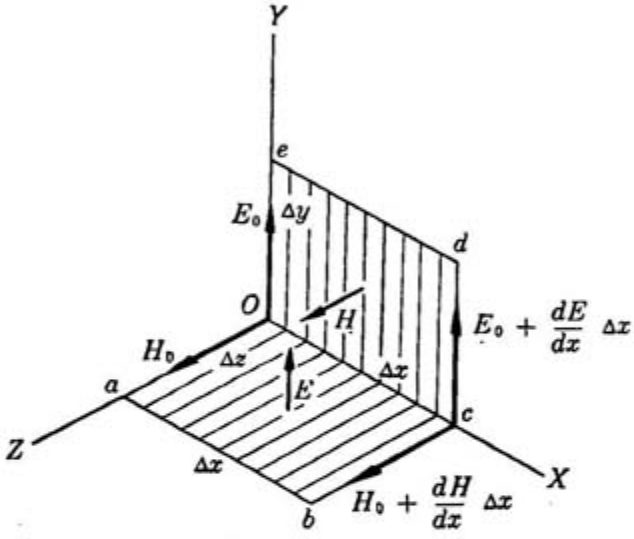


FIG. 17-8.—Variaciones de E y H en una onda electromagnética.

Consideremos ahora el espacio que rodea un circuito oscilante en el cual coexisten un campo eléctrico y un campo magnético, cuyas magnitudes varían de un punto a otro y con el tiempo. Establezcamos en cierto punto O, figura 17-8, un sistema de ejes coordenados. Hemos visto que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí. Sea el campo magnético perpendicular al plano X-Y, y el campo eléctrico perpendicular al plano X-Z.

Constrúyase un rectángulo infinitesimal $Oabc$ de lados Δx y Δz, situado en el plano X-Z, y calculemos la integral curvilínea de H a lo largo de este rectángulo. Puesto que H es perpendicular a los lados ab y Oc, éstos no contribuyen al valor de la integral. La integral curvilínea a lo largo del lado Oa es $H_0 \Delta z$, siendo H_0 la excitación magnética en el plano Y-Z.

Sea dH/dx la derivada de H respecto a x; entonces, la variación de H en la distancia Oc, o Δx, es el producto de la derivada respecto a la distancia, por la distancia; o sea,

$$\Delta H = \frac{dH}{dx} \Delta x$$

Por consiguiente, el valor de H en el lado bc es:

$$H_0 + \Delta H = H_0 + \frac{dH}{dx} \Delta x.$$

La integral curvilínea a lo largo de este lado será, por tanto,

$$-\left(H_0 + \frac{dH}{dx}\,\Delta x\right)\Delta z,$$

apareciendo el signo menos por ser $\theta = 180^\circ$ (H y bc son de sentidos opuestos).

En consecuencia, la integral alrededor del contorno total es:

$$\oint H \cos\theta\, dl = H_0\,\Delta z - \left(H_0 + \frac{dH}{dx}\,\Delta x\right)\Delta z = -\frac{dH}{dx}\,\Delta x\,\Delta z$$

Sustituyendo $\Delta x\,\Delta z$ por A, área del contorno, y combinando la ecuación anterior con la [17-8] se obtiene:

$$\frac{dH}{dx} = -\,\varepsilon\,\frac{dE}{dt}, \qquad [17\text{-}9]$$

donde E es el valor medio del campo eléctrico sobre el contorno infinitesimal, o sea, su valor en el *punto* en que se ha formado el contorno.

Consideremos ahora el rectángulo $\Delta x\,\Delta y$ de la figura 17-8, que se encuentra en el plano X-Y y es perpendicular, por tanto, a H. Cuando se calcula la integral curvilínea de E a lo largo de este contorno por el método utilizado anteriormente, se obtiene:

$$\frac{dE}{dx} = -\,\mu\,\frac{dH}{dt} \qquad [17\text{-}10]$$

Eliminemos E entre las Ecs. [17-9] y [17-10], derivando la primera respecto a x y la segunda respecto a t. Esto conduce a las relaciones:

$$\frac{d^2H}{dx^2} = -\,\varepsilon\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dE}{dt}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{dx}\right) = -\,\mu\,\frac{d^2H}{dt^2}$$

Pero

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{dx}\right)$$

Por consiguiente,

$$\frac{d^2H}{dt^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\,\frac{d^2H}{dx^2} \qquad [17\text{-}11]$$

Eliminando H del mismo modo, se obtiene para E una ecuación análoga:

$$\frac{d^2E}{dt^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\,\frac{d^2E}{dx^2} \qquad [17\text{-}12]$$

Se recordará que la ecuación diferencial de una onda transversal en una cuerda es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\mu}\frac{d^2y}{dx^2},$$

y que la ecuación diferencial de una onda de compresión en un líquido o en un gas es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{k\rho_0}\frac{d^2y}{dx^2}$$

Las Ecs. [17-11] y [17-12] tienen la misma forma matemática que las dos ecuaciones diferenciales anteriores, lo cual significa que los vectores campo, H y E, varían en el tiempo y en el espacio exactamente igual que los desplazamientos de una partícula en una onda transversal de una cuerda, o en una onda sonora. Tenemos, por consiguiente, una *onda electromagnética que se propaga*, la cual es transversal en el sentido de que el campo eléctrico y la excitación magnética son normales a la dirección de propagación. La onda considerada aquí, llamada *polarizada en un plano*, es de un tipo relativamente sencillo. Dicha denominación significa que en todos los puntos y en todo instante los vectores H permanecen paralelos a un plano determinado, mientras que los vectores E son paralelos a un segundo plano perpendicular al primero. No se requiere ningún *manantial* de campos eléctrico o magnético distinto de la propia onda, que es, por decirlo así, autoentretenida. El campo magnético variable mantiene el campo eléctrico, según indica la ecuación:

$$\oint E \cos\theta \, dl = -\mu A \frac{dH}{dt},$$

y el campo eléctrico variable mantiene el campo magnético, como se deduce de

$$\oint H \cos\theta \, dl = \varepsilon A \frac{dE}{dt}$$

Cuando la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio se escribe en la forma de las Ecs. [17-11] o [17-12], el coeficiente de la derivada espacial es el cuadrado de la velocidad de propagación; p. ej., la velocidad de propagación de una onda transversal en una cuerda es $\sqrt{T/\mu}$, y la de una onda de compresión en un flúido es $\sqrt{1/k\rho_0}$. Por consiguiente, la velocidad de una onda electromagnética es:

$$V = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1}{K_m K_e}}\sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} \qquad [17\text{-}13]$$

En el vacío, para el cual $K_m = K_e = 1$, la velocidad se representa por c y está dada por

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} \qquad [17\text{-}14]$$

El producto de las constantes de proporcionalidad μ_0 y ε_0 puede determinarse por medidas y definiciones puramente eléctricas, magnéticas y mecánicas. Por ejemplo, en el sistema mks el factor μ_0 es exactamente, por definición, $4\pi \times 10^{-7}$ new-seg^2/coul^2 y el factor ε_0, determinado mediante un experimento equivalente a medir la fuerza entre dos cargas puntuales, es $1/4\pi \times 8{,}98742 \times 10^9$ new-m^2/coul^2. (El valor más preciso es el que se deduce de las medidas realizadas por Rosa y Dorsey en el National Bureau of Standards.) Por consiguiente,

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 8{,}98742 \times 10^9}{4\pi \times 10^{-7}} \frac{\text{new-m}^2}{\text{coul}^2} \times \frac{\text{coul}^2}{\text{new-seg}^2}}$$

$$= 2{,}9979 \times 10^8 \text{ m/seg.}$$

Las mejores medidas directas de la velocidad de la luz en el vacío dan:

$$c = 2{,}997929 \times 10^8 \text{ m/seg.}$$

Ambos resultados están en excelente acuerdo.

Consideremos ahora la velocidad de la luz en una sustancia material tal como el vidrio o el agua. La permeabilidad relativa K_m de todas las sustancias transparentes es tan próxima a la unidad que puede omitirse este factor en la Ec. [17-13], la cual se reduce a

$$V = \sqrt{\frac{1}{K_e}}\sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}},$$

y dado que

$$\sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} = c,$$

$$V = c\sqrt{\frac{1}{K_e}}$$

Se define en óptica el *índice de refracción*, n, de una sustancia, como la razón de la velocidad de la luz en el vacío a su velocidad en el medio. Por consiguiente,

$$n = \frac{c}{V} = \sqrt{K_e}, \qquad [17\text{-}15]$$

y el índice de refracción es igual a la raíz cuadrada del coeficiente dieléctrico. Sin embargo, ha de tenerse cautela al introducir en la Ec. [17-15] el valor del coeficiente dieléctrico obtenido a partir de medidas electrostáticas o medidas a baja frecuencia. El coeficiente dieléctrico de una sustancia es una medida de la polarización, o sea, de los efectos de orientación producidos por los campos eléctricos sobre las cargas situadas dentro de la sustancia. A muy altas frecuencias tales como las de las ondas luminosas (del orden de 10^{15} ciclos/seg), el campo cambia de sen-

tido tan rápidamente que los efectos de polarización no pueden alcanzar sus valores finales plenos antes que el campo se invierta. Por consiguiente, el coeficiente dieléctrico efectivo a estas frecuencias es mucho menor que a frecuencias bajas. Además, puesto que la capacidad de los dipolos para seguir una perturbación de frecuencia dada varía con esta frecuencia, se deduce que el coeficiente dieléctrico efectivo, y, por tanto, la velocidad de una onda luminosa en una sustancia material depende también de la frecuencia, efecto denominado *dispersión*.

Por ejemplo, el coeficiente dieléctrico del agua, encontrado a partir de medidas electrostáticas, es alrededor de 80, y $\sqrt{80} \approx 9$, mientras que el índice de refracción del agua es 1,3428 para la luz azul y 1,3308 para la luz roja.

Vamos a deducir ahora una relación importante entre los valores del campo eléctrico y la excitación magnética en una onda electromagnética. Supongamos para simplificar que la onda es sinusoidal. En virtud de la conocida expresión aplicable a una onda sinusoidal de frecuencia f, que se propaga en el sentido positivo de X con una velocidad V, podemos escribir:

$$E = E_m \operatorname{sen} 2\pi f \left(t - \frac{x}{V}\right), \qquad [17\text{-}16]$$

$$H = H_m \operatorname{sen} 2\pi f \left(t - \frac{x}{V}\right), \qquad [17\text{-}17]$$

siendo E_m y H_m las *amplitudes* o valores máximos de E y H.

Hemos demostrado que E y H deben satisfacer a la Ec. [17-9]. Derivando la Ec. [17-16] respecto a t y la Ec. [17-17] respecto a x, se obtiene:

$$\frac{dE}{dt} = 2\pi f E_m \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{V}\right),$$

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{2\pi f H_m}{V} \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{V}\right),$$

y cuando se sustituyen estos valores en la Ec. [17-9] resulta:

$$-\frac{2\pi f H_m}{V} \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{V}\right) = -\varepsilon \times 2\pi f E_m \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{V}\right)$$

Simplificando y teniendo en cuenta que $V = \sqrt{1/\mu\varepsilon}$, la relación anterior se reduce a

$$\sqrt{\mu}\, H_m = \sqrt{\varepsilon}\, E_m.$$

Las amplitudes de los campos eléctrico y magnético guardan entre sí una razón determinada.

Si la onda se propaga en el vacío,

$$\sqrt{\mu_0}\, H_m = \sqrt{\varepsilon_0}\, E_m.$$

17-6. Vector de Poynting.—Como cualquier otro tipo de onda, una onda electromagnética que se propaga transporta energía. Puede demostrarse que la potencia instantánea transportada por una onda electromagnética, por unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación, es:

$$S = EH, \qquad [17\text{-}18]$$

siendo E y H los valores instantáneos del campo eléctrico y de la excitación magnética. En el sistema mks, S se mide en julios por segundo y por metro cuadrado, o sea, w/m², cuando E se mide en V/m y H en A/m. Como la dirección de propagación de la onda es perpendicular al plano determinado por E y H, la magnitud S puede considerarse como un vector que tiene la dirección de propagación. Se conoce con la denominación de *vector de Poynting*, en honor de J. H. Poynting (1852-1914).

La Ec. [17-18] puede justificarse como sigue. Consideremos un elemento de volumen cilíndrico (Fig. 17-9) a través del cual está pasando una onda electromagnética. La sección transversal, dA, del elemento se encuentra en el plano determinado por E y H, y su longitud es $V\,dt$. Hemos demostrado que la densidad de energía en un campo eléctrico es $\varepsilon \dfrac{E^2}{2}$, y en un campo magnético, $\mu \dfrac{H^2}{2}$.

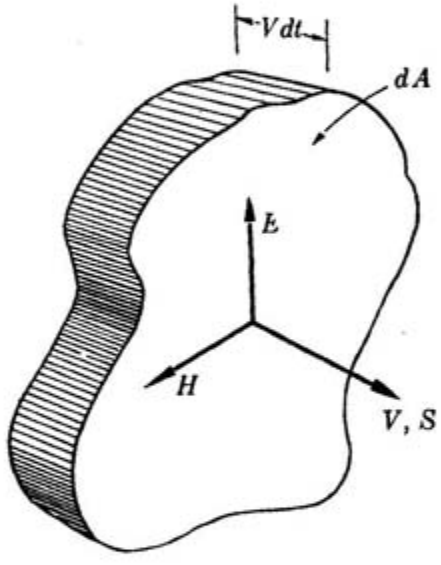


FIG. 17-9.

La energía electromagnética en el cilindro es, por consiguiente,

$$dA \times V\,dt \times \left(\varepsilon \frac{E^2}{2} + \mu \frac{H^2}{2}\right)$$

La onda electromagnética se propaga con la velocidad V en una dirección perpendicular a dA, y si la energía se propaga con ella a la misma velocidad, toda la energía electromagnética que se encuentra ahora en el cilindro atravesará el área dA en el tiempo dt. En consecuencia, la energía que atraviesa la superficie, por unidad de área y por unidad de tiempo, es:

$$S = \frac{V}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) \qquad [17\text{-}19]$$

Hemos demostrado en la sección 17-5 que

$$\sqrt{\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu}\,H, \quad \text{o sea,} \quad \varepsilon E^2 = \mu H^2.$$

Por consiguiente, la Ec. [17-19] puede escribirse:

$$S = V\,\varepsilon E^2 = V\,\mu H^2 = EH \qquad [17\text{-}20]$$

que es la misma Ec. [17-18].

Si se trata de una onda luminosa en un dieléctrico transparente,

$$V = \frac{c}{n}, \quad \varepsilon = K_e\varepsilon_0 = n^2\varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0,$$

y

$$S = cn\,\varepsilon_0 E^2 = \frac{c}{n}\,\mu_0 H^2 = EH.$$

Finalmente, en el vacío para el cual $n = 1$,

$$S = c\varepsilon_0 E^2 = c\mu_0 H^2 = EH.$$

La Ec. [17-20] da la potencia *instantánea* transportada por unidad de área. La *potencia media* transportada es igual, o al producto de $V\varepsilon$ por el valor medio de E^2, o al producto de $V\mu$ por el valor medio de H^2. Si la onda es sinusoidal, el valor medio de E^2 o de H^2 es la mitad de su valor máximo. Por consiguiente,

$$S_{media} = \tfrac{1}{2}\,V\varepsilon E_m^2 = \tfrac{1}{2}\,V\mu H_m^2 = \tfrac{1}{2}\,E_m H_m,$$

y si la onda se encuentra en el vacío,

$$S_{media} = \tfrac{1}{2}\,c\varepsilon_0 E_m^2 = \tfrac{1}{2}\,c\mu_0 H_m^2 = \tfrac{1}{2}\,E_m H_m.$$

La forma general de la Ec. [17-18] utilizando la notación vectorial es:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H},$$

y las direcciones relativas de los tres vectores son inmediatamente evidentes.

17-7. Reflexión y refracción. Fórmulas de Fresnel.—Consideremos ahora el fenómeno que tiene lugar cuando una onda electromagnética que se propaga en un medio, incide sobre la superficie de un segundo medio en el cual la velocidad es distinta de la del primero. Este problema es de la mayor importancia porque constituye el fundamento del estudio de la reflexión y de la refracción de la luz en las superficies de los espejos, lentes y prismas, y de la reflexión o dispersión de las ondas de un haz de radar. Sólo deduciremos los resultados para un caso especial, pero el método es el mismo en todos los casos.

En la figura 17-10, el plano Y-Z representa el límite que separa dos dieléctricos homogéneos e isótropos como puede ser, p. ej., la superficie

de un prisma de vidrio en el aire. El medio 1, de coeficiente dieléctrico K_e e índice de refracción $n = \sqrt{K_e}$, se encuentra a la izquierda del plano; el medio 2, de coeficiente dieléctrico K'_e e índice $n' = \sqrt{K'_e}$, se encuentra a la derecha. Sea una onda sinusoidal plana que se propaga en el medio 1 e incide normalmente sobre la superficie desde la izquierda. Los frentes de onda, y los vectores E y H de la onda incidente, son paralelos al plano Y-Z. Supongamos que el vector E sea paralelo al eje Z. El vector H es entonces paralelo al eje Y, con el sentido representado.

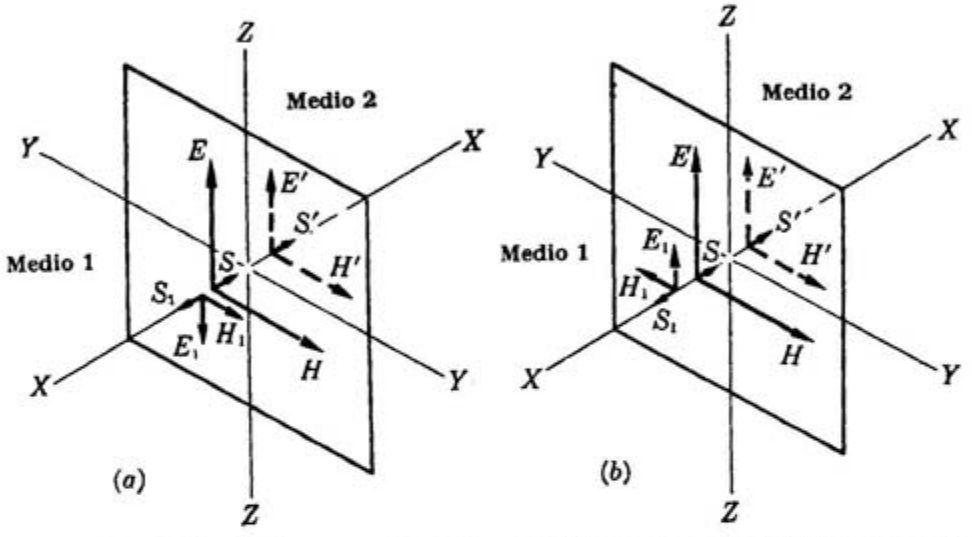


FIG. 17-10.—Reflexión de una onda electromagnética en la superficie de separación de dos medios.

Si ambos medios son perfectamente transparentes, pudiera parecer que la onda pasaría simplemente del medio 1 al 2, propagándose, por supuesto, con distinta velocidad en el medio 2. Sin embargo, consideraciones energéticas demuestran que no es sólo eso lo que ocurre en la superficie. La potencia que incide sobre la superficie, por unidad de área, está dada por el vector de Poynting en el medio 1,

$$S = \frac{c}{n}\,\mu_0 H^2$$

La potencia que abandona la superficie, por unidad de área, en el segundo medio es:

$$S' = \frac{c}{n'}\,\mu_0 (H')^2$$

Hemos demostrado en la sección 7-5 que en la superficie de separación de dos dieléctricos situados en un campo eléctrico, las componentes tangenciales de E son continuas al atravesar el límite. Por el mismo método utilizado en dicha sección puede demostrarse que la componente

tangencial de H es también continua a través del límite. Por tanto, cuando una onda electromagnética incide en el límite de separación, si lo único que ocurriese fuera su propagación al medio 2, a través de la superficie límite, entonces de la condición $H = H'$ resultaría que los vectores de Poynting *no* serían iguales ya que $n \neq n'$.

Lo que realmente sucede es que, además de la onda transmitida (llamada también onda *refractada*), se origina en el límite una onda *reflejada*, que se propaga en el medio 1 en un sentido tal que, en el caso especial de incidencia normal, es opuesto al de la onda incidente, y con tal amplitud que en el límite de ambos medios se cumpla el principio de conservación de la energía. Representemos por H_1 y E_1 las amplitudes de los vectores magnético y eléctrico en la onda reflejada.

Puede verse inmediatamente que si el vector H_1 tiene el mismo sentido que H, como en la figura 17-10(a), el vector E_1 ha de ser *opuesto* a E, puesto que la onda reflejada se está propagando hacia la izquierda. (Recuérdense las relaciones entre los sentidos de E y H y el sentido de propagación.) Por el contrario, si E_1 tiene el mismo sentido que E, como en la figura 17-10(b), entonces H_1 y H han de tener sentidos opuestos. En consecuencia, para satisfacer a las condiciones en el límite se tiene, en el caso (a),

$$E - E_1 = E', \quad H + H_1 = H', \qquad [17\text{-}21]$$

y en el caso (b),

$$E + E_1 = E', \quad H - H_1 = H'. \qquad [17\text{-}22]$$

Supongamos primero que la reflexión tiene lugar como en el caso (a). Puesto que las ondas incidente y reflejada se propagan en el primer medio,

$$\sqrt{\varepsilon}\, E = \sqrt{\mu}\, H, \quad \sqrt{\varepsilon}\, E_1 = \sqrt{\mu}\, H_1,$$

mientras que para la onda refractada,

$$\sqrt{\varepsilon'}\, E' = \sqrt{\mu'}\, H'.$$

Pero

$$\mu = \mu' = \mu_0,$$

y

$$\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{K_e}\sqrt{\varepsilon_0} = n\sqrt{\varepsilon_0}, \quad \sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{K'_e}\sqrt{\varepsilon_0} = n\sqrt{\varepsilon_0},$$

de modo que

$$n\sqrt{\varepsilon_0}\, E = \sqrt{\mu_0}\, H, \quad n\sqrt{\varepsilon_0}\, E_1 = \sqrt{\mu_0}\, H_1, \quad n'\sqrt{\varepsilon_0}\, E' = \sqrt{\mu_0}\, H',$$

o sea,

$$H = n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E, \quad H_1 = n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_1, \quad H' = n'\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E'$$

Cuando se sustituyen estas expresiones de H en la Ec. [17-21] se obtiene:

$$E - E_1 = E',$$
$$nE + nE_1 = n'E'.$$

Resolviendo el sistema resulta:

$$E_1 = \frac{n' - n}{n' + n} E,$$

$$E' = \frac{2n}{n' + n} E.$$

Y de las relaciones entre E y H,

$$H_1 = \frac{n' - n}{n' + n} H,$$

$$H' = \frac{2n'}{n' + n} H$$

Ahora bien: si $n' > n$, el término $\frac{n' - n}{n' + n}$ es positivo y E_1 y H_1, que son los vectores en la onda reflejada, son también positivos, lo que significa que tienen los sentidos supuestos, esto es, los de la figura 17-10(a). Si $n' < n$, E_1 y H_1 son negativos, esto es, sus sentidos son contrarios a los supuestos y la reflexión tiene lugar como en el caso (b). Por consiguiente, pueden presentarse ambos tipos de reflexión, el primero cuando $n' > n$, y el segundo para $n' < n$.

Se propone como ejercicio demostrar que, si se tiene en cuenta la onda reflejada, hay conservación de la energía.

Se define el *poder reflectante*, r, de una superficie como la razón de la potencia de la onda reflejada a la potencia de la onda incidente o, lo que es igual, la razón de los vectores de Poynting de ambas ondas:

$$r = \frac{\frac{c}{n}\mu_0 H_1^2}{\frac{c}{n}\mu_0 H^2} = \frac{(n' - n)^2}{(n' + n)^2} \qquad [17\text{-}23]$$

Supongamos, p. ej., que una onda luminosa que se propaga en el aire incide normalmente sobre la superficie de un prisma de vidrio. El índice de refracción (n) del aire es muy aproximadamente 1,00 y el del vidrio (n') es alrededor de 1,50. El poder reflectante es, por consiguiente,

$$r = \frac{(1{,}50 - 1{,}00)^2}{(1{,}50 + 1{,}00)^2} = \frac{0{,}25}{6{,}25} = 4\ \%$$

Es decir, se refleja un 4 % de la luz incidente y se transmite, naturalmente, un 96 %.

Cuando una onda electromagnética incide sobre la superficie que limita dos dieléctricos con una incidencia distinta de la normal, el problema es algo más complicado, pero el método general de plantearlo es el mismo. Es preciso considerar las condiciones límites que han de cumplirse por D y B, así como las satisfechas por E y H. Hemos demostrado en la sección 7-5 que la componente normal de D es continua a través de la superficie límite, y que otro tanto puede demostrarse fácilmente para B. No haremos un estudio completo del caso general, que puede encontrarse en un buen tratado de óptica física, y sólo indicaremos los factores que intervienen dando los resultados sin demostración.

En la figura 17-11, el plano Y-Z representa la superficie de separación entre dos dieléctricos. El medio 1, de índice n, se encuentra a la izquierda del plano y el medio 2 de índice n', está a la derecha. Una onda plana que se propaga en el medio 1 y está indicada por el rayo rotulado como *rayo incidente*, incide sobre la superficie límite. Los frentes de onda y las direcciones de los vectores E y H de la onda incidente, se encuentran en planos perpendiculares al rayo incidente, el cual está situado en el plano X-Z. Para evitar confusión no se han representado estos vectores en la figura.

Como en el caso de incidencia normal, se producen en la superficie límite una onda reflejada y otra refractada. Las direcciones y amplitudes relativas de las ondas incidente, refractada y reflejada, pueden encontrarse utilizando las condiciones límites que han de cumplir E, H, D y B. Desempeña también un papel importante la polarización de la onda incidente, pero basta considerar dos casos particulares, a saber: *a*) que la onda incidente esté polarizada en un plano con su vector E perpendicular al plano X-Z, y *b*) que E sea paralelo al plano X-Z. Cuando se conocen los resultados en estos dos casos especiales, pueden calcularse los correspondientes a otro cualquiera.

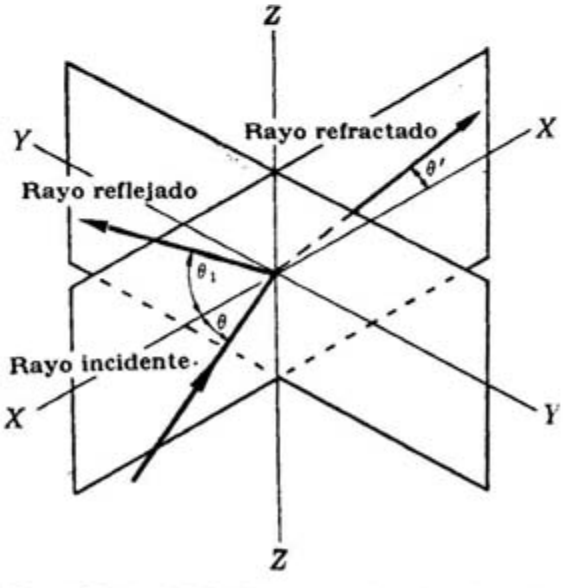


FIG. 17-11.—Relación entre los ángulos de incidencia, reflexión y refracción.

Se encuentra que, en todos los casos, los rayos reflejado y refractado están en el plano determinado por el rayo incidente y la normal a la superficie límite en el punto de incidencia. Este plano se denomina *plano de incidencia* y coincide con el X-Z de la figura 17-11. El ángulo θ_1 formado por el rayo reflejado y la normal es igual al ángulo de incidencia, θ. El ángu-

lo θ' formado por el rayo refractado y la normal está dado por

$$\frac{\text{sen } \theta'}{\text{sen } \theta} = \frac{\sqrt{K_e}}{\sqrt{K_e'}} = \frac{n}{n'},$$

o sea,

$$n \text{ sen } \theta = n' \text{ sen } \theta'. \qquad [17\text{-}24]$$

Esta relación es conocida con el nombre de *ley de Snell.*

Si la onda incidente está polarizada en un plano con su vector E perpendicular al plano de incidencia, entre los vectores E_1 y E' de las ondas reflejada y refractada y el vector $E_\perp$ de la onda incidente, se cumplen las siguientes relaciones:

$$E_1 = -E_\perp \frac{\text{sen } (\theta - \theta')}{\text{sen } (\theta + \theta')}, \qquad [17\text{-}25]$$

$$E' = E_\perp \frac{2 \text{ sen } \theta' \cos \theta}{\text{sen } (\theta + \theta')} \qquad [17\text{-}26]$$

Si la onda incidente está polarizada en un plano con su vector E ($E_\parallel$) paralelo al plano de incidencia, se tiene:

$$E_1 = E_\parallel \frac{\text{tg } (\theta - \theta')}{\text{tg } (\theta + \theta')}, \qquad [17\text{-}27]$$

$$E' = E_\parallel \frac{2 \text{ sen } \theta' \cos \theta}{\text{sen } (\theta + \theta') \cos (\theta - \theta')} \qquad [17\text{-}28]$$

Las Ecs. [17-25] a [17-28] se conocen con la denominación de *fórmulas de Fresnel* por ser Augustin Fresnel (1788-1827) quien primero las dedujo. Estas fórmulas serán utilizadas en óptica.

PROBLEMAS

17-1. El condensador C de la figura 17-2 tiene 300 $\mu\mu$f. *a*) ¿Cuál ha de ser la autoinducción L si la frecuencia de resonancia del circuito es 1 megaciclo/seg. (10^6 ciclos/seg)? *b*) ¿Cuántas espiras de hilo separadas 0,5 mm han de arrollarse sobre un tubo de 2 cm de diámetro para formar esta autoinducción? Supóngase que la autoinducción puede considerarse como un largo solenoide.

17-2. Cuando se cierra el interruptor S de la figura 17-12, la corriente permanente en la batería es de 10 A. *a*) Explíquese cómo se producen oscilaciones en el circuito L-C cuando se abre el interruptor. *b*) ¿Cuál es la frecuencia de las oscilaciones? *c*) ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial entre las armaduras del condensador?

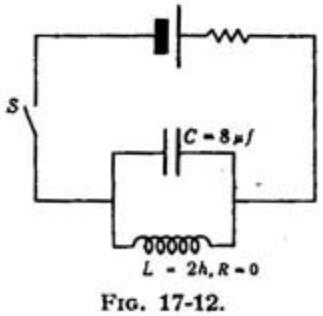


FIG. 17-12.

17-3. Se conectan en serie un condensador de 0,01 μf, una autoinducción de 0,1 henrio cuya resistencia es 1000 Ω y un interruptor. El condensador está cargado inicialmente a una diferencia de potencial de 400 V. Se cierra entonces el interruptor. *a*) Calcúlese la razón de la frecuencia de la oscilación del circuito a la frecuencia cuando la resistencia es nula. *b*) ¿Cuánta energía se transforma en calor en el primer ciclo completo? *c*) ¿Cuánta energía se convierte en calor en el tren completo de oscilaciones? *d*) ¿Cuál es la resistencia adicional máxima que puede ser intercalada en el circuito antes que la descarga deje de ser oscilante?

17-4. ¿Cuál es la frecuencia de las ondas electromagnéticas (en el vacío) para las siguientes longitudes de onda: 10^{-8} cm (rayos X); 5×10^{-5} cm (luz amarilla); 10 cm (microondas); 300 m (ondas de radio)?

17-5. ¿Cuál es la máxima excitación magnética en una onda plana de radio para la cual el campo eléctrico máximo es 100 μV/m?

17-6. La potencia media radiada por una estación de radio es 10 Kw. Supóngase que la potencia se radia uniformemente sobre la superficie de una semiesfera en cuyo centro se encuentra la emisora. *a*) ¿Cuál es el vector de Poynting en los puntos de la superficie de una semiesfera de 10 Km de radio? A esta distancia ¿pueden considerarse las ondas planas? *b*) Calcúlense el campo eléctrico y la excitación magnética máximos en los puntos de esta semiesfera.

17-7. Una emisora de radar emite un haz cónico uniforme de energía radiante. El ángulo sólido del cono es 0,01 estereorradianes. El campo eléctrico máximo a la distancia de 1 Km de la emisora es 10 V/m. *a*) ¿Cuál es la excitación magnética máxima? *b*) ¿Cuál es la potencia total emitida por el haz?

17-8. Supóngase que una lámpara de incandescencia de 100 w radia toda su energía en una onda electromagnética sinuosidal, y que la energía se emite uniformemente en todas direcciones. Calcúlense el campo eléctrico y la excitación magnética máximos a una distancia de 2 m de la lámpara.

17-9. Demuéstrese que cuando una onda plana electromagnética incide normalmente sobre una superficie plana que separa dos dieléctricos distintos, la potencia de los haces refractado y reflejado es igual a la potencia incidente sobre la superficie.

17-10. ¿Qué fracción de la energía de una onda electromagnética plana, que se propaga en el aire e incide normalmente sobre una superficie plana de agua, es reflejada si la frecuencia de la onda es tal que el coeficiente dieléctrico del agua es 80? Compárese con la fracción refractada si la onda es de luz visible, para la cual el índice de refracción del agua es 1,33.

CAPÍTULO XVIII

ELECTRÓNICA

18-1. Partículas elementales.—Al comienzo del capítulo primero se hizo una breve descripción de las partículas elementales que forman la materia. Comenzaremos este capítulo con un resumen de la información actual sobre dichas partículas y algunas otras más. Es imposible que en el espacio que podemos dedicar a esta materia, hagamos justicia a los físicos teóricos y experimentales que en los últimos treinta o cuarenta años han acumulado una información verdaderamente impresionante acerca de las propiedades de estas partículas, y tanto han añadido a nuestros conocimientos sobre la constitución del Universo. Al final del capítulo se da una bibliografía destinada al lector interesado en la materia.

Electrones.—El descubrimiento del electrón negativo data de la medida de la razón de su carga a su masa realizada por Thomson en 1897, y de la medida de su carga por Millikan en 1909. Ya hemos descrito estos experimentos. La carga de un electrón es $1{,}601864 \times 10^{-19}$ coul y su masa 1/1840 de la del átomo de hidrógeno, o sea, $9{,}1066 \times 10^{-31}$ Kg.

El electrón positivo fué observado por primera vez en 1932, por el Dr. Carl D. Anderson en una fotografía obtenida en la cámara de niebla, reproducida en la figura 18-1, en el curso de sus investigaciones sobre rayos cósmicos.

La fotografía se obtuvo con la cámara de niebla en un campo magnético perpendicular al plano del papel. Una lámina de plomo divide la cámara, y la partícula la ha atravesado, evidentemente. Como la curvatura de la trayectoria es mayor por encima de la lámina que por debajo, se deduce que la partícula se estaba moviendo hacia arriba, puesto que es difícil comprender cómo hubiera podido ganar energía al atravesar el plomo.

La densidad de las gotitas a lo largo de la trayectoria es la que cabría esperar si la partícula fuera un electrón. Pero el sentido del campo magnético y el del movimiento corresponden sólo al caso de que la partícula tenga carga positiva. De todo ello dedujo Anderson que la trayectoria había sido marcada por un electrón positivo o *positrón*. Desde que se hizo este descubrimiento se han fotografiado muchos miles de estas trayectorias, y la existencia del positrón ha quedado establecida definitivamente. Su masa es la misma que la de un electrón negativo, y su carga igual, pero de signo opuesto.

Los electrones positivos sólo tienen una existencia transitoria y no forman parte de la materia ordinaria. Existen dos procesos conocidos en los cuales se producen electrones positivos. Son expulsados de los núcleos

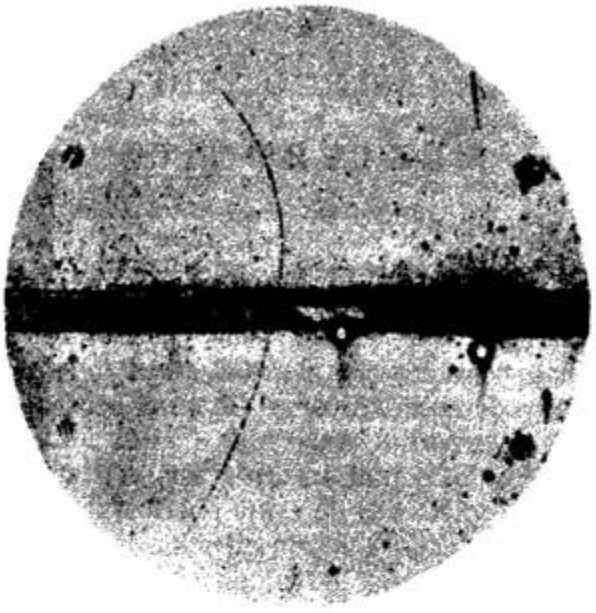


Fig. 18-1.—Trayectoria de un electrón positivo que atraviesa una lámina de plomo de 6 mm de espesor. (*Fotografía de C. D. Anderson.*)

de ciertas sustancias artificialmente radiactivas y se originan (juntamente con un electrón negativo) en un proceso denominado *producción por parejas,* en el cual es destruído simultáneamente un rayo γ. En este proceso hay conservación de carga, puesto que las partículas tienen cargas de signos contrarios.

Protón.—El protón es idéntico al núcleo de un átomo de hidrógeno $_1H^1$. Tiene una carga positiva de igual magnitud que la carga electrónica. Las masas de las partículas elementales se expresan adecuadamente en unidades de masa atómica (abreviadamente *uma)* las cuales son de valor tal, que la masa atómica del isótopo más abundante del oxígeno se toma de modo arbitrario igual, exactamente, a 16 uma. En esta escala la masa del átomo de hidrógeno es 1,00813 uma y la masa del protón (núcleo de hidrógeno) es este valor menos la masa de un electrón. Por consiguiente, la masa de un protón es 1,0076 uma, o sea, $1{,}672 \times 10^{-27}$ Kg.

Neutrón.—En 1930, W. Bothe y H. Becker observaron en Alemania que cuando el berilio, boro o litio eran bombardeados con partículas alfa rápidas, el material bombardeado emitía algo, partículas u ondas electromagnéticas, de un poder penetrante mucho mayor que las partículas alfa iniciales. Experimentos posteriores realizados en París, en 1932, por Irene Curie y F. Joliot, confirmaron estos resultados, pero fracasaron todos los intentos para explicarlos como rayos γ. Chadwick, en Inglaterra, repitió los experimentos y encontró que podían interpretarse satisfactoriamente como partículas descargadas denominadas actualmente *neutrones.* La masa del neutrón, que ha sido medida con precisión, es de 1,0090 uma, es decir, casi exactamente igual a la masa de un protón.

El núcleo de cada átomo, con la única excepción del átomo de hidrógeno $_1H^1$, es una agrupación de protones y neutrones. El gran poder penetrante de los neutrones procede del hecho de que no tienen carga y no son afectados, por consiguiente, por los campos eléctricos que rodean a los electrones y núcleos.

Mesotrón.—El mesotrón, o mesón, fué descubierto también por Anderson, en 1936, y, como el positrón, su existencia fué deducida a partir de trayectorias observadas en fotografías hechas en la cámara de niebla. Hay mesones positivos, negativos y neutros. Sus masas son del orden de varios centenares de veces la masa de los electrones. La masa de un mesón π es unas 280 veces la de un electrón; la masa de un mesón μ es unas 210 veces. Hasta 1945 se habían observado únicamente como componentes de la radiación cósmica, pero actualmente pueden obtenerse en el laboratorio por bombardeo de núcleos ligeros con partículas α de 400×10^6 electrón-voltios. La vida media de un mesón μ es de unos 10^{-6} seg y no forman parte de la materia ordinaria.

Neutrino.—El neutrino es la más fugaz de las partículas elementales. No se ha encontrado aún una prueba directa de su existencia, que se ha postulado para poder aplicar los principios de conservación de la energía, de la cantidad de movimiento y del momento cinético a ciertos procesos atómicos para los cuales en otro caso no se cumplirían. Es de masa desconocida y no posee carga.

Fotones.—En su acción mutua con la materia, las ondas electromagnéticas no se comportan como campos eléctricos y magnéticos continuos, sino como paquetes de energía denominados fotones. Así, un fotón no es una partícula en el sentido ordinario, sino que sus propiedades representan un aspecto de las ondas electromagnéticas. La energía de un fotón es proporcional a la frecuencia de la onda a la cual corresponde, relación propuesta primero por Planck en 1900 y ampliada por Einstein y otros en años sucesivos. La relación entre la energía y la frecuencia de un fotón es:

$$W = hf,$$

donde W es la energía, f la frecuencia y h una constante universal, denominada constante de Planck. El aspecto fotón de la energía radiante sólo se manifiesta cuando la frecuencia es próxima o superior a la de la luz visible. Así, se habla de fotones de luz, de rayos X o de rayos γ.

Un fotón tiene masa y cantidad de movimiento, pero carece, naturalmente, de carga.

18-2. Emisión termoiónica. Diodo.—El fenómeno de la conducción en un metal se ha interpretado como un transporte relativamente lento de electrones libres dentro del mismo, superponiéndose la velocidad de arrastre a la agitación térmica al azar. El movimiento térmico puede no ser tenido en cuenta en el proceso de conducción, pero desempeña un papel importante en el fenómeno de emisión termoiónica; esto es, en la liberación de electrones libres desde la superficie de un conductor calentado.

Las primitivas teorías sobre la emisión termoiónica suponían que las velocidades de los electrones libres en un metal estaban distribuídas del mismo modo que las velocidades de las moléculas gaseosas, o sea, de acuerdo con la ley de distribución de Maxwell-Boltzmann. Se admite ahora que la distribución de velocidades es de un tipo distinto, denominado distribución de Fermi-Dirac. Ambas funciones se han representado en la figura 18-2. La función Fermi-Dirac predice un número considerablemente mayor de electrones de alta velocidad que la distribución de Maxwell.

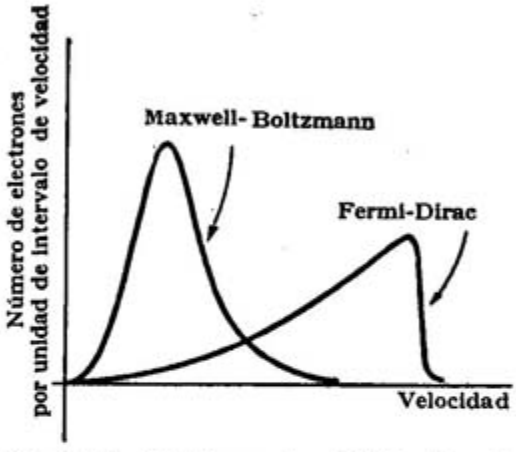


FIG. 18-2.—Funciones de distribución de Maxwell-Boltzmann y Fermi-Dirac.

Pudiera pensarse que un electrón al surgir a la superficie desde el interior se abriría paso simplemente a través de ella y escaparía. Existe, sin embargo, una energía mínima, que varía para los distintos metales, que el electrón ha de poseer para ser capaz de escapar del metal. Esta energía se expresa ordinariamente en electrón-voltios (un electrón-voltio es la energía de un electrón que ha sido acelerado, partiendo del reposo, a través de una diferencia de potencial de un voltio; 1 ev $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ julios) y su valor se considera como la *altura de la barrera de potencial* de la superficie metálica; p. ej., la altura de la barrera de potencial del wolframio es 13,5 electrón-voltios. A bajas temperaturas muy pocos electrones tienen esta cantidad de energía, pero cuando la temperatura se eleva la energía de los electrones aumenta, y crece rápidamente el número de los que son capaces de escapar.

La salida de electrones de la superficie de un conductor metálico aislado, deja al conductor cargado positivamente. Los electrones que han escapado son atraídos, por consiguiente, por el conductor y forman una *nube* de cargas negativas fuera de su superficie. Esta nube se denomina *carga espacial*. Si un segundo conductor próximo está a un potencial superior al del primero, los electrones de la nube son atraídos hacia él, y mientras se mantenga la diferencia de potencial entre los conductores, habrá un paso continuo de electrones desde el emisor o *cátodo* hasta el otro cuerpo, que se denomina *placa* o *ánodo*.

En el tubo termoiónico corriente, el cátodo y el ánodo (y, con frecuencia, otros electrodos) están encerrados dentro de un recipiente de vidrio o metal en el que se ha hecho el vacío, y las conexiones a los distintos electrodos se efectúan a través de la base o de las paredes del tubo. Describiremos, en primer lugar, las características de un tubo termoiónico sencillo, en el cual los únicos electrodos son el cátodo y el ánodo. Dicho tubo se denomina *diodo*.

El diodo está representado esquemáticamente en la figura 18-3. El cátodo y la placa están indicados por K y por P. El primero tiene, con frecuencia, la forma de un cilindro hueco, que se calienta mediante una fina resistencia H situada en su interior. Los electrones emitidos por la superficie exterior del cátodo son atraídos hacia la placa, que es un cilindro mayor que rodea al cátodo y tiene el mismo eje que él. La corriente de electrones hacia la placa se lee en el miliamperímetro MA. La diferencia de potencial entre la placa y el cátodo puede regularse con el cursor y leerse en el voltímetro V.

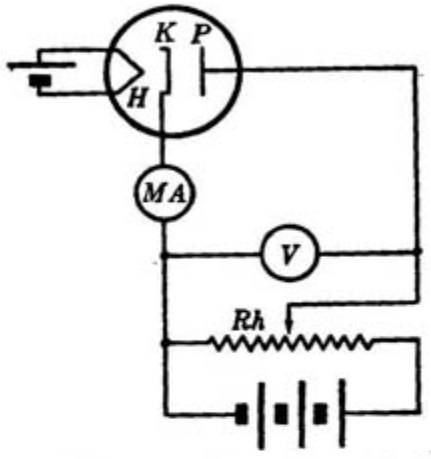


FIG. 18-3.—Dispositivo para medir la intensidad de la corriente y el voltaje de placa en un diodo.

Si la diferencia de potencial entre el cátodo y el ánodo es pequeña (de algunos voltios) sólo algunos de los electrones emitidos alcanzan la placa; la mayoría penetran una corta distancia dentro de la nube de la carga espacial y después vuelven hacia el cátodo. Cuando se aumenta el potencial de placa, son atraídos cada vez más electrones hacia ella, y con potenciales suficientemente elevados (del orden de algunos cientos de voltios) todos los electrones emitidos llegan a la placa. Un incremento posterior del potencial no aumenta la intensidad de la corriente de placa y se dice que ésta ha llegado a la *saturación*.

En la figura 18-4(a) está representada una gráfica de la intensidad de la corriente de placa I_p, en función del potencial de la misma V_p. Obsérvese que I_p no es nula aunque V_p lo sea. Esto es debido a que los electrones abandonan el cátodo con una velocidad inicial, y los que se mueven más rápidamente pueden penetrar la nube de la carga espacial y alcanzar la placa aunque no exista ningún campo acelerador. En realidad, es necesario un campo *retardador* para evitar que alcancen la placa, efecto que puede utilizarse para medir sus velocidades de emisión.

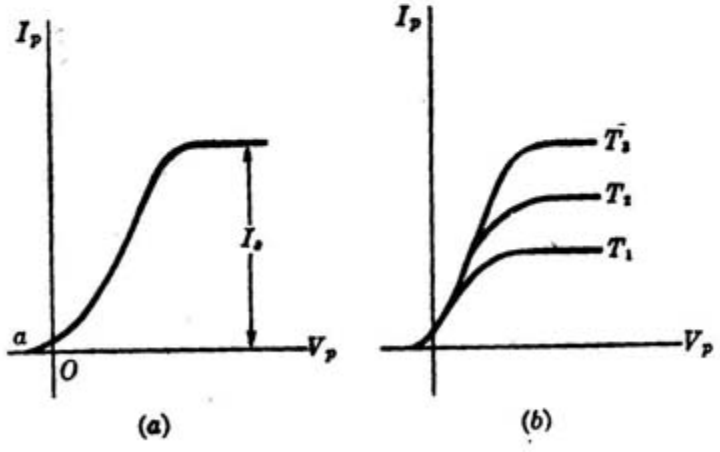


FIG. 18-4.—(a) Característica de un diodo, que representa la intensidad de la corriente de placa en función del voltaje de la misma. (b) Curvas de la intensidad de la corriente de placa correspondientes a tres temperaturas distintas del cátodo: $T_3 > T_2 > T_1$.

La corriente de saturación I_s de la figura 18-4(a) es igual a la intensidad de la co-

rriente que parte del cátodo y, para un tubo dado, su valor depende en alto grado de la temperatura del cátodo. La figura 18-4(*b*) representa tres curvas de la corriente de placa para tres temperaturas diferentes, siendo $T_3 > T_2 > T_1$. La relación entre la intensidad de la corriente de saturación y la temperatura, fué deducida por primera vez por O. E Richardson, y más tarde en forma ligeramente distinta, por S. Dushman La ecuación de Dushman es:

$$J_s = AT^2\varepsilon^{-\Phi/kT} \qquad [18\text{-}1]$$

siendo J_s la densidad de la corriente de saturación en la superficie del cátodo, A una constante característica de la superficie emisora, T la temperatura Kelvin del emisor, k la constante de Boltzmann y Φ el *trabajo de extracción* de la superficie, magnitud relacionada con la altura de la barrera de potencial. (Es difícil describir el fenómeno de modo que sea a la vez sencillo y preciso.) El trabajo de extracción de una superficie de wolframio puro es 4,52 electrón-voltios; la altura de su barrera de potencial es 13,5 electrón-voltios.

El trabajo de extracción Φ de una superficie puede reducirse considerablemente por la presencia de impurezas. Una pequeña cantidad de torio, p. ej., reduce el trabajo de extracción de la superficie del wolframio puro al 50 %, aproximadamente. Puesto que cuanto más pequeño es el trabajo de extracción, tanto mayor es la densidad de corriente a una temperatura dada (o tanto menor la temperatura a la cual puede alcanzarse una emisión dada), la mayor parte de los tubos de vacío utilizan actualmente cátodos que tienen superficies compuestas.

Existe una relación relativamente sencilla, conocida como ecuación de Langmuir-Child, que da el voltaje mínimo de placa necesario para producir la corriente de saturación en un diodo. Para deducir esta ecuación consideremos primero el efecto de la nube de electrones, o carga espacial, sobre la distribución de potencial entre el cátodo y la placa de un diodo. Supongamos que el cátodo y la placa sean planos paralelos separados por una distancia d. Construyamos las gráficas de la figura 18-5 en la cual el eje X es una recta perpendicular al cátodo, y el potencial en cualquier punto a lo largo de la recta se ha representado en ordenadas. El cátodo se encuentra al potencial de tierra.

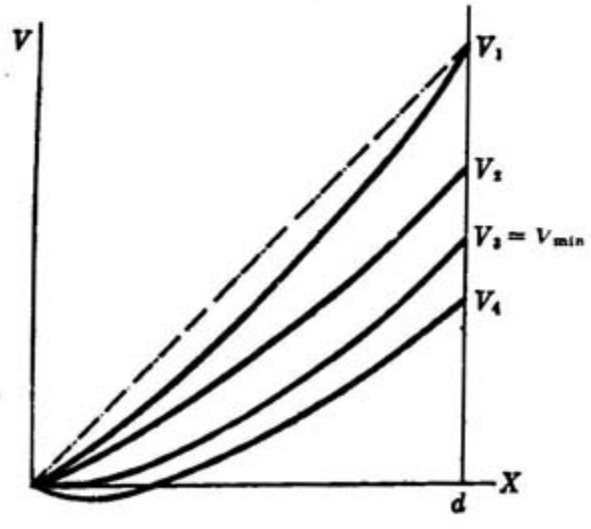


FIG. 18-5.—Distribución del potencial en el espacio cátodo-ánodo de un diodo, para distintos valores del potencial de placa.

Coloquemos primero la placa a un potencial positivo V_1 y supongamos que el cátodo

no es calentado y no hay carga espacial. Tenemos entonces en esencia un condensador plano en el vacío, y el potencial aumenta linealmente desde cero a V_1 como se indica por la línea de trazos. Calentemos ahora el cátodo de modo que sean emitidos electrones, pero supongamos que el potencial de placa V_1 es más que suficiente para producir la corriente de saturación. Puesto que la carga espacial es negativa, disminuirá el potencial en los puntos del espacio comprendido entre el cátodo y el ánodo en la forma indicada por la línea llena, desde el origen hasta V_1. Si se disminuye ahora sucesivamente el potencial de placa hasta V_2 y V_3, la distribución de potenciales varía en la forma que se indica. Para el potencial V_3, la curva tiene una tangente horizontal en el origen. Si el potencial se reduce hasta V_4, la curva desciende por debajo del eje X.

Se recordará que el campo eléctrico es igual al gradiente del potencial cambiado de signo,

$$E = -\frac{dV}{dx} \qquad [18\text{-}2]$$

El examen de las curvas de la figura 18-5 hace evidente que mientras el potencial de placa sea igual o superior a V_3 el campo eléctrico está dirigido de la placa al cátodo en todos los puntos. Por consiguiente, un electrón está sometido a una fuerza aceleradora dirigida en todos los puntos hacia el ánodo, y todo electrón emitido desde el cátodo alcanza el ánodo. Esto constituye simplemente otra forma de enunciar que si el potencial de placa es igual o superior a V_3 se obtiene la corriente de saturación. Pero si el potencial es menor que V_3 la curva que representa a V en función de x parte del origen con una pendiente negativa, y en lugar de un campo acelerador hay en la superficie del cátodo un campo decelerador. En consecuencia, los electrones más lentos retroceden por la acción de este campo y no pueden alcanzar la placa, con lo cual la corriente de placa comienza a disminuir cuando el potencial cae por debajo de V_3. El valor de V_3 es, por consiguiente, el mínimo voltaje de placa necesario para producir la corriente de saturación, y está caracterizado por el hecho de que para este voltaje particular, que designaremos por $V_{\text{mín}}$, tanto V como dV/dx son nulos en el origen.

Cuando el potencial de placa tiene este valor particular $V_{\text{mín}}$, representemos por V el potencial a cualquier distancia x del cátodo, y sea v la velocidad de un electrón a esta distancia. Supondremos, para simplificar, que todos los electrones abandonan el cátodo sin velocidad inicial. (Puede verse un estudio más completo en J. D. Ryder: *Electrónica*, Aguilar, Madrid, 1957.) Entonces si e es la carga del electrón,

$$Ve = \tfrac{1}{2}mv^2, \qquad [18\text{-}3]$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,Ve}{m}} \qquad [18\text{-}4]$$

Sea n el número de electrones por unidad de volumen en la carga espacial, a una distancia cualquiera x del cátodo. La densidad de corriente J_s (que es igual, naturalmente, en todos los planos perpendiculares al eje X e igual, en las condiciones supuestas, a la densidad de la corriente de saturación dada por la Ec. [18-1]) es, en virtud de la Ec. [4-4],

$$J_s = nev. \qquad [18\text{-}5]$$

El producto ne es la carga por unidad de volumen, o sea, la densidad de carga ρ. La ecuación anterior puede, por tanto, escribirse:

$$J_s = \rho v. \qquad [18\text{-}6]$$

Combinando esta ecuación con la [18-4] se obtiene:

$$\rho = J_s \sqrt{\frac{m}{2\,Ve}} \qquad [18\text{-}7]$$

Si esta expresión de la densidad de carga se lleva ahora a la ecuación de Poisson (Ec. [3-35]),

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho, \qquad [18\text{-}8]$$

resulta:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,J_s \sqrt{\frac{m}{2Ve}} \qquad [18\text{-}9]$$

Para resolver esta ecuación diferencial multipliquemos primero ambos miembros por $2dV/dx$:

$$2\,\frac{dV}{dx}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = \frac{2}{\varepsilon_0}\,J_3 \sqrt{\frac{m}{2Ve}}\,\frac{dV}{dx} \qquad [18\text{-}10]$$

Pero

$$2\,\frac{dV}{dx}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2$$

Por consiguiente, la Ec. [18-10] se convierte en

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{2}{\varepsilon_0}\,J_s \sqrt{\frac{m}{2Ve}}\,\frac{dV}{dx}, \qquad [18\text{-}11]$$

o sea, después de multiplicar por dx,

$$d\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{2}{\varepsilon_0}\,J_s \sqrt{\frac{m}{2e}}\,V^{-1/2}\,dV. \qquad [18\text{-}12]$$

La integración de esta ecuación da:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{4}{\varepsilon_0}\,J_s \sqrt{\frac{m}{2e}}\,V^{1/2} + C. \qquad [18\text{-}13]$$

Para determinar la constante de integración C utilicemos el hecho de que $dV/dx = 0$ cuando $V = 0$, es decir, en el cátodo. Por consiguiente, también es $C = 0$.

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros de la Ec. [18-13] resulta:

$$V^{-1/4}\,dV = \sqrt{\frac{4}{\varepsilon_0}\,J_s}\sqrt{\frac{m}{2e}}\,dx, \qquad [18\text{-}14]$$

que integrada se convierte en

$$\frac{4}{3}\,V^{3/4} = \sqrt{\frac{4}{\varepsilon_0}\,J_s}\sqrt{\frac{m}{2e}}\,x + C, \qquad [18\text{-}15]$$

y como $V = 0$ para $x = 0$, esta constante de integración es también nula.

Cuando $x = d$, $V = V_{\text{mín}}$, de modo que, finalmente,

$$V_{\text{mín}}^{3/4} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{\varepsilon_0}\,J_s}\sqrt{\frac{m}{2e}}\,d. \qquad [18\text{-}16]$$

Ésta es una forma de la expresión buscada para el potencial mínimo necesario para obtener la corriente de saturación. Es más frecuente despejar de ella el valor de la densidad de la corriente de saturación J_s:

$$J_s = \frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\frac{V_{\text{mín}}^{3/2}}{d^2}, \qquad [18\text{-}17]$$

que es la forma usual de la ecuación de Langmuir-Child.

La abscisa Oa de la figura 18-4(a) representa el potencial negativo de placa (respecto al cátodo) para el cual se anula la corriente de placa. Si el potencial de placa se hace todavía más negativo, la corriente de placa sigue siendo nula. Todos los electrones emitidos por el cátodo retroceden a causa del campo decelerador existente entre el cátodo y la placa, y no hay manantial de electrones para que circulen en sentido opuesto porque la placa no se calienta. El diodo constituye así un conductor de un solo sentido y se comporta como una válvula de contención en una tubería, permitiendo que la carga circule en cierto sentido, pero no en el contrario. Puede utilizarse, por consiguiente, para *rectificar* una corriente alterna. Es decir, si se aplica un voltaje alterno entre el cátodo y la placa, como indica la figura 18-6, el diodo conducirá solamente du-

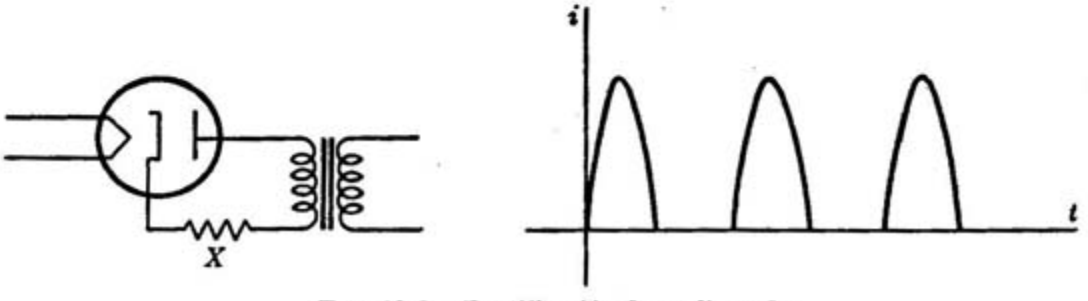


FIG. 18-6.—Rectificación de media onda.

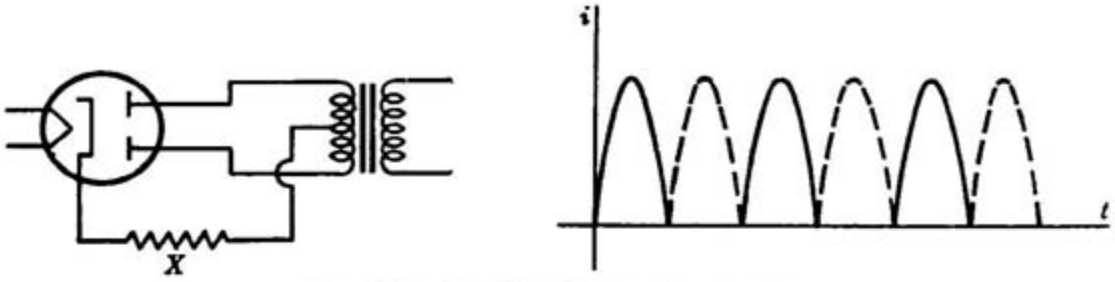


FIG. 18-7.—Rectificación de onda completa.

rante el medio período para el cual la placa es positiva. Se obtiene así en el circuito cátodo-placa (p. ej., en el punto X) una corriente con *media onda rectificada.*

El circuito de la figura 18-7 utiliza un diodo con dos placas (equivalente a dos diodos) y se obtiene en X una corriente con la *onda completa rectificada.*

18-3. Tubos de vacío de varios electrodos.—Lee de Forest descubrió en 1907, que intercalando un tercer electrodo, llamado rejilla, entre el cátodo y la placa de un tubo termoiónico, el potencial de este electrodo ejerce mucho más control sobre la corriente de placa que el ejercido por el propio potencial de ésta. La rejilla es ordinariamente una malla abierta o una hélice de hilo fino que permite a la mayor parte de los electrones pasar a través de sus aberturas. Puesto que pequeñas variaciones del potencial de rejilla producen variaciones relativamente grandes en la corriente de placa, el tubo de tres electrodos puede utilizarse como *amplificador.*

Después que Forest introdujo la rejilla, se encontró que disponiendo un cuarto electrodo en la región correspondiente a la carga espacial el tubo termoiónico adquiere propiedades todavía más interesantes. Actualmente son de uso frecuente tubos de hasta ocho electrodos.

Consideraremos brevemente algunas de las propiedades de un tubo de tres electrodos o triodo. Los tubos comerciales funcionan invariablemente a potenciales muy inferiores a los que serían necesarios para obtener la corriente de saturación. Las corrientes de los distintos electrodos no pueden representarse por una sola ecuación y se expresan mejor mediante gráficas. En particular, la corriente en un electrodo es rara vez función lineal del potencial de dicho electrodo. El tubo de vacío no obedece, por consiguiente, a la ley de Ohm y es un elemento de circuito *no lineal.*

La corriente de placa i_b, en un triodo, depende a la vez del potencial de placa e_b y del potencial control de rejilla e_c, medidos ambos respecto al cátodo. En la figura 18-8, la intensidad de la corriente de placa se representa en ordenadas y el potencial de placa en abscisas. Las curvas dan la intensidad de la corriente de placa en función del voltaje de ésta, cuando el voltaje control de rejilla se mantiene constante en los valores representados; p. ej., cuando el voltaje de rejilla es -30 V y el voltaje de placa 250 V, la intensidad de la corriente de placa es 150 mA.

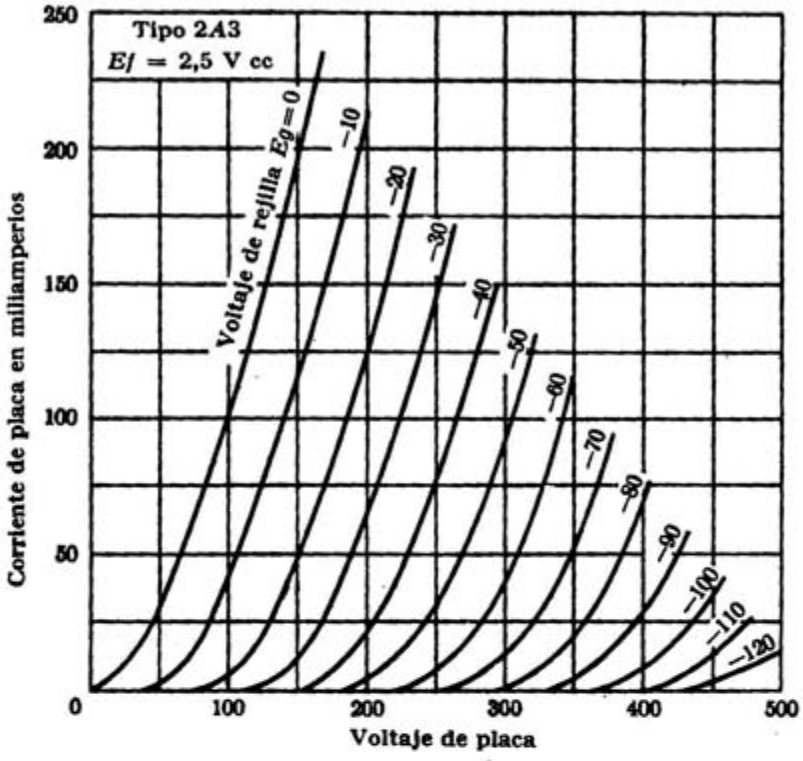


FIG. 18-8.—Características de placa típicas de un triodo 2A3.

Las relaciones mutuas entre los distintos potenciales de electrodo y las corrientes se expresan comúnmente en función de los *factores del tubo*. El más utilizado de éstos es el *factor de amplificación* μ, la *transconductancia* g_m, y la *conductancia de placa* g_p (o su inversa, la *resistencia de placa* r_p). La unidad de conductancia (inversa de la resistencia) es un *miliohmio* recíproco *(mho)*. El *microohmio* recíproco resulta con frecuencia una unidad más adecuada.

Se define el factor de amplificación μ como la razón, cambiada de signo, de la variación del voltaje de placa a la variación del voltaje de rejilla cuando se mantiene constante la corriente de placa, y mide la eficiencia del voltaje control de rejilla, respecto a la del voltaje de placa, sobre la corriente de ésta. En rigor, las variaciones deberían ser infinitesimales, pero se pueden sustituir por incrementos pequeños, pero finitos, y escribir para el factor de amplificación

$$\mu = -\frac{\Delta e_b}{\Delta e_c} \; (i_b = \text{constante}). \qquad [18\text{-}18]$$

Se define la conductancia de placa g_p como la razón de una pequeña variación en la corriente de placa a una pequeña variación en el voltaje de placa, para un potencial de rejilla constante. Dado que la resistencia de placa, r_p, es la inversa de la conductancia de placa,

$$r_p = \frac{1}{g_p} = \frac{\Delta e_b}{\Delta i_b} \; (e_c = \text{constante}). \qquad [18\text{-}19]$$

Se define la transconductancia g_m como la razón de una pequeña variación de la corriente de placa a una pequeña variación del potencial de rejilla, si el potencial de placa es constante:

$$g_m = \frac{\Delta i_b}{\Delta e_c} \; (e_b = \text{constante}). \qquad [18\text{-}20]$$

18-4. Oscilógrafo de rayos catódicos.—Uno de los progresos electrónicos recientes más útiles, es el oscilógrafo de rayos catódicos, cuyos rasgos característicos están representados en la figura 18-9. El tubo pro-

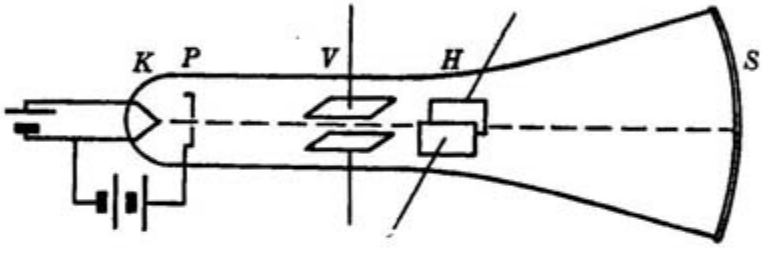


FIG. 18-9.—Esquema simplificado de un tubo de rayos catódicos.

piamente dicho es de vidrio y se ha hecho en él un vacío elevado. Los electrones (rayos catódicos) son emitidos por un filamento calentado K y acelerados hacia un ánodo P, mantenido a un potencial que varía entre varios cientos y varios miles de voltios por encima del potencial del filamento. La mayor parte de los electrones chocan con el ánodo, pero un estrecho haz pasa a través de un pequeño orificio practicado en el ánodo y continúa hasta la pantalla S recubierta en su superficie interna con una sustancia que emite luz visible (fluorescente) cuando se bombardea con electrones.

El chorro de electrones puede ser desviado en dirección vertical u horizontal por un campo eléctrico establecido entre los pares de láminas desviadoras H y V. (En algunos tubos la desviación es producida por campos magnéticos creados por bobinas colocadas fuera del tubo.) La inercia extremadamente pequeña de los electrones permite a la corriente de éstos seguir, prácticamente sin ningún retardo, las variaciones de los campos eléctrico o magnético que la desvían.

Una rejilla (no representada), situada entre el cátodo y el ánodo, regula la corriente de electrones, y, por consiguiente, la intensidad de la señal luminosa sobre la pantalla. Cuando el tubo se utiliza en televisión como receptor, la señal luminosa es obligada a barrer rápidamente la superficie de la pantalla, mientras su intensidad es regulada por la rejilla según las variaciones de brillo de los puntos del objeto televisado.

La persistencia de las imágenes en la retina (y una pequeña persistencia de la pantalla fluorescente) produce la ilusión de una imagen.

18-5. Efecto fotoeléctrico.—En la emisión termoiónica de electrones por los metales, la energía necesaria para que un electrón escape de la superficie metálica, es proporcionada por la energía de agitación térmica. Los electrones pueden también adquirir energía suficiente para escapar de un metal, aun a temperaturas bajas, si se ilumina el metal con luz de longitud de onda suficientemente pequeña. Este fenómeno se denomina *efecto fotoeléctrico* y fué descubierto, por vez primera, por Heinrich Hertz, en 1887, quien observó que una chispa saltaba más fácilmente entre dos esferas cuando sus superficies eran iluminadas por la luz de otra chispa. Hallwachs investigó el efecto más detenidamente, un año más tarde, y por ello es conocido a veces con su nombre.

Un tipo moderno de célula fotoeléctrica está representado esquemáticamente en la figura 18-10. El haz luminoso, indicado por las flechas, incide sobre una superficie S fotosensible. Los electrones emitidos por la superficie son recogidos por el colector C, mantenido normalmente a un potencial positivo respecto al emisor. Emisor y colector están encerrados en un recipiente en el cual se ha hecho el vacío. La corriente fotoeléctrica puede leerse sobre el galvanómetro G.

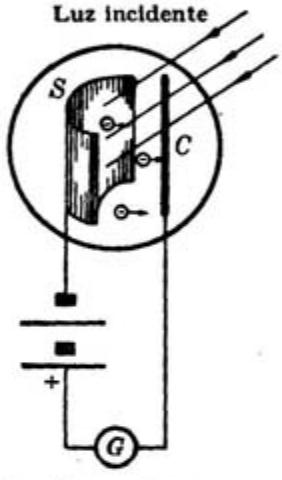


FIG. 18-10.—Diagrama esquemático del circuito fotoeléctrico.

Se encuentra que, utilizando como emisor un material dado, la longitud de onda de la luz ha de ser inferior a un valor crítico, diferente para las distintas superficies, para que pueda ser emitido algún fotoelectrón. Esta longitud de onda crítica, o la frecuencia correspondiente, se denomina *frecuencia umbral* de dicha superficie.

La frecuencia umbral para la mayor parte de los metales corresponde al ultravioleta (longitud de onda crítica de 200 a 300 $\times$ 10^{-7} cm); pero para los óxidos de potasio y cesio se encuentra en el espectro visible (400 a 700 $\times$ 10^{-7} cm).

Igual que en el caso de la emisión termoiónica, los fotoelectrones forman una nube de carga espacial alrededor del emisor S. Que algunos electrones son emitidos con una velocidad inicial, se demuestra por el hecho de que aun sin ninguna fem en el circuito exterior unos pocos electrones atraviesan la nube de la carga espacial y alcanzan el colector, originando una pequeña corriente en el circuito exterior. La velocidad de los electrones más rápidos puede deducirse midiendo el voltaje inverso (potencial negativo del colector) que se requiere para anular la corriente.

Una característica notable de la emisión fotoeléctrica es la relación entre el número y la velocidad máxima de los electrones que escapan de la superficie por una parte, y la intensidad y longitud de onda de la luz

incidente por otra. Resulta bastante sorprendente que la velocidad máxima de emisión sea *independiente de la intensidad* de la luz, y sólo dependa de su longitud de onda. Es cierto que la intensidad de la corriente fotoeléctrica crece al aumentar la intensidad de la luz incidente, pero solamente a causa de que son emitidos más electrones. Con luz de una longitud de onda determinada, por débil que ésta sea, la velocidad máxima de los fotoelectrones que parten de una superficie dada es la misma; siempre, naturalmente, que la frecuencia esté por encima de la frecuencia umbral.

La explicación del efecto fotoeléctrico fué dada por Einstein en 1902, aunque su teoría era tan radical que no fué aceptada generalmente hasta 1906, en que fué confirmada por experimentos realizados por Millikan. Generalizando una proposición hecha dos años antes por Planck, Einstein postuló que un haz de luz se componía de pequeños paquetes de energía, denominados actualmente *cuantos de luz* o *fotones*. La energía W de un fotón es proporcional a su frecuencia f,

$$W = hf,$$

siendo h una constante universal llamada constante de Planck, cuyo valor es $6{,}63 \times 10^{-27}$ erg-seg. Cuando un fotón choca con un electrón en la superficie o en un punto interior infinitamente próximo a la superficie de un metal, puede transmitir su energía al electrón. Esta transmisión es un proceso de *todo o nada*, adquiriendo el electrón toda la energía del fotón, o ninguna en absoluto; el fotón simplemente desaparece. La energía adquirida por el electrón puede permitirle escapar de la superficie del metal, si está moviéndose en la dirección apropiada.

Al abandonar la superficie del metal, el electrón pierde energía en la cantidad Φ (trabajo de extracción de la superficie). Algunos electrones pierden aún más energía si parten de un punto situado a alguna distancia de la superficie del metal, pero la energía máxima con que un electrón puede emerger es la energía adquirida de un fotón menos el trabajo de extracción. Por consiguiente, la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados por la luz de frecuencia f es:

$$\tfrac{1}{2}mv_{máx}^2 = hf - \Phi. \qquad [18\text{-}2]$$

Ésta es la ecuación fotoeléctrica de Einstein, y coincide exactamente con los resultados experimentales de Millikan.

Las intensidades de las corrientes que pueden obtenerse con una célula fotoeléctrica son extraordinariamente pequeñas, del orden de algunos microamperios por lumen de flujo luminoso. Estas pequeñas intensidades resultan multiplicadas por un factor que varía desde 5 hasta 10, si se deja en el tubo una pequeña cantidad de gas. Los electrones ionizan el gas y pueden obtenerse más portadores de corriente.

Se construye otro tipo distinto de célula fotoeléctrica, llamada célula *fotovoltaica*, que se utiliza corrientemente en los fotómetros empleados para determinar el tiempo de exposición en las máquinas fotográficas.

A diferencia de la verdadera célula fotoeléctrica, que requiere una fem exterior, la célula fotovoltáica produce su propia fem. En uno de los modelos se deposita una capa de óxido cuproso sobre un disco de cobre, con una capa extraordinariamente delgada de metal sobre la superficie superior del óxido. La luz que pasa a través de la delgada capa metálica arranca electrones del óxido hacia esta capa, produciendo entre el disco de cobre y la placa metálica una diferencia de potencial que depende de la cantidad de luz incidente sobre la célula.

La *célula fotoeléctrica multiplicadora de electrones* utiliza el fenómeno de la *emisión secundaria* para multiplicar por un factor de varios cientos de miles el valor de la corriente electrónica que parte de una superficie fotoeléctrica. La estructura de una de estas células está representada esquemáticamente en la figura 18-11. La luz que incide sobre la superficie 0 expulsa electrones que son acelerados hacia el electrodo 1, ya que éste se encuentra a un potencial superior. El bombardeo de la superficie 1 por estos electrones produce la expulsión de electrones *secundarios* cuyo número puede ser tres o cuatro veces mayor que el número de los incidentes. Estos electrones son acelerados a su vez hacia el electrodo 2, donde la corriente se multiplica por otro factor 3 ó 4, y así sucesivamente. En el tubo representado en la figura 18-11 la razón de la corriente electrónica secundaria a la primaria es de 3,9 y puesto que el tubo contiene nueve electrodos, la corriente fotoeléctrica inicial queda multiplicada por el factor $(3{,}9)^9$, o sea 210000 veces, aproximadamente. Así una corriente fotoeléctrica de 10 microamperios por lumen en la primera superficie aumenta hasta 2100000 microamperios por lumen, o sea 2,1 *amperios* por lumen, en el ánodo.

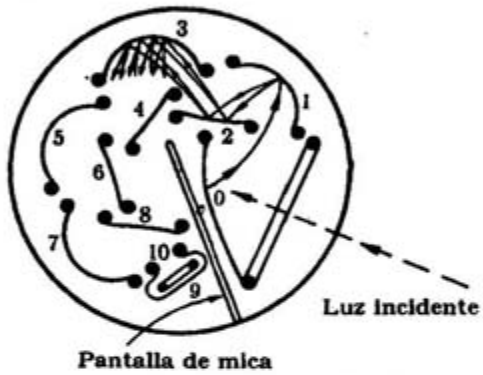


FIG. 18-11.—Tubo multiplicador de electrones.

18-6. Tubos de rayos X.—Los rayos X son producidos cuando electrones de gran velocidad, que han sido acelerados mediante diferencias de potencial de algunas decenas o centenas de miles de voltios, golpean sobre una superficie metálica. Fueron observados por vez primera por Wilhelm K. Roentgen (1845-1923), en 1895, y se denominan también *rayos Roentgen*.

Los rayos X son de la misma naturaleza que la luz o cualquier otra onda electromagnética y, como las ondas luminosas, están regidos por relaciones cuánticas en su acción sobre la materia. Se puede hablar, por consiguiente, de fotones o cuantos de rayos X, estando dada la energía de tales fotones por la conocida relación,

$$W = hf.$$

Las longitudes de onda de los rayos X están comprendidas entre 10^{-10} y 10^{-6} cm.

En la actualidad, prácticamente todos los tubos de rayos X son del tipo Coolidge, inventado por W. D. Coolidge, de los laboratorios de la General Electric, en 1913. La figura 18-12 representa un esquema de un tubo Coolidge. Un cátodo termoiónico y un ánodo están encerrados en un tubo de vidrio en el que se ha hecho el vacío hasta una presión extraordinariamente baja, de modo que los electrones emitidos por el cátodo pueden llegar directamente hasta el ánodo con una pequeña probabilidad de choque en el camino, alcanzando el ánodo con una velocidad correspondiente a la diferencia de potencial total a través del tubo. Como consecuencia del bombardeo de la superficie del ánodo por el chorro de electrones, dicha superficie emite radiación X.

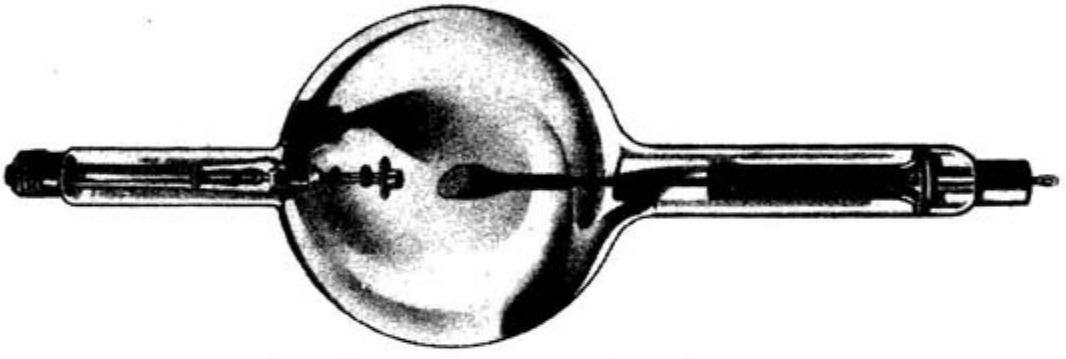


FIG. 18-12.—Tubo de rayos X tipo Coolidge.

Se verá que la producción de rayos X es el fenómeno inverso de la emisión fotoeléctrica. En esta última, los electrones adquieren energía cinética de las ondas luminosas o fotones. En la primera, se producen rayos X o fotones a expensas de la energía cinética de los electrones.

Parece ser que existen dos procesos distintos en la emisión de rayos X. Algunos de los electrones son detenidos por el anticátodo y su energía cinética se convierte directamente en radiación X. Otros transfieren su energía en todo o en parte a los átomos del anticátodo, que la retienen temporalmente en forma de *energía de excitación*, pero muy poco después la emiten como radiación X. Esta última es característica de la sustancia que constituye el anticátodo, mientras que la primera no lo es.

18-7. Conducción en los gases.—A diferencia de un metal o un electrólito, un gas, libre de influencias exteriores, no contiene cargas libres que sirvan como portadoras en un campo eléctrico. Sin embargo, los gases pueden hacerse conductores por diversos medios, en todos los cuales algunas de las moléculas se ionizan por desprendimiento de uno o más de sus electrones exteriores. Algunos de estos electrones pueden después unirse a moléculas neutras formando iones negativos, de modo que en un gas ionizado hay presentes ordinariamente iones positivos y negativos y electrones libres.

Para ionizar una molécula, es necesario suministrarle energía de algún modo. Esto puede suceder como resultado de una colisión con una molécula, ion o electrón que se mueva rápidamente, o por la acción de un cuanto de radiación (un fotón). La expresión *agente ionizante* se aplica a los medios que producen la ionización. A continuación se indican los agentes ionizantes más corrientes.

Rayos cósmicos.—En la superficie terrestre los rayos cósmicos son una mezcla de rápidos electrones positivos y negativos, mesotrones, protones y fotones de elevada energía. Al nivel del mar los rayos cósmicos producen de 1 a 2 iones por cm^3 de aire y por segundo. Como los rayos cósmicos penetran muchos metros a través de la materia, es imposible proteger un gas de ellos. Hay, por consiguiente, presentes en cualquier muestra de gas algunos iones y, por ello, el gas es siempre ligeramente conductor. Precisamente la investigación de la causa de esta pequeña conductividad residual fué lo que condujo al descubrimiento de la radiación cósmica.

Radiactividad.—Las sustancias radiactivas se encuentran presentes en cantidades mínimas en todos los componentes de la corteza terrestre. Los rayos α, β y γ emitidos por ellas ocasionan una pequeña ionización de la atmósfera terrestre.

Emisión fotoeléctrica.—La luz puede liberar electrones de los átomos de un gas, exactamente igual que se liberan de las superficies metálicas en el efecto fotoeléctrico.

Rayos X.—Los rayos X, como la luz, son fotones y ionizan un gas cuando pasan a través de él.

Ionización por choque.—La ionización por choque es el medio principal de producir iones en la mayor parte de los casos de conducción gaseosa. Iones positivos, negativos y electrones son acelerados por el campo eléctrico existente en el gas y pueden adquirir energía suficiente para ionizar una molécula neutra cuando tiene lugar un choque.

Todos los procesos anteriores se traducen en la *producción* de iones o electrones. Sin embargo, el número de iones en un gas conductor no aumenta indefinidamente, porque desaparecen iones por recombinación, por difusión a través de las paredes, o bien son atraídos hacia los electrodos por el campo eléctrico. Al fin se alcanza un estado estacionario cuando la cantidad de iones formados por unidad de tiempo es igual a la de los que desaparecen en el mismo intervalo.

Una corriente en un gas se denomina *descarga.* Estas descargas pueden clasificarse en autoentretenidas y no autoentretenidas. En el primer tipo la propia descarga proporciona un suministro continuo de iones; en el último el suministro depende de algún manantial exterior.

Un ejemplo corriente de descarga no autoentretenida lo proporciona la *célula fotoeléctrica llena de gas,* que sólo se diferencia de la célula fotoeléctrica vacía en que contiene un gas (ordinariamente argón o neón) a baja presión. Mediante la luz incidente se liberan electrones del cátodo que son acelerados hacia el ánodo y, si el campo acelerador es suficiente,

adquirirán en un corto recorrido la energía cinética necesaria para ionizar la molécula de gas con la cual choquen.

Los iones positivos así formados se mueven hacia el cátodo, mientras ambos electrones son acelerados hacia el ánodo y, después de haber ganado energía procedente del campo, cada uno de ellos produce otro par de electrones. El número de cargas libres por unidad de volumen aumenta así exponencialmente con la distancia contada a partir del cátodo y es mucho mayor de lo que sería si los fotoelectrones fueran el único suministro. Para una iluminación dada, la corriente queda multiplicada por un factor que varía entre 5 y 10.

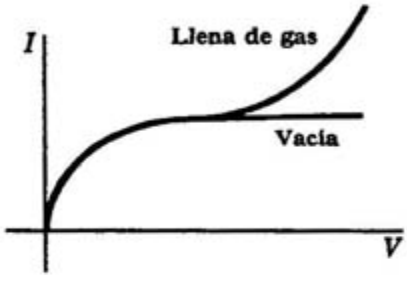


FIG. 18-13.—Curvas características de una célula fotoeléctrica vacía y llena de gas.

Probablemente, toman parte también otros efectos, entre ellos la emisión secundaria de electrones en el cátodo causada por los iones positivos que lo bombardean.

La descarga no es autoentretenida, puesto que ha de iniciarse mediante fotoelectrones liberados en el cátodo. Cuando se suprime la luz, el tubo cesa de conducir.

Una característica inesperada de tal descarga es que la corriente crece si se aumenta la distancia entre los electrodos, siempre que se mantengan constantes la intensidad luminosa y el gradiente de potencial. Esto procede del hecho de que cuando la distancia recorrida entre los electrodos aumenta, el número de choques efectuados por un electrón, entre cátodo y ánodo, aumenta también.

La figura 18-13 es una gráfica voltaje-corriente de una célula fotoeléctrica comercial llena de gas. Se ha incluído, a fines de comparación, la gráfica correspondiente a una célula vacía.

Consideremos a continuación la *descarga luminiscente*, que es el tipo de descarga de un anuncio de neón o de una lámpara fluorescente. Las descargas luminiscentes tienen lugar a bajas presiones de unos pocos milímetros de mercurio.

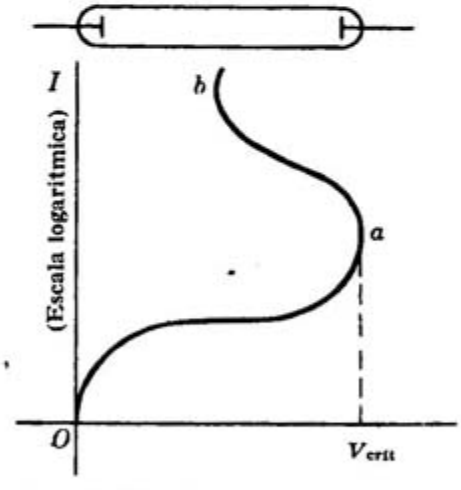


FIG. 18-14.—Característica corriente-voltaje de un tubo de descarga gaseosa.

La figura 18-14 representa un tubo con electrodos soldados en sus extremos y que contiene gas a baja presión. Supongamos que aumentamos gradualmente la diferencia de potencial entre los electrodos, partiendo de cero. A causa de algunos pocos iones formados por los rayos cósmicos o por otros medios, el gas será muy ligeramente conductor aun a potenciales bajos. La primera parte de su característica voltaje-corriente, por

debajo del *voltaje crítico*, V_{crit}, es como la de una célula fotoeléctrica llenas de gas. A lo largo de esta parte de la curva de O a a, la descarga es no autoentretenida.

Cuando se alcanza el voltaje crítico la corriente aumenta muy rápidamente hasta el punto b, mientras que al propio tiempo el voltaje entre los extremos del tubo disminuye. El gas del interior del tubo se hace luminoso, de donde deriva el término descarga luminiscente.

El hecho de que el voltaje a través del tubo aumente y después disminuya requiere una ligera explicación. Para concretar, supongamos que el tubo esté conectado en serie con una resistencia fija R, como indica la figura 18-15, siendo V_{ac} regulable a voluntad. El voltaje a través del tubo es $V_{bc} = V_{ac} - V_{ab} = V_{ac} - IR$. Cuando V_{ac} aumenta gradualmente desde cero, el voltaje crítico a través del tubo se alcanzará cuando $V_{bc} = V_{crit} = V_{ac} - IR$, siendo I la intensidad de la corriente en a, figura 18-14. Si se mantiene ahora V_{ac} en este valor, entonces cuando I aumente desde el punto a al punto b, la caída de voltaje IR aumenta y V_{bc} *disminuye*.

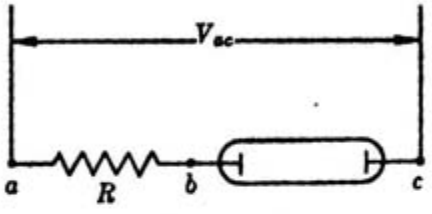


FIG. 18-15.

Se observa una notable diferencia en los aspectos del gas junto al cátodo y al ánodo, una vez que la descarga comienza. La figura 18-16 es un dibujo esquemático. La superficie del cátodo se recubre de una capa delgada de gas luminoso llamada *vaina catódica*. Inmediatamente después sigue una región relativamente no luminosa llamada *espacio oscuro de Crookes* (Sir William Crookes, uno de los primeros investigadores en esta rama). Después del espacio oscuro de Crookes hay una

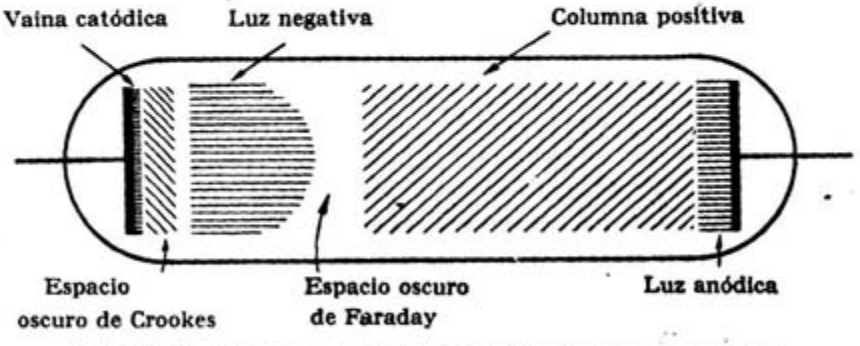


FIG. 18-16.—Diagrama esquemático de la descarga en un gas.

segunda región luminosa, azul si la descarga es en el aire, llamada *luz negativa*. Siguiendo a ésta hay otra región relativamente oscura, el *espacio oscuro de Faraday*, y después la *columna positiva* o *plasma* que ocupa el resto del tubo. La columna positiva está a veces dividida en partes alternativamente luminosas y no luminosas llamadas *estratificaciones*.

La descarga se hace autoentretenida a causa, principalmente, de los procesos que tienen lugar en el espacio oscuro de Crookes y en la superficie del cátodo. Los iones positivos formados en el espacio oscuro de

Crookes por los electrones procedentes del cátodo, son acelerados hacia el cátodo y cuando golpean su superficie pueden quedar en libertad electrones secundarios. Si cada electrón emitido produce suficientes iones positivos para liberar otro electrón secundario, se produce un estado estacionario, y la descarga es autoentretenida.

La mayor parte de la luz emitida por el gas procede de la columna positiva. La luz es emitida por una molécula de gas al volver a su estado normal después que uno de sus electrones exteriores ha sido separado o elevado a un *nivel de energía* más alto. Esta luz es característica del gas que llena el tubo, y, en general, una gran parte de ella corresponde al ultravioleta. Las lámparas fluorescentes son tubos de descarga de gases cuyas paredes interiores están recubiertas con una sustancia que absorbe la luz ultravioleta y emite luz del espectro visible. El rendimiento luminoso de estas lámparas es considerablemente superior al de las lámparas de incandescencia.

PROBLEMAS

18-1. ¿En qué razón se incrementa la densidad de la corriente de saturación de una lámpara de wolframio cuando la temperatura se eleva de 2500 a 3000° K?

18-2. ¿En qué razón se incrementaría la densidad de la corriente de saturación de un cátodo que funciona a 2500° K si el trabajo de extracción de la superficie del cátodo se redujese de 4 a 2 ev?

18-3. Los electrodos de cierto diodo son láminas paralelas de 1 cm², separadas 0,3 cm. *a*) ¿Cuál es el mínimo voltaje de placa necesario para obtener una corriente de saturación de 60 mA? *b*) ¿Qué voltaje se requeriría si se duplicase la distancia entre las láminas?

18-4. Calcúlense a partir de las características de placa del triodo 2A3, figura 18-8, el factor de amplificación, la resistencia de placa y la transconductancia, en el punto $e_b = 250$ V, $e_c = -45$ V. Compárese con los datos de los constructores: $\mu = 4{,}2$; $r_p = 800\ \Omega$; $g_m = 5250$ microohmios recíprocos.

18-5. Calcúlese la corriente de placa obtenida con el triodo 2A3 funcionando como en la figura 18-17.

18-6. La corriente de placa obtenida con el triodo funcionando como en la figura, 18-18 es 60 mA. El potencial de rejilla es −30 V respecto al del cátodo. ¿Cuál es el valor de la resistencia de polarización de rejilla, R_k? La corriente de la rejilla es despreciable.

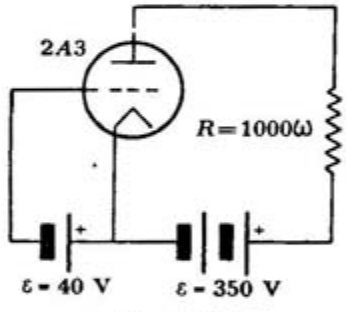


FIG. 18-17.

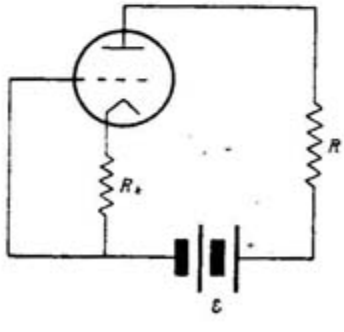


FIG. 18-18.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

TAYLOR, Lloyd: *Physics, the Pioneer Science.* Houghton Mifflin.

PAGE y ADAMS: *Principles of Electricity.* D. Van Nostrand.

FRANK, N. H.: *Introduction to Electricity and Optics.* McGraw-Hill.

HARNWELL, G. P.: *Principles of Electricity and Electromagnetism.* McGraw-Hill.

ABRAHAM-BECKER: *Theory of Electricity.* Blackie.

SMYTHE, W. R.: *Static and Dynamic Electricity.* McGraw-Hill.

STRATTON, J. A.: *Electromagnetic Theory.* McGraw-Hill.

LAWS, F. A.: *Electrical Measurements.* McGraw-Hill.

RYDER, J. D.: *Electrónica. Fundamentos y aplicaciones.* Aguilar.

M.I.T. Electrical Engineering Department: *Texts in Electrical Engineering* (3 vols.). John Wiley & Sons.

FARADAY, Michael: *Experimental Researches in Electricity and Magnetism.* E. P. Dutton.

LINDSAY y MARGENAU: *Foundations of Physics.* John Wiley & Sons.

WHITTAKER, E. T.: *History of the Theories of Aether and Electricity.* Longmans.

CONSTANTES FÍSICAS

Magnitud	Símbolo	Valor experimental más preciso	Valor aproximado para la resolución de problemas	Unidad
Carga del electrón	e	$1{,}601864 \times 10^{-19}$	$1{,}6 \times 10^{-19}$	coul
		$4{,}80223 \times 10^{-10}$	$4{,}8 \times 10^{-10}$	unidad electrostática cgs
		$1{,}601864 \times 10^{-20}$	$1{,}6 \times 10^{-20}$	unidad electromagnética cgs
Masa del electrón	m	$9{,}1066 \times 10^{-31}$	$9{,}1 \times 10^{-31}$	Kg
Razón de la carga a la masa del electrón	e/m	$1{,}7592 \times 10^{11}$	$1{,}76 \times 10^{11}$	coul/Kg
Masa del protón	M_p	$1{,}67248 \times 10^{-27}$	$1{,}67 \times 10^{-27}$	Kg
Constante de Boltzman	k	$1{,}38047 \times 10^{-23}$	$1{,}38 \times 10^{-23}$	julio/°K
Constante de Planck	h	$6{,}624 \times 10^{-34}$	$6{,}62 \times 10^{-34}$	julio-seg
Velocidad de la luz	c	$2{,}997929 \times 10^{8}$	3×10^{8}	m/seg
Número de Avogadro	A	$6{,}0228 \times 10^{26}$	6×10^{26}	$(\text{Kg-mol})^{-1}$
Electrón-voltio	ev	$1{,}601864 \times 10^{-19}$	$1{,}6 \times 10^{-19}$	julio
Capacidad específica de inducción del vacío	ε_0	$\dfrac{1}{4\pi \times 8{,}98742 \times 10^{9}}$	$\dfrac{1}{4\pi \times 9 \times 10^{9}}$	$\dfrac{\text{coul}^2}{\text{new-m}^2}$ ó f/m
Permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ (exactamente)	$12{,}6 \times 10^{-7}$	$\dfrac{\text{new-seg}^2}{\text{coul}^2}$ ó henrio/m

TABLA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Magnitud	Unidad
A, dA	área	m^2
α	ángulo	radián
α	coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura	$grado^{-1}$
B	inducción magnética o densidad de flujo	wb/m^2
B_r	remanencia o magnetismo remanente	wb/m^2
β	ángulo	radián
C	capacidad	faradio o coul/V
c	velocidad de la luz en el vacío	m/seg
χ	susceptibilidad magnética	henrio/m
D	desplazamiento	$coul/m^2$
E	intensidad del campo eléctrico	new/coul o V/m
ε, e	fuerza electromotriz	V
e	carga del electrón	coul
ε	capacidad específica de inducción	faradio/m o $coul^2/new\text{-}m^2$
ε_0	capacidad específica de inducción del vacío	faradio/m o $coul^2/new\text{-}m^2$
ε	base de los logaritmos neperianos	———
η	susceptibilidad eléctrica	$coul^2/new\text{-}m^2$
F	fuerza	new
f	frecuencia	seg^{-1}
H	excitación magnética	A/m o new/wb
H_c	fuerza coercitiva	A/m o new/wb
I, i	intensidad	A o coul/seg
I_{media}	intensidad media	A
I_e	intensidad eficaz	A
I_m	intensidad máxima	A
$\mathfrak{J}$	intensidad de imantación o momento magnético por unidad de volumen	$wb\text{-}m/m^3$ o wb/m^2
J	densidad de corriente	A/m^2
K_e	coeficiente dieléctrico	———
K_m	permeabilidad relativa	———
L	autoinducción	henrio o V/(A/seg)
L, l	longitud	m
λ	carga por unidad de longitud	coul/m
M	momento magnético	wb-m
M	inducción mutua	henrio o V/(A/seg)
m	intensidad de polo magnético	wb
fmm	fuerza magnetomotriz	A-vuelta
m	masa	Kg
μ	permeabilidad	henrio/m o wb/A-m
μ_0	permeabilidad del vacío	henrio/m o wb/A-m
N	flujo eléctrico	(sin nombre especial)
n	índice de refracción	———
p	momento eléctrico o momento dipolar	coul-m
P	polarización o momento dipolar por unidad de volumen	$coul\text{-}m/m^3$ o $coul/m^2$
P	potencia	w o julios/seg
φ	ángulo	radián
Φ	flujo magnético	wb
π	fem Peltier	V
Q, q	cantidad de electricidad o carga	coul

TABLA DE SÍMBOLOS *(Continuación)*

Símbolo	Magnitud	Unidad
r	distancia	m
$\mathcal{R}$	reluctancia	A-vuelta/m
R, r	resistencia	ohmio o V/A
ρ	densidad (de masa)	Kg/m^3
ρ	resistividad	ohmio-m
ρ	densidad de carga por unidad de volumen	$coul/m^3$
S	vector de Poynting	w/m^2
s, ds	longitud	m
σ	conductibilidad	$(ohm\text{-}m)^{-1}$
σ	densidad superficial de carga	$coul/m^2$
σ	coeficiente Thomson	V/°K
T	temperatura	°K
t	temperatura	°C
T, t	tiempo	seg
τ	momento	new-m
θ	ángulo	radián
V, v	potencial	V o julio/coul
V, v	velocidad	m/seg
$V_{ab} \equiv V_a - V_b$	diferencia de potencial	V o julio/coul
W	energía	julio o new/m
X	reactancia	ohmio
X_C	reactancia capacitiva	ohmio
X_L	reactancia inductiva	ohmio
Z	impedancia	ohmio

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS NATURALES

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente	Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
0°	0,000	1,000	0,000				
1°	0,018	1,000	0,018	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,088	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,998	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,470	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,425	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,470	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,331
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,43
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,30
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,08
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,045	28,64
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,018	57,29
45°	0,707	0,707	1,000	90°	1,000	0,000	∞

LOGARITMOS DECIMALES

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	....	0000	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LOGARITMOS DECIMALES

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8763	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

CONSTANTES
Y
FACTORES DE CONVERSIÓN

$\pi = 3{,}1416$
$\varepsilon = 2{,}7183$
$\log_e 10 = 2{,}3026$

1 unidad Angstrom = Å = 10^{-8} cm.
1 micra = 0,001 mm.
1 centímetro = 0,39370 pulgada.
1 pulgada = 2,5400 cm.
1 pie = 30,480 cm.
1 radián = 57,2958°.

1 gramo = 15,432 granos.
1 onza = 28,350 g.
1 newton = 0,224 lb = 10^5 dinas.
1 libra = 445 000 dinas.

1 atmósfera = 14,697 lb por pulg^2.
1 julio = 10^7 ergios.
1 caloría = 4,186 julios.
1 pulgada cuadrada = 6,4516 cm^2.
1 pie cuadrado = 929,03 cm^2.
1 pulgada cúbica = 16,387 cm^3.
1 litro = 1000 cm^3.
1 galón = 3,785 litros.
1 galón = 231 pulg^3.

1 libra = 453,59 g.
1 kilogramo = 2,2046 lb.
1 slug = 14,6 Kg.

1 libra-pie = 1,3549 julios.
1 B. t. u. = 252,00 cal.
1 B. t. u. = 778 lb-pie.
1 horsepower = 746 vatios.

ALFABETO GRIEGO

Α	α	Alfa.
Β	β	Beta.
Γ	γ	Gamma.
Δ	δ	Delta.
Ε	ε	Épsilon.
Ζ	ζ	Zeta.
Η	η	Eta.
Θ	θ	Theta.
Ι	ι	Iota.
Κ	κ	Kappa.
Λ	λ	Lambda.
Μ	μ	Mu.
Ν	ν	Nu.
Ξ	ξ	Ji.
Ο	ο	Ómicron.
Π	π	Pi.
Ρ	ρ	Rho.
Σ	σ	Sigma.
Τ	τ	Tau.
Υ	υ	Ypsilon.
Φ	φ	Fi.
Χ	χ	Chi.
Ψ	ψ	Psi.
Ω	ω	Omega.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES DE FINAL DE CAPÍTULO

(La primera o dos primeras cifras en negrita se refieren al capítulo)

1-1. *a*) 192 dinas;
b) 120 dinas.
1-3. 81 dinas.
1-5. *a*) 360 new;
b) $5{,}4 \times 10^{28}$ m/seg^2.

2-1. *a*) $4{,}8 \times 10^{-15}$ new;
b) $5{,}3 \times 10^{15}$ m/seg^2.
2-3. *a*) $1{,}4 \times 10^4$ new/coul;
b) 27° por encima de la horizontal.
2-5. *a*) Cero;
b) 10×10^3 new/coul, hacia la derecha;
c) 5×10^3 new/coul, 77°, primer cuadrante;
d) $6{,}3 \times 10^3$ new/coul, verticalmente hacia arriba.
2-7. *a*) $3{,}6 \times 10^6$ new/coul;
b) $6{,}3 \times 10^{17}$ m/seg^2.
2-9. *a*) $E_r = 115 \times 10^4$ new/coul, $E_\theta = 0$;
b) $E_r = 0$, $E_\theta = 58 \times 10^4$ new/coul;
c) $E_r = 100 \times 10^4$ new/coul, $E_\theta = 29 \times 10^4$ new/coul.
2-11. *a*) E (new/coul): 0; 1,3; 1,5; 1,5; 1,2; 0,7.
b) $a = \sqrt{2}\, b$.
2-15. $8{,}85 \times 10^{-13}$ coul.
2-17. $q(1 - \cos \beta)/\varepsilon_0$.
2-19. 41°.
2-21. Dos electrones.

3-1. *a*) 1 600 V;
b) 16×10^{-7} julio;
c) 16×10^{-7} julio.
3-3. Hacia puntos de potencial más elevado.
3-5. *a*) $v = \sqrt{2\, q\, V/m}$;
b) $5{,}93 \times 10^5$;
c) 2500 V;
d) 0,17 % de la velocidad de la luz.
3-7. *a*) $8{,}9 \times 10^6$ m/seg;
b) $10{,}3 \times 10^6$ m/seg.
3-9. *a*) 1800 V;
b) 1200 V;
c) 960 V;
d) 1290 V;
3-11. *a*) 9×10^{-7} julio;
b) $19{,}3 \times 10^{-7}$ julio;
c) Cero.
3-13. $E_{Oa} = 0$; $E_{Ob} = 1000$ V/m; $E_{Oc} = 2000$ V/m; $E_{Od} = 3000$ V/m; $E_{Oe} = 4000$ V/m.
3-15. $E_r = \dfrac{2a \cos \theta}{r^3} + \dfrac{b}{r^2}$;
$E_\theta = \dfrac{a \operatorname{sen} \theta}{r^3}$.
3-17. 37×10^{-6} V.
3-21. *a*) 11,5 V;
b) 100 V/m, 3,45 V.
3-23. *a*) V (unidades electrostáticas): 50, 50, 50, 33, 20, 10.
b) E (unidades electrostáticas/cm): 0, 0, 0, (exactamente dentro), 25 (exactamente fuera), 11, 4, 1.
c) 15 000 V.
3-25. *a*) $\rho = 2{,}95 \times 10^{-9}\, x^{-2/3}$.
b) 86 electrones/mm^3.
3-27. $1{,}34 \times 10^{-8}$ coul, $0{,}66 \times 10^{-8}$ coul, 6070 V.

4-1. $1{,}24 \times 10^{21}$ electrones.
4-3. $1{,}3 \times 10^5$ electrones/mm^3.
4-5. *a*) 2 mA;
b) 0,09 μA.
4-7. 0,067 V/m.
4-9. *a*) 4 A, 20 A;
b) 50 V, 0,5 V;
c) 5 Ω.
4-11. 94×10^{-8} Ω-m.
4-13. *a*) 0,32 Ω;
b) 8 V.
4-15. 0,15 Ω.
4-17. *a*) 1,1 MΩ; 0,55 MΩ.
b) 91 μA.
c) 18×10^{-6} A/m^2.
d) 91 μA.
4-19. *b*) 50,5° C.
4-21. *a*) 22 Ω.
b) 5,5 A.
c) 157 cal/seg.
d) 550 W.

4-23. *a*) 605 coul.
b) 121 A.
c) 130 A.
4-25. *a*) I_m/π.
b) $I_m/2$.

5-1. *a*) De *d* a *a*; de *a* a *d*.
b) 2 coul/seg.
c) $V_a=10$ V, $V_b=10$ V, $V_c=0$, $V_d=0$.
d) $V_{ad}=10$ V.
e) $V_{bc}=10$ V.
f) Cero.
5-3. *a*) R (Ω): ∞; 5; 2; 1; 0,5; 0,2; 0.
b) 24 A.
c) V_{ab} (V); 24; 20; 16; 12; 8; 4; 0.
d) 88 *V*, ayudando a la primera batería.
e) 40 *V*, oponiéndose a la primera batería.
f) $V_{ab}=-4$ V, $V_{ab}=28$ V.
g) Sí. No.
5-5. *a*) 3,3 A.
b) $V_a=3{,}3$ V, $V_b=-14$ V, $V_c=-7{,}3$ V, $V_d=-10$ V.
c) $V_{ab}=17{,}3$ V, $V_{dc}=-2{,}7$ V, $V_{cd}=2{,}7$ V.
5-7. *a*) 200 V.
b) Cero.
c) 1500 Ω.
d) 185 V.
5-9. $\varepsilon=1{,}52$ V, $r=0{,}1\ \Omega$.
5-11. *b*) Ambas son iguales.
5-13. $V_{ea}=-9$ V, $V_{fc}=-8{,}7$ V, $V_{gd}=6{,}7$ V.
5-17. *a*) 2,7 Ω. *b*) 1 A, 4 V.
5-19. 0,044 Ω.
5-21. 8 Ω, 72 V.
5-23. $R_1=\dfrac{n-1}{n}R_G$, $R_2=\dfrac{1}{n-1}R_G$.
$R_1=81\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$,
1 mA; 0,1 mA.
5-25. $\varepsilon_1=18$ V, $\varepsilon_2=7$ V, $V_{ab}=13$ V.
5-27. *Nota*: resistencia en la rama superior = 4 Ω.
a) 2 A, de *b* a *a*.
b) Un generador de fem dirigida de *b* a *a*. Cualquier ε y *r* tal que $\varepsilon-4r=18$ V.
5-29. *a*) $R_0=\dfrac{R(R_1+R_2)+2R_1R_2}{2R+R_1+R_2}$
b) 2,75 Ω, 3 Ω.
5-31. *a*) 0,5 A.
b) 4 A.
c) 108 V.
d) 60 w.
e) 48 w.
f) 540 w.
g) 71 %.
5-33. *a*) 11,5 Kw, 0,5 Kw, 11 Kw.
b) 11,1 Kw, 0,12 Kw.
5-35. *b*) 40 Ω, 126 Ω; 71 Ω, 310 Ω, 480 Ω, 260 Ω.
c) Positivo para el wolframio, negativo para el carbón.
d) 96 w; 40 w; 47 w.
e) 0,33 A; 38 %, 92 %; la lámpara de 40 w es más brillante.

6-1. *a*) −3,6 mV; 0; 2,6 mV; 0, −4,8 mV.
b) −5,6 mV, −2 mV, 0,6 mV, −2 mV, −6,8 mV.
6-3. 11,6 mV, 1,21 mV.

7-1. 31×10^{-12} coul²/new-m², 22×10^{-12} coul²/new-m².
7-3. *a*) $7{,}5\times10^5$ V/m, $5{,}6\times10^5$ V/m.
b) 20 μ coul/m².
c) 13,3 μ coul/m²; 15,0 μ coul/m².
7-5. 6×10^6 V/m; 35,4 μ coul/m².

8-1. 750 μf.
8-5. *a*) *q* (μ coul): 0, 400, 630, 870, 1000.
b) *i* (μA): 100, 60, 37, 14, 0.
c) 10 seg.
d) 6,9 seg.
8-7. *a*) 0,0122 seg.
b) 78 V, 136 V, 178 V.
8-9. *a*) 38×10^{-8} coul.
b) 7600 V.
c) $1{,}43\times10^{-3}$ julio.
d) $1{,}35\times10^{-3}$ julio.
8-11. *a*) 2×10^{-2} coul.
b) 800 V. *c*) 8 julios. *d*) 2 julios.
8-13. *a*) 1000 μ coul, 2000 μ coul, 1000 V.
b) 333 μ coul, 667 μ coul, 333 V.
8-15. 490 μ coul, 250 μ coul, 90 μ coul, 1 A.
8-17. *C*/2.
8-19. *a*) 14,2 μ coul/m², 8,8 μ coul/m².
b) 14,2 μ coul/m², 8,8 μ coul/m².
c) 5,4 μ coul/m².
d) 3000 V.
8-21. *a*) $Q^2/8\pi^2\varepsilon l^2r^2$.
b) $Q^2dr/4\pi\varepsilon lr$.
c) $(Q^2\ln b/a)/4\pi\varepsilon l$.
d) $2\pi\varepsilon l/(\ln b/a)$.

8-23. 286000 veces más energía de la batería.

9-1. *a*) 0.24 wb, 24 $\times$ 10^6 maxwells
b) Cero.
c) 0,24 wb.
9-3. *a*) 2,9 $\times$ 10^7 m/seg.
b) 4,3 $\times$ 10^{-8} seg.
c) 8,7 $\times$ 10^6 V.
9-5. *a*) 1,7 $\times$ 10^8 m/seg.
c) 0,48 m.
9-7. *a*) 0,16 new.
b) Cero, 0,11 new, 0,16 new, 0,08 new.
9-9. IBa.
9-11. *a*) 0,013 wb/m², hacia arriba.
b) 0,023 wb/m², hacia la izquierda.
Equilibrio indiferente.

10-1. 30^3.
10-3. 2985 Ω, 12000 Ω, 135000 Ω. 3000 Ω, 15000 Ω, 150000 Ω.
10-5. 4,97 Ω.
10-7. 4,2 $\times$ 10^5 Ω.
10-9. *a*) 200 V.
b) 6 w.
10-11. *a*) 150 Ω, 300 Ω.
b) 1,55 V, 13,2 Ω.
10-13. 5,92 V, 4,94 V, 3,94 V.
10-15. *a*) Error relativo $= \dfrac{1}{1 + \dfrac{R_V}{R}}$.
b) Error relativo $= \dfrac{R_A}{R}$.
Utilícese *a*) si R es pequeña, *b*) si R es grande.
10-17. 0,0277 Ω, 0,25 Ω, 2,5 Ω.

11-1. *a*) 20 $\times$ 10^{-6} wb/m².
b) 7,1 $\times$ 10^{-6} wb/m².
c) 20 $\times$ 10^{-6} wb/m².
d) Cero.
e) 5,4 $\times$ 10^{-6} wb/m².
11-3. 2,4 $\times$ 10^{-7} wb/m².
11-5. 72 $\times$ 10^{-5} new.
11-7. $\dfrac{\mu_0 ib}{2\pi} \ln \dfrac{a+b}{a}$.
11-9. B (mwb/m²): 2,5; 2,0; 0,89; 0,38; 0,22.
11-11. $\dfrac{\mu_0 i a^2}{2}\left(\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{(a^2+b^2)^{3/2}}{1}\right)$.
11-13. $\mu_0 Ni/4r$.
11-15. B (mw/m²): 6,2; 6,1; 5,4; 3,1; 0,92; 0,16; 0,06.
11-17. *a*) $\dfrac{6{,}4 \times 10^{-4}}{r}$ wb/m².
b) 3,25 $\times$ 10^{-6} wb.
11-19. *a*) $\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_1 v_1}{a^2}$.
b) $\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_1 v_1 q_2 v_2}{a^2}$, hacia la izquierda.
c) Cero.
d) Cero.
e) Se conservan tanto la cantidad de movimiento como el momento cinético siempre que se incluyan la cantidad de movimiento y el momento cinético del campo electromagnético.

12-1. *a*) 1 V, de B hacia A.
b) 1,25 new.
c) 5 w.
12-3. 36,8 μV, punto A.
12-5. *a*) de derecha a izquierda.
b) de derecha a izquierda.
c) de izquierda a derecha.
12-7. 0,375 V.
12-9. 2,3 $\times$ 10^{-4} coul.

13-1. *a*) 6,28 $\times$ 10^{-6} henrio.
b) 3,14 $\times$ 10^{-4} V.
c) 6,28 $\times$ 10^{-6} wb/seg.
13-3. *a*) 2,77 $\times$ 10^{-6} henrio.
b) Cero.
13-7. *a*) V_{cb}
$= \dfrac{V_{ab}}{R + R_0}\left(R + R_0 \varepsilon^{-\frac{(R+R_0)t}{L}}\right)$.
13-9. *a*) 6 w.
b) 1,5 w.
c) 4,5 w.
d) 6 julios.

14-1. *a*) 0,9999832.
b) 1,00385.
c) 0,9999957.

15-3. *a*) 9,4 $\times$ 10^{-5} wb.
b) 9,4 $\times$ 10^{-6} wb-m.
c) 7,5 $\times$ 10^{-3} new-m.
d) 1,8 % de H_c.
15-7. *a*) 0,045 A.
b) 0,012 A.

c) 0,15 *A*, 0,23 A.

15-9. $5{,}3 \times 10^{-4}$ wb.

15-11. *a*) $\mu_0 Ir/2\pi R^2$.
b) $\mu_0 I^2 r^2/8\pi^2 R^4$.
c) $\mu_0 I^2 l/16\pi$.
d) 5×10^{-8} henrio/m.

16-1. *a*) 377 Ω.
b) 2,65 milihenrios.
c) 2650 Ω.
d) 2650 μf.

16-3. *a*) 56 V, 139 V, 56 V.
b) $v = 141 \text{ sen } 377t$,
$i = 7{,}84 \text{ sen}(377t + \text{arc tg } 1{,}5)$.

16-5. *a*) 515 Ω, $\varphi = 39°$, corriente avanzada.
b) 505 Ω, $\varphi = 38°$, corriente retardada.

16-7. $I_e = 21$ A, $L = 73$ milihenrios.

16-9. *a*) 10 A.
b) 100 V.
c) 42 V.

16-11. 84 ciclos/seg.

16-13. *a*) *I* (A): 0; 0,048; 0,22; 1,0; 0,26; 0,10.
b) 0,047; 0,15; 0,20; 0,16; 0,091.

16-15. *a*) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC}\left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{R^2C}{L}}\right)}$.

b) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC}\left(1 - \dfrac{R^2C}{L}\right)}$.

16-17. *a*) 90°.
b) 6 Ω, 8 Ω, 10 Ω, 0,6

16-19. *a*) 1000 Ω.
b) 0,1 A, 1 A, 1 A.

17-1. 107 espiras.

17-3. *a*) 0,987.
b) $6{,}9 \times 10^{-4}$ julio.
c) 8×10^{-4} julio.
d) 5320 Ω.

17-5. $2{,}7 \times 10^{-7}$ A/m.

17-7. *a*) $2{,}7 \times 10^{-2}$ A/m.
b) 2,7 Kw.

18-1. 52 veces.

18-3. *a*) 176 V.
b) 444 V.

18-5. 90 mA.

ÍNDICE ALFABÉTICO

ÍNDICE ALFABÉTICO DE AUTORES Y MATERIAS

Acumulador, 151.
de plomo, 151.
Agente ionizante, 417.
Aislador, 8.
Alternador, 284.
Amortiguamiento:
crítico, 288, 383.
resistencia externa de, 288.
de un circuito, 383.
de un galvanómetro, 287.
AMPÈRE, André Marie, 86.
Ampère, ley de, 252.
Amperímetro, 97, 243.
Amperio, 86, 97, 243, 259.
absoluto, 86, 259.
internacional, 102, 260.
-hora, 101.
Amplificación, factor de, 411.
Amplificador, 410.
ANDERSON, Carl D., 401.
Ángulo:
de fase, 356.
de inclinación, 333, 334.
Anillo de Rowland, 308.
Anillos rozantes, 283.
Autoinducción, 295, 296, 317.
constante de tiempo de una, 299.
variable, 302.

Barkhausen, efecto de, 330.
Barra imantada, par sobre una, 337.
BECKER, H., 402.
Betatrón, 279, 280.
Biot, ley de, 252.
Bobina exploradora, 285.
Bohr, modelo atómico de, 3.
BOHR, Niels, 3.
Bornes, voltaje en los, 117.
BOTHE, W., 402.

Calomelanos, electrodo normal de, 146.
Campo:
desmagnetizante, 337.
eléctrico, 18.
intensidad del, 19, 62.
magnético, 218.
terrestre, 332.
Capacidad, 189.
equivalente, 201.
específica de inducción, 172, 192.
relativa, 315.
tabla, 173.

Carga, 5.
densidad superficial de, 39.
distribución de, 75.
eléctrica, 5.
espacial, 69, 404.
inducida, 164.
libre, 170.
ligada, 170.
reparto de, 75.
unidad electrostática de, 14.
y descarga de un condensador, 198.
CAVENDISH, Sir Henry, 9.
Célula:
fotoeléctrica, 415.
llena de gas, 417.
multiplicadora de electrones, 415.
fotovoltaica, 414.
Ciclotrón, 224.
Circuito:
eléctrico, 87, 110.
ecuación del, 110.
magnético, 341, 342.
superamortiguado, 383.
Coeficiente:
dieléctrico, 172, 193.
tabla, 173.
magnético, 315.
Colector, 247, 285.
Columna positiva, 419.
Concentración de iones hidrógeno, 146.
Condensador, 189, 190.
constante de tiempo, 200.
corrientes de carga y descarga, 198.
en serie y en paralelo, 201.
energía de un, 203.
variable, 197.
Condensadores en paralelo, conexión de, 201.
Condiciones de contorno, 178.
Conductancia, 90.
de placa, 411.
Conductibilidad, 88.
eléctrica, 88.
Conductores, 8.
Conexión:
de condensadores:
en paralelo, 201.
en serie, 201.
de resistencias:
en paralelo, 120.
en serie, 120.

Constante:
de Planck, 403, 414.
de tiempo.
de un condensador, 200.
de una autoinducción, 299.
dieléctrica, 172.
Contador de vatios-hora, 135.
Contorno, condiciones de, 178.
Coolidge, tubo de rayos X, 416.
COOLIDGE, W. D., 416.
Corriente, 84.
alterna, 351.
trifásica, 372.
continua, motor de, 247.
de desplazamiento, 208, 387.
densidad de, 86.
en torbellino, 289.
inducida, 276.
media, 100.
rectificada, 409.
sentido de la, 87.
superficial, 311.
trifásica, 372.
Corrientes:
en torbellino, 289.
superficiales equivalentes, 311.
COULOMB, Charles A., 9.
Coulomb, ley de, 14.
Crookes, espacio oscuro de, 419.
Culombio, 14.
CURIE, Irene, 402.
Curie, temperatura de, 325.

CHADWICK, Sir James, 402.

Daniell, pila de, 146.
D'Arsonval, galvanómetro, 241.
DE FOREST, Lee, 410.
Declinación magnética, 334.
Densidad:
de corriente, 86.
de energía:
eléctrica, 204.
magnética, 348.
de flujo, 220.
superficial de carga, 39.
Descarga:
en un gas, 417.
luminiscente, 418.
Descomposición, tensión de, 152.
Desplazamiento, 175.
corriente de, 208, 387.
líneas de, 176.
Deuterio, 4.
Deuterón, 4.
Diamagnetismo, 310.
Dieléctrica:
constante, 172.
rigidez, 44.
Dieléctrico, 8, 164.
coeficiente, 172, 193.
tabla, 173.
Diferencia de potencial, 53, 114.
Dínamo, 284.
de disco, 281.
Diodo, 403.
Dipolo:
eléctrico, 27, 65.
inducido, 166.
magnético, 309.
oscilante, 385.
permanente, 166.
Disco, dínamo de, 281.
Dispersión, 392.
de las partículas alfa, 10.
Distribución:
de carga, 75.
de velocidades:
Fermi-Dirac, 404.
Maxwell-Boltzmann, 404.
Dominios magnéticos, 329.
Dushman, ecuación de, 406.
DUSHMAN, Saul, 406.

Ecuación:
de Dushman, 406.
de Einstein, 414.
de Langmuir-Child, 406.
de Laplace, 69.
de Poisson, 69.
Efecto:
de Barkhausen, 330.
fotoeléctrico, 413.
skin, 354.
Einstein, ecuación de, 414.
Electrodinamómetro, 246.
Electrodo:
de vidrio, 146.
normal de calomelanos, 146.
potenciales de, 142.
tabla, 145.
Electrólisis, 152.
Electromagnéticas, unidades, 219.
Electrómetro:
de cuerda, 7.
de discos, 208.
Electrón, 3, 14, 44, 227, 401.
célula fotoeléctrica multiplicadora, 415.
razón de la carga a la masa, 228.
spin del, 309.
Electroscopio, 7.
Electrostáticas, unidades, 13.
Electrostricción, 205.

Emisión:
secundaria, 228, 415.
termoiónica, 403.
Energía:
de un condensador, 203.
de una autoinducción, 300.
eléctrica, densidad de, 204.
electromagnética radiante, 384.
libre, 413.
magnética, densidad de, 348.
química, 142.
libre, 155.
radiante, 384.
Espacio oscuro:
de Crookes, 419.
de Faraday, 419.
Espectrógrafo de masas, 230.
Estator, 351.
Estratificaciones, 419.
Excitacion magnética, 311, 334.
Experimento de la gota de aceite de Millikan, 42.
Exploradora, bobina, 285.

Factor:
de amplificación, 411.
de un tubo, 411.
Faraday, 101.
espacio oscuro de, 419.
ley de, 277.
FARADAY, Michael, 32.
Faradio, 189.
Fermi-Dirac, distribución de velocidades, 404.
Ferromagnetismo, 323.
Flujo:
densidad de, 220.
disperso, 342, 370.
ligado, 293.
magnético, 219.
mutuo, 370.
Fórmulas de Fresnel, 399.
Fotón, 403.
Fotovoltaica, célula, 414.
Frecuencia umbral, 413.
Frente de onda, 385.
FRESNEL, Augustin, 399.
Fresnel, fórmulas de, 399.
Fuerza:
coercitiva, 327.
tabla, 327.
electromotriz, 108, 112, 273.
inducida, 272.
por movimiento, 272.
Peltier, 157.
producida por movimiento, 272.
Seebeck, 158.
térmica, 155.
Thomson, 156.
entre las armaduras de un condensador, 205.
entre las cargas de un dieléctrico, 182.
magnética, líneas de, 312.
magnetomotriz, 343.
sobre los polos de un imán, 338.
sobre un elemento de corriente, 232.
sobre una carga móvil, 220, 267.

Galvanómetro, 97, 240.
amortiguamiento de un, 287.
balístico, 245.
D'Arsonval, 241.
de cuadro móvil, 242.
sobreamortiguado, 288.
Gauss, 219.
teorema de, 35, 175.
GEIGER, Hans, 10.
Generador de Van de Graaff, 77.
Gradiente de potencial, 61.

HALLWACHS, 413.
Henrio, 294.
HENRY, Joseph, 217.
HERTZ, Heinrich, 413.
Hierro, tabla de las propiedades magnéticas del, 324.
Histéresis, 325.

Imán permanente, 326.
Imantación, 318, 324.
de una barra, 336.
de una esfera, 330.
Impedancia, 353.
diagrama del vector, 355.
equivalente, 363.
Inclinación magnética, 334.
Índice de refracción, 391.
Inducción:
capacidad específica de, 172.
magnética, 219.
mutua, 293.
relativa, capacidad específica de, 315.
Inducido, 283.
Intensidad:
cuadrática media, 103, 353.
del campo eléctrico, 19, 62.
eficaz, 102, 353.
media, 100.
Inversión, temperatura de, 161.
Iones hidrógeno, concentración de, 146.
Ionización por choque, 417.
Isótopos, 4, 231.

JOLIOT, F., 402.
Joule, ley de, 98.

KERST, Donald W., 279.
KIRCHHOFF, Gustav Robert, 125.
Kirchhoff, reglas de, 125.

Langmuir-Child, ecuación de, 406.
Laplace, ecuación de, 69.
LAWRENCE, Ernest O., 224.
LENZ, H. F. E., 279.
Lenz, ley de, 279.

Ley:
de Ampère, 252.
de Biot, 252.
y Savart, 255.
de Coulomb, 14.
de Faraday, 277.
de Joule, 98.
de Lenz, 279.
de Ohm, 279.
de Snell, 399.
de Wiedemann-Franz, 90.
Líneas:
de desplazamiento, 176.
de fuerza:
eléctricas, 32.
magnéticas, 312.
de inducción, 219.
LIVINGSTON, M. Stanley, 224.
Luz negativa, 419.

Magnética:
declinación, 334.
excitación, 311, 334.
Magnético:
circuito, 342.
coeficiente, 315.
Magnetismo, 217.
remanente (véase *Remanencia*).
Magnetómetro, 340.
MARSDEN, Ernest, 10.
Masas, espectrógrafo de, 230.
MAXWELL, James Clerk, 209.
Maxwell-Boltzmann, distribución de velocidades, 404.
Mesón, 403.
Mesotrón, 403.
Millikan, experimento de la gota de aceite de, 42.
MILLIKAN, Robert Andrews, 42.
Modelo atómico:
de Bohr, 3.
de Rutherford, 13.
de Thomson, 10.

Molécula:
no polar, 166.
polar, 166.
Momento:
dipolar, 28, 65.
por unidad de volumen, 181.
magnético, 262, 339.
Motor:
de corriente continua, 247.
trifásico, 374.

Neutrino, 403.
Neutrón, 4, 402.
No polar, molécula, 166.
Número atómico, 4.

OERSTED, Hans Christian, 217.
OHM, Georg Simon, 91.
Ohmio, 92.
absoluto, 92.
internacional, 92.
-metro, 93.
recíproco, 411.
Onda:
frente de, 385.
guía de la, 387.
Ondas electromagnéticas, 387.
Oscilaciones:
amortiguadas, 382.
eléctricas, 380.
entretenidas, 383.
Oscilógrafo de rayos catódicos, 228, 412.

Par:
sobre un solenoide, 337.
sobre una barra imantada, 337.
termoeléctrico, 159.
Paramagnetismo, 302.
Partículas alfa, 10.
Peltier, fuerza electromotriz, 157.
PELTIER, Jean C., 158.
Permeabilidad, 314.
del hierro, tabla, 324.
relativa, 314.
*p*H, 146.
Pila:
de Daniell, 146.
eléctrica, 143.
patrón, 152.
seca, 150.
Planck, constante de, 403, 414.
Poisson, ecuación de, 69.
Polar, molécula, 166.
Polarización, 150, 180.
Polos magnéticos, 330.
Positrón, 401.

Potencia, 98, 131.
en los circuitos de corriente alterna, 366.
factor de, 367.
termoeléctrica, 161.
Potencial, 48.
barrera de, 404, 406.
de electrodo, tabla, 145.
diferencia de, 53, 114.
gradiente de, 61.
unidad electrostática de, 53.
POYNTING, J. H., 393.
Poynting, vector de, 393.
Producción por parejas, 402.
Protón, 4, 402.
Puente de Wheatstone, 128.

Radiación, 384.
Rayos:
alfa, 10, 417.
beta, 417.
catódicos, 228.
oscilógrafo de, 228, 412.
cósmicos, 417.
gamma, 417.
Roentgen, 415.
X, 415.
tubo Coolidge de, 416.
Reactancia, 353.
Reflexión, 394.
Refracción, 394.
índice de, 391.
Regla:
de la mano:
derecha, 275.
izquierda, 220.
del tornillo, 252.
Reglas de Kirchhoff, 125.
Rejilla, 410.
Reluctancia, 343.
Remanencia, 327.
Reóstato, 92.
Resistencia, 90, 91.
de placa, 411.
eficaz, 355.
valores de la, 102, 354.
equivalente, 121.
externa de amortiguamiento crítico, 288.
interna, 110.
patrón, 92.
variable, 92.
Resistencias, conexión de:
en paralelo, 120.
en serie, 120.
Resistividad, 90.
coeficiente de variación con la temperatura, 95.
tabla, 94.
tabla, 94.
Resonancia, 363.
RICHARDSON, O. E., 406.
Rigidez dieléctrica, 44.
Roentgen, rayos, 415.
ROENTGEN, Wilhelm K., 415.
Rotor, 351.
Rowland, anillo de, 308.
ROWLAND, J. H., 308.
Rutherford, modelo atómico de, 12, 13.
RUTHERFORD, Sir Ernest, 10.

Saturación magnética, 325.
Seebeck, fuerza electromotriz, 158.
SEEBECK, Thomas J., 158.
Sistema de unidades:
electromagnético, 219, 253.
electrostático, 13.
mks, 14, 219, 252.
Skin, efecto, 354.
Snell, ley de, 399.
Sobretensión, 153.
Solenoide, par sobre un, 337.
Spin del electrón, 309.
Superconductibilidad, 93.
Superficie equipotencial, 72.
Susceptibilidad:
eléctrica, 170.
tabla, 173.
magnética, 313.
tabla, 314.

Temperatura:
coeficiente de variación de la resistividad con la, 95.
tabla, 94.
de Curie, 325.
de inversión, 161.
neutra, 161.
Tensión de descomposición, 152.
Teorema de Gauss, 35, 175.
Thomson, fuerza electromotriz, 156.
THOMSON, J. J., 228.
Thomson, modelo atómico de, 10.
THOMSON, William, 157.
Trabajo de extracción, 406.
Transconductancia, 412.
Transformador, 369.
Trifásica, corriente alterna, 372.
Tritio, 4.
Tubo:
Coolidge de rayos X, 416.
factor de un, 411.

Unidad:
electromagnética, 219.
de carga eléctrica, 219.
de intensidad de corriente, 219.
electrostática, 13.
de carga, 13.
de potencial, 53.

Vaina catódica, 419.
Van de Graaff, generador de, 77.
Vatímetro, 134.
Vatios, 99.
-hora, contador de, 135.
Vector:
de Poynting, 393.
impedancia, diagrama del, 355.
Velocidad de las ondas electromagnéticas, 387.
Vidrio, electrodo de, 146.
VOLTA, Allesandro, 53.
Voltaje, 54.
crítico, 419.
en los bornes, 117.
Voltímetro, 97, 244.
Voltio:
absoluto, 53, 260.
internacional, 260.

Weber, 219, 231.
Wheatstone, puente de, 128.
Wiedemann-Franz, ley de, 90.

X, rayos, 415.