Un **número complejo** z es un par ordenado de números reales x e y, escrito como:

$$z = (x,y)$$ (William R. Hamilton)

(Notación en componentes o coordenadas cartesianas).

x se llama la **parte real** de $\mathbf{z}$: $\mathbf{Re(z) := x}$

y se llama la **parte imaginaria** de $\mathbf{z}$: $\mathbf{Im(z) := y}$

El conjunto de números complejos, se denota por C:

$$C := \{(x, y) : x, y \in \Re\}$$

Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son iguales:

$$(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \text{ si } x_1 = x_2 \,,\; y_1 = y_2$$

(0,1) se llama la **unidad imaginaria** y se denota por:

$$\boxed{i = (0,1)}$$

Un número complejo $z = (x,y)$ se escribe comúnmente como (*notación* ***algebraica o binómica o "afijo"*** *en textos de antaño*):

$$\boxed{z = x + i\,y}$$

Si $x = 0$ ($z = i\,y$), entonces z se dice que es un **imaginario puro**. Si y = 0 ($z = x$), entonces z se comporta como un **número real**.

Complejo conjugado

El **complejo conjugado** $\bar{z}$ de un número complejo $z = x + i\,y$ se define como:

$$\boxed{\bar{z} = x - iy} \qquad \left(\textit{También se suele denotar como}: z^{*}\right)$$

Es sencillo demostrar que:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

A las que también se le conocen como **coordenadas conjugadas de *z* y $\bar{z}$**

Ejercicio

1. Identificar los lugares geométricos definidos por:

a) $|z+3i| + |z-3i| = 10$

b) $9z^2 + 9\bar{z}^2 + 82z\bar{z} = 1600$

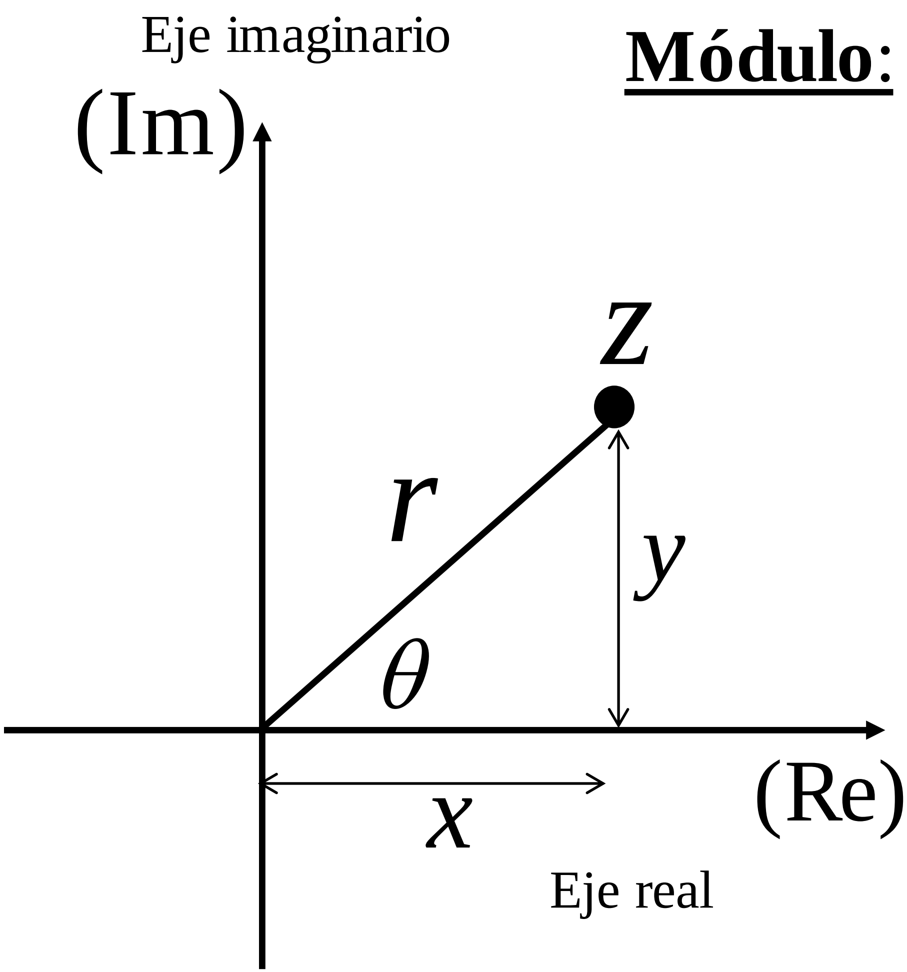
c) $\mathrm{Re}(z+i)^2 = 1$

2. Escribir las ecuaciones en términos de las coordenadas conjugadas z y $\bar{z}$:

a) $25x^2 + 16y^2 = 400$

b) $x - y = 1$

El plano complejo (Plano z, de Argand o de Gauss)



Módulo: $$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

También llamado “valor absoluto”
(el módulo de un real es su valor absoluto)

$$|z| \geq \operatorname{Re} z,\ |z| \geq \operatorname{Im} z,\ |\bar{z}| = |z|$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Argumento:

$$\theta := \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

El argumento está multivaluado.

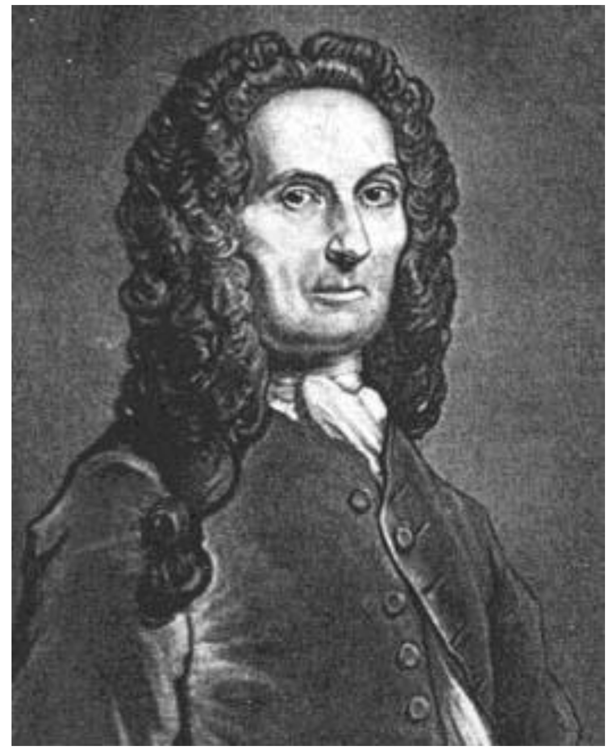
Para $z = 0$, el ángulo θ no está definido.

Ejercicio

Obtener la ecuación e identificar el lugar geométrico de los puntos z tales que el doble de su distancia al punto $z_1 = -3i$ es igual a su distancia al punto $z_2 = 3i$.

Fórmula de Moivre

$$\boxed{\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$



Abraham de Moivre (1667 - 1754)

Ejercicio

Demostrar que:

$$\cos 4\theta = 8\,\mathrm{sen}^4\theta - 8\,\mathrm{sen}^2\theta + 1$$

Recapitulando...

Sean z y w dos números complejos:

$z + w = w + z$ (conmutatividad de la suma)

$zw = wz$ (conmutatividad de la multiplicación)

$z + (w + u) = (z + w) + u$ (asociatividad de la suma)

$z(wu) = (zw)u$ (asociatividad de la multiplicación)

$z(w + u) = zw + zu$ (distributividad)

$z + 0 = 0 + z$

$z \cdot 1 = 1 \cdot z.$

Recapitulando…

Sean z y w dos números complejos:

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
3. $\overline{zw} = (\overline{z})\,(\overline{w})$.
4. $|z| = |\overline{z}|$.
5. $|zw| = |z|\,|w|$.
6. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
7. $|z| \geq 0$ y $|z| = 0$ si, y sólo si $z = 0$.
8. $z\overline{z} = |z|^2$.

Ejercicio

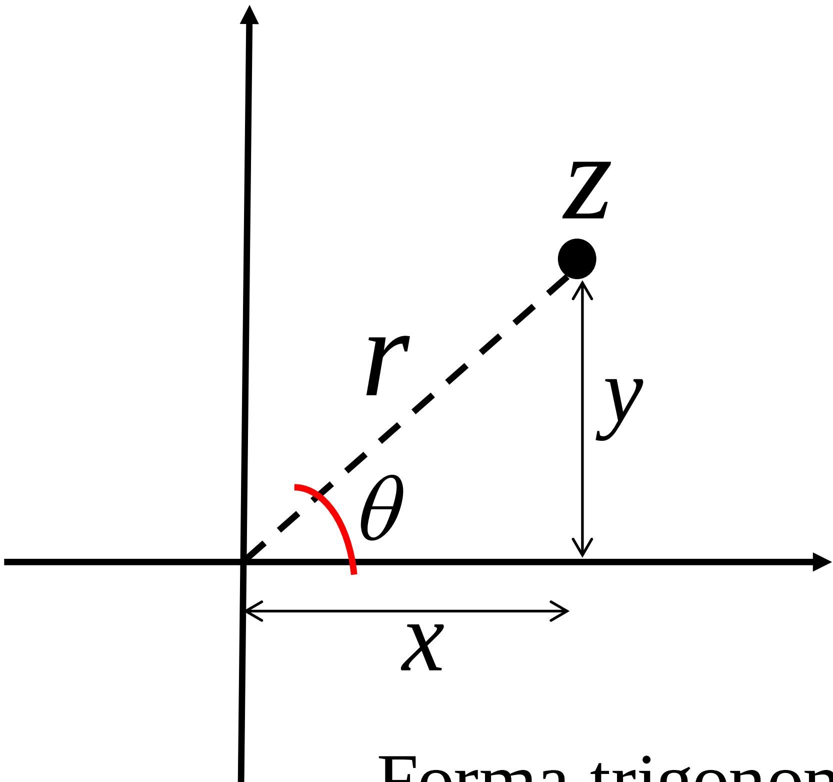
Expresar a la función

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, \qquad z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

en la forma $f(z) = u(r, \theta) + i\,v(r, \theta)$.

Forma polar y trigonométrica

A partir de las coordenadas polares (r,θ) tenemos:



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}}$$

$$\rightarrow \quad z = x + iy$$

$$= r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$\boxed{z = r_\theta}$$ Forma polar

$r > 0$ Utilizamos el argumento principal

Forma trigonométrica

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

En ingeniería: $r\angle\theta$

$r\,cis\,\theta$

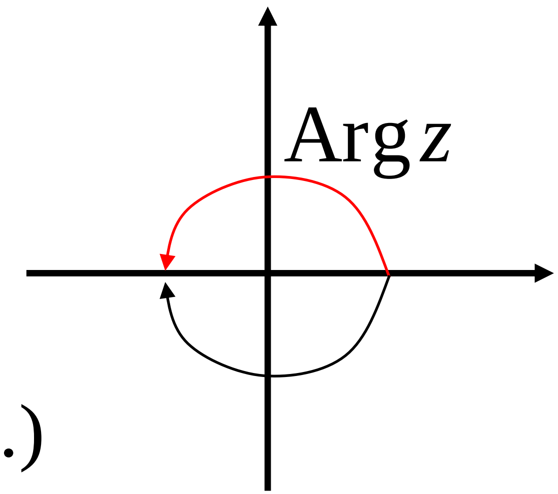
Determinación o valor principal

Para que θ sea único, basta con imponer la condición adicional de que **pertenezca a un cierto intervalo semiabierto de longitud** 2π (como $[0,2\pi)$, $(-\pi,\pi]$, etc).

Escoger este intervalo se conoce como tomar una determinación del argumento.

Se denomina determinación principal o valor principal a Arg z, el valor de θ en el rango:

$$\boxed{-\pi < \theta := \operatorname{Arg} z \leq +\pi}$$



$$\arg z := \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Dos números complejos serán iguales *si*:

$$\boxed{\begin{array}{l} |z_1| = |z_2| \\ \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 \end{array}}$$

Propiedades del argumento

$$\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2}$$

Recordemos que el argumento está multivaluado:

$$\arg z_1 = \{\theta_1 + 2n\pi : n \in Z\}$$

$$\arg z_2 = \{\theta_2 + 2n\pi : n \in Z\}$$

$$z_1 z_2 = |z_1| \left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right) |z_2| \left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$$

Utilizando las relaciones trigonométricas para la suma de ángulos:

$$\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

Obtenemos que:

$$z_1\, z_2 = |\, z_1 \,||\, z_2 \,| \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$\theta_1 + \theta_2 \in \arg(z_1 z_2)$$

$$\arg(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 + 2n\pi : n \in Z\} =$$

$$\{\theta_1 + 2n\pi : n \in Z\} + \{\theta_2 + 2n\pi : n \in Z\} = \arg z_1 + \arg z_2$$

Multiplicación en forma trigonométrica

En realidad ya tenemos la solución a partir de las propiedades del argumento:

$$z = z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

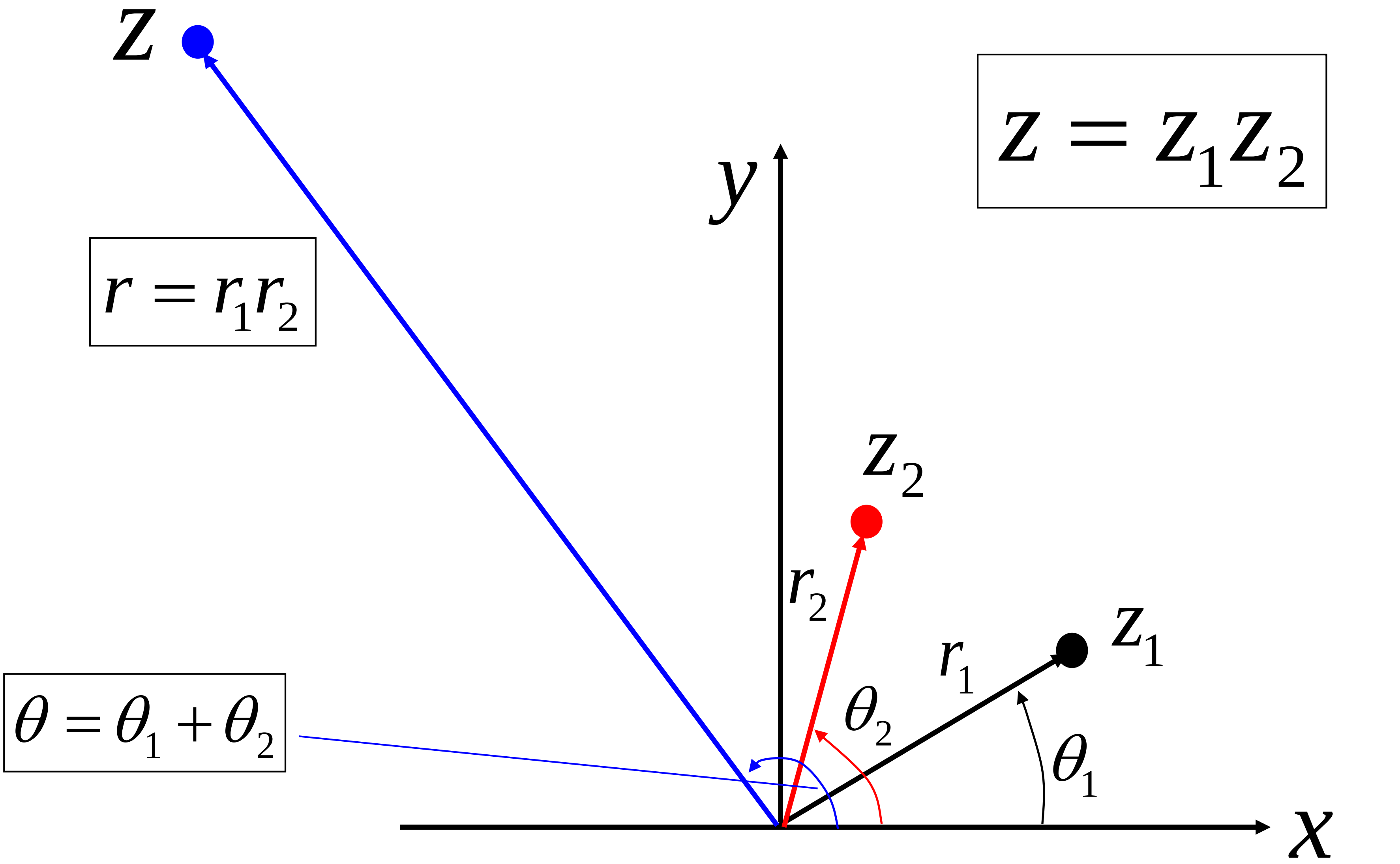
$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) +$$
$$i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$r = r_1 r_2 = |z_1||z_2| \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\boxed{\begin{gathered} |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \\ \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \end{gathered}}$$

Producto de números complejos en el plano complejo



División en forma polar

Pensemos que la división es la operación inversa del producto:

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$.

Queremos $z = z_1/z_2$. Entonces: $z\, z_2 = z_1$.

De modo que: $|z\, z_2| = |z|\,|z_2| = |z_1|$

$$|z| = |z_1|/|z_2|$$

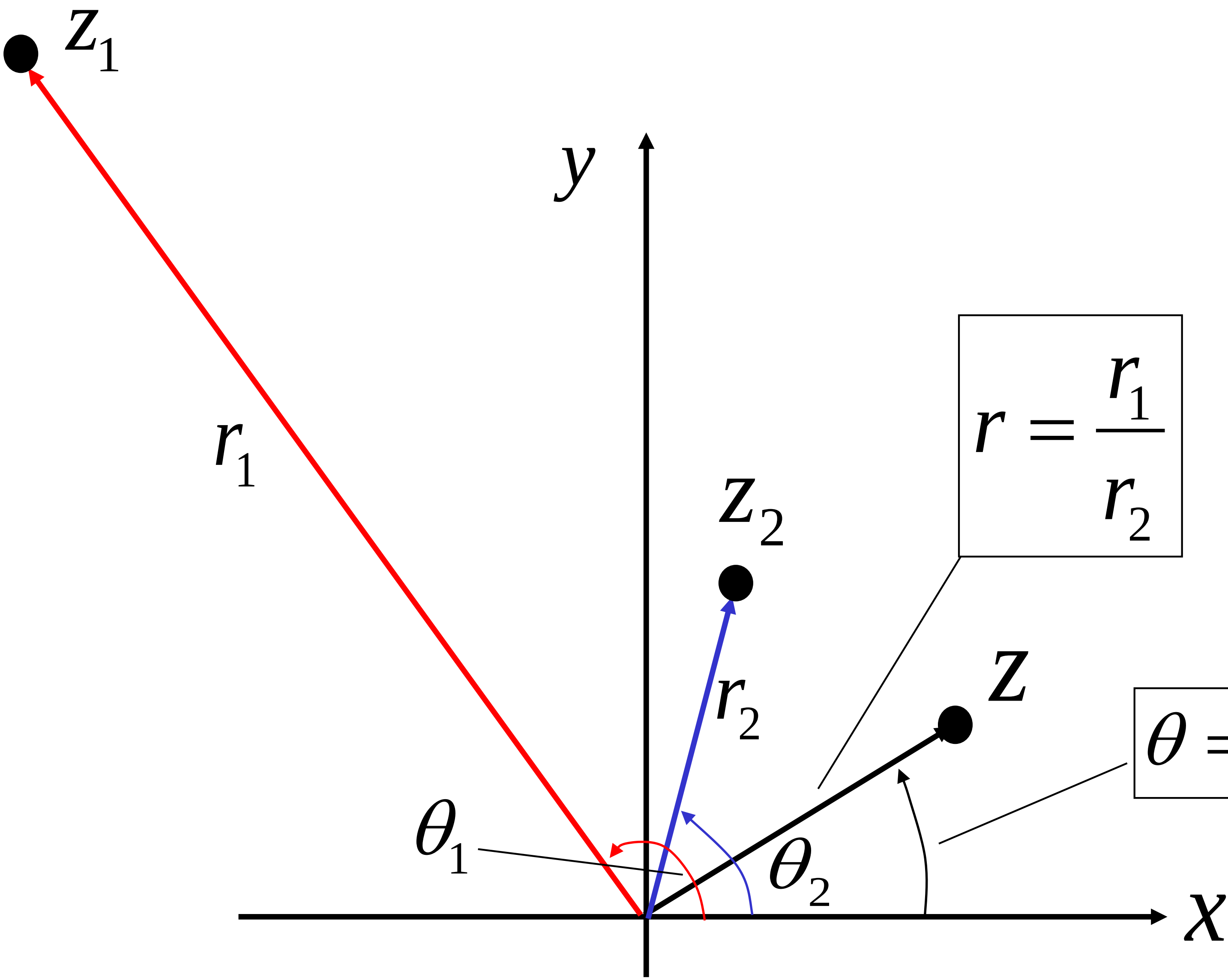
$$\arg(z\, z_2) = \arg(z) + \arg(z_2) = \arg(z_1)$$

$$\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Así que:

$$\boxed{z_1/z_2 = (r_1/r_2)[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]}$$

División de números complejos en el plano complejo

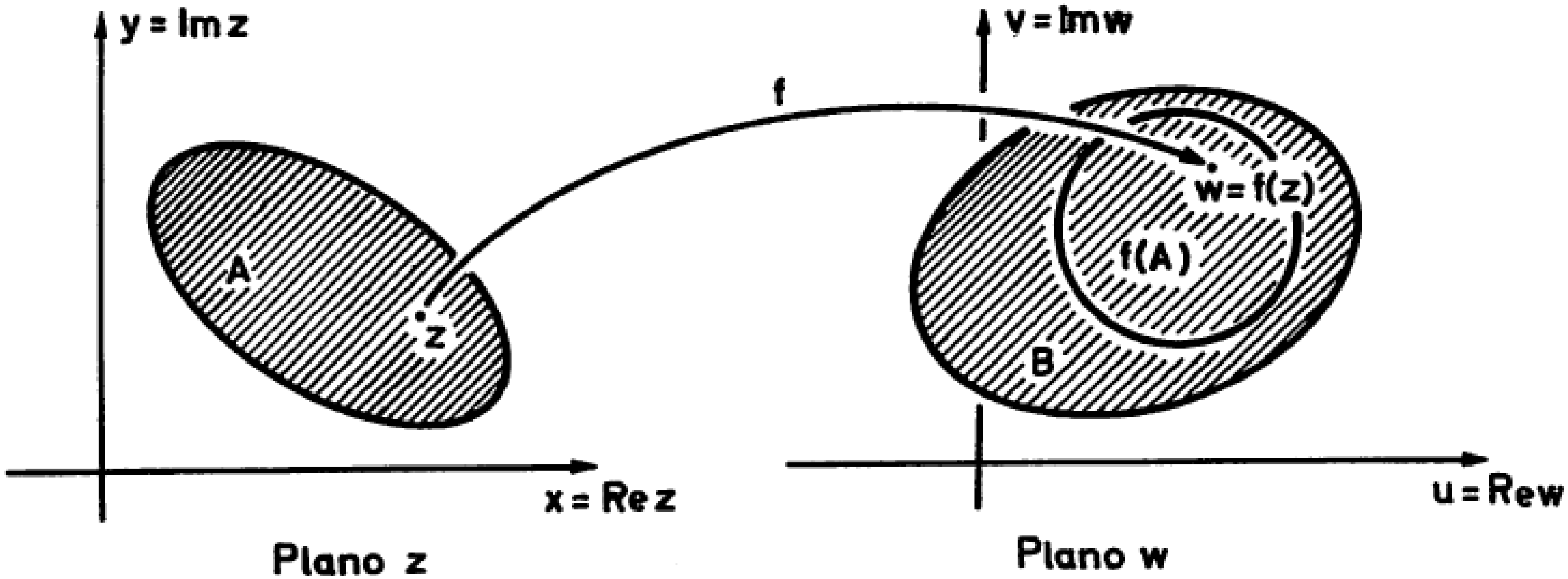


$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2}}$$

$$\boxed{r = \frac{r_1}{r_2}}$$

$$\boxed{\theta = \theta_1 - \theta_2}$$

Función Compleja



Definición I.1.1. *Sean A y B conjuntos de números complejos. Una* ***función*** *compleja de variable compleja univaluada f definida sobre A (o más brevemente una función univaluada f) es una regla que asigna o asocia a cada número complejo z de A uno y sólo un número complejo w de B.*

Sean u y v las partes real e imaginaria de w y sean x y y las partes real e imaginaria de z, es decir, $w = u + iv$ y $z = x + iy$. Entonces, puesto que w es una función de z, el valor que tome w (es decir, los que tomen u y v) va a depender de los que tome la variable independiente z (es decir, de los que tomen x y y) y se puede escribir

$$u + iv = f(z) = f(x + iy)$$

Esta ecuación indica que la función f también tiene una parte real y una imaginaria, es decir,

$$f(x + iy) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$$

y que por lo tanto

$$u = f_1(x, y)$$
$$v = f_2(x, y)$$

Así, una función compleja f es equivalente a dos funciones reales f_1 y f_2, dependiendo ambas de las variables reales x y y. Frecuentemente se utiliza un mismo símbolo para denotar a las funciones f_1 y f_2 y su valor en (x,y). Así se escribe

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad \ldots (2)$$

y

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned} \qquad \ldots (3)$$

Como la representación geométrica del complejo $z = x + iy$ es la misma que la del punto $P(x,y)$ e igualmente con $w = u + iv$ y $P'(u,v)$, la función de la *Ecuación (2)* puede interpretarse como una *transformación*, *aplicación* o *mapeo*

$$T_f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Ejercicio

Determinar y hacer una grafica del dominio de las siguientes funciones

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 8i}$

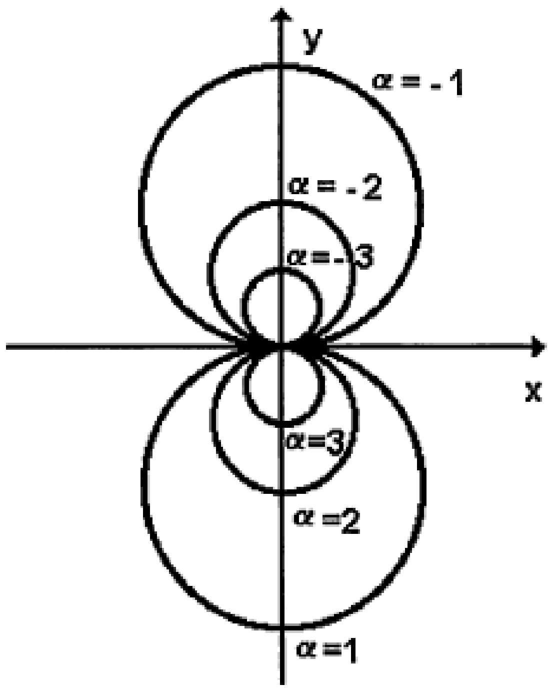
b) $g(z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + i\,\dfrac{x + y}{x - y}$

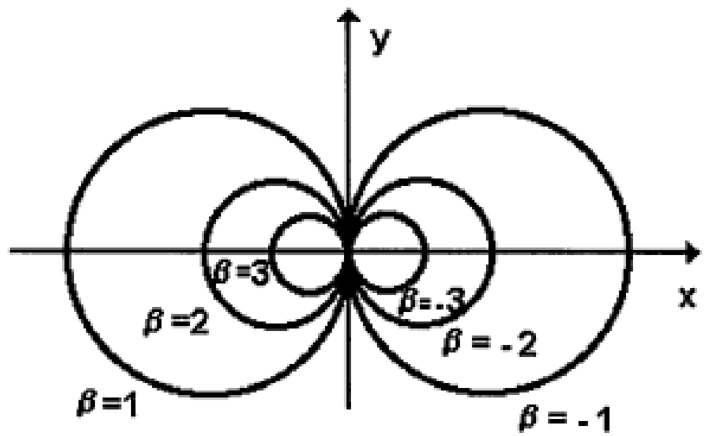
Ejercicio

Si $f(z) = 1/(iz)$, identificar las familias de curvas

$$u(x,y) = \alpha \quad \text{y} \quad v(x,y) = \beta$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u(x,y) = \mathrm{Re}[f(z)]$ y $v(x,y) = \mathrm{Im}[f(z)]$.


y
α = - 1
α = - 2
α = - 3
x
α=3
α =2
α =1


y
β =3
x
β=-3
β =2
β = - 2
β =1
β = - 1

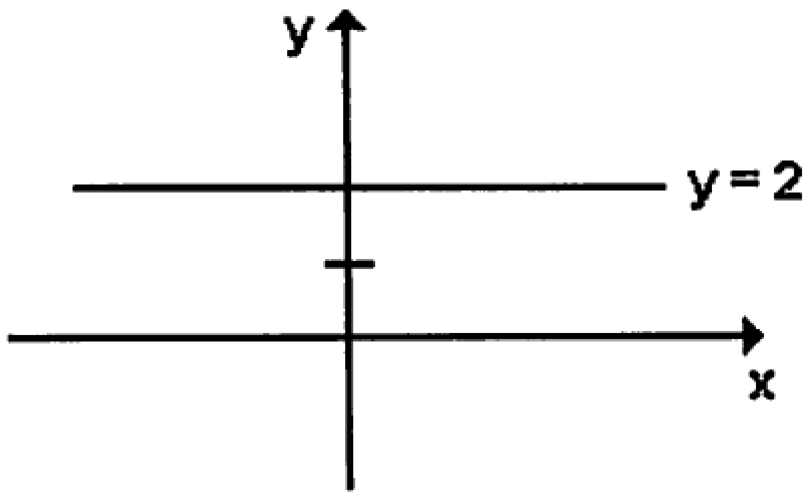
Ejercicio

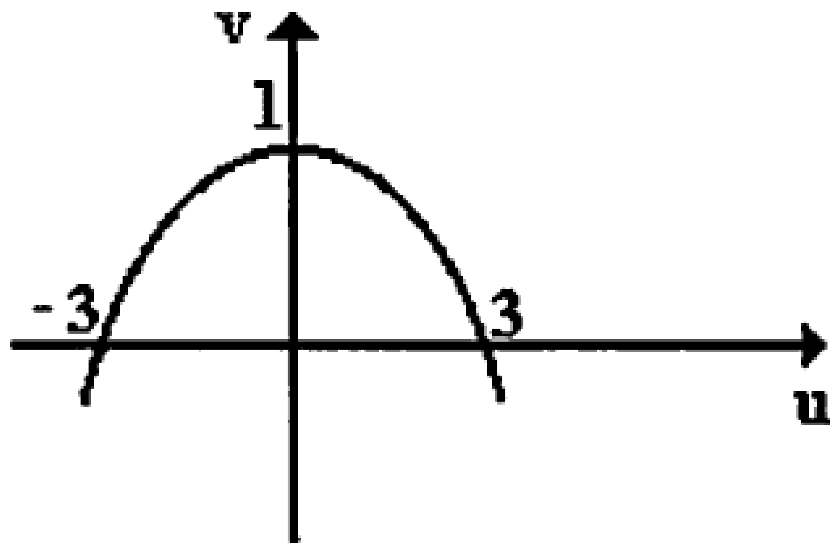
Sea la función

$$w = -3y \operatorname{sen} x \cos x + i \cos^2 xy$$

Determinar la imagen en que mapea la recta de ecuación $y = 2$ bajo dicha función.

La recta a mapear es la que se observa a continuación:




v
1
-3
3
u

Funciones más representativas

Función racional o fraccional.

Una función racional o fraccional es de la forma

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $p(z)$ *y* $q(z)$ *son funciones polinomiales.*

$$\begin{aligned} D_r &= \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\} \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Función Exponencial

$$Si\ z = x + iy \in \mathbb{C}\ entonces$$

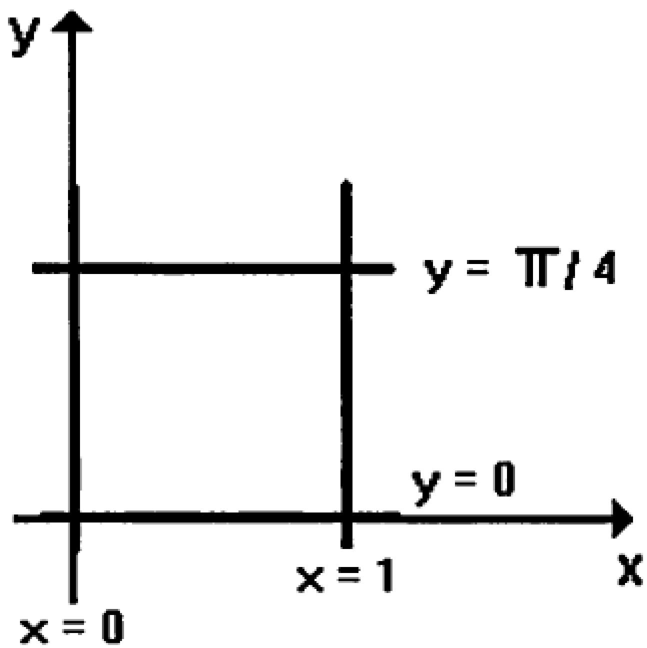
$$e^z = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$$

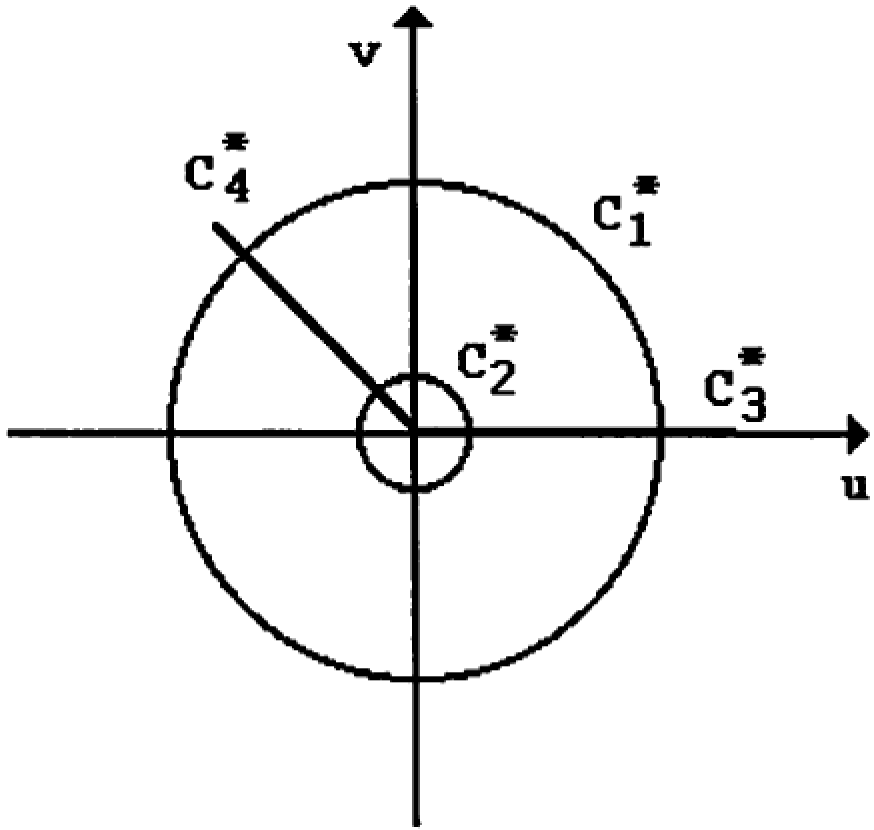
$$e^z = e^x \cos y + i\, e^x\, \mathrm{sen}\,y$$

Ejercicio

Dada la función $f(z) = e^{-z}$, identificar y dibujar las imágenes de las rectas

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = \frac{\pi}{4}$$




v
c*4
c*1
c*2
c*3
u

Propiedades de la Función Exponencial

Si $z, w \in \mathbb{C}$, *entonces*

i) $e^0 = 1$

ii) $e^{z+w} = e^z \, e^w$

iii) $e^z \neq 0 \qquad \forall \; z \in \mathbb{C}$

iv) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

v) e^z *es periódica, en donde cualquier periodo es de la forma* $2\pi n i$ *con* $n \in \mathbb{I}$.

vi) $e^z = 1$ *si y sólo si* $z = 2\pi n i$ *con* $n \in \mathbb{I}$.

vii) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

viii) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

Demostraciones

Propiedades de la Función trigonométrica

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad y \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$Si \;\; z, w \in \mathbb{C}, \;\; entonces$$

i) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$

ii) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$

$\cos(-z) = \cos z$

iii) $\operatorname{sen}(z \pm w) = \operatorname{sen} z \cos w \pm \cos z \operatorname{sen} w$

$\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$

Demostraciones

Ejercicio

Obtener las funciones reales $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tales que

$$\tan z = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

Ejercicio

Hallar todas las soluciones de la ecuación:

$$\cos z = 2isenz$$

Propiedades de la Función hiperbólica

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad y \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

i) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

ii) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$

$\cosh(-z) = \cosh z$

iii) $\operatorname{senh}(z \pm w) = \operatorname{senh} z \cosh w \pm \cosh z \operatorname{senh} w$

$\cosh(z \pm w) = \cosh z \cosh w \pm \operatorname{senh} z \operatorname{senh} w$

i) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$

ii) $\cos(iz) = \cosh z$

Ejercicio

Demostrar que

$$\operatorname{senh}(z + w) = \operatorname{senh} z \cosh w + \cosh w \operatorname{senh} z$$

para toda $z, w \in \mathbb{C}$.

Función logarítmica

La rama particular en la cual $\ln(z)$ es real cuando z es real y positivo, es llamada la *rama principal* del logaritmo natural, la cual se define como

$$\mathrm{Ln}(z) = \mathrm{L}|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) \qquad z \neq 0$$

donde $\mathrm{Arg}(z)$, el *argumento principal* de z, se escoge en $(-\pi, \pi]$ llamado el *intervalo principal*. Nótese que de esta manera $\arg(z) = 0$ cuando z es real y positivo. El valor del logaritmo natural calculado de esta forma se denominará *valor principal del logaritmo natural* o *logaritmo natural principal* de $z \neq 0$.

Utilizando el argumento principal, se puede volver a escribir la función logaritmo natural multivaluada como

$$\ln(z) = \mathrm{L}|z| + i[\mathrm{Arg}(z) + 2\pi n], \qquad n \in \mathbb{I}$$

obteniéndose la rama principal con $n = 0$.

Propiedades de la Función logarítmica

Teorema I.1.7. *Si* $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$, *entonces*

i) $\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w)$

ii) $\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln(z) - \ln(w)$

iii) $\ln(z^r) = r\ln(z), \quad \forall \quad r \in Q$

$\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w)$ (excepto por la adición de un múltiplo entero de $2\pi i$)

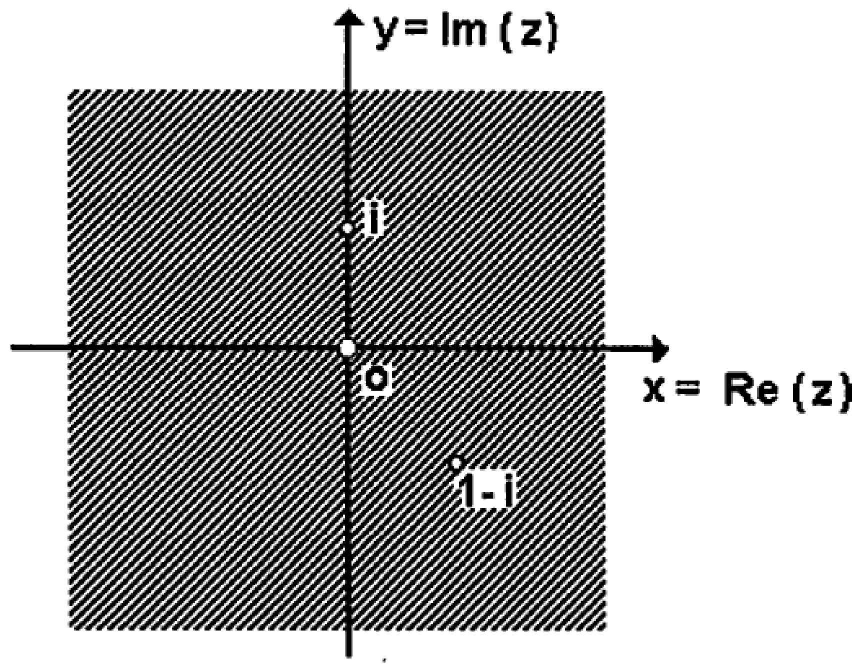
Obtener el dominio de la función

$$f(z) = \ln\left[z^3 - z^2 + (1+i)z\right]$$

Raíces cuadradas de w = a + bi

$$\begin{aligned} w &= \pm\left[x + i\,\mathrm{sign}(b)\,y\right] \\ &= \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\,\mathrm{sign}(b)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right] \end{aligned}$$

donde $\mathrm{sign}(b)$ significa signo de b.



Funciones trigonométricas inversas

$$\operatorname{sen}^{-1}(z) = -i \ln\left[iz + (1 - z^2)^{1/2}\right]$$

$$\cos^{-1}(z) = -i \ln\left[z + (1 - z^2)^{1/2}\right]$$

Función potencia compleja

Si z *y* w *son números complejos arbitrarios con* $z \neq 0$ *se define*

$$z^w = e^{w \ln z}$$

Propiedades

i) $$z^{w_1} z^{w_2} = z^{w_1 + w_2}$$

ii) $$\frac{z^{w_1}}{z^{w_2}} = z^{w_1 - w_2}$$

Teorema *Sean* $z, w \in \mathbb{C}$, *con* $z \neq 0$.

i) z^w *está unívocamente determinada (no depende de la rama del logaritmo que se escoja) si y sólo si* $w \in \mathbb{I}$.

ii) *Si* $w = p/q \in Q$ *y* p/q *está en su mínima expresión, entonces* z^w *toma exactamente* q *valores, que son las* q *raices de* z^p.

iii) *Si* $w \in \mathbb{R} - Q$ *o si* $w \notin \mathbb{R}$ *entonces* z^w *toma un número infinito de valores.*

Los casos en que z^w *toma valores distintos, éstos difieren por factores de la forma* $e^{2\pi n w i}$. *Así, si se ha elegido una rama del logaritmo, la rama correspondiente de* z^w *está dada por* $z^w = e^{w \ln z}$ *y los otros valores por* $z^w = e^{w \ln z + 2\pi n w i}$.

$$e^{2\pi n w i} = 1$$

El *valor principal* de z^w se define como

$$\Pr\left[z^w\right] = e^{w \operatorname{Ln}(z)} = e^{w[\operatorname{Ln}|z| + i \operatorname{Arg}(z)]}$$

Tarea

i) $(1+i)^3$

ii) $(1+i)^{-3}$

iii) $i^{2/3}$

iv) $i^{\sqrt{2}}$

v) i^i

Límites

Sean una función compleja $f(z)$ y una constante compleja L. Si para todo número real $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - L| < \epsilon$$

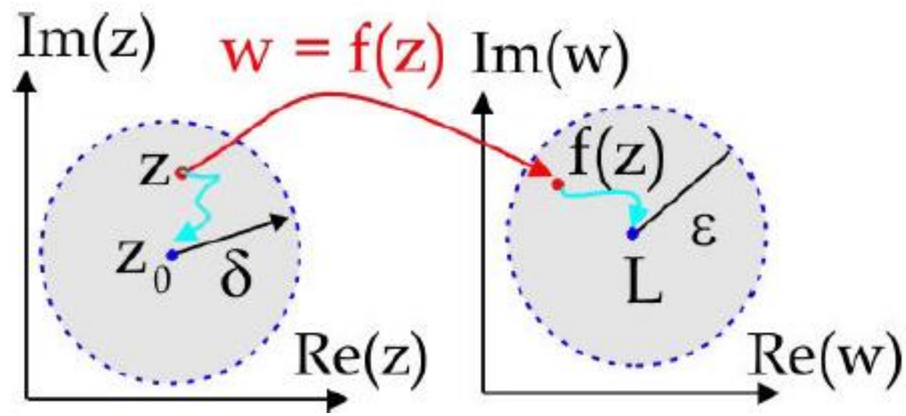
para todo z tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

entonces decimos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

es decir, que $f(z)$ tiene límite L cuando z tiende a z_0.



En el caso complejo, no hay sólo dos direcciones, sino un número infinito de trayectorias por las cuales z tiende a z0, y para que el límite exista, todos estos límites deberán existir y ser iguales.

Propiedades de los límites

$$Si\ \lim_{z \to z_0} f(z) = w_1 \ y \ \lim_{z \to z_0} g(z) = w_2,\ entonces$$

i) $$\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = w_1 + w_2$$

ii) $$\lim_{z \to z_0} [c\, f(z)] = c\, w_1 \qquad \forall \ c \in \mathbb{C}$$

iii) $$\lim_{z \to z_0} [f(z)\, g(z)] = w_1 w_2$$

iv) $$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{w_1} \qquad si \ \ w_1 \neq 0$$

v) $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_1}{w_2} \qquad si \ \ w_2 \neq 0$$

Continuidad

Decimos que una función $w = f(z)$ es continua en $z = z_0$ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. $f(z_0)$ está definido
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ $\exists$, y $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Continuidad

$$Sean\ f(z)\ \ y\ g(z)\ \ continuas\ \ en\ \ z_0,$$

$entonces\ \ en\ \ z_0$

$$\begin{aligned}
&f(z) \pm g(z),\\
&f(z)\,g(z),\\
&f[g(z)]\ \ y\\
&|f(z)|
\end{aligned}$$

$son\ \ continuas\ \ y$

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$

$es\ \ continua\ \ si\ \ g(z_0) \neq 0,$

$$además\ \ si\ \ f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ \ entonces$$

$$u(x,y)\ \ y\ v(x,y)$$

Derivada Compleja

Dada una función de variable compleja $f(z)$, la derivada en z_0, se define como:

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}
\end{aligned}
$$

Siempre y cuando el límite exista

Otras notaciones para $f'(z_0)$ son

$$\frac{df(z_0)}{dz} \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0}$$

Si la derivada existe los límites son iguales:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

o bien,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Como $w = f(z)$, también podemos usar la notación

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Función analítica

$$Sea\ f: A \rightarrow C, con\ A\ abierto\ en\ C.$$

$$Si\ f(z) = u(x, y) + iv(x.y)\ es\ \textbf{analítica}\ en$$
$$z_0 = x_0 + iy_0\ \in A$$

Entonces las funciones *u* y *v* satisfacen las ecuaciones conocidas como ecuaciones de Cauchy-Riemman

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann→ Forma Polar

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\
\frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}
\end{aligned}
$$

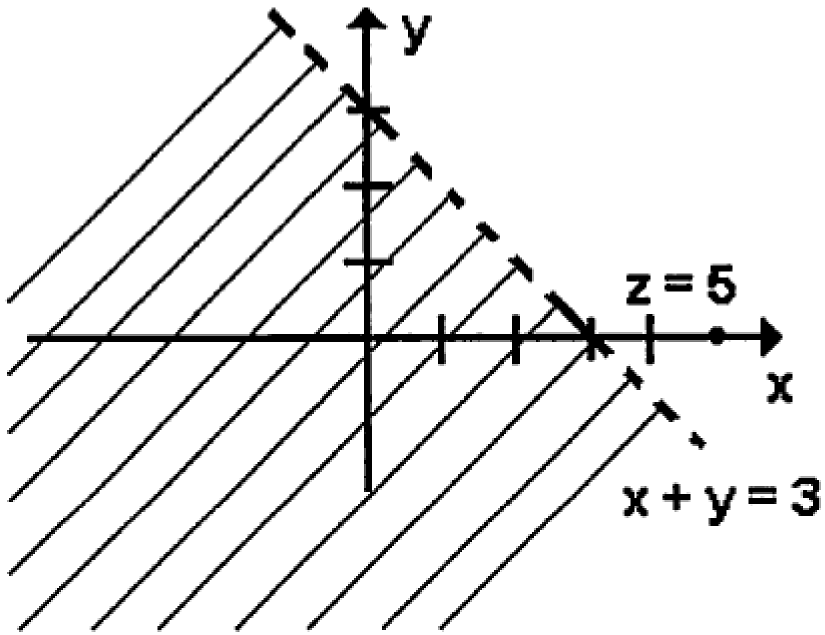
Ejercicio

Determinar si la función

$$f(z) = \frac{z^2 - 3}{z - 5}$$

es analítica en la región

$$R = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{1}{2}(1 - i)z + \frac{1}{2}(1 + i)\bar{z} - 3 < 0 \right\}$$


y
z = 5
x
x + y = 3

Función Armónica

Sea A una región en $\mathbb{R}^2$ y $\phi : A \to \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales x e y, con segundas derivadas parciales continuas [5] *en A. Se dice que $\phi(x,y)$ es* ***armónica*** *en A si satisface la ecuación*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

A esta ecuación se le conoce como **ecuación de Laplace bidimensional**, por lo que $\varphi(x, y)$ es armónica si satisface esta ecuación.

Si las funciones $u(x,y)$ *y* $v(x,y)$ *son armónicas en una región* A *y la función* $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *es analítica en* A*, entonces decimos que* $v(x,y)$ *es una* ***armónica conjugada*** [7] *de* $u(x,y)$.

Teorema I.3.10. *Sea* $u(x,y)$ *una función armónica definida en una región simplemente conexa* A. *Entonces existe una armónica conjugada* $v(x,y)$ *definida en* A *tal que la función* $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *es analítica en* A.

Ejercicios

1. $Obtener\ la\ función\ f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $que\ sea\ analítica\ alrededor\ de\ z = \pi, si\ se\ sabe$ que:

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad y \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}$$

2. $Encontrar\ la\ función\ f(z) que\ cumple\ con\ la\ condición$ $f(0) = 0, cuya\ parte\ real\ es$: $u(x,y) = 3e^x seny$

Ejercicio

Dada la función $f(z) = 1/z^2$ con $z \neq 0$

a) escribirla en la forma $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$,

b) utilizado a), demostrar que es analítica,

c) a partir de los incisos anteriores, demostrar que $f'(z) = -2/z^3$,

Ejercicios

$$Obtener\ una\ arm\acute{o}nica\ conjugada\ de\ la\ funci\acute{o}n\ donde$$
$$(r,\theta) son\ coordenadas\ polares$$

$$u(r,\theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) cos\theta$$

Conformalidad

*Una transformación o mapeo $w = f(z)$ es **conforme** en z_0 si preserva ángulos entre curvas orientadas tanto en magnitud como en sentido.*

Sea f una función analítica en una región A y sea z_0 un punto en A. Si $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0.

- Una transformación que conserva la magnitud del ángulo entre curvas suaves pero **no** necesariamente en sentido se llama ***isogonal.***

- Sea una función no constante y analítica en Z_0 y $f'(Z_0) = 0$ se llama ***punto critico*** de la transformación w= f(z)

Regla de L´Hopital

Sean f *y* g *funciones analíticas en* z_0. *Si* $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$ *y* $g'(z_0) \neq 0$, *entonces*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Integración compleja

Sea $f:[a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *una función compleja de variable real. Entonces* $f(t) = u(t) + i\,v(t)$, *donde* u *y* v *son funciones reales de la variable* t *en* $[a,b]$ *y se define*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

siempre y cuando las integrales individuales de la derecha existan.

Calcular la integral

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

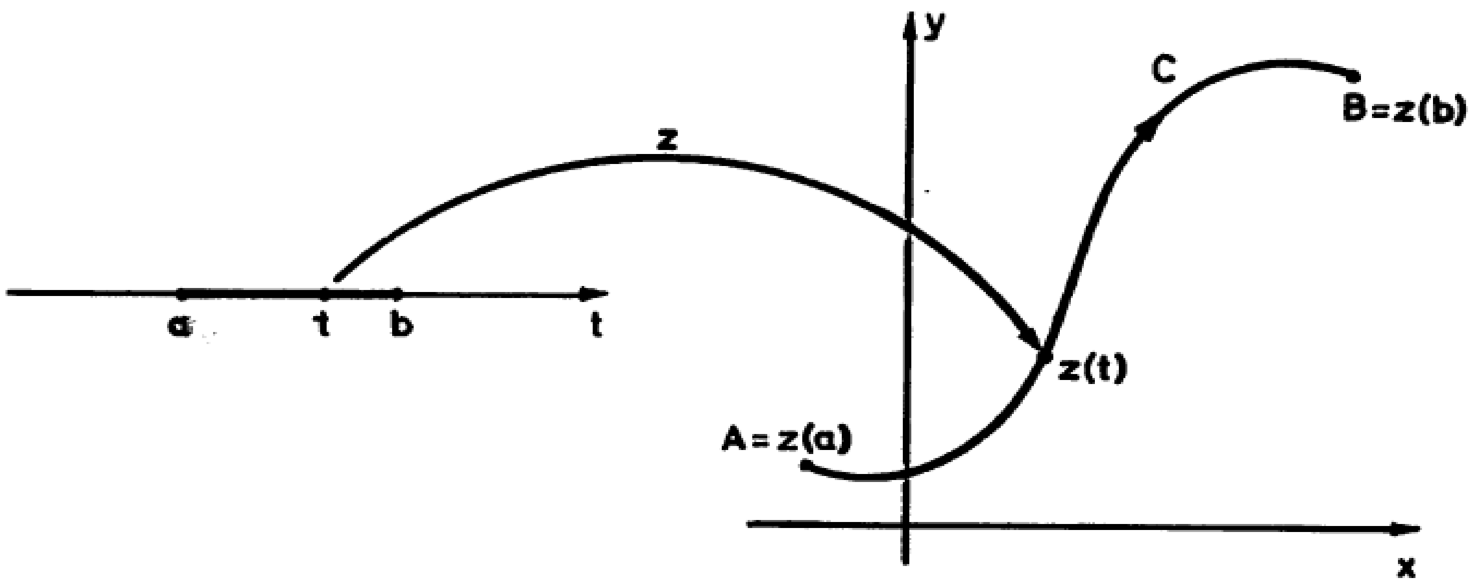
donde $f(t) = e^{t-it}$ y $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Por otro lado

Principiaremos haciendo notar que la imagen de una función compleja de variable real $z:[a,b]\to\mathbb{C}$, es decir, una función de la forma

$$z(t) = x(t) + i\,y(t), \qquad \text{para} \quad a \le t \le b$$

es un conjunto de puntos en el plano complejo. Si la función $z(t)$ es continua en $[a,b]$, para lo cual se requiere que las funciones $x(t)$ y $y(t)$ sean continuas para $a \le t \le b$, entonces dichos puntos forman una secuencia continua de puntos, lo que corresponde a nuestra idea intuitiva de una curva continua. Por definición, si $z(t)$ es continua [1], llamaremos *curva continua* C indistintamente a z o a su imagen.



La ecuación anterior nos recuerda a la función vectorial $\boldsymbol{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t)] = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$$

cuya imagen es la misma curva en el plano xy que antes, sólo que los puntos de la curva se obtienen ahora con el extremo final del vector de posición $\boldsymbol{r}(t)$ a medida que t toma valores

Integral compleja depende de C

Sean A un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ una función continua y $z: [a, b] \to A$ una curva suave. Entonces

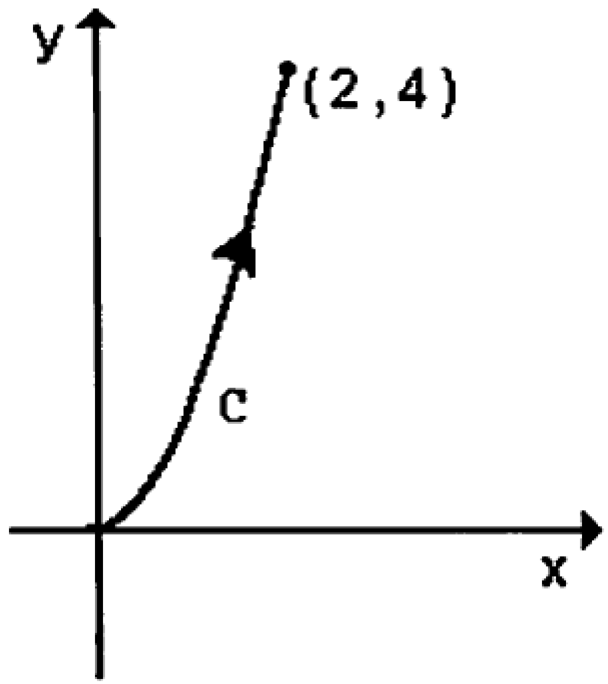
$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt$$

Ejercicios

Calcular la integral

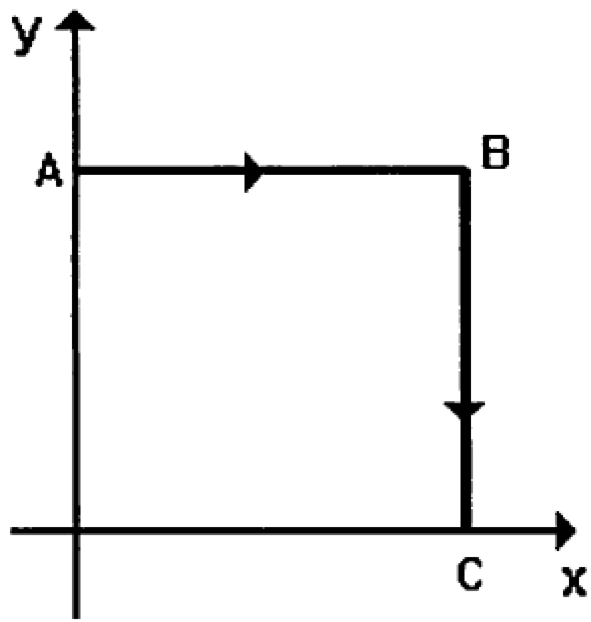
$$\int_C (z^2 - 1)\, dz$$

a lo largo del segmento de parábola $y = x^2$, que se extiende del punto $(0,0)$ al punto $(2,4)$.



Sean A, B y C los puntos del plano complejo que representan a los números i , $1+i$ y 1 respectivamente. Si γ es la línea quebrada $\overline{AB} \cup \overline{BC}$, con sentido de recorrido de A hacia C, calcular en forma paramétrica (a partir de su definición) la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz$$



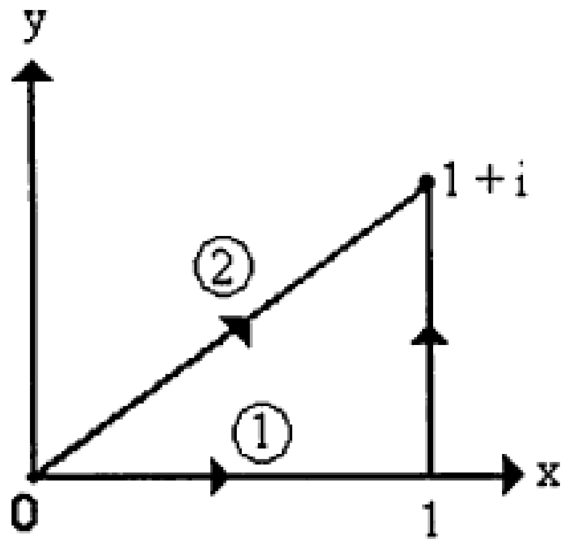
Teorema I.4.4. *Sean A una región en $\mathbb{C}$, $f, g: A \to \mathbb{C}$ funciones continuas y C_1, C_2 curvas en A seccionalmente suaves, entonces*

i) $$\int_C [f(z) + g(z)]\, dz = \int_C f(z)\, dz + \int_C g(z)\, dz$$

ii) $$\int_C [k f(z)]\, dz = k \int_C f(z)\, dz \qquad \forall \ k \in \mathbb{C}$$

iii) $$\int_{-C} f(z)\, dz = - \int_C f(z)\, dz$$

iv) $$\int_{C_1 + C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz$$


y
1 + i
2
1
x
0
1

Ejercicios

$$\text{Calcular la } \int_C \bar{z}dz \ \text{ desde } z = -1 \text{ hasta } z = 1,$$

$$\text{Si la curva } C \text{ es la semicircunferencia unitaria superior centrada en el origen, recorrida en sentido horario.}$$

Teorema Integral de Cauchy

Sean $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en una región A y $z:[a,b] \to A$ una curva seccionalmente suave. Si existe una función $F: A \to \mathbb{C}$ analítica tal que $F'(z) = f(z)$, entonces

$$\int_C f(z)\, dz = F[z(b)] - F[z(a)]$$

*por lo que la integral es **independiente de la trayectoria**. En particular, si la trayectoria es cerrada,*

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

$$\oint_C z^n\, dz = 0, \qquad \oint_C e^z\, dz = 0 \qquad \text{y} \qquad \oint_C \operatorname{sen} z\, dz = 0$$

$$\oint_C (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq -1 \\ 2\pi i & si \quad n = -1 \end{cases}$$

Ejercicios

Verificar que se cumple el teorema de la integral de Cauchy, para la integral

$$\oint_C z^2 \, dz$$

(efectuando el cálculo directamente), donde C es el triángulo con vértices en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, recorrido en sentido antihorario.

Comprobar que las partes real e imaginaria de la función $f(z) = z\,e^{2z}$, donde $z = x + y\,i$ es una variable compleja, cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y determinar el valor de la integral

$$\oint_C z\,e^{2z} \, dz$$

donde C es la circunferencia $|z| = 1$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(2x\,e^{2x} + e^{2x}\right)\cos 2y - 2y\,e^{2x}\operatorname{sen} 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(2x\,e^{2x} + e^{2x}\right)\cos 2y - 2y\,e^{2x}\operatorname{sen} 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{2x}\left(-2x\ \operatorname{sen} 2y - 2y\ \cos 2y - \operatorname{sen} 2y\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{2x}\left(2x\ \operatorname{sen} 2y + 2y\ \cos 2y + \operatorname{sen} 2y\right)$$

Ejercicios

Calcular la integral

$$\oint_C \frac{z - \bar{z}}{\bar{z}}\, dz$$

donde la curva C está dada por $|z| = 1$, recorrida una vez en sentido positivo.

Fórmulas Integral de Cauchy

Primera Fórmula

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Segunda Fórmula

(Formula de la integral de Cauchy para las derivadas).

Sean f analítica en una región simplemente conexa A, C una trayectoria cerrada simple en A recorrida en sentido positivo y $z_0 \in \operatorname{int} C$. Entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Ejercicios

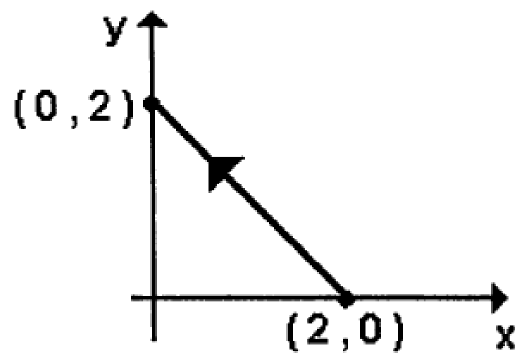
Calcular la integral

$$\oint_C \frac{z - \bar{z}}{\bar{z}}\, dz$$

donde la curva C está dada por $|\,z\,| = 1$, recorrida una vez en sentido positivo.

$$\int_C 3z\,(z+3)\; dz$$

a lo largo de la línea recta que va desde el punto $(2,0)$ al $(0,2)$.



Fórmulas Integral de Cauchy

Calcular

$$\oint_C \frac{dz}{z^3 - 4z^2 + 8z}$$

donde C es la curva de ecuación $|z - 2i| = 4$, recorrida una vez en sentido positivo.

Primera Fórmula

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Fórmulas Integral de Cauchy

Primera Fórmula

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Segunda Fórmula

(Formula de la integral de Cauchy para las derivadas).

Sean f analítica en una región simplemente conexa A, C una trayectoria cerrada simple en A recorrida en sentido positivo y $z_0 \in \operatorname{int} C$. Entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Serie compleja

Sucesión: Una regla que asigna a cada entero positivo n un número complejo. Al n-ésimo término de la sucesión lo denotamos z_n, y a la sucesión $\{z_n\}$.

Suma parcial: Sea $\{z_n\}$ una sucesión compleja. Definimos las n-ésima suma parcial S_n como la suma de los primeros n-términos de la sucesión $\{z_n\}$:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j .$$

A su vez $\{S_n\}$ es una sucesión compleja. Si esta sucesión de sumas parciales converge decimos que la serie infinita:

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j$$

converge.

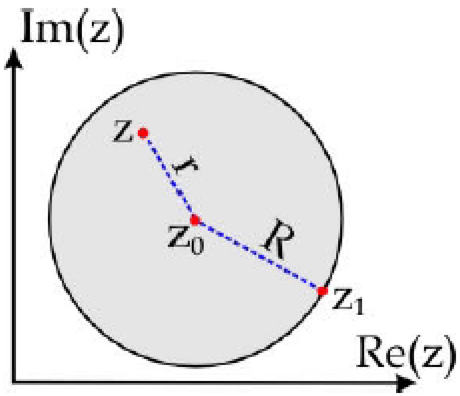
Sean $z_0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ números complejos dados. Una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots$$

se llama una serie de potencias con centro en z_0 y secesión de coeficientes $\{a_n\}$. La serie empieza en la potencia 0 para permitir el término constante. La serie converge en z_0 a a_0.

Serie compleja

Teorema: Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge para $z_1 \neq z_0$. Entonces la serie converge para toda z tal que $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.



Disco de Convergencia

El máximo valor de R se llama radio de convergencia, y el disco que forma, disco de convergencia. Existen tres posibilidades para el radio de convergencia R.

1. $R \to \infty$

2. $R = 0$

3. $0 < R < \infty$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Serie de Taylor

Una serie de Taylor con $z_0 = 0$, se llama serie de Maclaurin.

Serie Laurent compleja

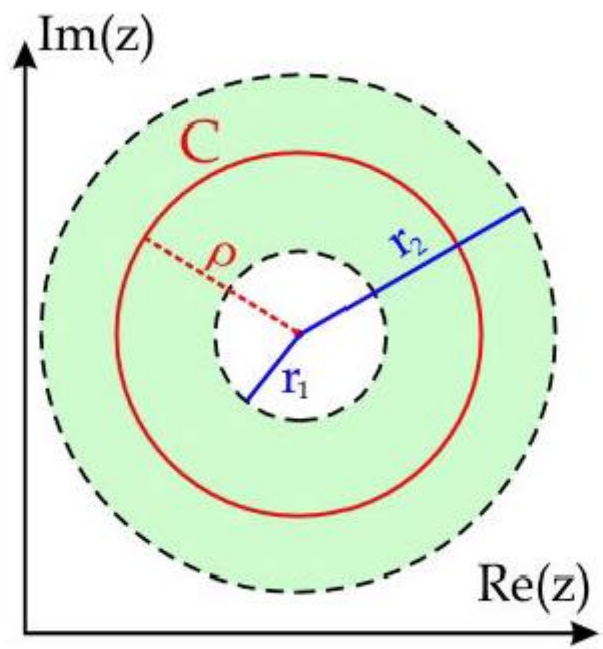
Sea $f(z)$ analítica en el anillo $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Entonces para z en este anillo,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

en donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

y C es cualquier circunferencia $|z - z_0| = \rho$ con $r_1 < \rho < r_2$.

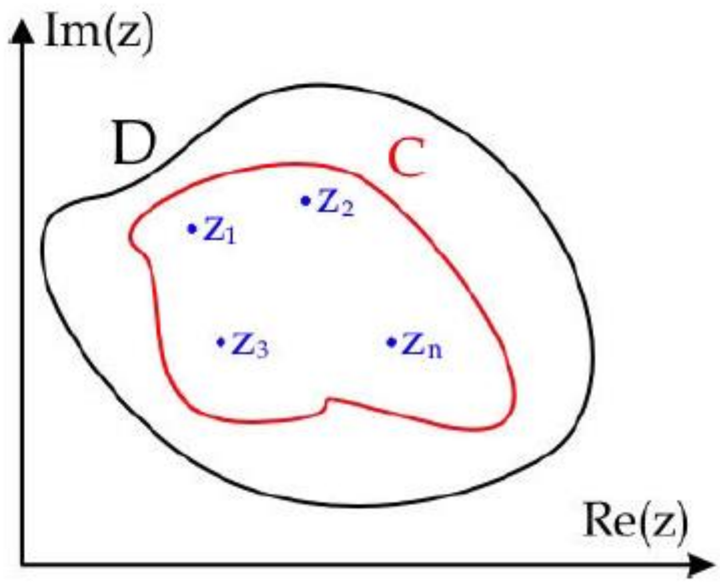


Anillo de Laurent

Teorema del residuo

Sea $f(z)$ analítica en un dominio D, excepto en los puntos $z_1, z_2, ..., z_n$, donde $f(z)$ tiene singularidades. Sea C una curva cerrada suave a pedazos en D que encierra a $z_1, z_2, ..., z_n$.$\Rightarrow$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_j} f(z)$$



C encierra a las sigularidades $z_1, z_2, ..., z_n$