Método de Krylov y Método de Potencias

PROFESOR:
GERARDO FLORES DELGADO

INTEGRANTES:
MURRIETA VILLEGAS ALFONSO
REZA CHAVARRIA SERGIO GABRIEL
VALDESPINO MENDIETA JOAQUIN

Valores Característicos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre un campo K y sea
$T: V \to V$ un operador lineal para el cual:

$$\mathrm{T}(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \qquad ; \quad \forall\, \bar{v} \in V \quad con \quad \bar{v} \neq \bar{0}$$
$$\forall\, \lambda \in K$$

- Al escalar λ se le llama valor característico de T
- Al vector v diferente de 0 se le conoce como vector característico de T correspondiente al valor λ

MÉTODO DE KRYLOV

Método de Krylov

Este método se fundamenta en la aplicación del *Teorema de Cayley-Hamilton*, mismo que establece que toda matriz A verifica su ecuación característica:

F(A) = 0

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}}$$

$$A-\lambda I = (-1-\lambda)(2-\lambda)-3 = -2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-3 = \boxed{\lambda^2-\lambda-5}$$

$$P(A) = \boxed{A^2-A-5I=0}$$

Método de Krylov

Polinomio obtenido de la Ecuación característica.

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

La matriz A es de orden n, por lo cual la sustitución arrojará un sistema de n ecuaciones lineales; en consecuencia, el coeficiente a_0 deberá ser diferente de cero.

$$F(A) = A^n + b_1A^{n-1} + b_2A^{n-2} + \ldots + b_{n-1}A + b_nI = 0$$

Una forma sencilla de realizar este procedimiento es simplificar la elevación de la matriz A a las potencias necesarias. Esto se logra multiplicando la matriz A por un vector v y compatible diferente de cero.

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n \bar{y} + b_1 A^{n-1} \bar{y} + b_2 A^{n-2} \bar{y} + \ldots + b_{n-1} A \bar{y} + b_n \bar{y} I = 0$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A^3 \bar{y} + b_1 A^2 \bar{y} + b_2 A\bar{y} + b_3 \bar{y} = 0$$

$$Ay = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 y = AAy = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 y = A^2 \text{Ay=} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} * b_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} * b_2 + * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-b_1 + b_2 + b_3$=1

=-4

$6b_1 - 2b_2$=4

$$b_1 = 0$$
$$b_2 = -2$$
$$b_3 = 3$$

Ecuación característica: λ^3-2 λ+3=0

MÉTODO DE POTENCIA

Método de Potencias

El método de las potencias ofrece una opción para obtener el mayor y el menor valor característico de la matriz A de orden nxn *sin la necesidad de disponer de la ecuación característica*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(a_{11}-\lambda)X_1 & + & a_{12}X_2 & + & a_{13}X_3 & + & \dots & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\
a_{21}X_1 & + & (a_{22}-\lambda)X_2 & + & a_{23}X_3 & + & \dots & + & a_{2n}X_n & = & b_2 \\
a_{31}X_1 & + & a_{32}X_2 & + & (a_{33}-\lambda)X_3 & + & \dots & + & a_{3n}X_n & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}X_1 & + & a_{n2}X_2 & + & a_{n3}X_3 & + & \dots & + & (a_{nn}-\lambda)X_n & = & b_n
\end{array}
$$

Mayor valor característico

- El método propone utilizar un vector inicial $X(0) \neq 0$ compatible y multiplicarlo por la matriz A.
- El resultado será un nuevo vector X(1)el cual será normalizado utilizando su elemento mayor.
- El *proceso se repetirá* hasta que la diferencia entre dos aproximaciones cumpla con una tolerancia preestablecida.

$$A\bar{X} - \lambda\bar{X} = 0$$

$$A\bar{X} = \lambda\bar{X}$$

Menor valor característico

Para la obtención del menor valor se premultiplicará la matriz inversa y que el factor de normalización representa al recíproco del menor valor característico de la matriz A.

$$A^{-1}A\bar{X} = A^{-1}\lambda\bar{X}$$

$$\bar{X} = A^{-1}\lambda\bar{X}$$

$$\frac{1}{\lambda}\bar{X} = A^{-1}\bar{X}$$

$$A^{-1}\bar{X}_{(k)} = \frac{1}{\lambda_{(k+1)}}\bar{X}_{(k+1)}$$

Ejemplo – Mayor valor característico :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \,.\, X_{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_0 = 2$

$$X_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo – Mayor valor característico :

$$A\,.\,X_{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 3.5 \qquad X_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8571 \\ 0.8571 \end{bmatrix}$$

- Cálculo del error absoluto: $|\lambda_1 - \lambda_0| = 1.5$

	X_0		X_1		X_2		X_3		X_4
	1,00000	2,00000	1,00000	3,50000	1,00000	4,57143	1,00000	4,90625	1,00000
	0,00000	1,00000	0,50000	3,00000	0,85714	4,42857	0,96875	4,87500	0,99363
	0,00000	1,00000	0,50000	3,00000	0,85714	4,42857	0,96875	4,87500	0,99363
$\lambda_{(k)}$		2,00000		3,50000		4,57143		4,90625	
Tol				1,50000		1,07143		0,33482	

Cuadro 2 Iteraciones 4 a 8

	X_4		X_5		X_6		X_7		X_8
	1,00000	4,98089	1,00000	4,99616	1,00000	4,99923	1,00000	4,99985	1,00000
	0,99363	4,97452	0,99872	4,99488	0,99974	4,99898	0,99995	4,99980	0,99999
	0,99363	4,97452	0,99872	4,99488	0,99974	4,99898	0,99995	4,99980	0,99999
$\lambda_{(k)}$		4,98089		4,99616		4,99923		4,99985	
Tol		0,07464		0,01527		0,00307		0,00061	

Cuadro 3 Iteraciones 4 a 8

	X_8		X_9
	1,00000	4,99997	1,00000
	0,99999	4,99996	1,00000
	0,99999	4,99996	1,00000
$\lambda_{(k)}$		4,99997	
Tol		0,00012	

Con una tolerancia de 0.00012

$$\lambda = 4.99997 \approx 5$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO DE CLASE – Menor valor característico :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 8.8 \end{bmatrix} \qquad X_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tolerancia: …

EJERCICIO DE CLASE – Menor valor característico :

	X_0		X_1		X_2		X_3		X_4
	1,00000	0,80000	1,00000	0,95000	1,00000	0,98947	1,00000	0,99787	1,00000
	0,00000	-0,20000	-0,25000	-0,30000	-0,31579	-0,32632	-0,32979	-0,33191	-0,33262
	0,00000	-0,20000	-0,25000	-0,30000	-0,31579	-0,32632	-0,32979	-0,33191	0,33262
$\frac{1}{\lambda_{(k)}}$		0,80000		0,95000		0,98947		0,99787	
Tol				0,15000		0,03947		0,00840	

	X_4		X_5		X_6		X_7
	1,00000	0,99957	1,00000	0,99991	1,00000	0,99998	1,00000
	-0,33262	-0,33305	-0,33319	-0,33328	-0,33330	-0,33332	-0,33333
	-0,33262	-0,33305	-0,33319	-0,33328	-0,33330	-0,33332	-0,33333
$\frac{1}{\lambda_{(k)}}$		0,99957		0,99991		0,99998	
Tol		0,00170		0,00034		0,00007	

$$\left|\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0}\right| = |0{,}95 - 0{,}8| = 0{,}15$$

Con una tolerancia de 0.00007

$$\frac{1}{\lambda} = 0.99998 \; ; \; \lambda = \frac{1}{0.99998} \; ; \; \lambda = 1.00002 \approx 1$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Conclusiones

El método de Potencias, junto con el Método de Krilov, permite obtener, a través de recursos de computo, los resultados característicos de matrices.

Es necesario cumplir con los requisitos específicos del álgebra matricial.

Referencia

1. Douglas Burden, Richard. Faires.Análisis Numérico. 2002.

2. Curtis F. Gerald.Análisis numérico. Segunda edición, 1991.

3. Burden Richard. Faires Douglas.Análisis Numérico. Madrid 2002.

4. Transformaciones Lineales. Valores y Vectores Característicos. Barrera del Rayo Francisco. México 2018.