Suponha que $|f(x)| \leq |x|^k$, com $k > 1$. Calcule, por definição, $f'(0)$.

Resolução:

Observemos inicialmente que $|f(0)| \leq |0|^k = 0$, logo $f(0) = 0$.

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h}$

Como $0 \leq |f(x)| \leq |x|^k$:

(I): $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{0}{h} \leq \lim_{h\to 0^+} \dfrac{|f(h)|}{h} \leq \lim_{h\to 0^+} \dfrac{|h|^k}{h} \ \Rightarrow\ 0 \leq \lim_{h\to 0^+} \dfrac{|f(h)|}{h} \leq 0.$

(II): $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{|h|^k}{h} \leq \lim_{h\to 0^-} \dfrac{|f(h)|}{h} \leq \lim_{h\to 0^-} \dfrac{0}{h} \ \Rightarrow\ 0 \leq \lim_{h\to 0^-} \dfrac{|f(h)|}{h} \leq 0.$

Por (I) e (II), e pelo teorema do confronto, $\lim_{h\to 0} \dfrac{|f(h)|}{h} = 0$.

Se $f(h) \geq 0$, $\lim_{h\to 0} \dfrac{|f(h)|}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h}$.

Se $f(h) < 0$, $\lim_{h\to 0} \dfrac{|f(h)|}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-f(h)}{h} = -\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h}$.

Em ambos os casos, $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 0$, logo $\boxed{f'(0) = 0}$.

Documento compilado em Thursday 13th March, 2025, 10:05, tempo no servidor.

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos): "bit.ly/mathematicalramblings_public".

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com"