Seja $p \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Mostre que

- $p(\overline{\alpha}) = \overline{p(\alpha)}$;
- $p(\alpha) = 0 \iff p(\overline{\alpha}) = 0$;
- Se α é raiz de p, e $p = x^2 + bx + c$, $p = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$.

Resolução:

Primeira sentença:

$$p(\overline{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\overline{\alpha})^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} (\overline{\alpha})^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \alpha^i} = \overline{p(\alpha)} \ \text{(I)}$$

Segunda sentença:

$$p(\alpha) = 0 \iff \underbrace{\overline{p(\alpha)} = p(\overline{\alpha})}_{\text{Por (I).}} = 0 \ \text{(II)}$$

Terceira sentença:

Por D'Alembert, p é divisível por $(x - \alpha)$; por (II), p também é divisível por $(x - \overline{\alpha})$, logo $x^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})q(x)$; comparando os termos em x^2, $q(x) = 1$.

Quod Erat Demonstrandum.

Documento compilado em Thursday 13^{th} March, 2025, 20:50, tempo no servidor.

Sugestões, comunicar erros: "a.vandre.g@gmail.com".