Comprimento de uma curva tridimensional em coordenadas paramétricas.

Seja uma curva no espaço dada por

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

Seja C a soma de todas as distâncias entre os pontos de coordenadas $[f(t_{i+1}), g(t_{i+1}), h(t_{i+1}),]$, e $[f(t_i), g(t_i), h(t_i)]$, $t \in (a, b)$.

$$C = \lim_{N \to 0} \sum \sqrt{[f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 + [g(t_{i+1}) - g(t_i)]^2 + [h(t_{i+1}) - h(t_i)]^2}.$$

Sejam t_{k_i} tais que $t_i \leq t_{k_i} \leq t_{i+1}$. Pelo Teorema do Valor Médio:

$$C = \lim_{N \to 0} \sum \sqrt{[(t_{i+1} - t_i) f'(t_{k_i})]^2 + [(t_{i+1} - t_i) g'(t_{k_i})]^2 + [(t_{i+1} - t_i) h'(t_{k_i})]^2} =$$

$$= \lim_{N \to 0} \sum \sqrt{[f'(t_{k_i})]^2 + [g'(t_{k_i})]^2 + [h'(t_{k_i})]^2} (t_{i+1} - t_i)$$

Logo, pela definição de integral:

$$\boxed{C = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} \, dt}$$

Exemplo:

Seja a helicoidal

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \dfrac{t}{2} \end{cases}.$$

O comprimento dela de $t = 0$ a $t = 2\pi$ é

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{4}} \, dt = \sqrt{5}\pi.$$

Documento compilado em Thursday 13th March, 2025, 20:26, tempo no servidor.

Sugestões, comunicar erros: "a.vandre.g@gmail.com".