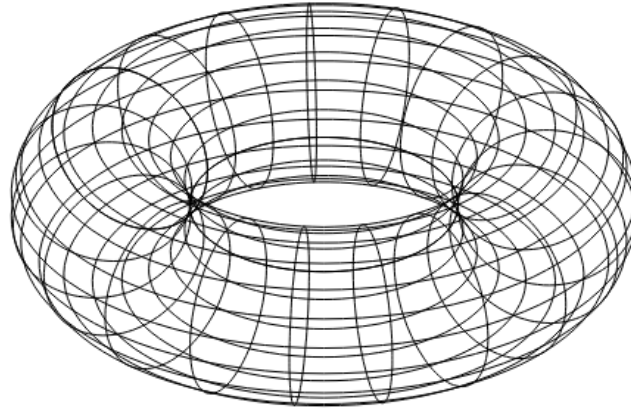


Volume do toro.



O toro é o sólido gerado pela rotação de uma circunferência em torno de um eixo coplanar exterior a ela.

Tomemos uma secção transversal do toro, uma circunferência  $\lambda$  de raio  $r$ , digamos que o raio do toro, a distância do centro da circunferência transversal ao eixo de rotação, seja  $R$ ,  $R > r > 0$ .

Sem perda de generalidade, consideremos o toro com  $\lambda$  no plano  $xOy$  com centro em  $(R, 0)$  e o eixo de rotação  $y$ .

$$\lambda : y = \sqrt{r^2 - (x - R)^2} \vee y = -\sqrt{r^2 - (x - R)^2}$$

Pelo método das cascas cilíndricas:

$$V = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{r^2 - (x - R)^2} dx = 4\pi r \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{1 - \left(\frac{x - R}{r}\right)^2} dx$$

$$\text{Seja } \frac{x - R}{r} = \sin \theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x = r \sin \theta + R, dx = r \cos \theta d\theta.$$

$$V = 4\pi r^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 \theta)(\sin \theta) d\theta + 4\pi r R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$$

$$\text{Seja } u = \cos \theta, du = -\sin \theta d\theta.$$

$$V = -4\pi r^3 \int_0^1 u^2 du + 4\pi r^2 R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} d\theta =$$

$$= 2\pi r^2 R \left[ \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right] =$$

$$= 2\pi r^2 R \cdot \pi$$

$$\boxed{V = 2\pi^2 R r^2}$$

---

Documento compilado em Wednesday 12<sup>th</sup> March, 2025, 21:57, UTC +0.

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com".