Sejam U e W subespaços de dimensões finitas de um espaço vetorial V, mostre que $dim\ (U+W)\ =\ dim\ U\ +\ dim\ W\ -\ dim\ (U\cap W)$.

Sejam $\{u_1,\ldots,u_m\}$ uma base de U e $\{w_1,\ldots,w_n\}$ uma base de W, $\{u_1,\ldots,u_m,w_1,\ldots,w_n\}$ gera $U+W$.

Seja $\{u_{i_1},\ldots,u_{i_p},w_{j_1},\ldots,w_{j_q}\}$ um subconjunto independente maximal de $U+W$, logo

- $dim\ (U+W)\ =\ p+q$

e, além disto,

$\{u_{i_{p+1}},\ldots,u_{i_m},w_{j_{q+1}},w_{j_n}\}$ é uma base de $U\cap W$, logo

- $dim\ (U\cap W) = m-p+n-q$.

Como $p+q=m+n-(m-p+n-q)$, $\boxed{dim\ (U+W)\ =\ dim\ U\ +\ dim\ W\ -\ dim\ (U\cap W)}$.

Quod Erat Demonstrandum.

Documento compilado em Wednesday 12th March, 2025, 23:24, tempo no servidor.

Sugestões, comunicar erros: ”a.vandre.g@gmail.com”.