Desigualdade de Schwarz. Demonstração alternativa.

Sejam u e v vetores do $\mathbb{R}^n$.

$\langle u, v\rangle \leq ||u||||v||$.

Demonstraremos outra afirmação:

Sejam $u = (u_i)_1^n$ e $v = (v_i)_1^n$,

$$\langle u, v\rangle \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq ||u||||v||. \text{ (I)}$$

Se $u = O$ ou $v = O$, a demonstração é imediata. Se não, tomemos $||u||||v|| \neq 0$.

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leq \left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i|. \text{ (II)}$$

Sejam x e y números reais, $0 \leq (x-y)^2 \;\Rightarrow\; 2xy \leq x^2 + y^2$.

Tomando $x = \dfrac{|u_i|}{||u||}$ e $y = \dfrac{|v_i|}{||v||}$:

$$2\frac{|u_i v_i|}{||u||||v||} \leq \frac{|u_i|^2}{||u||^2} + \frac{|v_i|^2}{||v||^2} \;\Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n} \frac{|u_i v_i|}{||u||||v||} \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i^2}{||u||^2} + \frac{v_i^2}{||v||^2}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{||u||^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^2}{||v||^2} = \frac{||u||^2}{||u||^2} + \frac{||v||^2}{||v||^2} = 2 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq ||u||||v||. \text{ (III)}$$

Por (II) e (III) obtermos (I).

Quod Erat Demonstrandum.

Documento compilado em Wednesday 12th March, 2025, 23:02, tempo no servidor.

Sugestões, comunicar erros: ”a.vandre.g@gmail.com”.