Sabe-se que a equação $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10 = 0$ admite as raízes complexas $1 - i$ e $2 + i$. Quais as demais raízes dessa equação?

Resolução:

Seja $P(x) \equiv x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10$.

Dividindo $P(x)$ por $x - (1 - i)$, e, em seguida, por $x - (2 + i)$, utilizando Briot-Ruffini:

1 - i	1	-6	15	-18	10
2 + i	1	-5 - i	9 + 4i	-5 - 5i	0
	1	-3	3 + i	0	

Logo as raízes procuradas serão as raízes de $x^2 - 3x + (3 + i)$.

$\Delta = 9 - 12 - 4i = -3 - 4i$

Para extrair as raízes quadradas de $-3-4i$ vamos o por em sua forma trigonométrica:

$$5(\cos \arccos -\frac{3}{5} + i \cdot \sin \arcsin -\frac{4}{5})$$

Seja θ o argumento de uma das raízes quadradas, a de menor argumento, (observemos que, se 2θ pertence ao terceiro quadrante (seno negativo e cosseno negativo), θ será um arco do segundo quadrante):

$$-\frac{3}{5} = 2\cos^2\theta - 1 \;\Rightarrow\; \cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - (-\frac{\sqrt{5}}{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Chamando de R_1 e R_2 as raízes quadradas de $-3 - 4i$, teremos:

$$R_1 = \sqrt{5}(-\frac{\sqrt{5}}{5} + i \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}) = -1 + 2i$$

$$R_2 = 1 - 2i$$

Continuando a resolução de $x^2 - 3x + (3 + i) = 0$:

$$x' = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$x'' = \frac{3 + 1 - 2i}{2} = 2 - i$$

Logo as raízes procuradas são $\boxed{1 + i}$ e $\boxed{2 - i}$.

Documento compilado em Wednesday 12th March, 2025, 23:28, UTC +0.

Comunicar erro: ”a.vandre.g@gmail.com”.