Seja V o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que V é espaço vetorial. Mostre também que W, o conjunto de todas as funções contínuas, é sub-espaço de V. Mostre também que U, o conjunto das funções diferenciáveis, é sub-espaço de W.

Resolução:

Sejam f, g e h funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e a e b escalares reais (os reais são um corpo).

$$\begin{array}{ll} (f+g)+h = f+(g+h) & 0+f = f+0 = f \\ f+(-1)f = 0 & f+g = g+f \\ a(f+g) = af+ag & (a+b)f = af+bf \\ (ab)f = a(bf) & 1f = f \end{array}$$

Logo V é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Observemos que, se f e g são contínuas, então $f+g$ será contínua, e que, sendo a um escalar real, af também será contínua. Observemos também que a função constante 0 também é contínua.

Logo W é sub-espaço de V.

Sendo f e g diferenciáveis, $f+g$ também é diferenciável. Sendo a um escalar real, af também é diferenciável. A função nula 0 também é diferenciável.

Logo U é sub-espaço de W (e também de V).

Quod Erat Demonstrandum.

Documento compilado em Wednesday 12th March, 2025, 23:40, tempo no servidor.

Sugestões, comunicar erros: ”a.vandre.g@gmail.com”.