Encontre a representação em série e o intervalo de convergência de $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$.

Resolução:

Primeiramente vamos obter uma expressão da série geométrica, com a qual sabemos trabalhar; para isto, vamos integrar $f(x)$ duas vezes:

$\int\int \dfrac{1}{(1+x)^3}\ dx\ dx\ =\ \int(-\dfrac{1}{2(1+x)^2} + c_1)\ dx\ =$

$=\ \dfrac{1}{2(1+x)} + c_1 x + c_2\ =\ \dfrac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n)\ +\ c_1 x +\ c_2,\ |x| < 1$

Como houveram duas integrações, vamos derivar duas vezes a fim de obter uma expressão para $f(x)$:

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} + c_1$

$f(x) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}$

Fazendo uma reindexação:

$\boxed{\dfrac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+2)(n+1)x^n}{2},\ -1 < x < 1}$

Documento compilado em Saturday 15$^{\text{th}}$ March, 2025, 12:47, UTC +0.

Comunicar erro: ”a.vandre.g@gmail.com”.