

Projeto Mathematical Ramblings

mathematicalramblings.blogspot.com

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Mostre que f é contínua em $x = 0$ e descontínua para todo $x \neq 0$.

Resolução:

Observemos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, logo f é contínua em $x = 0$.

Vamos agora supor que exista um $a \neq 0$ tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, ou seja,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(a)| < \epsilon \Rightarrow |x - a| < \delta.$$

Vamos supor que a seja racional.

Tomando $x = a + b$, $(a + b) \notin \mathbb{Q}$ e $\epsilon = |a|$, não existe δ que satisfaça a condição para um dado b suficientemente pequeno.

Analogamente tomando a irracional e b tal que $(a + b)$ seja racional.

C.Q.D.

Documento compilado em Tuesday 27th April, 2021, 13:14, tempo no servidor.

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos):
"bit.ly/mathematicalramblings_public".

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com".