Seja $f: \mathbb{R} \to [a, +\infty[$, contínua e suponha que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$. Prove que

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = L.$$

Resolução:

Seja $F$ uma primitiva de $f$.

$\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$, que chamaremos de $Q$.

$$\lim_{b \to +\infty} \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = Q$$

$$\lim_{a \to b} \lim_{b \to +\infty} \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \lim_{a \to b} Q$$

$$\lim_{b \to +\infty} \lim_{a \to b} \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = Q$$

$$\lim_{b \to +\infty} f(b) = Q$$

$$L = Q$$

C.Q.D.


---

Documento compilado em Wednesday 12th March, 2025, 22:19, tempo no servidor.

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos): "bit.ly/mathematicalramblings_public".

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com".