Comprimento do gráfico de uma função polinomial.

Seja o polinômio $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_n \neq 0$, de domínio real.

Vamos encontrar o comprimento do seu gráfico no intervalo $[a, b]$. Para tal, do Cálculo, temos a fórmula, que nos dá o comprimento de uma função f diferenciável, e de derivada contínua, qualquer, no intervalo $[a, b]$:

$L(\lambda) \ = \ \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$

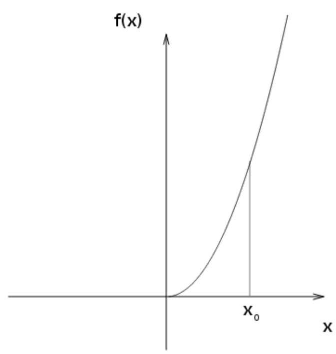
Assim:

$L \ = \ \int_a^b \sqrt{1 + (d\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{dx})^2}\ dx$

$\boxed{L \ = \ \int_a^b \sqrt{1 + (\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i)^2}\ dx}$

Exemplo:

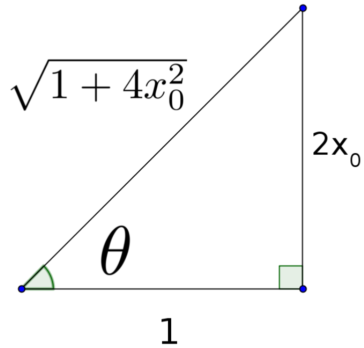
Seja $P(x) = x^2$ e o intervalo $[0, x_0]$:



$L \ = \ \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (2x)^2}\ dx$

Seja $x = \frac{\tan\theta}{2},\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ dx \ = \ \frac{\sec^2 x}{2}\ d\theta.$

$L \ = \ \int_0^{\arctan 2x_0} \frac{\sec^3\theta}{2}\ d\theta \ = \ (\frac{\ln|\sec\theta + \tan\theta| + (\sec\theta)(\tan\theta)}{4})\ |_0^{\arctan 2x_0}$



$$L = \frac{\ln|\sqrt{1+4x_0^2}+2x_0| + 2x_0\sqrt{1+4x_0^2}}{4}$$

Seja, por exemplo, $x_0 = 2$:

$$L = \frac{\ln|\sqrt{17}+4| + 4\sqrt{17}}{4} \approx 4,6468$$

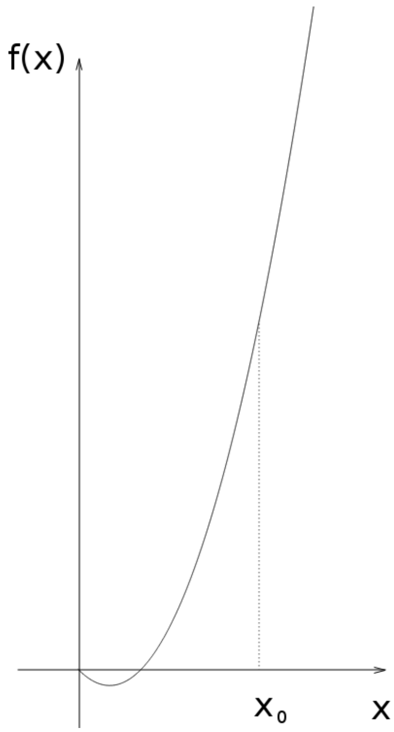
Agora, por exemplo, $x_0 = 3$:

$$L = \frac{\ln|\sqrt{37}+6| + 6\sqrt{37}}{4} \approx 9,7471$$

Abaixo, em uma tabela, mais pares de valores de x_0 e L aproximado para $P(x) = x^2$:

P(x) = x^2	
x_0	L
4	16,81863357
5	25,87424479
6	36,9197301
7	49,95821036
8	64,99155593
9	82,02097611
10	101,0472979
11	122,0711119
12	145,0928545

Seja agora, como outro exemplo, $P(x) = x^2 - x$ e o intervalo $[0, x_0]$:



Com um pouco de trabalho ou utilizando uma calculadora ou software, pode-se chegar a:

$$L = \frac{8x_0^3\sqrt{u} + 4x_0^2 \ln|2x_0 - 1 + \sqrt{u}|}{16x_0^2 - 16x_0 + 8} -$$
$$- \frac{12x_0^2\sqrt{u} - 4x_0 \ln|2x_0 - 1 + \sqrt{u}|}{16x_0^2 - 16x_0 + 8} +$$
$$+ \frac{8x_0\sqrt{u} + 2\ln|2x_0 - 1| + \sqrt{u} - 2\sqrt{u}}{16x_0^2 - 16x_0 + 8} -$$
$$- \frac{\ln(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}}{4}$$

Com $u = 4x_0^2 - 4x_0 + 2$.

Construindo a tabela com auxílio de um software:

P(x) = x^2 – x	
x_0	L
1	1,147793575
2	2,82631986
3	6,951883977
4	13,03539886
5	21,09797756
6	31,14801835
7	43,18970877
8	57,22543808
9	73,25669817

Documento compilado em Thursday 13th March, 2025, 20:52, (tempo no servidor).

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos): "bit.ly/mathematicalramblings_public".

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com".