

Sabe-se que a equação  $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10 = 0$  admite as raízes complexas  $1 - i$  e  $2 + i$ . Quais as demais raízes dessa equação?

Resolução:

Seja  $P(x) \equiv x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10$ .

Dividindo  $P(x)$  por  $x - (1 - i)$ , e, em seguida, por  $x - (2 + i)$ , utilizando Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 - i & 1 & -6 & 15 & -18 & 10 \\ 2 + i & 1 & -5 - i & 9 + 4i & -5 - 5i & 0 \\ & 1 & -3 & 3 + i & 0 & \end{array}$$

Logo as raízes procuradas serão as raízes de  $x^2 - 3x + (3 + i)$ .

$$\Delta = 9 - 12 - 4i = -3 - 4i$$

Para extrair as raízes quadradas de  $-3 - 4i$  vamos o por em sua forma trigonométrica:

$$5\left(\cos \arccos -\frac{3}{5} + i \cdot \sin \arcsin -\frac{4}{5}\right)$$

Seja  $\theta$  o argumento de uma das raízes quadradas, a de menor argumento, (observemos que, se  $2\theta$  pertence ao terceiro quadrante (seno negativo e cosseno negativo),  $\theta$  será um arco do segundo quadrante):

$$-\frac{3}{5} = 2 \cos^2 \theta - 1 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Chamando de  $R_1$  e  $R_2$  as raízes quadradas de  $-3 - 4i$ , teremos:

$$R_1 = \sqrt{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5} + i \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -1 + 2i$$

$$R_2 = 1 - 2i$$

Continuando a resolução de  $x^2 - 3x + (3 + i) = 0$ :

$$x' = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$x'' = \frac{3 + 1 - 2i}{2} = 2 - i$$

Logo as raízes procuradas são  $\boxed{1 + i}$  e  $\boxed{2 - i}$ .

Documento compilado em Thursday 13<sup>th</sup> March, 2025, 20:47, UTC +0.

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com".