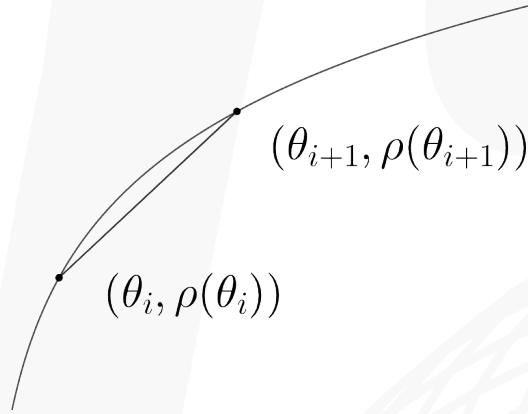


# Projeto Mathematical Ramblings

mathematicalramblings.blogspot.com

## Comprimento do gráfico de uma função em coordenadas polares.

Seja  $\rho(\theta)$  uma função diferenciável no intervalo  $(a, b)$ , chamando de  $C$  seu comprimento quando  $\theta$  varia de  $a$  a  $b$ :



$$C = \lim_{N \rightarrow 0} \sum \sqrt{\{[\rho(\theta_{i+1})] [\cos(\theta_{i+1})] - [\rho(\theta_i)] [\cos(\theta_i)]\}^2 + \{[\rho(\theta_{i+1})] [\sin(\theta_{i+1})] - [\rho(\theta_i)] [\sin(\theta_i)]\}^2}$$

Sejam  $\theta_{k_i}$  tais que  $\theta_i \leq \theta_{k_i} \leq \theta_{i+1}$ , pelo TVM (Teorema do Valor Médio):

$$\begin{aligned} C &= \lim_{N \rightarrow 0} \sum \sqrt{\{(\theta_{i+1} - \theta_i) [\rho'(\theta_{k_i}) \cos \theta_{k_i} - \rho(\theta_{k_i}) \sin \theta_{k_i}]\}^2 + \{(\theta_{i+1} - \theta_i) [\rho'(\theta_{k_i}) \sin \theta_{k_i} + \rho(\theta_{k_i}) \cos \theta_{k_i}]\}^2} = \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} \sum \sqrt{[\rho'(\theta_{k_i}) \cos \theta_{k_i} - \rho(\theta_{k_i}) \sin \theta_{k_i}]^2 + [\rho'(\theta_{k_i}) \sin \theta_{k_i} + \rho(\theta_{k_i}) \cos \theta_{k_i}]^2} (\theta_{i+1} - \theta_i) \end{aligned}$$

Logo, pela definição de integral:

$$C = \int_a^b \sqrt{[\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta]^2 + [\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta]^2} d\theta$$

Exemplo: seja  $\rho(\theta) = 1$ ,  $a = 0$  e  $b = 2\pi$  (o ciclo trigonométrico):

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

---

Documento compilado em Thursday 12<sup>th</sup> December, 2024, 12:24, tempo no servidor.

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos):

"bit.ly/mathematicalramblings\_public".

Sugestões, comunicar erros: "a.vandre.g@gmail.com".

Licença de uso:



Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual (CC BY-NC-SA).