Projeto Mathematical Ramblings

mathematicalramblings.blogspot.com

Mostre que a função *característica dos racionais*, definida por

$$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ se } x \not\in \mathbb{Q} \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos.

Resolução:

Vamos supor que existe um p tal que $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ é contínua em p, ou seja, $\lim_{x\to p} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(p)$, ou seja, pela definição de limite, $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ |x-p| < \delta\ \Rightarrow\ |\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) - \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(p)| < \epsilon$.

Seja p racional, Se x for irracional, não existe δ para $\epsilon = \dfrac{1}{2}$.

Analogamente, se p é irracional, e se x for racional, não existe δ para $\epsilon = \dfrac{1}{2}$.

Logo, por absurdo, $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ é descontínua em todos os pontos.

Documento compilado em Saturday 13$^{\text{th}}$ March, 2021, 14:15, tempo no servidor.

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos): ”bit.ly/mathematicalramblings_public”.

Comunicar erro: ”a.vandre.g@gmail.com”.