Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $\begin{cases} x, \text{ se } x\in\mathbb{Q} \\ -x, \text{ se } x \not\in\mathbb{Q} \end{cases}$. Mostre que f é contínua em $x=0$ e descontínua para todo $x\neq 0$.

Resolução:

Observemos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, logo f é contínua em $x=0$.

Vamos agora supor que exista um $a\neq 0$ tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, ou seja,

$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0 : |f(x)-f(a)|<\epsilon \;\Rightarrow\; |x-a|<\delta$.

Vamos supor que a seja racional.

Tomando $x = a+b$, $(a+b) \not\in\mathbb{Q}$ e $\epsilon = |a|$, não existe δ que satisfaça a condição para um dado b suficientemente pequeno.

Analogamente tomando a irracional e b tal que $(a+b)$ seja racional.

C.Q.D.

Documento compilado em Thursday 13$^{\text{th}}$ March, 2025, 04:03, tempo no servidor.

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com".