Coleção Mathematical Ramblings

https://sites.google.com/site/mathematicalramblings/

Exercício - ondulatória - harmônicos coincidentes.

Texto para as duas questões.

Uma pessoa cuja capacidade de audição vai de 20 Hz a 20 kHz, ouve os sons produzidos simultaneamente por dois tubos sonoros: um aberto, de comprimento 42 cm, soprado com ar, e outro fechado, de comprimento 100 cm, soprado com hidrogênio. A pessoa verifica que algumas frequências podem ser produzidas simultaneamente pelos dois tubos. A velocidade do som no ar é $v_{ar} = 336\ m/s$ e a velocidade do som no hidrogênio é $v_H = 1280\ m/s$.

(FEI-SP) A menor frequência comum aos dois tubos que a pessoa ouve é:

a) 20 Hz b) 400 Hz c) 800 Hz d) 1600 Hz e) n.d.a.

(FEI-SP) O som mais agudo, produzido simultaneamente pelos dois tubos, que pode ser ouvido pela pessoa, tem frequência:

a) 1600 Hz

b) 3200 Hz

c) 17600 Hz

d) 19200 Hz

e) n.d.a.

Resolução:

Como ambos os tubos produzirão a mesma frequência, teremos a equação:

$$n_1 \cdot \frac{v_{ar}}{2\ell_{ar}} = n_2 \cdot \frac{v_H}{4\ell_H} \qquad [1]$$

Onde ℓ_{ar} é o comprimento do tubo preenchido com ar, ℓ_H é o comprimento do tubo preenchido com hidrogênio, n_1 é a ordem do harmônico do primeiro tubo e n_2 é a ordem do harmônico do segundo tubo.

Substituindo os valores em [1]:

$$n_1 \cdot 400 = n_2 \cdot 320 \qquad [2]$$

Cada membro da equação acima nos dá a frequência comum procurada. Para encontrá-la precisamos um inteiro qualquer n_1 e um inteiro ímpar n_2 que a satisfaça.

De [2] podemos concluir:

$n_1 \ = \ 0,8 \ \cdot \ n_2 \qquad [3]$

Assim temos que encontrar o menor ímpar n_2 que multiplicado por $0,8$ dê um inteiro. Tal número é 5.

De [2], concluímos que a menor frequência procurada será:

$f_m \ = \ 5 \ \cdot \ 320 \ = \ 1600 \ Hz$

Logo, para a primeira questão, a alternativa correta é a D.

...

Como a maior frequência audível é 20000 Hz, o n_2 deve ser tal que:

$n_2 \ \leq \ \frac{20000}{320} \ = \ 62,5$

Assim, por tentativas, devemos encontrar o máximo inteiro ímpar $n_2 \ \leq \ 61$ que, pela expressão [3], nos forceça um n_1 inteiro:

Para $n_2 \ = \ 61$ teremos $n_1 \ = \ 48,8$. Não serve.

Para $n_2 \ = \ 59$ teremos $n_1 \ = \ 47,2$. Não serve.

Para $n_2 \ = \ 57$ teremos $n_1 \ = \ 45,6$. Não serve.

Para $n_2 \ = \ 55$ teremos $n_1 \ = \ 44$. Encontramos.

Assim, a máxima frequência comum será no quadragésimo-quarto harmônico do primeiro tubo:

$f_M \ = \ 44 \ \cdot 400 \ = \ 17600 \ Hz$

Logo, para a segunda questão, a alternativa correta é a C.