

Projeto Mathematical Ramblings

mathematicalramblings.blogspot.com

Comprimento de uma curva tridimensional em coordenadas paramétricas.

Seja uma curva no espaço dada por

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

Seja C a soma de todas as distâncias entre os pontos de coordenadas $[f(t_{i+1}), g(t_{i+1}), h(t_{i+1})]$, e $[f(t_i), g(t_i), h(t_i)]$, $t \in (a, b)$.

$$C = \lim_{N \rightarrow 0} \sum \sqrt{[f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 + [g(t_{i+1}) - g(t_i)]^2 + [h(t_{i+1}) - h(t_i)]^2}.$$

Sejam t_{k_i} tais que $t_i \leq t_{k_i} \leq t_{i+1}$. Pelo Teorema do Valor Médio:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{N \rightarrow 0} \sum \sqrt{[(t_{i+1} - t_i)f'(t_{k_i})]^2 + [(t_{i+1} - t_i)g'(t_{k_i})]^2 + [(t_{i+1} - t_i)h'(t_{k_i})]^2} = \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} \sum \sqrt{[f'(t_{k_i})]^2 + [g'(t_{k_i})]^2 + [h'(t_{k_i})]^2} (t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Logo, pela definição de integral:

$$C = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

Exemplo:

Seja a helicoidal

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{t}{2} \end{cases}.$$

O comprimento dela de $t = 0$ a $t = 2\pi$ é

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{4}} dt = \sqrt{5}\pi.$$

Documento compilado em Wednesday 5th June, 2024, 17:03, tempo no servidor.

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos):
”bit.ly/mathematicalramblings_public”.

Sugestões, comunicar erros: ”a.vandre.g@gmail.com”.

Licença de uso:    Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual (CC BY-NC-SA).