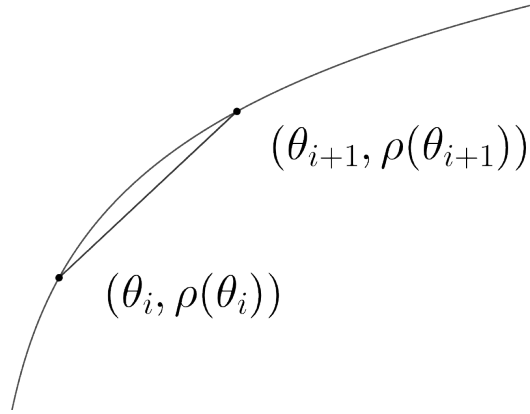


Projeto Mathematical Ramblings

mathematicalramblings.blogspot.com

Comprimento do gráfico de uma função em coordenadas polares.

Seja $\rho(\theta)$ uma função diferenciável no intervalo (a, b) , chamando de C seu comprimento quando θ varia de a a b :



$$C = \lim_{N \rightarrow 0} \sum \sqrt{\{[\rho(\theta_{i+1})][\cos(\theta_{i+1})] - [\rho(\theta_i)][\cos(\theta_i)]\}^2 + \{[\rho(\theta_{i+1})][\sin(\theta_{i+1})] - [\rho(\theta_i)][\sin(\theta_i)]\}^2}$$

Sejam θ_{k_i} tais que $\theta_i \leq \theta_{k_i} \leq \theta_{i+1}$, pelo TVM (Teorema do Valor Médio):

$$\begin{aligned} C &= \lim_{N \rightarrow 0} \sum \sqrt{\{(\theta_{i+1} - \theta_i)[\rho'(\theta_{k_i}) \cos \theta_{k_i} - \rho(\theta_{k_i}) \sin \theta_{k_i}]\}^2 + \{(\theta_{i+1} - \theta_i)[\rho'(\theta_{k_i}) \sin \theta_{k_i} + \rho(\theta_{k_i}) \cos \theta_{k_i}]\}^2} = \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} \sum \sqrt{[\rho'(\theta_{k_i}) \cos \theta_{k_i} - \rho(\theta_{k_i}) \sin \theta_{k_i}]^2 + [\rho'(\theta_{k_i}) \sin \theta_{k_i} + \rho(\theta_{k_i}) \cos \theta_{k_i}]^2} (\theta_{i+1} - \theta_i) \end{aligned}$$

Logo, pela definição de integral:

$$C = \int_a^b \sqrt{[\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta]^2 + [\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta]^2} d\theta$$

Exemplo: seja $\rho(\theta) = 1$, $a = 0$ e $b = 2\pi$ (o ciclo trigonométrico):

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Documento compilado em Wednesday 5th June, 2024, 15:48, tempo no servidor.

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos):
"bit.ly/mathematicalramblings-public".

Sugestões, comunicar erros: "a.vandre.g@gmail.com".

Licença de uso:    Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual (CC BY-NC-SA).