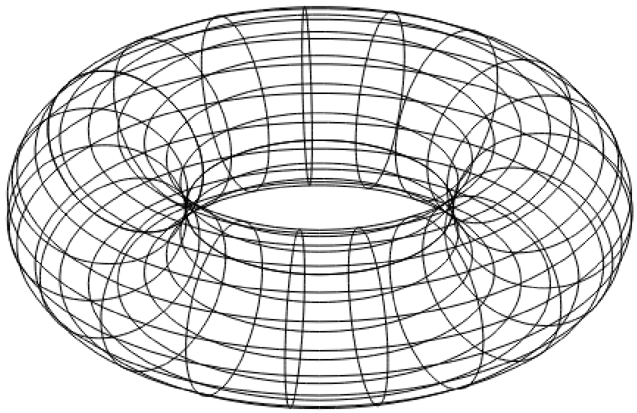
Projeto Mathematical Ramblings

mathematicalramblings.blogspot.com

Volume do toro.



O toro é o sólido gerado pela rotação de uma circunferência em torno de um eixo coplanar exterior a ela.

Tomemos uma secção transversal do toro, uma circunferência λ de raio r, digamos que o raio do toro, a distância do centro da circunferência transversal ao eixo de rotação, seja R, $R > r > 0$.

Sem perda de generalidade, consideremos o toro com λ no plano xOy com centro em $(R, 0)$ e o eixo de rotação y.

$\lambda: \ y = \sqrt{r^2 - (x-R)^2} \ \vee \ y = -\sqrt{r^2 - (x-R)^2}$

Pelo método das cascas cilíndricas:

$V \ = \ 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x\sqrt{r^2 - (x-R)^2} \ dx \ = \ 4\pi r \int_{R-r}^{R+r} x\sqrt{1 - (\frac{x-R}{r})^2} \ dx$

Seja $\dfrac{x-R}{r} = \sin\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x = r\sin\theta + R$, $dx \ = \ r\cos\theta \ d\theta$.

$V = 4\pi r^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2\theta)(\sin\theta) \ d\theta \ + \ 4\pi r R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \ d\theta$

Seja $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta \ d\theta$.

$V \ = \ -4\pi r^3 \int_0^0 u^2 \ du \ + \ 4\pi r^2 R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{\cos(2\theta) + 1}{2} \ d\theta \ =$

$= 2\pi r^2 R[(\dfrac{\sin 2\theta}{2})|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \theta|_{-\pi/2}^{\pi/2}] =$

$= 2\pi r^2 R \cdot \pi$

$\boxed{V = 2\pi^2 R r^2}$

Documento compilado em Monday 3rd February, 2020, 12:40, UTC +0.

Comunicar erro: ”a.vandre.g@gmail.com”.