

Suponha que $|f(x)| \leq |x|^k$, com $k > 1$. Calcule, por definição, $f'(0)$.

Resolução:

Observemos inicialmente que $|f(0)| \leq |0|^k = 0$, logo $f(0) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$$

Como $0 \leq |f(x)| \leq |x|^k$:

$$(I): \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(h)|}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|^k}{h} \Rightarrow 0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(h)|}{h} \leq 0.$$

$$(II): \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|^k}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(h)|}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} \Rightarrow 0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(h)|}{h} \leq 0.$$

Por (I) e (II), e pelo teorema do confronto, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(h)|}{h} = 0$.

$$\text{Se } f(h) \geq 0, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(h)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}.$$

$$\text{Se } f(h) < 0, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(h)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(h)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}.$$

Em ambos os casos, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$, logo $\boxed{f'(0) = 0}$.

Documento compilado em Thursday 13th March, 2025, 21:06, tempo no servidor.

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos):
”bit.ly/mathematicalramblings_public”.

Comunicar erro: ”a.vandre.g@gmail.com”