Comprimento de uma curva tridimensional dada por coordenadas paramétricas.

Sejam $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ três funções diferenciáveis no intervalo (a,b), chamando de C o comprimento da curva $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ quando t varia de a a b:

$$C = \lim_{N \to 0} \sum \sqrt{\left[f(t_{i+1}) - f(t_i)\right]^2 + \left[g(t_{i+1}) - g(t_i)\right]^2 + \left[h(t_{i+1}) - h(t_i)\right]^2}$$

Sejam t_{k_1}, t_{k_2}, e t_{k_3} tais que que $t_i \leq t_{k_1} \leq t_{i+1}$, $t_i \leq t_{k_2} \leq t_{i+1}$ e $t_i \leq t_{k_3} \leq t_{i+1}$, pelo TVM (Teorema do Valor Médio):

$$C = \lim_{N \to 0} \sum \sqrt{\left[f'(t_{k_1})\right]^2 + \left[g'(t_{k_2})\right]^2 + \left[h'(t_{k_3})\right]^2}(t_{i+1} - t_i)$$

Logo, pela definição de integral:

$$\boxed{C = \int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2 + \left[h'(t)\right]^2}\ dt}$$

Documento compilado em Thursday 13th March, 2025, 20:25, tempo no servidor.

Sugestões, comunicar erros: ”a.vandre.g@gmail.com”.