Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ é convergente.

Resolução:

Observemos que, para $n > 1$, $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$, tendo ambas as séries termos não negativos, assim podemos usar o teste da comparação:

Se $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ também converge.

$\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$ tendo termos não negativos e não crescentes, podemos usar o teste da integral:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} \ = \ 2 \int_2^{+\infty} \frac{2dx}{(2x-1)^2 - 1}$$

Seja $u = 2x - 1$, $du = 2dx$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{2dx}{(2x-1)^2 - 1} = \int_3^{+\infty} \frac{du}{u^2 - 1}$$

Seja $u = \sec\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $du = (\sec\theta)(\tan\theta)d\theta$:

$$\int_3^{+\infty} \frac{du}{u^2 - 1} \ = \ \int_{\arccos\frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \csc\theta \ d\theta \ = \ \ln|\csc\theta - \cot\theta|\Big|_{\arccos\frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \ = \ I, \ I \in \mathbb{R}$$

Como a integral imprópria converge, $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge, assim $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ também converge.

Documento compilado em Thursday 13$^{\text{th}}$ March, 2025, 20:55, UTC +0.

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com".