Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\begin{cases} x, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ -x, \text{ se } x \not\in \mathbb{Q} \end{cases}$. Mostre que f é contínua em $x = 0$ e descontínua para todo $x \neq 0$.

Resolução:

Observemos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, logo f é contínua em $x = 0$.

Vamos agora supor que exista um $a \neq 0$ tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja,

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(a)| < \epsilon \ \Rightarrow \ |x - a| < \delta$.

Vamos supor que a seja racional.

Tomando $x = a + b$, $(a + b) \not\in \mathbb{Q}$ e $\epsilon = |a|$, não existe δ que satisfaça a condição para um dado b suficientemente pequeno.

Analogamente tomando a irracional e b tal que $(a + b)$ seja racional.

C.Q.D.

Documento compilado em Thursday 13th March, 2025, 20:59, tempo no servidor.

Comunicar erro: ”a.vandre.g@gmail.com”.