

Encontre a representação em série e o intervalo de convergência de $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$.

Resolução:

Primeiramente vamos obter uma expressão da série geométrica, com a qual sabemos trabalhar; para isto, vamos integrar $f(x)$ duas vezes:

$$\begin{aligned} \int \int \frac{1}{(1+x)^3} dx dx &= \int \left(-\frac{1}{2(1+x)^2} + c_1 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2(1+x)} + c_1 x + c_2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) + c_1 x + c_2, |x| < 1 \end{aligned}$$

Como houveram duas integrações, vamos derivar duas vezes afim de obter uma expressão para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} + c_1 \\ f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^{n-2} \end{aligned}$$

Fazendo uma reindexação:

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)x^n}{2}, -1 < x < 1$$

Documento compilado em Wednesday 12th March, 2025, 21:54, UTC +0.

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com".