Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x)$ é constante para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Suponhamos que $f(x)$ não seja constante, ou seja, existem a e b reais tais que $f(a) \neq f(b)$. Sem perda de generalidade suponhamos que $f(a) < f(b)$.

Sendo f contínua, existe um real c tal que $f(a) < f(c) < f(b)$ e $f(c) \in \mathbb{Q}'$, o que é um absurdo, pois, por hipótese, $f(x) \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo f é constante.

Documento compilado em Wednesday 12$^{\text{th}}$ March, 2025, 23:19, UTC +0.

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos): "bit.ly/mathematicalramblings_public".

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com".