Comprimento de uma curva dada por coordenadas paramétricas.

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções diferenciáveis no intervalo (a, b), chamando de C o comprimento da curva $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ quando t varia de a a b:

$$C = \lim_{N \to 0} \sum \sqrt{[f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 + [g(t_{i+1}) - g(t_i)]^2}$$

Sejam t_{k_1} e t_{k_2} tais que que $t_i \leq t_{k_1} \leq t_{i+1}$ e $t_i \leq t_{k_2} \leq t_{i+1}$, pelo TVM (Teorema do Valor Médio):

$$C = \lim_{N \to 0} \sum \sqrt{[f'(t_{k_1})]^2 + [g'(t_{k_2})]^2}(t_{i+1} - t_i)$$

Logo, pela definição de integral:

$$\boxed{C = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\ dt}$$

Exemplo: sejam $f(t) = \cos t$, $g(t) = \sin t$, $a = 0$ e $b = 2\pi$ (o ciclo trigonométrico):

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\ dt = t|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Documento compilado em Thursday 13th March, 2025, 20:25, tempo no servidor.

Sugestões, comunicar erros: ”a.vandre.g@gmail.com”.