Lema: se $\{v_1, ..., v_m\}$ é uma base de V, $\{w_1, ..., w_n\}$, com $n > m$ é linearmente dependente.

Se $\{w_1, ..., w_m\}$ é linearmente dependente, o lema já está demonstrado. Caso não, seja

$$w_i = a_1 v_1 + ... + a_i v_i + ... + a_m v_m,\ i \leq m\ \Rightarrow\ v_i = a_i^{-1} w_i - \sum_{j \neq i} a_i^{-1} a_j v_j,\ i, j \leq m,\ a_i \neq 0.$$

Donde concluímos que $\{w_i, (v_j)_{j \neq i}\},\ i, j \leq m$ gera V.

Seja agora $r,\ 1 \leq r < m$,

$$w_j = \sum_{i=1}^{r} b_i w_i + \sum_{i=r+1}^{m} a_i v_i,\ j > r\ \Rightarrow\ v_j = -\sum_{i=1}^{r} a_j^{-1} b_i w_i - \sum_{i=r+1, i \neq j}^{m} a_j^{-1} a_i v_i + a_j^{-1} w_j,\ j > r,\ a_j \neq 0.$$

Donde concluímos que $w_1, ..., w_m$ gera V.

Concluímos também que

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i,\ \forall j > m.$$

Donde concluímos que $\{w_1, ..., w_n\}$ é linearmente dependente.

Teorema: todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita tem o mesmo número de elementos.

De acordo com o lema anterior, não podemos ter $n > m$ e nem $m > n$, logo $m = n$.

Documento compilado em Thursday 13th March, 2025, 21:03, tempo no servidor.

Sugestões, comunicar erros: "a.vandre.g@gmail.com".