

Projeto Mathematical Ramblings

mathematicalramblings.blogspot.com

Comprimento do gráfico de uma função polinomial.

Seja o polinômio $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_n \neq 0$, de domínio real.

Vamos encontrar o comprimento do seu gráfico no intervalo $[a, b]$. Para tal, do Cálculo, temos a fórmula, que nos dá o comprimento de uma função f diferenciável, e de derivada contínua, qualquer, no intervalo $[a, b]$:

$$L(\lambda) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

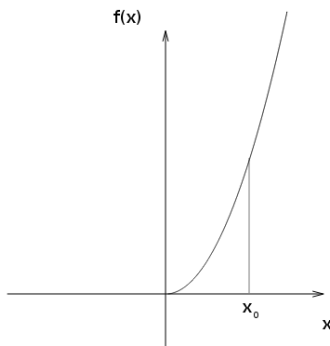
Assim:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(d \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{dx}\right)^2} dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i)^2} dx$$

Exemplo:

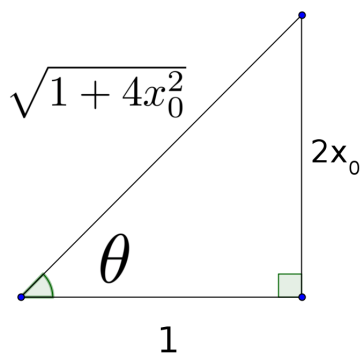
Seja $P(x) = x^2$ e o intervalo $[0, x_0]$:



$$L = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

$$\text{Seja } x = \frac{\tan \theta}{2}, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), dx = \frac{\sec^2 \theta}{2} d\theta.$$

$$L = \int_0^{\arctan 2x_0} \frac{\sec^3 \theta}{2} d\theta = \left(\frac{\ln |\sec \theta + \tan \theta| + (\sec \theta)(\tan \theta)}{4} \right) \Big|_0^{\arctan 2x_0}$$



$$L = \frac{\ln |\sqrt{1 + 4x_0^2} + 2x_0| + 2x_0 \sqrt{1 + 4x_0^2}}{4}$$

Seja, por exemplo, $x_0 = 2$:

$$L = \frac{\ln |\sqrt{17} + 4| + 4\sqrt{17}}{4} \approx 4,6468$$

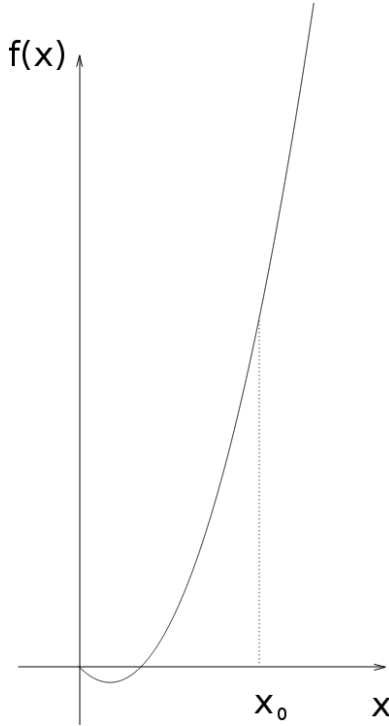
Agora, por exemplo, $x_0 = 3$:

$$L = \frac{\ln |\sqrt{37} + 6| + 6\sqrt{37}}{4} \approx 9,7471$$

Abaixo, em uma tabela, mais pares de valores de x_0 e L aproximado para $P(x) = x^2$:

P(x) = x ²	
x ₀	L
4	16,81863357
5	25,87424479
6	36,9197301
7	49,95821036
8	64,99155593
9	82,02097611
10	101,0472979
11	122,0711119
12	145,0928545

Seja agora, como outro exemplo, $P(x) = x^2 - x$ e o intervalo $[0, x_0]$:



Com um pouco de trabalho ou utilizando uma calculadora ou software, pode-se chegar a:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{8x_0^3\sqrt{u} + 4x_0^2 \ln |2x_0 - 1 + \sqrt{u}|}{16x_0^2 - 16x_0 + 8} - \\
 & - \frac{12x_0^2\sqrt{u} - 4x_0 \ln |2x_0 - 1 + \sqrt{u}|}{16x_0^2 - 16x_0 + 8} + \\
 & + \frac{8x_0\sqrt{u} + 2 \ln |2x_0 - 1| + \sqrt{u} - 2\sqrt{u}}{16x_0^2 - 16x_0 + 8} - \\
 & - \frac{\ln(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

Com $u = 4x_0^2 - 4x_0 + 2$.

Construindo a tabela com auxílio de um software:

$P(x) = x^2 - x$	
x_0	L
1	1,147793575
2	2,82631986
3	6,951883977
4	13,03539886
5	21,09797756
6	31,14801835
7	43,18970877
8	57,22543808
9	73,25669817

Documento compilado em Tuesday 25th February, 2020, 11:23, (tempo no servidor).

Última versão do documento (podem haver correções e/ou aprimoramentos):
["bit.ly/mathematicalramblings_public"](https://bit.ly/mathematicalramblings_public).

Comunicar erro: "a.vandre.g@gmail.com".