Lista G2 - Antônio Vita

01.

1) $\exists x\forall yA(x, y) \equiv \forall y\exists xA(x, y)$

$\exists x\forall yA(x, y) \leftrightarrow \forall y\exists xA(x, y)$

V $\exists x\forall yA(x, y)$
F $\forall y\exists xA(x, y)$
V $\forall yA(a, y)$
F $\exists xA(x, b)$
V $A(a, b)$
F $A(a, b)$

F $\exists x\forall yA(x, y)$
V $\forall y\exists xA(x, y)$
F $\forall yA(a, y)$
F $A(a, b)$
V $\exists xA(x, b)$
V $A(c, b)$

R: Tautologia, todos os ramos fecham.

3) $\forall xP(x) \to \forall yP(y)$

F $\forall xP(x) \to \forall yP(y)$
V $\forall xP(x)$
F $\forall yP(y)$
V $P(a)$
F $P(b)$

Contraexemplo:
V $P(a)$
F $P(b)$

R: Não é tautologia, pois o ramo não se fecha.

5) $\exists y(P(y) \to \forall xP(x))$

F $\exists y(P(y) \to \forall xP(x))$
F $P(b) \to \forall xP(x)$
V $P(b)$
F $\forall xP(x)$
F $P(a)$

Contraexemplo:
V $P(b)$
F $P(a)$

R: Não é tautologia, pois o ramo não se fecha.

7) $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall xP(x) \to \forall xQ(x))$

F $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall xP(x) \to \forall xQ(x))$
V $\exists x(P(x) \to Q(x))$
F $\forall xP(x) \to \forall xQ(x)$
V $P(a) \to Q(a)$
F $P(a) \to Q(a)$

F $P(a)$
V $P(a)$
F $Q(a)$

V $Q(a)$
V $P(a)$
F $Q(a)$

R: Tautologia, todos os ramos fecham.

9) $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall xP(x) \land \forall xQ(x)$

F $\forall x(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow \forall xP(x) \land \forall xQ(x)$

V $\forall x(P(x) \land Q(x))$
F $\forall xP(x) \land \forall xQ(x)$
F $P(a) \land Q(a)$

F $P(a)$
V $P(a)$
V $Q(a)$

F $Q(a)$
V $P(a)$
V $Q(a)$

F $\forall x(P(x) \land Q(x))$
V $\forall xP(x) \land \forall xQ(x)$
F $P(a) \land Q(a)$

F $P(a)$
V $P(a)$
V $Q(a)$

F $Q(a)$
V $P(a)$
V $Q(a)$

R: Tautologia, todos os ramos fecham.

11) $\forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to P(y)))$

F $\forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to P(y)))$
F $P(a) \to \forall y(Q(y) \to P(y))$
V $P(a)$
F $Q(b) \to P(b)$
V $Q(b)$
F $P(b)$

Contraexemplo:
V $Q(b)$
F $P(b)$
V $P(a)$

R: Não é tautologia, pois o ramo não se fecha.

13) $\neg\exists yP(y) \models (\forall y(\exists xP(x) \to P(y)))$

F $\neg\exists yP(y) \to (\forall y(\exists xP(x) \to P(y)))$
V $\neg\exists yP(y)$
F $\forall y(\exists xP(x) \to P(y))$
F $\exists yP(y)$
F $\exists xP(x) \to P(b)$
F $P(b)$
F $P(a) \to P(b)$
V $P(a)$
F $P(b)$

Contraexemplo:
F $P(b)$
V $P(a)$

R: Não é tautologia, pois o ramo não se fecha.

15) $\forall xP(x) \land \forall xQ(x) \models \forall x(P(x) \land Q(x))$

F $\forall xP(x) \land \forall xQ(x) \to \forall x(P(x) \land Q(x))$
V $\forall xP(x) \land \forall xQ(x)$
F $\forall x(P(x) \land Q(x))$
F $P(a) \land Q(a)$

F $P(a)$
V $\forall xP(x)$
V $\forall xQ(x)$
V $P(a)$
V $Q(a)$

F $Q(a)$
V $\forall xP(x)$
V $\forall xQ(x)$
V $P(a)$
V $Q(a)$

R: Tautologia, todos os ramos fecham.

17) $\{\exists xP(b, x), \forall x\forall y(P(x, y) \to Q(y, x))\} \models \exists xQ(x, b)$

F $\{\exists xP(b, x), \forall x\forall y(P(x, y) \to Q(y, x))\} \to \exists xQ(x, b)$
V $\exists xP(b, x) \land \forall x\forall y(P(x, y) \to Q(y, x))$
F $\exists xQ(x, b)$
V $\exists xP(b, x)$
V $\forall x\forall y(P(x, y) \to Q(y, x))$
V $P(b, a)$
V $P(a, b) \to Q(b, a)$

F $P(a, b)$
F $Q(a, b)$

V $Q(b, a)$
F $Q(a, b)$

R: Tautologia, todos os ramos fecham.

19) $\{\forall x(P(x \land \neg R(x, b)), \exists x(\neg Q(b) \lor R(x, b)), \forall x(\neg R(x, b) \to Q(x))\} \models \exists yR(y, b)$

F $\{\forall x(P(x \land \neg R(x, b)), \exists x(\neg Q(b) \lor R(x, b)), \forall x(\neg R(x, b) \to Q(x))\} \to \exists yR(y, b)$
V $\forall x(P(x \land \neg R(x, b)) \land \exists x(\neg Q(b) \lor R(x, b)) \land \forall x(\neg R(x, b) \to Q(x))$
F $\exists yR(y, b)$
V $\forall x(P(x) \land \neg R(x, b))$
V $\exists x(\neg Q(b) \lor R(x, b))$
V $\forall x(\neg R(x, b) \to Q(x))$
V $\neg Q(b) \lor R(a, b)$ ✓
V $P(a) \land \neg R(a, b)$ ✓
V $\neg R(a, b) \to Q(a)$

V $\neg Q(b)$
F $Q(b)$
V $P(a)$
V $\neg R(a, b)$
F $R(a, b)$

F $\neg R(a, b)$
V $R(a, b)$
F $R(c, b)$

V $Q(a)$
F $R(c, b)$

V $R(a, b)$
V $P(a)$
V $\neg R(a, b)$
F $R(a, b)$

F $\neg R(a, b)$
V $R(a, b)$
F $R(c, b)$

V $Q(a)$
F $R(c, b)$

Contraexemplo:
F $Q(b)$
V $P(a)$
V $Q(a)$
F $R(c, b)$

R: Não é tautologia, pois há ramo que não fecha.

02.

1. o predicado ser o número zero; ⟶ $Zero(x) := \forall y\ (x+y=y)$

pois 0 + qualquer número é igual ao próprio número.

$0 + 2 = 2$

2. o predicado ser maior que; ⟶ $Maior(x,y) := \exists z\ (z \neq 0 \land y+z=x)$

x é maior que y se existe um número natural não nulo tal que $x = y + z$ e evitando que $x = y$, quando $z = 0$, visto que $z + y = x$

3. o predicado ser o número um; $Um(x) := \forall y\forall z\ (x=y+z \to (y=x \lor z=x))$

Se a soma de dois número é ele mesmo, então isso só é possível com o número 1, pois 1 + 0 = 1, nenhum outro número do domínio se encaixa.

$(x=y+z \to (y=x \lor z=x))$ -> $1 = 1 + 0$ -> $x = y \lor x = z$

4. a afirmação qualquer número somado a um é maior que ele mesmo.

$MaiorSomado(x,y) := \forall x\forall y((\forall u\forall v(y = u = v \to (u = y \lor v = y))) \to (\exists z(x + y = x + z \land z \neq x)))$

Se y é igual a 1, pois só pode ser escrito como a soma quando um dos termos é ele próprio, então $x + y$ é maior que x, pois $x + y = x + z$ com $x \neq z$

03. $\neg\exists x\forall y(Q(y, x) \to P(x)) \equiv \ldots$

$\neg\exists x\forall y(Q(y, x) \to P(x))$ → $\neg\exists x = \forall x\neg$ → $\forall x\neg\forall y(Q(y, x) \to P(x))$ → $\neg\forall y = \exists y\neg$ → $\forall x\exists y\neg(Q(y, x) \to P(x))$

→ $\neg(Q(y, x) \to P(x)) = \neg(\neg Q(y,x) \lor P(x)) = (Q(y,x) \land \neg P(x))$ → $\forall x\exists y(Q(y,x) \land \neg P(x))$

Tableaux para confirmar: todos os ramos fecharam, portanto são equivalentes.

$\neg\exists x\forall y(Q(y, x) \to P(x)) \equiv \forall x\exists y(Q(y,x) \land \neg P(x))$

V $\neg\exists x\forall y(Q(y, x) \to P(x))$
F $\forall x\exists y(Q(y,x) \land \neg P(x))$
F $\exists x\forall y(Q(y, x) \to P(x))$
F $\exists y(Q(y,a) \land \neg P(a))$
F $\forall y(Q(y, a) \to P(a))$
F $Q(b, a) \to P(a))$
F $Q(b,a) \land \neg P(a))$

F $Q(b,a)$
V $Q(a, b)$
F $P(a)$

F $\neg P(a)$
V $P(a)$
V $Q(y, b)$
F $P(a)$

F $\neg\exists x\forall y(Q(y, x) \to P(x))$
V $\forall x\exists y(Q(y,x) \land \neg P(x))$
V $\exists x\forall y(Q(y, x) \to P(x))$
V $\forall y(Q(y, a) \to P(a))$
V $\exists y(Q(y,a) \land \neg P(a))$
V $Q(b,a) \land \neg P(a)$
V $Q(b, a) \to P(a)$
V $Q(b,a)$
V $\neg P(a)$
F $P(a)$

F $Q(b, a)$

V $P(a)$