Autor: Antoni Perużyński

# Metody numeryczne w technice

## (kierunek Matematyka)

## Projekt 10

### Metoda odchyłek ważonych

Napisać procedurę realizującą metodę odchyłek ważonych dla równania:

$u''(x) - u'(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$

z warunkami brzegowymi:

$u(0) = 1,$
$u'(1) = 2.$

Funkcje kształtu nie muszą zapewniać spełnienia warunków brzegowych.

a) Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć rozwiązanie przybliżone przyjmując jako funkcje kształtu:

$\Phi_1(x) = 1,$
$\Phi_2(x) = x,$
$\Phi_3(x) = x^2,$

a jako funkcje wagowe:

$w_1(x) = 1,$
$w_2(x) = x,$
$w_3(x) = x^2.$

Jako funkcje wagowe na brzegu przyjąć funkcje $w_i$.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązanie przybliżone. Policzyć także normę (w $L^2$) różnicy pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym (wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego).

b) Wykonać te same obliczenia dla funkcji kształtu postaci:

$\Phi_1(x) = 1$,
$\Phi_2(x) = \exp x$ .

Jako funkcje wagowe przyjąć pierwsze dwie funkcje wagowe z poprzedniego zadania.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązanie przybliżone. Policzyć także normę (w $L^2$) różnicy pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym.

---

# Rozwiązanie

In[449]:=

```
ClearAll["Global`*"];
MOW[phi_, w, a_, b_, ua_, ub_, m_] := Module[{p1, p2, p3},
p = {p1, p2, p3};
T[x_] = Sum[p[[i]] * phi[i][x], {i, 1, m}];
R0[x_] = D[T[x], {x, 2}] - D[T[x], {x, 1}];
R1[x_] = T[x] - ua;
R2[x_] = D[T[x], {x, 1}] - ub;
temp = {};

For[i = 1, i ≤ m, i++,
AppendTo[temp, Integrate[w[i][x] * R0[x], {x, a, b}] + w[i][a] * R1[a] + w[i][b] * R2[b]]
];
rozw = Solve[Table[temp[[i]] == 0, {i, 1, m}]];
t[x] = Sum[rozw[[1, i, 2]] * phi[i][x], {i, 1, m}];

Return[Simplify[t[x]]]
]
```

## Podpunkt b)

In[451]:=

```
φ[i_][x_] := 1 * (Exp[x]) ^ (i - 1);
w[i_][x_] := Product[x, {k, 2, i}];
a = 0;
ua = 1;
b = 1;
ub = 2;
m = 2;
mow1 = MOW[φ, w, a, b, ua, ub, m]
```

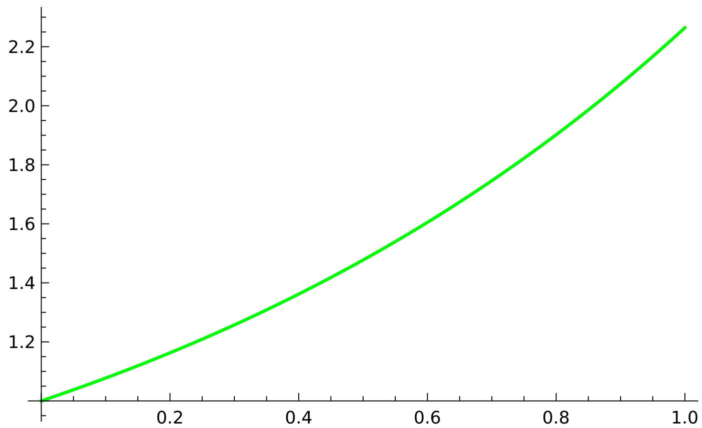
Out[458]=

$$\frac{-2 + e + 2 e^{x}}{e}$$

In[459]:=

```
accResult = DSolve[{u''[x] - u'[x] == 0, u[0] == 1, u'[1] == 2}, u[x], x];
p1 = Plot[accResult[[1, 1, 2]], {x, 0, 1}];
p2 = Plot[mow1, {x, a, b}, PlotStyle → Green];
Show[p1, p2]
Print["Norma L2 dla m=2  wynosi ",
 N[Integrate[Abs[mow1 - accResult[[1, 1, 2]]]^2, {x, a, b}]]]
```

Out[462]=




```
Norma L2 dla m=2  wynosi 0.
```

## Podpunkt a)

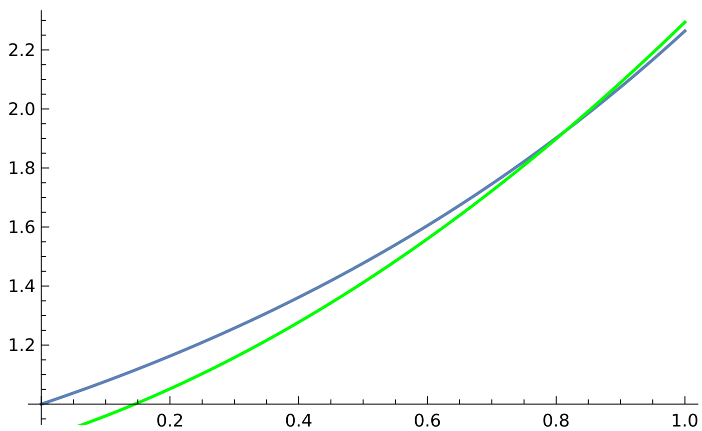
In[464]:=

```
mow3 = MOW[w, w, a, b, ua, ub, 3]
pl1 = Plot[accResult[[1, 1, 2]], {x, a, b}];
pl2 = Plot[mow3, {x, a, b}, PlotStyle → Green];
Show[pl1, pl2]
Print["Norma L2 dla m=3 wynosi ",
 N[Integrate[Abs[mow3 - accResult[[1, 1, 2]]]^2, {x, a, b}]]]
```

Out[464]=

$$\frac{3}{17}\left(5+4\,x+4\,x^2\right)$$

Out[467]=




```
Norma L2 dla m=3 wynosi 0.00576518
```