Autor: Antoni Peruzynski

# Metody numeryczne (Matematyka)

## Projekt 4

### Metoda Jacobiego

Napisać procedurę realizującą algorytm metody Jacobiego (argumenty : $a$, $b$, $x^0$, $e$).

Zadanie 1.
Korzystając z metody Jacobiego wyznaczyć przybliżone rozwiązanie układu równań:
$a\,x = b$,
gdzie:

$$a = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Jako przybliżenie początkowe przyjąć wektor zerowy. Obliczenia wykonać dla dwóch dokładności $10^{-2}$ i $10^{-5}$. Policzyć residuum dla otrzymanych wyników ($\|a\,x^p - b\|$, gdzie $x^p$ jest wyznaczonym rozwiązaniem przybliżonym). Policzyć błąd uzyskanych przybliżeń. Do wyznaczenia rozwiązania dokładnego wykorzystać instrukcję LinearSolve.

Zadanie 2.
Zastosowanie praw Kirchoffa w pewnym układzie elektrycznym daje następujący układ równań liniowych, w którym niewiadomymi są natężenia prądów $i_k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ :

$$\begin{gathered} 5\,i_1 + 4\,i_2 = 20, \\ i_3 - 3\,i_4 - i_5 = 0, \\ 2\,i_4 - 3\,i_5 = 0, \\ i_1 - i_2 - 3\,i_3 = 0, \\ 8\,i_2 - 5\,i_3 - 2\,i_4 = 0. \end{gathered}$$

Korzystając z metody Jacobiego wyznaczyć przybliżone rozwiązanie tego układu, przekształcając go najpierw do postaci zapewniającej zbieżność metody. Jako przybliżenie początkowe przyjąć wektor zerowy. Obliczenia wykonać dla dwóch dokładności $10^{-3}$ i $10^{-6}$. Policzyć residuum dla otrzymanych wyników ($\|a\,x^p - b\|$). Policzyć także błąd uzyskanych przybliżeń.

# Rozwiązanie

In[1]:=

```
Clear[Jacobi];
Jacobi[A_, b_, x0_, e_] :=
  Module[{xn = x0, LU = A, MDI = A, MD = A, MM = A, w, xs = 0, n = Length[A]},
For[i = 1, i ≤ n, i++,
For[j = 1, j ≤ n, j++,
If[j == i, MD⟦i, j⟧ = A⟦i, j⟧, MD⟦i, j⟧ = 0];
 ];
];
MDI = Inverse[MD];
LU = A - MD;
MM = -MDI.LU;
w = MDI.b;
While[Norm[A.xn - b] ≥ e,
xs = xn;
xn = MM.xs + w
];
Return[xn]];
```

Out[1]=

$\text{Null}^2$

## Przykład testowy

```
A = {{4, -1, 0}, {-1, 4, -1}, {0, -1, -4}};
b = {2, 6, 2};
x0 = {0, 0, 0};
Jacobi[A, b, x0, 0.0001]
```

Out[6]=

$\left\{\frac{7}{8}, \frac{3}{2}, -\frac{7}{8}\right\}$

# Zadanie 1.

```
A = {{4, -1, -1, 0}, {-1, 4, 0, -1}, {-1, 0, 4, -1}, {0, -1, -1, 4}};
b = {-4, 0, 4, -4};
x0 = {0, 0, 0, 0};
xd = LinearSolve[A, b]
xp = Jacobi[A, b, x0, 10^(-2)]
N[Norm[A.xp - b]]
N[Norm[xp - xd]]
xp = Jacobi[A, b, x0, 10^(-5)]
N[Norm[A.xp - b]]
N[Norm[xp - xd]]
```

Out[124]=

$$\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right\}$$

Out[125]=

$$\left\{-\frac{1023}{1024}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1023}{1024}\right\}$$

Out[126]=

0.00617632

Out[127]=

0.00138107

Out[128]=

$$\left\{-\frac{1\,048\,575}{1\,048\,576}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1\,048\,575}{1\,048\,576}\right\}$$

Out[129]=

$6.03157 \times 10^{-6}$

Out[130]=

$1.3487 \times 10^{-6}$

## Zadanie 2.

In[162]:=

```
A = {{5, 4, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, -3, -1},
   {0, 0, 0, 2, -3}, {1, -1, -3, 0, 0}, {0, 8, -5, -2, 0}};
b = {20, 0, 0, 0, 0};
x0 = {0, 0, 0, 0, 0};

A2 = {{5, 0, 0, 0, 4}, {0, -3, -1, 1, 0}, {0, 2, -3, 0, 0},
   {1, 0, 0, -3, -1}, {0, -2, 0, -5, 8}}; (* Literówke, poprawiłem *)
MatrixForm[A2]
xd = LinearSolve[A, b] // N (* Skoro, wracam ze zmiennnymi,
  to w tym miejscu powinno być LinearSolve[A,b], a wczesniej miałem A2 *)
(*Aby porownywac wynik dokladny z przyblioznym ,
musimy pamietac o tym, ze zmienialismy kolumny co za tym idzie
 zmienne. I tak wektor xp pokazuje odpowiednio  i1,i4,i5,i3 i2. *)
xp = Jacobi[A2, b, x0, 10^(-3)];
(*Pozamieniam teraz zmienne by były w odpowiednich miejscach*)
temp = xp[[5]];
xp[[5]] = xp[[2]];
xp[[2]] = temp;
temp = xp[[3]];
xp[[3]] = xp[[4]];
xp[[4]] = temp;
temp = xp[[4]];
xp[[4]] = xp[[5]];
xp[[5]] = temp;
xp // N

N[Norm[A.xp - b]]
N[Norm[xp - xd]]
xp = Jacobi[A2, b, x0, 10^(-6)];
temp = xp[[5]];
xp[[5]] = xp[[2]];
xp[[2]] = temp;
temp = xp[[3]];
xp[[3]] = xp[[4]];
xp[[4]] = temp;
temp = xp[[4]];
xp[[4]] = xp[[5]];
xp[[5]] = temp;
xp // N
N[Norm[A.xp - b]]
N[Norm[xp - xd]]
```

Out[166]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Out[167]=

{3.4778, 0.652755, 0.94168, 0.256822, 0.171215}

Out[178]=

{3.47781, 0.652835, 0.941738, 0.256876, 0.17124}

Out[179]=

0.000533065

Out[180]=

0.000115763

Out[191]=

{3.4778, 0.652755, 0.94168, 0.256822, 0.171215}

Out[192]=

$5.92829 \times 10^{-7}$

Out[193]=

$1.18199 \times 10^{-7}$