Autor: Antoni Perużyński

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 3

Metoda Adamsa-Moultona

Napisać procedurę realizującą algorytm czterokrokowej metody Adamsa-Moultona (argumenty : f, x_0, y_0, b, n, m).
Wykorzystać metodę iteracji prostej (m powtórzeń), a jako metodę startową zastosować metodę Rungego-Kutty rzędy czwartego. Zminimalizować liczbę obliczeń funkcji f.

Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć rozwiązanie przybliżone zagadnienia początkowego:

$$\begin{cases} y'(x) = \sin y(x), & x \in [0, 25], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Obliczenia wykonać dla 10 i 20 kroków.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązania przybliżone.Wykreślić także, na jednym rysunku, błędy uzyskanych rozwiązań przybliżonych.Policzyć ponadto błędy maksymalne oraz średnie dla obu siatek.

Rozwiązanie

Tworzenie procedur

In[238]:=

```
RungeKuttyFour[function_, X0_, Y0_, H_, number_] :=
 Module[{f = function, x0 = X0, y0 = Y0, h = H, n = number},
xList = {x0};
yList = {y0};

For[i = 1, i ≤ n, i++,
AppendTo[xList, xList[[i]] + h];
k1 = f[xList[[i]], yList[[i]]];
k2 = f[xList[[i]] + 0.5 * h, yList[[i]] + 0.5 * h * k1];
k3 = f[xList[[i]] + 0.5 * h, yList[[i]] + 0.5 * h * k2];
k4 = f[xList[[i + 1]], yList[[i]] + h * k3];
AppendTo[yList, yList[[i]] + 1 / 6 * h * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)];
];
Return[Transpose[{xList, yList}]]
]



f[x_, y_] := (x * y - y ^ 2) / x ^ 2;
rK4Points = RungeKuttyFour[f, 1, 2, 0.1, 20];
```

In[241]:=

```
AdamsMoulton[function_, X0_, Y0_, B_, M_, number_] :=
 Module[{f = function, x0 = X0, y0 = Y0, b = B, m = M,  n = number,  Points},
vectorB = {251/720, 646/720, -264/720, 106/720, -19/720};
k = 4;
(*vectorB = {55/24,-59/24,37/24,-9/24}; *)
h = (b - x0)/n;
Points = RungeKuttyFour[f, x0, y0, h, k - 1];
ListF = N[Table[f[Points[[i, 1]], Points[[i, 2]]], {i, 1, k, 1}]];
For[i = k, i ≤ n, i++,
xn = Points[[i, 1]] + h;
phi[z_] := Points[[i, 2]] +
      h * Sum[vectorB[[j + 1]] * ListF[[i + 1 - j]], {j, 1, k, 1}] + h * vectorB[[1]] * f[xn, z];
yn = Points[[i, 2]];
(*Metoda iteracji prostej*)
For[j = 1, j < m, j++,
yn = phi[yn];
];

AppendTo[ListF, f[xn, yn]];
AppendTo[Points, {xn, yn}];
];
Return[Points]
]
```

Obliczenie rozwiązania dokładnego oraz narysowanie wykresu z wynikiem dokładnym oraz przybliżonymi

In[252]:=

```
function[x_, y_] = Sin[y];
x0 = 0;
y0 = 1;
b = 25;
m = 6;
n = 20;
AdamsMoulton[function, x0, y0, b, m, n];
```

In[261]:=

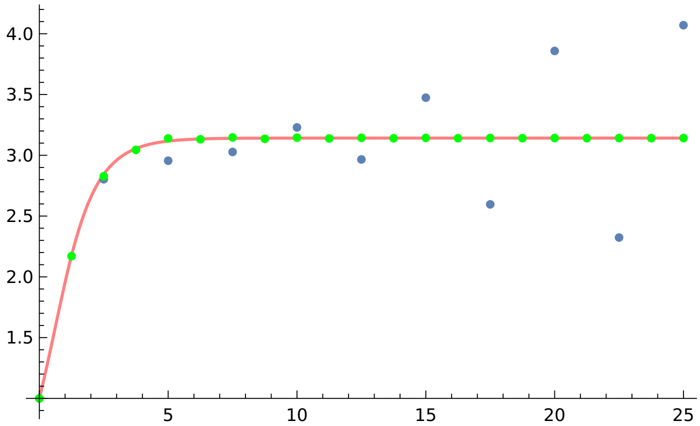
```
AM10 = AdamsMoulton[function, x0, y0, b, m, 10];
AM20 = AdamsMoulton[function, x0, y0, b, m, 20];
accResult = DSolve[{y '[x] == Sin[y[x]],  y[0] == 1} , y[x],  x];
```

In[264]:=

```
p1 = ListPlot[AM10, PlotRange → All];
p2 = ListPlot[AM20, PlotRange → All, PlotStyle → Green];

pAcc = Plot[accResult[[1, 1, 2]], {x, 0, 25}, PlotStyle → Pink, PlotRange → All];
Show[pAcc, p1, p2]
```

Out[267]=



Obliczanie błędów względnych oraz wykreślenie ich na wykresie

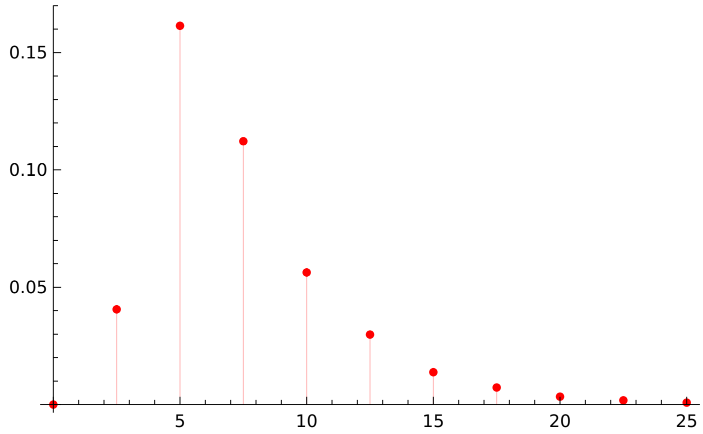
In[53]:=

```
xw10 = Transpose[AM10][[1]] ;
yw10 = Transpose[AM10][[2]] ;
xw20 = Transpose[AM20][[1]] ;
yw20 = Transpose[AM20][[2]] ;
```

In[57]:=

```
accResultPoints10 =
  Table[accResult[[1, 1, 2]] /. {x → xw10[[i]]}, {i, 1, Length[xw10]}];
bladbezwzgledny10 = Abs[yw10 - accResultPoints10];
bladwzgledny10 = 100 * bladbezwzgledny10 / Abs[accResultPoints10];
b10 =
  ListPlot[Transpose[{xw10, bladbezwzgledny10}], PlotStyle → Red, Filling → Axis];
Show[b10]
```

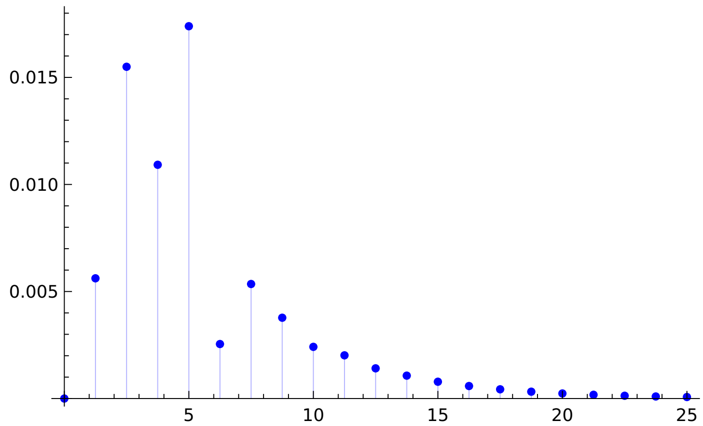
Out[61]=



In[62]:=

```
accResultPoints20 =
  Table[accResult[[1, 1, 2]] /. {x → xw20[[i]]}, {i, 1, Length[xw20]}];
bladbezwzgledny20 = Abs[yw20 - accResultPoints20];
bladwzgledny20 = 100 * bladbezwzgledny20 / Abs[accResultPoints20];
b20 = ListPlot[Transpose[{xw20, bladbezwzgledny20}],
   PlotStyle → Blue, Filling → Axis];
Show[b20]
```

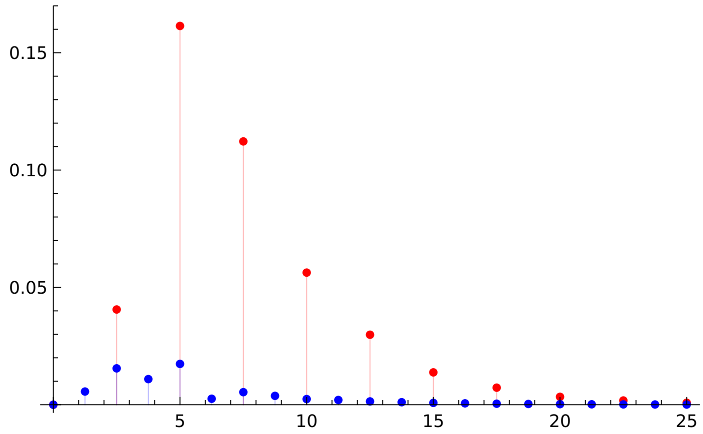
Out[66]=



In[67]:=

```
Show[b10, b20]
```

Out[67]=



In[70]:=

```
Print["Błąd maksymalny dla 10 krotków wynosi: ", Max[bladbezwzgledny10],
  " Średni błąd dla 10 kroków wynosi: ", Mean[bladbezwzgledny10]]
Print["Błąd maksymalny dla 20 krotków wynosi: ", Max[bladbezwzgledny20],
  " Średni błąd dla 20 kroków wynosi: ", Mean[bladbezwzgledny20]]
```

```
Błąd maksymalny dla 10 krotków wynosi:
 0.161417 Średni błąd dla 10 kroków wynosi: 0.0388542

Błąd maksymalny dla 20 krotków wynosi:
 0.0173915 Średni błąd dla 20 kroków wynosi: 0.00337323
```