

Autor: Antoni Perużyński

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 8

Metoda różnic skończonych

Nieustalony przepływ ciepła (schemat jawny)

Napisać procedurę realizującą schemat jawny metody różnic skończonych dla zagadnienia nieustalonego przepływu ciepła:

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (a, b), \quad t \in (0, t^*),$$

z warunkiem początkowym:

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

oraz warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju:

$$u(a, t) = u_a(t),$$

$$u(b, t) = u_b(t).$$

Jako argument procedury należy podać liczbę n_x węzłów siatki oraz czas końca t^* , natomiast krok czasu Δt należy wyznaczyć (w programie) tak aby zapewnić stabilność obliczeń.

a) Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć rozwiązanie przybliżone zagadnienia, w którym:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad t^* = 1,$$

$$c = 1, \quad \rho = 1, \quad \lambda = 1,$$

$$u_0(x) = \frac{x^3}{6},$$

$$u_a(t) = t + \dots,$$

$$u_b(t) = 2t + \dots.$$

Przedział $[a, b]$ podzielić na 10 części.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne, którym jest funkcja $u(x, t) = \frac{x}{6} + x t$, oraz uzyskane rozwiązania przybliżone w chwili końcowej. Wykreślić także błędy uzyskanego rozwiązania przybliżonego w chwili końcowej.

Rozwiązanie

```

In[60]:= RozniceSkonczoneJawne[A_, B_, TG_, Cons_, Ro_, Lambda_, U0_, UA_, UB_, U_, number_] :=
Module[{a = A, b = B, tg = TG, c = Cons, ro = Ro,
  lambda = Lambda, u0 = U0, ua = UA, ub = UB, u = U, n = number},
h = (b - a) / n;
tau = c * ro * h^2 / (2 * lambda);
(Print[tau];*)
m = Ceiling[tg / tau];
dt = tg / m;
(Print[dt];*)

TableX = Table[a + i * h, {i, 0, n}];
TableT = Table[i * dt, {i, 0, m}];
matrixT = Table[Table[0, {i, 0, n}], {j, 0, m}];
For[k = 1, k ≤ m + 1, k++,
matrixT[[k, 1]] = ua[TableT[[k]]];
matrixT[[k, n + 1]] = ub[TableT[[k]]];
];

For[i = 1, i ≤ n + 1, i++,
matrixT[[1, i]] = u0[TableX[[i]]
];

For[k = 2, k ≤ m + 1, k++,
For[i = 2, i < n + 1, i++,
matrixT[[k, i]] = matrixT[[k - 1, i]] + ((lambda * dt) / (c * ro * h * h)) *
(matrixT[[k - 1, i - 1]] - 2 * matrixT[[k - 1, i]] + matrixT[[k - 1, i + 1]]);
];
];

matrixResult = Table[Table[0, {i, 0, n}], {j, 0, m}];
For[k = 1, k ≤ m + 1, k++,
For[i = 1, i ≤ n + 1, i++,
tmp = {TableX[[i]], TableT[[k]], matrixT[[k, i]]};
matrixResult[[k, i]] = tmp;
];];

ResultVector = Table[{TableX[[i]], matrixT[[m + 1, i]]}, {i, 1, n + 1}];

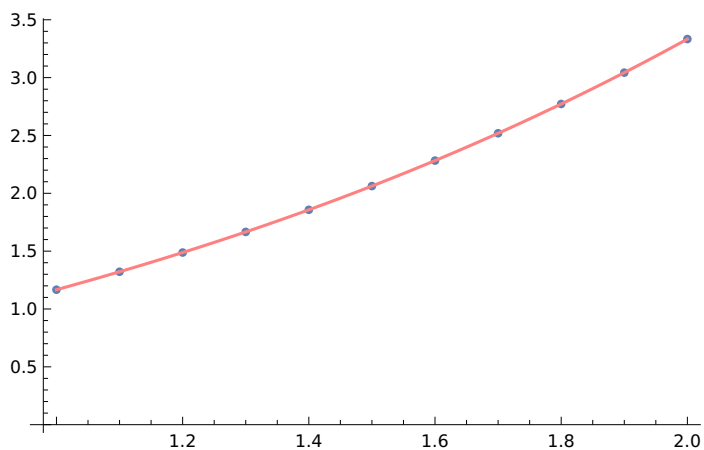
Return[ResultVector]

```

```
In[61]:= a = 1;  
b = 2;  
tg = 1;  
c = 1;  
ro = 1;  
lambda = 1;  
u0[x_] = x^3/6;  
ua[t_] = t + 1/6;  
ub[t_] = 2 * t + 4/3;  
n = 10;  
u[x_, t_] = x^3/6 + x * t;  
RozniceSkonczzoneJawne[a, b, tg, c, ro, lambda, u0, ua, ub, u, n];
```

```
In[73]:= pacc = Plot[u[x, tg], {x, a, b}, PlotStyle -> Pink, PlotRange -> All];  
res = RozniceSkonczzoneJawne[a, b, tg, c, ro, lambda, u0, ua, ub, u, n];  
p1 = ListPlot[res];  
Show[p1, pacc]
```

Out[76]=



```
In[87]:= xw = Transpose[res][[1]] ;  
yw = Transpose[res][[2]] ;  
accResultPoints = Table[u[x, tg] /. {x → xw[[i]]}, {i, 1, Length[xw]}];  
bladbezwzgledny = Abs[yw - accResultPoints];  
b500 = ListPlot[Transpose[{xw, bladbezwzgledny}],  
  PlotStyle → Red, Filling → Axis, PlotRange → Full]
```

Out[91]=

