BUKU

PENGANTAR DASAR MATEMATIKA

O l e h :

Muhammad Subhan

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Padang

2018

Kata Pengantar

Alhamdulillah, berkat rahmat Allah Tuhan Yang Maha Kuasa, buku ini dapat diselesaikan. Buku ini diharapkan dapat membantu mahasiswa S1 Matematika dan Pendidikan Matematika untuk lebih memahamami konsep-konsep dalam matakuliah Pengantar Dasar Matematika. Buku ini terdiri dari dua bagian utama, yaitu Logika dan Himpunan. Di bagian tengah diberikan materi strategi pembuktian untuk memberikan bekal kepada mahasiswa dalam menyelesaikan bukti-bukti yang diminta pada bagian Himpunan. Pada akhir setiap bab diberikan latihan untuk mengevaluasi tingkat penguasaan mahasiswa terhadap materi bab tersebut.

Penyelesaian buku ini tidak terlepas dari kontribusi banyak pihak. Untuk itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada mahasiswa Jurusan Matematika UNP peserta kuliah Pengantar Dasar Matematika serta sejawat dosen tim pengampu mata kuliah tersebut yang telah membaca dan memberi masukan terhadap materi dalam buku ini sejak masih berbentuk hand-out sampai agak lengkap seperti sekarang ini. Buku ini tentu saja masih banyak kelemahan baik dari segi isi maupun penyajian. Oleh sebab itu, kritik dan saran selalu kami nanti untuk perbaikan dan pengembangan buku ini.

Padang, November 2017

M. Subhan.

Daftar Isi

Bab 1

Logika Proposisi

Logika adalah bagian dari matematika, tetapi pada saat yang sama juga merupakan bahasa matematika. Pada akhir abad ke-19 dan awal abad ke-20, ada kepercayaan bahwa semua hal dalam matematika bisa direduksi menjadi logika simbolik dan bisa dibuat menjadi formal sepenuhnya. Kepercayaan ini, walaupun masih dipegang dalam bentuk modifikasinya sekarang ini, telah digoyahkan oleh K. Gödel pada tahun 1930 ketika ia menunjukkan bahwa selalu ada sejumlah kebenaran yang tidak bisa diturunkan dalam sistem formal apapun.

Studi tentang logika simbolik biasanya dibagi menjadi beberapa bagian. Yang pertama dan paling mendasar adalah logika proposisi. Di atasnya nanti adalah logika predikat yang merupakan bahasa matematika.

1.1 Proposisi

Di matematika, kita selalu mengasumsikan bahwa setiap pernyataan yang disebut proposisi selalu jelas maksudnya dan tidak ambigu sehingga hanya ada dua kesimpulan tentang pernyataan itu, yaitu benar atau salah dan tidak ada pilihan lain selain keduanya. Hal ini berbeda dengan pernyataan dalam kehidupan sehari-hari yang tidak selalu bisa ditentukan kebenarannya dan bermakna ganda, terutama pernyataan politik.

Definisi 1.1. *(**Proposisi**)*
Proposisi adalah kalimat yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak keduanya sekaligus.

Contoh 1.1. *(Proposisi)*
Bukittinggi adalah ibukota propinsi Sumatera Barat.
Sebuah segitiga memiliki tiga sudut dalam.
2+6=9.
Sembilan adalah salah satu bilangan prima.

Semua pernyataan di atas bisa ditentukan nilai kebenarannya dan hanya memiliki satu nilai kebenaran.

Contoh 1.2. *(Bukan Proposisi)*
Apakah Didi berada di rumah?
Kerjakan latihan di halaman 234!
Lukisan Affandi itu indah sekali.
Semoga lekas sembuh.
x+6=9.

Semua pernyataan pada contoh terakhir bukan proposisi. Yang pertama adalah suatu pertanyaan, dan yang kedua merupakan suatu perintah, dan karenanya bukan proposisi. Yang ketiga memiliki nilai kebenaran yang relatif, sebagian orang akan menilai BENAR, tapi sebagian yang lain mungkin berpikir nilainya SALAH. Jadi, memiliki dua nilai kebenaran. Selanjutnya, pernyataan keempat merupakan suatu harapan. Pernyataan yang terakhir nilai kebenarannya masih bersifat terbuka bergantung pada nilai x.

1.2 Ingkaran dan Penghubung Logika

Dari satu atau lebih proposisi tunggal, kita bisa membentuk proposisi baru dalam bentuk ingkaran/negasi ($\neg$) atau menggunakan penghubung logika (***logical connectives***). Ada empat penghubung logika yang kita kenal, yaitu: konjungsi ($\wedge$), disjungsi ($\vee$), implikasi ($\Rightarrow$), dan biimplikasi ($\Leftrightarrow$).

1.2.1 Negasi

Negasi atau ingkaran dari suatu proposisi didefinisikan sebagai bukan kasus proposisi tersebut. Negasi dilambangkan dengan $\neg$. Kita dapat membuat pernyataan negasi/ingkaran dari suatu pernyataan dengan menambahkan atau menghilangkan kata "tidak" atau "bukan" pada pernyataan awalnya.

Contoh 1.3.

P : *Tuan X seorang laki-laki.*

$\neg P$: *Tuan X bukan seorang laki-laki.*

Pada negasi, nilai kebenarannya meruapakan kebalikan dari nilai kebenaran proposisi semula. Seperti pada contoh, jika seseorang adalah laki-laki maka P bernilai BENAR, tetapi $\neg P$ menjadi SALAH. Begitu juga sebaliknya, jika seseorang adalah perempuan. Berikut tabel kebenaran untuk negasi, dimana B berarti BENAR dan S berarti SALAH.

Tabel 1.1: Tabel kebenaran untuk negasi

P	$\neg P$
B	S
S	B

1.2.2 Konjungsi

Konjungsi adalah proposisi majemuk yang dihubungkan oleh kata "dan" atau "yang". Konjungsi dilambangkan dengan $\wedge$. Kita definisikan bahwa pernyataan "P dan Q" bernilai BENAR jika P BENAR dan Q BENAR dan pernyataan "P dan Q" bernilai SALAH jika P SALAH atau Q SALAH. Definisi ini digambarkan pada tabel kebenaran berikut.

Tabel 1.2: Tabel kebenaran untuk konjungsi

P	Q	$P \wedge Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Sesuai tabel di atas, kita bisa menyatakan bahwa konjungsi bernilai BENAR hanya jika proposisi pembentuknya semua bernilai BENAR. Sebaliknya, konjungsi akan bernilai SALAH jika salah satu proposisi yang membentuknya bernilai SALAH.

Contoh 1.4.

P: *Ajo Kudun berasal dari Pariaman (B)*

Q: *UNP ada di Padang (B)*

$P \wedge Q$: *Ajo Kudun berasal dari Pariaman dan UNP ada di Padang (B)*

Contoh 1.5.

A: *Tujuh adalah bilangan prima (B)*

B: *Tujuh adalah bilangan genap (S)*

$A \wedge B$: *Tujuh adalah bilangan prima yang genap (S)*

1.2.3 Disjungsi

Disjungsi adalah proposisi majemuk yang dihubungkan oleh kata "atau". Disjungsi dilambangkan dengan $\vee$. Kita definisikan bahwa pernyataan "P atau Q" bernilai BENAR jika P BENAR atau Q BENAR dan pernyataan "P atau Q" bernilai SALAH jika P SALAH dan Q SALAH. Definisi ini digambarkan pada tabel kebenaran berikut.

Tabel 1.3: Tabel kebenaran untuk disjungsi

P	Q	$P \vee Q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Dari, tabel, kita bisa menyatakan bahwa disjungsi akan bernilai SALAH hanya jika proposisi yang membentuknya semua bernilai SALAH. Disjungsi akan bernilai BENAR jika salah satu proposisi yang membentuknya bernilai BENAR.

Contoh 1.6.

P: *Hari ini adalah Minggu (S)*

Q: *UNP ada di Jakarta (S)*

$P \vee Q$: *Hari ini adalah Minggu atau UNP ada di Jakarta (S)*

Contoh 1.7.

A: *Tujuh adalah bilangan prima (B)*

B: *Tujuh adalah bilangan genap (S)*

$A \vee B$: *Tujuh adalah bilangan prima atau bilangan genap (B)*

1.2.4 Implikasi

Implikasi adalah proposisi majemuk yang berbentuk "jika..., maka...." dan dilambangkan dengan $\Rightarrow$. Pernyataan "$P \Rightarrow Q$" dapat dibaca "jika P, maka Q". Dalam hal ini P disebut **anteseden**, sedangkan Q disebut **konsekuen**. Nilai kebenarannya dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.4: Tabel kebenaran untuk implikasi

P	Q	$P \Rightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Dari tabel terlihat bahwa implikasi bernilai SALAH hanya jika anteseden BENAR, tetapi konsekuen SALAH. Untuk kasus lain, implikasi bernilai BENAR. Perhatikan juga bahwa, jika anteseden SALAH, maka implikasi pasti bernilai BENAR. Demikian juga jika konsekuen BENAR. Jadi, kita juga bisa menyatakan bahwa suatu implikasi bernilai BENAR jika anteseden SALAH atau konsekuen BENAR.

Pernyataan "$P \Rightarrow Q$" juga dapat dibaca:

- "P menyebabkan Q",
- "P mengakibatkan Q",
- "P syarat cukup untuk Q",
- "Q akibat dari P",
- "Q jika P", atau
- "Q syarat perlu untuk P".

Contoh 1.8.

P: *Tono laki-laki (B)*

Q: *Tini laki-laki (S)*

$P \Rightarrow Q$: *Jika Tono laki-laki, maka Tini laki-laki (S)*

Contoh 1.9.

A: *Hari ini Minggu (S)*

B: *UNP ada di Jakarta (S)*

$A \Rightarrow B$: *Jika hari ini Minggu, maka UNP ada di Jakarta (B)*

Proposisi yang terkait dengan Implikasi

Misalkan $P \Rightarrow Q$. Maka,

1. $Q \Rightarrow P$ disebut **konvers** dari $P \Rightarrow Q$
2. $\neg P \Rightarrow \neg Q$ disebut **invers** dari $P \Rightarrow Q$
3. $\neg Q \Rightarrow \neg P$ disebut **kontraposisi** dari $P \Rightarrow Q$

Contoh 1.10. *(Implikasi dan Proposisi Terkait)*

Implikasi: Jika hari ini Rabu, maka UNP ada di Jakarta.

Konvers: Jika UNP ada di Jakarta, maka hari ini Rabu.

Invers: Jika hari ini bukan Rabu, maka UNP tidak ada di Jakarta.

Kontraposisi: Jika UNP tidak ada di Jakarta, maka hari ini bukan Rabu.

1.2.5 Biimplikasi

Biimplikasi adalah proposisi majemuk yang berkaitan dengan kata "...jika dan hanya jika...." yang dilambangkan dengan $\Leftrightarrow$ sehingga pernyataan "$P \Leftrightarrow Q$" dibaca "P jika dan hanya jika Q". Selain itu, pernyataan "$P \Leftrightarrow Q$" juga dapat dibaca:

- "P ekivalen dengan Q",
- "P syarat cukup dan perlu untuk Q".

Nilai kebenaran dari biimplikasi dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.5: Tabel kebenaran untuk biimplikasi

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Dari tabel terlihat bahwa biimplikasi bernilai benar jika nilai kebenaran dari keduanya sama. Pernyataan $P \Leftrightarrow Q$ dapat juga didefinisikan sebagai $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Contoh 1.11.

P: *Tono laki-laki (B)*

Q: *Tini laki-laki (S)*

$P \Leftrightarrow Q$ *Tono laki-laki jika dan hanya jika Tini laki-laki (S)*

Contoh 1.12.

A: *Hari ini Minggu (S)*

B: *UNP ada di Jakarta (S)*

$A \Leftrightarrow B$: *Hari ini Minggu ekivalen dengan UNP ada di Jakarta (B)*

Sampai saat ini, proposisi majemuk yang dikenal memiliki beragam nilai kebenaran tergantung pada nilai kebenarannya. Pada bagian berikut kita akan mengenal istilah untuk proposisi-proposisi yang nilai kebenarannya tetap, yaitu tautologi dan kontradiksi.

1.3 Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi

Sebuah proposisi majemuk berdasarkan nilai kebenarannya dapat dikelompokkan menjadi Tautologi, Kontradiksi, atau Kontingensi. Definisinya adalah sebagai berikut.

Definisi 1.2. ***Tautologi*** *adalah proposisi yang selalu bernilai BENAR untuk semua kombinasi nilai kebenaran dari komponen-komponennya.*

Definisi 1.3. ***Kontradiksi*** *adalah proposisi yang selalu bernilai SALAH untuk semua kombinasi nilai kebenaran dari komponen-komponennya.*

Definisi 1.4. ***Kontingensi*** *adalah proposisi yang bukan tautologi maupun kontradiksi.*

Contoh 1.13. *(Tautologi)*

$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$ *adalah suatu tautologi karena selalu bernilai BENAR. Lihat tabel berikut*

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	B
S	B	S	B	B
S	S	S	S	B

Selain dengan tabel, kita juga bisa memperlihatkan kebenarannya dengan cara berikut.

Proposisi $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$ bernilai SALAH jika $P \wedge Q$ bernilai BENAR dan $P \vee Q$ bernilai SALAH. Selanjutnya, $P \wedge Q$ bernilai BENAR hanya jika P, Q bernilai BENAR. Akibatnya, $P \vee Q$ bernilai BENAR.

Jadi, tidak mungkin $P \wedge Q$ bernilai BENAR dan $P \vee Q$ bernilai SALAH.

Akibatnya, $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$ juga tidak mungkin bernilai SALAH.

Jadi, proposisi $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$ adalah suatu Tautologi.

Contoh 1.14. *(Kontradiksi)*

$P \wedge \neg P$ *adalah suatu kontradiksi karena selalu bernilai SALAH. Lihat tabel berikut*

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
B	S	S
S	B	S

Dengan cara lain,

> Proposisi $P \wedge \neg P$ bernilai BENAR jika P bernilai BENAR dan $\neg P$ bernilai BENAR. Ini tidak mungkin terjadi karena jika P BENAR, maka $\neg P$ SALAH. Jadi, tidak mungkin $P \wedge \neg P$ bernilai BENAR sehingga $P \wedge \neg P$ adalah suatu Kontradiksi.

1.4 Aturan Ekivalensi dan Inferensi

Dalam banyak kasus, kita tidak selalu bisa bekerja dengan proposisi-proposisi yang sudah kita miliki. Mungkin karena wujudnya yang sekarang tidak memberikan kemudahan kepada kita untuk menganalisa ataupun memeriksa kebenarannya. Untuk itu, kita perlu membentuk menjadi proposisi lain yang nilai kebenarannya setara atau masih benar secara logika.

1.4.1 Aturan Ekivalensi

Dua proposisi A dan B dianggap ekivalen (dilambangkan dengan $A \equiv B$) jika keduanya memiliki nilai kebenaran yang sama. Dalam hal ini bisa juga dinyatakan $A \Leftrightarrow B$

Pada Tabel 1.6 disajikan beberapa keekivalenan yang penting.

Contoh 1.15.
Kita akan memperlihatkan bahwa keekivalenan pada Tabel 1.6 adalah BENAR

1. *De Morgan (1)* $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$.

   > *Jika* $\neg(P \vee Q)$ *bernilai BENAR, maka* $P \vee Q$ *bernilai SALAH sehingga* P *dan* Q *bernilai SALAH. Akibatnya,* $\neg P$ *dan* $\neg Q$ *bernilai BENAR sehingga* $\neg P \wedge \neg Q$ *bernilai BENAR.*

Tabel 1.6: Aturan Ekivalensi

Nama Aturan	Deskripsi
Komutatif	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ $P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asosiatif	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Distributif	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempoten	$P \wedge P \equiv P$ $P \vee P \equiv P$
Ingkaran Ganda	$\neg(\neg P) \equiv P$
Identitas	$P \wedge SALAH \equiv$ SALAH $P \wedge BENAR \equiv$ P $P \vee SALAH \equiv$ P $P \vee BENAR \equiv$ BENAR
Komplemen	$P \wedge \neg P \equiv$ SALAH $P \vee \neg P \equiv$ BENAR
De Morgan	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Kontrapositif	$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$
Implikasi Material	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
Keekivalenan Material	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
Eksportasi/Importasi	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$

Jika $\neg(P \vee Q)$ *bernilai SALAH, maka* $P \vee Q$ *bernilai BENAR.*
Artinya, setidaknya salah satu dari P *dan* Q *bernilai BENAR.*
Akibatnya, setidaknya salah satu dari $\neg P$ *dan* $\neg Q$ *bernilai SALAH sehingga* $\neg P \wedge \neg Q$ *bernilai SALAH.*

2. *Eksportasi/Importasi* $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$

   Jika $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ *bernilai BENAR, maka* $Q \Rightarrow R$ *bernilai BENAR atau* P *bernilai SALAH. Proposisi* $Q \Rightarrow R$ *bernilai BENAR jika* Q *SALAH atau* R *BENAR.*
   Akibatnya, $P \wedge Q$ *bernilai SALAH sehingga* $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ *bernilai BENAR.*

   Jika $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ *bernilai SALAH, maka* P *bernilai BENAR dan* $(Q \Rightarrow R)$ *bernilai SALAH sehingga* Q *bernilai BENAR dan* R *bernilai SALAH. Akibatnya,* $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ *bernilai SALAH.*

Contoh 1.16.

Tunjukkan keekivalenan berikut adalah BENAR dengan menggunakan aturan-aturan yang sudah ada

1. $\neg(Q \wedge P) \equiv P \Rightarrow \neg Q$
2. $P \wedge [(P \wedge Q) \vee R] \equiv P \wedge (Q \vee R)$

Jawab.

Dengan aturan ekivalensi yang ada, kita peroleh

$$\begin{aligned} \neg(Q \wedge P) &\equiv \neg Q \vee \neg P && (De\ Morgan) \\ &\equiv \neg P \vee \neg Q && (Komutatif) \\ &\equiv P \Rightarrow \neg Q && (Implikasi\ Material) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \wedge [(P \wedge Q) \vee R] &\equiv [P \wedge (P \wedge Q)] \vee (P \wedge R) && (Distributif) \\ &\equiv [(P \wedge P) \wedge Q)] \vee (P \wedge R) && (Asosiatif) \\ &\equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) && (Idempoten) \\ &\equiv P \wedge (Q \vee R) && (Distributif) \end{aligned}$$

1.4.2 Aturan Inferensi

Misalkan kita mempunyai satu atau lebih proposisi majemuk yang terdiri dari beberapa komponen. Pertanyaan yang timbul adalah dapatkah kita membentuk suatu proposisi lain yang dijamin kebenarannya? Ya, dan sudah seharusnya, karena dalam penalaran deduktif kita dapat membuat suatu konklusi berdasarkan proposisi-proposisi sebelumnya yang disebut premis. Kita dapat menyatakan premis baru (konklusi) diinferensikan dari proposisi-proposisi awal (premis). Jadi, aturan-aturan terkait proses ini yang sudah diuji kebenarannya disebut aturan-aturan inferensi. Beberapa inferensi yang penting diperlihatkan pada tabel berikut.

Kita akan perlihatkan bahwa aturan-aturan tersebut BENAR pada beberapa contoh berikut.

Contoh 1.17. *Modus Tollens*

Misalkan $P \Rightarrow Q$ *dan* $\neg Q$ *bernilai BENAR.*

Maka, Q *bernilai SALAH.*

Karena $P \Rightarrow Q$ *bernilai BENAR dan* Q *bernilai SALAH, maka* P *haruslah bernilai SALAH.*

Akibatnya, $\neg P$ *akan bernilai BENAR.*

Contoh 1.18. *Dilema Konstruktif*

Misalkan $[(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S)]$ *dan* $P \vee R$ *bernilai BENAR.*

Tabel 1.7: Aturan Inferensi

Nama Aturan	Premis	Konklusi
Simplifikasi (S)	$P \wedge Q$	P
Penambahan (P)	P	$P \vee Q$
Konjungsi (K)	P, Q	$P \wedge Q$
Silogisme Disjungsi (SD)	$P \vee Q, \neg P$	Q
Modus Ponen (MP)	$P \Rightarrow Q, P$	Q
Modus Tollen (MT)	$P \Rightarrow Q, \neg Q$	$\neg P$
Silogisme Hipotesis (SH)	$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$
Absorpsi (A)	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow (P \wedge Q)$
Dilema Konstruktif (DK)	$(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S), P \vee R$	$Q \vee S$
Dilema Destruktif (DD)	$(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S), \neg Q \vee \neg S$	$\neg P \vee \neg R$

Maka, $(P \Rightarrow Q)$, $(R \Rightarrow S)$, dan $(P \vee R)$ semuanya bernilai BENAR.

Karena $(P \vee R)$ bernilai BENAR, maka setidaknya satu dari keduanya bernilai BENAR.

Jika P yang bernilai BENAR, maka Q juga harus bernilai BENAR. Hal yang sama juga berlaku untuk R dan S.

Jadi, setidaknya satu dari Q dan S harus bernilai BENAR.

Oleh karena itu, $Q \vee S$ bernilai BENAR.

1.5 Latihan

1. Tentukan apakah kalimat berikut proposisi atau bukan. Berikan alasan jika bukan proposisi.

   (a) Rosmala anak Pak Kudun.

   (b) 5 adalah faktor dari 27.

   (c) Edi sedang pergi ke kampus.

   (d) Dilarang berjualan disini!

   (e) Apakah Zul sedang sakit?

2. Misalkan

   A : Seekor komodo memiliki empat kaki.

   B : Susi pergi ke toko buku.

   Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut

   (a) $\neg A \wedge B$

   (b) $\neg B \wedge \neg A$

   (c) $A \wedge \neg B$

   (d) $A \vee \neg B$

   (e) $\neg B \vee \neg A$

3. Tentukan nilai kebenaran implikasi berikut

   (a) Jika anda belajar rajin, maka anda akan lulus ujian.

   (b) Jika Padang ada di pulau Sumatera, maka Denpasar ada di pulau Jawa.

   (c) Jika matahari terbit dari barat, maka hari kemerdekaan Indonesia dirayakan tanggal 17 Agustus.

4. Jika implikasi "$P \Rightarrow \neg Q$" bernilai S, tentukanlah nilai kebenaran pernyataan berikut

   (a) $P \Rightarrow Q$

   (b) $\neg P \Rightarrow \neg Q$

   (c) $P \Rightarrow \neg P$

   (d) $(P \vee Q) \Rightarrow \neg Q$

   (e) $Q \Rightarrow \neg P$

5. Misalkan

   J : Joni akan berlibur di Bali bulan September ini.

   M : Maman memiliki seekor kambing.

   Terjemahkan simbol berikut ke dalam kalimat yang sesuai secara logika

   (a) $J \wedge \neg M$

   (b) $\neg M \Rightarrow J$

   (c) $M \vee J$

   (d) $J \Leftrightarrow M$

6. Misalkan

   P : Saya akan punya banyak waktu.

   Q : Saya akan belajar memainkan piano.

   R : Saya akan punya penghasilan dua kali lipat.

   Simbolkan pernyataan berikut

   (a) Jika saya punya banyak waktu, maka saya akan punya penghasilan dua kali lipat dan saya tidak akan belajar memainkan piano.

   (b) Saya akan punya penghasilan dua kali lipat atau punya banyak waktu jika dan hanya jika saya tidak akan belajar memainkan piano.

(c) Jika saya punya banyak waktu, maka saya akan belajar memainkan piano dan jika saya tidak punya banyak waktu, maka saya akan punya penghasilan dua kali lipat.

(d) Saya akan belajar memainkan piano atau saya akan punya penghasilan dua kali lipat, dan jika saya tidak belajar memainkan piano, maka saya akan punya banyak waktu.

7. Misalkan seorang turis sedang berkunjung ke suatu daerah X dimana setiap penduduknya dapat digolongkan dalam salah satu dari dua kategori: jujur atau pembohong.

   (a) Turis tersebut bertemu dua orang penduduk daerah X, Pandi dan Lugo. Pandi berkata, "Setidaknya satu dari kami adalah pembohong." Apakah Pandi jujur atau pembohong? Bagaimana dengan Lugo? Jelaskan jawabanmu.

   (b) Dalam perjalanan selanjutnya, turis tersebut bertemu Malin dan Mancun. Malin berkata, "Jika saya jujur, maka Mancun adalah seorang yang jujur." Apakah Malin jujur atau pembohong? Bagaimana dengan Mancun? Jelaskan jawabanmu.

   (c) Akhirnya, turis tersebut bertemu Rakuz and Tamax. Rakuz berkata, "Saya adalah seorang pembohong atau Tamax adalah seorang yang jujur." Apakah Rakuz jujur atau pembohong? Bagaimana dengan Tamax? Jelaskan jawabanmu.

8. Tentukan apakah proposisi berikut Tautologi, Kontradiksi, atau Kontingensi.

   (a) $P \vee \neg P$

   (b) $(P \wedge Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)$

(c) $(P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

(d) $\neg(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow Q)$

(e) $(P \Rightarrow \neg R) \vee (\neg Q \Rightarrow P)$

(f) $(P \wedge \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

(g) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R)$

(h) $[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee R)] \wedge (\neg R \Rightarrow \neg Q)$

9. Gunakan keekivalenan yang sudah diketahui untuk menunjukkan kebenaran dari keekivalenan berikut.

   (a) $\neg P \vee (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee Q$

   (b) $\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q) \equiv \neg P$

   (c) $\neg(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \equiv P \vee \neg Q$

   (d) $P \vee [Q \wedge (P \vee \neg Q)] \equiv P \vee (P \wedge Q)$

   (e) $P \wedge [(P \wedge Q) \vee \neg P] \equiv P \wedge Q$

10. Empat komputer, A, B, C, dan D, terhubung pada suatu jaringan. Dikhawatirkan suatu virus komputer telah menginfeksi jaringan tersebut. Teknisi yang memeriksa memberi pernyataan berikut:

    (a) Jika D terinfeksi, maka C juga.

    (b) Jika C terinfeksi, maka A juga.

    (c) Jika D bebas virus, maka B bebas virus atau C terinfeksi.

    (d) A terinfeksi mengakibatkan B terinfeksi atau C bebas virus.

    Jika semua pernyataan ini benar, apa yang bisa disimpulkan?

Bab 2

Argumen dan Kevalidannya

2.1 Pengertian Argumen

Pembuktian memegang peranan penting dalam matematika dan sebagian besar didasarkan pada penalaran deduktif, yaitu kesimpulan yang bersifat khusus diperoleh dari premis-premis yang bersifat umum.

Definisi 2.1. *(**Argumen**)*
*Suatu argumen terdiri dari sekelompok proposisi yang disebut **premis** dan satu kesimpulan dari kelompok proposisi tersebut yang disebut **konklusi**.*

Contoh 2.1. *Saya akan pergi bekerja hari ini atau besok.*
Saya tidak keluar rumah hari ini.
Jadi, saya akan pergi bekerja besok.

Contoh 2.2. *Yang bersalah adalah Anto atau Bambang.*
Yang bersalah adalah Bambang atau Cecep.
Jadi, yang bersalah adalah Anto atau Cecep.

Pada kedua contoh di atas, dua kalimat pertama adalah premis yang diasumsikan benar. Kalimat ketiga adalah kesimpulan yang perlu dipertanyakan kebenarannya.

Pada contoh 1, mungkinkah kesimpulannya salah karena mungkin saja "saya" sakit sehingga tidak bisa bekerja besok? Jika ini terjadi, maka premis 1 menjadi tidak benar karena "saya" di premis 2 tidak masuk hari ini dan juga tidak masuk besok. Sekalipun kita tidak bisa menggaransi kebenaran kesimpulan, tetapi kita tahu bahwa kesimpulan akan salah jika ada satu premis yang salah. Jika kedua premis benar, kita dapat memastikan bahwa kesimpulan juga benar. Disini kelihatan bahwa kesimpulan dipaksa oleh semua premis dan inilah yang menjadi standar yang kita gunakan untuk menguji kebenaran penalaran deduktif.

Kita katakan suatu argumen **valid** jika semua premis benar mengakibatkan kesimpulan menjadi benar. Sementara argumen menjadi **tidak valid** jika kesimpulan bisa salah sekalipun semua premis benar. Lihat Contoh 2 dimana jika yang bersalah adalah Bambang, maka Anto dan Cecep tidak bersalah sehingga kesimpulan menjadi salah sementara semua premis benar.

Pada bab ini, kita akan mendiskusikan beberapa metode untuk membuktikan kevalidan suatu argumen dan berlatih menggunakan bukti formal dengan simbol-simbol yang mewakili suatu proposisi.

2.2 Bukti Formal

Dalam pembuktian kevalidan dari argumen, kita menggunakan bukti formal, yaitu daftar proposisi yang berkaitan. Setiap proposisi yang ada dalam daftar harus memenuhi salah satu dari kriteria berikut:

1. Salah satu dari premis.

2. Inferensi (yang sesuai dengan aturan inferensi) dari satu atau lebih proposisi yang sudah ada di daftar.

3. Proposisi yang ekivalen (sesuai dengan aturan ekivalensi) dengan proposisi lain yang sudah ada pada daftar.

2.2.1 Metode Langsung

Jika kita diberikan suatu argumen dengan premis-premis P_1, P_2, .., P_n dan konklusi Q, maka metode langsung ini merupakan ide Mopus Ponens yang berbentuk:

$$\boxed{(P_1 \wedge P_2 \wedge .. \wedge P_n) \Rightarrow (Q)}$$

sehingga bukti formal kita akan dimulai dengan menuliskan premis-premis P_1 sampai P_n, lalu proposisi-proposisi ekivalen/hasil inferensi, dan berakhir dengan munculnya konklusi Q.

Contoh 2.3. *Periksa kevalidan argumen berikut. Jika valid, buktikan dengan bukti formal:*

Jika kontrak itu valid, maka Herman memiliki hutang. Jika Herman memiliki hutang, maka ia akan bangkrut. Kontrak itu valid. Herman tidak akan bangkrut atau bank akan meminjaminya uang. Jadi, bank tidak akan meminjaminya uang.

***Simbolisasi**:*

K : *Kontrak itu valid*

H : *Herman memiliki hutang*

B : *Herman akan bangkrut*

M : *Bank akan meminjaminya uang*

Premis-premis: $K \Rightarrow H$, $H \Rightarrow B$, K

Konklusi: $\neg M$

Bukti formal:

1	$K \Rightarrow H$	Premis 1
2	$H \Rightarrow B$	Premis 2
3	K	Premis 3
4	$\neg B \vee M$	Premis 4
5	$K \Rightarrow B$	1,3 SH
6	B	5,3 MP
7	M	4,6 SD

Jadi, argumen ini tidak valid karena pembuktian kita memberikan konklusi yang bertentangan dengan konklusi pada argumen.

Contoh 2.4. *Buktikan kevalidan argumen pengacara berikut:*

Jika klien saya bersalah, maka pisau itu berada di dapur. Pisau itu tidak di dapur atau Jono melihat pisau itu. Jika pisau itu tidak ada di rumah pada tanggal 10 November, maka Jono tidak melihat pisau itu. Lebih jauh lagi, jika pisau itu ada di rumah pada tanggal 10 November, maka pisau itu berada di dapur dan golok berada di gudang. Tapi, kita semua tahu bahwa golok tidak berada di gudang. Karena itu, hakim yang mulia, klien saya tidak bersalah.

***Simbolisasi**:*

K : *Klien saya bersalah*

P : *Pisau itu ada di dapur*

J : *Jono melihat pisau itu*

N : *Pisau itu ada di rumah pada tanggal 10 November*

G : *Golok ada di gudang.*

Premis-premis: $K \Rightarrow P$, $\neg P \vee J$, $\neg N \Rightarrow \neg J$, $N \Rightarrow (P \wedge G)$

Konklusi: $\neg K$

Bukti formal:

1	$K \Rightarrow P$	*Premis 1*
2	$\neg P \vee J$	*Premis 2*
3	$\neg N \Rightarrow \neg J$	*Premis 3*
4	$N \Rightarrow (P \wedge G)$	*Premis 4*
5	$\neg G$	*Premis 5*
6	$\neg G \vee \neg P$	*5 Penambahan*
7	$\neg P \vee \neg G$	*6 Komutatif*
8	$\neg(P \wedge G)$	*7 DeMorgan*
9	$\neg N$	*4,8 MT*
10	$\neg J$	*3,9 MP*
11	$\neg P$	*2,10 SD*
12	$\neg K$	*1,11 MT*

Jadi, argumen si pengacara ini valid.

2.2.2 Bukti Bersyarat

Kita akan mulai bagian ini dengan sebuah contoh pembuktian (dengan metode langsung) kevalidan sebuah argumen dengan konklusi berupa implikasi.

Contoh 2.5. *Buktikan kevalidan argumen berikut:*

Jika kita mengadakan pesta, maka kita harus mengundang Lina dan Beni. Jika kita mengundang Lina atau Beni, maka kita harus mengundang Joko. Jadi, jika kita mengadakan pesta, maka kita mesti mengundang Joko.

***Simbolisasi**:*

P : *Kita mengadakan pesta.*

L : *Kita mengundang Lina.*

B : *Kita mengundang Beni.*

J : *Kita mengundang Joko.*

Premis-premis: $P \Rightarrow (L \wedge B)$, $(L \vee B) \Rightarrow J$

Konklusi: $P \Rightarrow J$

Bukti formal:

1	$P \Rightarrow (L \wedge B)$	*Premis 1*
2	$(L \vee B) \Rightarrow J$	*Premis 2*
3	$\neg P \vee (L \wedge B)$	*1 IM*
4	$(\neg P \vee L) \wedge (\neg P \vee B)$	*3 Distributif*
5	$\neg P \vee L$	*4 S*
6	$P \Rightarrow L$	*5 IM*
7	$\neg(L \vee B) \wedge J$	*2 IM*
8	$(\neg L \wedge \neg B) \wedge J$	*7 DeMorgan*
9	$(\neg L \wedge J) \wedge (\neg B \wedge J)$	*8 Distributif*
10	$\neg L \wedge J$	*9 S*
11	$L \Rightarrow J$	*10 IM*
12	$P \Rightarrow J$	*5,11 SH*

Menggunakan metode langsung untuk konklusi berbentuk implikasi seperti contoh di atas tidaklah selalu mudah. Ketika mengalami kesulitan ada alat lain yang disebut Metode **Bukti Bersyarat (BB)**. Idenya berasal dari aturan ekivalensi yang disebut Eksportasi/Importasi, yang diaplikasikan dalam bentuk lebih umum berikut.

$$\boxed{[(P_1 \wedge P_2 \wedge .. \wedge P_n) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \equiv [(P_1 \wedge P_2 \wedge .. \wedge P_n \wedge Q) \Rightarrow R]}$$

Keekivalenan ini meyakinkan kita bahwa argumen dengan premis-premis P_1, P_2, .., P_n dan konklusi $Q \Rightarrow R$ adalah ekivalen dengan argumen yang premis-premisnya P_1, P_2, .., P_n, Q dan konklusinya R.

Jadi, pada Metode Bukti Bersyarat ada proses mendaftarkan Q sebagai premis (tambahan) dan konklusi $Q \Rightarrow R$ dalam bukti formal.

Contoh 2.6. *Buktikan kevalidan argumen berikut dengan menggunakan bukti bersyarat (BB):*

Jika kita mengadakan pesta, maka kita harus mengundang Lina dan Beni. Jika kita mengundang Lina atau Beni, maka kita harus mengundang Joko. Jadi, jika kita mengadakan pesta, maka kita mesti mengundang Joko.

Simbolisasi:

P : *Kita mengadakan pesta.*

L : *Kita mengundang Lina.*

B : *Kita mengundang Beni.*

J : *Kita mengundang Joko.*

Premis-premis: $P \Rightarrow (L \wedge B)$, $(L \vee B) \Rightarrow J$

Konklusi: $P \Rightarrow J$

Bukti formal:

1	$P \Rightarrow (L \wedge B)$	*Premis 1*
2	$(L \vee B) \Rightarrow J$	*Premis 2*
3	P	*BB*
4	$L \wedge B$	*1,3 MP*
5	L	*4 S*
6	$L \vee B$	*5 P*
7	J	*2,6 MP*
8	$P \Rightarrow J$	*3,7 BB*

2.2.3 Metode Taklangsung

Metode lain yang dapat digunakan dalam pembuktian ini disebut *reductio ad absurdum* (RAA) atau **bukti taklangsung**. Pada metode ini, negasi dari konklusi ($\neg Q$) didaftarkan sebagai premis tambahan dan tujuan dari proses bukti formal adalah menemukan suatu kontradiksi (SALAH).

Dasar dari metode ini adalah argumen dengan premis-premis P_1, P_2, .., P_n dan konklusi Q ekivalen dengan argumen dimana premis-premisnya P_1, P_2, .., P_n,$\neg Q$ dan konklusinya SALAH.

Penjelasannya sederhana. Kita tahu bahwa argumen dengan premis-premis P_1, P_2, .., P_n dan konklusi Q valid ketika $P_1 \wedge P_2 \wedge .. \wedge P_n \wedge Q$ bernilai BENAR. Konjungsi tersebut bernilai BENAR jika semua komponen dari konjungsi tersebut bernilai BENAR. Sebagai konsekuensinya, $P_1 \wedge P_2 \wedge .. \wedge P_n \wedge \neg Q$ akan bernilai SALAH karena Q bernilai BENAR.

Contoh 2.7. *Buktikan kevalidan argumen berikut dengan bukti taklangsung (*reductio ad absurdum*):*

Jika Joko bermain sebagai bek, dan Sanip bermain di tim lawan, maka tim wartawan akan menang. Tim wartawan tidak akan menang, atau tim itu akan berada di peringkat terbawah. Tim wartawan tidak berada di peringkat terbawah. Joko bermain sebagai bek. Jadi, Sanip tidak akan bermain di tim lawan.

Simbolisasi:

J : *Joko bermain sebagai bek*

S : *Sanip bermain di tim lawan*

W : *Tim wartawan akan menang*

T : *Tim wartawan berada di peringkat terbawah.*

Premis-premis: $(J \wedge S) \Rightarrow W$, $\neg W \vee T$, $\neg T$, J

Konklusi: $\neg S$

Bukti formal:

1	$(J \wedge S) \Rightarrow W$	*Premis 1*
2	$\neg W \vee T$	*Premis 2*
3	$\neg T$	*Premis 3*
4	J	*Premis 4*
5	S	*RAA*
6	$J \wedge S$	*4,5 Konjungsi*
7	W	*1,6 MP*
8	T	*2,7 SD*
9	$\neg T \wedge T$	*3,8 Konjungsi*
10	*SALAH*	*9 Identitas*
11	$\neg S$	*5 RAA*

Contoh 2.8. *Buktikan kevalidan argumen berikut dengan bukti taklangsung (*reductio ad absurdum*):*

Jika polisi tidak menerima suap atau tersangka berbohong, maka suatu kejahatan terjadi. Ayah tersangka sedang keluar kota. Jika suatu kejahatan terjadi, maka ayah tersangka sedang berada di kota. Karena itu, polisi menerima suap.

Simbolisasi:

P : Polisi tidak menerima suap

T : Tersangka berbohong

K : Kejahatan terjadi

A : Ayah tersangka berada di kota.

Premis-premis: $(P \vee T) \Rightarrow K$, $\neg A$, $K \Rightarrow A$

Konklusi: $\neg P$

Bukti formal:

1	$(P \vee T) \Rightarrow K$	*Premis 1*
2	$\neg A$	*Premis 2*
3	$K \Rightarrow A$	*Premis 3*
4	P	*RAA*
5	$P \vee T$	*4 Penambahan*
6	K	*1,5 MP*
7	A	*3,6 MP*
8	$\neg A \wedge A$	*2,7 Konjungsi*
9	*SALAH*	*8 Komplemen*
10	$\neg P$	*4 RAA*

2.3 Latihan

1. Buktikan kevalidan argumen-argumen berikut dengan simbol-simbol yang sudah ditetapkan.

   (a) Jika program ini efisien, maka ia akan mengeksekusi dengan cepat. Program ini efisien atau ia mengandung virus. Program ini tidak mengeksekusi dengan cepat. Oleh karenanya, program ini memiliki virus.

   Simbolisasi: E, C, V

   (b) Tanaman di kebun tumbuh dengan baik, tetapi tidak tersedia cukup air. Jika sering hujan atau tidak banyak cahaya matahari, maka tersedia cukup air. Oleh karena itu, tanaman di kebun tumbuh dengan baik dan banyak cahaya matahari.

   Simbolisasi: T, A, H, M

   (c) Masalahnya bukanlah jika tarif listrik naik, maka pemakaian akan turun, atau tidak benar bahwa sumber energi murah akan digunakan atau tidak banyak tunggakan. Jadi, pemakaian tidak akan turun dan banyak tunggakan.

   Simbolisasi: T, P, E, B

   (d) Jika ia tidak lulus, maka ia tidak akan menjadi dokter. Ia tidak lulus dan berlatih sepakbola. Ia menjadi dokter atau tidak berlatih sepakbola. Oleh karena itu, ia memenangkan Piala Dunia.

   Simbolisasi: L, D, S, P

   (e) Jika ia minum soda atau makan durian, maka ia akan sakit perut. Ia minum soda dan makan manggis. Oleh karena itu, ia akan sakit perut.

   Simbolisasi: S, D, P, M.

(f) Jika hantu itu nyata, maka akan ada arwah gentayangan di muka bumi dan jika hantu bukan suatu kenyataan, maka kita tidak takut pada gelap. Kita takut gelap atau tidak punya imajinasi. Kita punya imajinasi dan hantu itu tidak nyata. Oleh karena itu, ada arwah gentayangan di muka bumi.
Simbolisasi: H, A, G, I

(g) Jika hari tidak hujan, maka saya akan pergi berbelanja. Jika saya pergi berbelanja, maka jika saya tidak membawa payung, maka hari akan hujan. Jika saya membawa mobil, maka saya tidak membawa payung. Karena itu hari akan hujan atau saya tidak membawa mobil.
Simbolisasi: H, B, P, M.

2. Gunakan bukti bersyarat untuk menunjukkan kevalidan argumen berikut.

(a) Logika itu sulit atau tidak banyak mahasiswa yang menyukainya. Jika matematika itu mudah, maka logika tidak sulit. Jadi, jika banyak mahasiswa yang menyukai logika, maka matematika tidak mudah.
Simbolisasi: L, B, M.

(b) Jika Partai Kecu menang pemilu, maka pajak akan naik dan akan banyak rakyat miskin. Jika pajak naik dan banyak rakyat miskin, maka saya akan menjadi calon walikota. Saya tidak akan menjadi calon walikota. Karena itu, jika Partai Kecu menang pemilu, maka pajak akan naik.
Simbolisasi: K, P, R, W.

(c) Jika Krapai terlibat jaringan narkoba, maka ia akan meninggalkan desanya dan kita tidak akan pernah melihatnya lagi. Jika kita melihat Krapai lagi, maka ia bukan teman dari Gletet. Oleh karena itu, jika Krapai terlibat jaringan narkoba atau ia teman Gletet, maka kita tidak akan pernah melihatnya lagi.

Simbolisasi: K, D, M, T.

3. Buktikan kevalidan argumen berikut dengan RAA (bukti taklangsung).

   (a) Jika Budi mengikuti saranku atau mendengarkan hati nuraninya, ia pasti sudah menjual rumahnya dan pindah ke kampung. Jika ia menjual rumahnya, maka Rosa akan membelinya. Rosa tidak membeli rumahnya. Jadi, Budi tidak mengikuti saranku.

   Simbolisasi: S, H, J, P, R.

   (b) Jika pasukan PETA lengkap, maka Supriyadi akan memenangkan pertempuran. Dukungan dari tiga sayap artileri tersedia atau Supriyadi tidak memenangkan pertempuran. Juga, ini bukan masalah pasukan PETA lengkap dan ketersediaan dukungan dari tiga sayap artileri. Jadi, pasukan PETA tidak lengkap.

   Simbolisasi: P, S, D.

   (c) Pembunuhan dilakukan oleh A atau berdua oleh B dan C. Jika A atau B yang melakukan, maka korbannya pasti diracun. Karena itu, C yang melakukan atau korbannya diracun.

   Simbolisasi: A, B, C, D.

Bab 3

Logika Predikat

Kita akan memulai bagian ini dengan dua argumen.

- Premis A: Semua orang menyukai Ali.
  Konklusi B: Budi menyukai Ali.
- Premis C: Cecep menyukai Ali.
  Konklusi D: Seseorang menyukai Ali.

Jika kita menggunakan logika proposisi untuk memeriksa kevalidan kedua argumen di atas, maka akan ada kemungkinan kedua argumen tersebut tidak valid jika A dan C bernilai BENAR, tapi B dan D bernilai SALAH. Namun, perasaan kita mengatakan bahwa kedua argumen di atas seharusnya valid. Dengan demikian, logika proposisi yang sudah kita pelajari tidak lagi memadai untuk digunakan dalam memeriksa argumen seperti di atas. Kita membutuhkan jenis logika yang lain yang disebut logika predikat.

Logika predikat berkaitan dengan proposisi yang menyatakan:

1. Sesuatu tentang suatu objek, seperti "Adam berkulit hitam."
2. Hubungan antara objek, seperti "Romeo menyukai Juliet."

Ada tiga komponen dari logika predikat, yaitu:

1. **Objek**, seperti: Romeo, mahasiswa, bola, dll.
2. **Predikat**, menggambarkan karakteristik dari objek atau hubungan antara objek-objek, seperti pintar, menyayangi, bulat, dll.
3. **Kuantor**, menyatakan kuantitas dari objek, yang terdiri dari dua jenis, yaitu:
   (a) **kuantor universal** yang ditunjukkan dengan kata **semua**, **untuk setiap**, dan yang sejenisnya.
   (b) **kuantor eksistensial** yang ditunjukkan dengan kata **ada**, **terdapat**, **beberapa**, dan sejenisnya

Contoh 3.1. *(Proposisi dalam Logika Predikat)*

Semua ***mahasiswa*** pintar.

Beberapa ***bola*** *adalah* bundar.

Ada mahasiswa ***menendang*** bola.

3.1 Simbolisasi pada Logika Predikat

Perlambangan pada logika predikat untuk masing-masing komponen adalah sebagai berikut:

1. Predikat dilambangkan dengan huruf besar
2. Objek dilambangkan dengan huruf kecil mengikuti predikat. Jika ada dua objek, urutannya adalah pelaku-penderita.
3. Jika ada kuantor, maka kuantor ditulis terlebih dahulu kemudian diikuti oleh objek dan proposisi predikat. Jika suatu karakteristik P dimiliki oleh

semua x anggota dari himpunan S, kita tulis "$\forall\, x \in S, P(x)$" yang berarti $P(x)$ bernilai BENAR untuk semua $x \in S$. Sementara, jika karakteristik tersebut hanya dimiliki sebagian anggota dari S, kita tulis "$\exists\, x \in S, P(x)$", yang berarti $P(x)$ bernilai BENAR setidaknya untuk satu anggota S. Untuk membuktikannya, kita hanya membutuhkan satu anggota S yang memenuhi kriteria/sifat tersebut.

Contoh 3.2. *(Perlambangan dan maknanya)*

1. *Proposisi "Adi berkulit hitam" dilambangkan dengan Ha dimana H lambang untuk berkulit hitam (predikat) dan a melambangkan Adi (objek).*

2. *Proposisi "Romeo mencintai Juliet" dilambangkan dengan Crj dimana C adalah lambang untuk mencintai (predikat), r melambangkan Romeo (objek/pelaku), dan j melambangkan Juliet (objek/penderita).*

3. *$\forall p, Mpw$ bisa digunakan untuk melambangkan "Semua pria menyukai wanita". M melambangkan menyukai (predikat), p melambangkan pria (objek/pelaku), dan w melambangkan wanita (objek/penderita).*

4. *$\forall x, Sx \Rightarrow Ax$ melambangkan "Semua anak Susilo juga anak Ani".*

5. *$\exists x, Sx \wedge Ax$ melambangkan "Ada anak Susilo yang juga anak Ani".*

6. *$\forall x, \forall y, Bxy \Rightarrow Ayx$ melambangkan "Semua orang yang merupakan bapak dari seseorang juga merupakan anak dari seseorang".*

7. *$\forall x, \exists y, Cyx$ melambangkan "Setiap orang memiliki seseorang yang mencintainya."*

Perhatikan contoh di atas untuk nomor 4 dan 5 yang menunjukkan pengaruh kuantor terhadap proposisi predikat. Untuk menyatakan "juga/adalah",

kuantor universal terkait dengan implikasi, sedangkan **kuantor eksistensial terkait dengan konjungsi**.

3.2 Aturan Penyangkalan

Aturan ekivalensi pada logika proposisi semuanya berlaku juga pada logika predikat. Satu aturan ekivalensi tambahan pada logika predikat adalah aturan penyangkalan.

$$\neg(\forall x \exists y, Pxy) \equiv (\exists x \forall y, \neg Pxy)$$

$$\neg(\exists x \forall y, Pxy) \equiv (\forall x \exists y, \neg Pxy)$$

Secara sederhana aturan ini bisa dimaknai: ketika kita mendorong tanda negasi ke dalam proposisi, kuantornya akan berubah dari $\forall$ menjadi $\exists$ atau sebaliknya, dan proposisi predikatnya akan berubah menjadi ingkarannya.

Contoh 3.3.

$$(\exists x \in \boldsymbol{N})(\forall y \in \boldsymbol{N})(2y \leqslant x)$$

adalah negasi dari

$$(\forall x \in \boldsymbol{N})(\exists y \in \boldsymbol{N})(2y > x)$$

Contoh 3.4. *Proposisi "Takseorangpun koruptor yang menyesal" dapat kita lambangkan dengan* $\forall x, Kx \Rightarrow \neg Mx$ *karena ekivalen dengan* $\neg(\exists x, Kx \wedge Mx)$

3.3 Aturan Inferensi

Semua aturan inferensi pada logika proposisi juga berlaku pada logika predikat ditambah aturan-aturan berikut.

Tabel 3.1: Aturan Inferensi pada Logika Predikat

Nama Aturan	Premis	Konklusi
Pengkhususan Universal (KU)	$\forall x, Px$	Pa untuk sebarang a
Perumuman Universal (UU)	Pa untuk sebarang a	$\forall x, Px$
Pengkhususan Eksistensial (KE)	$\exists x, Px$	Pa untuk suatu a
Perumuman Eksistensial (UE)	Pa untuk suatu a	$\exists x, Px$

Kuantor eksistensial memiliki tingkatan yang lebih rendah dari kuantor universal sehingga dalam suatu argumen yang memuat kedua kuantor, konklusinya **haruslah dalam bentuk kuantor eksistensial**.

Contoh 3.5. *Buktikan kevalidan argumen berikut:*

Ada ilmuwan yang tidak rabun dekat. Semua orang yang memakai kacamata adalah rabun dekat. Semua orang memakai kacamata atau lensa kontak. Karena itu, beberapa ilmuwan memakai lensa kontak.

***Simbolisasi**:*

x : *orang*

Ix : x *adalah ilmuwan*

Rx : x *rabun dekat*

Kx : x *berkacamata*

Lx : x *memakai lensa kontak.*

Premis-premis: $(\exists x, Ix \wedge \neg Rx)$, $(\forall x, Kx \Rightarrow Rx)$, $(\forall x, Kx \vee Lx)$

Konklusi: $\exists x, Ix \wedge Lx$

Bukti formal:

1	$\exists x, Ix \wedge \neg Rx$	Premis 1
2	$\forall x, Kx \Rightarrow Rx$	Premis 2
3	$\forall x, Kx \vee Lx$	Premis 3
4	$Ia \wedge \neg Ra$	1 KE
5	$Ka \Rightarrow Ra$	2 KU
6	$Ka \vee L_a$	3 KU
7	$\neg Ra$	4 Simplifikasi
8	$\neg Ka$	5,7 MT
9	La	6,8 SD
10	Ia	4 Simplifikasi
11	$Ia \wedge La$	10,9 Konjungsi
12	$\exists x, Ix \wedge Lx$	11 UE

Contoh 3.6. *Buktikan kevalidan argumen berikut:*

Semua orang Minang menghormati orang yang mereka kenal dengan baik. Tak ada orang Minang yang menghormati orang yang tidak beradat. Jadi, semua orang Minang hanya mengenal dengan baik orang yang beradat.

Simbolisasi:

x, y : orang

Mx : *x orang Minang*

Hxy : *x meghormati y*

Kxy : *x mengenal dengan baik y*

Bx : *x orang beradat.*

Premis-premis: $(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, Kxy \Rightarrow Hxy)$,

$$(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, \neg Bx \Rightarrow \neg Hxy)$$

Konklusi: $(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, Kxy \Rightarrow Bx)$

Bukti formal:

1	$(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, Kxy \Rightarrow Hxy)$	*Premis 1*
2	$(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, \neg Bx \Rightarrow \neg Hxy)$	*Premis 2*
3	$Ma \Rightarrow (\forall y, Kay \Rightarrow Hay)$	*1 KU*
4	$Ma \Rightarrow (\forall y, \neg Ba \Rightarrow \neg Hay)$	*2 KU*
5	Ma	*BB*
6	$\forall y, Kay \Rightarrow Hay$	*3,5 MP*
7	$\forall y, \neg Ba \Rightarrow \neg Hay$	*4,5 MP*
8	$\forall y, Hay \Rightarrow Ba$	*7 Kontraposisi*
9	$\forall y, Kay \Rightarrow Ba$	*6,8 SH*
10	$Ma \Rightarrow (\forall y, Kay \Rightarrow Ba)$	*5,9 BB*
11	$(\forall x, Mx) \Rightarrow (\forall x \forall y, Kxy \Rightarrow Bx)$	*10 UU*

Contoh 3.7. *Buktikan kevalidan argumen berikut:*

Jika seseorang menyukai atletik, maka ia tidak menyukai karate. Setiap orang menyukai karate atau renang. Seseorang tidak menyukai renang. Jadi, ada orang yang tidak menyukai atletik.

***Simbolisasi*:**

x : *orang*

Ax : x *menyukai atletik*

Kx : x *menyukai karate*

Rx : x *menyukai renang.*

Premis-premis: ($\exists x, Ax \Rightarrow \neg Kx$), ($\forall x, Kx \vee Rx$) ($\exists x, \neg Rx$)

Konklusi: $\exists x, \neg Ax$

Bukti formal:

1	$\exists x, Ax \Rightarrow \neg Kx$	*Premis 1*
2	$\forall x, Kx \vee Rx$	*Premis 2*
3	$\exists x, \neg Rx$	*Premis 3*
4	$Aa \Rightarrow \neg Ka$	*1 KE*
5	$Ka \vee Ra$	*2 KU*
6	$\neg Ra$	*3 KE*
7	Ka	*5,6 SD*
8	$\neg Aa$	*4,7 MT*
9	$\exists x, \neg Ax$	*8 UE*

3.4 Latihan

1. Lambangkan proposisi-proposisi berikut.

   (a) Ana adalah teman Doni dan Paijo adalah temanku.

   (b) Semua teman Doni bukanlah temanku.

   (c) Beberapa temanku adalah teman Paijo dan beberapa teman Paijo anggota geng motor.

   (d) Tidak seorangpun mahasiswa baru yang tidak serius.

   (e) Ada mahasiswa senior yang suka Matematika, tapi tidak suka Bahasa Inggris.

2. Jika Mxy berarti "x menyukai y", jelaskan makna dari simbol-simbol berikut.

(a) $\forall x, \forall y, Mxy$

(b) $\forall x, \exists y, Mxy$

(c) $\exists y, \forall x, Mxy$

(d) $\exists x, \forall y, \neg Mxy$

(e) $\exists x, \exists y, Mxy$

(f) $\exists y, \exists x, \neg Mxy$

3. Misakan $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, dan $S(x)$ adalah proposisi yang menyatakan berturut-turut “x adalah orang Minang“, “x adalah penduduk nagari“, “x adalah pegawai negeri“, dan “x ingin korupsi“. Ekspresikan pernyataan-pernyataan berikut dalam simbol logika predikat.

   (a) Tidak seorangpun orang Minang ingin korupsi.

   (b) Tidak seorangpun pegawai negeri anti korupsi.

   (c) Semua penduduk nagari adalah orang Minang.

   (d) Semua penduduk nagari bukan pegawai negeri.

4. Buktikan kevalidan argumen berikut.

   (a) Sejumlah tanaman adalah bunga. Semua bunga beraroma wangi. Jadi, beberapa tanaman beraroma wangi.
   Tx, Bx, Wx.

   (b) Ada orang yang tampan dan jujur. Semua orang jujur miskin. Karena itu, ada orang yang tampan dan miskin.
   Tx, Jx, Mx.

   (c) Setiap orang dibayar bulanan atau bekerja paruh-waktu. Setiap orang bekerja dua hari seminggu atau tidak bekerja paruh-waktu. Karena itu, setiap orang yang tidak dibayar bulanan bekerja dua hari seminggu.

Bx, Px, Dx

(d) Setiap orang yang tinggal di Jakarta atau Bandung adalah urban dan intelektual. Karena itu, setiap orang yang tinggal di Jakarta adalah urban.

Jx, Bx, Ux, Ix

(e) Semua bilangan yang merupakan bilangan bulat adalah genap atau ganjil. Semua bilangan yang merupakan bilangan bulat adalah genap atau taknol. Ada bilangan yang merupakan bilangan bulat. Jadi, ada bilangan yang genap atau tergolong ganjil dan taknol.

Bx, Px, Lx, Tx.

(f) Semua mahasiswa yang hadir kuliah PDM dan ikut ujian terdaftar pada matakuliah ini. Tidak seorangpun mahasiswa yang terdaftar pada matakuliah ini ikut ujian. Ada mahasiswa yang hadir kuliah. Karena itu, ada mahasiswa yang tidak ikut ujian.

Hx, Ux, Tx.

(g) Semua anggota sindikat adalah penduduk asli atau cukong asing. Setiap anggota sindikat yang dari penduduk asli memiliki tato ular. Setiap anggota sindikat yang cukong asing adalah anggota kartel narkoba. Jadi, semua anggota sindikat yang bukan anggota kartel narkoba memiliki tato ular.

Px, Cx, Tx, Kx

(h) Ada artis yang lebih kaya dari semua orang. Setiap orang yang lebih kaya dari orang lain membayar pajak lebih tinggi dari orang lain. Jadi, ada artis yang membayar pajak lebih tinggi dari orang lain.

Ax, Kxy, Pxy.

Bab 4

Induksi Matematika

Matematika mengenal dua metode berpikir/bernalar: deduksi dan induksi. Sebagian besar metode pembuktian dalam Matematika adalah metode deduksi, yaitu mengikuti sejumlah pemikiran (premis) yang bersifat umum untuk memperoleh suatu kesimpulan (konklusi) yang sifatnya khusus. Perhatikan contoh berikut

Contoh 4.1. *Premis:*
Mahasiswa tahun pertama harus mengikuti kegiatan pengenalan kampus.
Anda merupakan mahasiswa baru.
Kesimpulan:
Anda harus mengikuti kegiatan pengenalan kampus.

Namun, adakalanya metode deduksi tidak dapat digunakan, misalnya untuk membuktikan jumlah berhingga bilangan ganjil yang pertama merupakan suatu kuadrat sempurna. Pada kasus seperti itu digunakan metode induksi, yaitu memperoleh kesimpulan (konklusi) yang bersifat umum dari informasi-informasi (premis) yang bersifat khusus.

4.1 Penalaran Induktif

Perhatikan dua contoh berikut

Contoh 4.2. *Misalkan kita ingin mengetahui jumlah bilangan asli berurutan*

$$1 + 2 + 3 + .. + n$$

Kita perhatikan beberapa kasus khusus, misalnya:

- *untuk n=4,* $1 + 2 + 3 + 4 = (1 + 4) + (2 + 3) = 5 + 5 = 2 \times 5$
- *untuk n=5,* $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (1 + 5) + (2 + 4) + 3 = 6 + 6 + 3 = 2,5 \times 6$
- *untuk n=6,* $1+2+3+4+5+6 = (1+6)+(2+5)+(3+4) = 7+7+7 = 3\times 7$

Dari beberapa premis khusus tadi, kita membuat sebuah dugaan bentuk umum dari solusi permasalahan kita adalah $1 + 2 + 3 + .. + n = \frac{n}{2} \times (n + 1)$

Contoh 4.3. *Diberikan permasalahan jumlah bilangan ganjil berurutan*

$$1 + 3 + 5 + .. + (2n - 1)$$

Kita perhatikan beberapa kasus khusus, misalnya:

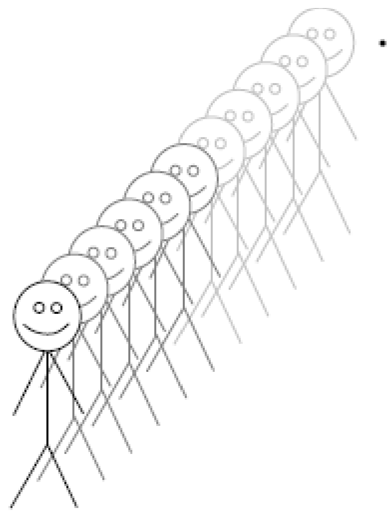
- *untuk n=3,* $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
- *untuk n=4,* $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

Selanjutnya, kita bisa menduga bahwa bentuk umum dari solusi permasalahan kita adalah $1 + 3 + 5 + .. + (2n - 1) = n^2$

Proses penalaran yang kita lakukan sampai diperolehnya dugaan bentuk umum ini disebut penalaran induktif. Bentuk umum yang kita duga tadi perlu dibuktikan kebenarannya. Alat bukti yang bisa digunakan pada permasalahan ini adalah Prinsip Induksi Matematika.

4.2 Prinsip Induksi Matematika

Sebelum kita mengetahui lebih lanjut tentang Prinsip Induksi Matematika, perhatikan ilustrasi tentang barisan orang pada kasus berikut.



Ada beberapa skenario tentang barisan orang tersebut.

1. • Fakta: Orang pertama adalah mahasiswa Biologi.

   Apakah semuanya mahasiswa Biologi? Tentu saja tidak karena orang kedua bisa saja bukan mahasiswa Biologi

2. • Fakta: Ambil sebarang orang di barisan itu. Jika orang itu mahasiswa Kimia, maka orang di belakangnya juga mahasiswa Kimia.

   Apakah semuanya mahasiswa Kimia? Bisa saja tidak karena ada kemungkinan yang terpilih sebelumnya itu bukan mahasiswa Kimia.

3. • Fakta 1: Orang pertama adalah mahasiswa Fisika.
   • Fakta 2: Ambil sebarang orang di barisan itu. Jika orang itu mahasiswa Fisika, maka orang di belakangnya juga mahasiswa Fisika.

   Apakah semuanya mahasiswa Fisika? Jawabannya ya karena orang pertama adalah mahasiswa Fisika, kemudian fakta kedua menyebabkan orang kedua juga, dan seterusnya.

4. • Fakta 1: Orang pertama adalah mahasiswa Matematika.
   • Fakta 2: Ambil sebarang orang di barisan itu. Jika semua orang dari depan sampai orang tersebut adalah mahasiswa Matematika, maka orang di belakangnya juga mahasiswa Matematika.

   Apakah semuanya mahasiswa Matematika? Ya. Hal ini lebih meyakinkan lagi dibanding kasus sebelumnya.

Skenario di atas, terutama yang ketiga dan keempat, memberikan gambaran tentang Prinsip Induksi Matematika. Induksi matematika menggunakan bilangan asli karena bilangan asli memiliki sifat terurut dengan baik (***well-ordering property***).

(**Sifat Terurut dengan Baik**)

Setiap subhimpunan takkosong dari $\mathbf{N}$ mempunyai elemen terkecil.

Lebih detailnya, misalkan $S \subseteq \mathbf{N}$, $S \neq \emptyset$, maka $\exists\ m \in S$ sedemikian sehingga $m \leqslant x$, $\forall\ x \in S$.

Teorema 4.1. *(Prinsip Induksi Matematika)*

Misalkan S subhimpunan takkosong dari $\boldsymbol{N}$ yang memiliki sifat berikut:

1. $1 \in S$
2. *Jika $k \in S$, maka $k + 1 \in S$.*

Maka $S = \boldsymbol{N}$

Bukti. Karena $S \subseteq \mathbf{N}$, kita tinggal membuktikan $\mathbf{N} \subseteq S$.

Andaikan $\mathbf{N} \nsubseteq S$, maka $\mathbf{N} \backslash S$ takkosong. Menurut sifat terurut dengan baik, $\mathbf{N} \backslash S$ memiliki elemen terkecil, misalkan m. Perhatikan bahwa $m \neq 1$

karena $1 \in S$. Karena itu, $m > 1$ sehingga $(m-1) \in \mathbf{N}$. Tetapi, karena m elemen terkecil dari $\mathbf{N} \backslash S$ dan $m - 1 < m$, maka $m - 1$ haruslah anggota S.

Sekarang, jika $m - 1 \in S$, maka menurut sifat S yang kedua $(m-1)+1 = m \in S$. Hal ini kontradiksi dengan $m \in \mathbf{N} \backslash S$. Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah $\mathbf{N} \subseteq S$. Akibatnya, $S = \mathbf{N}$. ■

Secara praktis, penggunaan prinsip induksi matematika dapat dilakukan dengan cara berikut:

> Misalkan untuk setiap $n \in N$, $P(n)$ adalah pernyataan yang berkaitan dengan n. Jika dipenuhi kedua pernyataan berikut:
>
> - $P(n_0)$ benar. (Ini disebut **Langkah Awal**)
> - Jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar. (Ini disebut **Langkah Induktif**)
>
> maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \geqslant n_0 \in N$.

Dengan demikian induksi matematika berdasar pada tautologi berikut:

$$[P(n_0) \wedge (\forall\ k, P(k) \Rightarrow\ P(k+1))] \Rightarrow \forall\ n \geqslant n_0, P(n)$$

Contoh 4.4. *Buktikan dengan induksi bahwa untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$*

$$1 + 2 + 3 + 4 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bukti. Disini $P(n) : 1 + 2 + 3 + 4 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Langkah awal:

  Untuk n=1,

  $$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

  sehingga disimpulkan $P(1)$ benar.

- Langkah induksi:

  Sekarang, misalkan $P(k)$ benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + 4 + .. + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

  maka untuk n=k+1, kita peroleh

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + .. + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

  yang menunjukkan $P(k+1)$ benar.

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbf{N}$. Dengan kata lain, untuk semua $n \in \mathbf{N}$ berlaku

$$1 + 2 + 3 + 4 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

■

Contoh 4.5. *Tunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$, $n^3 + 5n$ habis dibagi 6.*

Bukti. Disini $P(n)$: $n^3 + 5n$ habis dibagi 6.

- Langkah awal:

  Untuk n=1,

$$1^3 + 5(1) = 6$$

  habis dibagi 6. Jadi, $P(1)$ benar.

- Langkah induksi:

  Sekarang, misalkan misalkan $P(k)$ benar, yaitu $k^3 + 5k$ habis dibagi 6. Dengan kata lain, $k^3 + 5k = 6a$ untuk suatu bilangan asli a.

Maka untuk n=k+1, kita peroleh

$$\begin{aligned}(k+1)^3+5(k+1) &= (k^3+3k^2+3k+1)+(5k+5)\\ &= (k^3+5k)+(3k^2+3k)+6\\ &= 6a+3k(k+1)+6\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa k dan k+1 adalah bilangan asli berurutan sehingga salah satunya pasti genap dan yang satunya ganjil. Akibatnya, perkaliannya akan genap. Jadi, $k(k+1)=2b$ untuk suatu bilangan asli b. Jadi, kita peroleh

$$\begin{aligned}(k+1)^3+5(k+1) &= 6a+3k(k+1)+6\\ &= 6a+3(2b)+6\\ &= 6(a+b+1)\end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa $(k+1)^3+5(k+1)$ habis dibagi 6. Hal ini menunjukkan $P(k+1)$ benar.

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbf{N}$. Atau, untuk semua $n \in \mathbf{N}$, n^3+5n habis dibagi 6. ■

4.3 Prinsip Induksi Kuat

Teorema 4.2. *(Prinsip Induksi Kuat)*
Misalkan S subhimpunan dari $\boldsymbol{N}$ sehingga $1 \in S$ dan jika $\{1,2,..,k\} \subseteq S$, maka $k+1 \in S$. Maka $S = \boldsymbol{N}$

Secara praktis, penggunaan prinsip induksi matematika kuat dapat dilakukan dengan cara berikut:

Misalkan untuk setiap $n \in N$, $P(n)$ adalah pernyataan yang berkaitan dengan n. Jika dipenuhi kedua pernyataan berikut:

- $P(n_0)$ benar. (Ini disebut **Langkah Awal**)
- Jika $P(n_0), P(n_0+1), .., P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar. (Ini disebut **Langkah Induktif**)

maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \geqslant n_0 \in N$.

Dengan demikian induksi matematika berdasar pada tautologi berikut:

$$[P(n_0) \wedge ([P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge .. \wedge P(k)] \Rightarrow \; P(k+1))] \Rightarrow \forall\ n \geqslant n_0, P(n)$$

Contoh 4.6. *Pandang barisan berikut:*

b_1=*1*

b_2=*1*

$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$ *untuk* $n > 2$

sehingga diperoleh barisan $1, 1, 3, 7, 17, ...$ *Buktikan bahwa* b_n *ganjil untuk setiap* $n \in \boldsymbol{N}$.

Bukti. Disini $P(n)$: b_n adalah bilangan ganjil.

- Langkah awal:

  Untuk n=1, $b_1 = 1$ adalah bilangan ganjil.

  Jadi, $P(1)$ benar.

- Langkah induksi:

  Sekarang, misalkan misalkan $P(1), P(2), .., P(k)$ benar, yaitu $b_1, b_2, .., b_k$ bilangan ganjil.

  Maka untuk n=k+1, kita peroleh $b_{k+1} = 2b_k + b_{k-1}$ juga bilangan ganjil karena suku pertama pada ruaskanan adalah bilangan genap dan b_{k-1} adalah bilangan ganjil.

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbf{N}$. Atau, untuk semua $n \in \mathbf{N}$, b_n adalah bilangan ganjil. ■

Satu hal yang perlu diingat adalah kadang-kadang penggunaan prinsip induksi kuat bisa memberikan kesimpulan yang salah.

Contoh 4.7. *Pada kasus pernyataan "Semua bilangan asli adalah bilangan ganjil".*
Dengan prinsip induksi kuat, kita tunjukkan bahwa 1 adalah bilangan ganjil. Kemudian, jika $\{1, 2, ..., k\}$ *bilangan ganjil, tentu saja* $k + 1$ *juga bilangan ganjil. Akibatnya, kita bisa menunjukkan bahwa semua bilangan asli adalah ganjil yang merupakan suatu pernyataan yang keliru.*
Tetapi, kalau kita menggunakan prinsip induksi yang umum, kita tidak akan bisa menunjukkan hal itu. Meskipun kita bisa menunjukkan 1 bilangan ganjil, tetapi kita tidak bisa menunjukkan bahwa jika k *bilangan ganjil, maka* $k + 1$ *bilangan ganjil.*

Jadi, sekali lagi, gunakanlah prinsip induksi yang umum, kecuali pada situasi yang memang membutuhkan prnsip induksi yang kuat.

4.4 Latihan

1. Gunakan penalaran induktif untuk menyelesaikan masalah berikut:

   (a) Pada suatu bidang datar terdapat 234 garis lurus. Tidak ada garis-garis yang sejajar atau berimpit. Tidak ada tiga garis atau lebih yang berpotongan di satu titik. Berapakah banyak titik potong garis-garis lurus tersebut?

(b) Pada sebuah lingkaran dibuat 260 titik yang tidak berimpitan. Berapakah banyak talibusur yang menghubungkan setiap dua titik tersebut.

(c) Pada sebuah konperensi ada 65 ilmuwan terkenal yang hadir dan mereka ingin bersalaman satu sama lain. Tentukan banyaknya jabat tangan yang terjadi.

(d) Tentukan maksimum banyaknya daerah yang terjadi jika suatu bidang datar dibagi oleh 70 garis lurus.

2. Tunjukkan bahwa $2^n \geqslant n^2, \ \forall n \geqslant 4$.

3. Tunjukkan bahwa $1^2 + 2^2 + .. + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. Tunjukkan bahwa $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + .. + \dfrac{1}{(n-1) \cdot n} = \dfrac{n-1}{n}$

5. Tunjukkan bahwa $\dfrac{1}{a(a+b)} + \dfrac{1}{(a+b)(a+2b} + .. + \dfrac{1}{[a+(n-1)b][a+nb]} = \dfrac{n}{a(a+nb)}$ dimana a dan b adalah sebarang bilangan asli.

6. Tunjukkan bahwa $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) .. \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

7. Tunjukkan bahwa $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ habis dibagi 9.

8. Tunjukkan bahwa $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ habis dibagi 133.

9. Tunjukkan bahwa $7^{2n} - 48n - 1$ habis dibagi 2304.

10. Tunjukkan bahwa $(1^5 + 2^5 + .. + n^5) + (1^7 + 2^7 + .. + n^7) = 2(1 + 2 + .. + n)^4$ untuk setiap bilangan asli n.

11. Tunjukkan semua bilangan dalam barisan $1007, 10017, 100117, 1001117, 10011117, ...$ dapat dibagi oleh 53.

12. Bilangan Fibonacci didefinisikan sebagai $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ dan $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ untuk $k \geqslant 1$. Tunjukkan untuk setiap $n \geqslant 1$ berlaku
$$F_1^2 + F_2^2 + .. + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

13. Tunjukkan bahwa $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + .. + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$

14. Tunjukkan bahwa $(cos\ x)(cos\ 2x)(cos\ 4x)..(cos\ 2^{n-1}x) = \frac{sin\ 2^n x}{2^n\ sin\ x}$ untuk setiap bilangan asli n dan $x \in \mathbf{R}, sin\ x \neq 0$.

15. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku
$$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + .. + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

16. Buktikan Ketidaksamaan Bernoulli yang menyatakan:
jika $x \geqslant -1$, maka $(1+x)^n \geqslant 1 + xn$ untuk setiap bilangan asli n.

17. Gunakan prinsip induksi kuat untuk menunjukkan bahwa:
    (a) Jika n bilangan bulat lebih besar dari 1, maka n dapat ditulis sebagai hasilkali bilangan-bilangan prima.
    (b) Sebuah barisan (a_n) memenuhi $a_1 = a_2 = 4$ dan $a_{n+1}a_{n-1} = (a_n - 6)(a_n - 12)$ untuk $n = 2, 3, ...$ Tunjukkan barisan ini konstan.
    (c) Jika a dan b memenuhi $a + b = 6$ dan $a \cdot b = 1$, maka $a^n + b^n$ selalu bulat dan bukan kelipatan 5.

18. Tantangan:
    (a) Gunakan prinsip induksi matematika dengan lompatan 4 untuk membuktikan $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ habis dibagi 5 jika n tidak habis dibagi 4.
    (b) Gunakan prinsip induksi matematika dengan lompatan 3 untuk membuktikan tidak ada bilangan berbentuk $2^n + 1$ yang habis dibagi 7.

Bab 5

Pernyataan Matematika dan Strategi Pembuktian

5.1 Pernyataan Matematika

Menurut Prof. Dave Richeson, pernyataan matematika dapat dikelompokkan sebagai berikut:

1. Definisi

   Suatu deskripsi yang tepat dan jelas dari suatu istilah matematika. Ia menggambarkan makna dari suatu istilah dengan memberikan semua sifat yang harus dimilikinya.

2. Teorema

   Suatu pernyataan matematika yang dibuktikan melalui penalaran yang valid. Dalam karya ilmiah matematika, istilah teorema sering diberikan untuk hasil-hasil yang penting.

3. Lemma

Suatu pernyataan matematika yang juga harus dibuktikan melalui penalaran yang valid, tetapi merupakan hasil minor yang tujuan utamanya mendukung pembuktian suatu teorema. Ia merupakan batu loncatan untuk membuktikan teorema.

Contoh: Lemma Zorn, Lemma Urysohn, Lemma Sperner, dll.

4. Corollary

   Suatu pernyataan matematika yang pembuktiannnya (biasanya singkat) dan berdasar pada suatu teorema yang diberikan.

5. Proposition

   Suatu pernyataan matematika yang telah dibuktikan dan menarik, tetapi kurang penting jika dibandingkan dengan teorema.

6. Konjektur

   Suatu pernyataan yang belum dibuktikan, tetapi dipercaya kebenarannya.

   Contoh: Konjektur Collatz, Konjektur Goldbach conjecture, dll.

7. Klaim

   Suatu pernyataan sisipan yang kemudian dibuktikan. Sering digunakan sebagai lemma takresmi.

8. Aksioma/Postulat

   Suatu pernyataan yang dianggap/diasumsikan benar tanpa pembuktian.

   Contoh: Lima Postulat Euclid, Aksioma Zermelo-Frankel, Aksioma Peano, dll.

9. Identitas

   Suatu pernyataan matematika yang memberikan kesamaan antara dua kuantitas.

   Contoh: Identitas Trigonometri, Identitas Euler, dll.

10. Paradoks

    Suatu pernyataan yang dapat ditunjukkan (dengan aksioma dan definisi) bisa bernilai benar dan bernilai salah (memiliki kontradiksi). Paradoks sering digunakan untuk memperlihatkan ketidakkonsistenan suatu teori yang mengagumkan (Paradoks Zeno, Paradoks Russell) atau secara takresmi untuk menggambarkan suatu hasil mengejutkan yang diturunkan dari beberapa aturan/hukum (Paradoks Banach-Tarski, Paradoks Alabama).

5.2 Strategi Pembuktian

Pada bagian ini akan didiskusikan beberapa strategi atau format pembuktian matematika, tetapi perlu ditegaskan bahwa **tidak ada cara yang pasti (dijamin!) untuk sampai pada suatu bukti** dan juga tidak ada bukti yang terbaik. Mungkin perlu kita ingat filosofi tentang pembuktian yang dikemukakan oleh **Yu I. Manin** dalam bukunya ***A Course in Mathematical Logic***:

> ***A good proof is one that make us wiser***

5.2.1 Pembuktian menyangkut Implikasi

Ada tiga strategi dalam pembuktian pernyataan berbentuk implikasi $P \Rightarrow Q$, yaitu: langsung, kontraposisi, dan taklangsung.

Strategi Langsung

Asumsikan P benar dan kemudian buktikan Q

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
——	$P \Rightarrow Q$

Setelah menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
—— P	Q

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan P.

[Pembuktian Q di sini]

Jadi, $P \Rightarrow Q$.

Contoh 5.1. *Misalkan a dan b bilangan real. Buktikan bahwa jika $0 < a < b$, maka $a^2 < b^2$.*

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Kita diberikan hipotesis bahwa a dan b bilangan real. Konklusi kita berbentuk $P \Rightarrow Q$ dimana P adalah pernyataan $0 < a < b$ dan Q adalah pernyataan $a^2 < b^2$. Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan sebagai berikut:

Diberikan	*Tujuan*
a dan b bilangan real	$(0 < a < b) \Rightarrow (a^2 < b^2)$

Berdasarkan strategi pembuktian, kita seharusnya mengasumsikan $0 < a < b$ benar dan menggunakannya untuk membuktikan $a^2 < b^2$ sehingga tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	*Tujuan*
a *dan* b *bilangan real*	
$0 < a < b$	$a^2 < b^2$

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan a *dan* b *bilangan real.*

Misalkan $0 < a < b$.

Karena $a > 0$, *jika dikalikan dengan* a,

maka pertidaksamaan $0 < a < b$ *memenuhi* $0 < a^2 < ab$.

Begitu juga karena $b > 0$, *jika dikalikan dengan* b,

maka pertidaksamaan $0 < a < b$ *memenuhi* $0 < ab < b^2$.

Dengan menyusun sesuai urutan, kita peroleh $0 < a^2 < ab < b^2$.

Jadi, jika $0 < a < b$, *maka* $a^2 < b^2$.

Strategi Kontraposisi

Asumsikan Q salah dan kemudian buktikan bahwa P juga salah

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
—	$P \Rightarrow Q$

Setelah menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
——	
$\neg Q$	$\neg P$

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan Q salah.

[Pembuktian $\neg P$ di sini]

Jadi, $P \Rightarrow Q$.

Contoh 5.2. *Misalkan a, b, dan c bilangan real dan $a > b$. Buktikan bahwa jika $ac \leqslant bc$, maka $c \leqslant 0$.*

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Kita diberikan hipotesis bahwa a, b, dan c bilangan real dan $a > b$. Konklusi kita berbentuk $P \Rightarrow Q$ dimana P adalah pernyataan $(ac \leqslant bc)$ dan Q adalah pernyataan $(c \leqslant 0)$. Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan, masalah di atas adalah sebagai berikut:

Diberikan	*Tujuan*
a, b, dan c bilangan real	
$a > b$	$(ac \leqslant bc) \Rightarrow (c \leqslant 0)$

Berdasarkan strategi pembuktian, kontraposisi dari tujuan kita berbentuk $\neg Q \Rightarrow \neg P$ dimana $\neg Q$ adalah pernyataan yang ekivalen dengan $\neg(c \leqslant 0)$ yaitu $c > 0$ dan $\neg P$ adalah pernyataan yang ekivalen dengan $\neg(ac \leqslant bc)$ yaitu $ac > bc$. sehingga tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	*Tujuan*
a, b, *dan* c *bilangan real*	
$a > b$	
$c > 0$	$ac > bc$

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan a, b, *dan* c *bilangan real dan* $a > b$.

Misalkan $c > 0$.

Karena $a > b$, *jika dikalikan dengan* c *positif,*

maka pertidaksamaan $a > b$ *memenuhi* $ac > bc$.

Jadi, jika $ac \leqslant bc$, *maka* $c \leqslant 0$..

Strategi Tidak Langsung

Asumsikan P dan $\neg Q$ dan kemudian temukan kontradiksi

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
——	$P \Rightarrow Q$

Setelah menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
——	
P	
$\neg Q$	kontradiksi

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan P. Asumsikan $\neg Q$.

[Pembuktian kontradiksi di sini]

Jadi, $P \Rightarrow Q$.

Contoh 5.3. *Misalkan a, b, dan c bilangan real dan $a > b$. Buktikan bahwa jika $ac \leqslant bc$, maka $c \leqslant 0$.*

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Kita diberikan hipotesis bahwa a, b, dan c bilangan real dan $a > b$. Konklusi kita berbentuk $P \Rightarrow Q$ dimana P adalah pernyataan $(ac \leqslant bc)$ dan Q adalah pernyataan $(c \leqslant 0)$. Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan, masalah di atas adalah sebagai berikut:

Diberikan	*Tujuan*
a, b, *dan* c *bilangan real*	
$a > b$	$(ac \leqslant bc) \Rightarrow (c \leqslant 0)$

Berdasarkan strategi pembuktian, kita asumsikan anteseden $(ac \leqslant bc)$ dan negasi dari konsekuen yaitu $(c > 0)$ benar. Tujuan kita selanjutnya adalah menemukan kontradiksi sehingga tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	*Tujuan*
a, b, *dan* c *bilangan real dan* $a > b$	
$ac \leqslant bc$	
$c > 0$	*kontradiksi*

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan a, b, dan c bilangan real dan $a > b$.

Misalkan $ac \leqslant bc$.

Asumsikan $c > 0$.

Karena $a > b$, *jika dikalikan dengan* c *positif,*

maka pertidaksamaan $a > b$ *memenuhi* $ac > bc$.

Kontradiksi dengan $ac \leqslant bc$.

Jadi, jika $ac \leqslant bc$, *maka* $c \leqslant 0$.

5.2.2 Pembuktian menyangkut Negasi

Untuk membuktikan tujuan berbentuk $\neg P$

Strategi : Asumsikan P benar dan kemudian cari kontradiksi.

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
——	$\neg P$

Setelah menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
—— P	kontradiksi

Bentuk Pembuktian Akhir

Andaikan P benar.

[Pembuktian kontradiksi disini]

Jadi, P salah.

Contoh 5.4. *Buktikan jika* $a^2 + b = 13$ *dan* $b \neq 4$, *maka* $a \neq 3$.

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan sebagai berikut:

Diberikan	*Tujuan*
$a^2 + b = 13$	
$b \neq 4$	$a \neq 3$

Berdasarkan strategi pembuktian, kita seharusnya mengasumsikan $a = 3$ *benar dan mencari kontradiksi sehingga tabel diberikan dan tujuan menjadi*

Diberikan	*Tujuan*
$a^2 + b = 13$	
$b \neq 4$	
$a = 3$	*kontradiksi*

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan $a^2 + b = 13$ *dan* $b \neq 4$ *bilangan real.*

Andaikan $a = 3$.

Maka, $a^2 + b = 9 + b \neq 9 + 4 = 13$.

Jadi, $a^2 + b \neq 13$.

Kontradiksi dengan $a^2 + b = 13$.

Karena itu, $a \neq 3$.

Jadi, jika $a^2 + b = 13$ *dan* $b \neq 4$, *maka* $a \neq 3$.

5.2.3 Pembuktian menyangkut Kuantor

Kuantor Universal

Untuk membuktikan tujuan berbentuk $\forall x, P(x)$

Strategi: Ambil sebarang x, lalu buktikan $P(x)$.

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
—	
—	$\forall x, P(x)$

Setelah menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
—	
sebarang x	$P(x)$

Bentuk Pembuktian Akhir

Ambil sebarang x.

[Pembuktian $P(x)$ di sini]

Karena x sebarang, kita dapat menyimpulkan bahwa $\forall x, P(x)$.

Contoh 5.5. *Buktikan bahwa semua bilangan bulat yang genap mempunyai kuadrat yang genap.*

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan sebagai berikut:

Diberikan	*Tujuan*
bilangan bulat genap	$\forall x, x^2$ *genap*

Berdasarkan strategi pembuktian, tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	*Tujuan*
x *sebarang bilangan bulat genap*	x^2 *genap*

Bentuk Pembuktian Akhir

Ambil x *sebarang bilangan bulat genap.*

Maka, $x = 2n$ *untuk suatu* n *bilangan bulat.*

Jika dikuadratkan, maka diperoleh $x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$.

Karena $2n^2$ *adalah bilangan bulat,* $2(2n^2)$ *adalah bilangan genap.*

Karena x *sebarang, kita dapat menyimpulkan bahwa* $\forall x$ *genap,* x^2 *genap.*

Kuantor Eksistensial

Untuk membuktikan tujuan berbentuk $\exists x, P(x)$

Strategi: Temukan suatu x yang memenuhi $P(x)$.

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
——	
——	$\exists x, P(x)$

Setelah menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
—	
pilih x	$P(x)$

Bentuk Pembuktian Akhir

Pilih $x =$ (suatu nilai yang anda tetapkan).

[Pembuktian $P(x)$ di sini]

Jadi, $\exists x, P(x)$.

Contoh 5.6. *Buktikan bahwa terdapat x yang memenuhi $x + 9 = 1$*

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan sebagai berikut:

Diberikan	*Tujuan*
	$\exists\ x, x + y = 1$

Berdasarkan strategi pembuktian, tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	*Tujuan*
pilih $x = ...$	$x + 9 = 1$

Bentuk Pembuktian Akhir

Pilih $x = -8$.

Maka, $x + 9 = (-8) + 9 = 1$.

Jadi, $\exists\ x = -8$ *sehingga* $x + 9 = 1$.

5.2.4 Pembuktian menyangkut Biimplikasi

Untuk membuktikan tujuan berbentuk $P \Leftrightarrow Q$.

Strategi: Buktikan $P \Rightarrow Q$ dan $Q \Rightarrow P$ secara terpisah.

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
—	
—	$P \Leftrightarrow Q$

Setelah menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
—	
—	$P \Rightarrow Q$
	$Q \Rightarrow P$

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan P.

[Pembuktian Q di sini]

Misalkan Q.

[Pembuktian P di sini]

Jadi, $P \Leftrightarrow Q$.

Contoh 5.7. *Misalkan $y > 0$. Buktikan bahwa $xy = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.*

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan sebagai berikut:

Diberikan	*Tujuan*
$y > 0$	$(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$

Berdasarkan strategi pembuktian, tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	*Tujuan*
$y > 0$	$(xy = 0) \Rightarrow (x = 0)$
	$(x = 0) \Rightarrow (xy = 0)$

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan $y > 0$.

Misalkan $xy = 0$.

Karena $y > 0$, *maka* $\frac{1}{y} \in \boldsymbol{R}$ *sehingga*

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y}(x \cdot y) = \frac{1}{y} \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Terbukti jika $xy = 0$, *maka* $x = 0$.

Misalkan $x = 0$.

Maka, $xy = 0 \cdot y = 0$.

Terbukti jika $x = 0$, *maka* $xy = 0$.

Jadi, untuk $y > 0$, $(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.

5.2.5 Pembuktian menyangkut Disjungsi

Untuk membuktikan tujuan berbentuk $P \vee Q$.

Strategi: Jika P berlaku, maka bukti selesai. Jika P tidak berlaku, buktikan Q.

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Sebelum menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
——	
——	$P \vee Q$

Setelah menggunakan strategi:

Diberikan	Tujuan
——	
Jika P, maka bukti selesai	
$\neg P$	Q

Bentuk Pembuktian Akhir

Jika P benar, maka bukti selesai.

Sekarang, andaikan P salah

[Pembuktian Q di sini]

Jadi, $P \vee Q$.

Contoh 5.8. *Buktikan bahwa jika $a \cdot b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$.*

Analisis pendahuluan (pada kertas buram)

Kalau ditabelkan dalam bentuk diberikan dan tujuan sebagai berikut:

Diberikan	*Tujuan*
$a \cdot b = 0$	$a = 0$ *atau* $b = 0$

Berdasarkan strategi pembuktian, tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	*Tujuan*
$a \cdot b = 0$	
$a \neq 0$	$b = 0$

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan $a \cdot b = 0$.

Jika $a = 0$, *maka bukti selesai.*

Sekarang, andaikan $a \neq 0$

maka $\frac{1}{a} \in \boldsymbol{R}$ *sehingga*

$$\begin{aligned} a \cdot b = 0 &\Leftrightarrow \tfrac{1}{a}(a \cdot b) = \tfrac{1}{a} \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow (\tfrac{1}{a} \cdot a) \cdot b = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \end{aligned}$$

Jadi, jika $a \cdot b = 0$, *maka* $a = 0$ *atau* $b = 0$.

5.2.6 Pembuktian Menggunakan Induksi

Untuk membuktikan tujuan berbentuk $\forall n \geqslant n_0, P(n)$.

Strategi: Tunjukkan $P(n_0)$ benar. Asumsikan $P(k)$ benar, lalu buktikan $P(k+1)$ benar.

Strategi:

Diberikan	Tujuan
——	$P(n_0)$ benar
——	$P(k)$ benar $\Rightarrow P(k+1)$ benar

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan $P(n)$ pernyataan yang berkaitan dengan n.

[Pembuktian $P(n_0)$ benar di sini]

Sekarang, misalkan/asumsikan $P(k)$ benar

[Pembuktian $P(k+1)$ benar di sini]

Jadi, $\forall n \geqslant n_0,\ P(n)$.

Contoh 5.9. *Buktikan bahwa untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$*

$$1+2+3+4+..+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pada masalah ini, $P(n) : 1+2+3+4+..+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Berdasarkan strategi pembuktian, tabel diberikan dan tujuan menjadi

Diberikan	*Tujuan*
—–	$P(1)$ *benar, yaitu* $1 = \frac{1(2)}{2}$
—–	$1+2+3+4+..+k = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow 1+2+3+4+..+(k+1) = \frac{k+1(k+2)}{2}$

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan $P(n) : 1+2+3+4+..+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$1 = \frac{1(1+1)}{2}$

sehingga disimpulkan $P(1)$ benar.

Sekarang, misalkan/asumsikan $P(k)$ benar, yaitu $1+2+3+4+..+k = \frac{k(k+1)}{2}$

maka untuk $n = k+1$, kita peroleh

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+..+k+(k+1) &= \tfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \tfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \tfrac{(k+2)(k+1)}{2} \\ &= \tfrac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

yang menunjukkan $P(k+1)$ benar.

Jadi, $1+2+3+4+..+n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$

Bab 6

Himpunan

Sampai saat ini, belum ada definisi yang tepat untuk himpunan sehingga secara matematis himpunan tidak didefinisikan. Meskipun demikian, kita akan tampilkan juga definisi himpunan yang bisa dikatakan takresmi.

Definisi 6.1. *(Himpunan)*

adalah koleksi objek yang memiliki karakteristik tertentu yang jelas.

Sementara Georg Cantor (1845-1918) memberikan definisi berikut

Definisi 6.2. *Himpunan adalah hasil pengumpulan objek-objek tertentu yang telah ditentukan menurut persepsi kita atau menurut pemikiran kita menjadi suatu kesatuan. Objek-objek itu disebut elemen/anggota dari himpunan.*

Contoh 6.1. *(Himpunan)*

Himpunan mahasiswa matematika UNP.

Himpunan bilangan asli.

Himpunan huruf hidup dari kata "doeloe".

Keanggotaan suatu objek dilambangkan dengan tanda "$\in$" yang pertama kali diperkenalkan oleh Peano (1889), sementara lambang untuk bukan anggota adalah "$\notin$". Misalkan $A = \{a, b\}$ maka $a \in A$, dan $c \notin A$.

Representasi dari himpunan dilakukan dengan dua cara, yaitu:

1. Cara enumerasi/pendaftaran.

   Pada cara ini, semua elemen dituliskan dan diletakkan diantara kurung kurawal.

   Contoh 6.2. *Himpunan bilangan prima yang kecil dari 10 ditulis* $\{2, 3, 5, 7\}$.

2. Notasi pembuat himpunan.

   Pada cara ini, diantara kurung kurawal diletakkan variabel, kemudian dengan dibatasi tanda "|" dituliskan sifat yang mengatur variabel tersebut.

   Contoh 6.3. *Himpunan bilangan prima yang kurang dari 10 ditulis* $\{x|x$ *prima,* $x< 10\}$.

Banyaknya elemen berbeda dari suatu himpunan disebut **kardinalitas himpunan**, biasanya dilambangkan dengan $n(..)$ atau $|..|$.

Contoh 6.4. *(Kardinalitas)*
$A = \{a, b, c, d, e\}$ *memiliki kardinalitas 5 atau ditulis* $n(A)$*=5 atau* $|A|$*=5.*
$B = \{a, a, b, c, b, c, a\}$ *memiliki kardinalitas 3 sehingga* $n(B)$*=3 atau* $|B|$*=5.*

Berdasarkan kardinalitasnya, himpunan terbagi menjadi dua, yaitu himpunan berhingga dan himpunan takhingga.

6.1 Beberapa Aksioma Himpunan Zermelo-Frankel

Pada bagian ini akan dibicarakan beberapa aksioma himpunan Zermelo-Frankel dan akibat-akibat dari aksioma tersebut.

Aksioma 6.1. *(Aksioma Kesamaan)*
Misalkan A, B *adalah himpunan. Kita katakan* $A = B$ *jika dan hanya jika keduanya memiliki anggota yang sama.*

Contoh 6.5. *Misalkan* $A = \{x|x \text{ } ganjil, 2 < x < 8\}$ *dan* $B = \{x|x \text{ } prima, 2 < x < 10\}$. *Maka,* $A = B$.

Teorema berikut merupakan konsekuensi dari aksioma ini.

Teorema 6.1. *(Akibat Aksioma Kesamaan)*

1. $\{a, a\} = \{a\}$
2. $\{a, b\} = \{b, a\}$

Bukti. Untuk no.1, jelas bahwa $x \in \{a, a\} \Leftrightarrow x \in \{a\}$. Bukti no. 2 mengikuti hasil tersebut. ■

Teorema ini menunjukkan bahwa pengulangan anggota dalam himpunan diabaikan. Hal ini juga bisa digunakan untuk menjamin bahwa setiap himpunan adalah tunggal.

Selanjutnya, kita definisikan istilah himpunan bagian untuk menunjukkan salah satu hubungan antara dua himpunan.

Definisi 6.3. *(Himpunan Bagian)*
Misalkan A *dan* B *himpunan. Jika untuk setiap* $x \in A$*, berlaku* $x \in B$ *(dengan kata lain,* $x \in A \Rightarrow x \in B$*), maka kita katakan* A *adalah* ***himpunan bagian*** *dari* B *yang dilambangkan dengan* $A \subseteq B$. *Jika* $A \subseteq B$*, tetapi* $A \neq B$*, maka kta katakan* A *adalah* ***himpunan bagian sejati*** *dari* B *yang dilambangkan dengan* $A \subset B$.

Dengan definisi ini, maka kita dapat membuat rumusan baru untuk aksioma kesamaan, yaitu

$$\boxed{A = B} \Leftrightarrow \boxed{A \subseteq B \textbf{ dan } B \subseteq A}$$

Teorema 6.2. *Untuk semua himpunan* A*,* B*, dan* C *berlaku*

1. *$A \subseteq A$*

2. *$A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ mengakibatkan $A = B$.*

3. *Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$.*

Bukti.

1. Misalkan $x \in A$ maka pastilah $x \in A$. Ini menunjukkan $A \subseteq A$

2. Latihan.

3. Latihan.

■

Kita juga perlu mengenal sebuah konsep himpunan yang khusus berikut.

Aksioma 6.2. *(Himpunan Kosong)*

Terdapat sebuah himpunan yang tidak memiliki anggota yang dilambangkan dengan $\varnothing$ atau $\{\}$.

Ketunggalan dari himpunan ini juga dijamin oleh aksioma kesamaan. Himpunan kosong ini memiliki status yang khusus seperti dijelaskan dalam teorema berikut

Teorema 6.3. *Misalkan A suatu himpunan. Maka berlaku $\varnothing \subseteq A$.*

Bukti. Kita akan buktikan dengan menggunakan kontradiksi. Andaikan $\varnothing \subsetneq A$. Ini berarti terdapat $x \in \varnothing$ dimana $x \notin A$. Kontradiksi dengan $\varnothing$ tidak memiliki anggota. Jadi pengandaian salah, haruslah $\varnothing \subseteq A$. ■

Dari konsep himpunan kosong dan himpunan bagian, selanjutnya dibentuk konsep himpunan kuasa.

Aksioma 6.3. *(Himpunan Kuasa)*

Untuk setiap himpunan A, terdapat himpunan yang berupa koleksi semua himpunan bagian dari A dan dilambangkan dengan $\mathcal{P}(A)$

Contoh 6.6. *Untuk himpunan* $A = \{a, b, c, d\}$,

$\mathcal{P}(A) = \{\ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{\ \}\ \}$

Perhatikan bahwa untuk setiap himpunan A berlaku $n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$.

Salah satu hal yang masih diperdebatkan adalah keberadaan semesta (*universal set*). Bertrand Russel dengan argumennya pada tahun 1901 memperlihatkan bahwa tidak ada himpunan yang seperti itu.

Paradoks 6.1. *(Russell)*

Misalkan ada himpunan dari semua himpunan yang dilambangkan dengan S.
Definisikan $\boxed{A = \{x \in S | x \notin x\}}$
Artinya, anggota dari A *adalah yang bukan anggota dari dirinya sendiri. Banyak himpunan yang bisa kita bayangkan sebagai anggota himpunan ini. Contohnya, himpunan semua manusia yang bukan orang. Himpunan* $\boldsymbol{R}$ *juga menjadi anggota* A *karena* $\boldsymbol{R} \in S$ *dan* $\boldsymbol{R}$ *bukan anggota* $\boldsymbol{R}$. *Paradoksnya adalah:*

- *Jika himpunan* $A \in A$, *karena* $A \in S$, *maka berlaku* $A \notin A$.
- *Jika* $A \notin A$, *maka* $A \in A$.

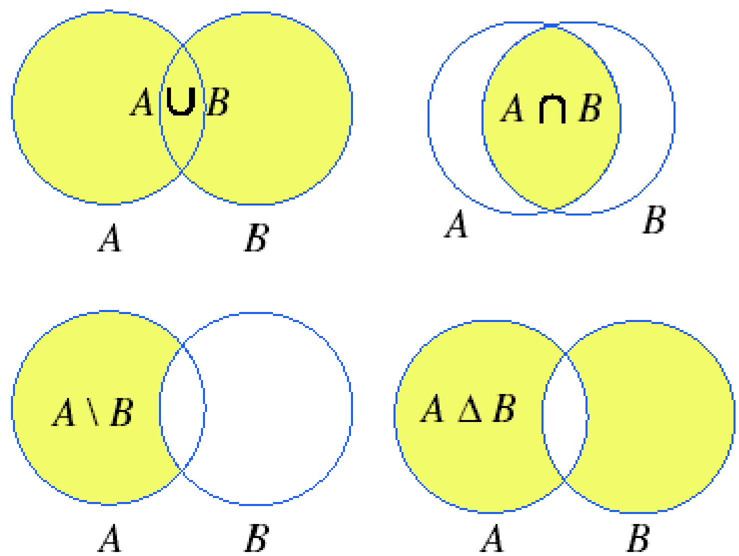
6.2 Operasi pada Himpunan

Ada tiga operasi yang bisa dilakukan pada himpunan, yaitu: gabungan, irisan, dan selisih. Berikut definisi dari masing-masing operasi

Definisi 6.4. *(Operasi Himpunan)*

Misalkan A *dan* B *himpunan. Maka:*

1. *Gabungan dari* A *dan* B *yang dilambangkan dengan* $A \cup B$ *didefinisikan sebagai himpunan* $\{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$.



Gambar 6.1: Diagram Venn untuk operasi himpunan

Secara matematis, hal ini dapat kita nyatakan sebagai

$$\boxed{x \in A \cup B} \Leftrightarrow \boxed{x \in A \ \textbf{\textit{atau}}\ x \in B}$$

2. *Irisan dari A dan B yang dilambangkan dengan $A \cap B$ didefinisikan sebagai himpunan $\{x|x \in A$ dan $x \in B\}$.*

   Secara matematis, hal ini dapat kita nyatakan sebagai

$$\boxed{x \in A \cap B} \Leftrightarrow \boxed{x \in A \ \textbf{\textit{dan}}\ x \in B}$$

3. *Selisih dari A dan B yang dilambangkan dengan $A \backslash B$ didefinisikan sebagai himpunan $\{x|x \in A$ dan $x \notin B\}$.*

   Secara matematis, hal ini dapat kita nyatakan sebagai

$$\boxed{x \in A \backslash B} \Leftrightarrow \boxed{x \in A \ \textbf{\textit{dan}}\ x \notin B}$$

Berkaitan dengan definisi di atas, maka bisa ditetapkan beberapa sifat untuk masing-masing operasi seperti dalam teorema berikut.

Teorema 6.4. *(Sifat Operasi Gabungan)*

Misalkan A, B, dan C himpunan. Maka berlaku

1. $A \cup \varnothing = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cup A = A$
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Bukti.

1. Akan dibuktikan $A \cup \varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A \cup \varnothing$.

   Misalkan $x \in A \cup \varnothing$. Ini berarti $x \in A$ atau $x \in \varnothing$. Karena $\varnothing$ tidak punya anggota, maka haruslah $x \in A$. Jadi, $A \cup \varnothing \subseteq A$.

   Sebaliknya, jelas jika $x \in A$, maka $x \in A \cup \varnothing$ sehingga $A \subseteq A \cup \varnothing$.

2. Latihan.

3. Latihan.

4. Latihan.

5. Akan dibuktikan $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ dan $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

   Misalkan $A \subseteq B$. Ini berarti untuk setiap $x \in A$ berlaku $x \in B$. Akan ditunjukkan $A \cup B \subseteq B$ dan $B \subseteq A \cup B$. Hal yang kedua trivial sehingga kita hanya perlu membuktikan yang pertama. Misalkan $x \in A \cup B$. Ini berarti $x \in A$ atau $x \in B$. Jika $x \in A$, maka $x \in B$ karena $A \subseteq B$. Jadi, $A \cup B \subseteq B$.

Sebaliknya, misalkan $A \cup B = B$. Meskipun ini berarti $A \cup B \subseteq B$ dan $B \subseteq A \cup B$, disini yang kita gunakan hanyalah $A \cup B \subseteq B$ untuk menunjukkan $A \subseteq B$. Misalkan $x \in A$. Maka $x \in A \cup B$. Karena $A \cup B \subseteq B$, maka $x \in B$. Jadi, $A \subseteq B$.

■

Teorema 6.5. *(Sifat Operasi Irisan)*

Misalkan A, B, dan C himpunan. Maka berlaku

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cap A = A$
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Bukti.

1. Andaikan $A \cap \varnothing \neq \varnothing$. Maka terdapat $x \in A \cap \varnothing$. Hal ini berarti terdapat $x \in A$ dan $x \in \varnothing$. Kontradiksi, karena $\varnothing$ tidak punya anggota. Jadi, pengandaian salah. Haruslah $A \cap \varnothing = \varnothing$
2. Latihan.
3. Latihan.
4. Latihan.
5. Latihan.

■

Selain kedua teorema di atas, juga ada teorema yang menyangkut sifat distributif gabungan dan irisan serta teorema De Morgan.

Teorema 6.6. *(Sifat Distributif)*

Misalkan A, B, dan C himpunan. Maka berlaku

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dan $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$
   (a) Misalkan $x \in A \cap (B \cup C)$. Ini berarti $x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$. Hal ini ekivalen dengan $x \in A$ dan ($x \in B$ atau $x \in C$). Selanjutnya, ekivalen dengan ($x \in A$ dan $x \in B$) atau ($x \in A$ dan $x \in C$) yang berarti $x \in A \cap B$ atau $x \in A \cap C$. Jadi, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   (b) Ikuti bukti (a) dengan arah berlawanan.
2. Latihan.

■

Teorema 6.7. *(De Morgan)*

Misalkan A, B, dan C himpunan. Maka berlaku

1. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
2. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $A \backslash (B \cup C) \subseteq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ dan $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) \subseteq A \backslash (B \cup C)$

(a) Misalkan $x \in A \backslash (B \cup C)$. Ini berarti $x \in A$ dan $x \notin (B \cup C)$. Hal ini ekivalen dengan $x \in A$ dan $(x \notin B$ dan $x \notin C)$. Selanjutnya, ekivalen dengan $(x \in A$ dan $x \notin B)$ dan $(x \in A$ dan $x \notin C)$ yang berarti $x \in A \backslash B$ dan $x \in A \backslash C$. Jadi, $x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

(b) Ikuti bukti (a) dengan arah berlawanan.

2. Latihan.

■

Untuk keanggotaan himpunan hasil operasi, kita miliki sifat berikut

Teorema 6.8. *(Kardinalitas Gabungan Himpunan)*

Misalkan A, B, C himpunan. Maka berlaku:

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

2. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Bukti.

1. Kita tahu bahwa jika dua himpunan tidak beririsan, $A \cap B = \varnothing$, maka

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Dengan konsep yang sama, kita peroleh

(a) $n(A) = n(A \cap B) + n(A \backslash B)$ sehingga $n(A \backslash B) = n(A) - n(A \cap B)$

(b) $n(A \cup B) = n(B) + n(A \backslash B)$ sehingga $n(A \backslash B) = n(A \cup B) - n(B)$

Dari kedua hal ini kita peroleh,

$$n(A \cup B) - n(B) = n(A) - n(A \cap B)$$

Dengan menambah kedua ruas dengan $n(B)$, kita peroleh

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

2. Ditinggalkan sebagai latihan.

■

6.3 Latihan

6.3.1 Teori/Pembuktian

1. Misalkan $n(A) = p$ dan $n(B) = q$. Tentukan kardinalitas dari:
   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A \backslash B$
   (d) $A \times B$
2. Tunjukkan bahwa $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
3. Tunjukkan bahwa $A \backslash B \subseteq A$.
4. Buktikan $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.
5. Buktikan $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$.
6. Tunjukkan jika $A \subseteq C$ dan $B \subseteq D$, maka $A \cup B \subseteq C \cup D$ dan $A \cap B \subseteq C \cap D$
7. Buktikan $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
8. Buktikan $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.
9. Buktikan $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$.
10. Buktikan $A \backslash (A \cap B) = A \backslash B$

11. Buktikan

    $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

12. Tentukan himpunan kuasa $\mathcal{P}(B)$ dari himpunan $B = \{1, \{2, 3\}\}$.

13. Buktikan $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ dan $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ dan tidak berlaku $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$

6.3.2 Aplikasi/Soal Cerita

1. Ada dua jenis es krim, coklat dan vanilla. Anda dan 24 orang teman (seluruhnya 25 orang) akan membeli es krim. Jika 15 orang membeli es krim vanilla, dan 20 orang membeli es krim coklat, berapa orang yang membeli keduanya?

2. Sekelompok wisatawan yang terdiri dari 52 orang pergi ke toko suvenir. Setiap orang membeli paling tidak satu suvenir. Toko itu menjual dua jenis suvenir, berbahan kayu dan berbahan logam. Jika 45 orang membeli kedua suvenir, dan 47 orang membeli setidaknya satu suvenir kayu, berapa orang yang hanya membeli suvenir logam?

3. Seratus alien menaiki sebuah pesawat luar angkasa dengan tujuan menginvasi planet bumi. Mereka dibedakan berdasarkan dua karakteristik, mata dan ekor. Beberapa alien memiliki mata tapi tak berekor, beberapa memiliki ekor tapi tanpa mata, dan lainnya memiliki mata dan ekor. Jika 70 alien memiliki mata, dan 50 alien memiliki mata dan ekor, berapa alien yang memiliki mata tanpa ekor? Berapa alien yang memiliki ekor tanpa mata?

4. Tiga puluh sembilan orang anak pergi ke kebun binatang. Ada dua pertunjukan utama yang terbuka untuk dikunjungi, yaitu kolam pesut dan habitat orangutan. Delapan anak mengunjungi kolam pesut, enam orang diantaranya juga mengunjungi habitat orangutan. Berapa banyak anak yang hanya mengunjungi habitat orangutan? Berapa anak yang hanya mengunjungi kolam pesut?

5. Ada 80 orang anak di desa Parakan. Semuanya ikut memeriahkan acara 17 Agustusan. Ada dua aktivitas pada 17 Agustusan, yaitu balap karung dan panjat pinang. Jika 30 orang anak mengikuti kedua aktivitas, dan 24 orang anak hanya ikut balap karung, berapa banyak peserta panjat pinang? Berapa orang anak yang hanya ikut panjat pinang?

6. Ada dua film yang sedang diputar di bioskop lokal, Hantu Taman Lawang dan Indonesia Tanah Air Beta. Sebanyak 91 orang pergi ke bioskop. Jika 45 orang menonton Hantu Taman Lawang, dan 11 orang menonton keduanya, berapa orang yang menonton Indonesia Tanah Air Beta? Berapa banyak karcis yang terjual di bioskop hari itu?

7. Tujuh puluh lima gelas minuman terjual di sebuah warung, dan ada dua jenis minuman: teh dan kopi. Jika 59 orang meminum teh dan 18 orang meminum kopi, berapa orang yang meminum keduanya?

8. Ada 100 siswa dan tiga sesi latihan ditawarkan: sepakbola tiap hari Jumat, bola basket tiap hari Sabtu dan bulu tangkis tiap hari Minggu. Beberapa siswa hanya memilih satu jenis olahraga, beberapa memilih dua jenis, dan beberapa memilih ketiganya. 40 siswa memilih sepakbola. Jika 15 orang memilih ketiga jenis olahraga, 5 memilih sepakbola dan basket tapi tidak memilih bulutangkis, dan 10 orang memilih hanya sepakbola, berapa siswa yang memilih bulutangkis dan sepakbola?

9. Ada 49 rumah di suatu desa yang memelihara binatang, yaitu kucing, anjing, atau monyet. Sebanyak 15 rumah hanya memelihara anjing, 10 rumah hanya memelihara kucing, 5 rumah memelihara hanya anjing dan kucing, dan 3 rumah memelihara ketiganya. Berapa banyak monyet di desa itu?

10. Ada tiga sistem operasi komputer: Windows, Mac, dan Linux. Ada 50 orang di lingkunganmu yang memiliki komputer. 16 diantaranya memiliki ketiga sistem operasi, 5 hanya memiliki Linux, 7 hanya memiliki Mac, dan 19 hanya memiliki Windows. Berapa total sistem operasi komputer yang ada di lingkunganmu?

Bab 7

Relasi

Dalam bagian sebelumnya telah dijelaskan pengertian himpunan. Pada bagian ini, kita akan menggunakan himpunan untuk menjelaskan fungsi. Tetapi, sebelumnya akan diperkenalkan pasangan terurut dan relasi.

7.1 Pasangan Terurut dan Hasilkali Kartesius

Sejauh ini, kita tidak memperhatikan urutan dari anggota himpunan, tetapi pada situasi tertentu, urutan anggota akan menjadi faktor yang penting.

Definisi 7.1. *(**Pasangan Terurut dan Tupel**)*

*Bentuk (a, b) disebut **pasangan terurut** dengan komponen pertama a dan komponen kedua b. Pasangan terurut tersebut disebut juga **tupel-2**. Tupel-n memiliki bentuk $(a_1, a_2, .., a_n)$ dimana a_i adalah komponen ke-i.*

Dari definisi di atas jelas terlihat bahwa $(a, b) = (c, d)$ jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$. Hal ini akan membawa kita ke konsep Perkalian Kartesius yang merupakan himpunan dari semua pasangan terurut dari dua himpunan. Penamaan ini merupakan suatu penghargaan kepada matematikawan Perancis Rene

Descartes (1596-1650).

Definisi 7.2. *(**Hasilkali Kartesius**)*

Hasilkali Kartesius *antara himpunan takkosong A dan B, yang dilambangkan dengan $A \times B$, adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b) dimana a anggota A dan b anggota B.*

Jadi, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Contoh 7.1. *(**Hasilkali Kartesius**)*

Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{a, b, c\}$.

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

Perhatikan bahwa $A \times B$ tidak sama dengan $B \times A$, kecuali dalam beberapa kasus, seperti jika $A = B$. Kardinalitas dari $A \times B$ memenuhi persamaan

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

7.2 Relasi

Definisi 7.3. *(**Relasi**)*

Relasi *dari A ke B adalah himpunan bagian takkosong dari Hasilkali Kartesius $A \times B$.*

Jadi, jika R relasi dari A ke B, maka $R \subseteq (A \times B)$ dan $R \neq \varnothing$. Karena relasi adalah himpunan bagian takkososng dari $A \times B$, maka banyaknya relasi yang bisa dibuat dari A ke B adalah sebanyak kardinalitas himpunan kuasanya dikurangi satu (himpunan kosong)

$$2^{n(A \times B)} - 1$$

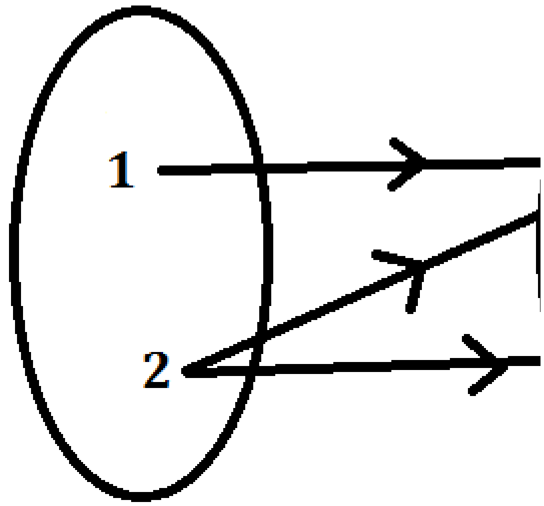
Contoh 7.2. *(**Banyaknya relasi yang mungkin**)*

Misalkan $A = \{1, 2\}$ *dan* $B = \{a, b\}$ *sehingga* $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$. *Relasi yang mungkin dari* A *ke* B *ada sebanyak* $2^4 - 1$, *yaitu 15 buah:*

1. $R_1 = \{(1, a)\}$
2. $R_2 = \{(1, b)\}$
3. $R_3 = \{(2, a)\}$
4. $R_4 = \{(2, b)\}$
5. $R_5 = \{(1, a), (1, b)\}$
6. $R_6 = \{(1, a), (2, a)\}$
7. $R_7 = \{(1, a), (2, b)\}$
8. $R_8 = \{(1, b), (2, a)\}$
9. $R_9 = \{(1, b), (2, b)\}$
10. $R_{10} = \{(2, a), (2, b)\}$
11. $R_{11} = \{(1, a), (1, b), (2, a)\}$
12. $R_{12} = \{(1, a), (1, b), (2, b)\}$
13. $R_{13} = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}$
14. $R_{14} = \{(1, b), (2, a), (2, b)\}$
15. $R_{15} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

Relasi dapat disajikan dalam tiga bentuk representasi

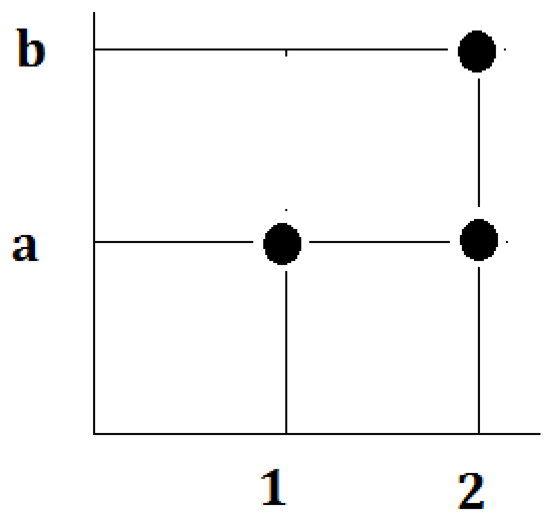
1. Pasangan terurut. Contoh: $R_{13} = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}$



Gambar 7.1: Diagram panah untuk $R_{13} = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}$

2. Diagram panah.

3. Koordinat Kartesius



Gambar 7.2: Koordinat Kartesius untuk $R_{13} = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}$

Relasi dari A ke A disebut **relasi pada** A. Jika R relasi dari A ke B, maka himpunan semua komponen pertama R disebut **domain (daerah asal)** dari R dan himpunan semua komponen kedua dari R disebut **range (daerah hasil)** dari R.

Kita bisa menulis $\boxed{xRy}$ jika dan hanya jika $\boxed{(x, y) \in R}$.

Definisi 7.4. *(**Sifat-sifat Relasi**)*

Misalkan R Relasi pada X. Relasi R dikatakan

1. ***refleksif*** *jika*

   $\forall x \in X,\ xRx$

2. ***simetrik*** *jika*

   $\forall x, y \in X,\ xRy$ *berakibat* yRx.

3. ***transitif*** *jika*

   $\forall x, y, z \in X,\ xRy$ *dan* yRz *berakibat* xRz.

Contoh 7.3. *(**Beberapa relasi dan sifatnya**)*

- *Relasi pada* $\boldsymbol{R}$ *yaitu "=" adalah relasi yang refleksif, simetrik, dan transitif.*

- *Relasi pada* $\boldsymbol{Z}$ *yaitu "<" adalah relasi yang takrefleksif, taksimetrik, dan transitif.*

- *Relasi pada* $\boldsymbol{N}$ *yaitu "≠" adalah relasi yang takrefleksif, simetrik, dan tidak transitif.*

- *Relasi pada manusia yaitu "anak dari" adalah relasi yang takrefleksif, taksimetrik, dan tidak transitif.*

- *Relasi pada manusia yaitu "menyayangi" adalah relasi yang refleksif, taksimetrik, dan tidak transitif.*

- *Relasi* $\{(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(b,d),(d,b),(c,d),(d,c)\}$ *pada* $A = \{b,c,d\}$ *adalah relasi yang takrefleksif, simetrik, dan transitif.*

Definisi 7.5. *(**Relasi Ekivalen**)*

*Suatu relasi dikatakan **relasi ekivalen** jika relasi tersebut refleksif, simetri, dan transitif.*

Contoh 7.4. *(Relasi yang ekivalen dan yang bukan)*

- $R_1 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid x^2 - y^2 = 0\}$ *adalah suatu relasi ekivalen pada* $\boldsymbol{R}$.
- $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,1),(1,2),(1,4),(4,1),(2,4),(4,2)\}$ *adalah suatu relasi ekivalen.*
- $R_3 = \{(3,3),(3,5),(5,5)\}$ *bukan suatu relasi ekivalen.*

Definisi 7.6. *(**Invers relasi**)*

Invers relasi R *dilambangkan dengan* R^{-1} *didefinisikan sebagai*

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

Dalam perspektif invers, relasi R dikatakan simetrik, jika $R = R^{-1}$.

Teorema 7.1. *Misalkan* R *dan* S *relasi. Maka berlaku:*

1. $R = (R^{-1})^{-1}$
2. $R \subseteq S$ *jika dan hanya jika* $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.
3. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
4. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
5. $R \cup R^{-1}$ *dan* $R \cap R^{-1}$ *simetrik.*

Bukti.

1. Kita tahu bahwa $\forall(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (R^{-1})^{-1}$. Ini menunjukkan $R = (R^{-1})^{-1}$.

2. Latihan.

3. Latihan.

4. Latihan.

5. Akan diperlihatkan disini $R \cup R^{-1}$ simetrik.

   Misalkan $(x, y) \in R \cup R^{-1}$. Hal ini berarti $(x, y) \in R$ atau $(x, y) \in R^{-1}$. Jika $(x, y) \in R$, maka $(y, x) \in R^{-1}$ dan jika $(x, y) \in R^{-1}$, maka $(y, x) \in R$. Jadi, $(y, x) \in R$ atau $(y, x) \in R^{-1}$. Dengan kata lain, $(y, x) \in R \cup R^{-1}$. Bukti $R \cap R^{-1}$ simetrik ditinggalkan sebagai latihan.

■

7.3 Latihan

1. Dapatkah $A \times \varnothing$ atau $\varnothing \times A$?

2. Berikan contoh Hasilkali Kartesius yang bisa terjadi dalam kehidupan sehari-hari!

3. Jika $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ dan $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 2\}$, tentukan $A \times B$ dan $B \times A$ dan sketsakan himpunannya.

4. Sketsakan grafik dari relasi berikut

   (a) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$

   (b) $R = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y^2 = 2x\}$

5. Misalkan $S = \{1, 2\}$. Tentukan semua relasi pada S.

6. Berikan contoh relasi yang

   (a) refleksif, tapi taksimetrik dan tidak transitif

   (b) simetrik, tapi takrefleksif dan tidak transitif

   (c) transitif, tapi takrefleksif dan taksimetrik

7. Periksa apakah R berikut merupakan suatu relasi yang refleksif, simetrik, atau transitif.

   (a) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$ pada $A = \{a, b, c, d\}$

   (b) Relasi pada $\mathbf{Z}$ dimana $xRy \Leftrightarrow |x - y| < 1$.

   (c) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$ pada $A = \{a, b, c, d\}$

8. Buktikan bagian-bagian teorema yang belum dituliskan buktinya.

9. Buktikan

   (a) Jika R_1 relasi refleksif dan R_2 relasi, maka $R_1 \cup R_2$ relasi refleksif.

   (b) Jika R_1 dan R_2 relasi simetrik, maka $R_1 \cup R_2$ relasi simetrik.

   (c) Jika R_1 dan R_2 relasi transitif, maka $R_1 \cup R_2$ relasi transitif.

   (d) Jika R relasi simetrik, maka R^{-1} relasi simetrik.

   (e) Jika R relasi refleksif, maka $R \cap R^{-1} \neq \varnothing$.

Bab 8

Fungsi

8.1 Pengertian Fungsi

Definisi formal dari fungsi adalah sebagai berikut.

Definisi 8.1. *(**Fungsi**)*

Misalkan A, B himpunan.

Fungsi f dari A ke B adalah suatu relasi $f \subseteq A \times B$ dimana

$\boxed{\textit{setiap } x \in A \textit{ berpasangan dengan tepat satu } y \in B}$.

Dalam bahasa teori himpunan, fungsi $f : A \to B$ dapat dinyatakan sebagai

$$f = \{(x, y) \in A \times B | x \in A, y \in B\}$$

Pasangan (x, y) di dalam fungsi dapat juga dinyatakan dengan $y = f(x)$.

Himpunan A yang menjadi elemen pertama dari pasangan terurut fungsi disebut **domain** dari fungsi f sementara B disebut **kodomain** dari fungsi f. Selanjutnya, kita punya

$$D_f = \{x \in A | ((x, y) \in f \textit{ untuk suatu } y \in B\}$$

yang disebut **daerah asal** dari fungsi f dan

$$R_f = \{y \in B | ((x, y) \in f \text{ untuk suatu } x \in A\}$$

yang disebut **range(daerah hasil)** dari fungsi f.

Dengan demikian, jika $f : A \to B$ suatu fungsi, maka $D_f = A$ dan $R_f \subseteq B$.

Jadi, $f : A \to B$ adalah fungsi jika memenuhi:

1. $\boxed{D_f = A}$
2. $\boxed{\text{jika } (a, b) \text{ dan } (a, b') \in f, \text{ maka } b = b'}$

Secara geometris, suatu fungsi dapat diperiksa dengan menarik sebarang garis vertikal di setiap titik pada domainnya. Jika garis itu memotong grafik f paling banyak satu kali, maka f adalah suatu fungsi.

Contoh 8.1. *$f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{N}$ dimana $f(x) = -x + 5$ adalah suatu fungsi.*

Bukti.

1. Karena f terdefinisi untuk semua $x \in \mathbf{Z}$, maka $D_f = \mathbf{Z}$.
2. Misalkan (x, y) dan $(x, y') \in f$. Ini berarti $y = -x + 5$ dan $y' = -x + 5$ sehingga $y = y'$.

Jadi, f adalah fungsi. $\blacksquare$

Contoh 8.2. *$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dimana $f(x) = x^2$ adalah suatu fungsi.*

Bukti.

1. Karena f terdefinisi untuk semua $x \in \mathbf{R}$, maka $D_f = \mathbf{R}$.
2. Misalkan (x, y) dan $(x, y') \in f$. Ini berarti $y = x^2$ dan $y' = x^2$ sehingga $y = y'$.

Jadi, f adalah fungsi. ■

Contoh 8.3. *$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dimana $f(x) = ln\ x$ bukan suatu fungsi.*

Bukti. Karena f hanya terdefinisi untuk $x > 0$, maka $D_f \neq \mathbf{R}$.

Jadi, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dimana $f(x) = ln\ x$ bukan suatu fungsi. ■

Tetapi, $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ dimana $f(x) = ln\ x$ adalah suatu fungsi.

Contoh 8.4. *$f : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ dimana $f(x) = \pm\sqrt{x}$ bukan suatu fungsi.*

Bukti.

1. Karena f terdefinisi untuk semua $x \in \mathbf{R}^+$, maka $D_f = \mathbf{R}^+$.
2. Persyaratan kedua tidak dipenuhi. Untuk menyangkal, kita ambil satu kasus, misalkan $(4, 2)$ dan $(4, -2) \in f$, tetapi $2 \neq -2$.

Jadi, f bukan fungsi. ■

8.2 Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif

Pada bagian ini akan kita bahas tiga tipe khusus dari fungsi, yaitu: fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.

8.2.1 Fungsi Injektif

Fungsi injektif atau yang kita kenal sebagai fungsi satu-satu atau fungsi into didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 8.2. *(**Fungsi Injektif**)*

*Fungsi $f : A \to B$ dikatakan fungsi **injektif** jika*

$$\boxed{(x, y)\ dan\ (x', y) \in f,\ maka\ x = x'}.$$

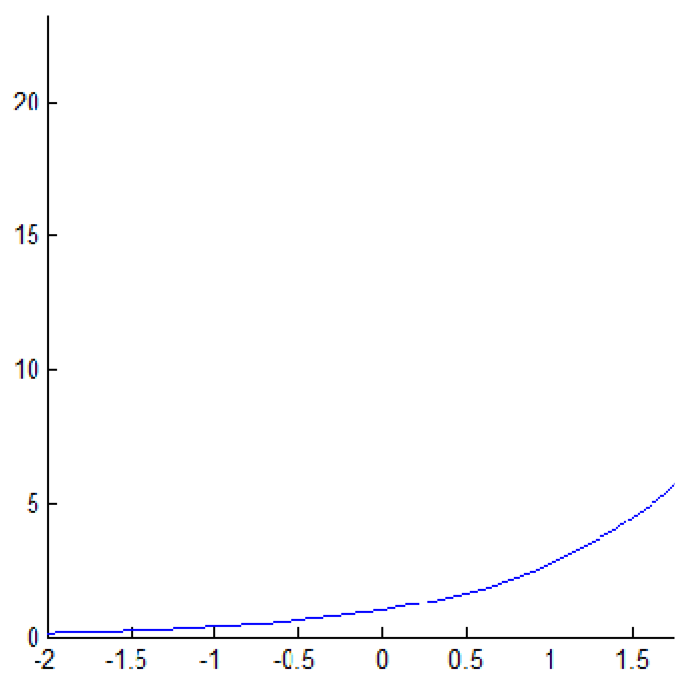
Pernyataan di atas dapat juga dinyatakan sebagai

$$f(x) = f(x^{'}) \Rightarrow x = x^{'}$$

atau setara dengan

$$x \neq x^{'} \Rightarrow f(x) \neq f(x^{'})$$

yang secara harfiah berarti suatu fungsi injektif memasangkan satu anggota range dengan tepat satu anggota domain. Secara geometris, pada suatu fungsi injektif f, jika kita menarik sebarang garis datar sejajar sumbu x, maka garis itu memotong grafik fungsi f paling banyak di satu tempat. Seperti pada grafik fungsi e^x berikut



Gambar 8.1: Grafik fungsi e^x

Contoh 8.5. *$f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dimana $f(x) = 2x + 5$ adalah fungsi injektif.*

Bukti. Misalkan (x, y) dan $(x^{'}, y) \in f$. Ini berarti $y = 2x + 5$ dan $y = 2x^{'}+5$ sehingga kita peroleh $2x+5 = 2x^{'}+5$. Dengan sama-sama menambah kedua sisi dengan -5 dan mengalikan kedua sisi dengan $\frac{1}{2}$, diperoleh $x = x'$. Jadi, fungsi $f(x) = 2x + 5$ injektif. ■

Contoh 8.6. *$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dimana $f(x) = x^2$ bukan fungsi injektif.*

Bukti. Untuk menyangkal, cukup kita ambil suatu kasus, misalnya untuk $y = f(x) = 4$, terdapat 2 dan -2 yang jelas tidak sama, tetapi $2^2 = (-2)^2 = 4$. Jadi, $f(x) = x^2$ bukan fungsi injektif. ■

8.2.2 Fungsi Surjektif

Fungsi surjektif atau yang kita kenal sebagai fungsi pada atau fungsi onto didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 8.3. *(**Fungsi Surjektif**)*
*Fungsi $f : A \to B$ dikatakan fungsi **surjektif** jika $f(A) = B$.*

Pernyataan di atas dapat juga dinyatakan sebagai

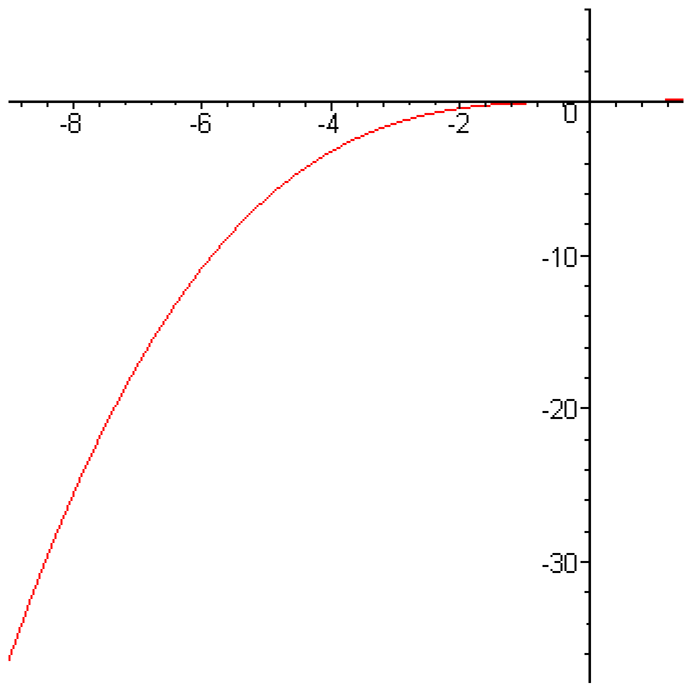
$$\boxed{\forall y \in B, \exists x \in A \ni y = f(x)}$$

Pernyataan di atas secara harfiah berarti pada suatu fungsi surjektif semua anggota range memiliki pasangan anggota domain. Secara geometris, pada suatu fungsi surjektif f, jika kita menarik sebarang garis datar sejajar sumbu x, maka garis itu pasti memotong grafik fungsi f. Hal ini dapat dilihat pada grafik fungsi x^3 berikut.

Contoh 8.7. *$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dimana $f(x) = 2x + 5$ adalah fungsi surjektif.*

Bukti. Ambil sebarang $y \in R_f$. Maka terdapat $x = \frac{y-5}{2}$ sehingga $f(x) = f(\frac{y-5}{2}) = 2(\frac{y-5}{2}) + 5 = y - 5 + 5 = y$. Jadi, fungsi $f(x) = 2x + 5$ surjektif. ■

Contoh 8.8. *$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dimana $f(x) = x^2$ bukan fungsi surjektif.*



Gambar 8.2: Grafik fungsi x^3

Bukti. Untuk menyangkal, cukup kita ambil suatu kasus, misalnya untuk $y = f(x) = -1$, tidak terdapat x yang memenuhi $f(x) = x^2 = -1$. Jadi, $f(x) = x^2$ bukan fungsi surjektif. ■

8.2.3 Fungsi Bijektif

Fungsi bijektif adalah fungsi yang injektif dan surjektif. Fungsi ini juga dikenal sebagai fungsi satu-satu pada.

Contoh 8.9. *$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dimana $f(x) = 2x + 5$ adalah fungsi bijektif karena injektif dan surjektif.*

8.3 Komposisi dan Invers

8.3.1 Fungsi Komposisi

Misalkan kita memiliki dua fungsi $f : A \to B$ dan $g : B \to C$. Timbul pertanyaan bagi kita adakah fungsi dari A ke C yang masih mempertahankan sifat-sifat dari f dan g atau fungsi komposisi dari f dan g. Dalam bahasa yang lebih matematis pertanyaan ini sama dengan

> Adakah $g \circ f : A \to C$ sehingga $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ untuk setiap $x \in A$?

Hal ini membawa kita ke definisi berikut yang memberikan syarat adanya fungsi komposisi tersebut.

Definisi 8.4. *(**Fungsi Komposisi**)*
Misalkan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$. Jika $R_f \subseteq D_g = B$, maka fungsi komposisi $g \circ f : A \to C$ didefinisikan sebagai $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ untuk setiap $x \in A$.

Fungsi komposisi memiliki sifat mempertahankan kekhususan bentuk dari fungsi pembentuknya seperti diperlihatkan dalam teorema berikut

Teorema 8.1. *Untuk fungsi komposisi berlaku*

1. *Jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ injektif, maka $g \circ f : A \to C$ injektif*

2. *Jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ surjektif, maka $g \circ f : A \to C$ surjektif*

Bukti.

1. Pertama, akan diperlihatkan bahwa $g \circ f : A \to C$ adalah suatu fungsi. Misalkan (a, c) dan $(a, c^{'}) \in g \circ f$. Maka terdapat b dan $b^{'} \in B$ dimana (a, b), $(a, b^{'}) \in f$ dan (b, c), $(b^{'}, c^{'}) \in g$. Karena f fungsi dan (a, b), $(a, b^{'}) \in$

f, maka $b = b'$. Dan karena g fungsi dan (b, c), $(b', c') \in g$ serta $b = b'$, maka $c = c'$. Jadi, $g \circ f$ fungsi.

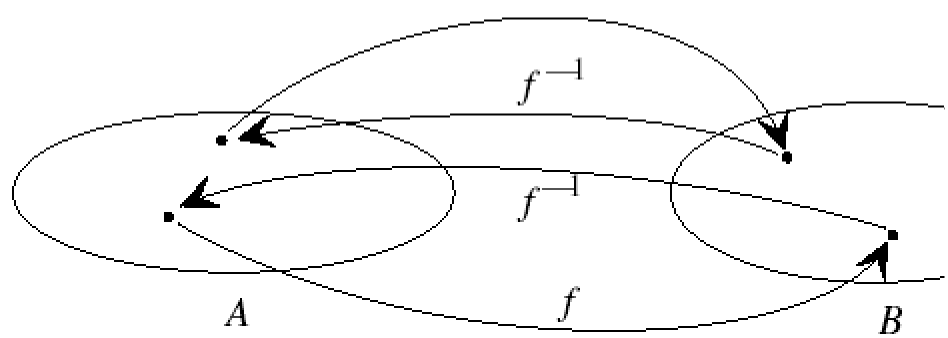
Selanjutnya, untuk menunjukkan $g \circ f$ injektif, misalkan (a, c), $(a, c') \in g \circ f$. Maka terdapat b dan $b' \in B$ dimana (a, b), $(a, b') \in f$ dan (b, c), $(b', c') \in g$. Karena g injektif dan (b, c), $(b', c') \in g$, maka $b = b'$. Dan karena f injektif dan (a, b), $(a, b') \in f$ serta $b = b'$, maka $a = a'$. Jadi, $g \circ f$ injektif.

2. Latihan

■

8.3.2 Invers Fungsi

Jika fungsi $f : A \to B$ injektif (sehingga $f : A \to R_f$ bijektif), maka kita dapat membuat fungsi baru $g : R_f \to A$ dengan aturan $g(y) = x$ bila $y = f(x)$. Dalam hal ini dinotasikan $g = f^{-1}$ atau dikatakan g adalah invers dari f.



Gambar 8.3: Ilustrasi tentang fungsi dan inversnya

Contoh 8.10. *Fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x^3 + 1$ adalah bijektif. Tentukan inversnya.*

Dengan menuliskan $y = x^3 + 1$, *maka diperoleh* $x = \sqrt[3]{y-1}$.

Dengan demikian, kita peroleh $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

8.4 Peta dan Prapeta

Definisi 8.5. *(**Peta dan Prapeta**)*

Misalkan $f : A \to B$ *fungsi dengan* $D_f = A$ *dan* $R_f \subseteq B$.

- *Jika* $E \subseteq A$, *maka peta dari* E *dibawah* f *adalah subhimpunan* $f(E)$ *yang didefinisikan sebagai*

$$f(E) := \{f(x)|x \in E\}$$

- *Jika* $H \subseteq B$, *maka prapeta dari* H *dibawah* f *adalah subhimpunan* $f^{-1}(H)$ *yang didefinisikan sebagai*

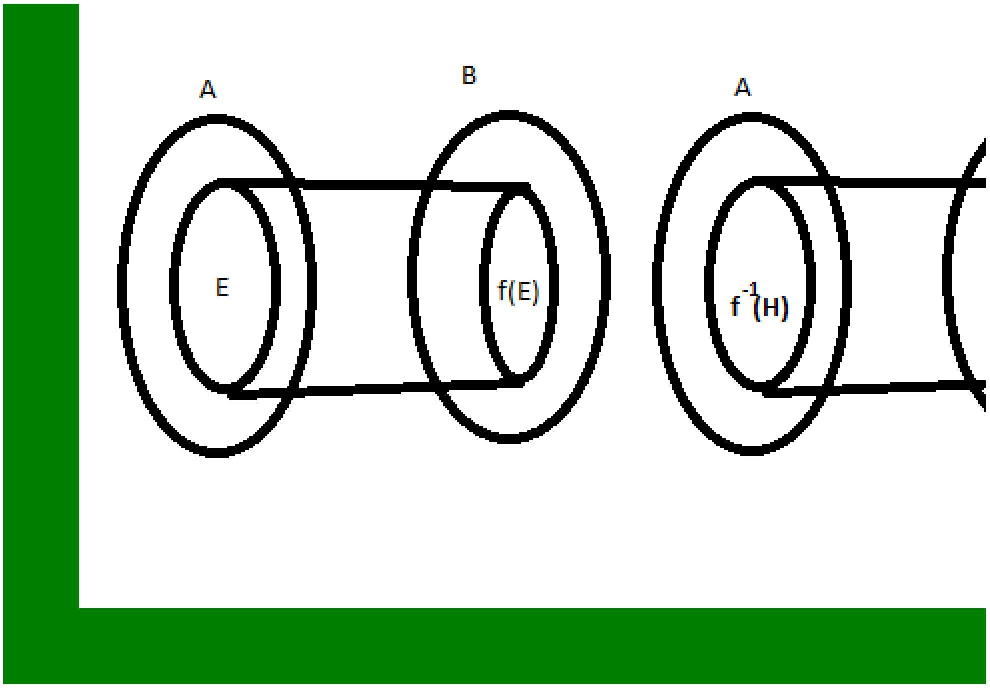
$$f^{-1}(H) := \{x \in A|f(x) \in H\}$$

Contoh 8.11.

Untuk peta dan prapeta, ada beberapa sifat yang dimiliki seperti dimuat dalam teorema berikut

Teorema 8.2. *Misalkan* $f : A \to B$ *fungsi dan* $E, F \subseteq A$. *Maka berlaku*

1. *jika* $E \subseteq F$, *maka* $f(E) \subseteq f(F)$
2. $f(E \bigcap F) \subseteq f(E) \bigcap f(F)$
3. $f(E \bigcup F) = f(E) \bigcup f(F)$
4. $f(E \backslash F) \subseteq f(E)$



Gambar 8.4: Peta dan Prapeta

Bukti.

1. Misalkan $E \subseteq F$. Ambil sebarang $y \in f(E)$. Maka terdapat $x \in E$ sehingga $y = f(x)$. Karena $E \subseteq F$, maka $x \in F$. Akibatnya, $y = f(x) \in f(F)$. Jadi, $f(E) \subseteq f(F)$

2. Kita sudah tahu bahwa $E \bigcap F \subseteq E$ dan $E \bigcap F \subseteq F$. Dengan menggunakan hasil (1), diperoleh $f(E \bigcap F) \subseteq f(E)$ dan $f(E \bigcap F) \subseteq f(F)$. Akibatnya, $f(E \bigcap F) \subseteq f(E) \bigcap f(F)$

3. Latihan

4. Karena $E \backslash F \subseteq E$, dengan menggunakan hasil (1), diperoleh $f(E \backslash F) \subseteq f(E)$.

■

Teorema 8.3. *Misalkan $f : A \to B$ fungsi dan $G, H \subseteq B$. Maka berlaku*

1. *jika* $G \subseteq H$, *maka* $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$

2. $f^{-1}(G \bigcap H) = f^{-1}(G) \bigcap f^{-1}(H)$

3. $f^{-1}(G \bigcup H) = f^{-1}(G) \bigcup f^{-1}(H)$

4. $f^{-1}(G \backslash H) = f^{-1}(G) \backslash f^{-1}(H)$

Bukti.

1. Misalkan $G \subseteq H$. Ambil sebarang $x \in f^{-1}(G)$. Ini berarti $f(x) \in G$. Karena $G \subseteq H$, maka $f(x) \in H$. Hal ini berarti $x \in f^{-1}(H)$. Jadi, $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$

2. Akan ditunjukkan $f^{-1}(G \bigcap H) \subseteq f^{-1}(G) \bigcap f^{-1}(H)$ dan $f^{-1}(G) \bigcap f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G \bigcap H)$.

   - Kita sudah tahu bahwa $G \bigcap H \subseteq G$ dan $G \bigcap H \subseteq H$. Dengan menggunakan hasil (1), diperoleh $f^{-1}(G \bigcap H) \subseteq f^{-1}(G)$ dan $f^{-1}(G \bigcap H) \subseteq f^{-1}(H)$. Akibatnya, $f^{-1}(G \bigcap H) \subseteq f^{-1}(G) \bigcap f^{-1}(H)$.

   - Ambil sebarang $x \in f^{-1}(G) \bigcap f^{-1}(H)$. Ini berarti $x \in f^{-1}(G)$ dan $x \in f^{-1}(H)$. Dengan kata lain, $f(x) \in G$ dan $f(x) \in H$ sehingga $f(x) \in G \bigcap H$. Hal ini berarti $x \in f^{-1}(G \bigcap H)$. Jadi, $f^{-1}(G) \bigcap f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G \bigcap H)$.

3. Latihan.

4. Latihan.

■

8.5 Latihan

1. Ada delapan fungsi berbeda $f : \{a, b, c\} \to \{0, 1\}$. Temukan semua.

2. Apakah himpunan berikut fungsi atau bukan? Jelaskan

   - $f : \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid 3x + y = 4\}$.
   - $f : \{(x^4, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

3. Tentukan apakah fungsi berikut injektif dan/atau surjektif.

   - $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dimana $f(n) = 2n + 1$.
   - $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dimana $f(m, n) = 3m - 4n$.
   - $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dimana $f(x) = |x| + x$
   - $f : \mathbf{R} - \{2\} \to \mathbf{R} - \{5\}$ dimana $f(x) = \dfrac{5x + 1}{x - 2}$

4. Misalkan $g(x) = x^2$ dan $f(x) = x + 3$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. Misalkan $h = g \circ f$.

   - Tentukan $h(E)$ jika $E = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leqslant x \leqslant 1\}$
   - Tentukan $h^{-1}(G)$ jika $G = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leqslant x \leqslant 4\}$

5. Berikan contoh dua fungsi f dan g fungsi dari $\mathbf{R}$ ke $\mathbf{R}$ dimana $f \neq g$, tetapi $g \circ f = f \circ g$.

6. Fungsi $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ yang didefinisikan dengan $f(m, n) = (5m + 4n, 4m + 3n)$ adalah bijektif. Tentukan inversnya.

7. Misalkan $f : A \to B$ bijektif. Tunjukkan $f^{-1} : B \to A$ bijektif.

8. Misalkan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ fungsi. Tunjukkan jika $g \circ f$ injektif, maka f injektif.

9. Buktikan bagian-bagian teorema yang belum dibuktikan.

Bab 9

Himpunan Hingga dan Takhingga

Himpunan bilangan asli sebenarnya cukup untuk keperluan menghitung anggota dari setiap himpunan takkosong yang hingga. Bagaimanapun, di matematika terdapat banyak himpunan takhingga, misalnya himpunan bilangan asli, himpunan bilangan bulat, dan himpunan bilangan real. oleh karena itu, penting sekali untuk dapat menghitung himpunan seperti itu dan menggunakan konteks korespondensi datu-satu untuk mengembangkan teori tentang himpunan kardinal takhingga.

Definisi 9.1. *(**Himpunan dengan Kardinalitas Sama**)*
Misalkan A dan B himpunan. Kita katakan A dan B memiliki kardinalitas yang sama, dilambangkan dengan $\boxed{A \sim B}$, jika terdapat pemetaan satu-ke-satu dari A ke B.

Contoh 9.1. *Misalkan A himpunan bilangan asli yang genap dan B himpunan bilangan asli yang ganjil. Himpunan $A \sim B$ karena terdapat pemetaan satu-ke-satu*

$$f : A \to B$$

$$a \mapsto a - 1$$

Definisi 9.2. *(**Himpunan Hingga dan Takhingga**)*

*Himpunan A dikatakan **hingga** jika:*

1. *A himpunan kosong, atau*

2. *$A \sim I_n$ dimana $I_n = \{1, 2, .., n\}$ untuk suatu $n \in \mathbf{N}$.*

*Himpunan A dikatakan **takhingga** jika A bukan himpunan hingga.*

9.1 Himpunan Terbilang, Terhitung dan Takterhitung

9.1.1 Enumerasi

Jika sebuah himpunan H memiliki n anggota, maka anggota tersebut dapat didaftarkan secara berurutan sebagai: $h_1, h_2, \ldots, h_k$

Definisi 9.3. *(**Enumerasi**)*

$h_1, h_2, \ldots, h_k$ disebut enumerasi *dari himpunan H.*

Contoh 9.2. *Enumerasi dari himpunan $\{1, 5, 4, 3\}$ antara lain:*

- $1, 5, 4, 3$

- $5, 1, 3, 4$

- $4, 1, 3, 5$

Ketika sebuah himpunan A takhingga, maka kita tidak bisa melalkukan enumerasi pada semua elemennya sampai tuntas. Tetapi, kita tetap bisa mengambil salah satu anggota sebagai a_1, selanjutnya a_2, dan seterusnya. Proses tersebut tetap bisa disebut enumerasi jika:

- Semua anggota himpunan memperoleh kesempatan dinomori; dan
- Tidak ada anggota yang dinomori dua kali.

Contoh 9.3. $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ *adalah enumerasi bilangan bulat taknegatif.*

Definisi 9.4. *(**Himpunan Terbilang dan Terhitung**)*
*Sebuah himpunan takhingga A dikatakan **terbilang** jika ia memiliki suatu enumerasi*

$$a_1, a_2, .., a_n, ..$$

*Himpunan A dikatakan **terhitung** jika himpunan tersebut hingga atau terbilang.*

Contoh 9.4.
Himpunan berikut terhitung

1. *Himpunan semua siswa di kelas (hingga).*
2. *Himpunan A berupa bilangan bulat taknegatif (enumerasi: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$); Sebenarnya, urutannya tidak harus rapi seperti itu, misalnya enumerasi:* $0, 10, 5, 11, 4, 2, 17, 2, 1, 28, 3, ...$
3. *Himpunan bilangan genap (enumerasi: $0, 2, 4, ..$)*

Teorema 9.1. *(**Sifat-sifat Himpunan Terhitung**)*
Pada himpunan terhitung berlaku:

1. *Jika B terhitung dan $A \subset B$, maka A terhitung.*

2. *Jika A and B terhitung, maka $A \cup B$ terhitung.*

3. *Jika $A_1, .., A_n$ terhitung, maka $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ terhitung.*

4. *Jika $A_1, .., A_n, ..$ terhitung,*

   maka gabungan terhitung himpunan $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ juga terhitung.

5. *Jika A and B terhitung, maka $A \times B$ juga terhitung.*

6. *Jika $A_1, .., A_n$ terhitung, maka $A_1 \times \cdots \times A_n$ terhitung.*

Bukti. Enumerasi dari masing-masing himpunan dapat dilakukan dengan cara berikut:

1. Enumerasi anggota B dan abaikan yang bukan anggota A.

2. Enumerasi anggota A dan B bergantian $(a_1, b_1, a_2, b_2, ..)$.

3. Latihan (Petunjuk: Induksi Matematika menggunakan bukti 2)

4. Enumerasi seperti pada $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:

   $a_{1,1}, a_{2,1}, a_{1,2}, a_{3,1}, a_{2,2}, a_{1,3}, ..$ dimana $a_{i,j}$ adalah elemen ke-j dari A_i.

5. Enumerasi seperti pada $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:

   $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), ...$

6. Latihan (Petunjuk: Induksi Matematika menggunakan bukti 5).

■

9.1.2 Himpunan Takterhitung

Sejauh ini semua himpunan yang kita bicarakan adalah terhitung

Adakah himpunan yang takterhitung?

Sebelum membicarakan sebuah contoh himpunan takterhitung, kita terlebih dulu mengenal lemma berikut.

Lemma 9.1. *(**Representasi Unik Bilangan pada** $[0, 1)$)*
Setiap bilangan real $x \in [0, 1)$ dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots d_i \cdots$$

dimana d_i adalah digit antara 0 dan 9 dan barisan digit tersebut tidak memiliki ujung berupa takhingga banyaknya digit 9.

Contoh 9.5. *Beberapa contoh klasik untuk bilangan-bilangan tersebut:*

- $0 = 0.0000 \cdots$
- $0.5 = 0.50000 \cdots$
- $0.5 = 0.49999 \cdots$ *(Ini bentuk representasi yang tidak dibenarkan)*
- $\frac{1}{3} = 0.333333 \cdots$
- $\pi = 3.141592653 \cdots$

Teorema 9.2. *(**Cantor**)*
R *adalah himpunan takterhitung.*

Bukti. (Metode Diagonalisasi Cantor)
Untuk membuktikan **R** takterhitung cukup dengan membuktikan $[0, 1)$ takterhitung.
Andaikan $[0, 1)$ terhitung.
Misalkan $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots$ adalah enumerasi dari $[0, 1)$.
Akan ditunjukkan terdapat suatu elemen yang tidak termasuk dalam enumerasi ini.

Dengan menggunakan Lemma Representasi Unik, kita dapat menulis s_n sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc}
s_1 & = & 0, & \underline{d_{1,1}} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & d_{1,5} & \cdots \\
s_2 & = & 0, & d_{2,1} & \underline{d_{2,2}} & d_{2,3} & d_{2,4} & d_{2,5} & \cdots \\
s_3 & = & 0, & d_{3,1} & d_{3,2} & \underline{d_{3,3}} & d_{3,4} & d_{3,5} & \cdots \\
s_4 & = & 0, & d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & \underline{d_{4,4}} & d_{4,5} & \cdots \\
s_5 & = & 0, & d_{5,1} & d_{5,2} & d_{5,3} & d_{5,4} & \underline{d_{5,5}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Kita akan mengkonstruksi suatu elemen x yang tidak termasuk dalam enumerasi ini.

Amati contoh berikut:

$$\begin{array}{cccccccc}
s_1 & = & 0, & \underline{1} & 5 & 7 & 3 & 5\cdots \\
s_2 & = & 0, & 0 & \underline{0} & 4 & 7 & 3\cdots \\
s_3 & = & 0, & 4 & 5 & \underline{7} & 0 & 3\cdots \\
s_4 & = & 0, & 9 & 7 & 3 & \underline{5} & 7\cdots \\
s_5 & = & 0, & 4 & 3 & 8 & 1 & \underline{0}\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ddots \\
 & & & & & & & \\
x & = & 0, & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\cdots
\end{array}$$

dimana $x_i = 0$ jika $d_{i,i} = 0$ dan $x_i = 1$ jika $d_{i,i} \neq 0$.

Akibatnya, $x \neq s_1$, $x \neq s_2$, $x \neq s_3$, $\ldots$

Artinya, x tidak ter-enumerasi (Kontradiksi)

Jadi, pengandaian salah, $[0, 1)$ takterhitung.

Selanjutnya, $\mathbf{R}$ takterhitung. $\blacksquare$

Kita selanjutnya dapat memanfaatkan cara pembuktian ini untuk menunjukkan bahwa banyak lagi himpunan seperti $\mathbf{C}$, $[5.3, 10)$, atau himpunan takberhingga karakter/string adalah takterhitung.

9.1.3 Rangkuman

Hirarki himpunan yang semakin lama semakin besar:

1. Himpunan kosong.
2. Himpunan hingga (himpunan kosong, himpunan dengan kardinalitas 1, 2, sampai n)
3. Himpunan terbilang: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, ..
4. Himpunan takterhitung: $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, ..

Adakah himpunan yang lebih besar dari $\mathbf{N}$ dan lebih kecil dari $\mathbf{R}$? Belum ada yang tahu!

9.2 Latihan

1. Tunjukkan himpunan berikut terhitung
   (a) Himpunan semua bilangan prima.
   (b) Himpunan bilangan bulat $\mathbf{Z}$.
   (c) Himpunan titik pada bidang: $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.
   (d) Himpunan bilangan rasional $\mathbf{Q}$
2. Jika A, B, dan C himpunan. Buktikan bahwa
   (a) $A \sim A$

(b) Jika $A \sim B$, maka $B \sim A$

(c) Jika $A \sim B$ dan $B \sim C$, maka $A \sim C$.

3. Buktikan bahwa $\mathbf{N} \sim \mathbf{Z}$.

4. Buktikan bahwa $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$.

5. Buktikan jika $A_1, .., A_n$ terhitung, maka $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ terhitung.

6. Buktikan jika $A_1, .., A_n$ terhitung, maka $A_1 \times \cdots \times A_n$ terhitung..

Referensi

Bartle, Robert G. and Donald R. Sherbert (2011). **Introduction to Real Analysis, 4th Edition**. John Wiley.

Fletcher, Peter (1996). **Foundations of Higher Mathematics**. Brooks/Cole.

Garnier, Rowan and John Taylor (1996). **100% Mathematical Proof**. John Wiley.

Manin, Yu I. (2009). **A Course in Mathematical Logic for Mathematicians (Graduate Texts in Mathematics), 2nd ed.**. Springer.

Milewski, Emil G. (1994). **The Topology Problem Solver**. Research and Education Association.

Patty, C. Wayne (1993). **Foundations of Topology**. ITP.

Russell, Bertrand (2010). **Principles of Mathematics**. Routledge Classics.

Sibley, Thomas Q. (2009). **Foundations of Mathematics**. John Wiley.

Sukirman (2006). ***Logika dan Himpunan***. Hanggar Kreator.

Suppes, Patrick (1999). **Introduction to Logic**. Dover Publications.

Velleman, Daniel J. (2006). **How to Prove It, 2nd ed.**. Cambridge.

Index