

DIKTAT KULIAH
KALKULUS PEUBAH BANYAK
(IE-308)

BAB 7 INTEGRAL PERMUKAAN

Diktat ini digunakan bagi mahasiswa
Jurusan Teknik Industri Fakultas Teknik
Universitas Kristen Maranatha

Ir. Rudy Wawolumaja M.Sc



JURUSAN TEKNIK INDUSTRI - FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS KRISTEN MARANATHA
BANDUNG
2012

Bab 7. INTEGRAL PERMUKAAN

7.1. Permukaan Parametrik

Sebelum membahas integral permukaan, maka akan dibahas terlebih dulu bagaimana menuliskan persamaan suatu permukaan dalam bentuk parameter atau bagaimana memparameterisasi (parameterize) suatu permukaan.

Dalam melakukan parameterisasi suatu kurva, nilai t dalam interval $[a, b]$ diambil dan dimasukkan kedalam

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Menghasilkan vektor posisi untuk setiap titik pada kurva yang dimaksud.

Demikian juga dengan permukaan, untuk setiap titik, (u, v) , dalam ruang 2 dimensi D diambil dan dimasukkan kedalam persamaan,

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

Menghasilkan vector posisi untuk tiap titik pada permukaan S yang dimaksud.

Bentuk diatas adalah **representasi parametric** dari permukaan S .

Persamaan parametric / **parametric equations** dari suatu permukaan adalah setiap komponen dari representasi parametric (vector) yang dituliskan sebagai,

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

Contoh 7.1.1. Tentukan permukaan apakah yang dinyatakan oleh representasi parametric

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + u \cos v \vec{j} + u \sin v \vec{k}$$

Solution

$$x = u \qquad y = u \cos v \qquad z = u \sin v$$

$$y^2 + z^2 = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 (\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2 = x^2$$

Sehingga didapat persamaan,

$$x^2 = y^2 + z^2$$

Dalam bab Permukaan Quadric ini adalah permukaan sebuah cone yang terbuka sepanjang sumbu - x .

Bagaimana halnya bila diberikan suatu bentuk permukaan dan diminta untuk menuliskan dalam bentuk representasi parametric.

Contoh 7.1.2. Dapatkan representasi parametric dari permukaan berikut ini,

(a) elliptic paraboloid $x = 5y^2 + 2z^2 - 10$.

(b) elliptic paraboloid $x = 5y^2 + 2z^2 - 10$ yang ada didepan bidang yz .

(c) Bola $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

(d) Silender $y^2 + z^2 = 25$.

(a) **Elliptic paraboloid** $x = 5y^2 + 2z^2 - 10$.

Karena permukaan dalam bentuk $x = f(y, z)$ maka dapat dengan cepat ditulis persamaan parametric sebagai berikut,

$$x = 5y^2 + 2z^2 - 10 \qquad y = y \qquad z = z$$

Sehingga vector representasi parametric didapat,

$$\vec{r}(y, z) = (5y^2 + 2z^2 - 10)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(b) Elliptic paraboloid $x = 5y^2 + 2z^2 - 10$ yang berada didepan bidang- yz .

Persoalan sama dengan contoh 2b dengan pembatasan, sehingga bentuk vector parametris nya sama dengan contoh 2b,

$$\vec{r}(y, z) = (5y^2 + 2z^2 - 10)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Pembatasan bahwa permukaan ada didepan bidang- yz berarti, $x \geq 0$.

Sehingga, $5y^2 + 2z^2 - 10 \geq 0$ atau $5y^2 + 2z^2 \geq 10$

(c) Bola $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

Dalam koordinat bola, persamaan sebuah bola dengan radius a adalah,

$$\rho = a$$

Sehingga persamaan bola dalam soal diatas dalam koordinat bola adalah $\rho = \sqrt{30}$.

Dan dengan rumus konversi dari koordinat Cartesian ke koordinat bola,

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad z = \rho \cos \varphi$$

Sehingga representasi parametric dari permukaan bola diatas adalah,

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \sqrt{30} \sin \varphi \cos \theta \vec{i} + \sqrt{30} \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + \sqrt{30} \cos \varphi \vec{k}$$

Dengan batasan,

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(d) Silender $y^2 + z^2 = 25$.

Dalam koordinat silendris, persamaan diatas adalah $r = 5$.

Dan dengan rumus konversi koordinat Cartesian ke koordinat

$$x = x \quad y = r \sin \theta \quad z = r \cos \theta$$

Sehingga representasi parametrik dari silender diatas adalah,

$$\vec{r}(x, \theta) = x\vec{i} + 5 \sin \theta \vec{j} + 5 \cos \theta \vec{k}$$

Dengan batasan $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Secara umum setiap fungsi permukaan dapat dinyatakan dalam bentuk representasi parametric sebagai berikut,

$$z = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$$

$$x = f(y, z) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(x, y) = f(y, z)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$y = f(x, z) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(x, y) = x\vec{i} + f(x, z)\vec{j} + z\vec{k}$$

Mencari bidang singgung pada suatu permukaan parametrik.

Misal diketahui suatu permukaan parametric S ,

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

Dicari bidang singgung pada permukaan S diatas.

$$\vec{r}_u(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\vec{k}$$

$$\vec{r}_v(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\vec{k}$$

Bila $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ maka $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ adalah orthogonal pada permukaan S . $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ adalah vektor normal yang akan digunakan untuk merumuskan persamaan bidang singgung.

Contoh 7.1.3. Cari persamaan bidang singgung pada permukaan,

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + 2v^2\vec{j} + (u^2 + v)\vec{k}$$

Pada titik $(2, 2, 3)$.

Jawab

Let's first compute $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Here are the two individual vectors.

$$\vec{r}_u(u, v) = \vec{i} + 2u\vec{k} \quad \vec{r}_v(u, v) = 4v\vec{j} + \vec{k}$$

Perkalian silang $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$, yang merupakan vector normal \vec{n} adalah,

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 4v & 1 \end{vmatrix} = -8uv\vec{i} - \vec{j} + 4v\vec{k}$$

Titik $(2, 2, 3)$ pada $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + 2v^2\vec{j} + (u^2 + v)\vec{k}$ berarti

$$2 = u \quad \Rightarrow \quad u = 2$$

$$2 = 2v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \pm 1$$

$$3 = u^2 + v$$

Didapat dua kemungkinan nilai v . Dengan memasukkan nilai u ke persamaan ke 3, didapat nilai v yang dipakai, yaitu

$$3 = 4 + v \quad \Rightarrow \quad v = -1$$

Sehingga, dengan $u = 2$ dan $v = -1$, didapat vector normal adalah,

$$\vec{n} = 16\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$$

Bidang singgung adalah,

$$16(x-2) - (y-2) - 4(z-3) = 0$$

$$16x - y - 4z = 18$$

Mencari luas permukaan parametric S .

Untuk mencari luas permukaan parametric S ,

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

Dibutuhkan vektor $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

Luas permukaan S pada range (u, v) yaitu titik-titik pada daerah D adalah,

$$A = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dA$$

Contoh 7.1.4. Cari luas permukaan potongan bola radius 4 yang terletak didalam silinder

$x^2 + y^2 = 12$ dan diatas bidang $-xy$.

Bentuk parameterisasi dari permukaan bola adalah,

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = 4 \sin \varphi \cos \theta \vec{i} + 4 \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + 4 \cos \varphi \vec{k}$$

Perlu ditentukan daerah pembatas D , batasan jangkauan θ adalah, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Untuk menentukan batasan jangkauan φ ., dilakukan substitusi persamaan silinder kedalam persamaan bola untuk mendapatkan nilai z dimana bola dan silinder beririsan.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

$$12 + z^2 = 16$$

$$z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$$

Karena salah satu syarat bahwa potongan bola terletak diatas bidang-xy, maka nilai z yang diambil adalah : $z = 2$. Radius bola =4, $\rho = 4$.

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$2 = 4 \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Sehingga batas jangkauan (range) φ adalah, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$

Langkah berikut menentukan $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi$.

$$\vec{r}_\theta(\theta, \varphi) = -4 \sin \varphi \sin \theta \vec{i} + 4 \sin \varphi \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{r}_\varphi(\theta, \varphi) = 4 \cos \varphi \cos \theta \vec{i} + 4 \cos \varphi \sin \theta \vec{j} - 4 \sin \varphi \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 \sin \varphi \sin \theta & 4 \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ 4 \cos \varphi \cos \theta & 4 \cos \varphi \sin \theta & -4 \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= -16 \sin^2 \varphi \cos \theta \vec{i} - 16 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta \vec{k} - 16 \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - 16 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta \vec{k} \\ &= -16 \sin^2 \varphi \cos \theta \vec{i} - 16 \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - 16 \sin \varphi \cos \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \vec{k} \\ &= -16 \sin^2 \varphi \cos \theta \vec{i} - 16 \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - 16 \sin \varphi \cos \varphi \vec{k} \end{aligned}$$

Nilai absolute (magnitude) :

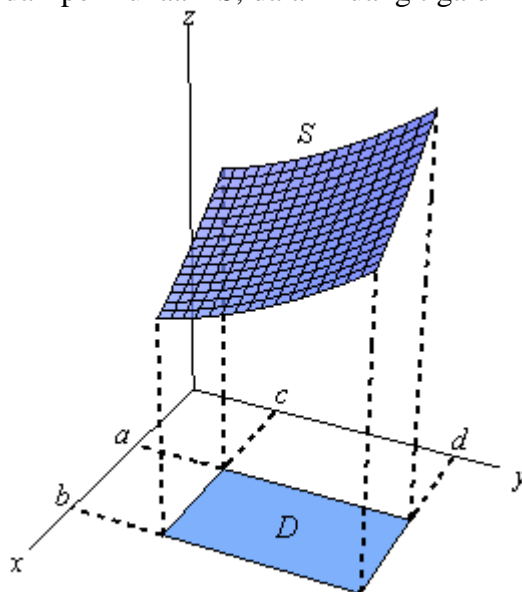
$$\begin{aligned} \|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\| &= \sqrt{256 \sin^4 \varphi \cos^2 \theta + 256 \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + 256 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{256 \sin^4 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 256 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{256 \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \\ &= 16 \sqrt{\sin^2 \varphi} \\ &= 16 |\sin \varphi| \\ &= 16 \sin \varphi \end{aligned}$$

Sehingga luas permukaan yang dicari,

$$A = \iint_D 16 \sin \varphi \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 16 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} -16 \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \, d\theta = \int_0^{2\pi} 8 \, d\theta = 16\pi$$

7.2. Integral Permukaan / Surface Integrals

Berikut adalah gambar sketsa dari permukaan S , dalam ruang tiga dimensi.



Gambar 7.1.

Permukaan S terletak diatas daerah D yang terletak di bidang- xy . Dalam gambar contoh diatas, daerah S dan D dipilih berbentuk persegi empat, namun sebenarnya dapat berbentuk lainnya. Juga permukaan S dapat terletak didepan D , dimana D terletak di bidang- yz atau bidang- xz . Bagaimana menghitung integral permukaan (surface integral) ditentukan oleh permukaan yang diberikan. Pada dasarnya ada dua metoda yang dapat digunakan.

Metoda Pertama , Integral permukaan dimana permukaan S adalah $z = g(x, y)$, sehingga :

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

Bentuk integral yang ada disebelah kiri tanda samadengan (=) adalah integral permukaan, sedangkan bentuk integral yang ada disisi kanan adalah bentuk baku integral ganda.

Integral permukaan menggunakan dS sedangkan integral ganda menggunakan dA .

Rumus yang serupa juga diterapkan untuk permukaan $y = g(x, z)$ (dimana D ada di bidang- xz) dan $x = g(y, z)$ (dimana D ada di bidang- yz). Rumus tersebut akan ditunjukkan dalam contoh soal dibawah.

Metoda kedua, untuk menghitung integral permukaan dimana permukaan dalam bentuk parameterisasi.

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

Sehingga integral permukaan adalah,

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dA$$

Dimana D adalah jangkauan (range) dari parameter .

Bila rumus metoda kedua diterapkan pada permukaan $z = g(x, y)$ yang diparameterisasi menjadi,

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + g(x, y)\vec{k}$$

Dan karena,

$$\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Maka metoda 2 akan menghasilkan rumusan metoda 1, sehingga pada prinsipnya kedua metoda diatas adalah sama.

Contoh 7.2.1. Hitung $\iint_S 6xy \, dS$ dimana S adalah potongan bidang $x + y + z = 1$ yang terletak didepan bidang- yz .

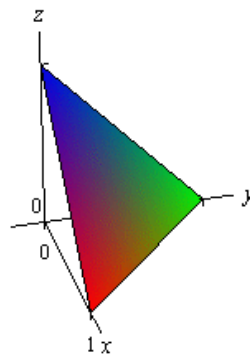
Solusi

Bidang permukaan S adalah potongan bidang permukaan yang terletak didepan bidang- yz , sehingga

persamaan permukaan S dapat dituliskan dalam bentuk $x = g(y, z)$, yaitu $x = 1 - y - z$

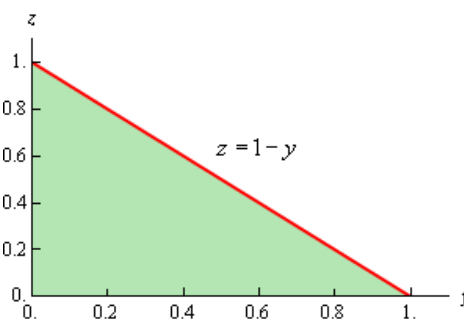
Selanjutnya perlu ditetapkan D .

Berikut adalah gambar sketsa dari permukaan S .



Gambar 7.2.

Sedangkan gambar sketsa dari daerah D .



Gambar 7.3.

Persamaan garis miring segitiga diatas yang merupakan irisan permukaan S dengan bidang- yz didapat dengan memasukkan $x = 0$ kedalam persamaan permukaan. Dan untuk jangkauan y dan z didapat, $0 \leq y \leq 1$ $0 \leq z \leq 1 - y$

Dengan menggunakan rumus pertama integral permukaan didapat,

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(g(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} \, dA$$

Sehingga untuk penerapan persoalan diatas, didapat :

$$\begin{aligned}
 \iint_S 6xy \, dS &= \iint_D 6(1-y-z) y \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2} \, dA \\
 \iint_S 6xy \, dS &= \sqrt{3} \iint_D 6(y-y^2-zy) \, dA \\
 &= 6\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-y} (y-y^2-zy) \, dz \, dy \\
 &= 6\sqrt{3} \int_0^1 \left(yz - zy^2 - \frac{1}{2} z^2 y \right) \Big|_0^{1-y} \, dy \\
 &= 6\sqrt{3} \int_0^1 \frac{1}{2} y - y^2 + \frac{1}{2} y^3 \, dy \\
 &= 6\sqrt{3} \left(\frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{8} y^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

Contoh 7.2.2. Hitung $\iint_S z \, dS$ dimana S adalah potongan atas setengah bola dengan radius 2.

Solusi

Parameterisasi dari bola adalah :

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = 2 \sin \varphi \cos \theta \vec{i} + 2 \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + 2 \cos \varphi \vec{k}$$

Karena permukaan adalah potongan atas setengah bola, maka

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Untuk mendapatkan $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi$:

$$\vec{r}_\theta(\theta, \varphi) = -2 \sin \varphi \sin \theta \vec{i} + 2 \sin \varphi \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{r}_\varphi(\theta, \varphi) = 2 \cos \varphi \cos \theta \vec{i} + 2 \cos \varphi \sin \theta \vec{j} - 2 \sin \varphi \vec{k}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 \sin \varphi \sin \theta & 2 \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ 2 \cos \varphi \cos \theta & 2 \cos \varphi \sin \theta & -2 \sin \varphi \end{vmatrix} \\
 &= -4 \sin^2 \varphi \cos \theta \vec{i} - 4 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta \vec{k} - 4 \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - 4 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta \vec{k} \\
 &= -4 \sin^2 \varphi \cos \theta \vec{i} - 4 \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - 4 \sin \varphi \cos \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \vec{k} \\
 &= -4 \sin^2 \varphi \cos \theta \vec{i} - 4 \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - 4 \sin \varphi \cos \varphi \vec{k}
 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 \|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\| &= \sqrt{16 \sin^4 \varphi \cos^2 \theta + 16 \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + 16 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\
 &= \sqrt{16 \sin^4 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 16 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\
 &= \sqrt{16 \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \\
 &= 4 \sqrt{\sin^2 \varphi} \\
 &= 4 |\sin \varphi| \\
 &= 4 \sin \varphi
 \end{aligned}$$

Karena dalam range φ antara 0 dan $\frac{\pi}{2}$ maka $\sin \varphi$ selalu positif sehingga tanda absolute dapat dihilangkan, maka integral permukaan menjadi,

$$\iint_S z \, dS = \iint_D 2 \cos \varphi (4 \sin \varphi) \, dA$$

Dengan merubah z kedalam koordinat bola, didapat integral permukaan menjadi integral ganda :

$$\begin{aligned}
 \iint_S z \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin(2\varphi) \, d\varphi \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (-2 \cos(2\varphi)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta \\
 &= 8\pi
 \end{aligned}$$

Contoh 7.2.3. Hitung $\iint_S y \, dS$ dimana S adalah potongan silinder $x^2 + y^2 = 3$ yang terletak antara $z = 0$ dan $z = 6$.

Solusi

Bentuk parameterisasi dari silinder adalah ,

$$\vec{r}(z, \theta) = \sqrt{3} \cos \theta \vec{i} + \sqrt{3} \sin \theta \vec{j} + z \vec{k}$$

Jangkauan (range) parameter adalah,

$$0 \leq z \leq 6 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Untuk mendapatkan $\vec{r}_z \times \vec{r}_\theta$:

$$\vec{r}_z(z, \theta) = \vec{k}$$

$$\vec{r}_\theta(z, \theta) = -\sqrt{3} \sin \theta \vec{i} + \sqrt{3} \cos \theta \vec{j}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_z \times \vec{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{3} \sin \theta & \sqrt{3} \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -\sqrt{3} \cos \theta \vec{i} - \sqrt{3} \sin \theta \vec{j}
 \end{aligned}$$

$$\|\vec{r}_z \times \vec{r}_\theta\| = \sqrt{3 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta} = \sqrt{3}$$

Sehingga integral permukaan adalah,

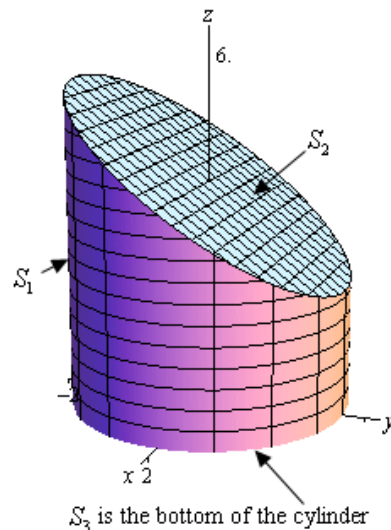
$$\begin{aligned}
 \iint_S y \, dS &= \iint_D \sqrt{3} \sin \theta (\sqrt{3}) \, dA \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^6 \sin \theta \, dz \, d\theta \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} 6 \sin \theta \, d\theta \\
 &= (-18 \cos \theta) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Contoh 7.2.4.

Hitung $\iint_S y + z \, dS$ dimana S adalah permukaan yang dibatasi oleh silinder $x^2 + y^2 = 3$, dasarnya adalah cakram $x^2 + y^2 \leq 3$ pada bidang- xy dan bagian atas adalah bidang $z = 4 - y$.

Solusi

Gambar sketsa permukaan adalah,



Gambar 7.4.

Karena permukaan S terdiri dari sisi (S_1), tutup (S_2) dan dasar (S_3), maka Integral permukaan menjadi,

$$\iint_S y + z \, dS = \iint_{S_1} y + z \, dS + \iint_{S_2} y + z \, dS + \iint_{S_3} y + z \, dS$$

Sehingga perhitungan integral permukaan dilakukan satu persatu :

 S_1 : The Cylinder

Parameterisasi silinder dan $\|\vec{r}_z \times \vec{r}_\theta\|$ adalah,

$$\begin{aligned}
 \vec{r}(z, \theta) &= \sqrt{3} \cos \theta \vec{i} + \sqrt{3} \sin \theta \vec{j} + z \vec{k} & \|\vec{r}_z \times \vec{r}_\theta\| &= \sqrt{3} \\
 0 &\leq \theta \leq 2\pi
 \end{aligned}$$

$$0 \leq z \leq 4 - y = 4 - \sqrt{3} \sin \theta$$

Sehingga integral permukaan silinder adalah,

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} y + z \, dS &= \iint_D (\sqrt{3} \sin \theta + z)(\sqrt{3}) \, dA \\
&= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{4-\sqrt{3}\sin\theta} \sqrt{3} \sin \theta + z \, dz \, d\theta \\
&= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \sqrt{3} \sin \theta \left(4 - \sqrt{3} \sin \theta\right) + \frac{1}{2} \left(4 - \sqrt{3} \sin \theta\right)^2 \, d\theta \\
&= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 8 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \, d\theta \\
&= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 8 - \frac{3}{4} (1 - \cos(2\theta)) \, d\theta \\
&= \sqrt{3} \left(\frac{29}{4} \theta + \frac{3}{8} \sin(2\theta) \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{29\sqrt{3}\pi}{2}
\end{aligned}$$

S_2 : Bidang yang merupakan tutup dari silinder

Dalam kasus ini tidak perlu dilakukan parameterisasi, akan digunakan metoda pertama integral permukaan. Persamaan bidang adalah $z = 4 - y$. Dan untuk permukaan ini, daerah D adalah cakram dengan radius $\sqrt{3}$ berpusat di titik 0. Sehingga,

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} y + z \, dS &= \iint_D (y + 4 - y) \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + 1} \, dA \\
&= \sqrt{2} \iint_D 4 \, dA
\end{aligned}$$

$\iint_D dA$ adalah luas daerah D dan D adalah cakram dengan radius $\sqrt{3}$ sehingga tidak usah dilakukan perhitungan integral, jadi didapat

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} y + z \, dS &= 4\sqrt{2} \iint_D dA \\
&= 4\sqrt{2} \left(\pi (\sqrt{3})^2 \right) \\
&= 12\sqrt{2} \pi
\end{aligned}$$

S_3 : Bidang yang merupakan dasar dari silinder

Persamaan bidang dasar silinder adalah $g(x, y) = 0$ dan D adalah cakram dengan radius $\sqrt{3}$ berpusat di titik 0 (origin). Sehingga

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} y + z \, dS &= \iint_D (y + 0) \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2} \, dA \\
&= \iint_D y \, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} r^3 \sin \theta \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{3} \sin \theta \, d\theta \\
&= -\sqrt{3} \cos \theta \Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Perhitungan akhir integral permukaan menjadi,

$$\begin{aligned}
\iint_S y + z \, dS &= \iint_{S_1} y + z \, dS + \iint_{S_2} y + z \, dS + \iint_{S_3} y + z \, dS \\
&= \frac{29\sqrt{3}\pi}{2} + 12\sqrt{2}\pi + 0 \\
&= \frac{\pi}{2} (29\sqrt{3} + 24\sqrt{2})
\end{aligned}$$

7.3. Integral Permukaan Medan Vektor

Seperti halnya dalam integral garis, orientasi kurva berpengaruh pada hasil perhitungan, demikian juga untuk integral permukaan orientasi permukaan berpengaruh pada hasil perhitungan.

Pada suatu permukaan setiap titik mempunyai dua unit vektor normal, yaitu

\vec{n}_1 and $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$. Pilihan unit vector yang mana yang dipilih untuk mewakili permukaan akan mempengaruhi orientasi dari permukaan.

Untuk permukaan dibuat perjanjian (konvensi) untuk orientasi permukaan.

Definisi :

1. Suatu permukaan dikatakan **tertutup**, apabila permukaan tersebut merupakan pembatas (boundary) dari suatu benda pejal E, contoh permukaan bola merupakan permukaan tertutup yang membatasi volume bola, atau kerak bumi merupakan permukaan tertutup yang membatasi bola dunia.
2. Suatu permukaan tertutup S memiliki **orientasi positif**, bila dipilih himpunan unit vektor normal yang mempunyai arah keluar dari daerah volume E. Dan **orientasi negatif** bila arah vektor normalnya mengarah kedalam daerah volume E yang diliputi permukaan tersebut,

Misal suatu fungsi $z = g(x, y)$. Dan suatu fungsi baru dimana ,

$$f(x, y, z) = z - g(x, y)$$

Fungsi baru tersebut memenuhi persamaan $f(x, y, z) = 0$.

∇f merupakan orthogonal (normal) terhadap permukaan $f(x, y, z) = 0$.

Untuk mendapatkan unit vektor normal,

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{-g_x \vec{i} - g_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}}$$

Untuk fungsi dalam bentuk $z = g(x, y)$ diatas komponen vektor normal pada arah z (dinyatakan oleh \vec{k}) adalah selalu positif dan selalu mengarah keatas.

Proses yang sama dilakukan untuk permukaan dalam bentuk $y = g(x, z)$ (sehingga

$f(x, y, z) = y - g(x, z)$) atau untuk permukaan dalam bentuk $x = g(y, z)$ (sehingga

$f(x, y, z) = x - g(y, z)$).

Untuk permukaan yang dinyatakan dalam bentuk parametrik (vektor) seperti,

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

Maka vektor $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ adalah normal terhadap bidang singgung pada titik tertentu, dan dengan itu akan juga normal terhadap permukaan dimaksud pada titik tertentu tersebut.

Sehingga unit normal vektor,

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

Dan untuk setiap permukaan baik $z = g(x, y)$ (atau $y = g(x, z)$ atau $x = g(y, z)$) dapat dinyatakan di parameterisasi kedalam bentuk vektor dan dengan mudah dapat dicari unit vektor normal nya. Berikut bentuk integral permukaan untuk medan vektor terhadap permukaan S .

Misal medan vektor \vec{F} dengan unit vektor normal \vec{n} , maka integral permukaan \vec{F} atas permukaan S adalah,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Bentuk diatas sering disebut **flux \vec{F} menembus S** .

Misal suatu permukaan $z = g(x, y)$ dan medan vektor $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dan orientasi positif adalah keatas, maka dengan assumpsi ini maka ,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_D (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot \left(\frac{-g_x\vec{i} - g_y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}} \right) \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1} dA \\ &= \iint_D (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot (-g_x\vec{i} - g_y\vec{j} + \vec{k}) dA \\ &= \iint_D -Pg_x - Qg_y + R dA \end{aligned}$$

Bila diberikan permukaan tidak dalam bentuk permukaan, maka akan ada 6 kemungkinan integral.

Dua untuk masing-masing permukaan $z = g(x, y)$, $y = g(x, z)$ dan $x = g(y, z)$. Untuk setiap permukaan ada dua bentuk pernyataan unit vektor normal yang sebenarnya keduanya adalah identik. Dengan menggunakan unit vektor normal, maka kerumitan perhitungan adanya akar dapat dihindari. Dan sebenarnya bentuk akar adalah,

$$\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1} = \|\nabla f\|$$

Sehingga dengan menggunakan notasi gradient, akan menjadi lebih sederhana.

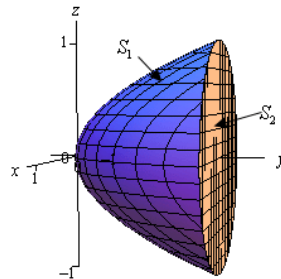
Rumus integral permukaan atas permukaan yang diberikan dalam bentuk parametrik $\vec{r}(u, v)$.

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_D \vec{F} \cdot \left(\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \right) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dA \\ &= \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dA \end{aligned}$$

Contoh 7.3.1. Hitung $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ dimana $\vec{F} = y\vec{j} - z\vec{k}$ dan S adalah permukaan suatu paraboloid $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ dan cakram $x^2 + z^2 \leq 1$ pada $y=1$. , S berorientasi positif.

Solusi

Cakram dalam soal ini adalah tutup dari paraboloid, sehingga didapat permukaan yang tertutup. Adanya permukaan tertutup penting, karena S berorientasi positif dan menurut konvensi yang telah di definisikan maka semua unit vektor normal akan mengarah keluar daerah yang dibatasi oleh S . Berikut gambar sketsa permukaan S ,



Gambar 7.5.

Paraboloid dinyatakan oleh S_1 dan cakram dinyatakan oleh S_2 . Dan supaya unit vektor pada paraboloid mengarah keluar maka akan mengarah kearah negatif y . Sebaliknya supaya unit vektor normal pada cakram mengarah keluar maka akan mengarah kearah positif y .

Karena permukaan S terdiri dari dua permukaan, maka perhitungan integral permukaan dilakukan pada setiap permukaan dan hasil akhirnya adalah penjumlahan keduanya.

Untuk paraboloid, permukaan diberikan dalam bentuk $y = g(x, z)$ sehingga dapat dinyatakan sebagai,

$$f(x, y, z) = y - g(x, z) = y - x^2 - z^2$$

Vektor gradient fungsi diatas adalah,

$$\nabla f = \langle -2x, 1, -2z \rangle$$

Vektor gradient diatas memiliki komponen y positif, artinya mengarah ke y positif, sedangkan dari interpretasi gambar sketsa diatas, dibutuhkan unit vektor normal yang mengarah y negatif agar memenuhi syarat arah keluar dari daerah tertutup.

Jadi unit vektor normal adalah,

$$\vec{n} = \frac{-\nabla f}{\|-\nabla f\|} = \frac{\langle 2x, -1, 2z \rangle}{\|\nabla f\|}$$

Perhitungan integral lipat atas S_1 : Paraboloid

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D (y\vec{j} - z\vec{k}) \cdot \left(\frac{\langle 2x, -1, 2z \rangle}{\|\nabla f\|} \right) \|\nabla f\| dA \\ &= \iint_D -y - 2z^2 dA \\ &= \iint_D -(x^2 + z^2) - 2z^2 dA \\ &= -\iint_D x^2 + 3z^2 dA \end{aligned}$$

Persamaan permukaan $y = x^2 + z^2$ dimasukkan kedalam perhitungan integral diatas dan daerah D adalah cakram dengan 1 pada bidang- xz , sehingga perhitungan akan menjadi lebih mudah bila dilakukan dengan menggunakan koordinat polar.

Berikut konversi ke koordinat polar,

$$x = r \cos \theta \quad z = r \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq r \leq 1$$

Perhitungan integral menjadi,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= - \iint_D x^2 + 3z^2 dA \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + 3r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) r^3 dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) + \frac{3}{2} (1 - \cos(2\theta)) \right) \left(\frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (4 - 2 \cos(2\theta)) d\theta \\ &= - \frac{1}{8} (4\theta - \sin(2\theta)) \Big|_0^{2\pi} \\ &= -\pi \end{aligned}$$

Perhitungan integral lipat atas permukaan S_2 : Tutup Paraboloid yang adalah cakram

Permukaan tutup paraboloid berupa cakram tidak lain adalah potongan bidang $y=1$ yang ada didepan cakram dengan radius 1 pada bidang- xz (bayangkan cakram pada bidang xz diproyeksikan pada bidang $y=1$). Dan karena orientasi permukaan disyaratkan positif, maka unit vektor normal mengarah keluar permukaan tertutup artinya orthogonal terhadap bidang $y=1$, yaitu paralel terhadap sumbu- y dan berarah positif, yaitu

$$\vec{n} = \vec{j}$$

Sehingga,

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (y \vec{j} - z \vec{k}) \cdot (\vec{j}) dS = \iint_{S_2} y dS$$

Dengan memasukkan nilai $y=1$ didapat, $y=1 = g(x, z)$

$$\text{Dan,} \quad \sqrt{(g_x)^2 + 1 + (g_z)^2}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_2} y dS \\ &= \iint_D 1 \sqrt{0+1+0} dA = \iint_D dA \end{aligned}$$

Karena D adalah cakram dengan radius 1, maka integral diatas adalah luas cakram daerah D ,

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pi$$

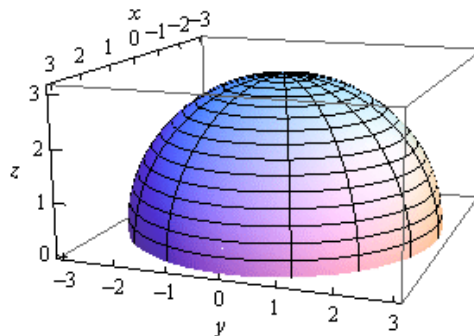
Sehingga hasil akhir adalah,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\pi + \pi = 0$$

Contoh 7.3.2. Hitung $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ dimana $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^4\vec{k}$ dan S adalah potongan atas setengah bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dan cakram $x^2 + y^2 \leq 9$ yang terletak pada bidang $z = 0$. Permukaan S berorientasi positif.

Solusi

Berikut adalah gambar sketsa dari permukaan S ,



Gambar 7.6.

S_1 adalah permukaan bola dan S_2 adalah dasar / tutup bawah dari potongan atas setengah bola yang berbentuk cakram. Dari gambar diatas, disimpulkan unit vektor normal permukaan bola S_1 memiliki komponen z arah positif, sedangkan untuk unit vektor normal dasar permukaan S_2 memiliki komponen z arah negatif.

Perhitungan Integral dilakukan dua tahap,

pertama terhadap S_1 : Setengah Bola Atas

Parameterisasi permukaan S_1 yang berupa bola adalah,

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = 3 \sin \varphi \cos \theta \vec{i} + 3 \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + 3 \cos \varphi \vec{k}$$

Karena permukaan berupa setengah bola bagian atas, maka

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi$.

$$\vec{r}_\theta(\theta, \varphi) = -3 \sin \varphi \sin \theta \vec{i} + 3 \sin \varphi \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{r}_\varphi(\theta, \varphi) = 3 \cos \varphi \cos \theta \vec{i} + 3 \cos \varphi \sin \theta \vec{j} - 3 \sin \varphi \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 \sin \varphi \sin \theta & 3 \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ 3 \cos \varphi \cos \theta & 3 \cos \varphi \sin \theta & -3 \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= -9 \sin^2 \varphi \cos \theta \vec{i} - 9 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta \vec{k} - 9 \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - 9 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta \vec{k} \\ &= -9 \sin^2 \varphi \cos \theta \vec{i} - 9 \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - 9 \sin \varphi \cos \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \vec{k} \\ &= -9 \sin^2 \varphi \cos \theta \vec{i} - 9 \sin^2 \varphi \sin \theta \vec{j} - 9 \sin \varphi \cos \varphi \vec{k} \end{aligned}$$

Besaran (magnitude) dari vektor perkalian silang $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi$ tidak perlu dicari, karena dari rumus integral nanti akan tercoret sendirinya.

Dari range φ didapat nilai sine dan cosine keduanya adalah positif, sehingga agar hasil $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi$ akan memiliki komponen z negatif, sedangkan untuk memenuhi syarat orientasi permukaan tertutup S positif, maka komponen z harus positif, sehingga

$$\vec{n} = -\frac{\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi}{\|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\|} = \frac{9\sin^2\varphi \cos\theta \vec{i} + 9\sin^2\varphi \sin\theta \vec{j} + 9\sin\varphi \cos\varphi \vec{k}}{\|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\|}$$

Karena,

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta, \varphi)) = 3\sin\varphi \cos\theta \vec{i} + 3\sin\varphi \sin\theta \vec{j} + 81\cos^4\varphi \vec{k}$$

Maka,

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(\theta, \varphi)) \cdot (\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi) &= 27\sin^3\varphi \cos^2\theta + 27\sin^3\varphi \sin^2\theta + 729\sin\varphi \cos^5\varphi \\ &= 27\sin^3\varphi + 729\sin\varphi \cos^5\varphi\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F} \cdot \left(\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \right) \|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 27\sin^3\varphi + 729\sin\varphi \cos^5\varphi d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 27\sin\varphi (1 - \cos^2\varphi) + 729\sin\varphi \cos^5\varphi d\varphi d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(27 \left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi \right) + \frac{729}{6}\cos^6\varphi \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{279}{2} d\theta \\ &= 279\pi\end{aligned}$$

S_2 : Tutup dasar permukaan setengah bola atas

Permukaan S_2 adalah cakram $x^2 + y^2 \leq 9$ yang terletak pada bidang $z = 0$ sehingga persamaan permukaan ini adalah $z = 0$.

Maka unit vektor normal adalah, $\vec{n} = -\vec{k}$

Dibutuhkan nilai negatif, agar memenuhi syarat orientasi positif permukaan S.

Sehingga,

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z^4\vec{k}) \cdot (-\vec{k}) dS \\ &= \iint_{S_2} -z^4 dS\end{aligned}$$

Dengan memasukkan $z = 0$,

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} -z^4 dS = \iint_{S_2} 0 dS = 0$$

Hasil akhir adalah penjumlahan,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 279\pi + 0 = 279\pi$$

Interpretasi fisis dari integral permukaan adalah dalam aplikasi mekanika fluida.

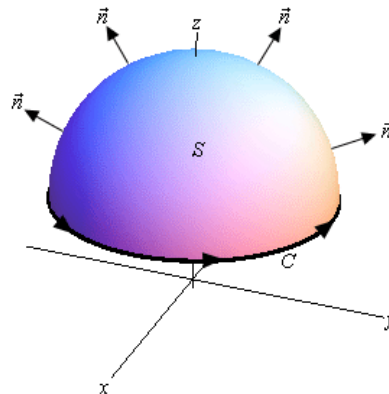
Jika \vec{v} adalah medan vektor kecepatan fluida, maka integral permukaan

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

merepresentasikan volume fluida yang mengalir melalui S per unit waktu (yaitu per detik, per menit atau jam) dengan kata lain debit dari aliran fluida.

7.4. Teorema Stokes

Bila Teorema Green menyatakan hubungan integral garis dengan integral ganda atas suatu daerah. Maka Teorema Stokes menyatakan hubungan antara integral garis dengan integral permukaan. Berikut adalah gambar suatu permukaan S , lintasan C dengan arah panah sebagai orientasi.



Gambar 7.7.

Mengelilingi ujung dasar permukaan adalah kurva C . Kurva ini dinamakan kurva pembatas (**boundary curve**). Orientasi permukaan S akan menentukan **orientasi positif** kurva C .

Untuk mendapatkan orientasi positif kurva C , bayangkan kita berjalan sepanjang kurva. Sementara berjalan, bila kepala kita menunjuk arah sama dengan unit vektor normal dan permukaan ada disebelah kiri, maka kita berjalan dalam arah positif pada kurva C .

Teorema Stokes

Bila S adalah permukaan rata yang berorientasi dan dibatasi oleh kurva C yang sederhana, tertutup dan rata dan berorientasi positif. Bila \vec{F} adalah medan vektor, maka

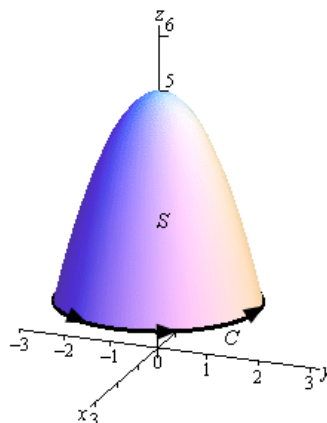
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Contoh 7.4.1. Gunakan teorema Stokes' untuk menghitung $\iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ dimana

$\vec{F} = z^2 \vec{i} - 3xy \vec{j} + x^3 y^3 \vec{k}$ dan S adalah potongan $z = 5 - x^2 - y^2$ yang terletak diatas bidang $z = 1$. Orientasi S adalah keatas.

Solusi

Berikut gambar sketsa permukaan.



Gambar 7.8.

Kurva pembatas (boundary curve) C adalah irisan permukaan dengan bidang $z = 1$ dan kurva tersebut adalah

$$1 = 5 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 \quad \text{pada } z = 1$$

Jadi kurva pembatas C adalah lingkaran dengan radius 2 yang terletak di bidang $z = 1$.

Parameterisasi kurva ini,

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + \vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Dengan menggunakan Teorema Stokes ,

$$\iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(t)) &= (1)^2 \vec{i} - 3(2 \cos t)(2 \sin t) \vec{j} + (2 \cos t)^3 (2 \sin t)^3 \vec{k} \\ &= \vec{i} - 12 \cos t \sin t \vec{j} + 64 \cos^3 t \sin^3 t \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{r}'(t) = -2 \sin t \vec{i} + 2 \cos t \vec{j}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = -2 \sin t - 24 \sin t \cos^2 t$$

Sehingga,

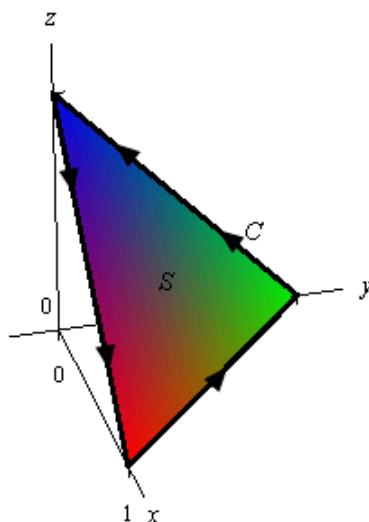
$$\begin{aligned} \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} -2 \sin t - 24 \sin t \cos^2 t dt \\ &= \left(2 \cos t + 8 \cos^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Contoh 7.4.2. Gunakan Teorema Stokes' untuk menghitung $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dimana $\vec{F} = z^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + x \vec{k}$ dan C adalah segitiga dengan titik ujung $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ dan $(0, 0, 1)$ dan mempunyai arah rotasi berlawanan dengan jarum jam.

Solusi

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & y^2 & x \end{vmatrix} = 2z \vec{j} - \vec{j} = (2z - 1) \vec{j}$$

Berikut adalah gambar sketsa permukaan S , kurva pembatas C dan orientasi C .
Orientasi permukaan adalah keatas.



Gambar 7.9.

Orientasi kurva menentukan orientasi permukaan dan sebaliknya.
Persamaan bidang adalah,

$$x + y + z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = g(x, y) = 1 - x - y$$

Dengan menggunakan Teorema Stokes, didapat

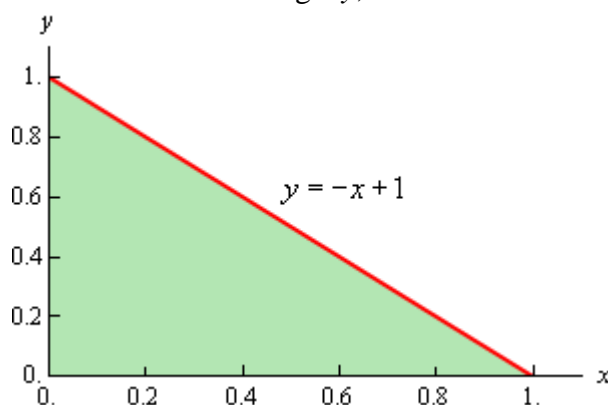
$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S (2z - 1) \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_D (2z - 1) \vec{j} \cdot \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \|\nabla f\| dA \end{aligned}$$

$$f(x, y, z) = z - g(x, y) = z - 1 + x + y$$

$$\nabla f = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Gradient f mempunyai arah keatas, jadi arah untuk unit vektor normal sudah cocok.

Berikut gambar sketsa, D daerah terletak di bidang xy ,



Gambar 7.10.

Persamaan sisi miring didapat dengan memasukkan $z = 0$ kedalam persamaan bidang. Sehingga ketidaksamaan (range) yang mendefinisikan D adalah,

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq -x + 1$$

Sehingga dengan memasukkan $z = 1 - x - y$, didapat

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D (2z-1) \vec{j} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{-x+1} 2(1-x-y)-1 dy dx\end{aligned}$$

Hasil akhir,

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \int_0^{-x+1} 1-2x-2y dy dx \\ &= \int_0^1 (y-2xy-y^2) \Big|_0^{-x+1} dx \\ &= \int_0^1 x^2 - x dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

7.5. Teorema Divergence

Bila E adalah wilayah benda pejal sederhana dan S adalah permukaan pembatas (boundary surface) dari E berorientasi positif. \vec{F} adalah medan vektor dengan komponen vektor yang memiliki turunan parsial pertama yang kontinu, maka

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV$$

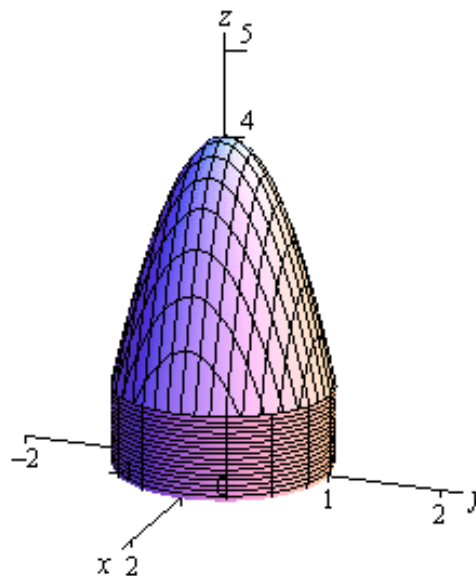
Teorema Divergence menyatakan hubungan integral permukaan dengan integral lipat tiga.

Contoh 7.5.1. Gunakan teorema divergence untuk menghitung $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ dimana

$\vec{F} = xy\vec{i} - \frac{1}{2}y^2\vec{j} + z\vec{k}$ dan permukaan pembatas terdiri dari 3 permukaan, $z = 4 - 3x^2 - 3y^2$, $1 \leq z \leq 4$ disebelah atas, $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ pada sisi dan $z = 0$ permukaan dasar.

Solusi

Berikut gambar sketsa permukaan.



Gambar 7.11.

Dari bentuk benda diatas, maka paling tepat digunakan koordinat silendris, sehingga batas jangkauan (range) adalah,

$$0 \leq z \leq 4 - 3r^2$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = y - y + 1 = 1$$

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{4-3r^2} r \, dz \, dr \, d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r - 3r^3 \, dr \, d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{3}{4}r^4 \right) \Big|_0^1 d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \frac{5}{4} d\theta \\&= \frac{5}{2}\pi\end{aligned}$$