MODUL PEMBELAJARAN

KALKULUS II

ALFIANI ATHMA PUTRI ROSYADI, M.Pd

IDENTITAS MAHASISWA

NAMA : …………………………………………………

KLS/NIM :…………………………………………………….

KELOMPOK:…………………………………………………….

Daftar Isi

KATA PENGANTAR

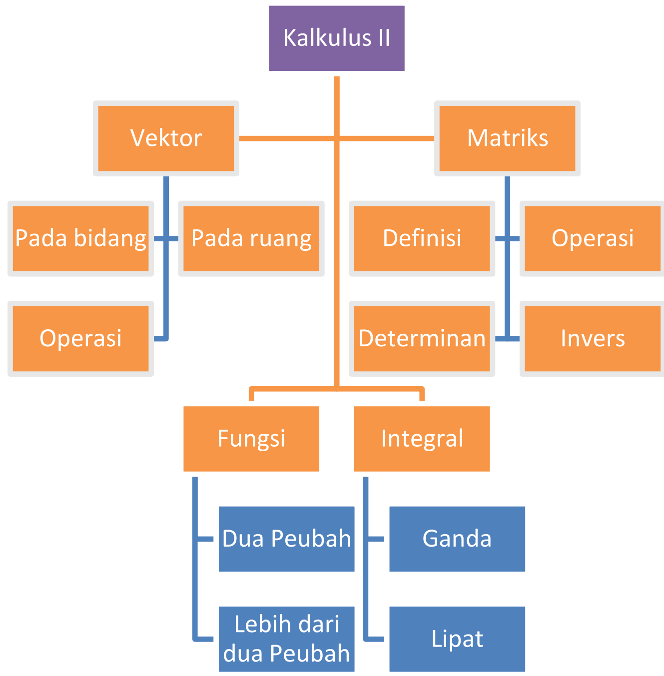
Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmatnya sehingga modul pembelajaran matakuliah kalkulus II ini selesai disusun. Modul ini digunakan sebagai salah satu media pembelajaran guna menunjang terlaksananya proses perkuliahan matakuliah Kalkulus II.

Di dalam modul pembelajaran ini terdapat kilasan materi prasyarat, materi yang dibahas, contoh soal, latihan soal, kegiatan diskusi, dan peta konsep yang dapat memudahkan mahasiswa memahami keterkaitan antar materi. Modul ini bukan satu-satunya media untuk belajar bagi mahasiswa, sehingga diharapkan didampingi dengan buku teks, handout, dan sumber lain yang relevan.

Kritik dan saran yang membangun penulis harapkan dari berbagai pihak demi perbaikan untuk penyusunan modul berikutnya.

Alfiani Athma Putri Rosyadi M.Pd

PETA KONSEP


Kalkulus II
Vektor
Matriks
Pada bidang
Pada ruang
Definisi
Operasi
Operasi
Determinan
Invers
Fungsi
Integral
Dua Peubah
Ganda
Lebih dari dua Peubah
Lipat

BAB I ANALISIS VEKTOR

Pada beberapa bidang, kita sudah mengenal istilah waktu, suhu, massa, dan volume yang masing-masing mempunyai besar (panjang atau nilai). Hal itulah yang dikenal dengan **skalar** yang dinotasikan dengan *lower case italic letter,* misalnya *a, b, c* dst. Selain itu, ada juga beberapa besaran yang sudah kita kenal, antara lain kecepatan, percepatan, gaya, momentum, medan magnet, medan listrik dst yang tidak hanya mempunyai besar tetapi juga mempunyai arah. Besaran tersebut yang dikenal dengan besaran **vector**. Vektor dinotasikan dengan *lowercase boldface letter*, misalnya **u, v, w** dst. Ada beberapa buku yang menggunakan notasi vector seperti misalnya $\underline{u}$ atau $\bar{u}$. Tetapi pada modul ini, kita sepakati bersama bahwa untuk menotasikan vector dengan *lo dwercase boldface letter*.

a Vektor Pada Bidang

Cobalah menggambar sepasang garis yang saling tegak lurus dan berpotongan di titik O, yang selanjutnya disebut titik pusat/*origin*. Garis yang horizontal disebut sumbu x sedangkan garis yang vertical disebut sumbu y. Sumbu x dan sumbu y bersama-sama disebut sumbu koordinat serta keduanya membentuk system koordinat kartesius. Gambarkan pada lembar jawaban berikut!

Sekarang, kita pilih sebuah titik pada sumbu x yang terletak di kanan titik O dan sebuah titik pada sumbu y di atas titik O untuk menetapkan titik pada sumbu x dan y yang bernilai positip. Setiap titik *P* pada bidang adalah pasangan berurutan *(x,y)* dari bilangan real yang selanjutnya disebut dengan koordinat. Titik *P* dengan koordinat *(x,y)* dinyatakan dengan *P(x,y)* atau *(x,y)*

Misalkan $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dengan *x* dan *y* adalah bilangan real. Sehingga *X* adalah ruas garis berarah dengan pangkal O dan ujung *P(x,y).* Garis berarah dari O ke P dinyatakan dengan $\overrightarrow{OP}$; O disebut pangkal dan P disebut ujung. Bagaimana dengan $\overrightarrow{PO}$

Definisi 1.1

Sebuah Vektor pada Bidang adalah matriks berukuran 2×1,

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

Dengan $x, y \in R$

Atau vector dapat kita definisikan vector adalah ruas garis berarah yang panjang dan arahnya tertentu.

Karena vector adalah sebuah matrik maka vector

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ dan, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ dikatakan sama (***a***=***b***) jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

CONTOH 1

Vektor $\begin{bmatrix} 2+b \\ -3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 7 \\ a \end{bmatrix}$ adalah sama, jika

$2 + b = 7$ dan $a = -3$

Hal ini berarti $b = 7 - 2 = 5$ dan $a = -3$

b. Vektor Pada Ruang

Merujuk pada definisi 1.1, cobalah jelaskan pengertian dari vector pada ruang. Tuliskan hasil pemikiran Anda pada lembar jawaban berikut

Perhatikan penjelasan Dosen Anda tentang teknik menggambar koordinat $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, selanjutnya tuliskan hasil diskusi dengan teman Anda permasalahan berikut, kemudian tuliskan hasilnya pada lembar yang sudah disediakan

Latihan Soal

Gambarkan koordinat berikut pada lembar yang sudah disediakan!

1. $A\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$
2. $C\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$
3. $B\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$
3. $D\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

c. Operasi Vektor

PENJUMLAHAN VEKTOR

Definisi 1.2

Misal $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ adalah dua vector pada bidang. Hasil jumlah dari ***a*** dan ***b*** adalah vector $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ dan jika *k* adalah sebarang scalar, maka perkalian scalar didefinisikan $k\boldsymbol{a} = (kx_1, kx_2)$

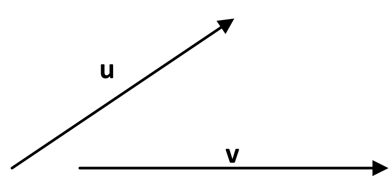
CONTOH 2

Misalkan $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, **b**= $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ maka

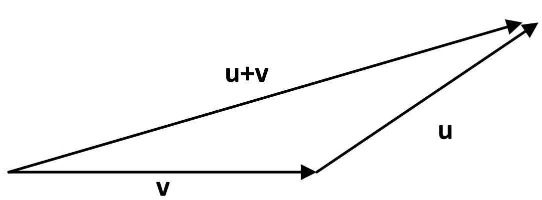
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2+4 \\ 3+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Secara geometri, penjumlahan vector dapat dijelaskan sebagai berikut.

Misalkan



Penjumlahan vector menurut aturan segitiga adalah sebagai berikut



Sehingga **v+u** adalah vector yang diwakili oleh segmen garis berarah yang pangkalnya berimpit dengan pangkal **v** dan ujungnya berimpit dengan ujung **u** yang telah dipindahkan sedemikian sehingga pangkal **u** berimpit dengan ujung **v**.

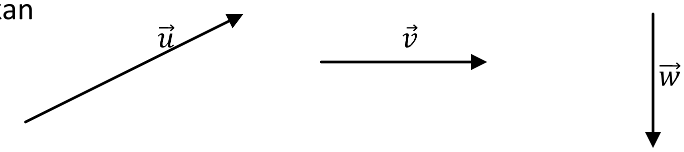
Diskusi

Diskusikan permasalahan berikut dengan kelompok Anda. Tuliskan hasil diskusi pada lembar yang sudah disediakan

1. Bagaimana dengan **u-v**?
2. Bagaimana dengan aturan jajar genjang?

Latihan Soal

Misalkan



Berdasarkan aturan segitiga, tentukan nilai dari

1. $\vec{u} + \vec{v}$
2. $\vec{u} + \vec{w}$
3. $\vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$
4. $\vec{u} - \vec{v}$
5. $-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

Tuliskan jawabannya pada lembar jawaban di bawah ini!

PERKALIAN TITIK

Definisi 1.4

Perkalian titik vector **a** dan **b** dituliskan $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (dibaca **a** dot **b**) dan didefinisikan sebagai berikut

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|cos\theta$$

θ adalah sudut antara **a** dan **b**

Berdasarkan definisi perkalian scalar dua vector tersebut, jika **i**, **j** ,**k** berturut-turut adalah vector satuan dengan arah sumbu x, y, dan z, maka:

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$$

Teorema berikut akan menguraikan beberapa sifat penting dari hasil kali titik.

Teorema 1.1

Jika ***u,v*** dan ***w*** adalah vector-vektor di ruang-2 atau ruang-3 dan *k* adalah scalar, maka

a. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$
b. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$
c. $k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (k\boldsymbol{v})$
d. $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} > 0, jika\ \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\ jika\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Definisi 1.5

Jika $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah sebarang vector pada R^n maka hasilkali dalam/perkalian titik kita definisikan dengan

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u_1 v_1} + \boldsymbol{u_2 v_2} + \cdots + \boldsymbol{u_n v_n}$$

Latihan Soal

Berikan contoh tiga buah vector, namakan vector tersebut dengan $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Selanjutnya tentukan nilai dari

1. $\vec{p} \cdot \vec{q}$
2. $(\vec{p} \cdot \vec{q}).\vec{r}$

Tuliskan hasil jawaban pada lembar berikut!

PERKALIAN CROSS

Dalam banyak penerapan vector untuk soal-soal geometri, fisika dan teknik, kita perlu membentuk vector di ruang-3 yang tegak lurus terhadap dua vector yang diberikan. Disini akan dijelaskan tentang perkalian vector tersebut

Definisi 1.6

Jika $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_{2,} v_3)$ adalah vector di ruang-3, maka hasil kali cross

didefinisikan

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Atau dalam notasi determinan

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Atau terdapat pola yang dapat digunakan untuk mempermudah pengerjaan,

yaitu matriks 2×3

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Dimana entri baris pertama adalah komponen factor pertama ***u*** dan entri baris kedua adalah komponen factor kedua ***v***, maka determinan dalam komponen pertama ***u x v*** dapat diperoleh dengan cara mencoret kolom pertama matriks tersebut, determinan dalam komponen kedua kita dapatkan dengan cara mencoret kolom kedua dari matriks tersebut, sedangkan determinan dalam komponen ketiga kita dapatkan dengan cara mencoret kolom ketiga dari matriks tersebut.

CONTOH 3

Tentukan $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, dengan $\boldsymbol{u} = (\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}), \boldsymbol{v} = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{2})$

Penyelesaian

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-14,0,7)$$

Sehingga dapat dilihat bahwa hasil kali cross antara dua buah vector adalah vector.

LATIHAN AKHIR BAB

1. $Misalkan\ \boldsymbol{u} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), \boldsymbol{v} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{1}), \boldsymbol{w} = (-\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{5}), tentukan:$
   a. $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$
   b. $\mathbf{2}\boldsymbol{v} + \mathbf{3}\boldsymbol{u}$
   c. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$
   d. $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v})$
   e. $(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{v}$

2. $Misalkan$ ***u,v,w*** adalah vector pada nomor 1, tentukan ***x*** yang memenuhi
   $\mathbf{2}\boldsymbol{u} - \mathbf{3}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}$
3. Buktikan bahwa tidak ada scalar ***c,d,e*** sehingga
   $\boldsymbol{c}(1,0,-2,1) + \boldsymbol{d}(2,0,1,2) + \boldsymbol{e}(1,-2,2,3) = (1,0,1,0)$

BAB II FUNGSI DUA PEUBAH ATAU LEBIH

Tema sentral dari bab ini adalah kalkulus dari fungsi peubah banyak (*multivariable*) khususnya dengan dua atau tiga peubah. Kebanyakan fungsi yang digunakan dalam sains dan *engineering* adalah fungsi peubah banyak.

Contohnya: teori peluang, statistik, fisika, dinamika fluida, dan listrik-magnet.

Kalkulus fungsi ini jauh lebih kaya, turunannya juga bervariasi karena terdapat lebih banyak variabel yang berinteraksi. Sebelum mempelajari BAB ini materi prasyarat yang harus diperoleh adalah system koordinat, permukaan bidang dan ruang, serta sketsa beberapa grafik (bola, elipsoida dst)

a. Pengertian Fungsi Dua atau Tiga Peubah

Fungsi dua peubah atau variabel, misalnya *x* dan *y*, adalah *fungsi yang memetakan tiap pasang (x,y) pada tepat satu bilangan real*. Demikian pula dengan fungsi tiga peubah, misalnya *x*,*y*, dan *z*.

Contoh

1. Berilah contoh fungsi dua peubah dan fungsi tiga peubah !

   Jawaban:

   a. $f(x,y) = x - y$

   b. $f(x,y) = 2x^2 + 3y$

   c. $f(x,y,z) = xy + e^y \sin z$

   d. $g(x,y,z) = 4x^2yz$

Domain fungsi *f* dua peubah, *x* dan *y*, adalah himpunan dari semua pasangan terurut (*x,y*) sehingga fungsi tersebut terdefinisi. Sedangkan **range** suatu fungsi adalah himpunan semua nilai *z=f*(*x,y*) fungsi itu dengan *x* dan *y* peubah bebas sedangkan *z* adalah peubah tak bebas

2. Tentukanlah domain dari fungsi $f(x,y) = \sqrt{x-y} \quad x, y \epsilon R$

   Jawab:

   Fungsi ini terdefinisi hanya bila $x - y \geq 0 \quad \leftrightarrow x \geq y$

   Sehingga dapat dituliskan $dom\ (f) = \{(x,y): x \geq y\}$

Latihan Soal

1. Misalkan $f(x,y) = x^2y + \sqrt{y}$, tentukan nilai dari
   a. $f(1,4)$
   b. $f(2,-4)$
   c. $f(\frac{1}{x}, x^4)$
2. Tentukan daerah asal dari setiap fungsi berikut
   a. $f(x,y) = \frac{y}{x} + xy$
   b. $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
   c. $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{2x-2}}{y^2+z}$
3. Carilah $F(f(t), g(t))$ jika $F(x,y) = x^2y$ dan $f(t) = t\cos t$, $g(t) = sec^2 t$

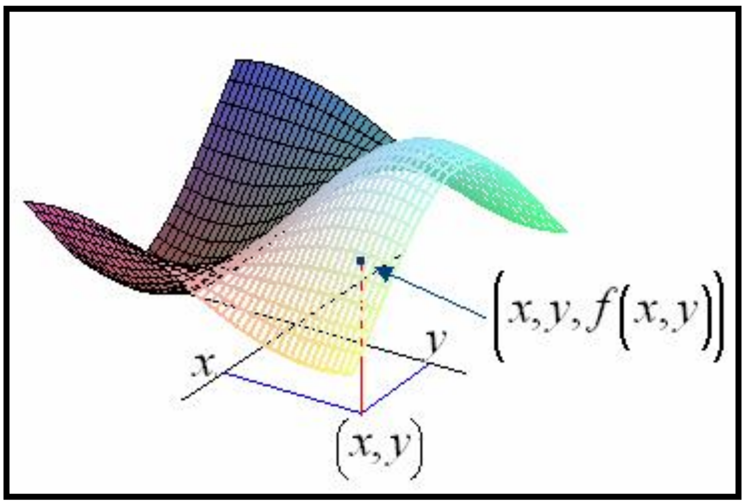
Lembar Jawaban

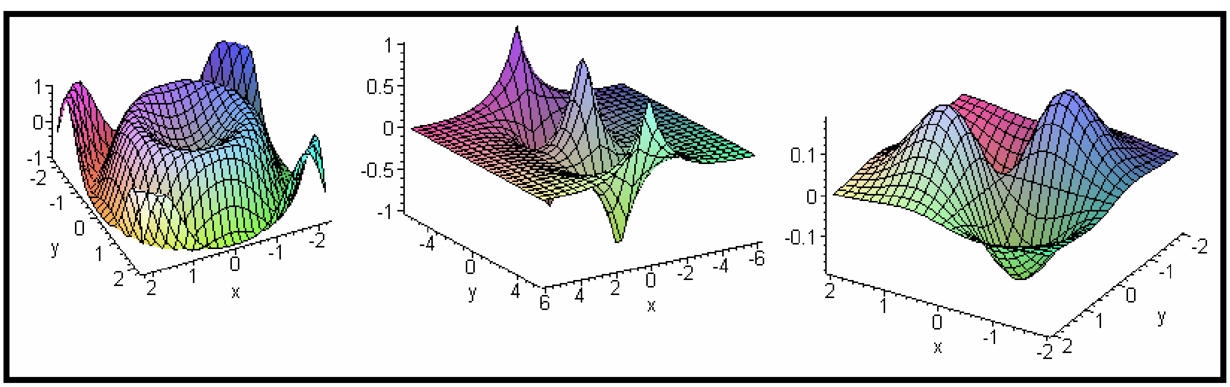
Lembar Jawaban

b. Grafik Fungsi (Surface)

Pada bab I, mahasiswa diharapkan dapat memahami kurva ketinggian (peta kontur) dan grafik fungsi pada bidang. Seiring dengan perkembangan teknologi, diharapkan mahasiswa dapat menggunakan program computer yang dapat membantu menggambarkan grafik tersebut kemudian membacanya. Grafik fungsi f dua peubah berbentuk persamaan $z = f(x, y)$. Biasanya grafik ini berupa permukaan, dan karena setiap (x, y) di wilayah hanya berpadanan dengan satu nilai z, maka setiap garis tegak memotong permukaan paling banyak di satu titik.

Berikut adalah contoh dari grafik fungsi

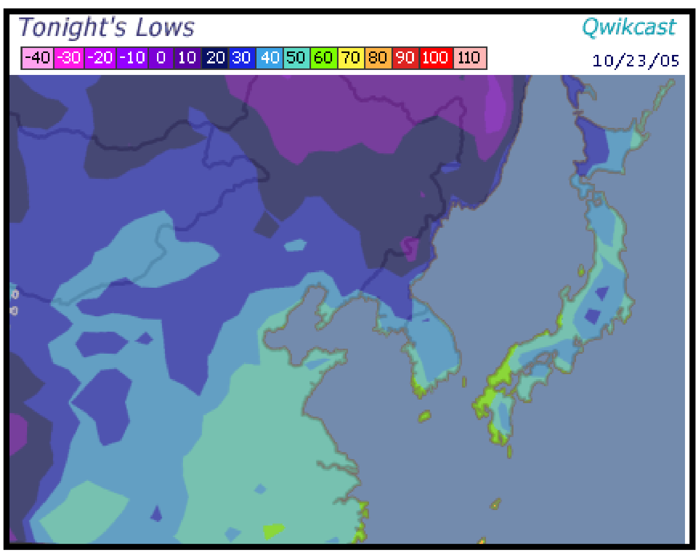


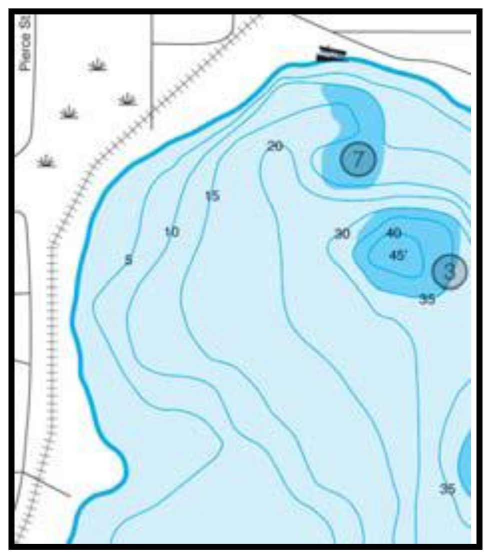


c. Kurva Ketinggian (Kontur)

Kebanyakan permukaan sulit digambarkan. Para pembuat peta menggunakan strategi menggunakan kurva-kurva kontur untuk memberikan gambaran permukaan berdimensi tiga dalam gambar berdimensi dua. Irisan tiap bidang horizontal $z = c$ dengan permukaan umumnya merupakan kurva. Proyeksi kurva ini pada bidang-*xy* disebut kurva ketinggian dan kumpulan lengkungan-lengkungan yang sedemikian itu disebut peta kontur.

Dengan peta kontur kita dapat memperoleh tentang gambaran permukaan berdimensi tiga melalui kurva-kurva berdimensi dua. Strategi ini terutama berguna bila permukaan sulit digambar. Dengan alasan yang hampir serupa, ahli menggunakan peta kontur, karena menggambar permukaan tanah pada suatu daerah sangatlah sulit. Kita akan melihat cara pandang lain dari peta kontur.





BAB III FUNGSI DUA PEUBAH ATAU LEBIH

a. Turunan Parsial Fungsi Dua Peubah atau Lebih

Untuk mempelajari turunan parsial, kita perlu mengingat kembali tentang materi turunan. Masih ingatkah kalian definisi dari turunan yang sudah kalian pelajari sebelumnya?

Definisi turunan.

Misalkan *f* sebuah fungsi real dan $x \epsilon D_f$.

Turunan dari *f* di titik *x*, ditulis $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Jika Turunan pada fungsi dengan satu peubah mempunyai arti laju perubahan fungsi jika peubahnya mengalami perubahan nilai. Tentu saja turunan pada fungsi dengan dua atau lebih peubah diinginkan memiliki interpretasi yang sama. Namun dalam hal ini terdapat lebih dari satu peubah. Apa yang terjadi bila hanya satu peubah yang mengalami perubahan nilai? Bagaimana bila lebih dari satu variabel yang berubah? Yang menjadi masalah adalah apabila lebih dari satu variabel berubah, maka terdapat tak hingga kemungkinan cara variabel-variabel tersebut berubah.

Diberikan fungsi dengan dua variabel $f(x,y)$. Sepanjang garis $y = y_0$, nilai variabel *y* konstan, sehingga $f(x,y_0)$ adalah fungsi satu variabel. Turunannya disebut turunan parsial dari *f* terhadap *x*.

Definisi

Diberikan fungsi dua variable $f(x,y)$ dan $y_0 \epsilon R$. Maka turunan parsial dari *f* terhadap *x* di titik (x_0, y_0) adalah

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Sedangkan turunan parsial dari *f* terhadap *y* di titik (x_0, y_0) adalah

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Notasi

Jika $z = f(x,y)$, maka notasi-notasi berikut lazim digunakan untuk turunan-turunan parsial dari *f*

$$f_x(x,y) = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta f(x,y)}{\delta x} \qquad f_x(x_0,y_0) = \left.\frac{\delta z}{\delta x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta f(x,y)}{\delta y} \qquad f_y(x_0,y_0) = \left.\frac{\delta z}{\delta y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Ilustrasi

Tinggi gelombang *T* di laut terbuka bergantung pada laju angin *v* dan lama waktu *t*. Nilai fungsi $T = F(v,t)$ dicatat pada tabel berikut

v \ t	5	10	15	**20**	30	40	50
10	2	2	2	**2**			
15	4	4	5	**5**			
20	5	7	8	**8**			
30	**9**	**13**	**16**	**17**			
40	14	21	25	**28**			
50	19	29	36	**49**			
60	24	37	47	**54**			

Perhatikan kolom t = 20

Jadi fungsi T dari variabel tunggal *v* adalah $T = f(v)$ untuk *t* tetap $H(v) = T(v, 20)$

(Menunjukkan perubahan tinggi gelombang dengan berubahnya laju angin ketika t= 20)

Turunan H saat v = 30 adalah laju perubahan tinggi gelombang terhadap v saat t = 20.

$$H'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{H(30+h) - H(30)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{T(30+h, 20) - T(30,20)}{h}$$

Diskusi

Diskusikan dengan kelompok Anda penyelesaian dari permasalahan berikut!

1. Apakah perbedaan antara turunan dengan turunan parsial? Jelaskan!
2. Berilah satu contoh fungsi dua peubah, kemudian carilah turunan parsialnya terhadap salah satu peubah!

Lembar Jawaban

Lembar Jawaban

b. Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Secara umum, karena turunan parsial suatu fungsi *x* dan *y* adalah fungsi lain dari dua peubah yang sama ini, turunan tersebut dapat diturunkan secara parsial terhadap *x* atau *y* untuk memperoleh empat buah **turunan parsial kedua** fungsi *f*

$$f_{xx} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \qquad f_{yy} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \qquad f_{yx} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$$

Latihan Soal

Berilah contoh sebuah fungsi dua peubah, kemudian tentukan keempat turunan persial kedua fungsi tersebut!

Lembar Jawaban

PEUBAH LEBIH DARI DUA

Andaikan *f* suatu fungsi tiga peubah *x,y,* dan *z*. Turunan parsial *f* terhadap *x* di (*x,y,z*) dinyatakan oleh $f_x(x,y,z)$ atau $\delta f(x,y,z)/\delta x$ dan didefinisikan oleh

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

Jadi $f_x(x,y,z)$ boleh diperoleh dengan memperlakukan y dan z sebagai konstanta dan menurunkan terhadap *x*. Turunan parsial terhadap *y* dan *z* didefinisikan dengan cara yang serupa.

Contoh Soal

Jika $f(x,y,z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x, f_y, dan f_z !

Penyelesaian:

Untuk memperoleh f_x, kita pandang *y* dan *z* sebagai konstanta dan turunkan terhadap peubah *x*. Sehingga diperoleh

$f_x(x,y,z) = y + 3z$

$f_y(x,y,z) = x + 2z$

$f_z(x,y,z) = 2y + 3x$

Latihan Soal

Jika $f(x,y,z) = 3x^2y - xyz + y^2z^2$. Tentukan nilai dari:

1. $f_x(x,y,z)$
2. $f_{xy}(x,y,z)$
3. $f_y(0,1,2)$

Lembar Jawaban

Lembar Jawaban

c. Aplikasi Turunan Parsial

Carilah aplikasi turunan parsal pada bidang teknik sipil!

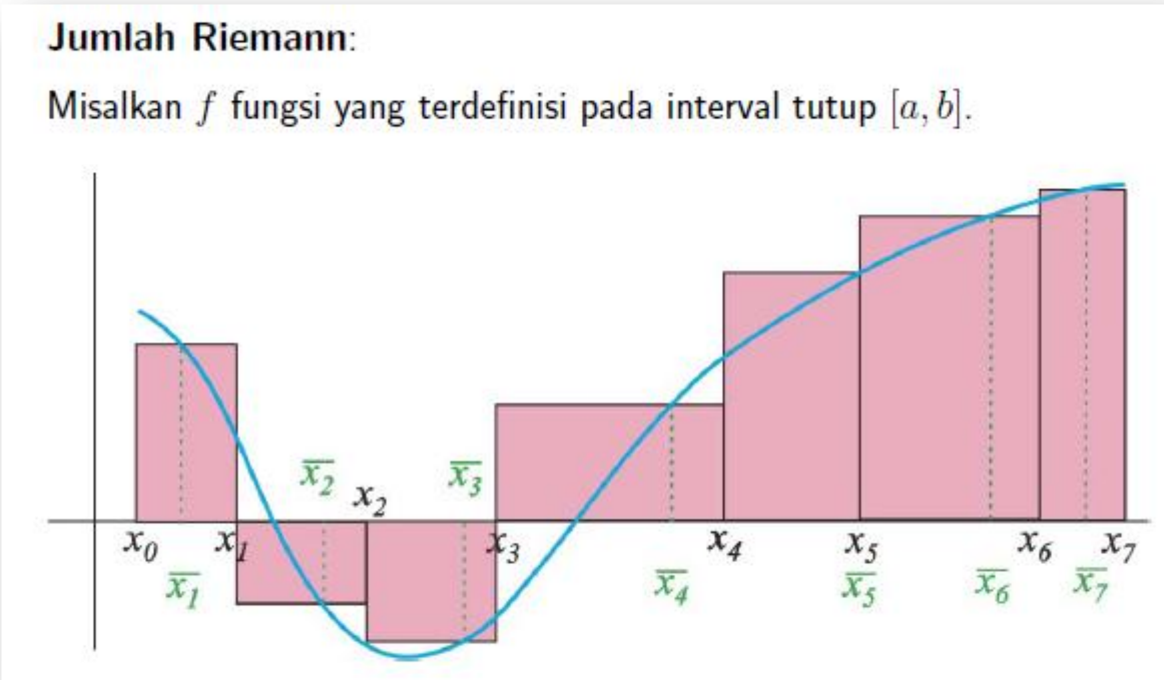
Lembar Jawaban

Lembar Jawaban

BAB IV INTEGRAL LIPAT DUA

a. Integral Ganda Dua atas Persegi Panjang

Sebelum membahas materi integral ganda dua atas persegi panjang, kita mencoba mengingat lagi materi integral pada Matakuliah Kalkulus I



Gambar 4.1

JUMLAH RIEMANN

Misalkan sebuah fungsi f yang didefinisikan pada selang tertutup $[a, b]$. Pandang suatu partisi P dari selang $[a, b]$ menjadi n selang bagian (tidak perlu panjangnya sama) memakai titik-titik $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Andaikan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada setiap selang, ambillah sebarang titik, kita sebut sebagai titik sampel untuk suatu selang bagian ke-i.

Bentuklah penjumlahan

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Yang selanjutnya kita sebut R_p sebagai **jumlah Riemann** untuk f yang berpadanan dengan partisi P

kemudian dapat dituliskan sebagai berikut

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, \Delta x_i}$$

Setelah melakukan diskusi dengan kelompok Anda, selesaikan, permasalahan berikut! Tuliskan hasil diskusi Anda pada lembar jawaban yang sudah disediakan!

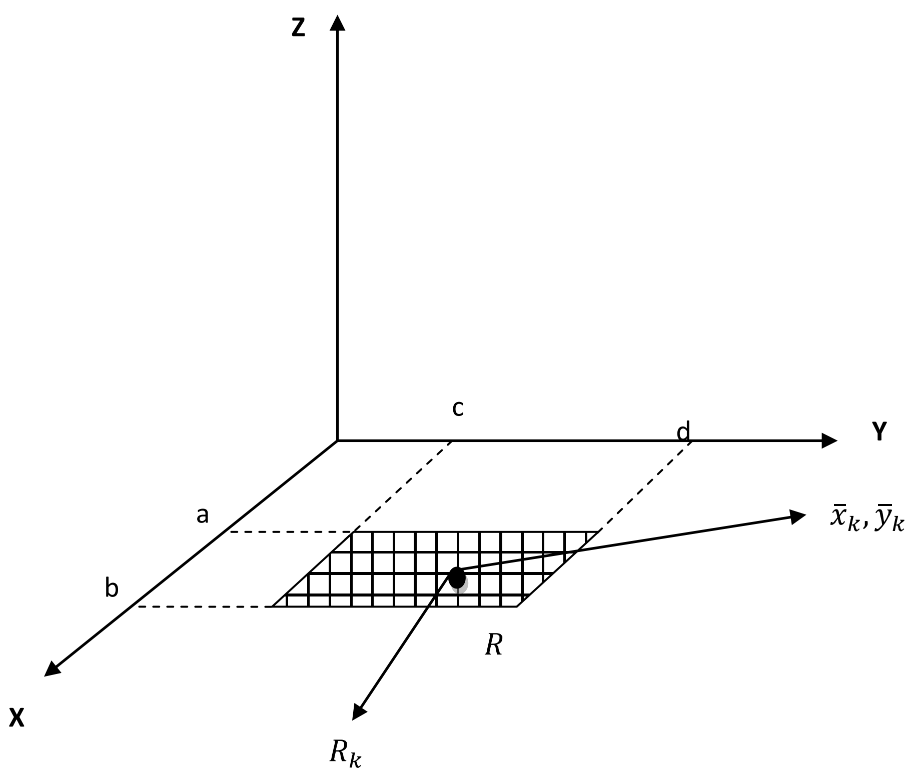
1. Berikan contoh sebuah fungsi, definisikan batasnya, selanjutnya tentukan luasnya dengan menggunakan jumlah Riemann!
2. Ilustrasikan soal nomor 1 secara geometri!

Lembar Jawaban

Kita meneruskan dalam cara yang persis sama untuk mendefinisikan integral untuk fungsi dua peubah. Tetapkan R berupa persegi panjang dengan sisi-sisi sejajar sumbu-sumbu koordinat, yakni ambil

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Bentuk suatu partisi P dari R dengan memakai sarana berupa garis-garis sejajar sumbu x dan y, seperti pada gambar 1. Ini membagi R menjadi beberapa persegipanjang kecil, semuanya n buah, yang kita tunjukkan dengan $R_k, k = 1,2, \ldots, n$. Tetapkan Δx_k dan Δy_k adalah panjang sisi-sisi R_k dan $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ adalah luasnya. Pada R_k, ambil sebuah titik contoh $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ dan bentuk penjumlahan reimann adalah
$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta A_k$



Gambar 4.2 Jumlah Riemann di R-3

Dari ilustrasi tersebut di atas, dapat kita definisikan sebagai berikut

Definisi

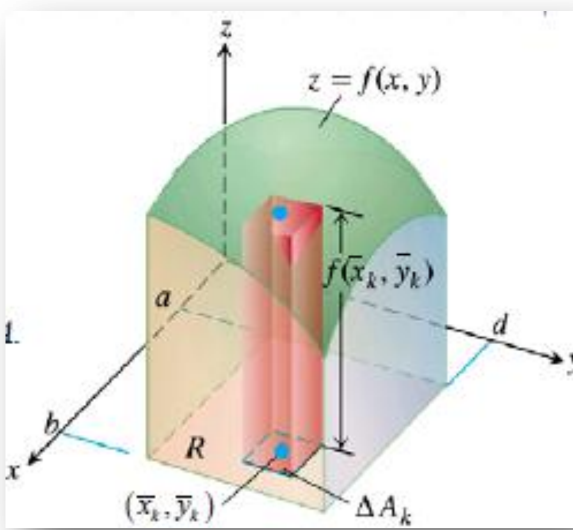
(Integral Ganda Dua). Andaikan *f* suatu fungsi dua peubah yang terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup **R** , jika

$$\lim_{|p|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, \Delta A_k$$

ada, kita katakana *f* terintegralkan pada ***R***. Lebih lanjut, $\iint_R f(x,y)dA$ yang disebut **integral ganda dua** *f* pada **R**, diberikan oleh

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{|p|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$$

Ilustrasi dari definisi tersebut dapat dilihat pada gambar 4.3 berikut



Gambar 4.3

Berikut adalah sifat-sifat integral ganda dua yang mewarisi hampir semua sifat-sifat tunggal

1. Integral ganda-dua adalah linear yaitu
   a. $\iint_R kf(x,y)dA = k\iint_R f(x,y)dA$
   b. $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$
2. Integral ganda dua adalah aditif pada persegi panjang yang saling melengkapi hanya pada suatu ruas garis

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)dA$$

3. Sifat perbandingan berlaku. Jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ untuk semua (x,y) di ***R*** , maka

$$\iint\limits_R f(x,y)dA \leq \iint\limits_R g(x,y)dA$$

Latihan Soal

1. Hampiri $\iint_R f(x,y)dA$ dengan $f(x,y) = \frac{64-8x+y^2}{16}$

   Dan $R = \{(x,y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8\}$
2. Andaikan f adalah fungsi tangga yaitu

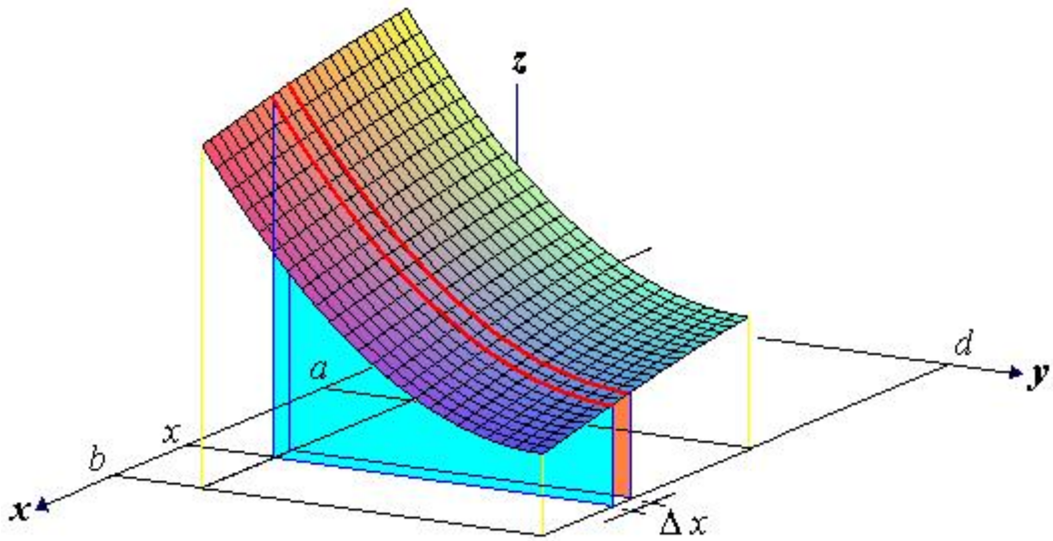
$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y < 1 \\ 2\,, 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y < 2 \\ 3\,, 0 \leq x \leq 3, 2 \leq y < 3 \end{cases}$$

   Hitung $\iint_R f(x,y)dA$ dengan $R = \{(x,y): 0 \leq x < 3, 0 \leq y \leq 3\}$

Lembar Jawaban

b. Integral Lipat

menghitung integral dengan masalah menghitung volume. Misalkan kita ingin menentukan volume benda pejal dibawah bidang *z=f*(*x,y*) di atas persegi panjang *R*: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, dengan mengirisnya. Misalnya benda tersebut diiris tegak lurus terhadap sb-*x* selebar Δ*x*. Misalkan luas penampang irisan benda pejal dengan bidang *x* adalah *A*(*x*).



Gambar 4.4

Volume ΔV dari kepingan secara hampiran diberikan oleh $\Delta V \approx A(y)\Delta y$. Selanjutnya kita bisa menuliskan dengan $V = \int_c^d A(y)dy$

Sebaliknya untuk *y* tetap kita boleh menghitung *A(y)* dengan menggunakan integral tunggal biasa, sehingga diperoleh $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

Yang selanjutnya kita sebut dengan **integral lipat (iterasi)**

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

Kemudian apabila kita mengiris benda pejal dengan bidang-bidang yang sejajar dengan bidang *yz* kita akan memperoleh integral lipat lain dengan pengintegralan yang berlangsung dalam urutan berlawanan

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

CONTOH

Hitung $\int_0^2 \int_1^3 x^2 y \; dydx$

Penyelesaian

$$\int_0^2 \int_1^3 x^2 y \; dydx = \int_0^2 \left(\left[x^2 \cdot \frac{1}{2} y^2\right] \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right) dx = \int_0^2 \left(\left(\frac{9}{2}x^2\right) - \left(\frac{1}{2}x^2\right)\right) dx = \int_0^2 4x^2 dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3\right] \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} = \frac{32}{3}$$

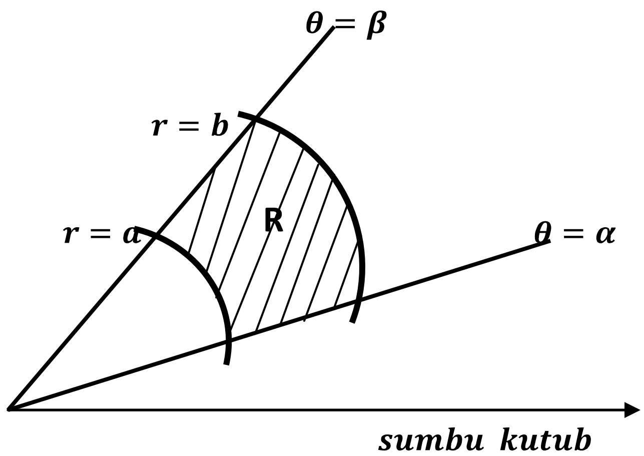
Latihan Soal

1. $\int_{-1}^4 \int_1^2 (x + y^2) \; dydx$
2. $\int_{-1}^1 \int_1^2 (x^2 + y^2) dxdy$
3. $\int_0^\pi \int_0^1 x \; \sin y \;\; dx \; dy$

Lembar Jawaban

c. Integral Ganda Dua dalam Koordinat Kutub

Banyak integral yang lebih mudah dihitung bila dengan menggunakan koordinat polar. Pada bagian ini akan dipelajari mengubah integral menjadi koordinat polar dalam koordinat polar dan menghitungnya.



Gambar 2.4

Misalkan R adalah suatu persegi panjang kutub . Andaikan $z = f(x, y)$ menentukan suatu permukaan atas R dan andaikan f adalah kontinu dan tak negative, maka Volume (V) diberikan sebagai berikut.

$$V = \iint_R f(x,y)\ dA$$

Karena koordinat kutub, maka suatu persegi panjang kutub R berbentuk

$$R = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

Dengan $a \geq 0, \beta - \alpha \leq 2\pi$. Serta persamaan permukaan dapat dituliskan sebagai

$$z = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r,\theta)$$

Dengan menggunakan tehnik partisi, diperoleh rumus V

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta}$$

Latihan Soal

1. Tentukan volume V dari benda padat di atas persegi panjang kutub , dengan $R = \{(r, \theta)\}$

d. Aplikasi Integral Ganda Dua

Penerapan integral ganda dua yang paling jelas adalah dalam penghitungan volume benda pejal. Cobalah Anda cari aplikasi integral ganda dua dalam bidang teknik sipil, kemudian tuliskan hasil pemikiran Anda pada lembar berikut!

Lembar Jawaban

BAB V INTEGRAL GANDA TIGA

1.1 Integral Ganda tiga dalam koordinat kartesius/siku

Konsep yang diwujudkan dalam integral tunggal dan ganda-dua meluas pada integral ganda tiga bahkan ke ganda-n. Langkah yang dilakukan juga hampir sama yaitu melakukan partisi sehingga membentuk balok-balok bagian. Akibatnya, integral ganda tiga dapat didefinisikan

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{|p|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k}, \overline{y_k}, \overline{z_k})\Delta V_k$$

Sifat yang ada pada integral ganda dua juga berlaku pada integral ganda tiga. Akibatnya, dapat dituliskan sebagai integral lipat tiga

Contoh 2

Hitunglah $\iiint_B x^2yz\ dV$ dengan B adalah kotak

$$B = \{(x,y,z): 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 1 \le z \le 2\}$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\iiint_B x^2yz\,dV &= \int_0^2 \int_0^1 \int_1^2 x^2yz\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^2 \int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}x^3yz\right]_1^2 dy\,dz \\
&= \int_0^2 \int_0^1 \left[\tfrac{7}{3}yz\right] dy\,dz \\
&= \tfrac{7}{3}\int_0^2 \int_0^1 [yz]\,dy\,dz \\
&= \tfrac{7}{3}\int_0^2 \left[\tfrac{1}{2}y^2z\right]_0^1 dz \\
&= \tfrac{7}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^2 [z]\ dz \\
&= \tfrac{7}{6}\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^2 dz \\
&= \tfrac{7}{6}(2\,) = \tfrac{7}{3}
\end{aligned}$$

1.2Integral ganda tiga dalam koordinat tabung

Hubungan antara koordinat tabung dan kartesius adalah

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Sehingga dapat diperoleh

$$f(x, y, z) = f(r\ \cos\theta, r\ \sin\theta, z) = F(r, \theta, z)$$

1.3Penerapan integral ganda tiga

Carilah sumber yang relevan untuk mencari aplikasi integral ganda tiga pada bidang teknik sipil !

Lembar Jawaban

Lembar Jawaban

BAB VI MATRIKS

a. Definisi Matriks

Sebuah **matriks** adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan **entri** dalam matriks

Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya **baris** dan banyaknya **kolom** yang terdapat pada matriks tersebut.

Latihan Soal

Berikan contoh sebuah matriks dengan ukuran sebagai berikut.

1. 2×3
2. 3×2
3. 1×1
4. 2×1

Lembar Jawaban

Jika ***A*** adalah sebuah matriks, maka kita akan menggunakan a_{ij} untuk menyatakan entri yang terdapat di dalam baris *i* dan kolom *j* dari ***A.*** Jadi sebuah matriks berukuran 2×3 secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{2\times 3}$$

Sebuah matriks dengan *n* baris dan *n* kolom dinamakan ***matriks kuadrat berorde n*** , dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ dikatakan berada pada ***diagonal utama*** dari ***A***

Dua matriks dikatakan ***sama*** jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut sama.

b. Operasi Matriks

Ada beberapa operasi matriks yang didefinisikan, antara lain sebagai berikut.

a. Penjumlahan

Definisi

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka ***jumlah*** *A+B* adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan

b. Perkalian matriks dengan scalar

Definisi

Jika A adalah suatu matriks dan *c* adalah suatu scalar, maka ***hasil kali*** **cA** adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari *A* oleh c

c. Perkalian matriks dengan matriks

Definisi

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka ***hasil kali AB*** adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris *i* dan kolom *j* dari ***AB*** , pilihlah baris *i* dari matriks ***A*** dan kolom *j* dari matriks ***B***. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

d. Transpose dari matriks

Definisi

Jika ***A*** adalah sebarang matriks $m \times n$, maka **transpose A** dinyatakan oleh A^t dan didefinisikan dengan matriks $n \times m$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari kolom **A**, kolom keduanya adalah baris kedua dari ***A***, demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari **A**,dan seterusnya

Latihan Soal

Selesaikan permasalahan berikut!

Misalkan

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ $a = -3$, $b = 2$

Tentukan nilai dari

a. $A + B$
b. $bA - aC$
c. AC
d. CA
e. $A^t C$

Lembar Jawaban

c. Matriks Satuan

Matriks satuan dan dinyatakan dengan I. Jika ukurannya penting untuk ditekankan, maka kita akan menuliskan I_n untuk matriks satuan $n \times n$. Jika ***A*** adalah matriks $m \times n$, maka seperti yang dilukiskan pada contoh berikutnya, $AI_n = A$ dan $I_m A = A$. Sehingga matriks satuan akan memainkan peranan penting dalam menghitung matriks.

d. Invers Matriks

Definisi

Jika ***A*** adalah matriks kuadrat, dan jika kita dapat mencari matriks ***B*** sehingga ***AB=BA=I*** , maka ***A*** dikatakan ***dapat dibalik*** dan ***B*** dinamakan ***invers*** dari ***A***

Contoh Soal

Misalkan $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Karena $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ dan

$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Latihan Soal

Tentukan invers dari masing-masing matriks berikut!

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
2. $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Lembar Jawaban

e. Determinan

Sebelum kita memahami definisi dari determinan, kita perlu memahami beberapa konsep berikut yang merupakan materi prasyarat dari determinan.

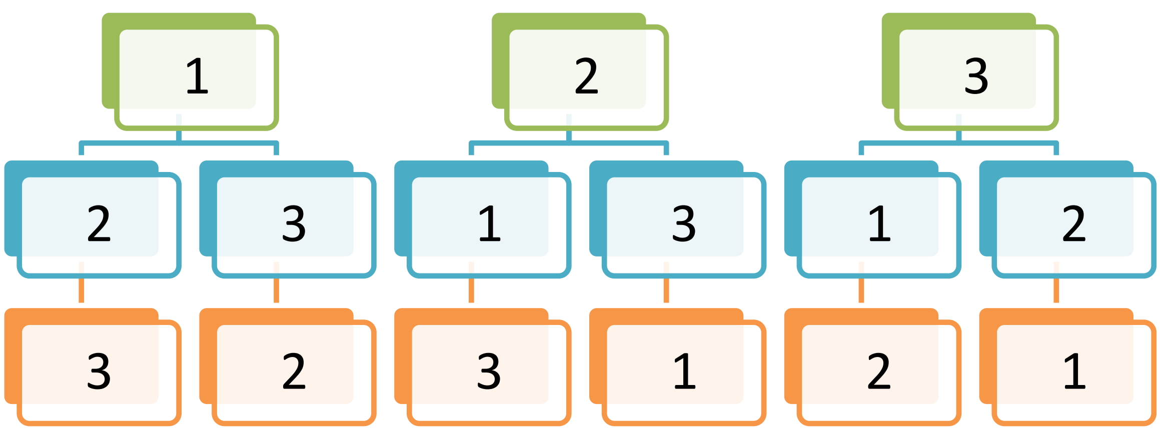
Definisi

Permutasi himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1,2,\dots,n\}$ adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa mengulangi bilangan-bilangan tersebut

Misalnya banyaknya permutasi dari himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1,2,3\}$ adalah

$$(1,2,3),(2,1,3),(3,1,2),(1,3,2),(2,3,1),(3,2,1)$$

Selain dengan cara tersebut, kita bisa menggunakan *pohon permutasi*



Sehingga banyaknya permutasi dari himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1,2,3\}$ adalah

$(1,2,3),(2,1,3),(3,1,2),(1,3,2),(2,3,1),(3,2,1)$

Secara umum, banyaknya permutasi dari $\{1,2, \ldots, n\}$ akan mempunyai $n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!$ permutasi yang berbeda

Untuk menyatakan permutasi umum dari himpunan $\{1,2, \ldots, n\}$, maka kita akan menuliskan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Di sini, j_1 adalah bilangan bulat pertama dalam permutasian, j_2 adalah bilangan bulat kedua, dan seterusnya. Sebuah invers dikatakan terjadi dalam permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ jika bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil.

Permutasi	Banyaknya invers	Klasifikasi
$(1,2,3)$	0	genap
$(2,1,3)$	1	ganjil
$(3,1,2)$	1	ganjil
$(1,3,2)$	2	genap
$(2,3,1)$	2	genap
$(3,2,1)$	3	ganjil

Yang dimaksud dengan ***hasil kali elementer A*** adalah setiap hasil kali *n* entri ***A***, sedangkan dua diantaranya tidak boleh berasal dari baris yang sama atau dari kolom yang sama

Misalkan semua hasil kali elementer dari $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ adalah $a_{11} \cdot a_{22}$ dan $a_{12} \cdot a_{21}$

Coba tentukan semua hasil kali elementer dari $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$!

Lembar Jawaban

Sedangkan yang dimaksud dengan hasil kali elementer bertanda A adalah hasil kali elementer

$a_{1_{j1}}, a_{2_{j2}}, \dots, a_{n_{jn}}$ dikalikan dengan $+1$ atau -1. Kita gunakan tanda $+$ jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah permutasi genap, dan tanda – jika $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permutasi ganjil.

Definisi

Misalkan ***A*** adalah matriks kuadrat. ***Fungsi determinan*** dinyatakan oleh ***det***, dan didefinisikan det (A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah det (A) dinamakan ***determinan A***

Untuk memudahkan penghitungannya, kita bisa menggunakan aturan berikut untuk menentukan determinan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Dengan mengalikan entri-entri pada panah kanan yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasil kali entri-entri pada panah yang mengarah ke kiri.

Latihan Soal

Hitunglah determinan dari

1. $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

Lembar Jawaban