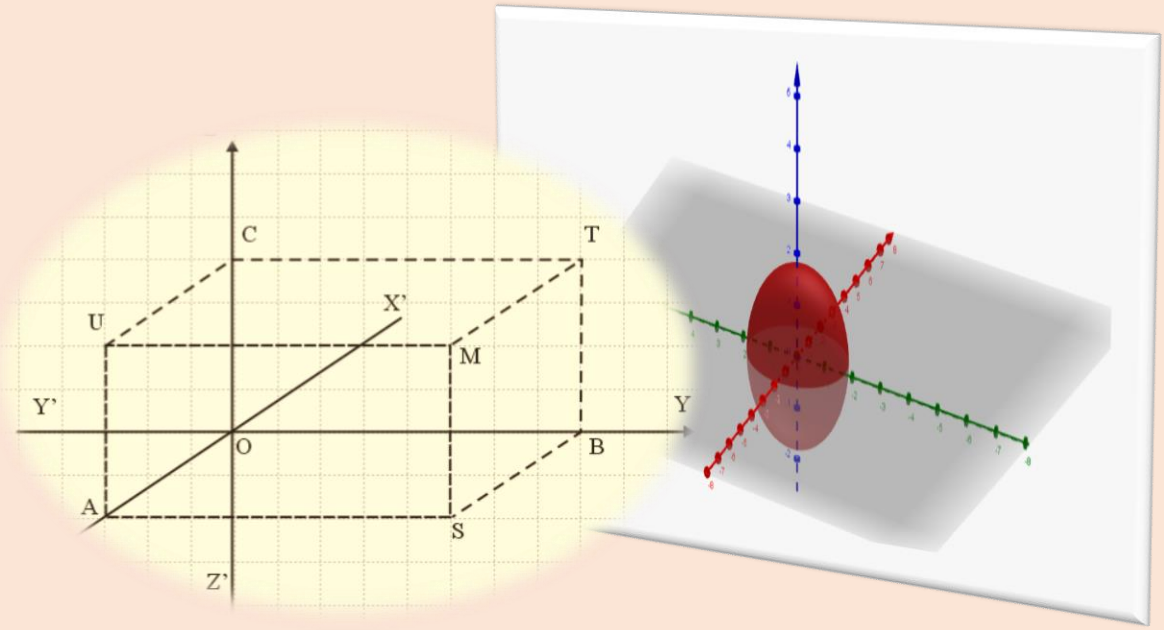
BUKU AJAR
GEOMETRI ANALITIK RUANG

Nirfayanti,S.S.i.,M.Pd.



PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS MUSLIM MAROS
2018

KATA PENGANTAR

Puji syukur dipanjatkan kehadirat Allah SWT atas segala rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya yang telah dilimpahkan, sehingga terselesaikannya buku pegangan kuliah untuk mata kuliah Geometri Analitik Ruang. Mata Kuliah ini memuat materi tentang garis lurus, persamaan bola, luasan putaran, dan luasan berderajad dua.

Selanjutnya penulis menyadari bahwa buku ini masih belum sempurna; untuk itu dimohon tanggapan baik berupa kritik dan saran kepada pembaca demi kebaikan buku pegangan kuliah ini. Akhirnya mudah-mudahan buku ini bermanfaat bagi pembaca.

Makassar, 10 Maret 2018
Penulis

BAB I
SISTEM KOORDINAT TEGAK LURUS

1.1 Pengertian Sistem Koordinat Tegak Lurus

Dengan suatu cara tertentu, kita dapat menggunakan bilangan-bilangan untuk menunjukan letak suatu titik didalam ruang maka dikatakan bahwa suatu sistem koordinat telah kita terapkan didalam ruang.

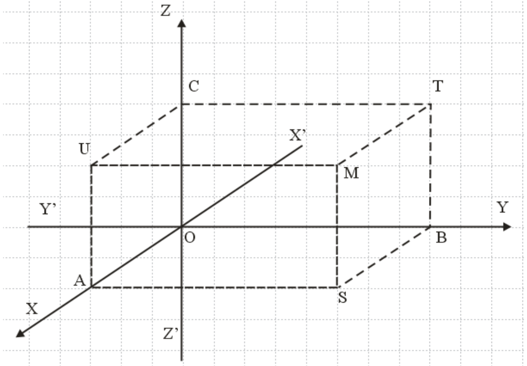
Sekarang kita akan membicarakan suatu sistem koordinat yang paling sederhana dan paling umum digunakan

"Suatu sistem koordinat tegak lurus (disebut juga sistem koordinat Cartesian) didalam ruang ditentukan dengan memilih suatu satuan panjang serta tiga buah garis lurus yang masing-masingnya saling tegak lurus dan berpotongan disuatu titik (ketiga garis iru disebut sumbu-sumbu),dan ditentukan pulah oleh himpunan semua tripel-tripel terurut dari bilangan-bilangan nyata."

Misalkan X'OX, *Z*'OZ adalah tegak lurus yang paling tegak lurus dan menentukan sebuah bidang rata XOZ. Melalui titik potong O, yang disebut titik asal, diganbar garis Y'OY yang tegak lurus bidang XOZ Maka berarti ketiga garis lurus tersebut masing-masing saling tegak lurus.

Ketiga garisX'OX, Y'OY, dan *Z*'OZ disebut sumbu-sumbu koordinat tegak lurus, di singkat sumbu *X*, *Y*, dan *Z*.

Ketiga sumbu diambil sepasang-sepasang, menentukan tiga buah bidang XOY, XOZ, dan *ZOX* atau secara singkat kita tuliskan bidang XY dan *Z*X, masing-masing disebut bidang koordinat tegak lurus.



Misalkan M suatu titik sembarang didalam ruang. Melalui M, gambar tiga buah bidang rata yang masing-masing sejajar bidang-bidangng koordinat (berarti juga memotong tegak lurus sumbu-sumbu koordinat) misalkan memotong di titik A, B, dan C, dimana OA = x. OB = y, dan OC = z satuan. Ketiga bilangan x, y, dan z dengan urutan ini disebut koordinat dari titik *M*.

"Di dalam ruang, setiap titik dapat diwakili oleh satu dan hanya satu tripel terurut bilangan-bilangan nyata (x,y,z), dan sebaliknya setiap tripel terurut bilangan-bilangan nyata (x,y,z) mewakili satu dan hanya satu titik di dalam ruang. Atau dengan perkataan lain, terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan titik di dalam ruang dengan himpunan semua tripel terurut bilangan-bilangan nyata."

Masing-masing x, y, dan z boleh positif atau negatif, tergantung arah mengukurnya, apakah kearah positif atau kearah negatif dari sumbiu-sumbu koordinat.

Dalam hal sebaliknya, yaitu diketahui tripel terurut bilangan-bilangan (x,y,z), kita dapat menentukan titik M yang koordinatnya x, y, dan z. untuk itu kita kerjakan sebagai berikutut :

(i) Berturut-turut ukur OA = x ; OB = y, dan OC = z sepanjang sumbu-sumbu X, Y, dan Z (dengan memperhatikan arah positif dan negatifnya).

(ii) Beruturut-turut gambarkan bidang-bidang melalui A, B dan C yang sejajar bidang-bidang koordinat YZ, *Z*X, XY. Titik potong ketiga bidang tersebut adalah M yang dimaksud.

Bila titik M berkoordinat x, y, dan z, kita dapat menuliskannya M (x,y,z) x disebut absis, y disebut ordinal dan z disebut aplikat dari titik *M*.

Dengan diterapkannya suatu sistem koordinat tegak lurus maka ruang akan terbagi menjadi delapan bagian, masing-masing bagian disebut oktan dan diberi nomor menurut aturan berikut :

Oktan I berisi titik-titik dengan $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

Oktan II berisi titik-titik dengan $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$

Oktan III berisi titik-titik dengan $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$

Oktan IV berisi titik-titik dengan $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$

Oktan V berisi titik-titik dengan $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$

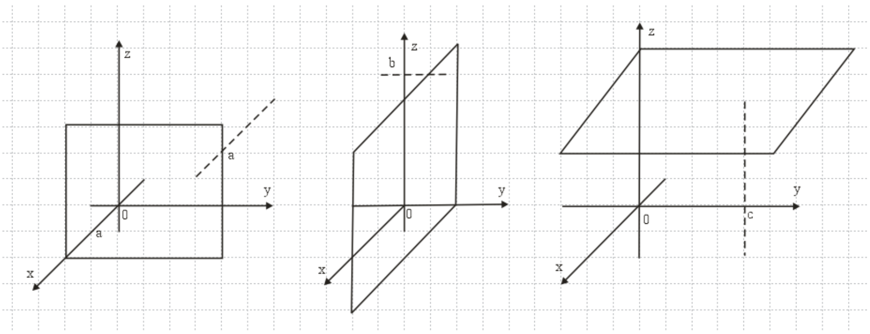
Oktan VII berisi titik-titik dengan $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$

Oktan VIII berisi titik-titik dengan $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$

1.2 Persamaan Bidang Rata Sumbu Koordinat

Titik yang terletak pada bidang koordinat mempunyai ciri-ciri khusus. Titik yang terletak pada bidang XOY akan mempunyai aplikat $z = 0$. titik yang terletak pada *YOZ* akan mempunyai absis x = 0. dan titik yang terletak *ZOX* akan mempunyai ordinat y = 0. kebalikan dari pernyataan-pernyataan diatas adalah benar. Jadi, titik 0 berkoordinat (0,0,0). Sedangakan titik-titik yang terletak pada sumbu-sumbu koordinat juga memiliki cirri-ciri khusus. Titik yang terletak pada X (berarti terletak pada bidang XOY dan *Z*OY) akan mempunyai x = 0 dan *z* = 0. titik yang terletak pada sumbu Y mempunyai x = 0 dan *z* = 0. titik yang terletak pada *Z* mempunyai y – 0 dan x = 0.

Kalau kita perhatikan paralel-epipedum ASBO-UMTC pada gambar di atas maka koordinat *x, y,* dan *z* dari titik M (harga mutlaknya) tak lain adalah jarak dari titik M kebidang-bidang koordinat. Maka tempat kedudukan titik-titik yang berabsis sama, yaitu x = a adalah suatu bidang rata yang sejajar dengan *YOZ* berjarak $|a|$. Letak bidang-bidang tersebut tergantung dari tanda a. Di sebelah belakang bidang *YOZ* bila negatif dan di sebelah maka bidang *YOZ* bila a positif. Dan tempat kedudukan titik-titik yang berkoordinat sama y = b, adalah bidang sejajar bidang koordinat *ZOX* berjarak $|b|$. Serta tempat kedudukan titik-titik berapliakat *z* = c, adalah bidang sejajar bidang koordinat XOY



1.3 Jarak Dua Titik

Kita hendak menentukan jarak antara titik *P* (x_1, y_1, z_1) Q (x_2, y_2, z_2),

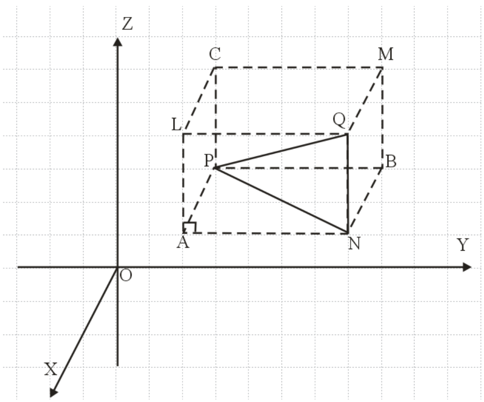
Perhatikan paralel-epipedum $ANBP - LQMC$

Maka:

$PA = |x_2 - x_1|$

$AN = |y_2 - y_1|$

$NQ = |z_2 - z_1|$



Menurut teorima phytagoras : $PN^2 = PA^2 + AN^2$ dan karena QN $\pm$ bidang ANBP, berarti QN $\pm$ PN sehingga :

(phytagoras) $PQ^2 = PN^2 + AN^2 + QN^2$

$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

Atau PQ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Kalau P adalah titik asal O (0, 0, 0), maka jarajnya ketitik Q (x_2, y_2, z_2) adalah :

OQ = $\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$

Contoh 1 :

(i) Jarak titik *P* (3,1,4) dan *Q* (5,0,2) adalah

$$P = \sqrt{(5-3)^2 + (0-1)^2 + (2-4)^2} = 3$$

(ii) Jarak titik asal *O* (0,0,0) ke titik *Q* (-6,2,-3) adalah

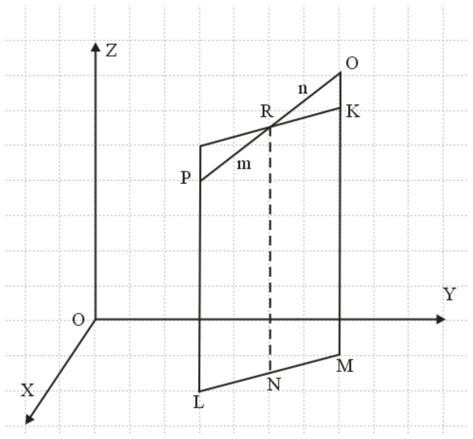
$$OQ = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = 7$$

1.4 Koordinat Titik yang Membagi Luas Garis *PQ* atas Perbandingan *m : n*

Misalkan $P(x_1, y_1, z_1)$ dan $Q(x_2, y_2, z_2)$, *R*(*x*,*y*,*z*) membagi garis *PQ* atas perbandingan *m : n*.

Gambarkan *PL, QM, RN*, tegak lurus bidang *XOY*.

LMN adalah perpotongan bidang *PRQMNL*. Tarik *HRK//LNM.* Δ *KQR*.



$\rightarrow \frac{m}{n} = \frac{P}{R} = \frac{HP}{KQ} = \frac{NR - LP}{MQ - NR} \rightarrow z = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \rightarrow z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$ Kemudian dengan cara yang sama, menarik garis-garis tegak lurus pada bidang *YOZ* dan *ZOX* diperoleh :

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \text{ dan } y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

Jadi koordinat : $R\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$

Koordinat titik tengah : Kalau *R* adalah titik tengah ruas garis *PQ* maka *R* membagi *PQ* atas perbandingan *m : n* = 1 : 1.

Maka :

$$R\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2}\right)$$

Secara umum : kita tulis perbandingan *m : n = k*, dimana k boleh positif atau negatif, tergantung apakah *R* terletak di antara *PQ* ataukah pada perpanjangannya.

Kalau : *k* > 0 maka R terletak diantara *P* dan *Q*.

-1 < *k* < 0 maka R terletak di perpanjangan *QP* (pada pihak *P*)

k = -1, menunjukan suatu titik di tak berhingga.

k , -1, maka R terletak diperpanjang *PQ* (pihak *PQ*).

Dalam hal ini koordinat *R* menjadi

$$R\left(\frac{kx_2 + x_1}{1+k}, \frac{ky_2 + y_1}{1+k}, \frac{kz_2 + z_1}{1+k}\right)$$

Dimana k $\neq -1$

Contoh 2 :

Misalkan P (-4, 5,-6)dan Q (2,-4,3). Maka koordinat titik R membagi PQ atas perbandingan -4:1 adalah: $R\left(\frac{(-4)(2)-4}{1-4}, \frac{(-4)(-4)+5}{1-4}, \frac{(-4)(3)-6}{1-4}\right)$ Atau R (4,-7, 6), dan koordinat titik S yang membagi PQ atas perbandingan 1 : 2 adalah:

<u>Penyelesaian : :</u>

S $\left(\frac{(\frac{1}{2})(2)-4}{1-\frac{1}{2}},\frac{(-4)(-4)+5}{1-\frac{1}{2}},\frac{(-4)(3)-6}{1-\frac{1}{2}}\right)$ Atau S $(-2,2,-3)$

1.5 Vektor

Dari fisika elementer, kita telah mengenal bahwa beberapa besaran fisika, seperti terperatur, massa, ataupun kerapatan, disebut besaran sekalar. Sedangkan beberapa besaran lain, seperti gaya, keceptan, percepatan disebut besaran vektor. Setiap besaran sekalar dikaitkan dengan suatu bilangan yang merupakan perbandingan besaran tersebut dengan suatu satuan ukuran tertentu yang sesuai, bilangan itu disebut besarnya. Di lain pihak, suatu besaran vektor tidak cukup ditentukan oleh besaranya saja, tetapi juga oleh arahnya.

Vektor ilmu ukur dapat digunakan untuk penggambaran absrak dari besaran-besaran vektor fisika.

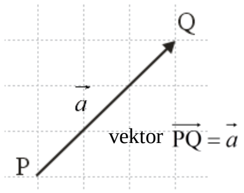
“vektor ilmu ukur, singkatnya : vektor, didefinisikaa sebagai ruas garis lurus yang mempunyai arah’

Besaran vektor dinyatakan oleh panjang ruas garis, sedangkan arahnya oleh tanda panah

Didalam buku ini, vektor akan digunakan sebagai alat pembantu yang menggunakan dalam pembicaraan ilmu ukur Analitik.

Notasi : suatu vektor dapat dituliskan dengan dua huruf besaran serta suatu strip atau tanda panah diatas huruf-huruf kedua menyatakan titik ujungnya.

Sering pula suatu vektor kita beri nama dengan sebuah huruf kecil (yang tercetak tebal), misalnya, **a,** atau $\bar{a}$ atau $\vec{a}$, ataupun ***a***. Besar (panjang) vektor ditulis $|PQ|$ atau $|a|$.

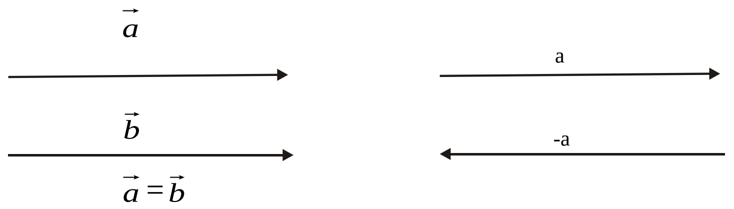


Suatu vektor diberi nama titik awal dan titik ujungnya berimpit disebut *vektor nol*. vektor-vektor yang terletak pada garis lurus yang sama atau sejajar disebut segaris.

Definisi dari kesamaan-kesamaan vektor :

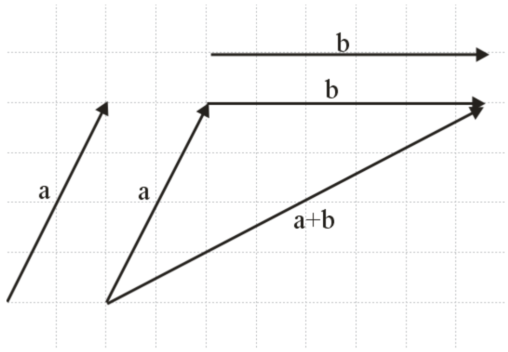
“vektor-vektor tersebut adalah sama jika mereka segaris serta mempunyai panjang yang arahnya sama”

Sebuah vektor yang mempunyai arahnya berlawanan dengan vektor ***a*** tetapi mempunyai panjang yang sama, dinyatakan sebagai ***–a***.

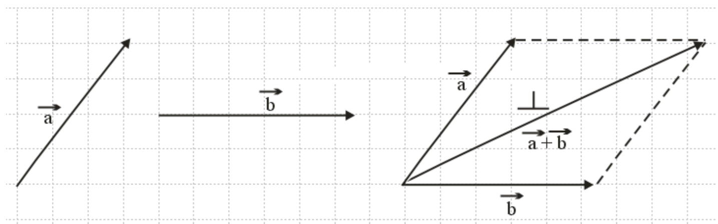


Jumlah jarak vektor-vektor ***a*** dan ***b*** adalah sebuah vektor ***c*** = ***a*** + ***b***. yang diperoleh dengan menempatkan titik awal vektor ***b*** berimpit dengan titik ujung ***a*** lalu menghubungakan titik awal vektor ***a*** dengan titik ujung vektor ***b***.

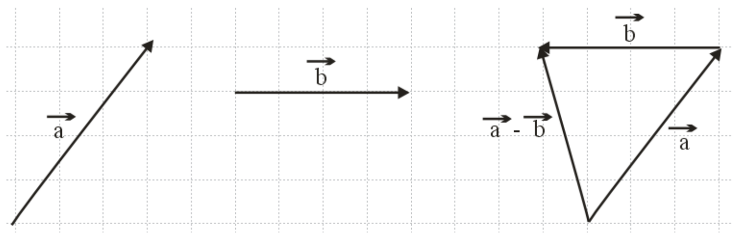
Metode ini disebut metode segitiga dari penjumlahan vektor, metode lain adalah metode jajaran genjang, yaitu dengan menempatkan titik awal vektor-vektor ***a*** dan ***b*** berimpit, lalu membentuk



Sebuah jajaran genjang dengan sebuah sisinya ***a*** serta ***b. a*** + ***b*** adalah diagonal jajaran genjang tersebut.yang bertitik awal pada titik awal ***a*** dan ***b*** tersebut.



Selisih dua vektor : $a - b$ sama seperti menjumlahkan ***a*** dengan **–*b***. dengan perkataan lain $a - b = a + (-b)$



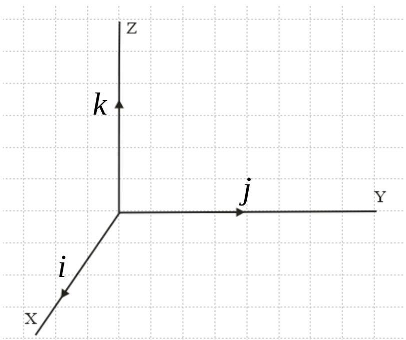
Hasil perkalian vektor ***a*** dengan skalar ***k*** adalah vektor ***ka*** yang panjangnya $|k|$ kali panjang ***a*** dan arahnya sama dengan arah ***a*** bila ***k*** positif atau berlawanan dengan arah ***a*** bila negatif. Kalau ***k*** = 0 maka ***ka*** adalah vektor nol (0).

Beberapa hukum pada operasi vektor : jika ***a, b***. dan ***c*** vektor-vektor, serta *m* . *n* skalar-skalar.

1. ***a*** + ***b*** = ***b*** + ***a*** (hukum kumutatif penjumlahan).
2. ***a*** + (***b*** + ***c***) = (***a*** + ***b***) + ***c*** (hukum assosiatif penjumlahan)
3. ***ma*** = ***am*** (hukum kumutatif penjumlaham)
4. ***m (na)*** = ***(mn) a*** (hukum assosiatif untuk perkalian)
5. (***m*** + ***n)*** *a* = ***ma*** + ***na*** (hukum distributif)
6. ***m (a*** + ***b)*** = ***ma*** + ***mb*** (hukum distributif)

1.6 Vektor dan Sistem Koordinat

Suatu vektor disebut vektor satuan bila panjangnya satu. Maka bila *a* vektor dengan panjang $|a| \neq 0$ maka $\frac{a}{|a|}$ adalah vektor satuan yang searah dengan ***a.***



Pandang sistem koordinat cartesian berikut:

Kita tentukam vektor-vektor satuan:

i yang titik awalnya titik (0,0,0) dan arahnya secara sumbu *X* positif.

j yang titik awalnya titik (0,0,0) dan arahnya secara sumbu *Y* positif.

k yang titik awalnya titik (0,0,0) dan arahnya secara sumbu *Z* positif.

Kita tuliskan ***i = i1 + 0j + 0k***

j = 0i + 1j + 0k

k = 0i + 0j +1k

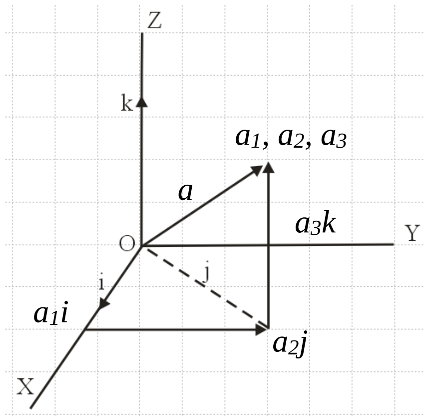
dan kita definisikan penulisan diatas menjadi :

i = $|1,0,0|$

j = $|0,1,0|$

k = $|0,0,1|$

Panjang sembarang vektor ***a*** yang titik awalnya di titik (0,0,0) dan titik ujungya dititik (a_1, a_2, a_3)



jelas menurut metode segitiga bahwa

$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k = [a_1, a_2, a_3]$

Bilangan-bilangan a_1, a_2 dan a_3 disebut komponen-komponen dari vektor ***a*** dan vektor itu (yang titik awalnya titik nol) disebut vektor posisi (radius vektor) dari titik (a_1, a_2, a_3).

Jelas panjang ***a*** $= \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$

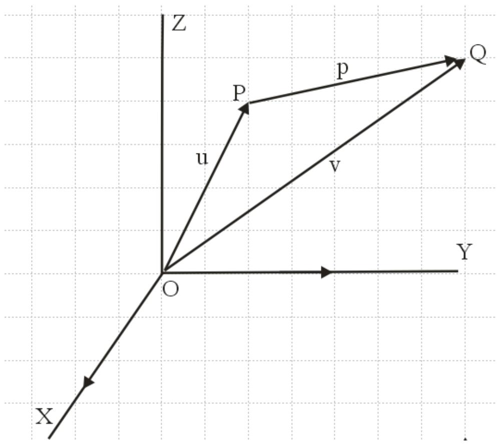
Bila titik awal bukan titik 0 :

Misalkan vector ***p*** titik awalnya P(p_1, p_2, p_3) dan titik ujunya Q(q_1, q_2, q_3).

Tarik vektor-vektor ***u*** dan ***v***, berturut-turut vektor posisi P dan Q maka :

$u = p_1 i + p_2 j + p_3 k$

$v = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ sedangkan $p = u - u = (q_1 - p_1)i + (q_2 - p_2)j + (q_3 - p_3)\text{k}$



atau $p = [(q_1 - p_1), (q_2 - p_2), (q_3 - p_3)]$

Ringkasan

1. Vektor-vektor satuan sistem koordinat: ***i*** = $|1{,}0{,}0|$, ***j*** = $|0{,}1{,}0|$, ***k*** = $|0{,}0{,}1|$, untuk setipa vektor lain berlaku $\boldsymbol{a}[a_1, a_2, a_3] = a_1 i + a_2 j + a_3 k$. Harga mutlak komponen-komponen tersebut menyatakan berturut-turut panjang proyeksi pada sumbu X, sumbu Y, dan sumbu *Z*.

2. Vektor-vektor dengan koordinat $[a_1, a_2, a_3]$ mempunyai panjang $|a| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}$

3. Bila **a** = $[a_1, a_2, a_3]$, ***b*** = $[b_1, b_2, b_3]$ dan ***k*** suatu skalar maka $a + b = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$ dan $ka = k[a_1, a_2, a_3] = [ka_1, ka_2, ka_3]$.

1.7 Dot Product (Perkalian Titik)

Bila a dan b vektor-vektor, θ dalah sudut antara a dan b $(0 \le \theta \le \pi)$, maka :

Dot product: $a.b = |a||b|\cos\theta$

Denga mudah dapat ditunjukan:

Bila ***a*** dan ***b*** vector-vektor, *m* scalar.

1. ***a.b = b.a***
2. ***a. (b + c) = a.b + a.c***
3. *m* (***a.b***) = (*m.**a***).***b*** = ***a***. (*m.**b***) = (***a,b***) *m*
4. bila ***a*** = $[a_1, a_2, a_3]$, ***b*** = $[b_1, b_2, b_3]$
5. maka ***a .b*** = **[** $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ **],[** $b_1 i + b_2 j + b_3 k$ **]**

$$(a_1b_1)i.i + (a_2b_1)j.i + (a_3b_1)k.j + (a_1b_2)i.j + (a_2b_2)j.j + (a_3b_2)k.j + (a_1b_3)i.k + (a_2b_3)j..k + (a_3b_3)k.k$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum a_i b_j$$

6. ***a.a*** $= a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} = |a|^2$
7. ***a.a*** = $0(a \ne 0, b \ne 0)$ ***a*** tegak lurus ***b***.

Contoh 3 :

a = 3i + 4j + 5k dan ***b*** = 2i + 6j

Maka ***a.b*** = 3.2 + 4.6 + 5.0 = 30

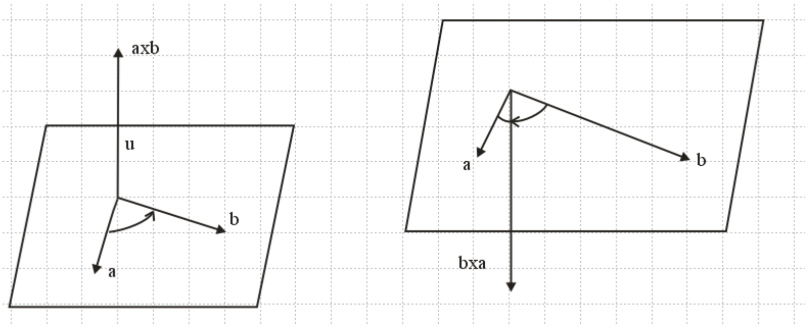
$|a| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$ dan $|b| = \sqrt{4+36+0} = \sqrt{40}$

Maka cos θ = (a,b) / $\left(\sqrt{50}.\sqrt{40}\right)$= 3/$\left(2\sqrt{5}\right)$.

1.8. Cross-Product

Bila **a** dan **b** vekyor-vektor, θ = sudut antara **a** dan **b** $\left(0 \le \theta \le \pi\right)$. Maka **a**×**b** = $\{|a||b|\sin\theta\}u$

Dimana u adalah vector satuasn yang tegak lurus bidang (**a,b**) serta ***a***, ***b,*** dan ***u*** memenuhi sistem tangan kanan



Beberapa sifat. Bila a,b vektor-vektor, *m* skalar

1. $a \times b = -b \times a$

2. $a \times \left(b+c\right) = a \times b + a \times c$

3. $m\left(a \times b\right) = ma \times b = a \times mb = \left(a \times b\right)m$

4. $i \times i = j \times j = k \times k - 0$

$i \times j = k.j \times k = i.k \times i = j$

5. Bila a = $\left[a_1, a_2, a_3\right] = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$b = \left[b_1, b_2, b_3\right] = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

Maka ***a*** × ***b*** = $\left[\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b \end{vmatrix}\right]$

$$= \begin{vmatrix} i & i & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

6. Panjang ***a*** × ***b*** yaitu $|a\times b| = |a||b|\sin\theta$ menyatakan luas jajaran genjang yang dua sisinya ***a*** dan ***b***.

7. Jika ***a*** × ***b*** = 0 dan ***a*** ≠ 0, ***b*** ≠ 0 maka ***a*** sejajar dengan ***b***.

Contoh 4 :

a = [2, 1, 1]

b = [-3 ,6, 7]

$$a \times b = \left[\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [1, -17, 15]$$

1.9. Arti Suatu Persamaan

"Bangun ilmu ukur (tempat kedudukan) sebuah titik yang bergerak, dimana antara koordinat ***x, y, z***-nya terjalin hubungan yang dinyatakan oleh satu persamaan $f(x,y,z) = 0$ merupakan suatu permukaan (bidang lengkung suatu bidang rata)."

Persamaan yang bebas dari suatu perubah :

1. Persamaan *f(x,y)* = 0 menyatakan sebuah permukaan silinder dengan semua garis pelukisnya sejajar sumbu *Z.*
2. Persamaan *f(x,y)* = 0 menyatakan sebuah permukaan silinder dengan semua garis pelukisnya sejajar sumbu *Y.*
3. Persamaan *f(x,y)* = 0 menyatakan sebuah permukaan silinder dengan semua garis pelukisnya sejajar sumbu *X.*

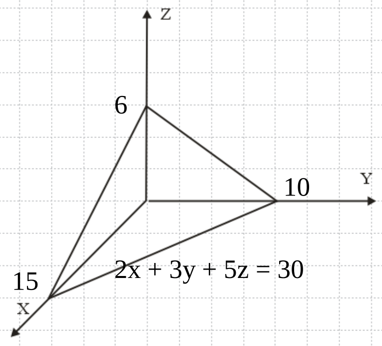
Contoh 5 :

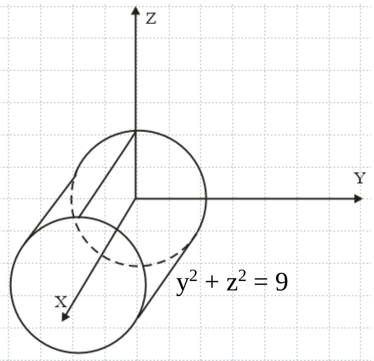
a. Persamaan $2x + 3y + 5z = 30$ menyatakan permukaan, yang merupakan sebuah bidang rata.

b. Persamaan $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ menyatakan suatu permukaan, yang merupakan sebuah bola.

c. Persamaan $x^2 + 2xu - 4 = 0$ menyatakan suatu permukaan, yang merupakan silinder yang garis-garis pelukisnya sejajar sumbu *Z.*

d. Persamaan $y^2 + z^2 = 9$ menyatakan suatu permukaan, yang merupakan sebuah silinder sejajar sumbu *X*.





Persamaan yang mengandung satu perubah :

1 Persamaan *f(x)* = 0 menyatakan himpunan bidang rata, yang sejajar bidang *YOZ.*

2 Persamaan *f(y)* = 0 menyatakan himpunan bidang rata, yang sejajar bidang XOZ.

3 Persamaan *f(z)* = 0 menyatakan himpunan bidang rata, yang sejajar bidang XOY.

Contoh 6 :

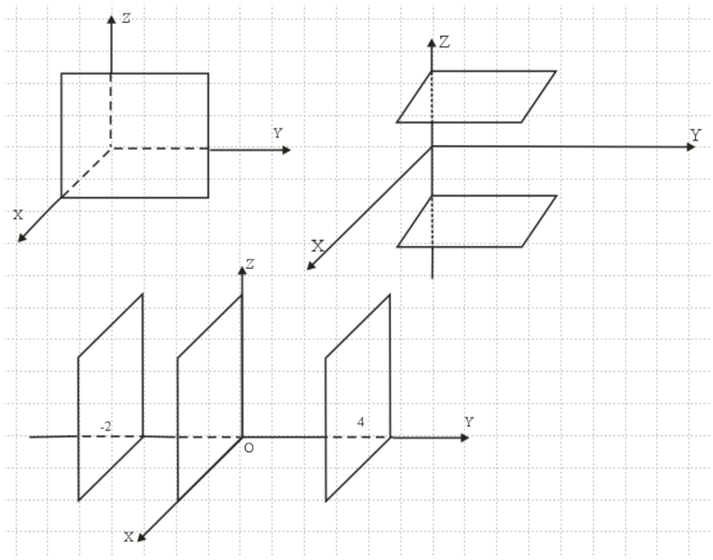
a. Persamaan x = 2 menyatakan sebuah bidang rata, yang sejajar dengan bidang *YOZ* dengan jarak 2 (arah ke sumbu X positi)

b. Persamaan $z^2 - 4 = 0$ menyatakan dua bidang rata *z* = 2 dan *z* = -2, yang sejajar bidang XOY berjarak 2.

c. Persamaan $y^2 - 2y^2 = 0$ menyatakan tiga buah bidang rata y = 0, y =4, y = -2 yang sejajar bidang XOZ.

Suatu garis lengkung merupakan irisan dari dua buah permukaan yang berpotongan, karena itu, persamaannya merupakan persamaan dua buah permukaan :

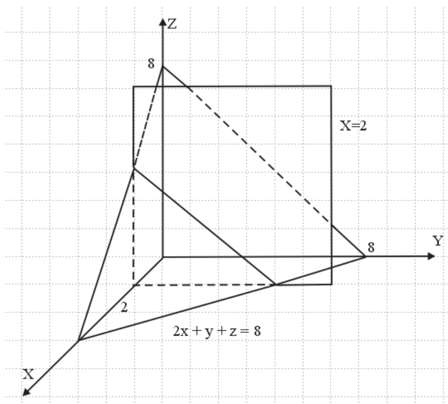
$\left.\begin{matrix} f(x,y,z)=0 \\ f(x,y,z)=0 \end{matrix}\right\}$ atau dapat ditulis dengan himpunan $\{(x,y,z)|\ f(x,y,z)=0.g(x,y,z)=0\}$

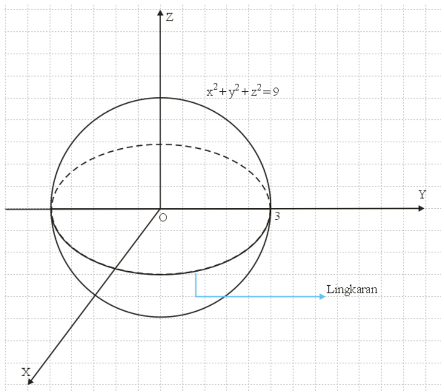


Contoh 7 :

a. Garis lengkung $\{(x, y, z) \mid 2x + y + z = 8 . x = 2\}$ merupakan perpotongan bidang-bidang rata $2x + y - z = 8$ dan $x = 2$, berarti merupakan sebuah garis lurus.

b. Garis $\{(x, y, z) \mid x^2 - y^2 + z^2 = 9 . z = 0\}$ merupakan perpotongan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dan bidang rata z = 0. berarti merupakan sebuah lingkaran.





1.10. <u>Proyeksi Garis Lengkung Pada Bidang normal</u>

Kalau pada garis lengkung c: f(x,y,z) = 0, g(x,y,z) = 0 salah satu perubah (misalnya z) dieliminasi terdapat suatu persamaan baru F(x,y) = 0, merupakan silinder yang garis pelukisnya sejajar dengan sumbu Z serta melalaui c, berarti merupakan silinder proyektor dari garis lengkung c di atas, kebidang XOY. Jadi proyeksinya mempunyai persamaan F(x,y) = 0, z = 0. untuk proyeksi kebidang YOZ merupakan XOZ dapat diterangkan secara sama seperti diatas.

Contoh 8 :

Tentukan proyksi garis lenhkung (lingkaran) perpotngan bola-bola:

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$.. .... (1)

Dan $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ ....(2)

kebidang XOY. Kita temukan silinder proyektor dengan mengeliminasi *z* dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $z = 1 - y$ ....…… (3)

yang kita masukan lagi ke persamaan (1) atau (2) didapat $x^2 + 2y^2 + 2y = 0$ merupakan persamaan silinder proyektor.

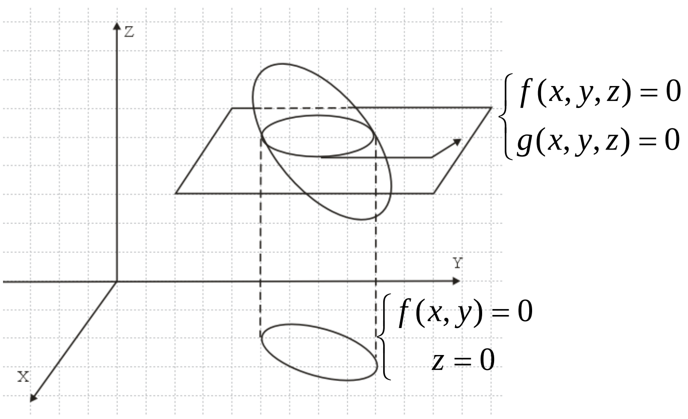
Jadi proyeksi:

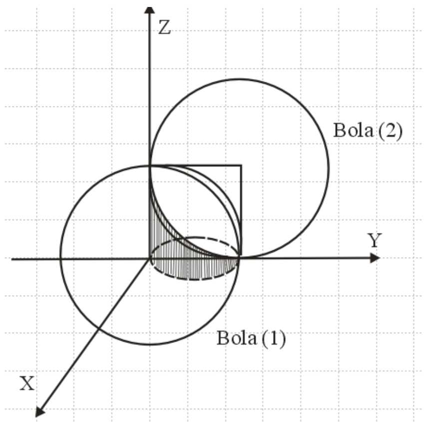
$$x^2 + 2y^2 + 2y = 0$$

$$z = 0$$

Yang dijabarkan menjadi: $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}} = 1$. $z = 0$. Suatu ellips dengan pusat $(0, \frac{1}{2}, 0)$.

Setengah sumbu $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan $\frac{1}{2}$.





1.11. Soal-Soal dan Pemecahannya

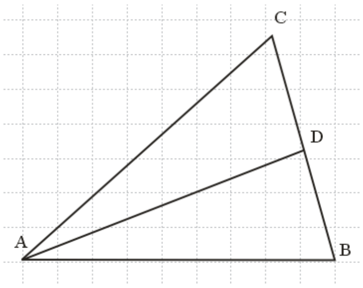
1. A(3,2,0), B(5,3,2), C(-9,6-3) adalah titik-titik sudut segitiga ABC, AD adalah garis bagi sudut BAC. Memotong BC di D. Tentukan koordinat titik D.

   Penyelesaian :

   AC $= \sqrt{(-9-3)^2 + (6-2)^2 + (-3-0)^2} = 13$

   AC $= \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2 + (2-0)^2} = 1$

Menurut dalil garis bagi maka: CA : BD : AB = 13 : 3 $\rightarrow k + {}^{13}\!/_{3}$



$$x_D = \frac{kx_B + x_C}{1+k} = \frac{\left({}^{13}\!/_{3}\right)(5) - 9}{1 + {}^{13}\!/_{3}} = {}^{38}\!/_{16}$$

$$y_D = \frac{ky_B + y_C}{1+k} = \frac{\left({}^{13}\!/_{3}\right)(3) - 6}{1 + {}^{13}\!/_{3}} = {}^{57}\!/_{16}$$

$$z_D = \frac{kz_B + z_C}{1+k} = \frac{\left({}^{13}\!/_{3}\right)(2) - 3}{1 + {}^{13}\!/_{3}} = {}^{17}\!/_{16}$$

Jadi D $\left({}^{38}\!/_{16}, {}^{57}\!/_{16}, {}^{17}\!/_{16}\right)$

2 Tentukan titik potong garis yang memenuhi:

$\left\{\left(\frac{3k+2}{1+k}, \frac{5k+4}{1+k}, \frac{-4k+5}{1+k}\right) \middle| k \neq -1\right\}$ dengan bidang *YOZ*

<u>Penyelesaian :</u>

Titik potong dengan *YOZ* $\rightarrow x = 0,$

atau (3k +2) / (1 + k) $= 0 \rightarrow 3k + 2 = 0$

$\rightarrow k = {}^{-2}\!/_{3}$

Subsitusukan $k = {}^{-2}\!/_{3}$ ky = (3k +2) / (1 + k) dan *z* = (-4k +5) / (1 + k)

Diperoleh y = 2, *z* = 23

Koordinat titik potong (0, 2, 23)

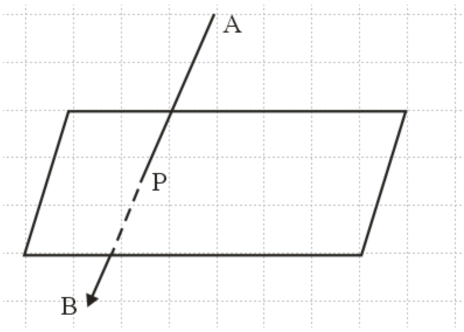
3 Atas perbandingan berapakah, bidang XOY membagi ruas garis menghubungkan titik $A(-3,4,-8)$ dan $B(5,-6,4)$. tentukanlah titik potongya.

<u>Penyelesaian :</u>

Garis AB:

$$\left\{\left(\frac{5k-3}{1+1+k}, \frac{6k+4}{1+k}, \frac{4k-8}{1+k}\right) k \neq -1\right\}$$

titik potong dengan bidang XOY $\rightarrow z = 0 \rightarrow 4k - 8 = 0 \rightarrow k = 2$



jadi terbagi atas prbandingan 2 : 1

subsitusikan k = 2 ke

$x = (5k-3)/(1+k) \rightarrow x = 7/3$

$y = (-6k+4)/(1+k) \rightarrow y = -8/3$

Jadi P$\left(7/3, -8/3\right)$

4 Periksalah apakah ketiga titik A (0, 0, 0), B (2, -3, 3), dan C (-2, 3, -3) segaris (coliniear). Tentukan perbandingan AB/DC, BC/CA, CA/AB:

<u>Penyelesaian :</u>

AB $= \sqrt{(2-0)^2 + (-3-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{22}$

AC $= \sqrt{(-2-0)^2 + (3-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{22}$

BC $= \sqrt{-(2-2)^2 + (3-3)^2 + (-3-3)^2} = 2\sqrt{22}$

Karena BC = AB + AC maka BAC garis lurus.

Maka: AB/BC = $\sqrt{22} : 2\sqrt{22} = 1 : 2$ (k = $-1/2$ karena B terletak di luar AC pada pihak A)

BC/AB = $\sqrt{22} : 2\sqrt{22} = 1 : 2 \ (k = -2)$

CA/AB = $\sqrt{22} : \sqrt{22} = 1 : 1 (k = 1)$

5 Atas perbandingan berapakah, garis yang menghubungkan P (3, 2, 1) dan Q (1, 3, 2) dipotong oleh bidang lengkung $3x^3 - 72y^2 + 128z^2 = 3$?

<u>Penyelesaian :</u>

garis yang menghubungkan (3, 2, 1) dan (1, 3, 2):

$$\left\{\left(\frac{k+3}{1+k},\frac{3k+2}{1+k},\frac{2k+1}{1+k}\right)\middle| k\neq -1\right\}$$

Titik potong dengan $3x^3-72y^2+128z^2=3$,

Berarti: $3\,\frac{k+3}{1+k}^{2}-72\,\frac{3k+2}{1+k}^{2}+128\,\frac{2k+1}{1+k}^{2}=3$

$\rightarrow 2k^2+5k+2=0$

$k_1=-2, k_2=-\frac{1}{2}$

Jadi atas perbandingan $-2:1$ dan $1:-2$.

6 Buktikan bahwa garis AB dan CD berpotongan, bila A(4, 8, 12), B(2, 4, 6), C(3, 5, 4), dan D(5, 8, 5)

<u>Penyelesaian :</u>

garis AB: $\left\{\left(\frac{2k+4}{1+k},\frac{4k+8}{1+k},\frac{6k+12}{1+k}\right)\middle| k\neq -1\right\}$

garis CD: $\left\{\left(\frac{5k+3}{1+k},\frac{8k+5}{1+k},\frac{5k+4}{1+k}\right)\middle| k\neq -1\right\}$

misalkan titik E adalah titik potong, AB dan CDdimana E membagi AB atas perbandingan k_1 dan membagi CD k_2, berarti :

$$x_E=\frac{2k_1+4}{1+k_1}=\frac{5k_2+3}{1+k_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1)$$

$$y_E=\frac{5k_1+3}{1+k_1}=\frac{8k_2+5}{1+k_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (2)$$

$$z_E=\frac{6k_1+12}{1+k_1}=\frac{5k_2+4}{1+k_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3)$$

Kita bagi (1) dengan (2) diperoleh: $\frac{1}{2}=\frac{5k_2+3}{8k_2+5}$

Atau: $8k_2+5=10k_2+6\rightarrow k_2=-\frac{1}{2}$

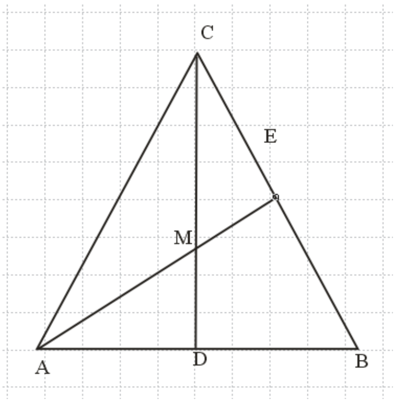
Dari (1) dan (3) diperoleh $\frac{1}{3} = \frac{5k_2 + 3}{5k_2 + 4}$

$\rightarrow 5k_2 + 4 = 15k_2 + 9 \rightarrow k_2 = -\frac{1}{2}$

Ternyata nilai-nilai $k_2 = -\frac{1}{2}$ memenuhi ketiga persamaan diatas, jadi dapat dibuktikan bahwa E adalah benar-benar titik potong AB dan CD.

7 Buktikan bahwa koordinat titik berat segitiga ABC dengan A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), dan C (x_3, y_3, z_3)adalah:

Penyelesaian :



$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

Koordinat D $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

Membagi CD atas perbandingan 2 : 1 (sifat garis berat)

Berarti:

$$x_M\left(\frac{2x_D + x_C}{1+2}, \frac{2Y_D + Y_C}{1+2}, \frac{2z_D + z_C}{1+2}\right)$$

Atau $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$

Sebagai contoh, bila A(1, 3, 4), B(2, 3, 4), C(3, 3, 6) maka titik berat

$$\left(\frac{1+2+3}{3},\frac{3+3+3}{3},\frac{2+4+6}{3}\right)$$ atau (2, 3, 4)

8 Bila titik R membagi PQ atas perbandingan k, sedangkan S membagi PQ atas perbandingan -*k*, dikatakan P dan Q dipoisahkan harmonis oleh R dan S. titik S dikatakan sekawan harmonis (*harmonic conjugate*) dengan R terhadap P serta Q dan sebaliknya.

bila P(1, 1, 1), Q(2, 3, 4), dan R(3, 5,7), kita hendak mencari titik S yang sekawan harmonis dengan R terhadap P dan Q.

R(3, 5, 7) $\rightarrow\left(\frac{2k+1}{1+k},\frac{3k+1}{1+k},\frac{4k+1}{1+k}\right)$

$$\rightarrow 3=\frac{2k+1}{1+k}, 5=\frac{3k+1}{1+k}, 7=\frac{4k+1}{1+k}$$

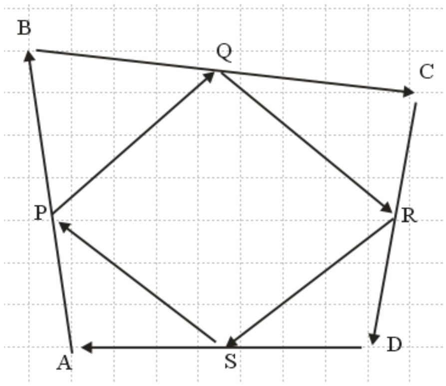
Masing-Masing Persamaan diatas menghasilkan k yang sama yaitu -2 (artinya, benar bahwa R terletak pada PQ). Jadi untuk S diambil k = 2, diperoleh:

S $\left(\frac{2.2+1}{1+2},\frac{2.3+1}{1+2},\frac{2.4+1}{1+2}\right)$ atau $\left(5/3, 7/3, 9/3\right)$

9 Buktikan bahwa segi empat yang titik-titik sudutnya adalah tengah-tengah sisi-sisi suatu segi empat sembarang, merupakan suatu jajaran genjang.

Penyelesaian :

Misalkan ABCD adalah segi empatr sembarang, dan P, Q, R, dan S tengah-tengah sisi-sisinya



PQ = $\frac{1}{2}(AB+BC)$

QR = $\frac{1}{2}(BC+CD)$

RS = $\frac{1}{2}(CD+DA)$

SP = $\frac{1}{2}(DA + AB)$

Tetapi AB + BC + CD +DA = 0

Berarti PQ = $\frac{1}{2}(AB + BC)$

= $-\frac{1}{2}(AB + BC)$

= SR

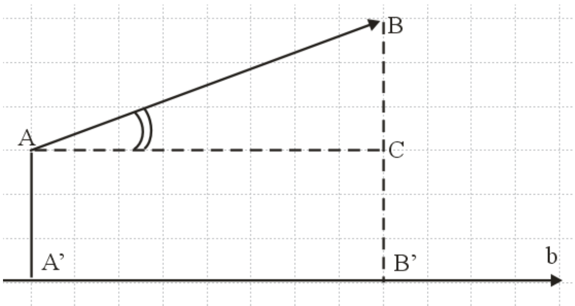
Dan QR = $\frac{1}{2}(BC + CD) = -\frac{1}{2}$

(AB + DA) = PS

Berarti tiap-tiap dua sisi yang berseberangan saling sejajar dan sama panjang. PQRS jajaran genjang.

10 Buktikan bahwa proyeksi ***a*** pada ***b*** adalah ***a.b***/$|b|$

Penyelesaian :



proyeksi ***a*** pada ***b*** adalah ruas garis A’ B’ = AC

jelas AC = $|a|\cos\theta$

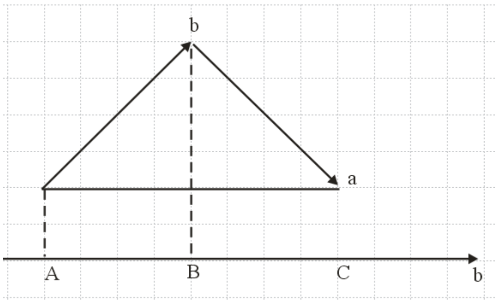
$$= |a|\frac{|a|}{a}\cos\theta = \frac{a.b}{|b|}$$

11 Buktikan bahwa **(*b* + *c*) .*a* = *b.a* + *c.a***

Penyelesaian :

proyeksi ***b*** + ***c*** pada ***a*** = proyeksi ***b*** pada ***a*** + proyeksi ***c*** pada ***a***. atau **(*b* + *c*) .*a*/**$b.a/|a| + c.a|a|$ dan

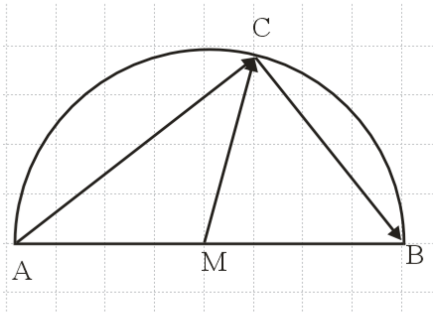
bila kedua ruas dikalikan $|a|$ diperoleh: **(*b* + *a*).*a* = *b.a* + *c*.a**



12 Buktikan bahwa segitiga dengan satu sisinya garis tengah lingkaran dan titik yang ketiga sembarang pada busur lingkaran adalah segitiga siku-siku.

Penyelesaian :

Karena masing-masinya jari-jari berarti: ***MA* = *MB* = *MC*** dan jelas ***MA* = -*MB***



Sedangakan ***AC* = *MC* –** *MA*

CB* = –*MB

Berarti *AC*.*CB* = (MC – *MA*).(*MB* – *MC*)

= *MC*.*MB* – *MA*.*MB* – *MC*.*MC* + *MB*.*MC* ………………………… (*)

Berarti (*):

= *MC*.*MB* – *MA*.*MB* – *MC*.*MC* + *MB*.*MC* = *MB*.*MB* – *MC*.*MC* = 0

Jika dibuktikan *AC* tegak lurus *CB*, atau Δ ABC siku-siku

13 Buktikan bahwa bila $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, b_3]$

maka:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [a_1, a_2, a_3] \times [b_1, b_2, b_3]$$

$$= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

$$= a_1 i \times b_1 i + a_1 i \times b_2 j + a_1 i \times b_3 k + a_2 j \times b_2 i + a_2 j \times b_2 j + a_2 j \times b_3 k + a_3 k \times b_1 i + a_3 k \times b_2 j + a_3 k \times b_3 k$$

Dengan mengingat $i \times i = j \times j = k \times k = 1$ dan $i \times j = k . i \times k = i . k \times i = j$

Diperoleh $a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

14 Carilah yang vector panjangnya = 1 dan tegak lurus ***a*** = [2, 1, 1] dan ***b*** = [0, 2, 1]

Penyelesaian :

$$p = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$= -i - 2j + 4k = [-1, -2, 4]$$

Bersipat tegak lurus baik ***a*** maupun ***b***, demikian juga dengan vektor $-p = [1, 2, -4]$. Jadi yang panjangnya = 1 adalah $\left[{}^{-1}\!/_{21}, {}^{-2}\!/_{21}, {}^{-4}\!/_{21}\right]$ dan $\left[{}^{1}\!/_{21}, {}^{2}\!/_{21}, {}^{-4}\!/_{21}\right]$

1.12. Soal-soal latihan

1. Tentukan jarak dari titik pusat 0 ke titik P bila:

(a) P$(4,3,2)$ (f) P$(-2,3,6)$

(b) P$(-2.-1,-3)$ (g) P$(-6,-6,6)$

(c) P$(0,2,0)$ (h) P$(a,2a,3a)$

(d) P$(3,0,4)$ (i) P$(P, {}^{1}\!/_{2P}, P^2)$

(e) P$(7,-1,0)$

2. Tentukan jarak dari titik P ke Q bila:

(a) P(4,3,2), Q(1,1,1)

(b) P(2,3,0), Q(3,2,0)

(c) P(0,-1,-2), Q(0,-3,-4)

(d) P(5,5,2), Q(2,0,-5)

3. Diketahui segitiga ABC: A(2,3,0), B(6,-9,-3), C(3,5,2), D adalah titik potong garis bagi yang ditarik dari A dengan sisi BC. Tentukan koordinat titik D!
4. Tentukan koordinat titik berat segitiga ABC pada soal no 3 diatas!
5. Tentukan bahwa segitiga berikut adalah segaris

   (a) (2,5,-4), (1,4,-3), (4,7,-6)

   (b) (5,4,2), (6,2,-1), (8,-2,-7)
6. Tunjukan bahwa titik (0,7,10), (-1,6,6), dan (-4,9,6) membentuk sebuah segitiga siku-siku sama kaki
7. Tentukan titik S yang sekawan harmonis dengan R terhadap P dan Q bila:

   (a) P(0,2,3), Q(2,0,3), R(3,-1,3)

   (b) P(-3,0,-2), Q(0,-3,-4), R(3,-12,-10)

   (c) P(-2,0,5), Q(-5,-5,-2), R$\left(3, {}^{25}\!/_{3}, {}^{50}\!/_{3}\right)$
8. Bila P$\left(x_1, y_1, z_1\right)$, Q$\left(x_2, y_2, z_2\right)$, R$\left(x_3, y_3, z_3\right)$, dan S$\left(x_4, y_4, z_4\right)$tentukan koordinat titik berat bidang PQRS!
9. Buktikan ketiga vektor berikut dapat membentuk sebuah segitiga: [3,1,-2], [4,-2,-6]. Tentukan panjang garis-garis berat!
10. Buktikan dengan mengunakan vektor bahwa ketiga garis tinggi suatu segitiga berpotongan di satu titik
11. Buktikan dengan mengunakan vektor bahwa diagonal-diagonal suatu belah ketupat berpotongan tegak lurus!1
12. Pergunakan vektor untuk membuktikan rumus sinus suatu segitiga!
13. Buktikan bahwa lua2s segitiga ABC yang kedua sisinya vektor-vektor a dan b. Adalah ${}^{1}\!/_{2}\left|a \times b\right|$.

    Kemudian hitung luas ΔABC dengan titik-titik sudut (2,3,1), (1,-1,2), (3,2,-1)
14. Buktikan bahwa suatu isi dari suatu parallel epipedum yang tiga buah sisinya (tidak sejajar) a = $\left[a_1, a_2, a_3\right]$, b = $\left[b_1, b_2, b_3\right]$, c = $\left[c_1, c_2, c_3\right]$adalah $a.\left(b \times c\right)$(harga mutlaknya)

$$\text{atau } = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ (harga mutlaknya)}$$

dari isi bidang empat yang dibatasi oleh a, b, c adalah $1/6\,|a.(b \times c)|$

hitung isi bidang empat yang titik-titik sudutnya: (0,1,2), (3,0,1), (4,3,6), (2,3,2)!

15. Tentukan proyeksi garis-garis lengkung:

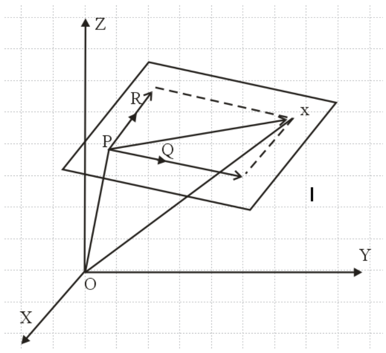
(a) $x^2 - y^2 = 3z.2x - y + z = 0$

(b) $x^2 - y^2 + z^2 = a.x + y + z = a$ pada bidang XOY.

BAB II
BIDANG RATA DAN GARIS LURUS

2.1 Persamaan Vektoris Bidang Rata

Suatu bidang rata akan tertentu bila diketahui tiga buah titik (yang tidak segaris) yang terletak pada bidang rata tersebut. Misalkan, diketahui tiga titik pada bidang rata V:



Titik $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, dan $R(x_3, y_3, z_3)$

$PQ = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$

$PR = [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1]$

Untuk setiap titik sembarang $X(x, y, z)$ pada bidang rata V berlaku

$PX = \lambda PQ + \mu PR (-\infty < \lambda < \infty, -\infty \mu < \infty)$

Terlihat jelas pada gambar bahwa $OX = OP + PX$

Atau: $[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1] + \mu[x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1] (1)$

$(-\infty < \lambda < \infty, -\infty \mu < \infty)$ adalah persamaan vektoris bidang rata melalui tiga titik. Kedua vektor ***PQ*** dan ***PR*** disebut vektor–vektor arah bidang (setiap dua vektor, yang tidak segaris, pada bidang merupakan vektor–vektor arah bidnag tersebut) sehingga persamaan vektoris bidang rata diketahui melalui satu titik P (x_1, y_1, z_1) dan diketahui kedua vektor arahnya $\boldsymbol{a} = [x_a, y_a, z_a]$ dan b $= [x_b, y_b, z_b]$ adalah:

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[x_a, y_a, z_a] + \mu[x_b, y_b, z_b]$ .... (2)

$(- \sim < \lambda < \sim, - \sim < \mu < \sim)$

dan persamaan 2 dapat ditulis menjadi bidang parameter bidang rata:

$x = x_1 + \lambda x_a + \mu x_b$ ....(3)

$y = y_1 + \lambda y_a + \mu y_b$ ……………………...……………….. (4)

$z = z_1 + \lambda z_a + \mu z_b$ ………………………....………… (5)

2.2 Persamaan Linier Bidang Rata

Kalau λ dan μ kita eleminasikan dari persamaan 3 dan 4 diatas diperoleh :

$$\lambda = \frac{y_b(x - x_1) - x_b(y - y_1)}{C} \text{ dan } \mu = \frac{x_a(y - y_1) - y_a(x - x_1)}{c}$$

di mana $C = x_a y_b - y_a x_b = \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$ ....(6)

dan misalkan $\neq 0$

kemudian Kalau λ dan μ di atas kita substitusikan ke persamaan 5 diperoleh:

$$C(z - z_1) - z_a\{y_b(x - x_1)x_b(y - y_1)\} - z_b\{x_a(y - y_1) - y_a(x - x_1)\} = 0$$

atau $(y_a z_b - z_a y_b)(x - x_1) + (z_a x_b - x_a z_b)(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ .... (7)

$$y_a z_b - z_a y_b = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} = A$$

$$z_a x_b - x_a z_b = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} = B$$

dan $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$

persamaan 7 menjadi $Ax + By + Cz = 0$ ....………. (8)

yang merupakan persamaan linear (umum) dari suatu bidang rata.

2.3 Vektor Normal dari Bidang Rata

$V \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ terlihat bahwa vektor

$$[A, B, C] = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} k$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

= *a x b*, jadi merupakan vektor yang tegak lurus pada bidang rata yang dibentuk oleh ***a*** dan ***b***, dalam hal ini bidang rata $V = Ax + By + Cz + D = 0$

$n = [A,B,C]$ disebut vektor normal dari bidang rata $V = 0$ tersebut. Vektor normal ini akan memegang peranan penting dalam pembahasan suatu bidang rata.

Dari persamaan (7) di atas, suatu bidang rata yang di ketahui melalui satu titik (x_1, y_1, z_1) dengan vektor normalnya $[A, B, C]$ berbentuk:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \text{ ....} \quad (9)$$

<u>**Catatan:**</u>

Hal-hal khusus dari bidang rata $V = Ax + By + Cz + D = 0$.

1 bila $D = 0$ maka bidang rata akan melalui titik asal O(0,0,0) dan sebaliknya, setiap bidang rata yang melalui titik asal persamaannya akan mempunyai harga $D = 0$.

2 apabila $D \neq 0$ persamaan $Ax + By + Cz + D = 0$ dapat ditulis menjadi $Ax/-D + By/-D + Cz/-D = 1$dan sebut berturut-*turut* $A/-D = p$, $B/-D = q$, $C/-D = r$, didapat persamaan x/p + y/q + z/r = 1 yang mana memotong sumbu *X* di $(p,0,0)$sumbu *Y* di $(0, p,0)$, sumbu *Z* di $(0,0, p)$.

3 bila $A = 0$, bidang rata sejajar sumbu *X*

bila $B = 0$, bidang rata sejajar sumbu *Y*

bila $C = 0$, bidang rata sejajar sumbu *Z*

4 bila $A = B = 0$, bidang rata sejajar bidang *XOY*

bila $B = C = 0$, bidang rata sejajar bidang *XOZ*

bila $C = C = 0$, bidang rata sejajar bidang *ZOZ*

Contoh 8 :

1. Persamaan vektoris bidang rata melalui titik (1,1,2), (2,3,5), dan (1,3,7)

adalah $= [x, y, z] = [1,1,2] + \lambda[2-1, 3-1, 5-2] + \mu[1-1, 3-1, 7-2]$atau

$= [x, y, z] = [1,1,2] + \lambda[1,2,3] + \mu[0,2,5]$

persamaan parameternya adalah:

$x = 1 + \lambda$. $y = 1 + 2\lambda + 2\mu$. $z = 2 + 3\lambda + 5\mu$.

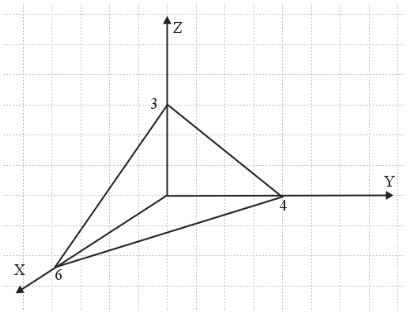
Untuk mengubah kepersamaan linier dapat kita lakukan dengan mencari vektor normal sebagai hasil cross product $[1,2,3] \times [0,2,5] = [4,-5,2]$

Kita dapat mengunakan hubungan (9):

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \rightarrow 4(x-1) - 5(y-1) + 2(z-2) = 0$ atau

$4x - 5y + 2z - 13 = 0$

2. Bidang *2x + 3y – 4z* = 12 dapat ditulis menjadi *x/6 + y/4 + z/3* = 1 akan memotong sumbu-sumbu di (6,0,0), (0,4,0) dan (0,0,3).

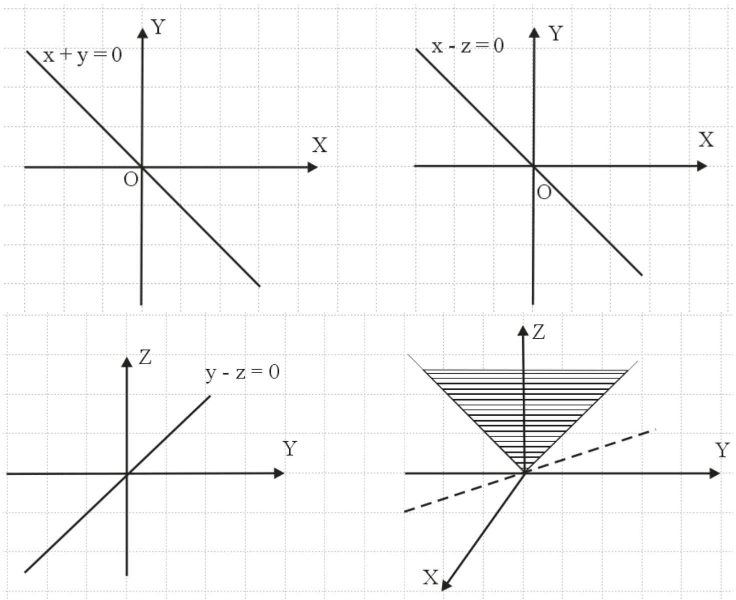


3. Bidang x + y – z = 0 akan melalui titik asal (0,0,0). Untuk menggambarnya kita tentukan garis-garis potong dengan bidang-bidang koordinat :

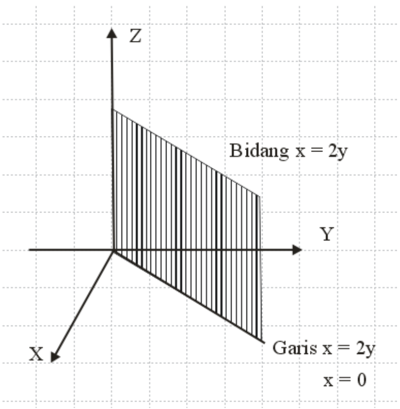
Garis potong dengan *XOY : z* = 0, *x + y* = 0

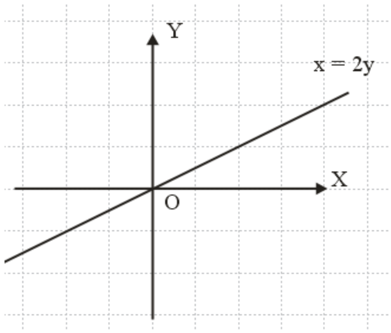
Garis potong dengan *XOZ : y* = 0, *x – z* = 0

Garis potong dengan *YOZ : z* = 0, *y – z* = 0

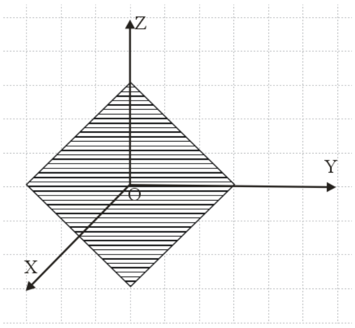


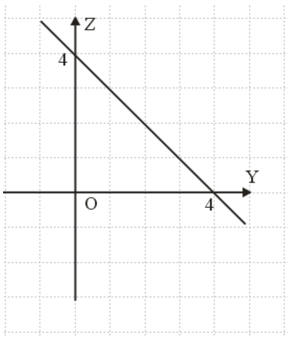
4. Bidang $x = 2y$, bidang ini sejajar sumbu Z (hal di mana $C = 0$) dan melalui titik asal (hal di mana $D = 0$) berarti bidang ini melalui sumbu Z. garis potonngnyadengan bidang XOY adalah $z = 0, x = 2y$.





5. Bidang $x + y = 4$, bidang ini sejajar sumbu X (hal ini di mana A = 0). Garis potongnya dengan bidang YOZ adalah $x = 0, y + z = 4$.





Catatan:

1. Kalau persamaan (7), (pada bagian 2) yang lalu :

$(y_a z_b - z_a y_b)(x - x_1) + (z_a x_b - x_a z_b)(y - y_1) + (x_a y_b - y_a x_b)(z - z_1) = 0$ kita tulis dalam bentuk dot prudoct akan menjadi :

$[(x - x_1), (y - y_1), (z - z_1)].[(y_a z_b - z_a y_b), (z_a x_b - x_a z_b), (x_a y_b - y_a x_b)]$ .... (10)

atau $(r - r_1)$. n = 0 di mana r = vektor posisi sebarang titik pada bidang, r_1 vektor posisi suatu titik tertentu pada bidang dan n = vektor normal bidang.

2. Tapi $n = a \times b$. di mana ***a*** dan ***b*** adalah vektor-vektor pada bidang, sehingga (10) dapat ditulis sebagai $(r - r_1).(a \times b) = 0$ atau:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = 0 \qquad ....(11)$$

   adalah persamaan bidang melalui titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dengan vektor-vektor arah $a = [x_a, y_a, z_a]$ dan $b = [x_b, y_b, z_b]$.

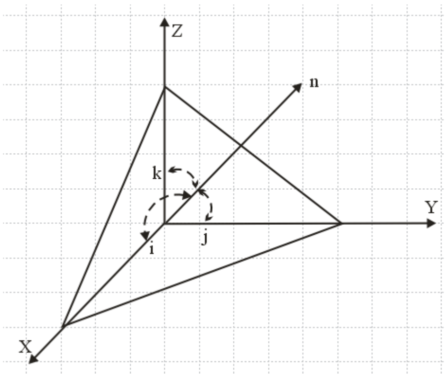
3. Kalau ***a*** kita ambil bertitik awal di $P(x_1, y_1, z_1)$ dan titik ujungnya $Q(x_2, y_2, z_2)$ serta ***b*** titik awalnya $P(x_1, y_1, z_1)$ dan titik ujungnya $R(x_3, y_3, z_3)$ maka bentuk (11) menjadi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad ....(12)$$

   adalah persamaan bidang rata diketahui melalui 3 titik $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ dan $R(x_3, y_3, z_3)$ yang ditulis dalam bentuk diterminan.

4. Jadi empat buah titik(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) akan sebidang jika dan hanya jika : $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ ....(13)

2.4 Persamaan Normal Bidang Rata



Misakan $n = [A, B, C]$ adalah vektor normal bidang $V \equiv Ax + By + Cz + D = 0, \alpha, \beta, \gamma$ berturut- turut sudut antara n dengan sumnu-sumbu koordinat (yang arahnya ditentukan oleh vektor i, j, dan k).

Ternyata bahwa:

$$\cos\alpha = \frac{n.i}{|n|\ \ |i|} = \frac{A}{n}$$

$$\cos\beta = \frac{n.j}{|n|\ \ |j|} = \frac{B}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

$$\cos\gamma = \frac{n.k}{|n|\ \ k} = \frac{C}{n}$$

atau : [cos α ,cos β ,cos γ] = $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma = \frac{[A, B, C]}{|n|} = \frac{n}{|n|}$ …..............(15)

yaitu vektor satuan yang searah dengan ***n***, juga berarti bahwa $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ $= 1.n = [\cos^2\alpha, \cos^2\beta, \cos^2\gamma]$disebut vektor cosinus dari bidang V. atau boleh dikatakan juga vektor normal yang panjangnya satu. Misalkan,

P = jarak titik $(0,0,0)$ ke bidang *V* = 0, dimana $P \geq 0$ dan $X(x, y, z)$ titik sebarang pada bidang, maka P adalah proyek $OX(x, y, z)$ pada ň yaitu : *P* = *OX*.*ň* = [*x*,*y*,*z*]. $[\cos^2\alpha, \cos^2\beta, \cos^2\gamma]$

atau : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = p$ ....…..(16)

yang disebut persamaan normal (*HESSE*) dari bidang *V* = 0. untuk megubah bentuk $V \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ ke bentuk normal maka (dari persamaan-persamaan 14) diperoleh:

$|n|(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = -D$ ....(17)

kita selalu menghendaki bahwa – *D*/|*n*| = *P* positif. Jadi, kalau *D* negatif, maka maing-masing ruas persamaan (17) kita bagi dengan $+|n| = +\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ dan kalau *D* positif, masing-masing ruas kita bagi dengan $-|n|$.

Contoh 9 :

Carilah bentuk normal dari 3*x* + 6*y* – 2*z* + 6 = 0 !

<u>Penyelesaian :</u>

D = 6 adalah positif, sedangkan |*n*| = $\sqrt{9 + 36 + 4}$ = 7. jadi persamaan normalnya

$$\frac{-3}{7x} - 9y + \frac{2}{7z} = \frac{6}{7}$$

2.5 Sudut Antara Dua Bidang Rata

Sudut antara dua bidang rata merupakan sudut antara vektor-vektor normalnya. Misanya, sudut antara $V_1 \equiv A_1x + B_1y - C_1z + D_1 = 0$ dan $V_2 \equiv A_2x + B_2y - C_2z + D_2 = 0$ adalah sudut antara normal-normal.

$n_1 = [A_1, B_1, C_1]$ dan $n_2 = [A_2, B_2, C_2]$ yaitu :

$$\cos\theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|}$$

$$= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad \text{.......................................(18)}$$

Contoh 10 :

Tentukan besar Sudut antara $x + y + z + 3 = 0$ dan $2x + y + 2z - 11 = 0$!

Penyelesaian :

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1(2) + 1(1) + 1(2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9}}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

$$\theta = ar\cos 0{,}962$$

$$\theta \approx 15{,}79^o$$

Catatan:

Kedudukan sejajar :

Bila V_1 dan V_2 sejajar maka n_1 dan n_2 sama (atau berkelipatan),

berarti $[A_1, B_1, C_1] = \lambda\, [A_2, B_2, C_2]$ adalah syarat bidang V_1 dan V_2 sejajar (λ sebarang $\neq 0$)

Contoh 11 :

Tentukan persamaan bidang rata V_2 yang sejajar dengan bidang rata $V_1 = x + y + 5z = 9$ jika bidang rata V_2 melalui titik (0,2,1) !

Penyelesaian :

$V_1 = x + y + 5z = 9$, karena V_1 sejajar V_2 maka $n_1 = n_2$

$n_1 = [1,1,5]$ maka V_2 akan berbentuk $x + y + 5z + D_2 = 0$,

Sehingga bidang rata V_2 melalui titik (0,2,1) maka :

$V_2 = x + y + 5z + D_2 = 0$

$0 + 2 + 5(1) + D_2 = 0$

$7 + D_2 = 0$

$D_2 = -7$

Jadi, persamaan $V_2 = x + y + 5z - 7 = 0$

Catatan:

Kedudukan tegak lurus :

Bila $\mathbf{V}_1$ tegak lurus V_2, maka vektor normalnya akan saling tegak lurus, $n_1 \perp n_2$, atau

$$n_1.n_2 = 0 \rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Contoh 12 :

Tentukan persamaan bidang rata V_2 yang tegak lurus pada bidang rata $V_1 \equiv x + y + z = 1$ serta melalui titik (0,0,0) dan (1,1,0) !

Penyelesaian :

Misalkan $V_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, tegak lurus V_1 berarti :

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ atau $A_2 + B_2 + C_2 = 0$

$C_2 = -A_2 - B_2$............(1)

V_2 melalui (0,0,0) berarti $D_2 = 0$, dan melalui (1,1,0) berarti :

$A_2 + B_2 = 0$ atau $A_2 = -B_2$......(2)

(1) dan (2)

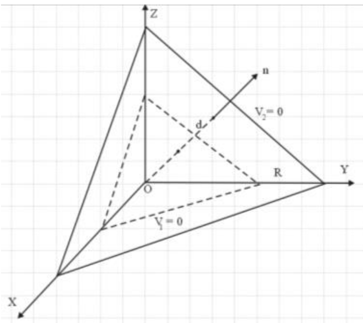
$C_2 = -(-B_2) - B_2$

$C_2 = 0$

Jadi persamaan $V_2 : -B_2x + B_2y + 0z + 0 = 0$ atau $-x + y = 0$

2.6 Jarak Antara Sebuah Titik dan Sebuah Bidang Rata Dan Jarak Antara Dua Bidang Sejajar

Pandang bidang $V_1 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$. kita hendak menentukkan jarak titik $R(x_1, y_1, z_1)$ ke bidang V_1. kita buat bidang V_2 melalui R yang sejajar V_1. jadi, Vektor normal V_1 dan V_2 sama. Sedangkan jarak titik asal 0 ke V_2 adalah $p \pm d$ (tergantung letak V_1 dan V_2 terhadap titik 0)



$V_2 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \pm d$, dan karena $R(x_1, y_1, z_1)$ pada V_2, maka terpenuhi $x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma = p \pm d$ atau $d = | x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|$, adalah jarak titik $R(x_1, y_1, z_1)$ ke bidang $V_1 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$.

Kalau V_1 berbentuk $Ax + By + Cz + D = 0$ maka :

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Untuk mencari jarak dua bidang sejajar V_2, kita ambil sembarang titik pada V_2, lalu menghitung jarak titik tersebut ke V_1

Contoh 13 :

1. Tentukan jarak titik (4,7,3) ke bidang $2x + 6y - 3z = 13$!

Penyelesaian :

$$d = \left| \frac{2 \cdot 4 + 6 \cdot 7 + (-3) \cdot 3 - 13}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{8 + 42 - 9 - 13}{\sqrt{4 + 36 + 9}} \right|$$

$$d = \frac{28}{\sqrt{49}}$$

$$d = \frac{28}{7}$$

d = 4

2. Diketahui $V_1 = x + y + z - 2 = 0$ dan $V_2 = x + y + z - 5 = 0$. jika R pada V_2, hitunglah jarak tersebut ke V_1 !

Penyelesaian :

Misal, kita ambil R pada $V_2 : x = 0, y = 0$ dan $z = 5$, didapat R (0,0,5). Maka jarak titik R ke V_1

adalah $d = \left|\frac{1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 5 - 2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}\right|$

$$d = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$d = \sqrt{3}$$

2.7. Berkas Bidang Rata

Bidang–bidang $V_1 = A_1x + B_1y - C_1z + D_1 = 0$ dan $V_2 = A_2x + B_2y - C_2z + D_2 = 0$ berpotongan menurut sebuah garis lurus. Setiap titik pada garis potong tersebut akan memenuhi persamaan $\lambda_1V_1 + \lambda_2V_2 = 0$, (dimana λ_1 dan λ_2 parameter). Persamaan diatas merupakan himpunan bidang-bidang yang melalui garis potong λ_1 dan λ_2 bila $\lambda_1 \neq 0$ kita dapat tuliskan menjadi $V_1 + (\lambda_1\lambda_2)V_2 = 0$ atau $V_1 - \lambda V_2 = 0$, adalah persamaan berkas bidang melalui garis potng bidang-bidang $V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$.

Kalau V_1 dan V_2 sejajar maka berkas bidang $V_1 + \lambda V_2 = 0$ merupakan himpuna bidang-bidang $V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$.

Dapat kita tulis menjadi :

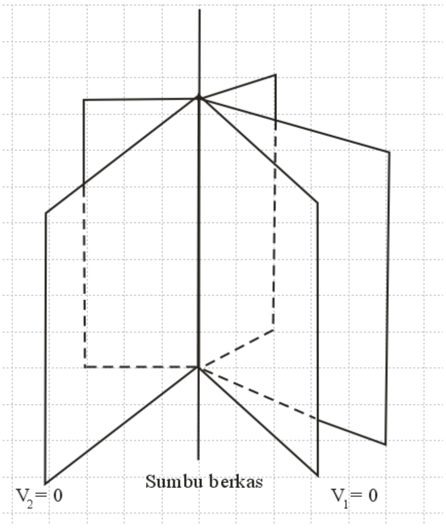
$\boxed{A_1x + B_1y - C_1z + D_1 = k}$ $\qquad k$ = parameter

Contoh 14 :

Tentukan persamaan bidang rata V yang melalui titik $(0,0,0)$ serta melalui garis potong bidang-bidang :

$V_1 = 2x + 3y + 24 = 0$

$V_2 = x - y + 2z = 12$



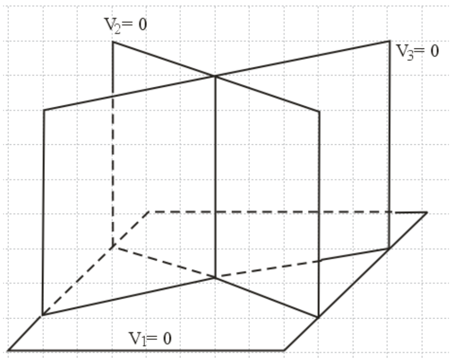
Penyelesaian :

V dapat dimisalkan berbentuk :

$V_1 + \lambda V_2 = 0 \rightarrow 2x + 3y + 14 - \lambda(x - y + 2z - 12) = 0$ ....(*)

Karena V_1 melalui $(0,0,0)$ terpenuhi : $2.0 + 3.0 + 24 + \lambda(0 - 0 + 2.0 - 12) = 0 \rightarrow \lambda = 2$, yang kita subsitusikan ke (*), diperoleh V $= 4x - y + 4z = 0$. Bidang yang diminta.

2.8. Jaringan Bidang Rata



Pandang bidang rata $V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$ dan $V_3 = 0$ yang terletak dalam sebuah berkas yang sama (tidak berpotongan pada satu garis apapun sejajar atau sama lain).

Persamaan $V_1 + \lambda V_2 + \mu V_3 = 0$ merupakan himpunan bidang-bidang yang melalui titik potong ketiga bidang diatas (pada gambar melalui titik *T*). Dan himpunan bidang-bidang rata itu disebut jaringan bidang.

Contoh 15 :

Tentukan persamaan bidang rata *V* yang sejajar bidang $U = x + y + z = 1$ serta melalui titik potongan bidang $V_1 = x - 3 = 0.\ V_2 = y - 4 = 0.\ V_3 = z = 0$

Penyelesaian :

Bidang rata V berbentuk $V_1 + \lambda V_2 + \mu V_3 = 0 \rightarrow x - 3 + \lambda(y - 4) + \mu z = 0$

$\rightarrow x + \lambda y + \mu z + 3 - 4\lambda = 0$ ....(*)

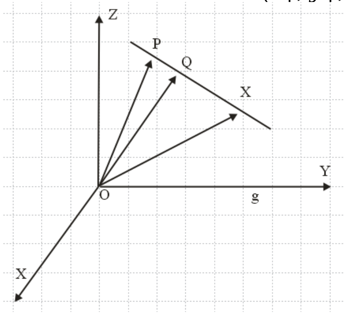
Karena sejajar dengan U maka $[1,1,1]$ adalah normal dari V atau $[1, \lambda, \mu]$ kelipatan dari $[1,1,1] \rightarrow \lambda = \mu = 1$, jadi subsitusikan ke (*) menghasilkan $V = x + y + z - 7 = 0$. yang diminta.

2.9. Persamaan Vektoris Garis Lurus

Sebuah garis lurus akan tertentu bila diketahui dua titik pada garis tersebut. Misalkan, titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan $Q(x_2, y_2, z_2)$ terletak pada garis lurus g. Maka ***OP*** $= [x_1, y_1, z_1]$ ***OQ*** $= [x_2, y_2, z_2]$, dan ***PQ*** $= [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$, untuk setiap sembarang $X(x, y, z)$ pada g. Berlaku $PX = \lambda PQ, (-\infty < \lambda < \infty)$.

Jelas bahwa $OX = OP + PX \rightarrow [x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$..........(20)

adalah persamaan vektoris garis lurus melalui satu titik P (x_1, y_1, z_1) dan $Q(x_2, y_2, z_2)$.



Vektor PQ (atau vektor lain $\neq 0$ yang terletak pada garis) disebut vektor arah garis lurus, jadi bila garis lurus melalui satu titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan mempunyai arah vektor ***a*** $= [a, b, c]$, persamaan

$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a, b, c]$ ....(21)

$(-\infty < \lambda < \infty)$

Contoh 16 :

Persamaan garis lurus melalui titik (1,3,2) dan $(5,-3,2)$ Adalah

$[x, y, z] = [1,3,2] + \lambda[5-1, 3-3, 2-2] \rightarrow [x, y, z] = [1,3,2] + \lambda[4-6,0]$...................(*)

sedangkan persamaan garis lurus melalui titik (1,0,2) dengan vektor arah ***a*** $= [a, b, c]$ adalah

a $= [x, y, z] = [1,0,2] + \lambda[1,3,7]$..(**)

persamaan (21) dapat kita tulis menjadi tiga persamaan:

$x = x_1 + \lambda_a$

$y = y_1 + \lambda_a$ .... (22)

$z = z_1 + \lambda_a$

Yang persamaan parameternya garis lurus *g*.

Catatan :

Persamaan garis lurus dalam bentuk lain. Kalau persamaan (22), λ dieliminasi, diperoleh :

$$\lambda = \frac{x - x_1}{a}, \lambda \frac{y - y_1}{b}, \lambda = \frac{z - z_1}{c}$$

Atau $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ .... (23)

Adalah persamaan garis lurus diketahui meleui titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dengan vektor arah ***a*** $= [a, b, c]$, atau :

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ (bila $x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$, $z_2 - z_1 \neq 0$ .... (24)

Adalah persamaan garis lurus diketahui melalui titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Catatan :

Komponren-komponen vektor arah yaitu ***a. b***. dan ***c*** masing-masing disebut bilangan arah garis dan kalau $\alpha.\beta$, dan γ berturut-turut sudut antara garis lurus (sudut-sudut antara vektor arahnya, ***a*** = [a,b,c]) dengan sumbu-sumbu koordinat (vektor-vektor ***i*** =[1,0,0], ***j*** = [0,1,0], dan ***k*** = [0,0,1]. Maka $\cos\partial = \frac{a}{|a|}, \cos\beta = \frac{b}{|a|}, \cos\gamma = \frac{c}{|a|}$ atau $\cos^2\partial + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Jadi adalah vektor arah arah garis lurus dengan panjang = 1, dan disebut vektor cosinus dari garis lurus (sedangkan masing-masing komponen disebut cosinus arah). Jadi persamaan garis lurus dapat pula berbentuk :

$\frac{x - x_1}{\cos\partial} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$ .... (25)

Atau

$x = x_1 + \lambda_a$

$y = y_1 + \lambda_a$ .... (26)

$z = z_1 + \lambda_a$

Di sini *t* = jarak titik (x, y, z) ke (x_1, y_1, z_1)

Contoh 17 :

Persamaan garis melalui titik-titik (3,2,-2) dan (4,-2,-1) adalah

$[x, y, z] = [3,2,-2] + \lambda[4-3,-2-2,-1+2] \rightarrow [x, y, z] = [3,2,-2] - \lambda[1,-4-1]$ Dengan persamaan parameternya $x = 3\lambda$, $y = 2 - 4\lambda$, $z = -2 + \lambda$ dan dengan mengeliminasi λ diperoleh :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+2}{1}$$

Vektor cosinus dari garis diatas adalah : $\frac{1}{\sqrt{18}}[1,-4,1]$ atau $\left[\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right]$, berarti garis dapat pula berbentuk $x = 3 + \frac{1}{\sqrt{18}}$, $y = 2 - \frac{4}{\sqrt{18}}$, $z = -2 + \frac{1}{\sqrt{18}}$.

2.10. Hal Khusus dari Garis Lurus Dengan Vektor Arah [a,b,c]

1. Garis lurus yang melalui asal (0,0,0) akan berbentuk $[x, y, z] = \lambda[a, b, c]$

   atau $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

2. Bila *a* = 0, vektor $[0, b, c]$ terletak pada bidang rata yang sejajar bidang *YOZ*

   Bila *b* = 0, garis lurus sejajar bidang *XOZ*

   Bila *c* = 0, garis lurus sejajar bidang *XOY*

   Dalam hal ini, lihat salah satu bilangan arah (misalkan. *a* = 0) persamaan garis lurus menjadi $[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[0, b, c] \rightarrow x = x_1$, $y = y_1 + \lambda b$, $z = z_1 + \lambda c$ dan dengan mengeliminasi λ diperoleh dua persamaan :

   $x = x_1 . \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ yang bersama menyatakan garis lurus tersebut.

3. Bila *a = 0, b* = 0, vektor $[0,0,c]$ sejajar dengan arah sumbu *Z*

   yaitu $[0,0,1]$, jadi garis lurus tersebut sejajar sumbu *Z*

   bila *a* = *c* = 0, garis lurus sejajar sumbu *Y*

   bila *a* = *c* = 0, garis lurus sejajar sumbu *X*

Contoh 18 :

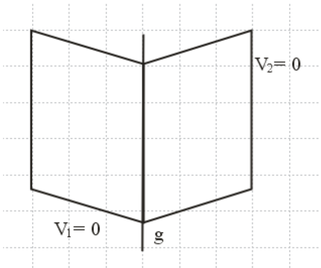
Garis lurus $[x, y, z] = [1,3,2] + \lambda[4,-6,0]$ bersifat sejajar dengan bidang X0Y (hal dimana *c* = 0) dan dapat kita tulis sebagai : $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-6}$ z = 2.

Garis lurus $[x, y, z] = [2,3,-2] + \lambda[0,4,0]$ bersipat sejajar sumbu *Y*(hal dimana *a* = *c* = 0) dapat kita tulis sebagai *x* = 2, *z* = – 2 (dimana berlaku untuk setiap *y*)

2.11. Garis lurus sebagai Perpotongan Dua Bidang Rata

Kita dapat pula menyatakan suatu garis lurus sebagai perpotongan sembarang dua bidang rata yang melalui garis lurus tersebut. Misalnya, garis lurus g adalah perpotongan bidang rata.

$V_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ dan $V_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, maka persamaan garis lurus g dapat ditulis :



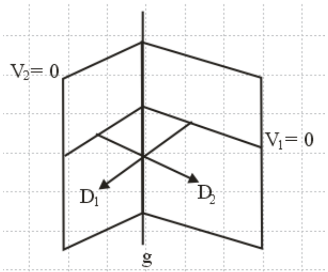
$$g : \begin{cases} V_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ V_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Contoh 19 :

Persamaan $\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 3x - 5y + 5z = 6 \end{cases}$

adalah persamaan-persamaan garis lurus yang merupakan perpotongan bidang-bidang $x - 2y + z = 7$ dan $3x - y + 5z = 6$

Untuk menentukan vektor arah dari garis lurus perpotongan dua buah bidang rata, kita perhatikan Gambar berikut:



$$g : \begin{cases} V_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ V_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$n_1 = [A_1, B_1, C_1],\ n_2 = [A_2, B_2, C_2]$

Jelas bahwa $n_1 \times n_2 = \boldsymbol{a}$ merupakan vektor arah dari garis *g*.

Jadi a $= [a, b, c] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_2 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

$$= \left[\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right]$$

Dimana untuk mudah mengingatnya, kita tulis sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\quad a \quad} & \underline{\quad c \quad} \\ A_1 & B_1 \quad C_1 & A_1 \quad B_1 \\ A_2 & \underline{C_2 \quad A_2} & B_2 \\ & b & \end{array} \qquad \text{.................................... (28)}$$

Untuk Mengubah Bentuk Persamaan $V_1 = 0 = V_2$ menjadi bentuk

$\left(\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \right)$. Kita harus menentukan pula koordinat (x_1, y_1, z_1). Sembarang titik pada garis lurus. Untuk itu (biasanya) kita ambil titik potong dengan bidang koordinat, misalnya, $XOY \rightarrow Z = 0$, diperoleh :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Yang bila diselesaikan diperoleh :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad \text{dan } Y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Contoh 20 :

Garis lurus $x - 2y + z = 1$. $3x - y + 5z = 8$ mempunyai vektor arah :

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\quad a \quad} & \underline{\quad c \quad} \\ 1 & -2 \quad 1 & 1 \quad -2 \\ 3 & \underline{5 \quad 3} & -1 \\ & b & \end{array}$$

Diman $a = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -9$; $b = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2$; $c = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$. Atau $[a, b, c] = [-9, -2, 5]$

Ambil $z = 0 \rightarrow x \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{15}{3} = 3$. $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{5} = 1$

Titik (3,1,0) pada garis lurus, persamaan dapat ditulis : $[a, b, c] = [3, 1, 9] + \lambda[-9, -2, 5]$

2.12. Kedudukan Dua Garis Lurus

Didalam ruang berdimensi tiga, dua garis lurus mungkin sejajar, berimpit, berpotongan, atau bersilangan. Diketahui garis lurus :

$g_1 : [x,y,z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a_1, b_1, c_1]$ dan $g_2 : [x,y,z] = [x_2, y_2, z_2] + \lambda[a_2, b_2, c_2]$

1. g_1 sejajar g_2 bila arah merika berkelipatan. Jadi bila $= [a_1, b_1, c_1] = \mu[a_2, b_2, c_2]; \mu$

   bilangan $\neq 0$, atau bila $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ .... (29)

   Kalau disamping sipat diatas berlaku pula : $[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1] = \mu[a_1, b_1, c_1]$ maka g_1 dan g_2 berimpit.

Contoh 21 :

Garis lurus $g_1 : [a,b,c] = [2,4,3] + \lambda[4,7,-2]$ dan $g_2 : [a,b,c] = [1,0,2] + \lambda[-8,-14,4]$ sejajar karena $[4,7,-2]$ berke;ipatan dengan $[-8,-14,4]$ tetapt tidak berimpit karena $[1-2, 0-4, 2-3] = [-1,-4,-1]$ tidak berkelipatan dengan $[4,7,-2]$

Demikian juga halnya $h_1 = \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{5} = (z-1)$ dan $h_2 : (x-1) = \dfrac{(2y+7)}{5} = (2z-3)$

Sedangkan garis $k_1 : \left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ x - z = 2 \end{matrix}\right\}$ dan $k_2 : x - 1 = y = z + 1$

Berimpit. Karena arah $k_1 : [1,1,1]$ dan arah $k_2 : [1,1,1]$: salah satu titik di k_1 adalah P(2,1,0) dan salah satu di k_2 adalah Q(1,0,1) yang sama $PQ = [-1,-1,-1]$berkelipatan dengan arah garis yaitu vektor $[1,1,1]$

2. Kalau arah g_1 yaitu $[a_1, b_1, c_1]$ dan arah g_2 yaitu $[a_2, b_2, c_2]$ tidak berkelipatan, maka g_1 dan g_2 berpotongan di satu titik atau bersilangan. misalkan titik potong (x_0, y_0, z_0) berarti ada λ_1 sehingga $[x_0, y_0, z_0] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda_1[a_1, b_1, c_1]$ dan ada λ_2 sehingga $[x_0, y_0, z_0]$ $= [x_2, y_2, z_2] - \lambda_2[a_2, b_2, c_2]$. Berarti : $[x_1, y_1, z_1] + \lambda_1[a_1, b_1, c_1]$ $= [x_2, y_2, z_2] - \lambda_2[a_2, b_2, c_2]$

$$\text{Atau : } \begin{aligned} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 &= x_2 - x_1 \\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 &= y_2 - y_1 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 &= z_2 - z_1 \end{aligned}$$

Berdasarkan teori persamaan linier, nilai λ_1 dan λ_2 ada. Bila diterminan :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ .... (30)}$$

Merupakan dua garis lurus perpotongan pada satu titik. Sedangkan persamaan bidang yang memuat garis g_1 dan g_2 tersebut :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x - x_1 \\ b_1 & b_2 & y - y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ .... (32)}$$

Contoh 22 :

Tunjukan bahwa $g_1 : (x-4) = \frac{(y+3)}{-4} = \frac{(z+1)}{7}$ berpotongan dengan $g_2 : \frac{(x-1)}{2} = \frac{(y+1)}{3} = \frac{(z+10)}{8}$

tentuka titik potong serta bidang rata yang memuat g_1 dan g_2 tersebut.

$$g_1 : [x, y, z] = [4,-3,-1] + \lambda[1,-4,7]$$
$$g_2 : [x, y, z] = [1,-1,-10] + \lambda[2,-3,8]$$

Arah mereka berkelipatan, jadi sejajar ataupun berhimpit. Sedangkan determinan :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-4 \\ -4 & -3 & -1+3 \\ 7 & 8 & -10+1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix} = 0$$

Jadi g_1 dan g_2 berpotongan. Titik potong diperoleh dari persamaan :

-*V* dua persamaan saja. $\lambda_1 = 1.\lambda_2 = -2$ titik potong diperoleh dengan memasukan $\lambda = \lambda_1$ kepersamaan g_1. Diperoleh $[x_0, y_0, z_0] = [4,-3,-1] + 1[1,-4,7] = [5,-7,6]$ sehingga titik potong : (5,-7,6) (boleh juga dengan memasukan $\lambda = \lambda_2 = 2$ ke persamaan g_2). Bidang rata yang memuat g_1 dan g_2 mempunyai vektor arah [4,-3,-1], jadi persamaan vektorisnya :

$[x, y, z] = [4,-3,-1] + \lambda[1,-4,7] + \mu[2,-3,8]$, atau bentuk liniernya (sesuai denga (31)) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-4 \\ -4 & -3 & y+3 \\ 7 & 8 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 11x - 6y - 5z - 67 = 0$$

Catatan:

Sudut antara garis g_1 dan g_2 adalah sudut vektor-vektor arah $[a_1, b_1, c_1]$ dan $[a_2, b_2, c_2]$ yaitu :

$$\cos\theta = \frac{[a_1, b_1, c_1].[a_2, b_2, c_2]}{|[a_1, b_1, c_1]||[a_2, b_2, c_2]|} = \frac{a_1 a_2 + b_1, b_2 + c_1, c_2}{\sqrt{(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2)(a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2)}} \text{ .... (32)}$$

Kedua garis g_1 dan g_2 tersebut saling tegak lurus do product vektor merika = 0,

atau bila $[x_1, y_1, z_1].[x_2, y_2, z_2] = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$ .... (33)

Contoh 23 :

Tentukan persamaan garis lurus *g* yang melalui titik (1,3,1) dan sejajar garis

$h:[x, y, z] = [1,2,0] + \lambda[2,-1,2]$!

Penyelesaian

Arah garis g : $[x, y, z] = [1,2,0] + \lambda[2,-1,2]$

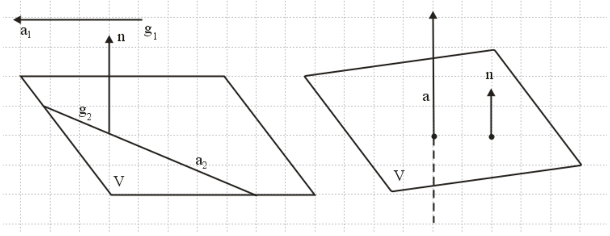
Sudut antara garis h dan garis k :

$[x, y, z] = \lambda[2,6,3]$ adalah $\cos\theta = \dfrac{2.2 - 1.6 + 2.3}{\sqrt{(4+1+4)(4+36+9)}} = \dfrac{4}{21}$

2.13. Kedudukan Garis Lurus dan Bidang Rata

Pandang garis lurus g yang ddengan vektor arah ***a*** $= [a, b, c]$ dan bidang rata *V* dengan vektor normal $n = [A, B, C]$ maka:

1. Garis lurus *g* sejajar bidang rata *V* $\leftrightarrow$ vektor arah garis tegak lurus normal bidang atau $\rightarrow n.a = 0$ atau : $aA + bB + cC = 0$ .... (34)



g_1 sejajar denga bidang V

g_2 terletak pada bidang V

g_2 tegak lurus bidang V

2. Garis g tegak lurus bidang rata $V \leftrightarrow$ vektor arah garis lurus = vektor normal bidang rata (atau kelipatanya) atau $\leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$ .... (35

3. Bila garis g terletak seluruhnya pada bidang rata, terpenuhi $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{n}$ atau $a.n = 0$
 $aA + bB + cC = 0$ .... (36)

 dan sembarang P pada garis g harus terletak pula pada bidang V.

Contoh 24 :

Garis lurus g : $\frac{(x-3)}{2} = \frac{(y+2)}{-3} = z$ sejajar dengan $V = x + y + z + 7 = 0$,

Karena $[2,-3,1].[1.1.1] = 0$ tetapi g tidak terletak pada V. Karena suatu titik $[3,-2,0]$ pada g tidak memenuhi persamaan $V = 0(\rightarrow 3 - 2 + 0 + 7 \neq 0)$

sedangkan garis $g_1 : \frac{x}{2} = (y-3) = \frac{(z+2)}{-3}$ terletak pada $V_1 = x + y + z - 1 = 0$,

Karena $[2,-3,1].[1.1.1] = 0$ dan titik $(1,-3,2)$ pad g_1 memenuhi persamaan V $_1 = 0(\rightarrow 0 + 3 - 2 - 1 = 0)$

Sedangakan $g_2 : x = y = \frac{(z+3)}{2}$ tegak lurus bidan $g_2 = x + y + 2z = 5$

Karena $g_2 : [1,1,2]$ sama dengan vektor normal $g_2 : [1,1,2]$.

2.14. Garis Lurus Memotong Dua Garis Lurus Lain

Jika $g_1 : V_1 = 0 = V_2 = 0 = U_2$ maka persamaan umum dari garis lurus g yang memotong g_1 dan g_2 adalah $V_1 + \lambda V_2 = 0 = U_{1+} + \mu U_2$ .... (37)

Contoh 25 :

Tentukan pesamaan garus lurus yang melalui titik $(2,-1,1)$ dan g_1 : $2x + y - 4 = 0 = y + 2z$ serta g_2 : $x + 3z = 4.2x + 5z = 8$.

<u>Penyelesaian</u>

Garis lurus $2x + y - 4 + \lambda(y + 2z) = 0.x + 3z - 4 + \mu(2x + 5z - 8) = 0$ .... (*)

memotong g_1 dan g_2 untuk setiap λ dan $\mu.$

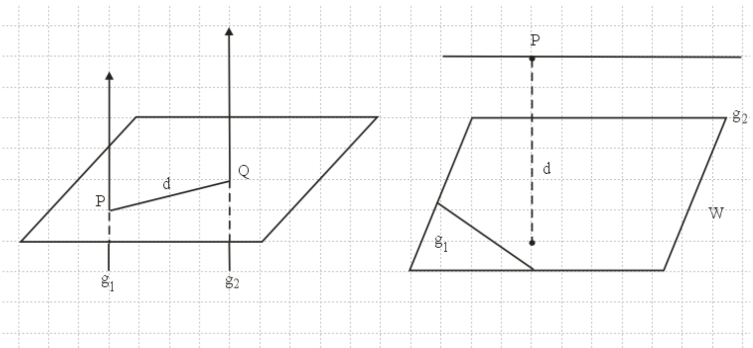
karena melalui $(2,-1,1)$: (*) $-1 + \lambda = 0$ dan $1 + \mu = 0,$ atau $\lambda = 1, \mu = -1.$ yang kita subsitusikan :

$x + y + z = 2.x + 2z = 4,$ merupakan persamaan yang duminta.

2.15. Jarak Antar Dua Garis Lurus g_1 dan g_2

1. Bila g_1 dan g_2 sejajar , untuk menghitung jaraknya dapat dilakukan sebagai berikut:

   - Pilihlah sembarang titik *p* pada g_1
   - Buatlah bidabg rata *W* melalui *P* dan tegak lurus g_1, yang dengan sendirinya juga tegak lurus g_2
   - Tentukan *Q* titik tembus g_2 pada *W*
   - Panjang *PQ* adalah jarak g_1 dan g_2



2. Bila g_1 dan g_2 bersilangan, dapat dilakukan sebagai berikut:

   - Buat bidang rata *W* yang melalui g_1 dan sejajar g_2
   - Pilih sembarang titik *P* pada g_1
   - Tentukan jarak *P* ke bidang *W*, merupakan jarak g_1 dan g_2.

Contoh 26 :

1. Tentukan jarak garis lurus $g_1 \ \frac{(x-2)}{2} = \frac{y}{3} = \frac{(z-2)}{1}$, dan $g_2 : \frac{x}{2} = \frac{(y-4)}{3} = \frac{(z-8)}{1}$

   <u>Penyelesaian :</u>

   $g_1 // g_2$

pilihlah P (2,0,2) pada g_1

persamaan bidan W melalui P dan tegak lurus g_1

$W = 2\ (x-2) + 3\ (y-0) + (z-2) = 0$

$\rightarrow 2x + 3y + z - 6 = 0$.............................(*)

Mencari titik Q, yaitu titik terbus g_1 pada W :

g_2 dapat ditulis dalam persamaan parameter :

$x = 2\lambda$, $y = 4 + 3\lambda$, $z = 8 + \lambda$ ....(**)

dan subtitusinya ke (*) : $2(2\lambda) + 3(4 + 3\lambda) + (8 + \lambda) - 6 = 0$

$\rightarrow 14\lambda + 14 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

Jadi Q(-2, 1, 7) berarti jarak g_1 dan g_2 adalah :

$$|PQ| = \sqrt{(-2-2) + (1-0^2) + (7-2^2)} = \sqrt{42}$$

2. Tentukan jarak dan persamaan garis hubung terpendek dari sumbu Z kegaris lurus

$g_2 : x = -y + 1 = -z$

<u>Penyelesaian :</u>

Sumbu Z mempunyai persamaan $g_1 : x = 0$, y = 0, dan garis

g_2 : x + z = 0, x + y – 1 = 0; bidang W melalui titik g_1 berbentuk x + λ y = 0 dan // g_2 yang arahnya :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \multicolumn{2}{c}{\frac{-1}{0\quad 1}} & \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{1\quad 0}} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Berarti [1, λ,0] . $[-1,1,1] = 0 \rightarrow \lambda = 1$

jadi W = x + y = 0 ; pilih sembarang titik P pada g_2,

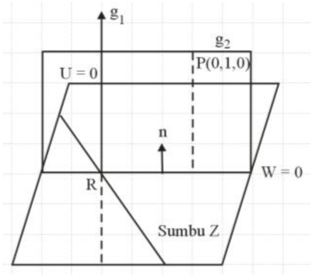
ambil $x = 0 \rightarrow z = 0$, dan $y = 1$ atau $P(0,1,0)$

jarak ke $W = 0$ adalah : $d = \left[\dfrac{1.0 + 1.1 + 0.0 + 0}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}}\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

g_3 adalah garis hubung terpendek g_1 dan g_2, yang dapat dicari sebagai berikut :

bidang U melalui g_2 dan tegak lurus W :



$\rightarrow (x+y)+\lambda(x+y-1)=0 \rightarrow (1+\lambda)x-\lambda y+z-\lambda=0,$ serta : $[1+\lambda,\lambda,1].[1,1,0]=0$

$\rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$. berarti

U= $\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y + Z + \frac{1}{2} = 0$ atau x – y + 2z + 1 = 0

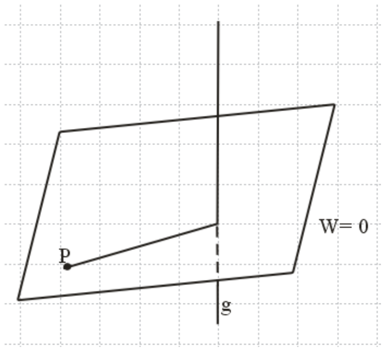
Titik tembus sumbu Z pada U : x = 0, y = 0,

z = $-\frac{1}{2} \rightarrow \left(0,0,\frac{1}{2}\right)$

g_1 melalui R dan vector arahnya = normal dari W berarti g_3: $[x,y,z]=\left[0,0.-\frac{1}{2}\right]+\lambda[1,1,0]$ atau

$x = y,\ z = -\frac{1}{2}$

2.16. Jarak Sebuah Titik ke Sebuah Garis Lurus



Jarak $p(x_1, y_1, z_1)$ ke garis g dapat kita cari sebagai berikut :

- Buat bidang W melalui p tegak lurus g
- Cari titik Q, titik tembus g pada W.
- Garis PQ dalah suatu garis yang tegak lurus g dan melalui titik P sehingga panjang PQ adalah jarak titik P ke garis g

Contoh 27 :

Tentukan jarak titik $(1,0,2)$ ke garis $x = y = z$

Penyelesaian:

Bidang W yang melalui $(1,0,2)$ dan tegak lurus $x = y = z$ adalah:

$1(x-y) + 1(y-0)+1(z-2)=0 \rightarrow x+y+z-3=0$ ……………….(*)

Ttik tembus garis g pada W dpiperoleh dengan mensubsitusikan x = y = z = λ ke (*) $\rightarrow \lambda = 1$ atau titik tembus Q $(1,1,1)$.

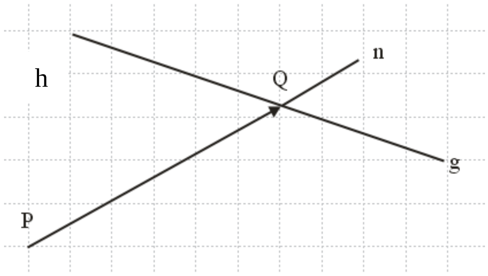
jadi PQ = $\nu(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-2)^2 = \nu 2$ adalah jarak yang diminta

Catatan:

Mencari persamaan garis h yang melalui titik P (x_1, y_1, z_1) serta memotong tegak lurus g dengan persamaan $[x, y, z] = [x_2, y_2, z_2] + \lambda[a, b, c]$.

Misalkan Q pada garis g berarti kordinat Q $(x_2+\lambda a, y_2+\lambda b, z_2+\lambda c)$.

Vector PQ = $[x_2+\lambda a - x_1, y_2+\lambda b - y_1, z_2+\lambda c - z_1]$ merupakan arah garis h



sebagai contoh, kita hendak memecahkan contoh 3 diatas, ambil Q $(\lambda, \lambda, \lambda)$ pada g, vector

PQ= $[\lambda - 1, \lambda, \lambda - 2]$,

PQ tegak lurus arah g, yaitu $[1,1,1]$ berarti : $\lambda - 1 + \lambda + \lambda - 1 = 0$ atau $\lambda = 1$

Titik *Q* ($1,1,1$) dan jarak *P* ke garis *g* = *PQ* = $\sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-2)^2}$ = $\sqrt{2}$

2.17. Perpotongan Tiga Bidang Rata

Pandang tiga bidang rata :

$V_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1$

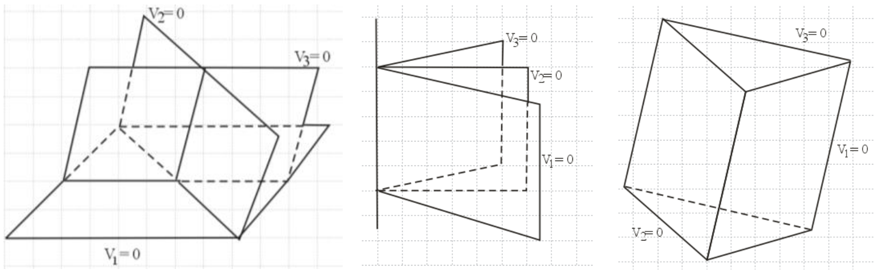
$V_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2$

$V_3 = A_3x + B_3y + C_3z + D_3$

V_1, V_2 dan V_3 tidak ada yang sejajar, terdapat tiga kemungkinan kedudukan ketiga bidang tersebut :

1. hanya mempunyai satu titik persekutuan (membentuk jaringan bidang),
2. mempunyai satu garis lurus persekutuan (membentuk berkas bidang),

3. membentuk satu prima segitiga



pandang bahwa V_1 dan V_2 tidak sejajar. Garis potong V_1 dan V_2 yaitu g mempunyai arah

$$n_1 \times n_2 = [A_1, B_1, C_1] \times [A_2, B_2, C_2] \quad \text{dan melalui titik } P\left(\frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}}, 0 \right)$$

maka $V_1 = 0$. $V_2 = 0$. $V_3 = 0$ membentuk prisma sisi tiga jika g // V_3 (g tidak terletak pada V_3).

Berarti : $(n_1 \times n_2).n_3 = 0$ atau bila :

$$\begin{bmatrix} A_3 B_3 C_3 \\ A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \\ A_3 B_3 C_3 \end{bmatrix} = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(38)$$

dan misalkan titik P terletak pada $V_3 = 0$, berarti tidak terpenuhi hubungan :

Atau tidak memenuhi:

$$A_3 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + C_3 0 + D_3 = 0$$

atau tak memenuhi : $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(39)$

Jadi:

- Ketiga bidang rata membentuk suatu berkas bidang rata, jika terpenuhi persamaan (38) dan (39)
- Ketiga bidang rata membentuk suatu prisma sisi tiga jika terpenuhi persamaan (38) dan (39)

- Dalam hal lain, membentuk jaringan.

Contoh 28 :

Tentukan bahwa bidang $x + y + z + 3 = 0,\quad 3x + y - 2z + 2 = 0$ dan $2x + 4y + 7z - 7 = 0$ membentuk prisma segitga.

Penyelesaian

Persamaan (38) terpenuhi, yaitu :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sedangkan persamaan (39)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 40 \neq 0,\ \text{tidak terpenuhi.}$$

8.18. Soal-soal dan Pemecahannya

1. Tentukan persamaan bidang rata melalui titik *P* (2,2,1) dan *Q* (9,3,6) serta tegak lurus bidang *V* : 2*x* + 6*y* + 6*z* = 9 !

   Penyelesaian :

   Misalkan persamaan bidang *W* : $Ax + By + Cz + D = 0$,

   Melalui titik *P*(2,2,1) $\rightarrow$ $2A + 2B + C + D = 0$ …………………………..(1)

   Melalui titik *Q*(9,3,6) $\rightarrow$ $9A + 3B + 6C + D = 0$ …………………………(2)

   Dan karena tegak lurus *V*, $\rightarrow 2A + 6B + 6C = 0$……...…………………..(3)

   (2) – (1) : $9A + 3B + 6C + D = 0$

   $\underline{2A + 2B + C + D = 0 \quad -}$

   $7A + B + 5C = 0$ …………………………………………(4)

   Dan (4) – (3) : $7A + B + 5C = 0$ (x6)

   $2A + 6B + 6C = 0$ (x1)

   $42A + 6B + 30C = 0$

$$\underline{2A + 6B + 6C = 0 \quad -}$$

$$40A + 24C = 0$$

$$A = -\frac{3}{5}C$$

Substitusikan nilai A ke persamaan (4) : $7(-\frac{3}{5}C) + B + 5C = 0$, diperoleh $B = -\frac{4}{5}C$.

substitusikan nilai A dan B ke ke persamaan (1) : $2(-\frac{3}{5}C) + 2(-\frac{4}{5}C) + C + D = 0$,

diperoleh $D = \frac{9}{5}C$.

jadi persamaan bidang yang dimaksud adalah :

$-\frac{3}{5}C\,x - \frac{4}{5}Cy + Cz + \frac{9}{5}C = 0,\ C = -5$

maka : $3x + 4y - 5z - 9 = 0$

2. Tentukan persamaan bidang rata yang melalui (-1,3,2) serta tegak lurus bidang-bidang

   $V_1 = x + 2y + 2z = 5$ *dan* $V_2 = 3x + 5y + 2z = 8$ *!*

   Penyelesaian :

   Bidang *W* yang diminta, melalui (-1,3,2) berbentuk

   $A(x + 1) + B(y - 3) + C(z - 2) = 0$,

   W tegak lurus dengan V_1 maka A + 2B + 2C = 0 ……………..(1)

   W tegak lurus dengan V_2 maka 3A + 5B + 2C = 0 ……………(2)

   (2) – (1) diperoleh 2A + 3B = 0 atau A = -3/2 B .

   -3/2 B(x + 1) + B (y – 3) – 1/4 B(z – 2) = 0, atau 6x – 4y + z + 16 = 0

3. Tunjukan bahwa garis lurus yang menghubungkan titik-titik P(-1,-2,-3) dan Q(1,2,-5) serta garis lurus yang menghubungkan R(6,-4,4) dan S(0,0,-4) saling berpotongan.

   Penyelesaian :

   jelas bahwa PQ = [2,4,-2] tidak sejajr denga RS = [-6,4,-8]. Selanjutnya akan ditunjukan bahwa keempat bidang tesebut sebidang.

$$W\begin{vmatrix} x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ x_R - x_P & y_R - y_P & z_R - z_P \\ x_S - x_P & y_S - y_P & z_S - z_P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 7 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Jadi P,Q,R, dan S terletak pada suatu bidang PQ tidak sejajar dengan RS. Berarti garis melalui PQ berpotongan dengan garis melalui RS.

4. Tentukan persamaan bidang rata W melalui garis potong bidang

$V_1 = x-3y+z-7=0$ dan $V_2 = 2x-y+3z-5=0$ serta tegak lurus bidang V $_3 = x+2y=3z+7=0$.

Penyelesaian :

W melalui perpotongan V_1 dan V_2 berarti berbentuk berarti

$(x-3y+z-7)+\lambda(2x-y+3z-5)=0$

$\rightarrow (1+2\lambda)x+(-3-\lambda)y+(1+3\lambda)z+(-7-5\lambda)=0$.

Dan karena tegak lurus V_1. Maka dot product :

$[(1+2\lambda).(-3-\lambda).(1+3\lambda)].[1,2,3]=0 \rightarrow 9\lambda-2 \rightarrow \lambda=\frac{2}{9}$

Jadi W : $(1+2.\tfrac{2}{9})x+.(-3-.\tfrac{2}{9})y+.(1-3.\tfrac{2}{9})z+(-7-5.\tfrac{2}{9})=0$

$\therefore$ Atau $13x-29y+15z-73=0$

5. Tentukan persamaan garis lurus yang memotong kedus garis lurus

$g_1 : 2x+y-1=0=x-2y+3z$ dan $g_1 : 3xy+z=0=4x+5y-2z-3$ serta

$g_3 : x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

Penyelasaian :

Persamaan umum garislurus yang memotoing garis g_1 dan g_2 adalah :

$$g\begin{cases} 2x+y-1+\gamma(x-2y+3z)=0 \\ 3x-y+z+2+\mu(2x+y-2z-3)=0 \end{cases}$$

Atau $\begin{array}{l} (2+\lambda)x+(1-2\lambda)y+3\lambda z-1=0=V_1 \\ (3+4\mu)x+(-1+5\mu)y+(1-2\mu)z+2-3\mu=V_2 \end{array}$

Karena g sejajar dengan g_3 berarti arahnya = [1,2,3], yang tegak lurus normal bidang g_1 dan normal bidang g_2, berarti : $(2+\lambda).2+(3\lambda).3=0 \rightarrow \lambda=-\tfrac{2}{3}$

Dan $(3+4\mu).1+(-1+5\mu).2+(1-2\mu)3=0 \rightarrow \mu=-\frac{1}{2}$

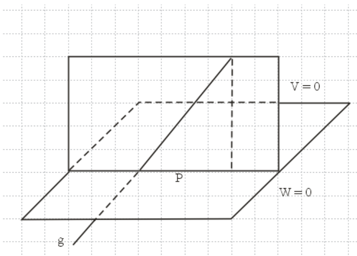
Maka persmaan garis lurus yang diminta adalah :

$g: 4x+7y-6z-3=0.2x-7y+4z+7=0$

6. Tentukan persamaan vektoris garis lurus hasil proyeksi tegak lurus g. [x,y,z] = [1,-1,2] pada $\lambda[2,0,1]$ pada bidang rata W = 2x + 3y – z = 0.

<u>Penyelesaian :</u>

Garis lurus g proyeksi P merupakan garis potong antara W dan V (yang melalui g dan tegak lurus W).



g : x - 2z + 3 = 0. y = -1

W berbentuk $x-2z+3+\lambda(y+1)=0 \rightarrow x+\lambda y-2z-3+\lambda=0$

V $\perp$ W $\rightarrow 2+3\lambda+2=0 \rightarrow \lambda=-\frac{4}{3}$

V $=3x-4y-6z+5=0$

Jadi P: $\begin{cases} W = 2x+3y-z=0 \\ V = 3x-4y-6z+5=0 \end{cases}$

Yang arahnya g_1 :

$$\begin{array}{cccc} 2 & & \dfrac{-22}{3 \quad -1} & \dfrac{-17}{2 \quad 3} \\ 3 & -4 & \dfrac{-6 \quad 3}{9} & -4 \end{array}$$

Untuk menetukan sebuah titik pada P kita boleh mengambil titik tembus g pada W yaitu diperoleh dari subsitusi : $2(1+2\lambda)+3(-1+0\lambda)-(2+\lambda)=0 \rightarrow 3\lambda 1$ atau titik potong $(3,-1,3)$

7. Tentukan persamaan garis lurus g yang melalui titik P(1,-2,-3), sejajar bidang rata V $=2x+y-2z=0$ menyilang tegak lurus $g_1: x-4z=1, y=+3z=2.$ tentukan pula jarak dari awal sumbu ke garis

<u>Penyelesaian</u>

vektor arah g_{1} :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \dfrac{4}{0 \quad -4} & \dfrac{1}{1 \quad 0} \\ 0 \quad 1 & \dfrac{3 \quad 0}{-3} & 1 \end{array}$$

Misalkan vektor arah garis g = [a,b,c] karena g // bidang rata V

$\rightarrow [a,b,c].[2,1,-2] = 0 \rightarrow 2a + b - 2c = 0$ .... (*)

Dan tegak lurus $g_1 \rightarrow [a,b,c].[4,-3,1] = 0 \rightarrow 4a - 3b + c = 0$ .... (**)

Dengan menyelesaikan (*) dan (**) diperoleh : b = c dan a = $\frac{1}{2}c$. Karena g melalui (1,-2,-3), persamaannya : [x,y,z] = [1,-2,-3] + λ [$\frac{1}{2}c$,c,c] = $[1,-2,-3] + \lambda[1,2,1]$

Untuk mencari jarak titik O(0,0,,) k g, kita dapat buat bidang U melalui O(0,0,0) tegak lurus $g \rightarrow U : x + 2y + 2z = 0.$

titik tembus U :$\rightarrow (1+\lambda)2(-2+2\lambda) + 2(-3+2\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 1$.

Titik tembus Q(2,0,-1)

Jarak O ke g adalah :

OQ$= \sqrt{2^2 + 0^2(-1)^2} = \sqrt{5}.$

8. Tentukan persamaan garis lurus g yang melalui titik P(1,0,-1), terletak pada bidang $V = x + 3y + z = 0$ serta tegak lurus garis $g_1 : x = 2y - z = 3.2x - 3y + 5z1$

<u>Penyelesaian :</u>

Garis g hanya mungkin bila titik P terletak pada bidang W. Ternyata terpenuhi

1+3.0-1=0.

Jadi P terletak pada bidang V.

Misalkan, vektor arah dari g : a = [a,b,c], karena g terletak pada V berarti a tegak lurus vektor normal dari V, $\rightarrow [a,b,c].[1,3,1] = 0 \rightarrow a + 3b + c = 0$ .... (1)

Vektor arah g_1:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \dfrac{7}{2 \quad -1} & \dfrac{-7}{1 \quad 2} \\ 2 \quad -3 & \dfrac{5 \quad 5}{-7} & -3 \end{array}$$

Karena g$\perp g_1$ berarti $[a,b,c].[7,-7,-7] = 0 \rightarrow a - b - c = 0$ .... (2)

Dengan menyelesaikan persamaan (1) dan (2) diperoleh $a=-b, c=-2b.$ dan karena gmelalui (1,0,-1) persamaannya :

$[a,b,c]=[1,0,-1]+\lambda[-b,b,-2b]$ atau $[a,b,c]=[1,0,-1]+\lambda[-1,1,-2]$.

9. Tunjukan bahwa ketiga bidang rata V $_1 = 2xy + z - 3 = 0$,

   V $_2 = 7x+5y-2z+12=0$, V $_3 = x-2y-3z-4=0$ berpotongan hanya pada satu titik (jadi membentuk jaringan bidang). Kemudian tentukan persamaan bidang W yang melalui titik potong tersebut dan sejajar pada bidang V $_4 = y-3z-4=0$.

   <u>Penyelesaian :</u>

   $$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -76 \neq 0$$

   Jadi titik potong di satu titik.

   Persamaan bidang melalui titik potong :

   $V_1+\lambda V_2+\mu V_3=0$ atau $2x-y+z-3+\lambda(7x+5y-2z-12)+\mu(x-2y-3z+5)=0$

   $\rightarrow(2+7\lambda+\mu).x+(-1+5\lambda-2\mu).y+(1-2\lambda-3\mu).z+(-3+12\lambda+5\mu)=0$

   Karena //V $_4$ berarti $2+7\lambda+\mu-0$ serta $(-1+5\lambda-2\mu).1=(1-2\lambda-3\mu)-3$

   dimana $\lambda=-\tfrac{4}{19}$ dan $\mu=-\tfrac{10}{19}$,

   $\therefore$ W : $-y+3\lambda-\tfrac{4}{19}=0\rightarrow 19y-57z+15=0$

2.19. Soal-Soal Latihan

1. Tentukan persamaan vektoris dan persamaan linier bidang rata melalui titik :

   (a) (3,4,1), (-1,-2,5), (1,7,1)

   (b) (3,1,4), (2,1,6), (3,2,4)

   (c) (3,2,1), (1,3,2), (1,-2,3)

   <u>Penyelesaian :</u>

   (a) $[x,y,z]=[3,4,1]+\lambda[-4,-6,4]+\mu[-2,3,0], 3x+2y+6z-32=0$

   (b) $[x,y,z]=[3,1,4]+\lambda[-1,0,2]+\mu[0,1,0], 2x+z-10=0$

(c) $[x, y, z] = [3,2,1] + \lambda[-2,1,1] + \mu[-2,-4,2], 3x + y + 5z - 16 = 0$

2. Apakah empat titik berikut sebidang, jika sebidang tentukan persamaan liniernya :

(a) (2,1,3), (4,2,1), (-1,-2,4), (0,0,5)

(b) (4,2,1), (-1,-2,2), (0,4,-5), $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

(c) (3,1,2), (4,-2,-1), (1,2,4), (1,2,1)

Penyelesaian:

a. Ya. $5x - 4y + 3z - 15 = 0$

b. Ya. $11x - 17y - 13z + 3 = 0$

c. Tidak

3. Tentukan hal-hal istimewa pada bidang-bidang rata berikut serta berikan gambarnya :

(a) x + y = 6

(b) 2x – z = 0

(c) 2y – 3z = 6

(d) X – 6 = 0

(e) 2x + 4y + 3z = 0

(f) 3x – 5y + 2z = 30

4. Tentukan persamaan linier bidang rata :

(a) Melalui (3,-2,-4) yang hotizontal :

(b) Sejajar su,bu Z memotong sumbu X positif sebesar 2, memotong sumbu Y negatif sebesar 3.

(c) Melalui (3,-2,4) dan tegak lurus garis [x,y,z] = $\lambda[2,2,-3]$

(d) Melalui (-1,2,-3) tegak lurus dan garis lurus yang melalui (-3,2,4) dan (5,4,1)

(e) Tegak lurus berpotonga garis P(-2,2,-3) dan Q(6,4,5) seerta melalui tengah-tengah PQ

Penyelesaian:

(a) z + 4 = 0

(b) 3x – 2y – 6 = 0

(c) $2x + 2y - 3z + 10 = 0$

(d) $8x + 2y - 3z = 0$

(e) $4x + y + 4z - 15 = 0$

5. Tentukan persamaan linier bidabg rata yang :

   (a) Melalui (-1,2,4) dan sejajar bidang rata $2x - 3y - 5z + 6 = 0$

   (b) Sejajar bidang rata $3x - 6y - 2z = 0$ dan berjarak 3 dari titik asal (0,0,0)

   (c) Sejajar bidang rata $4x - 4y + 7z - 3 = 0$ dan berjarak 4 dari titik (4,1,-2)

   Penyelesaian :

   (a) $2x - 3y - 5z + 28 = 0$

   (b) $3x - 6y - 2z \pm 21 = 0$

   (c) $4x - 4y + 7z + 38 = 0$

6. Tentukan persamaan bidang rata :

   (a) Melalui (3, –2,4) dan tegak lurus bidang rata $7x - 3y + z - 5 = 0$ dan $4x - y - z + 9 = 0$

   (b) Melalui (4,–3,2) dan tegak lurus garis potong bidang rata $x - y + 2z - 3 = 0$ dan $2x - y - 3z = 0$

   (c) Yang tegak lurus bidang rata $3x - y + z = 0$ dan $x + 5y + 3z = 0$ serta berjarak $\sqrt{6}$ dari titik asal

   (d) Melalui titik (2,1,1) dan (3,2,2) serta tegal lurus bidang rata $x + 2y - 5z = 0$

   Penyelesaian:

   (a) $4x + 11y + 5z - 10 = 0$

   (b) $5x + 7y + z - 1 = 0$

   (c) $x + y - 2z \pm 6 = 0$

   (d) $7x - 6y - z - 7 = 0$

7. Tentukan titik potong ketiga bidang rata :

(a) 2x – y – 2z = 5. 4x + y + 3z = 1. 8x – y + z = 5

(b) 2x + y – z – 1 = 0 . 3x – y –z + 2 = 0. 4x – 2y + z – 3 = 0

(c) 2x + 3y + 3 = 0. 3x + 2y – 5z + 2 = 0. 3x – 4z + 8 = 0

Penyelesaian :

(a) $\left(\frac{3}{2}, 4, -3\right)$

(b) (1,2,3)

(c) $\left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

8. Suatu bidang rata memotong sumbu-sumbu koordinat titik A, B dan C sedemikian sehingga titik berat segitiga ABC adalah titik (a,b,c) tunjukan bahwa persamaan bidang rata tersbut adalah

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} + \frac{z}{c} = 3$$

9. Tentukan persamaan bidang rata :

(a) melalui sumbu X dan tegak lurus bidang rata 2x – y – 3z = 5

(b) melalui garis potong bidang-bidang rata x + y + z = 6 dan 2x + 3y + 4z + 5 + 0 serta titik (1,1,1)

(c) melalui garis potong bidang-bidang rata 2x – y = 0 dan 3z – y = 0 serta tegak lurus bidang rata 4x + 5y – 3z = 8

(d) melalui garis potong bidang-bidang rata ax + by + cz + d = 0 , $a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ serta tegak lurus bidang XOY

Penyelesaian :

(a) 3y – z = 0

(b) 20x + 23y +26z – 59 = 0

(c) 28x – 17y + 9z -0

(d) $x(ac_1 - a_1c) + y(bc_1 - b_1c) + (dc_1 - d_1c) = 0$

10. Tentukan persamaan bidang rata yang :

(a) melalui titik (3,–3,1) dan tegak lurus garis lurus yamg menghubungkan titik (3,4,-1) dan (2,-1,5).

(b) membagi dua potongan garis lurus yang melalui (1,2,3), (3,4,5) dengan sudut siku-siku.

Penyelesaian

(a) x + 5y – 6z + 18 =0

(b) x + y + z = 9

(c)

11. Tentukan jarak

(a) titik (-2,2,3) kebidan rata 2x + y – 2z = 4

(b) titik (0,2,3) ke bidang rata 6x – 7y – 6z + 22= 0

(c) bidang rata : 2x – 2y + z + 3 = 0 dan 4x – 4y + 2z + 5 = 0

(d) bidang-bidang rata : 6 x – 2y + 3z = 7 dan 6x – 2y + 3z = 9

Penyelesaian:

(a) 4

(b) $\frac{10}{11}$

(c) $\frac{1}{6}$

(d) $\frac{2}{7}$

12. Buktikan bahwa bidang-bidang rata bagi (bissectors) dari bidang-bidang rata :

A_1x + B_1y + C_1z + d_2 = 0 dan A_2x + B_2y + C_2z + d_2 = 0 adalah :

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1y + D_1}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} + C_1^{\ 2}}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2y + D_2}{\sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}}$$

(tanda $\pm$. Menunjukkan bidang bagi dalam atau bidang bagi luar). Tentukan bagi dalam bidang-bidang rata : x + 2y + 2z – 3 = 0 dan 3x + 4y + 12z + 1 = 0

Pernyelesaian : 11x + 19 y + 13z – 18 = 0

13. Tunjukan volume bidag empat yang dibatasi oleh bidang-bidang rata : y + z = 0, z + x = 0, $x + y = 0$ dan x + y + z = 1

Penyelesaian : $\frac{2}{3}$

14. Tunjukan bahwa bidang-bidang berikut merupakan sisi-sisi sebuah parallel epipedum : 3x – y + 4z – 7 = 0, x + 2y – z + 5 = 0, 6x – 2y + 8z + 10 = 0, 3x + 6y – 3z – 7 = 0

15. Tentukan persamaan vektoris dan persamaan-persamaan linier garis lurus melalui titik

(a) (1,2,1), (-2,3,2)

(b) (1,-3,2), (4,1,0)

(c) (1,0,2), (2,3,2)

Penyelesaian :

(a) [x,y,z]= [1,2,,1] + λ [-3,1,1], $\frac{(x-1)}{-3} = (y-2) = (z-1)$

(b) [x,y,z]= [1,-3,2] + λ [3,4,-2], $\frac{(x-1)}{3} = (y+3) = \frac{(z-2)}{-2}$

(c) [x,y,z]= [1,0,2] + λ [1,3,0], x – 1 = $\frac{y}{3} = z = 2$

16. Tentukanlah vektor arah, kemudian persamaan vektoris garis lurus perpotoongan bidang-bidang rata :

(a) x – 2y + z = 0, 3x + t + 2z + = 7

(b) 2x + 3y – 2 = 0, y – 3z + 4 = 0

(c) x + 2z – 6 = 0 , y = 4

Penyelesaian :

(a) [x,y,z] $= [2,1,0] + \lambda[-5,1,7]$

(b) [x,y,z] $= [7,-4,0] + \lambda[-9,6,2]$

(c) [x,y,z] $= [6,4,0] + \lambda[-2,0,1]$

17. Tentukan koordinat titik tembus :

(a) Garis lurus $(x-1)=\frac{(y+3)}{3}=\frac{(z-2)}{2}$ dan bidang rata $3x+4y+5z=5$

(b) Garis lurus x – y – z + 8 = 0. 5x + y +z + 10 = 0 dan bidang rata x + y + z – 2 = 0

(c) Garis lurus yang melalui (2,-3,1), (3,-4,-5) dan bidang rata 2x + y + z = 7

Penyelesaian

a. (1,3,-2)

b. (-3,3,2)

c. (1,-2,7)

18. Tentukanlah

(a) jarak titik tembus garis lurus $\frac{(x-2)}{3}=\frac{(y+1)}{4}=\frac{(z-2)}{12}$ dan bidang rata $(x-y+z=5)$ ke titik (-1,-5,-10)

(b) tentukan pajang potongan garis dari (3,-4,5) ke bidang 2x + 5y – 6z = 19 yang diukur sepanjang garis lurus dengan vektor arah [2,1,-2]

(c) carilah koordonat bayangan dari titik (1,3,4) pada bidang rata 2x – y + z + 3 = 0

Penyelesaian

(a) 13

(b) 9

(c) (-3,5,2)

19. Tentukanlah

(a) persamaan garis lurus melalui titik (-1,3,2) dan tegak lurus x + 2y + 2z = 3, tentukan pula titik tembus garis tersebut pada bidang rata.

(b) Tentukan koordinat titik tembus garis lurus yang ditarik dari titik asal. Tegak lurus bidang rata V = 2x + 3y – 6z + 49 = 0, pada V. Tentukan pula bayangan titik asalpada bidang rata V.

Penyelesaian

(a) (x + y) $=\frac{(y-3)}{2}=\frac{(z-2)}{2};\left(-\tfrac{5}{3},\tfrac{5}{3},\tfrac{2}{3}\right)$

(b) (-2,-3,6), (-4,-6,12)

20. Tunjukan bahwa kedua garis lurus berikut berpotongan, dan tentukan bidang yang memuat kedua garis tersebut. Serta titik potong kedua garis tersebut !

(a) $\frac{(x+4)}{3} = \frac{(y+6)}{5} = \frac{(z-1)}{2} = 0$ dan 3x – 2y + z + 5 = 0 = 2x + 3y + 4z – 4

(b) $\frac{(x-1)}{2} = \frac{(y+1)}{-3} = \frac{(z+10)}{8}$ dan (x – 4) $= \frac{(y+3)}{-4} = \frac{(z+1)}{7}$

(c) $\frac{(x+1)}{3} = \frac{(y+3)}{5} = \frac{(z+5)}{7}$ dan $(x-2) = \frac{(y-4)}{3} = \frac{(z-6)}{5}$

<u>Penyelesaian</u>

(a) 45x – 17y + 25z + 53 = 0. (2,4,-3)

(b) 11x – 6y – 5z – 67 = 0. (5,-7,6)

(c) X – 2y + z = 0. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

21. Tunjukan bahwa kedua garis lurus ini sejajar. Hitung jaraknya !

(a) x + 2y = 6, z – 2 = 0 dan z + 2y = 9, z = 0

(b) $\frac{(x-7)}{6} = \frac{y}{2} = z$ dan $\frac{(x+2)}{6} = \frac{(y-1)}{2} = z - 11$

<u>Penyelesaian :</u>

(a) $\sqrt{13}$

(b) $\sqrt{165}$

22. Tentukan persamaan bidang rata yang memuat garis-garis lurus

(a) $(x-4) = \frac{(y-3)}{-4} = \frac{(z-2)}{5}$ dan $(x-3) = \frac{(y+2)}{-4} = \frac{z}{5}$

(b) x = y = z dan (x – 3)= (y +1) = z

<u>Penyelesaian</u>

(a) 11x – y - 3z = 3

(b) X + 3y – 4z = 0

23. Tentukan jarak :

(a) Titik (4,-5,3) ke garis lurus $\frac{(x-3)}{3}=\frac{(y+3)}{-4}=\frac{(z-6)}{5}$

(b) Titik (5,4,-1) ke garis lurus $\frac{(x-8)}{2}=\frac{y}{9}=\frac{z}{5}$

Penyelesaian :

(a) 6

(b) $\sqrt{99}$

24. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui P dan memotong tegak lurus g bila :

(a) P(2,4,-1), $g:(x+5)=\frac{(y-3)}{4}=\frac{(z-6)}{-9}$

(b) $\mathrm{P}(-2,2,-3), g:(x-3)=\frac{(y+1)}{2}+\frac{(z-2)}{-4}$

(c) P(0,0,0), g : x + 2y + 3z + 4 = 0 = 2x + 3y + 4z + 5 = 0

Penyelesaian

(a) $\frac{(x-2)}{6}=\frac{(y-4)}{3}=\frac{(z+1)}{2}$

(b) $\frac{(x+2)}{6}=\frac{(y-2)}{1}=(z+3)$

(c) $\frac{x}{-2}=y=\frac{z}{4}$

25. Tentukan persamaan garis yang memotong $x+y+z-1=0=2x-y-z-2$ dan $x-y-z-3=0=2x+4y-z-4$ serta melalui titik (1,1,1). Carilah titik potongnya !

Penyelesaian x = 1, $y-1=\frac{(z-1)}{3}$, $(1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}),(1,0,-2)$

26. Tentukan persamaan garis lurus yang :

(a) Ditarik dari titik asal dan memotong garis-garis lurus 3x + 2y + 4z – 5 = 0

$2x-3y+4z+1$ dan $2x-4y+z+6=0=3x-4y+z-3$

(b) Melalui (1,0,-1) dan memotong garis lurus x = 2y = 2z serta $3x+4y+1.4x+5z=2$

Penyelesaian

(a) $13x-13y+4z=0=8x-12y+3z$

(b) $-\dfrac{(x-1)}{6}=y=\dfrac{(z+1)}{9}$

27. Sebuah garis, sejajar garis $(x-2)/7=y/4=-z$ dan memotong garis-garis $(x-1)/3=$ $(y-7)/-1=(z+2)$ serta $(x+3)/-3=(y-3)/2=(z-5)/4.$ tentukanlah titik-titik potong tersebut !

Penyelesaian : (7,5,0); (0,1,1)

28. Tentukan persamaan garis lurus yang sejajar $x/2=y/3=z/4$ dan memotong garis-garis lurus 9x + y + z + 4 = 0 = 5x + y + 3z serta x + 2y – 3z – 3 = 0 = 2x – 5y + 3z + 3 !

Penyelesaian : $(x+1)/2=y/3=z/4$

29. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (-4,3,1) sejajr x + 2y – z = 5 serta $-(x+1\_/3=(y-3)/2=-(z-3)$ tentukan pula tiik potongnya !

Penyelesaian

$(x+4)/3=-(y-3)=(z-1).(2,1,3)$

30. Tentukan persamaan garis lurus yang memotong tegak lurus garis

y – 2z = 0 , x – 2z = 3 dan terletak seluruhnya pada bidang x + 3y – z + 4 = 0

Penyelesaian:

$(x-1)/5=(y+2)/3=(z+1)/-4$

31. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (2,3,4) tegak lurus sumbu X dan memotong garis x = y = z !

Penyelesaian :

x = 2, 2y – z = 2

32. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik asal dan memotong garis lurus $(x-3)/2=(y-3)=z$ denga sudut 60^0 !

Penyelesaian :

$x = y/2 = -z = z/2$

33. Tentukan jarak dan persamaan garis hubung terpendik garis-garis lurus :

(a) $(x-3)/2=(y+14)/-7=(z-9)/5$ serta $(x+1)/2=(y-1)/1=(z-9)/-3$.

(b) $(x-3)/-1=(y-4)/2=(z+2)/1$ serta $(x-1)/1=(y+7)/3=)z+2)/2$

(c) 5x – y – z = 0. x – 2y + z – 3 = 0 serta 7x – 4y – 2z = 0. x – y + z – 3 = 0

Penyelesaian :

(a) $x = y = z.4\sqrt{3}$

(b) $(x-4)=(y-2)/3=-(z+3)/5.\sqrt{35}$

(c) $17x+20y-19z-39=0=8x+5y-31z+67.{}^{13}\!/\!_{x}75$

34. Tentukan persamaan garis lurus yang memotog dengan sudut yang sama garis-garis lurus $x = y = 4$ dan $y = 0, z = 4$ serta tegak lurus x = y = z.

Penyelesaian : $x-2=(y-8)/-2=z$.

35. Bagaimana perpotongan tiga bidang rata berikut ?

(a) $4x-5y-2z-2=0{,}5x-4y+2z+2=0{,}2x+2y+8z-1=0$

(b) $2x+3y-z-2=0{,}3x+3y+z-4=0, x-y+2z-5=0$

(c) $5x+3y+7z-2=0{,}3x+26y+2z-9=0{,}7x+2y+10z-5=0$

Penyelesaian :

(a) prisma

(b) titik (jaringan bidang)

(c) garis lurus (berkas bidang)

Soal-soal Tambahan

1. Tentukan volume dari bidang empat yang dibatasi bidang-bidang rata *lx* + *my* + *nz*= p, $lx + my + nz = 0$. nz + lx = 0

   Penyelesaian

   $2p\,{}^{3}\!/\!_{3}\,lmn$

2. Bidang-bidang rata dibuat sehingga sudutnya dengan garis lurus x = y = z adalah 60^{0} dan sudutnya dengan gars lurus $x = 0$ adalah 45^{0}. tujukan bahwa semua bidang-bidang rata itu memuat 60 ^{0}dengan bidang x = 0

3. Tentukan persamaan bidang rata yang melalui titik (0,1,1) dan (2,0,-1) serta garis lurus yang melalui titik (-1,2,-2) dan (3,-2,4). Tentukan pula jarak antara garis lurus dan bidang rata.

   Penyelesaian

   $6x + 10y + z - 11 = 0.9\sqrt{137}$

4. Tunjukan bahwa bayangan garis lurus x – 1 = -9 (y – 2) = -3(z + 3) pada bidang rata 3x – 3y + 10z = 16 adalah garis lurus

   Penyelesaian

   $(x-4)/9 = (y+1)/-1 = (z-7)/-3$

5. Tentukan persamaan garis lurus tyany melalui titik (3,1,2) memotong garis lurus $x + 4 = y + 1 = 2(z - 2$ dan sejajar bidang rata 4x + y + 5z = 0.

   Penyelesaian

   $(x-3)/-3 = (y-1)/2 =)z-2)/2$

6. Garis lurus $(x-7)/3 = (y+10)/3 = (z+14)/8$ adalah hipotenusa (sisi miring) sebuah segitiga siku-siku sama kaki yang titik sudutnya (7,2,4). Tentukan persamaan kedua sisi yang lain !

   penyelesaiaan

$(x-7)/3=(y-2)/6=(z-4)/2$ dan $(x-7)/2=(y-2)/-3=(z-4)/6$

7. Tentukan persamaan kedua garis lurus yang ditarik dari titik asal dan memotong garis lurus $(x-3)/2=(y-3)=z$ dengan sudut 60^0.

   Penyelesaian

   $x=\frac{1}{2}y=-z, x=-y=\frac{1}{2}z$

8. Tentukan garis lurus yang merupakan proyeksi tegak lurus garis garis lurus $3x-y+2z=1, x+2-z=2$ ke bidang $3x++2y+z=0$

   Penyelesaian :

   $-(x+1)/11=(y-1)/9=(z1)/15$

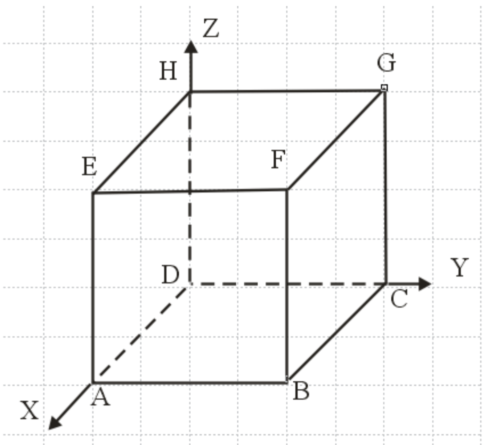
9. Tunjukan bahwa bidang-bidang rata 2x + 3y + 4z = 6 , 3x + 4y + 5z = 2, $x+2y+3z=2$ membentuk prisma, tentukanlah lusa dari perpanjangantegak lurusnya

   Penyelesaian :

   $=\frac{8}{3}\sqrt{6}$

10. Segitiga dengan titik sudut (5,-4,3), (4,-1,-2), dan (10,-5,2) diproyeksikan tegak lurus ke bidang x – y = 3 tentukan koordinatdari titi-titik sudut dan luas segitiga hasil proyksi tersebut!

Untuk soal-soal 11 sampai dengan 16, kubus ABCD-EFGH dengan rusuk = 4 di tempatkan di oktan seperti pada gambar



11. Tentukan persamaan garis lurus yang memotong tegak lurus garis-garis BD dan CF

    Penyelesaian :

    x + z = y = 4

12. Bila P titik tengah rusuk AE, tentukan persamaan garis lurus yang melalui P, memotong HF serta tegak lurus CF.

Penyelsaian :

$(x-4) = y/3 = (z-2)$

13. Tentukan persamaan garis lurus yang bersudut sama besar dengan rusuk-rusuk AB dan EH, tegak lurus AG serta memotong EH dan DC !

Penyelesaian :

$x = (y-2)/-1 = z/2.$

14. Tentukan persamaan garis lurus yang berjarak $\sqrt{3}$ dari bidang BDE serta memotong EH dan CG !

Penyelesaian :

$(x01)/1 = y/-4 = (z-4)/5; (x-7)/7 = y/-4 = (z-4)/11$

15. Tentukan persamaan garis sejajar AG. Memotong BE di P dan CF di Q. Buktikan bahwa PQ merupakan garis hubung antara BE dan CF !

Penyelesaian :

$2x + y + z - 12 = 0 = x + 2y - z - 8 = 0$

16. Tentukan pesamaan garis yang sejajar dengan bidang alas ABCD, memotong DE di P dan memotong BC di Q sedemikian hingga PQm = $2\sqrt{5}$

Penyelesaian :

P(3,0,3), Q(1,4,3) ; $PQ : (x-3) = y/-2; z = 3$ dan P(1,0,1)

Q(3,4,1); PQ(x – 1) $= y/2; z = 1$

BAB III
BOLA, SILINDER DAN KERUCUT

3.1 Tempat Kedudukan di dalam Ruang

Tempat kedudukan disingkat TK adalah himpunan titik-titik yang memnuhi syarat-syarat yang ditentukan. TK mungkin hampa (ϕ), satu titik berupa kurva (garis lengkung /lurus), berupa permukaan (surface/bidang) ataupun seluruh ruang itu sendiri. Dalam menghadapi masalah TK kita mempunyai cara-cara menyelesaikan sebagaiberikut :

1. Mengambil titik (x_0, y_0, z_0)sembarang pada TK, lalu mencari hubungan-hubungan yang diperoleh, variabel *x, y, z* dieliminasi sehingga didapat hubungan-hubungan antara x_0, y_0, z_0 saja. Dengan menghapus indek nol dari hubungan tersebut (dikatakan: mejalankan titik (x_0, y_0, z_0)): diperoleh TK yang dinyatakan.

   Contoh 29 :

   Tentukan TK titik-titik yang berjarak 4 dari bidang *XOY* serta jumlah kuadrat jaraknya ke (1,0,0) dan (-1,0,0) adalah tetap = 36

   <u>Penyelesaian :</u>

   Ambil *P* ke(x_0, y_0, z_0)TK. Karena berjarak 4 dari bidang *XOY* (bidang *z* = 0) maka :

   $z_0 = 4$ atau $z_0 = -4$ .... (1)

   kuadrat jaraknya *P* ke (1,0,0) adalah $(x_0 - 1)^2 + y_0^{\ 2} + z_0^{\ 2}$

   dan kuadrat jarak *P* ke (-1,0,0) adalah $(x_0 + 1)^2 + y_0^{\ 2} + z_0^{\ 2}$.

   Sehingga jumlah kuadrat jaraknya = $(x_0 - 1)^2 + y_0^{\ 2} + z_0^{\ 2} + (x_0 + 1)^2 + y_0^{\ 2} + z_0^{\ 2}$, diketahui jumlah kuadrat jaraknya = 36. Atau $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} + z_0^{\ 2} = 17$ .... (2)

   Dari kedua hubungan (1) dan (2) bebas dari variabel *x, y, z* sehinga dengan menghapus indeks nol, diperoleh TK : $\begin{cases} z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 17 \end{cases}$

   TK tersebut berbentuk sepasang lingkaran, Secara teori himpunan dapat kita tulis: TK= $\{(x, y, z) | z^2 = 16\}$ U $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 17\}$

2. Adanya / munculnya prameter. Dengan mengeliminasi parameter-parameter tersebut diperoleh TK yang dinyatakan . kalau terdapat (n + 1) hubungan n buah parameter maka TK merupakan permukaan . kalau (n + 2) hubungan dengan n buah parameter maka TK merupakan kurva

   Contoh 30 :

   Tentukan TK titik dengan vektor posisinya vekotr a yang yang mempunyai persamaan

   a = [x,y,z] = [1,t,t^2] diman t suatu parameter

   Penyelesaian :

   [x,y,z] = [1,t,t^2] dapat ditiulis menjadi x = 1, y = = t, z = t^2. terdapat tiga hubungan dengan sebuah parameter, TK merupakan kurva peleyapan parameter menghasilkan $\begin{cases} x = 1 \\ z = y^2 \end{cases}$

   TK tersebut berbentuk parabola .

Catatan:

Titik dapat diwakili oleh vektor posisi titik tersebut. Hal ini memungkin kita menggunakan vektor

3. Pengambilan titik sembarang (x_0, y_0, z_0) pada TK disamping parameter yang ada/ muncul. Peleyapan parameter dan menjalankan (x_0, y_0, z_0)tersebut menghasilkan TK yang dinyatakan

Contoh 31 :

Sebuah garis lurus digerakkan sejajar y = 0 dan selalu memotong kurva-kurva:

C_1: $\begin{cases} xy = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ dan C_2: $\begin{cases} y^2 = 8z \\ x = 0 \end{cases}$ tentukan TK-nya

Penyelesaian :

Ambil P(x_0, y_0, z_0) pada TK tersebut bila [a,b,c]merupakan arah garis diatas, diperoleh persamaan $x = x_0 + \lambda a, y = y_0 + \lambda b, z = z_0 + \lambda c$ .... (1)

λ suatu parameter, karena memotong C_1 dengan eliminasi (1) terdapat hubungan $(x_0 - az_0 / c).(y_0 - bz_0 / c) = 4$ .... (2)

Dan memotong C_2 diperoleh $(y_0 - bx_0 / a)^2 = 8(z_0 - cx_0 / a)$ .... (3)

Karena (1) sejajar dengan y = 0 berarti b = 0.

Eliminasi a, b, c dengan b = 0 dari (2) dan (3) menghasilkan $y_0{}^2(4 - x_0 z_0) = 32z_0$ dan menjalankan (x_0, y_0, z_0) diperoleh TK suatu permukaan dengan persamaan $y^2(4 - xy) = 32z$.

3.2 <u>Persamaan Bola</u>

Permukaan bola merupakan TK titik-titik ujung vektor didalam ruang yang titik awalnya tertentu dan panjang vektor tersebut konstan. Titik awal yang tertentu itu disebut titik pusat dan panjang yang konstan itu disebut jari-jari bola atau. Permukaan bola adalah TK titik-titik di dalam ruang yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu. Misalkan, pusat bola *M(a,b,c),* jari-jari = *r*.

Ambil titik $P(x_0, y_0, z_0)$ pada bolamaka *MP* = *QP* – *QM* = $[x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c]$ panjang *MP* diketahui = *r* , berarti : $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = r^2$.

Dengan menjalankan *P*. Diperoleh persamaan bola: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = r^2$

Sehingga bola yang pusatnya di (0,0,0), jari-jari *r* adalah : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Catatan:

Secara umum persamaan

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Menyatakan persamaan bola. Secara simbolis ditulis: bola *S* = 0.

Dalam hal ini pusat $\left(-\tfrac{1}{2}A, -\tfrac{1}{2}B, -\tfrac{1}{2}C\right)$ dan jari-jari $= \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 + \tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{4}C^2 - D}$

Contoh 32 :

Tentuka jari-jari

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 10y - 6z + 1 = 0$
2. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 2y + 4z + 3 = 0$

<u>Penyelesaian :</u>

1. *A* = 8, *B* = -10, *C* = -6, *D* = 1

   Pusat (-4,5,3), jari-jari $r = \sqrt{\tfrac{1}{4}(8)^2 + \tfrac{1}{4}(-10)^2 + \tfrac{1}{4}(-6)^2 - 1}$

$= 7$

2. Diubah dahulu menjadi $x^2 + y^2 + z^2 - x + y + 2z - 1\tfrac{1}{2}$

   Pusat $\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\right)$, jari-jari $= \sqrt{\tfrac{1}{4}(-1)^2 + \tfrac{1}{4}(1)^2 + \tfrac{1}{2}(2)^2 + 1\tfrac{1}{2} = 0}$

   Jadi bola tersebut merupakan titik $\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\right)$

Catatan :

Pada persamaan $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ terdapat tiga kemungkinan terhadap $\tfrac{1}{4}A^2 + \tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{4}C^2 - D$, yaitu

Bila $r > 0$: bola tersebut adalah bola sejati

Bila $r = 0$: bola berjari-jari nol (titik)

Bila $r < 0$: bola merupakan boal khayal

Contoh 33 :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 4z + 20 = 0$ merupakan bola khayal karena $\tfrac{1}{4}A^2 + \tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{4}C^2 - D = -14$

Catatan:

Persamaan $S = 0$ mengandung empat parameter *A*,*B*,*C* dan *D*. Karenanya bola akan tertentu bila diketahui melalui empat titik, yang tidak sebidang. Secara diterminan persamaan bola melalui empat titik.

$(x_1 y_1, z_1), (x_2 y_2, z_2), (x_3 y_3, z_3), (x_4 y_4, z_4)$ adalah:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2} & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2} & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^{\,2} + y_3^{\,2} + z_3^{\,2} & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^{\,2} + y_4^{\,2} + z^{\,2} & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Atau dapat juga menghilangkan *A*,*B*,*C* dan *D* dari sistem persamaan linier dengan empat persamaan

Contoh 34 :

Tentukan persamaan bola melalui 4 titik *P*(*a*,0,0). *Q*(0,*b*,0). R(0,0,*c*). Dan *O*(0,0,0)

<u>Penyelesaian :</u>

Dengan determinan

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a^2+0+0 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0+b^2+0 & 0 & b & 0 & 1 \\ 0+0+c^2 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0+0+0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ atau}$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z \\ a^2 & a & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & b & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \text{, kolom 1 dikurangi } c \text{ kali kolom 4}$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz & x & y & z \\ a^2 & a & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz & x & y \\ a^2 & a & 0 \\ b^2 & 0 & b \end{vmatrix} = 0$$

kolom 1 dikurangi b kali kolom 3

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz & x & y \\ a^2 & a & 0 \\ b^2 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz-by & x \\ a^2 & a \end{vmatrix}$$

Atau: $ax^2+ay^2+az^2-acz-aby-a^2x=0$. Dibagi $a \neq 0$

$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$, bola yang diminta.

Dengan permisalan: $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$

Melalui titik 0(0.0.0) :

$$0^2+0^2+0^2+A0+B0+C0+D=0 \rightarrow D=0$$

Melalui titik $P(a,0,0)$:

$$a^2+0^2+0^2+Aa+B0+C0+D=0 \rightarrow A=-a$$

Melalui titik $Q(0,b,0)$:

$$0^2 + b^2 + 0^2 + A0 + Bb + C0 + D = 0 \rightarrow B = -b$$

Melalui titik $R(0,0,c)$:

$$0^2 + 0^2 + c^2 + A0 + B0 + Cc + D = 0 \rightarrow C = -c$$

Jadi bola tersebut $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$

Catatan: Jelas dimengerti bila bola melalui titik awal (0,0,0) maka nilai $D = 0$.

3.2 Bola dan Bidang Rata

Bola $S = 0$ berjari-jari r, pusat M. bidang $P = 0$, dengan d = jarak pusat M ke bidang.

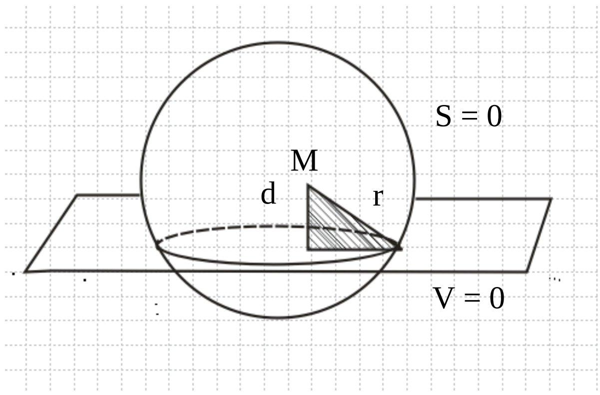
Hubungan bola dan bidang rata antara lain sebagai berikut :

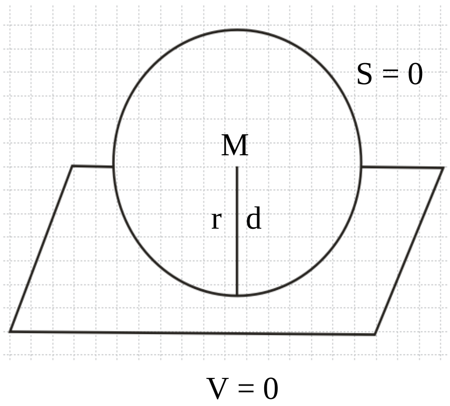
1. V memotong bola.

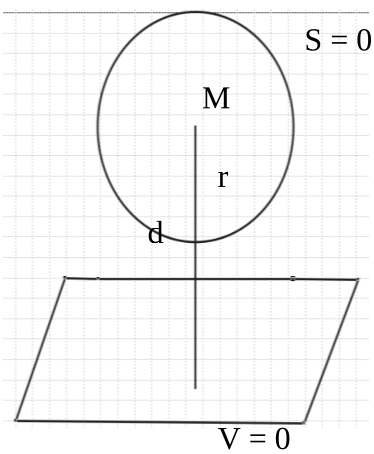
   Bila $d < r$: perpotongannya sebuah lingkaran

   Bila $d = r$: perpotongan sebuah titik (bidang menyinggung bola)

2. V tidak memotong bola bila $d > r$







Contoh 35 :

Bagaimana kedudukan bola $S = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z - 16 = 0$ dan bidang $x + 2y + 2z = 0$? Bila perpotongan, tentukan pusat dan jari-jari lingkaran perpotongannya!.

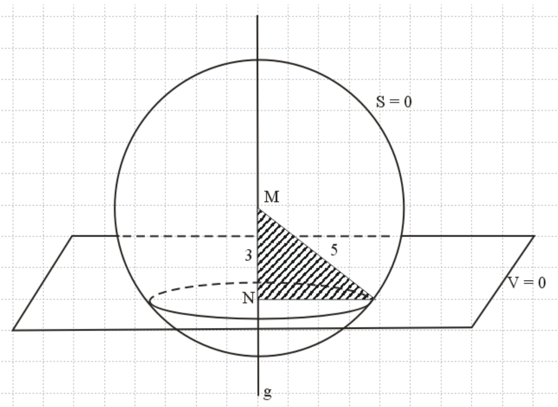
Penyelesaian : :

Jari-jari bola : $\sqrt{\frac{1}{4}(4)+\frac{1}{4}(16)+\frac{1}{4}(16)+16}=5$

Pusat M (-1,-2,-2)

d = jarak M ke nidang V = 0, yaitu :

$$d = \left|\frac{(1)(-1)+(2)(-2)+(2)(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\right| = 3$$



Ternyata $d < r$, jadi bidang memotong bola menurut sebuah lingkaran.

Jari-jari lingkara NP = $\sqrt{25-9}=4$ (Phitagoras)

Pusat lingkaran N adalah titik tembus garis g yang melalui M dan tegak lurus bidang V = 0.

Jadi arah garis = normal V = [1,2,2].

Persamaan garis $g : x = -1 + \lambda$, $y = -2 + 2\lambda$, $z = -2 + 2\lambda$ …………….(1)

Yang disubstitusikan ke $x + 2y + 2z = 0$ menghasilkan :

$(-1 + \lambda) + 2(-2 + 2\lambda) + 2(-2 + 2\lambda) = 0$ maka $\lambda = 1$, sehingga dar persamaan (1)

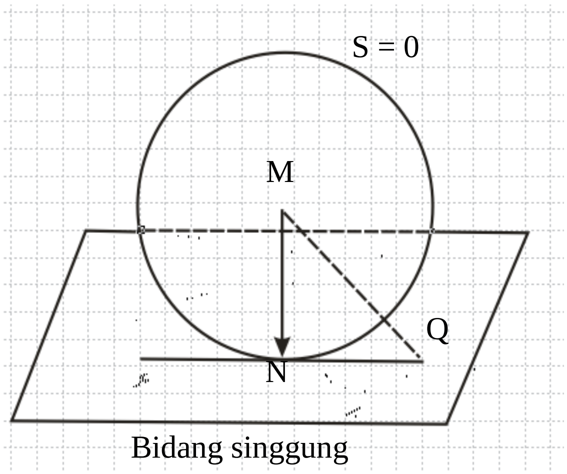
x = 0, y = 0, z = 0 atau (0,0,0) adalah pusat lingkaran yang diminta.

Catatan:

Bidang singgung di $N (x_1, y_1, z_1)$ pada bola.

Misalkan bola $S = x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$, pusat $M (-1/2A, -1/2B, -1/2C)$

Titik singgung $N (x_1, y_1, z_1)$



Karena $MN \perp$ bidang singgung (Q)

$MN \perp NQ$ maka $\overline{MN} \cdot \overline{NQ} = 0$

$\overline{MN} \cdot \left(\overline{MQ} - \overline{MN}\right) = 0$

$\overline{MN} \cdot \overline{MQ} - \overline{MN} \cdot \overline{MN} = 0$

$-r^2 = 0$

Jelas bahwa MN merupakan normal bidang singgung V, jadi persamaan V mudah dihitung sebagai berikut :

$MN = [x_1 + 1/2\ A, y_1 + 1/2\ B, z_1 + 1/2\ C]$, sehingga persamaan

$V_2 : (x_1 + 1/2/A\ (x - x_1) + (y_1 + 1/2\ B)\ (y - y_1) + (z_1 + 1/2\ C)\ (z - z_1) = 0,$

$x_1x + y_1y + z_1z + 1/2\ Ax + 1/2\ By + 1/2\ Cz - (+\ 1/2\ A_1 + 1/2\ B_1 + 1/2\ C_1) = 0,$ (*) tetapi (x_1, y_1, z_1) pada bola, berarti : $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$, sehingga (*) menjadi $x_1x + y_1y + z_1z + 1/2\ A\ (x + x_1) + 1/2\ B\ (y + y_1) + 1/2\ C\ (z + z_1) + D = 0$, merupakan bidang singgung yang ditanyakan.

Kalau bola $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, maka bidang singgungnya adalah $(x_1 - a)\ (x - a) + (y_1 - b)\ (y - b) + (z_1 - c)\ (z - c) = r^2$

Dan bila bola $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ maka bidang singgungnya adalah : $x_1x + y_1y + z_1z = r^2$.

Catatan:

Rumus bidang singgung di atas mengikuti kaidah "MEMBAGI ADIL" yaitu penggantian :

- x^2 menjadi x_1x, y^2 menjadi y_1y, z^2 menjadi z_1z.
- x menjadi 1/2 $(x + x_1)$, y menjadi 1/2 $(y + y_1)$, z menjadi 1/2 $(z + z_1)$
- xy menjadi 1/2 $(x_1y + xy_1)$

Contoh 36 :

Tentukan persamaan bidang singgung pada bola $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z = 0$ di titik (0,0,0) !

Penyelesaian : :

Titik (0,0,0) pada bola, jadi dapat dipakai kaidah membagi adil

$x_1x + y_1y + z_1z + (x + x_1) + 2\ (y + y_1) + 2\ (z + z_1) = 0$,, dimana $(x_1,y_1,z_1) = (0,0,0)$ berarti $x + 2y + 2z = 0$ adalah bidang singgung yang ditanyakan.

Catatan :

Persamaan Lingkaran di dalam Ruang

Untuk menyatakan persamaan lingkaran di dalam ruang. Kita dapat mengambil sebuah bidang rata dan sebuah bola yang saling berpotongan menurut lingkaran tersebut.

Jadi, persamaan lingkaran itu dinyatakan dengan dua persamaan :

Lingkaran $\begin{cases} V = 0 \\ S = 0 \end{cases}$

Contoh 37 :

Tentukan persamaan lingkaran L yang melalui tiga titik $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$ dan $R(0,0,c)$!.

Penyelesaian : :

Dibuat bidang yang melalui P, Q, dan R.

Misalkan $V \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

Melalui P $\longrightarrow$ $Aa + D = 0$ $\longrightarrow$ $A = -D/a$

Melalui Q $\longrightarrow$ $Bb + D = 0$ $\longrightarrow$ $B = -D/b$

Melalui R $\longrightarrow$ $Cc + D = 0$ $\longrightarrow$ $C = -D/c$

Jadi bidang $V \equiv -Dx/a - Dy/b - Dz/c + D = 0$, atau $x/a + y/b + z/c = 1$

Kemudian dibuat bola yang melalui P, Q, R dan satu titik tambahan sebarang (asalkan keempat titik tersebut tidak sebidang). Pada umumnya, diambil titik awal (0,0,0), yang pada contoh soal ini memungkinkan.

Persamaan bola yang dimaksud adalah $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$

Jadi lingkaran L : $\begin{cases} x/a + y/b + z/c = 1 \\ x2 + y2 + z2\ \ ax\ \ by\ \ cz = 0 \end{cases}$

Catatan:

Selain perpotongan bola dan bidang, suatu lingkaran juga dapat dinyatakan sebagai berikut :

- Perpotongan dua bola
- Perpotongan silinder atau kerucut lingkaran tegak lurus dengan bidang paralelnya (= bidang yang tegak lurus poros).

3.3 Kuasa Titik

Pandang bola $S\ (x,y,z) = 0$ dan titik $G\ (x_1,y_1,z_1)$ sebarang. Didefinisikan : kuasa titik G terhadap bola adalah nilai $k = S\ (x_1,y_1,z_1)$.

Contoh 38 :

Kuasa titik P (1,2,3) terhadap bola $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 2z - 8 = 0$ adalah :

$k = S\ (1,2,3) \equiv 1^2 + 2^2 + 3^2 - 6(1) + 8\ (2) - 2(3) - 8 = -10$ (titik P di luar bola S)

Catatan :

Sudah dipahami bahwa titik $G\ (x_1,y_1,z_1)$ terletak pada S (x,y,z) = 0. bila $S\ (x_1,y_1,z_1) = 0$ maka;

- Titik G di luar bola $\leftrightarrow$ k > 0
- Titik G pada bola $\leftrightarrow$ k = 0
- Titik G di dalam bola $\leftrightarrow$ k < 0

Arti Ilmu Ukur dan Kuasa Titik

Pandang bola $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$, dan G (x_1,y_1,z_1).

Tarik garis sembarang melalui G dengan cosinus arah $[\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$

Yaitu : $\begin{cases} x = x_1 + \lambda\cos\alpha \\ y = y_1 + \lambda\cos\beta \\ z = z_1 + \lambda\cos\gamma \end{cases}$ ……………………..(*)

Kita tentukan titik potong dengan bola. Subsitusikan (*) ke persamaan bola, diperoleh:

$(x_1 + \lambda\cos\beta)^2 + (y_1 + \lambda\cos\beta)^2 + (z_1 + \lambda\cos\beta)^2 + A(x_1 + \lambda\cos\alpha)^2 + B(y_1 + \lambda\cos\alpha)^2 +$

$C(z_1 + \lambda\cos\alpha)^2 + D = 0$,atau

$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\lambda + 2\lambda\{(x_1 + \tfrac{1}{2}A)\cos\alpha + (y_1 + \tfrac{1}{2}B)\cos\beta + (z_1 + \tfrac{1}{2}C)\cos\gamma\} +$

$(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ ….……… (**)

Yang merupakan persamaan kuadrat dalam λ .

Kalau $D > 0$ diperoleh dua harga λ yang berbeda (ada dua titik potong)

$D = 0$ diperoleh dua harga λ yang kembar (titik singgung)

$D < 0$ diperoleh dua harga λ yang rill (garis tidak memotong bola)

Misalkan diperoleh dua harga berlainan λ_1 dan λ_2 maka titik potong diperolah (dari(*)):

$P(x_1 + \lambda_1\cos\alpha, y_1 + \lambda_1\cos\beta, z_1 + \lambda_1\cos\gamma)$ dan Q

$(x_1 + \lambda_2\cos\alpha, y_1 + \lambda_2\cos\beta, z_1 + \lambda_{21}\cos\gamma)$

Jarak GP = $\sqrt{(x_1+\lambda_1\cos\alpha - x_1)^2(+y_1+\lambda_1\cos\beta - y_1)^2+(z_1+\lambda_1\cos\gamma - z_1)^2} = |\lambda_1|$

Maka perkalian $GP.GQ$ = $|\lambda_1|.|\lambda_2| = |(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+Ax_1+By_1+Cz_1+D|$

(dari persamaan (**) dengan sipat perkalian akar). Yang bebas dari $\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$.

Jadi $GP.QP$ = $|S(x_1,y_1,z_1)|$ = harga mutlak kuasa titik G terhadap bola $S(x,y,z) = 0$

Atau : Bila dari titik tertentu G diatri sembarang garis yang memotong bola di P dan Q maka harga GP. GQ adalah konstan. Kalau G diluar bola mak harganya = kuasa G, dan kalau G di dalam bola maka harga negatifnya = kuasa G.

Contoh 39 :

Tentukan koordinat titik potong garis $g:\left(\frac{x+3}{4}\right)=\left(\frac{y+4}{3}\right)=\left(\frac{8-z}{5}\right)$ dan

Bola $s: x^2+y^2+z^2-10x-10y-23=0$!

<u>Penyelesaian :</u> :

Cosinus arah dari $g:\frac{4}{\sqrt{50}},\frac{3}{\sqrt{50}},\frac{-5}{\sqrt{50}}$

Dan persamaan G dapat ditulis:

$$\begin{cases} x=-3+\dfrac{4\lambda}{\sqrt{50}} \\ y=-4+\dfrac{3\lambda}{\sqrt{50}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*) \\ z=8-\dfrac{5\lambda}{\sqrt{50}} \end{cases}$$

Bila disubsitusikan kepersamaan bola diperoleh :

$$\lambda^2-\frac{150}{\sqrt{50}}-100=0 \rightarrow \lambda_1=\frac{2}{\sqrt{50}}\ ,\ \lambda_2=\sqrt{50}$$

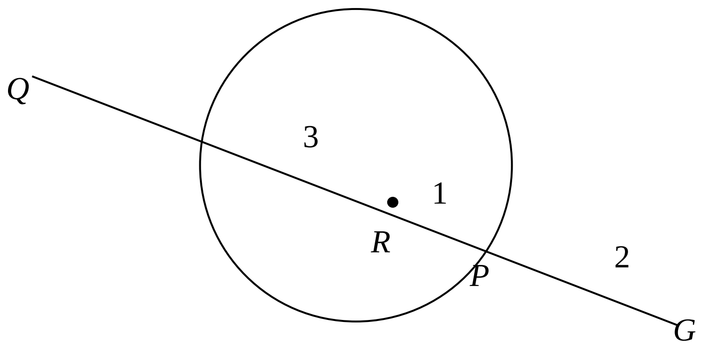
Jadi titik-titik potong (dari (*)) : (5,2, -20,9-1,-1,3)

Catatan .dapat juga dikerjakan tanpa dihitung cosinus arah, cukup dengan arah [4,3,-5] saja.

3.4 <u>Bidang Kutub</u>

Definisi Bidang Kutub

Pandang bola $S = 0$ dan titik O (x_1,y_1,z_1), tarik garis g melalui G yang memotong bola di P dan Q. titik R (x_0,y_0,z_0) pada garis g sedemikian sehingga P, Q sekawan harmonis dengan G, R. maka tempat kedudukan dari titik R apabila g bergerak merupakan suatu bidang rata yang disebut bidang kutub (bidang polar) bola $S = 0$ dengan kutub (titik Kutub) titik G.



Catatan :

P, Q sekawan harmonis dengan G, R artinya bila $GP : QP = \lambda : 1$,

maka $GQ : RQ = -\lambda : 1$

contoh (dari gambar) misalnya : $QR = 3$, $RP = 1$, $PG = 2$

berarti $GP : RP = 2 : 1$ dan $GQ : RQ = -2 : 1$

Jadi, P, Q sekawan harmonis dengan G, R

Persamaan Bidang Kutub

Persamaan bidang kutub. bola $S = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ dengan kutub $G\ (x_1,y_1,z_1)$. Ambil $R\ (x_0,y_0,z_0)$. Pada garis sembarang melalui g. titik yang membagi GR atas perbandingan λ : 1 berkoordinat : $\left(\frac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda z_0 + z_1}{\lambda+1}\right)$

Agar titik di atas terletak pada bola haruslah :

$$\left(\frac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda+1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda+1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda z_0 + z_1}{\lambda+1}\right)^2 - r^2 = 0$$

Atau

$$\lambda^2\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2\right) + 2\lambda\left(x_1x_0 + y_1y_0 + z_1z_0 - r^2\right) + \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2\right) = 0$$

…………………………….…(1)

Dengan akar-akar persamaan kuadrat λ_1 dan λ_2 menunjukkan perbandingan dimana titik P dan Q membagi GR. Agar pembagian tersebut sekawan harmonis berarti $\lambda_1 = -\lambda_2$ atau $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ sehingga dari persamaan (1), dengan sifat akar :

$x_1x_0 + y_1y_0 + z_1z_0 - r^2 = 0$, dan dengan menjalankan titik (x_0,y_0,z_0) diperoleh persamaan bidang kutub : $x_1x + y_1y + z_1z = r^2$.

Catatan:

Persamaan bidang kutub mengikuti pola kaidah membagi adil, dimana (x_1,y_1,z_1) menunjukkan titik kutubnya. Kalau titik kutub diluar bola, maka bidang kutub merupakan bidang yang memuat lingkaran yang berpotongan bola dengan kerucut selubung bola yang puncaknya di titik tersebut.

Contoh 40 :

1. Tentukan bidang kutub bola $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z - 16 = 0$ dengan titik kutub (6,4,-8) !

   Penyelesaian : ;

   Dengan kaidah membagi adil, bidang kutub :

   $x_1x + y_1y + z_1z - 3(x + x_1) + (y + y_1) + 2(z + z_1) - 16 = 0$, dimana $(x_1,y_1,z_1) = (6,4,-8)$, berarti diperoleh : $3x + 5y - 6z - 46 = 0$

2. Tentukan titik kutub dari bidang $3x - 4y + 5z = 2$ terhadap bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$!

   Penyelesaian : :

   Bidang kutub bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ adalah $x_1x + y_1y + z_1z = 4$. kita identikkan dengan $3x - 4y + 5z = 2$ atau $6x - 8y + 10z = 4$. jadi, titik-titik kutub

   (6, -8, 10)

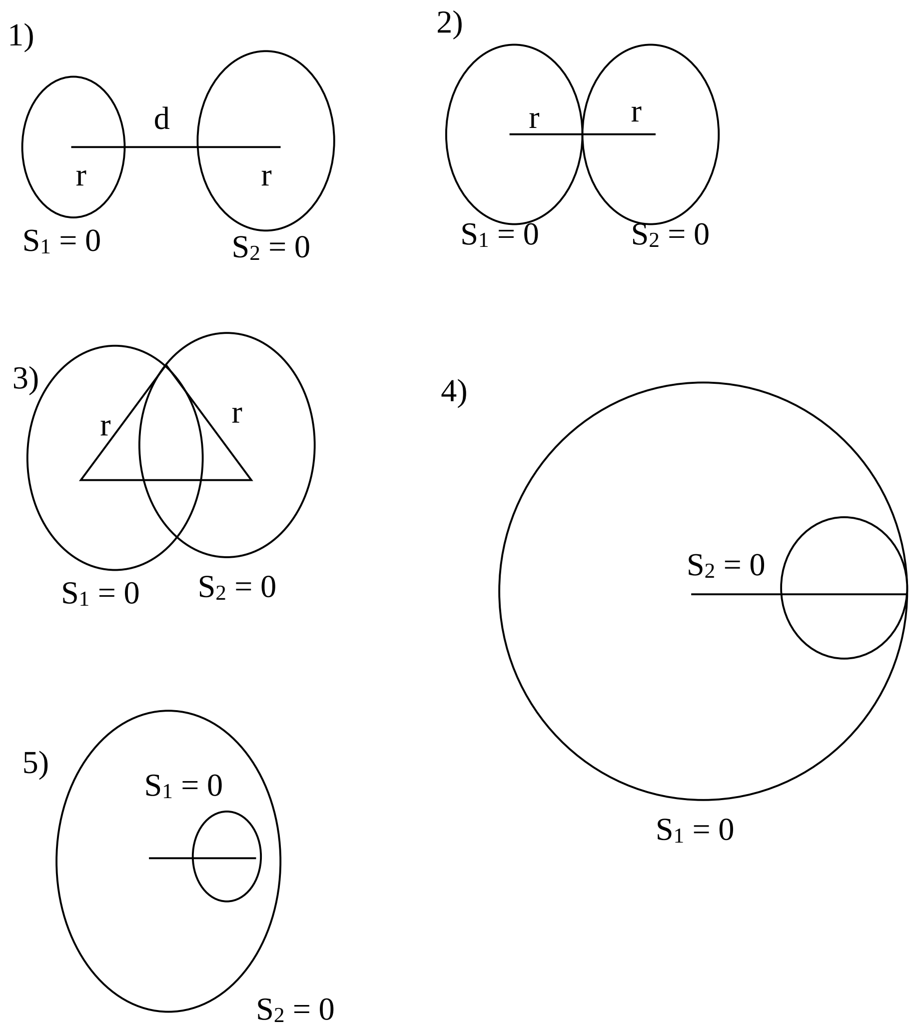
3.5 Kedudukan Dua Bola

Bola $S_1 = 0$, pusat M_1, jari-jari r_1

$S_2 = 0$, pusat M_2, jari-jari r_2

d = jarak pusat M_1M_2 (sentral)

1. Tidak berpotongan, bila $d > r_1 + r_2$
2. Bersinggungan luar, bila $d = r_1 + r_2$
3. Berpotongan, bila $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$
4. Bersinggungan dalam, bila $d = |r_1 - r_2|$
5. Bola yang satu di dalam bola yang lain, bila $d < |r_1 - r_2|$



Contoh 41:

Bagaimana kedudukan bola-bola ini :

a. $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 16$ dan $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 – 2x – 2y + z = 0$

b. $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2z – 3 = 0$ dan $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 6y – 4 = 0$

c. $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 4z = 0$ dan $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 – 4x – 2y – 4z = 0$

<u>Penyelesaian :</u> :

a. $S_1 = 0$, pusat M_1 (0,0,0), jari-jari $r_1 = 4$

   $S_2 = 0$, pusat M_2 (1,1, - 1/2), jari-jari $r_2 = 3/2$

   $d = M_1M_2 = 3/2$ $|r_1 – r_2| = 5/2$, $d < |r_1 – r_2|$.

   Jadi, bola $S_2 = 0$ berada di dalam bola $S_1 = 0$

b. $S_1 = 0$, pusat M_1 (-2,-1,-1), jari-jari $r_1 = 3$

   $S_2 = 0$, pusat M_2 (-6,-3,0), jari-jari $r_2 = 7$

$d = \sqrt{21}$ $|r_1 - r_2| = 4$. $r_1 + r_2 = 10$.

Ternyata $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$. Jadi, kedua bola berpotongan

c. $S_1 = 0$, pusat M_1 (-2,-1,-2), jari-jari $r_1 = 3$

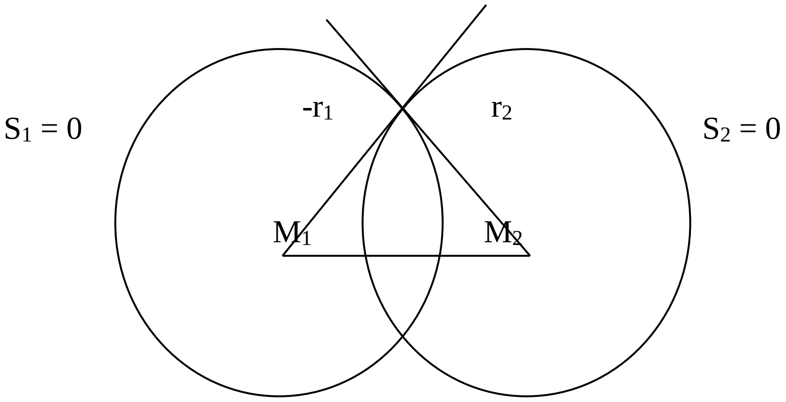
$S_2 = 0$, pusat M_2 (2,1,2), jari-jari $r_2 = 3$

$d = 6$, $|r_1 + r_2| = 6$.

Ternyata $d = 6$. Jadi, kedua bola bersinggungan luar

Catatan:

- Sudut perpotongan dua bola adalah sudut antara bidang-bidang singgung pada salah satu titik persekutuan dua bola. Atau sudut antara jari-jari yang mengarah ke titik tersebut.
- Dua bola berpotongan tegak lurus apabila sudut perpotongan 90°. dengan sifat-sifat sebagai berikut :



- $(M_1M_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$
- Kuasa M_1 terhadap $S_1 = 0$ besarnya r_1^2
- Kuasa M_2 terhadap $S_2 = 0$ besarnya r_2^2

Contoh 42 :

Tentukan persamaan bola yang melalui titik $T(3,2,2)$ serta memotong tegak lurus bola-bola

$S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 1 = 0$

$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 1 = 0$

$S_3 = x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 6y + 1 = 0$

<u>Penyelesaian :</u>

Misalkan persamaan bola yang diminta

$(x - a)^{-2} + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, pusat $M(a,b,c)$, jari-jari = r

Karena tegak lurus S_1, S_2, dan S_3 maka kuasa M terhadap tiga bola tersebut sama, yaitu = r^2

Kuasa M terhadap S_1 : $a^2 + b^2 + c^2 + 4a + 1$ ………………..(1)

terhadap $S_2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4a + 1$ ………………..(2)

terhadap $S_3 = a^2 + b^2 + c^2 + 3a - 6b + 1$ …………..(3)

dari (1) dan (2) diperolah $a = 0$

dari (1) dan (3) diperoleh $b = 0$

berarti M(0,0,c)

bola melalui T, berarti $(MT)^2 = r^2 = 9 + 4 + + (2 - c)^2 = 17 - 4c - c^2$ ………..(4)

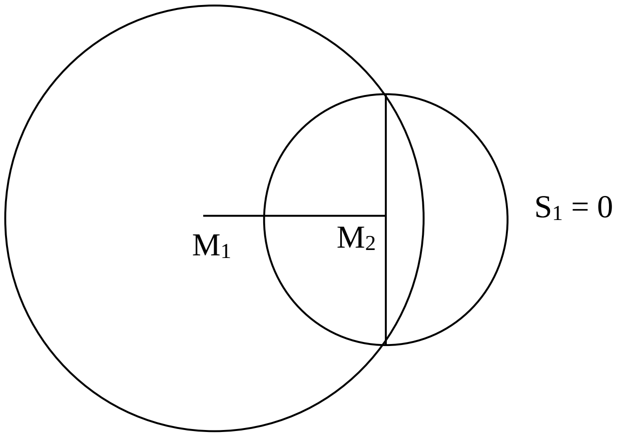
dari (1), kuasa M terhadap S_1 : $c^2 + 1 = r^2$ ……………(5)

dari (4) dan (5) : $c = 4$. kembalikan ke (5) $r^2 = 17$

jadi persamaan bola $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 17$

Catatan : Bola Membagi Dua Sama Besar Bola lain

$S_1 = 0$ dan $S_2 = 0$ berpotongan, dengan lingkaran perpotongan merupakan lingkaran besar (lingkaran yang pusat dan jari-jarinya sama dengan pusat dan jari-jari bola) bola S_2, maka dikatakan S_1 membagi dua S_2 sama besar



Sifat – sifat :

- $(M_1M_2)^2 = r_1^2 - r_2^2$
- Kuasa M_2 terhadap S_1 besarnya = $-r_1^2$ (karena M_2 terletak di dalam S_1)

Contoh 43 :

Tentukan persamaan bola yang melalui (1,-3,4), memotong tegak lurus $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 12z + 4 = 0$, membagi dua sama besar $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y - 4z + 14 = 0$. selain itu, diketahui bahwa kuasa titik (-4,-1,0) terhadap bola yang dinyatakan tersebut sama dengan 13 !

<u>Penyelesaian :</u> :

$S_1 = 0$, pusat M_1 (2,1,-6), jari-jari $r_1 = \sqrt{37}$

$S_2 = 0$, pusat M_2 (-1,-4,2), jari-jari $r_2 = \sqrt{7}$

Misalkan bola yang dinyatakan $S : x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

Melalui (1,-3,4) : $26 + A – 3B + 4C + D = 0$ ………………………………………..…..(1)

Kuasa (-4,-1,0) : $17 – 4A – B + D = 13$ (diketahui) atau $4 – 4A – B + D = 0$ …………. (2)

Bola S memotong S_1 tegak lurus berarti kuasa M_1 terhadap S adalah

$r_1^2 = 37 = 41 + 2A + B – 6C + D$ atau $4 + 2A + B – 6C + D = 0$ ……………………..(3)

bola S membagi dua sama besar S_2 berarti kuasa M_2 terhadap S adalah :

$-r_2^2 = - 7 = 21 – A – 4B + 2C + D$ atau $28 – A – 4B + 2C + D = 0$ ....…..(4)

Bila keempat persamaan (1), (2), (3) dan (4) diselesaikan, diperoleh $A = -2$, $B = 6$, $C = 0$ dan $D = - 6$.

Jadi persamaan bola yang diminta $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6 = 0$

3.6 <u>Bidang Kuasa, Sistem Bola</u>

Bidang kusa dari bola $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, dan $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ adalah tempat kedudukan titik-titik $K(x_o,y_o,z_o)$ yang kuasanya terhadap S_1 dan terhadap S_2 sama

Persamaan bidang kuasa:

Kuasa K terhadap $S_1 = 0$ adalah $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1$ dan terhadap $S_2 = 0$ adalah $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2$, yang sama, sehingga diperoleh:

$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2$ atau

$(A_1 – A_2)x_0 + (B_1 – B_2)y_0 + (C_1 – C_2)z_0 + (D_1 – D_2) = 0$, dengan menjalankan (x_o,y_o,z_o) diperoleh bidang kuasa $(A_1 – A_2)x + (B_1 – B_2)y + (C_1 – C_2)z + (D_1 – D_2) = 0$, atau secara simbolis: $S_1 – S_2 = 0$ atau $S_1 = S_2$.

Catatan:

Sifat-sifat bidang kuasa:

- ❖ Bidang kuasa tegak lurus sentral kedua bola
- ❖ Kalau kedua bola berpotongan, lingkaran perpotongannya terletak pada bidang kuasa
- ❖ Kalau kedua bola bersinggungan, bidang kuasa merupakan bidang singgung persekutuan di titik singgung
- ❖ Jika kedua bola sepusat, tetapi jari-jarinya tidak sama, maka bidang kuasanya tak ada (terletak di tak berhingga)

Contoh 44:

Diketahui:

$S_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 – 4z = 0$

$S_3 = x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0$

$S_4 = x^2 + y^2 + z^2 – 8z = 0$

Ditanya:

a) Bidang kuasa S_1 dan S_2

b) Garis kuasa S_1, S_2, dan S_3

c) Titik kuasa S_1, S_2, S_3, dan S_4

Penyelesaian:

a) Bidang kuasa S_1 dan S_2 : $S_1 = S_2 \rightarrow 4 = -4x \rightarrow x = -1$

b) Garis kuasa S_1, S_2, dan S_3 : $S_1 = S_2 = S_3 \rightarrow 4 = -4x = 4y \rightarrow x = -y = -1$

c) Titik kuasa S_1, S_2, S_3, dan S_4 : $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \rightarrow 4 = -4x = 4y = -8z \rightarrow$ diperoleh $x = -1$, $y = 1$, $z = -{}^{1}/_{2}$ atau $(-1, 1, -{}^{1}/_{2})$

Catatan:

Sistem bola satu sumbu (berkas bola) didefinisikan sebagai himpunan bola-bola yang (bila diambil dua dua) mempunyai satu bidang kuasa yang sama.

Bila $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ dua bola sebarang anggota berkas ($S_1 \neq S_2$), maka setiap anggota berkas berbentuk $S_1 + \lambda S_2 = 0$, λsebarang.

BAB IV
BIDANG KUADRATIS (KONIKOIDA)

4.1 Persamaan Konikoida

Secara umum suatu konikoida dinyatakan oleh persamaan $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ .... (*)

Secara matriks: $f(x,y,z) = v^TAv + 2b^Tv + c = 0$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [a_{44}] = 0$$

dengan v^TAv disebut bagian homogen kuadratis,

$2b^Tv$ disebut bagian linier, dan

c disebut konstanta dari konikoida

persamaan umum konikoida dapat ditransformasikan (melalui informasi koordinat) menjadi salah satu bentuk yang lebih sederhana (bentuk standar), sebagai berikut:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$: elipsoida
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$: elipsoida khayal
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$: hiperbola daun satu
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$: hiperbola daun dua
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$: kerucut khayal
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$: kerucut
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$: paraboloida eliptik
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$: paraboloida hiperbolik
9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: silinder eliptik
10. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: silinder hiperbolik
11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$: silinder khayal
12. $y^2 = 4ax$: silinder parabolik
13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$: sepasang bidang rata berpotongan
14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$: sepasang bidang rata khayal berpotongan
15. $y^2 = a^2$: sepasang bidang rata khayal berpotongan

16. $y^2 = -a^2$: sepasang bidang rata khayal sejajar

17. $y^2 = 0$: sepasang bidang rata berimpit

(a, b, dan c merupakan bilangan positif ≠ 0)

Catatan:

Elipsoida dan hiperboloida mempunyai satu titik pusat. Mereka disebut KONIKOIDA SENTRAL.

Konikoida sentral, secara umum mereka dapat ditulis $px^2 + qy^2 + r^2 = 1$

Syarat garis g: [x,y,z] = [x_1, y_1, z_1] + λ[a,b,c] menyinggung konikoida di P(x_1, y_1, z_1) pada konikoida:

$px_1a + qy_1b + rz_1c = 0$ (silahkan dibuktikan)

- Persamaan bidang singgung di P(x_1, y_1, z_1) pada konikoida:

  $px_1x + qy_1y + rz_1z = 1$ (memenuhi kaidah membagi adil)

- Syarat bidang rata Ax + By + Cz + D = 0 menyinggung konikoida:

  $\frac{A^2}{p} + \frac{B^2}{q} + \frac{C^2}{r} = D^2$ (silahkan untuk dibuktikan)

Contoh 46:

Periksa apakah 4x + 20y – 21z = 13 merupakan bidang singgung konikoida $4x^2 - 5y^2 + 7z^2 + 13 = 0$. Jika benar, tentukan titik singgungnya.

Penyelesaian:

Bidang 4x + 20y – 21z = 13, berarti A = 4, B = 20, C = – 21, D = – 13. Konikoida $4x^2 - 5y^2 + 7z^2 + 13 = 0 \rightarrow -\frac{4}{13}x^2 + \frac{5}{13}y^2 - \frac{7}{13}z^2 = 1$, berarti p = $-\frac{4}{13}$, q = $\frac{5}{13}$

Ternyata dipenuhi

$$\frac{A^2}{p} + \frac{B^2}{q} + \frac{C^2}{r} = 16\left(-\frac{13}{4}\right) + 400\left(\frac{13}{5}\right) + 441\left(-\frac{13}{7}\right) = 169 = D^2$$

Mencari titik singgung. Bidang singgung konikoida pada titik (x_1, y_1, z_1) adalah $4x_1x - 5y_1y + 7z_1z + 13 = 0$ yang diidentikkan dengan 4x + 20y – 21z – 13 = 0, berarti:

$4x_1 = -4 \rightarrow x_1 = -1$

$-5y_1 = -20 \rightarrow y_1 = 4$ atau (–1, 4, 3)

$7z_1 = 21 \rightarrow z_1 = 3$

Contoh 47:

Tentukan persamaan bidang singgung konikoida $-\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{7} + \frac{z^2}{21} = 1$ yang memalui garis lurus g:

$$\begin{cases} z = 3 \\ 7x - 6y + 9 = 0 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Bidang W melalui g, merupakan berkas 7x – 6y + 9 + λ(z – 3) = 0, atau

7x – 6y + λz + (9 – 3λ) = 0. Supaya menyinggung konikoida maka:

$49(-3) + 36(7) + \gamma^2(21) = (9 - 3\gamma)^2 \rightarrow \gamma_1 = -4, \gamma_2 = -\frac{1}{2}$

Jadi bidang singgung: $7x - 6y - 4z + 21 = 0$ serta $7x - 6y - \frac{1}{2}z + 10\frac{1}{2} = 0$

4.2 Kerucut Kuadratis, Kerucut Arah

Pandang konikoida $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ .... (1)

- ❖ Kalau (1) dapat diuraikan menjadi 2 faktor linier $(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)(\lambda x + \mu y + \varepsilon z + \pi) = 0$, maka (1) berbentuk sepasang bidang rata.
- ❖ Kalau pada (1), bagian linier serta konstanta, yaitu a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}, semua = 0, maka (1) berbentuk *kerucut* dengan puncak titik awal (0,0,0).
- ❖ Kalau [a,b,c] arah dari suatu garis pelukis kerucut $k(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$ .... (2)

  Berarti titik (λa, λb, λc) terletak pada (2) sehingga terpenuhi:

  $a_{11}a^2 + a_{22}b^2 + a_{33}c^2 + 2a_{12}ab + 2a_{13}ac + 2a_{23}bc = 0$ .... (3)
- ❖ Kalau kerucut (2) di atas melalui ketiga sumbu-sumbu koordinat, artinya [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1] merupakan arah pelukis kerucut, maka kerucut akan berbentuk:

  $a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz = 0$ .... (4)

Contoh 48:

Tentukan persamaan kerucut kuadratis yang melalui ketiga sumbu koordinat serta garis-garis $x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ serta $\frac{x}{3} = -y = z$.

Penyelesaian:

Karena melalui ketiga sumbu koordinat, maka kerucut secara sederhana berbentuk $a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz = 0$ ....(*)

Arah garis pelukis yang lain [1, –2, 3] dan [3, –1,1], sehingga menurut (3): $-2a_{12} + 3a_{13} - 6a_{23} = 0$ dan $-3a_{12} + 3a_{13} - a_{23} = 0$ yang bila dihitung, diperoleh $a_{12} = 5a_{23}$, $a_{13} = \frac{16}{3}a_{23}$. Sehingga kerucut yang ditanyakan: $15xy + 16xz + 3yz = 0$.

Catatan:

Syarat agar konikoida (1), f(x,y,z) = 0 berbentuk kerucut:

Determinan = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$

dan $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

Puncaknya $T(x_1, y_1, z_1)$ dihitung dari rumus: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$

<u>Catatan: Kerucut Arah</u>

Persamaan konikoida (1) di dalam koordinat homogen adalah:

$f(x,y,z,w) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{23}yz + 2a_{14}xw + 2a_{24}yw + 2a_{34}zw + a_{44}w^2 = 0$ .... (5)

Titik di tak berhingga dari konikoida, diperoleh dengan mengambil $w = 0$ pada (5). Jadi $k(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{23}yz = 0$ merupakan suatu kerucut yang puncaknya (0,0,0) dan memotong konikoida (1) di tak berhingga.

Definisi:

Kerucut di atas disebut *kerucut arah* konikoida (1).

Jadi, kerucut arah suatu konikoida dapat diperoleh dengan menghapus bagian linier serta konstanta dari konikoida.

Catatan:

Untuk menyelidiki KA dari konikoida (1), apakah nyata atau khayal, ataukah berubah corak menjadi sepasang bidang rata nyata/khayal, maka KA tersebut diiris dengan bidang rata yang tidak melalui puncak KA, misalnya diiris dengan bidang $z = 1$. Lalu irisan kerucut tersebut diselidiki, kalau khayal berarti KA khayal, kalau nyata berarti KA nyata, kalau berubah corak menjadi sepasang garis lurus berarti KA berubah corak menjadi sepasang bidang rata. Untuk itu diberikan rangkuman jenis-jenis irisan kerucut sebagai berikut:

Irisan kerucut:

$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ bila $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$, $S = a_{11} + a_{22}$

Maka:

1) $H \neq 0$, irisan kerucut sejati
   (1) $D > 0$, $S/H < 0$: elips nyata
   (2) $D > 0$, $S/H > 0$: elips khayal
   (3) $D < 0$: hiperbola (selalu nyata)
   (4) $D = 0$: parabola (selalu nyata)
2) $H = 0$ berubah corak menjadi sepasang garis lurus
   (1) $D > 0$: sepasang garis khayal
   (2) $D < 0$: sepasang garis nyata berpotongan
   (3) $D = 0$: sepasang garis sejajar atau berimpit
      - Sejajar bila $F = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$
      - Berimpit bila $F = 0$

Catatan:

Kita dapat menggolongkan konikoida menurut KA-nya sebagai berikut:

1. KA nyata dan tidak berubah corak, konikoida salah satu dari hiperboloida daun satu atau daun dua atau kerucut nyata.
2. KA khayal dan tidak berubah corak, konikoida salah satu dari elipsoida atau kerucut khayal.
3. KA berubah corak menjadi sepasang bidang rata nyata berpotongan, konikoida salah satu dari paraboloida hiperbolik atau silinder ataupun sepasang bidang rata nyata berpotongan.
4. KA berubah corak menjadi sepasang bidang rata khayal, konikoida merupakan paraboloida eliptik atau silinder eliptik ataupun sepasang bidang rata khayal (yang berpotongan menurut sebuah garis lurus nyata).
5. KA berubah corak menjadi sepasang bidang rata berimpit, konikoida merupakan silinder parabolik atau sepasang bidang rata sejajar atau berimpit.

Penyelidikan KA ini belum menghasilkan secara pasti jenis konikoida tersebut. Harus ditambah dengan sifat-sifat konikoida yang lain seperti pusat, sifat bidang atur, dan lain-lain.

Contoh 49:

Berikan kemungkinan jenis konikoida yang kerucut arahnya $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 2yz = 0$

Penyelesaian:

Kita iris dengan bidang z = 1, irisannya: $z = 1$, $3x^2 + 2y^2 + 2xy + 4x + 3 = 0$, kita selidiki:

D = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0$

H = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$

S = 3 + 2 = 5, S/H > 0, suatu elips khayal. Jadi, KA tersebut khayal, tidak berubah corak. Konikoida tersebut salah satu elipsoida atau kerucut khayal.

Catatan:

Kita dapat menggolongkan konikoida menurut pusatnya, dengan menyelidiki rank matriks.

$$[A, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

1) Bila rank matriks A = rank matriks [A, b] = 3. Diperoleh satu titik pusat. Hal mana terdapat para:
   - ❖ Elipsoida (nyata/khayal)
   - ❖ Hiperboloida daun satu
   - ❖ Hiperboloida daun dua

Pada ketiga konikoida di atas, titik pusat tidak terletak pada permukaan konikoida, dengan kata lain $f(x_1, y_1, z_1) \neq 0$

- ❖ Kerucut (nyata/khayal). Titik pusatnya terletak pada permukaan; $f(x_1, y_1, z_1) = 0$

2) Bila rank A = 2 sedangkan rank [A, b] = 3. Tidak diperoleh titik pusat (titik pusat di tak terhingga). Hal mana terdapat pada paraboloida eliptik dan paraboloida hiperbolik.

3) Bila rank A = rank [A, b] = 2. Diperoleh TK titik pusat berupa garis lurus. Hal mana terdapat pada:

- ❖ Silinder eliptik (nyata/khayal)
- ❖ Silinder hiperbolik
- ❖ Sepasang bidang rata berpotongan (nyata/khayal)

4) Bila rank A = 1 ≠ rank [A, b]. Diperoleh TK titik pusat berupa garis lurus di tak berhingga. Terdapat pada silinder parabolik.

5) Bila rank A = rank [A, b] = 1. Diperoleh TK titik pusat berupa bidang rata. Hal mana terdapat pada sepasang bidang rata sejajar atau berimpit (nyata/khayal).

4.3 Penyelidikan Konikoida

Untuk menyelidiki konikoida $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0$ ....1)

dapat dilakukan sebagai berikut:

1. Golongan lebih dahulu berdasarkan keadaan titik pusatnya, salah satu dari 5 golongan, (A), (B), (C), (D), atau (E) di atas.

2. Bila termasuk (C) atau (E), lakukan pengirisan dengan salah satu bidang koordinat (yang tidak sejajar dengan garis/bidang TK titik pusat):

   a. Pada golongan (E): bila irisannya sepasang garis lurus sejajar, maka konikoida adalah sepasang bidang rata sejajar; bila irisannya sepasang garis lurus berimpit, maka konikoida adalah sepasang bidang rata berimpit.

   b. Pada golongan (C): bila irisannya elips maka konikoida adalah silinder eliptik (kalau elips khayal, maka silinder eliptik tersebut khayal). Bila irisannya hiperbola, maka konikoida adalah silinder hiperbolik. Bila irisannya berubah corak menjadi sepasang garis lurus berpotongan (nyata/khayal), maka konikoida merupakan sepasang bidang rata berpotongan (nyata/khayal).

3. Golongan (D) hanya satu jenis: silinder parabolik

4. Golongan (B), kemungkinannya paraboloida eliptik atau paraboloida hiperbolik. Untuk membedakannya kita selidiki kerucut arahnya. Bila kerucut arah (yang berubah corak menjadi

sepasang bidang rata berpotongan) nyata maka konikoida adalah paraboloida hiperbolik. Dalam hal lain merupakan paraboloida eliptik.

5. Pada golongan (A), bila pusatnya terletak pada konikoida ia merupakan kerucut. Bila tidak demikian, maka diselidiki kerucut arahnya. Kalau khayal maka konikoida adalah elipsoida. Kalau nyata, maka salah satu, giperboloida daun satu atau daun dua. Untuk membedakan, kita gunakan sifat bidang atur dari hiperboloida daun satu. Caranya sebagai berikut: pilih sebarang titik pada hiperboloida. Buat bidang singgung di titik tersebut. Tentukan proyeksi garis potong hiperboloida dan bidang singgung tersebut, pada salah satu bidang koordinat (yang tidak tegak lurus bidang singgung). Bila proyeksi tersebut nyata maka hiperboloida itu adalah hiperboloida daun satu. Bila proyeksinya khayal, maka hiperboloida daun dua.

Contoh 50:

Selidiki jenis konikoida $x^2 - 2xy + 2xz - 4yz - 2y + 2z = 0$

Penyelesaian:

Matriks $[A, b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} H_{31}^{(-2)}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} H_{32}^{(-1)}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rank A = 2, rank [A, b] = 3

Tidak ada titik pusat. Termasuk golongan (B), paraboloida. Untuk membedakan apakah paraboloida eliptik atau hiperbolik, diselidiki kerucut arahnya (yang berubah corak).

KA: $x^2 - 2xy + 2xz - 4yz = 0$. Iris dengan bidang $z = 1 \rightarrow z = 1$

$x^2 - 2xy + 2x - 4y = 0$, kita selidiki irisannya:

$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, nyata.

Jadi, karena KA nyata maka konikoida tersebut berbentuk paraboloida hiperbolik.

Soal-Soal Latihan

1. Tentukan persamaan bidang singgung konikoida $7x^2 - 3y^2 - z^2 + 21 = 0$ yang melalui garis $7x - 6y + 9 = 0$, $z = 3$

   Jawab:

$7x - 6y - 4z + 21 = 0$ serta $7x - 6y - \frac{1}{2}z + 10\frac{1}{2} = 0$

2. Tentukan persamaan bidang singgung konikoida $4x^2 - 5y^2 + 7x^2 + 13 = 0$ yang sejajar bidang $4x + 20y - 21z = 0$.

   Jawab:

   $4x + 20y - 21z = \pm 13$

3. Tentukan persamaan bidang-bidang yang melalui garis $7x + 10y - 30 = 0$, $5y - 3z = 0$ dan menyinggung elipsoida $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$.

   Jawab:

   $7x + 5y + 3z - 30 = 0$ serta $14x + 5y + 9z - 60 = 0$

4. Suatu titik P bergerak sedemikian sehingga kerucut selubung elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dengan P sebagai puncaknya, diiris oleh bidang z = 0 menurut sebuah lingkaran. Buktikan bahwa TK dari P adalah irisan kerucut $x = 0$, $\frac{y^2}{(b^2-a^2)} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ atau $y = 0$, $\frac{x^2}{(a^2-b^2)} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

5. Selidiki konikoida berikut:

   a. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2z + 1 = 0$ (2 bidang khayal)

   b. $2z^2 + xz - yz - 2z + 2y = 0$ (silinder hiperbolik)

   c. $(x - y)(2x + 3y) = z$ (paraboloida hiperbolik)

   d. $xy + xz + yz = 1$ (hiperboloida daun dua)

   e. $yz = x$ (kerucut nyata)

   f. $3x^2 - 2y^2 - z^2 + 2y + 2xz - 3yz - 6x - y - 2z + 3 = 0$ (bidang rata nyata yang berpotongan)

   g. $4x - y - z + 2yz - 8x - 4y + 8z - 2 = 0$ (paraboloida eliptik)

DAFTAR PUSTAKA

Kletenic, D., *Problems in Analytic Geometry,* Moscow: Peace Publisher, t.th.

Moeharti, Hadiwidjojo. 1989. *Vektor dan Transformasi dalam Geometri.* Yogyakarta: FMIPA IKIP Yogyakarta.

___________________. 1994. *Ilmu Ukur Analitik Bidang Bagian III,* Yogyakarta: FMIPA IKIP Yogyakarta.

Purcell, Edwin J (Penterjemah: Rawuh, Bana Kartasasmita). 1984. *Kalkulus Dan Geometri Analitis Jilid II.* Jakarta: Erlangga.

Suryadi H.S., D. 1984. *Serial Matematika dan Komputer Aski: Teori dan Soal Ilmu Ukur Analitik Ruang.* Jakarta: Ghalia Indonesia

Thomas, George B., JR., 1963. *Calculus and Analytic Geometry.* Tokyo: Jakarta Publications Trading Company, Ltd.