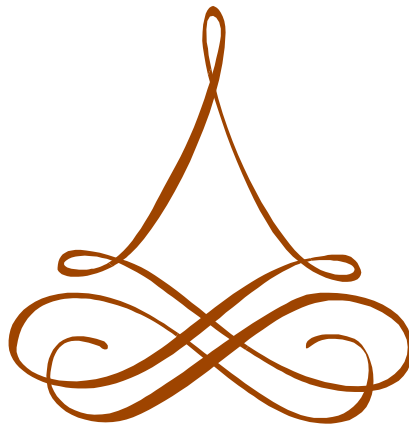


Buku Ajar Aljabar Linear



Oleh
Yuliant Sibaroni S.Si

**PROGRAM PERKULIAHAN DASAR UMUM
SEKOLAH TINGGI TEKNOLOGI TELKOM
BANDUNG
2002**

Kata Pengantar

Dengan mengucapkan syukur alhamdulillah ,akhirnya buku ajar aljabar linear dapat diselesaikan. Buku ajar ini merupakan catatan kuliah dari penulis selama penulis memberikan perkuliaan aljabar linear di STT Telkom . Pembuatan buku ajar ini dimaksudkan untuk membantu mahasiswa STT Telkom dalam memahami perkuliahan aljabar linear maupun kuliah- kuliah lain yang menggunakan aljabar linear sebagai dasarnya .

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan buku ajar ini masih banyak kekurangan yang terjadi . Untuk itu adanya saran dan kritik dari pembaca sangat diperlukan penulis untuk perbaikan diktat ini dimasa mendatang. Penulis juga mengucapkan terima kasih terhadap semua pihak yang telah membantu dalam pembuatan buku ajar ini.

Bandung , Agustus 2002

Penulis

DAFTAR ISI

1.	Matriks dan Operasi – Operasinya	01
I.1	Pendahuluan	01
	I.2 Jenis – jenis matriks	01
	04
I.3	Operasi – operasi matriks	
I.4	Matriks Invers	06
2.	Sistem Persamaan Linear	06
	07
	II.1 Pendahuluan	10
	12
	15
	II.2 Operasi baris elementer	15
	II.3 Sistem persamaan linear Homogen	16
	II.4 Menentukan invers matriks	18
3.	Determinan matriks	19
	22
	III.1 Pendahuluan	22
	22
	III.2 Metode perhitungan determinan	23
	25
	III.3 Menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dengan metode Crammer	27
	III.4 Hubungan determinan, invers matriks dan penyelesaian untuk sistem persamaan linier	31
4.	Vektor– Vektor di bidang dan di ruang	32
	33
	IV.1 Pendahuluan	34
	37
	IV.2 Operasi – operasi pada vektor	38
	39
	IV.3 Hasil kali titik , panjang vektor dan jarak antara dua vektor	
	IV.4 Proyeksi orthogonal	
	IV.5 Perkalian silang vektor	

5. Ruang – Ruang Vektor

V.1 Ruang – n Euclides

V.2 Ruang vektor umum

V.3 Sub–ruang vektor

V.4 Membangun dan bebas linier

V.5 Basis dan Dimensi

V.6 Basis ruang baris dan basis ruang kolom

V.7 Basis ruang solusi

6. Ruang Hasil Kali Dalam 44

VI.1 Hasil kali dalam 44

VI.2 Panjang vektor , jarak antar vektor , dan besar sudut dalam RHD ... 45

VI.3 Basis orthonormal 46

VI.4 Perubahan Basis 50

7. Ruang Eigen 63

VII.1 Nilai Eigen suatu matriks 64

VII.2	Diagonalisasi
VII.3	Diagonalisasi orthogonal
8.	Transformasi Linear

VIII.1 Pendahuluan

.....

VIII.2 Kernel (inti) dan Jangkauan

.....

VIII.3 Matriks transformasi

.....

Daftar Pustaka

1. Anton , H .(1991) *Elementary Linear Algebra* .John Wiley and Sons
2. Leon , S.J.(2001) . *Aljabar Linear Dan Aplikasinya edisi 5* . Penerbit Erlangga
3. Mursita D. (2000). *Diktat Kuliah Aljabar Linear Elementer*. STT Telkom

BAB I Matriks dan Operasi – Operasinya

I.1 Pendahuluan

Definisi :

Matriks adalah susunan segi empat siku – siku dari bilangan yang dibatasi dengan tanda kurung.

Suatu matriks tersusun atas baris dan kolom, jika matriks tersusun atas m baris dan n kolom maka dikatakan matriks tersebut berukuran (berordo) $m \times n$. Penulisan matriks biasanya menggunakan huruf besar A, B, C dan seterusnya, sedangkan penulisan matriks beserta ukurannya (matriks dengan m baris dan n kolom) adalah $A_{m \times n}, B_{m \times n}$ dan seterusnya.

Bentuk umum

Bentuk umum dari $A_{m \times n}$ adalah :

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a_{ij} disebut elemen dari A yang terletak pada baris i dan kolom j .

I.2 Jenis – jenis matriks

Ada beberapa jenis matriks yang perlu diketahui dan sering digunakan pada pembahasan selanjutnya, yaitu :

a. Matriks Bujur sangkar

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya. Karena sifatnya yang demikian ini, dalam matriks bujur sangkar dikenal istilah *elemen diagonal* yang berjumlah n untuk matriks bujur sangkar yang berukuran $n \times n$, yaitu : $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Contoh 1.2.1

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dengan elemen diagonal } a_{11} \text{ dan } a_{22}$$

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ dengan elemen diagonal } a_{11}, a_{22} \text{ dan } a_{33}$$

b. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks yang elemen bukan diagonalnya bernilai nol. Dalam hal ini tidak disyaratkan bahwa elemen diagonal harus tak nol.

Contoh 1.2.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Matriks Nol

Matriks Nol merupakan matriks yang semua elemennya bernilai nol.

d. Matriks Segitiga

Matriks segitiga adalah matriks bujur sangkar yang elemen – elemen dibawah atau diatas elemen diagonal bernilai nol. Jika yang bernilai nol adalah elemen – elemen dibawah elemen diagonal maka disebut *matriks segitiga atas* , sebaliknya disebut *matriks segitiga bawah*. Dalam hal ini, juga tidak disyaratkan bahwa elemen diagonal harus bernilai tak nol.

Contoh 1.2.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah matriks segitiga bawah, matriks B adalah matriks segitiga atas sedangkan matriks C merupakan matriks segitiga bawah dan juga matriks segitiga atas.

e. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang elemen diagonalnya bernilai 1

f. Matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris tereduksi jika memenuhi syarat– syarat berikut :

1. Untuk semua baris yang elemen – elemennya tak–nol , maka bilangan pertama pada baris tersebut haruslah = 1 (disebut satu utama).
2. Untuk sembarang dua baris yang berurutan, maka satu utama yang terletak pada baris yang lebih bawah harus terletak lebih ke kanan daripada satu utama pada baris yang lebih atas.
3. Jika suatu baris semua elemennya adalah nol, maka baris tersebut diletakkan pada bagian bawah matriks.
4. Kolom yang memiliki satu utama harus memiliki elemen nol ditempat lainnya.

Contoh 1.2.4

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A , B dan C adalah matriks – matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi dan notasi $\textcircled{1}$ menyatakan satu utamanya. Contoh berikut menyatakan matriks – matriks yang **bukan** dalam bentuk eselon baris tereduksi.

Contoh 1.2.5

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks D bukan dalam bentuk eselon baris tereduksi karena elemen d_{12} bernilai 1 sehingga tidak memenuhi syarat ke – 4 (harusnya = 0), sedangkan matriks E tidak memenuhi karena baris kedua yang merupakan baris nol letaknya mendahului baris ketiga yang merupakan baris tak nol, sehingga syarat ketiga tidak terpenuhi.

Jika suatu matriks hanya memenuhi syarat 1–3 saja, maka dikatakan matriks tersebut memiliki bentuk eselon baris.

I.3 Operasi – operasi matriks

a. Penjumlahan matriks

Operasi penjumlahan dapat dilakukan pada dua buah matriks yang memiliki ukuran yang sama.

Aturan penjumlahan

Dengan menjumlahkan elemen – elemen yang bersesuaian pada kedua matriks

Contoh:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

b. Perkalian matriks dengan matriks

Operasi perkalian matriks dapat dilakukan pada dua buah matriks (A dan B) jika jumlah kolom matriks A = jumlah baris matriks B.

Aturan perkalian

Misalkan A_{mn} dan B_{nk} maka $A_{mn} B_{nk} = C_{mk}$ dimana elemen – elemen dari C(c_{ij}) merupakan penjumlahan dari perkalian elemen–elemen A baris i dengan elemen–elemen B kolom j

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} k & n \\ l & o \\ m & p \end{bmatrix} \text{ maka } A_{23} B_{32} = C_{22} = \begin{bmatrix} ak+bl+cm & an+bo+cp \\ dk+el+fm & dn+eo+fp \end{bmatrix}$$

c. Perkalian matriks dengan skalar

Suatu matriks dapat dikalikan suatu skalar k dengan aturan tiap –tiap elemen pada A dikalikan dengan k.

Contoh 1.3.1

$$3 \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \end{bmatrix}$$

d. Transpose matriks

Transpose matriks A (dinotasikan A^t) didefinisikan sebagai matriks yang baris – barisnya merupakan kolom dari A.

$$\text{Contoh : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Sifat – sifat dari operasi matriks

- $A+B = B+A$
- $A+(B+C) = (A+B)+C$
- $AB \neq BA$
- $A(BC) = (AB)C$
- $(A^t)^t = A$
- $(AB)^t = B^t A^t$

I.4 Matriks Invers

Definisi

Jika A, B matriks bujur sangkar dan berlaku $AB = BA = I$ (I matriks identitas), maka dikatakan bahwa A dapat dibalik dan B adalah matriks invers dari A (notasi A^{-1}).

$$\text{Contoh : } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka $B = A^{-1}$ dan $A = B^{-1}$

Sifat yang berlaku :

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Latihan I

1. Tentukan jenis dari matriks – matriks dibawah ini (jika memenuhi lebih dari satu, tuliskan semua) !

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \text{ Diketahui } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- a. Hitung $B + C$!
- b. Hitung AB dan AC , kemudian tentukan $AB + AC$
- c. Dari perhitungan $B + C$ sebelumnya, hitung $A (B + C)$ kemudian bandingkan hasilnya dengan jawaban dari b !

3. Dari soal nomor 2, tentukan
- $(AB)^t$ dan $(AC)^t$!
 - Hitung B^tA^t dan C^tA^t , kemudian bandingkan hasilnya dengan jawaban a !
4. Tunjukkan apakah matriks B merupakan invers A !
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

BAB II

Sistem Persamaan Linear

II.1 Pendahuluan

Bentuk umum

Suatu persamaan linear yang mengandung n peubah x_1, x_2, \dots, x_n dinyatakan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ dengan a_1, a_2, \dots, a_n, b adalah konstanta riil.

Dalam hal ini, peubah yang dimaksud bukan merupakan fungsi trigonometri, fungsi logaritma ataupun fungsi eksponensial.

Contoh 2.1.1 :

- a. $x + y = 4 \rightarrow$ persamaan linear dengan 2 peubah
- b. $2x - 3y = 2z + 1 \rightarrow$ persamaan linear dengan 3 peubah
- c. $2 \log x + \log y = 2 \rightarrow$ bukan persamaan linear
- d. $2e^x = 2x + 3 \rightarrow$ bukan persamaan linear

Sistem persamaan linear (SPL)

Definisi

Sistem persamaan linear adalah himpunan berhingga dari persamaan linear

Contoh 2.1.2:

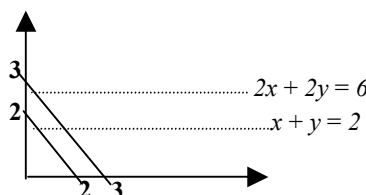
- a. $x + y = 2$ b. $x - y + z = 4$
 $2x + 2y = 6$ $x + y = 0$

Tidak semua sistem persamaan linear memiliki penyelesaian (solusi), sistem persamaan linear yang memiliki penyelesaian memiliki dua kemungkinan yaitu penyelesaian tunggal dan penyelesaian banyak. Secara lebih jelas dapat dilihat pada diagram berikut :

$$SPL \begin{cases} \text{Tidak memiliki penyelesaian (tidak konsisten)} \\ \text{memiliki penyelesaian (konsisten)} \end{cases} \begin{cases} \text{solusi tunggal} \\ \text{solusi banyak} \end{cases}$$

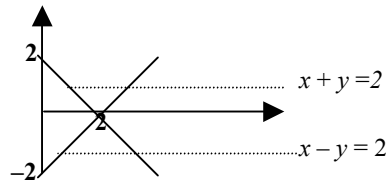
Pada sistem persamaan linear dengan dua peubah, secara geometris jika SPL tidak mempunyai penyelesaian maka grafiknya berupa dua garis yang saling sejajar, jika penyelesaiannya tunggal maka himpunan penyelesaiannya berupa sebuah titik hasil perpotongan dua garis sedangkan jika penyelesaiannya banyak maka himpunan penyelesaiannya berupa dua garis lurus yang saling berhimpit. Secara lebih jelas dapat dilihat pada **contoh 2.1.3** berikut :

- a. $x + y = 2$, Grafiknya :
 $2x + 2y = 6$



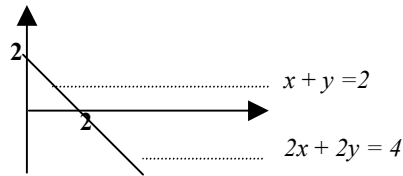
Grafik tersebut menunjukkan bahwa kedua garis sejajar sehingga tidak penyelesaian yang memenuhi sehingga disimpulkan bahwa SPL tidak konsisten.

- b. $x - y = 2$, Grafiknya :
 $x + y = 2$



Grafik tersebut menunjukkan bahwa himpunan penyelesaian dari SPL adalah titik potong antara $x - y = 2$ dan $x + y = 2$ yaitu titik $(2, 0)$. Jadi penyelesaian dari SPL adalah tunggal yaitu $x = 2$ dan $y = 0$.

- c. $x + y = 2$, Grafiknya :
 $2x + 2y = 4$



Grafik diatas bahwa $x + y = 2$ dan $2x + 2y = 4$ saling berhimpit sehingga hanya terlihat seperti satu garis saja. Himpunan penyelesaian dari SPL semua titik yang terletak disepanjang garis tersebut. Misalkan diambil $x = 0$ maka didapatkan $y = 2$ yang memenuhi persamaan, jika $x = 1$ maka nilai $y = 1$ adalah nilai yang memenuhi . Secara matematis dapat dituliskan sebagai : $\{ (x,y) \mid x = 2 - y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$

Untuk kasus sistem persamaan linear dengan menggunakan dua peubah , pembuatan grafik untuk menentukan himpunan penyeleaian seperti ini masih memungkinkan , hanya saja untuk jumlah peubah yang lebih banyak hal ini sulit dilakukan.

II.2 Operasi baris elementer

Ketika dihadapi masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear terutama yang menggunakan banyak peubah, maka hal pertama yang dapat digunakan untuk menyederhanakan permasalahan adalah dengan mengubah sistem persamaan linear yang ada ke dalam bentuk matriks. Suatu persamaan linear biasanya juga tidak didapatkan secara langsung tetapi melalui penyederhanaan dari permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari – hari. Setelah diubah ke bentuk matriks, maka matriks tersebut diubah ke bentuk matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi untuk mendapatkan penyelesaian dari SPL.

Prosedur untuk mendapatkan matriks eselon baris tereduksi biasa disebut sebagai *eliminasi Gauss– Jordan* . Pada proses eliminasi tersebut operasi – operasi yang digunakan disebut *operasi baris elementer*.

Dalam operasi baris elementer ini ada beberapa operasi yang dapat digunakan , yaitu :

- Mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol
- Mempertukarkan dua buah baris
- Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya.

Dengan menggunakan operasi baris elementer, maka matriks eselon baris tereduksi yang didapatkan akan ekuivalen dengan matriks awalnya sehingga penyelesaian untuk matriks eselon baris tereduksi juga merupakan penyelesaian untuk matriks awalnya. Matriks awal yang dimaksud adalah matriks diperbesar.

Untuk melihat secara lebih mudah definisi dari matriks diperbesar akan ditunjukkan berikut ini :

Diketahui SPL dengan m buah persamaan linear dan n peubah

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Sistem persamaan linear diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks $AX = B$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks yang memiliki berukuran $n \times 1$ atau $1 \times n$ biasa disebut vektor. Penulisan vektor sedikit berbeda dengan penulisan matriks, yaitu menggunakan huruf kecil dengan cetak tebal atau digaris atasnya. Jadi matriks X dan B diatas biasa dituliskan sebagai x dan b atau \bar{x} dan \bar{b} sehingga SPL dapat dituliskan sebagai $A\bar{x} = \bar{b}$. Pada SPL yang berbentuk seperti ini, matriks A juga biasa disebut sebagai *matriks konstanta*.

Untuk menyelesaikan persamaan linear diatas maka dibuat matriks diperbesar dari A dan \bar{b} yang elemen – elemennya merupakan gabungan elemen matriks A dan vektor \bar{b} yang dinotasikan $[A \mid \bar{b}]$, yaitu :

$$[A \mid \bar{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Untuk menyelesaikan persamaan linear tersebut dilakukan eliminasi Gauss–Jordan seperti ditunjukkan dalam contoh berikut :

Contoh 2.2.1

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & x + 2y + 3z = 1 \\ & 2x + 5y + 3z = 6 \\ & x + 8z = -6 \end{aligned}$$

$$\text{Matriks diperbesar } [A \mid \bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & -6 \end{array} \right]$$

Operasi baris elementer pada $[A \mid \bar{b}]$ menghasilkan :

$$\begin{aligned}
 [A \mid \bar{b}] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & -6 \end{array} \right] \sim \begin{array}{c} b2-2b1 \\ b3-b1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & -7 \end{array} \right] \sim \begin{array}{c} b1-2b2 \\ b3+2b2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\
 &\sim \begin{array}{c} b1-9b3 \\ b2+3b3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \text{ bentuk eselon baris} \\
 &\text{tereduksi}
 \end{aligned}$$

Dari bentuk eselon baris tereduksi maka dapat dibuat persamaannya , yaitu :

Dari baris 1 (b1) $\rightarrow x + 0y + 0z = 2 \rightarrow x = 2$

Dari baris 2 (b2) $\rightarrow 0x + y + 0z = 1 \rightarrow y = 1$

Dari baris 3 (b3) $\rightarrow 0x + 0y + z = -1 \rightarrow z = -1$

Jadi penyelesaian SPL diatas adalah tunggal , yaitu :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Untuk melihat apakah jawaban tersebut benar ataukah tidak , kita dapat memasukkan nilai – nilai tersebut pada persamaan awal.

Keterangan

Penulisan b1, b2 dan sebagainya pada proses diatas sifatnya tidak mutlak dan hanya digunakan sebagai alat pembantu dalam proses operasi baris elementer. Dalam perhitungan selanjutnya penulisan ini mungkin tidak perlu dilakukan.

b.
$$\begin{aligned}
 x + 2z &= 1 \\
 -x + y - z &= 0 \\
 2x + y + 5z &= 3
 \end{aligned}$$

Matriks diperbesar $[A \mid \bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right]$

$$[A \mid \bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Persamaannya :

Dari baris 1 $\rightarrow x + 2z = 1 \rightarrow x = 1 - 2z$

Dari baris 2 $\rightarrow y + z = 1 \rightarrow y = 1 - z$

Karena baris 3 adalah baris nol dan kolom yang tidak memiliki satu utama adalah kolom 3 maka dapat diambil nilai z sembarang misalkan $z = s$, sehingga nilai $x = 1 - 2s$ dan $y = 1 - s$. Baris nol pada kasus diatas juga menunjukkan bahwa penyelesaian dari SPL adalah **tak hingga banyak**. Banyaknya baris nol pada matriks

didas (dengan A merupakan matriks bujursangkar) juga menunjukkan **banyaknya parameter** (s) pada penyelesaian SPL.

Jadi penyelesaian dari SPL adalah

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2s \\ 1-s \\ s \end{bmatrix}$$

Untuk menguji apakah nilai yang didapat benar atau tidak, ambil sembarang bilangan untuk s misalnya $s = 0$ didapatkan $x = 1$, $y = 1$ dan $z = 0$ masukkan nilai – nilai ke

persamaan kemudian bandingkan ruas kiri dan ruas kanan. Coba lagi untuk nilai s yang lain.

$$\begin{aligned} \text{c.} \quad 2x + 2z &= 4 \\ -2x + y &= -3 \\ x + 2y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

$$\text{Matriks diperbesar } [A \mid \bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \right]$$

$$[A \mid \bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Pada baris ketiga matriks eselon baris tereduksi didapatkan persamaan:

$0x + 0y + 0z = 2 \rightarrow$ hal ini jelas menunjukkan bahwa tidak ada nilai untuk x , y dan z yang memenuhi persamaan karena apapun nilai x , y dan z nya, ruas kiri akan selalu bernilai nol jadi nilai 2 tidak akan tercapai. Jadi kalau ada bentuk matriks eselon baris tereduksi yang seperti diatas, pasti dapat disimpulkan bahwa SPL tidak memiliki penyelesaian atau **SPL tidak konsisten**.

II.3 Sistem persamaan linear Homogen

Sistem persamaan linear Homogen merupakan kasus khusus dari Sistem persamaan linear biasa $A\bar{x} = \bar{b}$ untuk kasus $\bar{b} = \bar{0}$. Karena bentuknya yang demikian maka pastilah pada matriks diperbesar $[A \mid \bar{b}]$ setelah dilakukan eliminasi Gauss–Jordan kolom terakhirnya akan selalu nol sehingga penyelesaian dari SPL akan selalu ada. Ada dua macam penyelesaian dalam SPL homogen ini yaitu **trivial** (tak sejati) dan **tak trivial** (sejati).

Penyelesaian trivial terjadi jika satu – satunya penyelesaian untuk SPL adalah $\bar{x} = \bar{0}$ hal ini terjadi jika semua kolom pada matriks diperbesar $[A \mid \bar{b}]$ (setelah dilakukan eliminasi Gauss–Jordan) memiliki satu utama kecuali untuk kolom yang terakhir atau dengan kata lain semua kolom pada matriks A memiliki satu utama. Jika hal yang sebaliknya terjadi yaitu tidak semua kolom pada matriks A (setelah dilakukan eliminasi Gauss–Jordan)

memiliki satu utama atau jika terdapat baris nol maka penyelesaian untuk SPL adalah penyelesaian tak trivial yaitu penyelesaian tak hingga banyak.

Contoh 2.3.1

Diketahui sistem persamaan linear homogen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dari SPL homogen diatas adalah

$$[A \mid \bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Pada matriks yang terakhir terlihat bahwa semua kolom matriks A memiliki satu utama sehingga penyelesaiannya adalah trivial yaitu $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Contoh 2.3.2

Diketahui sistem persamaan linear homogen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dari SPL homogen diatas adalah :

$$[A \mid \bar{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Pada matriks yang terakhir terlihat bahwa hanya dua kolom dari matriks A yang memiliki satu utama atau terdapat dua baris nol , ini berarti bahwa penyelesaian SPL adalah tak trivial yaitu penyelesaian banyak dengan dua parameter yaitu :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ 2z \\ z \\ w \end{bmatrix}, \text{ jika diambil } z = s \text{ dan } w = t, \quad s, t \in \mathbb{R} \text{ maka } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2s \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gaus–Jordan untuk mendapatkan penyelesaian SPL homogen sering juga dilakukan pada matriks A saja karena pada kasus ini $\bar{b} = \bar{0}$ jadi tidak akan mempengaruhi hasil perhitungan.

II.4 Menentukan invers matriks

Pada bab sebelumnya sudah dibahas tentang invers suatu matriks. Invers suatu matriks (misalkan invers A) dapat dihitung dengan menggunakan eliminasi Gauss–Jordan terhadap matriks diperbesar $[A \mid I]$ dimana ukuran I sama dengan ukuran A. Cara perhitungan seperti ini didasarkan dari sifat $A A^{-1} = I$. Untuk menentukan solusi dari SPL tersebut maka berdasarkan prosedur yang telah dipelajari sebelumnya , maka dapat dilakukan eliminasi Gauss – Jordan terhadap matriks $[A \mid I]$. Jika A memang memiliki

invers maka matriks eselon baris tereduksinya akan berbentuk $[I \mid A^{-1}]$. Jika setelah melakukan eliminasi Gauss-Jordan tidak diperoleh bentuk $[I \mid A^{-1}]$ maka disimpulkan bahwa matriks tersebut tidak memiliki invers.

Contoh 2.4.1

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan A^{-1} jika ada !

Jawab:

$$\begin{aligned} [A \mid I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{array} \right] = [I \mid A^{-1}] \end{aligned}$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Untuk melihat apakah jawaban tersebut benar atau tidak, maka hitunglah A^{-1} hasil perhitungan dengan A , jika hasilnya = I maka jawaban tersebut benar.

Contoh 2.4.2

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan invers matriks A jika ada !

Jawab:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Walaupun matriks belum dalam bentuk eselon baris tereduksi, tapi perhitungan sudah dapat dihentikan pada tahap ini sudah terlihat bahwa bentuk $[I \mid A^{-1}]$ tidak akan bisa didapatkan sehingga dapat disimpulkan matriks A tidak memiliki invers.

Suatu matriks konstan (A) yang memiliki invers, maka SPL $A\bar{x} = \bar{b}$ yang berkaitan akan memiliki solusi tunggal yaitu : $A^{-1}\bar{b}$, jika berupa SPL Homogen maka $\bar{x} = \bar{0}$

Latihan II

1. Gunakan eliminasi Gauss–Jordan untuk mendapatkan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks – matriks berikut :

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

2. Tuliskan sistem persamaan linear berikut dalam bentuk matriks kemudian tentukan penyelesaiannya (jika ada) !

a. $\begin{array}{rcl} 2x + y + 3z & = & 6 \\ 2y - z & = & 3 \\ x + y + z & = & 5 \end{array}$ b. $\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ y + 2z & = & 5 \\ x + y + z & = & 3 \end{array}$

c. $\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 3z + 1 \\ x - 2y + 2 & = & 0 \end{array}$ d. $\begin{array}{rcl} 6x + y & = & 0 \\ x + 5y & = & 0 \\ x & = & 4y \end{array}$

3. Tentukan invers matriks dari matriks berikut (jika ada) !

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

4. Diketahui persamaan $R\bar{x} = \bar{b}$ dengan R matriks konstanta pada nomor 3 , dan $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Tentukan solusi SPL (jika ada) !

5. Diketahui persamaan $R\bar{x} = \bar{0}$ dengan R matriks konstanta pada nomor 3 , Tentukan jenis solusi dari SPL dan tuliskan solusinya !

6. Diketahui SPL berbentuk :

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- a. Tentukan nilai a dan b agar SPL memiliki solusi tunggal , kemudian tulis solusi SPL nya !
b. Tentukan nilai a dan b agar SPL memiliki solusi banyak, kemudian tulis solusi SPL nya!

7. Diketahui SPL

$$\begin{bmatrix} a^2 & b \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai untuk a dan b agar SPL memiliki solusi banyak dan tulis solusi SPL tersebut !

8. Diketahui SPL berikut :

$$a^2x + y - z = a$$

$$x + by - z = -1$$

$$by + z = 0$$

Tentukan semua nilai untuk a dan b agar SPL memiliki solusi banyak ,
kemudian untuk setiap pasangan nilai a dan b tersebut tuliskan solusi SPL !

BAB III Determinan matriks

III.1 Pendahuluan

Definisi determinan

Misalkan A matriks bujur sangkar, fungsi determinan A sering dituliskan sebagai determinan (disingkat $\det(A)$ atau $|A|$) didefinisikan sebagai *jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A* .

Jika A berukuran $n \times n$, maka hasil kali elementer dari matriks A akan berbentuk : $a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ dimana $p_1 p_2 \dots p_n$ merupakan permutasi dari bilangan – bilangan $1, 2, \dots, n$. Tanda dari $a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ sendiri ditentukan dari banyaknya bilangan bulat besar yang mendahului bilangan yang lebih kecil (**banyaknya invers**) pada bilangan $p_1 p_2 \dots p_n$, jika banyaknya invers adalah ganjil maka tandanya negatif ($-$) dan jika sebaliknya tandanya positif ($+$).

Contoh 3.1.1

$$\text{Diketahui } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$!

Jawab

Banyaknya permutasi $1, 2$ (karena A berukuran 2×2) = 2 yaitu 12 dan 21

Pada bilangan 12 akan didapatkan banyaknya invers = 0 sehingga tanda untuk hasil kali elementer $a_{11} a_{22}$ adalah (+), sedangkan untuk hasil kali elementer $a_{12} a_{21}$ akan bertanda (–) karena pada bilangan 21 terdapat satu angka bulat yang mendahului angka yang lebih kecil.

$$\text{Jadi } \det(A) = + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = ad - bc$$

Contoh 3.1.2

$$\text{Diketahui } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ Tentukan } \det B !$$

Jawab

Untuk memudahkannya akan dibuat tabel sebagai berikut :

permutasi	Hasil kali elementer	Banyak invers	Hasil kali elementer bertanda
123	$a_{11} a_{22} a_{33}$	0	$+ a_{11} a_{22} a_{33}$
132	$a_{11} a_{23} a_{32}$	1	$- a_{11} a_{23} a_{32}$
213	$a_{12} a_{21} a_{33}$	1	$- a_{12} a_{21} a_{33}$
231	$a_{12} a_{23} a_{31}$	2	$+ a_{12} a_{23} a_{31}$
312	$a_{13} a_{21} a_{32}$	2	$+ a_{13} a_{21} a_{32}$
321	$a_{13} a_{22} a_{31}$	3	$- a_{13} a_{22} a_{31}$

$$\text{Jadi } \det B = + a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

Untuk kasus matriks yang berukuran lebih dari 3×3 , tentunya penentuan nilai determinan dengan menggunakan definisi tersebut menjadi kurang efektif dan lebih

rumit. Berdasarkan definisi dari determinan tersebut maka dikembangkan metode perhitungan determinan yang lebih cepat yang akan dibahas dibagian selanjutnya.

III.2 Metode perhitungan determinan

a. Ekspansi kofaktor

Pada metode ini dikenal beberapa istilah, antara lain :

Minor elemen a_{ij} (M_{ij}) yaitu determinan yang didapatkan dengan menghilangkan baris i dan kolom j matriks awalnya.

Kofaktor elemen a_{ij} (C_{ij}) $= (-1)^{i+j} M_{ij}$

Jika A matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$, maka dengan menggunakan metode ini perhitungan determinan dapat dilakukan dengan dua cara yang semuanya menghasilkan hasil yang sama yaitu :

- **ekspansi sepanjang baris i**
 $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$
- **ekspansi sepanjang kolom j**
 $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$

Contoh 3.2.1

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor !

Jawab

Akan dicoba menggunakan ekspansi baris 1 untuk menghitung $\det(A)$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 4) = 2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$\text{Jadi } \det(A) = (1 \cdot -1) + (2 \cdot 2) + (3 \cdot -2) = -3$$

Contoh 3.2.2

Diketahui $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hitung $\det(B)$!

Jawab

Jika melihat sifat dari metode ini, maka perhitungan akan lebih cepat jika ada elemen a_{ij} yang bernilai 0. Jadi pemilihan baris / kolom akan sangat menentukan kecepatan perhitungan.

Dalam contoh ini terlihat bahwa baris/kolom yang mengandung banyak nilai 0 adalah kolom 2. Jadi $\det(B)$ akan dapat dihitung secara cepat menggunakan ekspansi terhadap kolom 2.

$\det(B) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} = a_{22}C_{22}$ (karena a_{12} dan a_{32} bernilai 0)

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

Jadi $\det(B) = 2 \cdot -2 = -4$

b. Reduksi baris menggunakan operasi baris elementer

Penggunaan metode ini sebenarnya tidak lepas dari metode ekspansi kofaktor yaitu pada kasus suatu kolom banyak mengandung elemen yang bernilai 0. Berdasarkan sifat ini maka matriks yang berbentuk eselon baris atau matriks segitiga akan lebih mudah untuk dihitung nilai determinannya karena hanya merupakan perkalian dari elemen diagonalnya. Reduksi baris dilakukan dengan mengubah kolom – kolom sehingga banyak memuat elemen 0. Biasanya bentuk metriks akhir yang ingin dicapai adalah bentuk eselon baris atau bentuk segitiga tetapi ini tidak mutlak. Jika bentuk eselon atau segitiga belum tercapai tetapi dianggap perhitungannya sudah cukup sederhana maka determinan bisa langsung dihitung. Dalam melakukan reduksi baris operasi yang digunakan adalah operasi baris elementer.

Pada operasi baris elementer ada beberapa operasi yang berpengaruh terhadap nilai determinan awal , yaitu :

- Jika matriks B diperoleh dengan mempertukarkan dua baris pada matriks A maka $\det(B) = -\det(A)$
- Jika matriks B diperoleh dengan mengalikan konstanta k ke salah satu baris matriks A maka $\det(B) = k \det(A)$
- Jika matriks B didapatkan dengan menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya , maka $\det(B) = \det(A)$

Contoh 3.2.3

Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ dan $\det(A) = r$

Tentukan determinan dari matriks – matriks berikut ;

a. $X = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}$ b. $Y = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ c. $Z = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+g & b+h & c+i \end{bmatrix}$

Jawab

- a. Matriks X didapatkan dengan mempertukarkan baris 1 dan 2 matriks A , maka $\det(X) = -\det(A) = -r$
- b. Matriks Y didapatkan dengan mengalikan baris ke-2 matriks A dengan 2, maka $\det(Y) = 2 \cdot \det(A) = 2r$
- c. Matriks Z didapatkan dengan menambahkan baris 1 ke baris 3 matriks A , maka $\det(Z) = \det(A) = r$

Contoh 3.2.4

Hitunglah determinan matriks A dalam contoh 3.2.1 dengan menggunakan reduksi baris !

Jawab

$$\text{Diketahui } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = -3 \end{aligned}$$

III.3 Menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dengan metode Crammer

Metode Crammer didasarkan atas perhitungan determinan matriks. Suatu SPL yang berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dengan A adalah matriks bujur sangkar dapat dikerjakan dengan metode Crammer jika hasil perhitungan menunjukkan bahwa $\det(A) \neq 0$. Penyelesaian yang didapatkan dengan metode ini adalah penyelesaian tunggal.

Diketahui suatu sistem persamaan linier berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dengan A adalah matriks bujur sangkar berukuran nxn dan $\det(A) \neq 0$ sedangkan nilai \bar{x} dan \bar{b} adalah :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

maka penyelesaian untuk \mathbf{x} adalah :

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, \bar{x}_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

A_i adalah matriks A yang kolom ke-i nya diganti dengan vektor \bar{b} .

Contoh 3.3.1

Diketahui sistem persamaan linier berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Periksa apakah metode Crammer dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian SPL ?
- Jika bisa , tentukan penyelesaian untuk \bar{x} !

Jawab

$$\text{a. Det (A)} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (15 - 20) - (6 - 10) = -1$$

Karena $\det(A) = -1$ maka metode Cramer dapat digunakan .

$$\text{b. Det (A}_1\text{)} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(15 - 20) - (3 + 5) = -3$$

$$\text{Det (A}_2\text{)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 5) + (6 - 10) = 4$$

$$\text{Det (A}_3\text{)} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

Jadi nilai untuk x, y dan z adalah :

$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3, \quad \bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4}{-1} = -4 \quad \text{dan} \quad \bar{z} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Menentukan invers suatu matriks dapat juga menggunakan rumus berikut :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} \quad \text{dimana } \text{adj}(A) = C^t \quad \text{dan } C = \{ c_{ij} \}, \quad c_{ij} = \text{kofaktor elemen } a_{ij}$$

III.4 Hubungan determinan, invers matriks dan penyelesaian untuk sistem persamaan linier

Jika suatu SPL berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dan A matriks bujur sangkar , maka sifat dari penyelesaian SPL dapat diketahui dari nilai determinan A atau invers matriks A. Berikut ini adalah hubungan yang berlaku :

$$\begin{aligned} \text{Det (A)} \neq 0 & \Leftrightarrow A^{-1} \text{ terdefinisi (ada)} & \Leftrightarrow & \text{penyelesaian tunggal untuk SPL} \\ \text{Det (A)} = 0 & \Leftrightarrow A \text{ tidak memiliki invers} \end{aligned}$$

$$\text{Det (A)} = 0 \quad \begin{cases} \text{SPL memiliki penyelesaian banyak} \\ \text{SPL tidak memiliki penyelesaian} \end{cases}$$

Pada kasus $\det(A) \neq 0$ untuk menentukan penyelesaiannya dapat digunakan invers matriks untuk menghitungnya, yaitu $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$. Sedangkan pada kasus $\det(A) = 0$, untuk menentukan penyelesaian SPL harus digunakan eliminasi Gauss–Jordan pada matriks diperbesar $[A \mid \bar{b}]$.

Latihan III

1. Gunakan ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan dari matriks – matriks berikut :

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Gunakan reduksi baris untuk menghitung determinan dari matriks – matriks berikut

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. Diketahui sistem persamaan linier $\bar{x} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- a. Periksa apakah metode Cramer dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian SPL ?
b. Jika ya, tentukan nilai untuk \bar{x} !
4. Dari soal nomor 3,
- a. Tentukan invers A dengan menggunakan rumus $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$!
b. Tentukan nilai \bar{x} dengan menggunakan hasil dari 4.a !

5. Diketahui SPL $A\bar{x} = \bar{b}$ dengan matriks diperbesar $[A \mid \bar{b}]$ sebagai berikut :

$$[A \mid \bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -(a^2+1) & a-3 \end{array} \right]$$

Tentukan nilai a agar

- a. SPL memiliki penyelesaian tunggal !
b. SPL memiliki penyelesaian banyak !
c. SPL tidak memiliki penyelesaian !

6. Dari sifat – sifat determinan berikut ;

$$\text{Det} (AB) = \text{Det} A \cdot \text{Det} B$$

$$\text{Det} (A^t) = \text{Det} A$$

$$\text{Jika } \text{Det} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = R, \quad \text{Det} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = L$$

$$\text{Hitung } \text{Det} \left(\frac{\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & -f \\ -g & e \end{bmatrix}}{eh - fg} \right) !$$

7. Jika $\det A = X$ dan $\det B = Y$, Tentukan $\text{Det} (A^t B A^{-1}) !$
8. Jika A dan B matriks 3×3 dengan $\det A = R$ dan $\det B = S$, Tentukan $\det (A^2 B^3) !$

BAB IV

Vektor– Vektor di bidang dan di ruang

IV.1 Pendahuluan

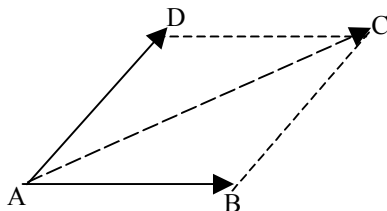
Definisi

Vektor didefinisikan sebagai besaran yang memiliki arah. Kecepatan, gaya dan pergeseran merupakan contoh – contoh dari vektor karena semuanya memiliki besar dan arah walaupun untuk kecepatan arahnya hanya positif dan negatif.

Vektor dikatakan berada di ruang – n (R^n) jika vektor tersebut mengandung n komponen. Jika vektor berada di R^2 maka dikatakan vektor berada di bidang, sedangkan jika vektor berada di R^3 maka dikatakan vektor berada di ruang.

Secara geometris, di bidang dan di ruang vektor merupakan segmen garis berarah yang memiliki titik awal dan titik akhir. Vektor biasa dinotasikan dengan huruf kecil tebal atau huruf kecil dengan ruas garis

Contoh 4.1.1



Dari gambar diatas terlihat beberapa segmen garis berarah (vektor) seperti \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} dan \overrightarrow{AD} dengan A disebut sebagai **titik awal**, sedangkan titik B, C dan D disebut **titik akhir**.

Vektor posisi didefinisikan sebagai vektor yang memiliki titik awal O (untuk vektor di bidang , titik O adalah (0,0)).

IV.2 Operasi – operasi pada vektor

A. Penjumlahan dua vektor

Misalkan \vec{u} dan \vec{v} adalah vektor – vektor yang berada di ruang yang sama , maka vektor ($\vec{u} + \vec{v}$) didefinisikan sebagai vektor yang titik awalnya = titik awal \vec{u} dan titik akhirnya = titik akhir \vec{v} .

Contoh 4.2.1

Perhatikan gambar pada contoh 4.1.1 . Misalkan $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ dan $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, jika vektor \vec{w} didefinisikan sebagai $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, maka \vec{w} akan memiliki titik awal = A dan titik akhir = C, jadi \vec{w} merupakan segmen garis berarah \overrightarrow{AC} .

B. Perkalian vektor dengan skalar

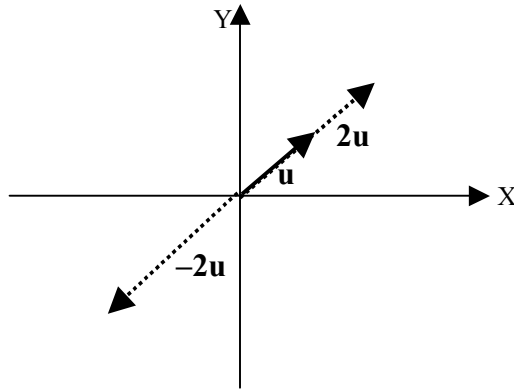
Vektor nol didefinisikan sebagai vektor yang memiliki panjang = 0. Misalkan \vec{u} vektor tak nol dan k adalah skalar, $k \in R$. Perkalian vektor \vec{u} dengan skalar

k , $k\bar{u}$ didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya $\|\bar{u}\|$ kali panjang \bar{u} dengan arah :

Jika $k > 0 \rightarrow$ searah dengan \bar{u}

Jika $k < 0 \rightarrow$ berlawanan arah dengan \bar{u}

Contoh 4.2.2



C. Perhitungan vektor

Diketahui \bar{a} dan \bar{b} vektor-vektor di ruang yang komponen – komponennya adalah $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Maka

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$k \cdot \bar{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

Jika $\bar{c} = \bar{AB}$ kemudian titik koordinat $A = (a_1, a_2, a_3)$ dan $B = (b_1, b_2, b_3)$ maka

$$\bar{c} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

IV.3 Hasil kali titik , panjang vektor dan jarak antara dua vektor

Hasil kali titik dua vektor jika diketahui komponennya

Diketahui $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, Hasil kali titik antara vektor

\bar{a} dan \bar{b} didefinisikan sebagai :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) + (a_3 \cdot b_3)$$

Hasil kali titik dua vektor jika diketahui panjang vektor dan sudut antara dua vektor

Diketahui \bar{a} dan \bar{b} dua buah vektor yang memiliki panjang berturut – turut $\|\bar{a}\|$ dan $\|\bar{b}\|$ sedangkan sudut yang dibentuk oleh kedua vektor adalah ϕ , sudut ϕ ini terbentuk dengan cara menggambarkan kedua vektor pada titik awal yang sama.

Hasil kali titik antara vektor \bar{a} dan \bar{b} didefinisikan sebagai :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \phi, \phi \in [0, \pi]$$

Jadi hasil kali titik dua buah vektor berupa skalar.

Dengan mengetahui besarnya ϕ , akan diketahui apakah hasil kali titik akan bernilai positif atau negatif

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi \text{ lancip , } 0 \leq \phi < 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi = 90^\circ \text{ , } \vec{a} \text{ dan } \vec{b} \text{ saling tegak lurus}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi \text{ tumpul, } 90^\circ < \phi \leq 180^\circ$$

Contoh 4.3.1

Diketahui $\vec{a} = (1, -3)$ dan $\vec{b} = (3k, -1)$

Tentukan nilai k agar \vec{a} dan \vec{b} saling tegak lurus !

Jawab

Agar \vec{a} dan \vec{b} saling tegak lurus, maka haruslah $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3k + 3 = 0 \rightarrow k = -1$$

Panjang (norm) vektor dan jarak antara dua vektor

Panjang vektor

Dengan menggunakan operasi hasil kali titik jika diketahui komponen

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ didapatkan bahwa

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad \dots(1)$$

Dari definisi hasil kali titik lainnya , didapatkan bahwa

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \|\vec{a}\| \cos 0 \quad \dots(2) \text{ , dalam hal ini sudut antara } \vec{a} \text{ dan } \vec{a} \text{ pastilah}$$

bernilai 0 karena keduanya saling berhimpit.

Dari persamaan 1 dan 2 , didapatkan persamaan berikut :

$$\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \rightarrow \|\vec{a}\| = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

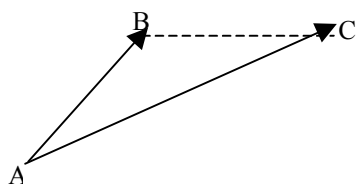
Jarak antara dua vektor

Jarak antara vektor \vec{a} dan \vec{b} didefinisikan sebagai panjang dari vektor $(\vec{a} - \vec{b})$

dan biasa dinotasikan dengan $d(\vec{a}, \vec{b})$.

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b})^{1/2} = \sqrt{(a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + (a_3^2 - b_3^2)}$$

Secara geometris , dapat digambarkan seperti berikut ini :



Misalkan $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ dan $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, maka jarak antara \vec{a} dan \vec{b} merupakan panjang dari ruas garis berarah \overrightarrow{BC}

Contoh 4.3.2

Diketahui $\vec{u} = (2, -1, 1)$ dan $\vec{v} = (1, 1, 2)$

Tentukan besar sudut yang dibentuk oleh \vec{u} dan \vec{v} !

Jawab

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos \theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \phi = 60^\circ$$

Jadi sudut yang dibentuk antara \bar{u} dan \bar{v} adalah 60°

Beberapa sifat yang berlaku dalam hasil kali titik

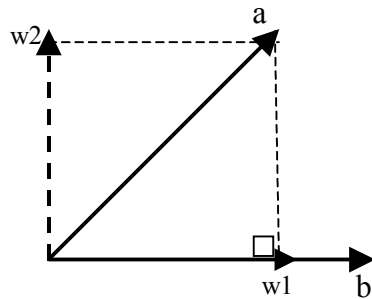
a. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

b. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

c. $m(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (m\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (m\bar{b}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) m$

IV.4 Proyeksi orthogonal

Diketahui vektor \bar{a} dan \bar{b} adalah vektor – vektor pada ruang yang sama seperti terlihat pada gambar dibawah ini :



Vektor \bar{a} disusun dari dua vektor yang saling tegak lurus yaitu \bar{w}_1 dan \bar{w}_2 , jadi dapat dituliskan $\bar{a} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$. Dari proses pembentukannya \bar{w}_1 juga disebut sebagai vektor proyeksi orthogonal \bar{a} terhadap \bar{b} karena merupakan hasil proyeksi secara orthogonal vektor \bar{a} terhadap \bar{b} , sedangkan \bar{w}_2 disebut sebagai komponen dari \bar{a} yang tegak lurus terhadap \bar{b} .

Karena \bar{w}_1 merupakan hasil proyeksi di \bar{b} maka dapat dituliskan $\bar{w}_1 = k\bar{b}$, nilai k ini akan menentukan arah dan panjang dari \bar{w}_1 . Jika sudut antara \bar{a} dan \bar{b} adalah tumpul, maka tentunya nilai k akan negatif ini juga berarti arah \bar{w}_1 akan berlawanan dengan arah \bar{b} .

Menghitung \bar{w}_1

Untuk menghitung \bar{w}_1 , harus dihitung terlebih dahulu nilai k . Dengan menggunakan aturan hasil kali titik, diperoleh :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) \cdot \bar{b}$$

$$\begin{aligned}
 &= \bar{w}_1 \cdot \bar{b} \quad (\text{karena } \bar{w}_2 \text{ dan } \bar{b} \text{ saling tegak lurus maka } \bar{w}_2 \cdot \bar{b} = 0) \\
 &= \|\bar{w}_1\| \|\bar{b}\| \cos \theta \\
 &= \|k \bar{b}\| \|\bar{b}\| \cos 0 \quad (\text{sudut yang dibentuk adalah } 0 \text{ atau } 180) \\
 &= k \|\bar{b}\|^2
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } k = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|^2}$$

$$\bar{w}_1 = k \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|^2} \bar{b} \quad \text{dan} \quad \bar{w}_2 = \bar{a} - \bar{w}_1$$

$$\text{Panjang dari } \bar{w}_1 \text{ adalah } \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|}$$

Contoh 4.4.1

Diketahui $\bar{a} = (4, 1, 3)$ dan $\bar{b} = (4, 2, -2)$

Tentukan

- Vektor proyeksi tegak lurus dari \bar{a} terhadap \bar{b} !
- Panjang dari vektor proyeksi tersebut !
- Komponen dari \bar{a} yang tegak lurus terhadap \bar{b} !

Jawab

- Misalkan \bar{w}_1 adalah vektor proyeksi tegak lurus dari \bar{a} terhadap \bar{b} , maka

$$\bar{w}_1 = k \bar{b} \text{ sedangkan } k = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|^2} = \frac{(4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot -2)}{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Jadi } \bar{w}_1 = \frac{1}{2} (4, 2, -2) = (2, 1, -1)$$

$$\text{b. Panjang } \bar{w}_1 \text{ adalah } \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|} = \frac{12}{\sqrt{24}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

- Misalkan \bar{w}_2 merupakan komponen dari \bar{a} yang tegak lurus terhadap \bar{b} , maka $\bar{w}_2 = \bar{a} - \bar{w}_1 = (4, 1, 3) - (2, 1, -1) = (2, 0, 2)$

IV.5 Perkalian silang vektor

Sebelum membahas ke masalah perkalian silang dari dua buah vektor, akan dijelaskan beberapa definisi terlebih dahulu

Vektor satuan

Vektor satuan didefinisikan sebagai vektor yang memiliki panjang satu satuan. Di bidang, vektor satuan yang searah dengan sumbu x dan y dinyatakan sebagai

$\bar{i} = (1, 0)$ dan $\bar{j} = (0, 1)$, sedangkan pada ruang (R^3), vektor satuan yang searah sumbu x, y dan z adalah $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$ dan $\bar{k} = (0, 0, 1)$.

Penulisan komponen dari vektor juga dapat menggunakan vektor satuan. Misalkan

$\bar{u} = (a, b)$, maka \bar{u} juga dapat dituliskan $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$

$\bar{v} = (a, b, c)$, maka \bar{v} juga dapat dituliskan $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

Perkalian silang antara dua vektor di R^3

Diketahui $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Perkalian silang antara \bar{u} dan \bar{v} didefinisikan sebagai :

$$\begin{aligned}\bar{u} \times \bar{v} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \bar{k} \\ &= (u_2.v_3 - u_3.v_2) \bar{i} - (u_1.v_3 - u_3.v_1) \bar{j} + (u_1.v_2 - u_2.v_1) \bar{k}\end{aligned}$$

Hasil kali silang dari dua buah vektor akan menghasilkan suatu vektor tegak lurus terhadap \bar{u} dan \bar{v} . Sedangkan untuk mengetahui panjang dari vektor ini, akan dilakukan analisa yang lebih jauh untuk mengetahuinya.

Kuadrat dari norm $\bar{u} \times \bar{v}$ adalah $\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2$

$$\begin{aligned}\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 &= (u_2.v_3 - u_3.v_2)^2 + (u_1.v_3 - u_3.v_1)^2 + (u_1.v_2 - u_2.v_1)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3)^2 \\ &= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\bar{u} \cdot \bar{v})^2 \rightarrow \text{biasa disebut } \textit{identitas Lagrange}\end{aligned}$$

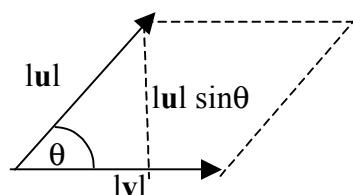
Dari identitas Lagrange

$$\begin{aligned}\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 &= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\bar{u} \cdot \bar{v})^2 \\ &= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \cos \theta)^2 \quad (\theta \text{ sudut yang dibentuk oleh } \bar{u} \text{ dan } \bar{v}) \\ &= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

atau

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \sin \theta$$

Nilai ini merupakan luas segi empat yang dibentuk \bar{u} dan \bar{v} seperti ditunjukkan dari gambar berikut :



$$\begin{aligned}\text{Luas segi empat} &= \text{panjang alas} \times \text{tinggi} \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \sin \theta \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta\end{aligned}$$

Jadi hasil kali silang dua vektor \vec{u} dan \vec{v} akan menghasilkan suatu vektor yang tegak lurus terhadap \vec{u} dan \vec{v} serta memiliki panjang sama dengan luas dari segi empat yang dibentuk oleh vektor \vec{u} dan \vec{v} .

Contoh 4.5.1

Diketahui $\vec{a} = (1, 2, 1)$ dan $\vec{b} = (2, 2, 3)$

Hitung luas segi empat yang dibentuk oleh \vec{a} dan \vec{b} !

Jawab

$$\text{Luas segi empat} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (6 - 2) \vec{i} - (3 - 2) \vec{j} + (2 - 4) \vec{k} \\ &= 4 \vec{i} - \vec{j} - 2 \vec{k} = (4, -1, -2)\end{aligned}$$

$$\text{Jadi luas segi empat} = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

Contoh 4.5.2

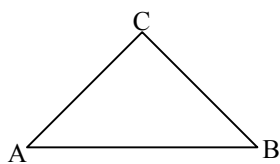
Diketahui segitiga ABC dengan titik – titik sudut adalah :

A (2, 1, -2) , B (0, -1, 0) dan C (-1, 2, -1)

Hitung luas segitiga ABC !

Jawab

Misalkan segitiga ABC yang dimaksud berbentuk seperti dibawah ini :



Segitiga ABC tersebut dapat dipandang sebagai bangun yang dibentuk oleh dua vektor \vec{AC} dan \vec{AB} , \vec{BA} dan \vec{BC} atau oleh \vec{CA} dan \vec{CB} .

Misalkan $\vec{a} = \vec{AB} = B - A = (-2, -2, 2)$ dan $\vec{b} = \vec{AC} = (-3, 1, 1)$ maka luas segitiga ABC merupakan $\frac{1}{2}$ kali luas segiempat yang dibentuk oleh vektor \vec{a} dan \vec{b} , jadi

$$\text{Luas segitiga ABC} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2 - 2) \vec{i} - (-2 - 6) \vec{j} + (-2 + 6) \vec{k} = -4 \vec{i} - 8 \vec{j} + 4 \vec{k}$$

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{96}$$

Jadi luas segitiga ABC = $\frac{1}{2} \sqrt{96}$

Pemilihan titik sudut dalam hal ini adalah bebas , sedangkan hasil akhirnya akan tetap sama.

Beberapa sifat yang berlaku dalm hasil kali silang

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$
2. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$
3. $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$
4. $k(\bar{a} \times \bar{b}) = (k\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times k\bar{b}$
5. $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$

Latihan IV

1. Diketahui \vec{u} adalah vektor yang merupakan ruas garis dari titik A (2,3,4) ke titik B (5,5,5)
 - a. Tentukan vektor \vec{u} tersebut dan hitung berapa norm dari \vec{u} !
 - b. Hitung jarak antara \vec{u} dengan $\vec{v} = (1,1,3)$
2. Diketahui $\vec{u} = (2,k,3)$ dan $\vec{v} = (4,2,7)$ sedangkan jarak antara \vec{u} dan $\vec{v} = 6$ satuan , Tentukan nilai k !
3. Tentukan nilai k agar vektor $\vec{u} = (2k,k,3)$ dan $\vec{v} = (k,5,-1)$ saling tegak lurus !
4. Tentukan nilai k agar sudut antara \vec{u} dan $\vec{v} = 180^\circ$ dengan $\vec{u} = (k+1,k+1,1)$ dan $\vec{v} = (-k-1, -k-1, k)$!
5. Diketahui $\vec{u} = (-1,3)$ dan $\vec{v} = (4,1)$
 - a. Tentukan vektor proyeksi tegak lurus \vec{u} terhadap \vec{v} !
 - b. Tentukan komponen \vec{u} yang tegak lurus terhadap \vec{v} !
6. Diketahui segitiga ABC dengan titik – titik sudut A (1,2,3) ,B (-2,2,1) dan C (3,1,3)
 - a. Hitung luas segitiga ABC dengan menggunakan A sebagai titik sudut !
 - b. Hitung luas segitiga ABC dengan menggunakan B sebagai titik sudut !
7. Diketahui $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (1, -1,1)$ dan $\vec{c} = (1,3,2)$
 - a. Tentukan vektor – vektor yang tegak lurus terhadap \vec{a} dan \vec{c} (berikan contoh 3 vektor) !
 - b. Hitung luas segitiga yang titik – titik sudutnya merupakan ujung – ujung dari vektor posisi \vec{a} , \vec{b} dan \vec{c} !

BAB V
Ruang – Ruang Vektor

V.1 Ruang – n Euclides

Pada saat pertama kali ilmu vektor dikembangkan , hanya dikenal vektor – vektor di R^2 dan R^3 saja, tetapi dalam perkembangannya ternyata didapatkan permasalahan yang lebih kompleks sehingga dikembangkan vektor – vektor di ruang berdimensi 4 , 5 atau secara umum merupakan vektor – vektor di R^n . Secara geometris memang vektor – vektor di R^4 dan seterusnya memang belum bisa digambarkan , tetapi dasar yang digunakan seperti operasi – operasi vektor masih sama seperti operasi pada vektor – vektor di R^2 dan R^3 . Orang yang pertama kali mempelajari vektor – vektor di R^n adalah Euclides sehingga vektor – vektor yang berada di R^n dikenal sebagai vektor Euclides , sedangkan ruang vektornya disebut ruang –n Euclides.

Operasi standar / baku pada vektor Euclides

Diketahui \bar{u} dan \bar{v} adalah vektor – vektor di ruang –n Euclides dengan

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ dan } \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Penjumlahan vektor

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

Perkalian titik

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n)$$

Perkalian dengan skalar

$$k \bar{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

Panjang vektor

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \cdot \bar{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Jarak antara vektor

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u} - \bar{v} \cdot \bar{u} - \bar{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh 5.1.1

Diketahui $\bar{a} = (1, 1, 2, 3)$ dan $\bar{b} = (2, 2, 1, 1)$

Tentukan jarak antara \bar{a} dan \bar{b} !

Jawab

$$\bar{a} - \bar{b} = (-1, -1, 1, 2)$$

$$d(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2} = 7$$

V.2 Ruang vektor umum

Selama ini kita telah membahas vektor – vektor di R^n Euclides dengan operasi – operasi standarnya. Sekarang akan membuat konsep tentang ruang vektor dengan konsep yang lebih luas.

Ada 10 syarat agar V disebut sebagai ruang vektor , yaitu :

1. Jika vektor – vektor $\bar{u}, \bar{v} \in V$, maka vektor $\bar{u} + \bar{v} \in V$
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$
4. Ada $\bar{0} \in V$ sehingga $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0}$ untuk semua $\bar{u} \in V$, $\bar{0}$: vektor nol
5. Untuk setiap $\bar{u} \in V$ terdapat $-\bar{u} \in V$ sehingga $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$
6. Untuk sembarang skalar k , jika $\bar{u} \in V$ maka $k\bar{u} \in V$
7. $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$, k sembarang skalar
8. $(k+l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$, k dan l skalar
9. $k(l\bar{u}) = (kl)\bar{u}$
10. $1\bar{u} = \bar{u}$

Dalam hal ini tentunya yang paling menentukan apakah V disebut ruang vektor atau tidak adalah operasi – operasi pada V atau bentuk dari V itu sendiri . Jika V merupakan ruang vektor dengan operasi – operasi vektor (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar) yang bukan merupakan operasi standar , tentunya V harus memenuhi 10 syarat diatas , jika satu saja syarat tidak dipenuhi maka tentunya V bukan merupakan ruang vektor.

Contoh ruang vektor :

1. V adalah himpunan vektor euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar) , notasinya R^n .
2. V adalah himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar
Bentuk umum polinom orde – n
 $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$
 $q_n(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$
Operasi standar pada polinom orde – n
 $p_n(x) + q_n(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$
 $k p_n = ka_0 + ka_1x + \dots + ka_nx^n$
notasi untuk ruang vektor ini adalah P_n
3. V adalah himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar) , ruang vektor ini sering di notasikan dengan M_{mn}

Contoh bukan ruang vektor

1. V adalah himpunan vektor yang berbentuk $(0, y)$ di R^2 dengan operasi vektor sebagai berikut : untuk $\bar{u} = (0, u_2)$, $\bar{v} = (0, v_2)$, maka $k\bar{u} = (0, -ku_2)$ dan $\bar{u} + \bar{v} = (0, u_2 + v_2)$
2. V himpunan matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ dengan operasi standar , $a, b \in R$

Contoh 5.2.1

Tunjukkan bahwa V yaitu himpunan matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ dengan operasi standar bukan merupakan ruang vektor, $(a, b \in \mathbb{R})$!

Jawab

Untuk membuktikan V bukan merupakan ruang vektor adalah cukup dengan menunjukkan bahwa salah satu syarat ruang vektor tidak dipenuhi .

Akan ditunjukkan apakah memenuhi syarat yang pertama

Misalkan $A = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$, $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ maka $A, B \in V$

$$A + B = \begin{bmatrix} p+r & 2 \\ 2 & q+s \end{bmatrix} \notin V \rightarrow \text{syarat 1 tidak dipenuhi}$$

Jadi V bukan merupakan ruang vektor

V.3 Sub–ruang vektor

Diketahui V ruang vektor dan U subhimpunan V . Kemudian U dikatakan sub–ruang dari V jika memenuhi dua syarat berikut :

1. Jika $\bar{u}, \bar{v} \in U$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in U$
2. Jika $\bar{u} \in U$, untuk skalar k berlaku $k\bar{u} \in U$

Contoh 5.3.1

Diketahui U adalah himpunan titik – titik di bidang dengan ordinat 0 dengan operasi standar \mathbb{R}^2 , tunjukkan bahwa U merupakan sub–ruang dari \mathbb{R}^2 !

Jawab

Akan ditunjukkan bahwa U memenuhi dua syarat sub–ruang vektor, yaitu :

1. $U = \{ x, 0 \}$ untuk sembarang nilai x , $x \in \mathbb{R}$

Misalkan $\bar{a} = (x_1, 0)$ dan $\bar{b} = (x_2, 0)$ dengan $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, maka $\bar{a}, \bar{b} \in U$

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2, 0) \text{ dengan } x_1 + x_2 \in \mathbb{R}, \text{ jadi } \bar{a} + \bar{b} \in U$$

Jadi syarat ke-1 terpenuhi.

2. Untuk skalar k , maka $k\bar{a} = (kx_1, 0)$ dengan $kx_1 \in \mathbb{R}$, jadi $k\bar{a} \in U$

Jadi syarat ke-2 terpenuhi

Kedua syarat terpenuhi, maka U merupakan sub–ruang \mathbb{R}^2

Contoh 5.3.2

Diketahui U adalah himpunan vektor – vektor yang berbentuk (a, b, c) dengan $a = b - c - 1$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ dengan operasi standar \mathbb{R}^3 , tunjukkan apakah U merupakan sub–ruang \mathbb{R}^3 atau bukan !

Jawab

Akan ditunjukkan apakah U memenuhi syarat sub–ruang vektor \mathbb{R}^3

Misalkan $\bar{a} = (b_1 - c_1 - 1, b_1, c_1)$ dan $\bar{b} = (b_2 - c_2 - 1, b_2, c_2)$ dengan $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ maka $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}$. $\bar{a} + \bar{b} = (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) - 2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \notin U$

Syarat ke-1 tidak dipenuhi, jadi U bukan merupakan sub-ruang vektor.

V.4 Membangun dan bebas linier

Sebelum membahas lebih jauh tentang vektor – vektor yang membangun ruang vektor dan vektor – vektor yang bebas linier, sebelumnya akan diberikan definisi yang berkaitan dengan masalah yang akan dibahas.

Kombinasi linier

Vektor \bar{v} dikatakan merupakan kombinasi linier dari vektor – vektor $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ bila \bar{v} bisa dinyatakan sebagai :

$$\bar{v} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \dots + k_n \bar{v}_n, \quad k_1, k_2, \dots, k_n : \text{skalar}$$

Diketahui V ruang vektor dan $S = \{ \bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n \}$ dimana $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n \in V$

S dikatakan **membangun** V bila untuk setiap $\bar{v} \in V$, \bar{v} merupakan kombinasi linier dari S , yaitu :

$$\bar{v} = k_1 \bar{s}_1 + k_2 \bar{s}_2 + \dots + k_n \bar{s}_n, \quad k_1, k_2, \dots, k_n : \text{skalar}$$

Vektor – vektor di S dikatakan **bebas linier** jika persamaan

$\bar{0} = k_1 \bar{s}_1 + k_2 \bar{s}_2 + \dots + k_n \bar{s}_n$ hanya memiliki penyelesaian $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ (atau jika diubah ke bentuk SPL, penyelesaiannya adalah trivial), jika ada penyelesaian lain untuk nilai k_1, k_2, \dots, k_n selain 0 maka dikatakan vektor – vektor di S **bergantung linier**.

Contoh 5.4.1

Diketahui $\bar{a} = (1, 2)$, $\bar{b} = (-2, -3)$ dan $\bar{c} = (1, 3)$

Apakah \bar{c} merupakan kombinasi linier dari \bar{a} dan \bar{b} ?

Jawab

Misalkan \bar{c} merupakan kombinasi linier dari \bar{a} dan \bar{b} , maka dapat ditentukan nilai untuk k_1 dan k_2 dari persamaan $\bar{c} = k_1 \bar{a} + k_2 \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Digunakan operasi baris elementer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier diatas, yaitu :

$$[A \mid \bar{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Didapatkan } \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nilai k_1 dan k_2 bisa didapatkan , jadi \bar{c} merupakan kombinasi linier dari \bar{a} dan \bar{b} yaitu $\bar{c} = 3\bar{a} + \bar{b}$

Contoh 5.4.2

Apakah $\bar{u} = (1, 2, 3)$, $\bar{v} = (2, 4, 6)$ dan $\bar{w} = (3, 4, 7)$ membangun R^3 ?

Jawab

Misalkan \bar{u}, \bar{v} dan \bar{w} membangun R^3 , maka untuk sembarang vektor di R^3 (x, y, z) , maka (x, y, z) haruslah merupakan kombinasi linier dari \bar{u}, \bar{v} dan \bar{w} . Jika dituliskan dalam bentuk matriks akan berbentuk :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Jika (x, y, z) ini merupakan kombinasi linier dari \bar{u}, \bar{v} dan \bar{w} maka ini sama saja dengan mengatakan bahwa SPL $A\bar{x} = \bar{b}$ diatas adalah SPL yang konsisten (memiliki penyelesaian).

Karena SPL diatas bukan merupakan SPL homogen , maka SPL akan **konsisten** jika **tidak ada baris 0** pada matriks A setelah dilakukan reduksi baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena terdapat baris 0 maka pastilah ada vektor di R^3 yang bukan merupakan kombinasi linier dari \bar{u}, \bar{v} dan \bar{w} . Jadi \bar{u}, \bar{v} dan \bar{w} tidak membangun R^3 .

Contoh 5.4.3

Diketahui $\bar{u} = (1, 2)$, $\bar{v} = (2, 2)$, $\bar{w} = (1, 3)$

- Apakah \bar{u}, \bar{v} dan \bar{w} membangun R^2 ?
- Apakah \bar{u}, \bar{v} dan \bar{w} bebas linier ?

Jawab

- Misalkan \bar{u}, \bar{v} dan \bar{w} membangun R^2 , maka SPL berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ merupakan SPL yang konsisten .}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{tidak terdapat baris 0.}$$

Jadi SPL konsisten $\rightarrow \bar{u}, \bar{v}$ dan \bar{w} membangun R^2

- Akan dilihat apakah persamaan $k_1\bar{u} + k_2\bar{v} + k_n\bar{w} = \bar{0}$ akan memiliki penyelesaian $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \text{ Dari operasi baris elementer pada jawaban a}$$

didapatkan bahwa

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ \frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix} \text{ jadi dapat disimpulkan bahwa } \bar{u}, \bar{v} \text{ dan } \bar{w} \text{ bergantung}$$

linier.

Contoh 5.4.4

Apakah $s(x) = -6x^2$ merupakan kombinasi linier dari $p(x) = 1 + 2x + x^2$, $q(x) = -x + 2x^2$ dan $r(x) = 1 - x^2$?

Jawab

$s(x)$ merupakan kombinasi linier dari $p(x)$, $q(x)$ dan $r(x)$ jika dan hanya jika $s(x)$ bisa dituliskan sebagai :

$s(x) = k_1 p(x) + k_2 q(x) + k_3 r(x)$ atau ekuivalen dengan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \text{ merupakan SPL yang konsisten}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

SPL konsisten, Jadi $s(x)$ merupakan kombinasi linier dari $p(x)$, $q(x)$ dan $r(x)$

dengan $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

V.5 Basis dan Dimensi

Misalkan V ruang vektor dan $S = \{ \bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n \}$. S disebut basis dari V bila memenuhi dua syarat, yaitu :

1. S bebas linier
2. S membangun V

Basis dari suatu ruang vektor tidak harus tunggal tetapi bisa lebih dari satu. Ada dua macam basis yang kita kenal yaitu **basis standar** dan **basis tidak standar**.

Contoh basis standar :

1. $S = \{ \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \}$, dengan $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \in \mathbb{R}^n$
 $\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$
 Merupakan basis standar dari \mathbb{R}^n .
2. $S = \{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$ merupakan basis standar untuk P_n (polinom orde n)
3. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ merupakan basis standar untuk M_{22}

Dimensi ruang vektor didefinisikan sebagai banyaknya unsur basis ruang vektor tersebut. Jadi $\dim R^3 = 3$, $\dim P_2 = 3$ dan $\dim M_{22} = 4$ dan sebagainya.

Pada pembahasan mengenai *membangun dan bebas linier*, suatu himpunan vektor dapat ditunjukkan merupakan himpunan yang bebas linier atau membangun ruang vektor V hanya dengan melihat dari jumlah vektor dan \dim ruang vektor. Pada contoh 5.4.3, banyaknya vektor = 3 dan $\dim (R^2) = 2$, sebenarnya tanpa menghitung kita sudah bisa menyimpulkan bahwa himpunan vektor tersebut tidak bebas linier karena agar bebas linier **maksimal jumlah vektor = dim ruang vektor**. Sebaliknya jika suatu himpunan vektor hanya memuat vektor dengan **jumlah kurang dari dim ruang vektor**, maka dapat disimpulkan bahwa himpunan vektor tersebut **tidak membangun**.

Berdasarkan hal ini, maka suatu himpunan vektor **kemungkinan** bisa menjadi **basis ruang vektor** berdimensi n jika jumlah vektornya = n . Jika jumlah vektor $< n$ maka tidak membangun sebaliknya jika jumlah vektor $> n$ maka bergantung linier.

Jika jumlah vektor = n , maka dapat dihitung nilai determinan dari ruang yang dibangun oleh himpunan vektor tersebut.

Jika $\det = 0$, maka ia tidak bebas linier dan tidak membangun

Jika $\det \neq 0$, maka ia bebas linier dan membangun \rightarrow merupakan basis.

Contoh 5.5.1

Tentukan apakah $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ merupakan basis M_{22} ?

Jawab

Jumlah matriks (bisa dipandang sebagai vektor di R^4) dalam $H = 4 = \dim M_{22}$, Jadi untuk menentukan apakah H merupakan basis dari R^4 atau bukan adalah dengan melihat nilai determinan dari ruang yang dibangun oleh H .

Misalkan W adalah ruang yang dibangun oleh H , maka untuk sembarang $w \in$

$$W \text{ berlaku : } w = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = A \bar{k}$$

Untuk menentukan apakah H merupakan basis atau tidak adalah dengan menghitung nilai $\det(A)$ dari SPL diatas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = -4$$

Jadi H merupakan basis dari M_{22} .

V.6 Basis ruang baris dan basis ruang kolom

Suatu matriks berukuran $m \times n$ dapat dipandang sebagai susunan bilangan yang tersusun dari bilangan dalam kolom 1 sampai kolom n atau dalam baris 1 sampai

baris m . Jadi jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Maka A tersusun atas vektor –vektor baris \bar{r}_i dengan $\bar{r}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ atau bisa juga dikatakan A tersusun atas vektor – vektor kolom $\bar{c}_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{mj})$ dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$

Subruang R^n yang dibangun oleh vektor– vektor baris disebut **ruang baris dari A**

Subruang R^m yang dibangun oleh vektor– vektor kolom disebut **ruang kolom dari A** .

Menentukan basis ruang kolom / baris

Basis ruang kolom A didapatkan dengan melakukan OBE pada A , sedangkan basis ruang kolom A didapatkan dengan melakukan OBE pada A^t .

Banyaknya unsur basis ditentukan oleh banyaknya satu utama pada matriks eselon baris tereduksi.

Dimensi (ruang baris) = dimensi (ruang kolom) = **rank matriks**

Contoh 6.1

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, Tentukan basis ruang baris dan basis ruang kolom !

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi basis ruang baris $\{ \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3 \}$, sedangkan basis ruang kolom adalah $\{ \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3 \}$, sedangkan rank $A = 3$

V.7 Basis ruang solusi

Pada suatu sistem persamaan linear homogen $A\bar{x} = \bar{0}$ dengan solusi yang tak –trivial dan A berukuran $m \times n$, ruang solusi dari SPL biasa disebut dengan **ruang null** dari A , sedangkan dimensi dari ruang null disebut **nullitas A** . Ada hubungan antara rank A dengan nulitas A yaitu **rank A + nullitas A = n** . Basis ruang solusi tentunya diperoleh dari ruang nullnya.

Contoh 5.7.1

Diketahui SPL homogen $A\bar{x} = \bar{0}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, tentukan ruang null dari A dan rank A !

Jawab

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi ruang null} = \begin{bmatrix} -3s \\ s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s$$

Jadi $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bisa diambil sebagai basis untuk ruang null .

Nullitas A = 1.

Bisa juga diperiksa bahwa nullitas A + rank A = 3 = n.

Latihan 5

1. Tentukan jarak antara $\vec{a} = (1, 1, 2, 3)$ dan $\vec{b} = (2, 3, 4, 5)$ dan panjang masing – masing vektor !
2. Diketahui $\vec{a} = (k^2, 1, k, -1)$ dan $\vec{b} = (12, k, -6, 3)$ adalah vektor – vektor yang tegak lurus, Tentukan nilai k !
3. Tentukan vektor – vektor yang tegak lurus terhadap $\vec{a} = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 1, 0)$ dan $\vec{c} = (0, 1, 2, 2)$? Berikan dua contoh !
4. Diketahui V : Himpunan vektor – vektor di R^3 dengan operasi :
 $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 + 1)$
 $k \vec{u} = (ku_1, ku_2, u_3)$
 Tunjukkan aksioma ruang vektor mana saja yang tidak dipenuhi !

Untuk nomor 5 – 8 , tentukan apakah U dengan operasi standar merupakan sub–ruang M_{22} , bila (berikan contoh matriksnya bila U bukan merupakan sub–ruang vektor):

- 5 U merupakan himpunan matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$.
- 6 U merupakan himpunan matriks 2×2 dengan determinan = 0
- 7 U merupakan himpunan matriks 2×2 yang berbentuk $A^2 = A$
8. Apakah $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
 - a. Merupakan matriks –matriks yang bebas linier ?
 - b. Membangun M_{22} ?
9. Diketahui $H = \{2, 2x + 2x^2, 1 + x - 2x^2\}$ dan $H \in P_2$
 - a. Apakah H membangun P_2 ?
 - b. Apakah H bebas linier ?
 - c. Apakah H basis P_2 ?

Soal – Soal campuran

1. Tentukan penyelesaian dari SPL berikut !

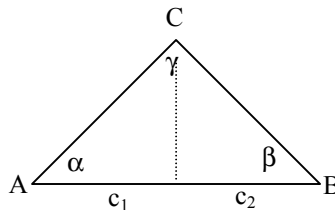
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$
2. Tentukan nilai a agar SPL

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (a^2 - 4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ a - 2 \end{bmatrix}$$
 - a. Memiliki solusi tunggal !
 - b. Memiliki solusi tak hingga !

3. Diketahui sistem persamaan linier $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 1-b^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ b \end{bmatrix}$$

- Tentukan nilai – nilai untuk a dan b agar sistem persamaan linier diatas memiliki solusi tunggal !
 - Untuk nilai a = 1, Tentukan nilai untuk b agar SPL diatas memiliki solusi banyak dan tuliskan juga solusi untuk \bar{x} !
 - Untuk a = 0 dan b = 1, selidiki apakah metode Cramer dapat digunakan untuk mencari solusi untuk \bar{x} , jika dapat tentukan solusinya !
4. Diketahui $\bar{a} = (1, k, k^2)$ dan $\bar{b} = (-2, -1, 1)$
- Tentukan nilai dari k agar \bar{a} dan \bar{b} tegak lurus !
 - Tentukan vektor satuan yang tegak lurus terhadap \bar{b} !
 - Untuk nilai k = 1, tentukan vektor yang merupakan komponen dari \bar{a} yang tegak lurus terhadap \bar{b} (lengkapi dengan gambar dua dimensi)
5. Diketahui A, B dan C adalah titik – titik sebuah segitiga dengan α , β dan γ berturut – turut merupakan sudut yang terletak di titik A, B dan C seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini :



Jika a merupakan panjang dari BC , b merupakan panjang dari AC , c merupakan panjang dari AB dan misalkan c dibagi menjadi dua bagian yaitu c_1 dan c_2 dengan titik pembatasnya adalah proyeksi ortogonal titik C terhadap AB , Maka didapatkan persamaan linier sebagai berikut :

$$c = c_1 + c_2 = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

- Dengan pemikiran yang sama, Nyatakan a dan b dalam bentuk persamaan seperti c diatas kemudian selesaikan SPL yang muncul untuk menentukan nilai (rumus) untuk $\cos \alpha$, $\cos \beta$ dan $\cos \gamma$!
 - Hitung luas segitiga ABC dan $\cos \beta$ jika diketahui titik A(1,1,2) , B (2,2,1) dan C (3,1,1) !
6. Diketahui vektor posisi $\bar{a} = (1, 1, 2)$, $\bar{b} = (2, 2, 2)$ dan $\bar{c} = (2, 1, 1)$
- Tentukan vektor satuan yang tegak lurus terhadap \bar{a} dan \bar{b} !
 - Tentukan vektor proyeksi orthogonal \bar{b} terhadap \bar{a} !
 - Hitung luas segitiga ABC yang titik – titiknya merupakan ujung – ujung vektor \bar{a} , \bar{b} dan \bar{c} !

7. Segitiga ABC memiliki titik – titik sudut $A(1,1,1)$, $B(2,3,3)$ dan $C(-1,2,2)$
- Jika θ adalah sudut di titik A , Hitung $\sin \theta$!
 - Hitung luas segitiga ABC !
8. a. Apakah $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (1,0,1)$, $\vec{c} = (2,2,2)$ dan $\vec{d} = (1,4,1)$ membangun R^3 ? Jelaskan !
- b. Apakah $p_1 = 2 + 2x - 3x^2$, $p_2 = 1 + x^2$ dan $p_3 = 3 + 2x - 2x^2$ merupakan polinom – polinom yang bebas linier ? Jelaskan !
9. Diketahui $\vec{a} = (2,k)$, $\vec{b} = (3,1)$
- Tentukan nilai k agar sudut yang dibentuk antara \vec{a} dan \vec{b} adalah 45° !
 - Tentukan komponen dari \vec{b} yang tegak lurus terhadap \vec{a} !

BAB VI

Ruang Hasil Kali Dalam

VI.1 Hasil kali dalam

Definisi

Hasil kali dalam adalah fungsi yang mengaitkan setiap pasangan vektor di ruang vektor V (misalkan pasangan \bar{u} dan \bar{v} , dinotasikan dengan $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$) dengan bilangan riil dan memenuhi 4 aksioma, yaitu :

1. Simetris : $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$
2. Aditivitas : $\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$
3. Homogenitas : $\langle k\bar{u}, \bar{v} \rangle = k\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, k skalar
4. Positivitas : $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq 0$ dan $(\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0 \leftrightarrow \bar{u} = \bar{0})$

Ruang vektor yang dilengkapi hasil kali dalam seperti diatas disebut **Ruang hasil kali dalam** yang biasa disingkat dengan RHD.

Contoh 6.1.1

Tunjukkan bahwa operasi perkalian titik standar di R^3 Euclides merupakan hasil kali dalam !

Jawab

Akan ditunjukkan bahwa perkalian titik standar memenuhi keempat aksioma hasil kali dalam, yaitu :

Misalkan $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ maka $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R^3$

1. Simetris

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle &= (\bar{a} \cdot \bar{b}) \\
 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
 &= (b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3) \\
 &= \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle \quad \dots\dots\dots (\text{terpenuhi})
 \end{aligned}$$

2. Aditivitas

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{a} + \bar{b}, \bar{c} \rangle &= ((\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c}) \\
 &= ((a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \cdot (c_1, c_2, c_3)) \\
 &= ((a_1c_1 + b_1c_1) + (a_2c_2 + b_2c_2) + (a_3c_3 + b_3c_3)) \\
 &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\
 &= (\bar{a} \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot \bar{c}) \\
 &= \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \quad \dots\dots\dots (\text{terpenuhi})
 \end{aligned}$$

3. Homogenitas

$$\begin{aligned}
 \langle k\bar{a}, \bar{b} \rangle &= (k\bar{a} \cdot \bar{b}) \\
 &= (ka_1b_1 + ka_2b_2 + ka_3b_3) \\
 &= k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
 &= k(\bar{a} \cdot \bar{b}) \\
 &= k\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \quad \dots\dots\dots (\text{terpenuhi})
 \end{aligned}$$

4. Positivitas

$$\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = (\bar{a} \cdot \bar{a}) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (\text{terpenuhi})$$

dan

$$\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = (0,0,0) = \bar{0} \quad \dots\dots\dots (\text{terpenuhi})$$

RHD yang memiliki hasil kali dalam berupa perkalian titik standar seperti diatas biasa disebut RHD Euclides.

Contoh 6.1.2

Diketahui $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = ad + cf$ dengan $\bar{u} = (a,b,c)$ dan $\bar{v} = (d,e,f)$, Apakah $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ tersebut merupakan hasil kali dalam ?

Jawab

Akan ditunjukkan apakah $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ tersebut memenuhi keempat aksioma hasil kali dalam

Aksioma

1. Simetris

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle &= ad + cf \\ &= da + fc \\ &= \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \quad \dots\dots\dots (\text{terpenuhi}) \end{aligned}$$

2. Aditivitas

Misalkan $\bar{w} = (g,h,i)$

$$\begin{aligned} \langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} \rangle &= \langle (a+d, b+e, c+f), (g,h,i) \rangle \\ &= (a+d)g + (b+e)h + (c+f)i \\ &= (ag + bh + ci) + (dg + eh + fi) \\ &= \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle \quad \dots\dots (\text{terpenuhi}) \end{aligned}$$

3. Homogenitas

$$\begin{aligned} \langle k\bar{u}, \bar{v} \rangle &= (kad + kcf) \\ &= k(ad + cf) \\ &= k\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \quad \dots\dots\dots (\text{terpenuhi}) \end{aligned}$$

4. Positivitas

$$\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = (\bar{u} \cdot \bar{u}) = (a^2 + c^2) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (\text{terpenuhi})$$

dan

$$(\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = (a^2 + c^2) = 0 \text{ tidak selalu} \Leftrightarrow \bar{u} = (0,0,0) \text{ karena untuk nilai } \bar{u} = (0,b,0) \text{ dengan } b \neq 0 \text{ maka nilai } \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0 \dots\dots (\text{tidak terpenuhi})$$

Aksioma positivitas tidak terpenuhi maka $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = ad + cf$ dengan $\bar{u} = (a,b,c)$ dan $\bar{v} = (d,e,f)$ **bukan** merupakan hasil kali dalam.

VI.2 Panjang vektor , jarak antar vektor ,dan besar sudut dalam RHD

Ketika kita membahas tentang panjang vektor , maka kita harus menghilangkan rumusan yang selama ini kita gunakan mengenai panjang vektor dalam ruang $-n$ Euclides berdasarkan operasi hasil kali titik . Kita akan menghitung panjang suatu berdasarkan hasil kali dalam yang telah diberikan, dan sudah dibuktikan bersama – sama bahwa hasil

kali titik dalam ruang – n Euclides juga merupakan hasil kali dalam jadi konsep yang digunakan ini akan lebih luas daripada konsep sebelumnya.

Misalkan V merupakan ruang hasil kali dalam, $\bar{u}, \bar{v} \in V$ maka

- Panjang $\bar{u} = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{1/2}$
- Jarak \bar{u} dan \bar{v} , $d(\bar{u}, \bar{v}) = \langle \bar{u} - \bar{v}, \bar{u} - \bar{v} \rangle^{1/2}$
- Misalkan ϕ sudut antara \bar{u} dan \bar{v} dalam RHD, maka besar $\cos \phi$ adalah :

$$\cos \theta = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|}$$

Jika \bar{u} dan \bar{v} saling tegak lurus maka $\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$

Bukti

$$\begin{aligned} \|\bar{u} + \bar{v}\|^2 &= \langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v} \rangle \\ &= \langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{v} \rangle \\ &= \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle + 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \\ &= \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 \end{aligned}$$

Contoh 6.2.1

Diketahui V adalah RHD dengan hasil kali dalam $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = (u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3)$ dengan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Jika vektor – vektor $\bar{a}, \bar{b} \in V$ dengan $\bar{a} = (1, 2, 3)$ dan $\bar{b} = (1, 2, 2)$, Tentukan

- Besar $\cos \alpha$ jika sudut yang dibentuk antara \bar{a} dan \bar{b} adalah α !
- Jarak antara \bar{a} dan \bar{b} !

Jawab

$$\cos \theta = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\| \|\bar{b}\|}$$

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 1.1 + 2.(2.2) + 2.3 = 15$$

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{1^2 + 2.2^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$\|\bar{b}\| = \sqrt{1^2 + 2.2^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Jadi } \cos \theta = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\| \|\bar{b}\|} = \frac{15}{\sqrt{18} \sqrt{13}} = \frac{15}{\sqrt{234}}$$

VI.3 Basis orthonormal

Diketahui V ruang hasil kali dalam dan $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ adalah vektor – vektor dalam V .

Beberapa definisi penting

- $H = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \}$ disebut **himpunan orthogonal** bila setiap vektor dalam V saling tegak lurus, yaitu $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = 0$ untuk $i \neq j$ dan $i, j = 1, 2, \dots, n$.

- b. $G = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \}$ disebut **himpunan orthonormal** bila
- G himpunan orthogonal
 - Norm dari $v_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ atau $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle = 1$

Metode Gramm–Schmidt

Metode Gramm–Schmidt digunakan untuk merubah suatu himpunan vektor yang bebas linier menjadi himpunan yang orthonormal. , jadi dalam hal ini disyaratkan himpunan yang ditransformasikan ke himpunan orthonormal adalah himpunan yang **bebas linier**. Jika yang akan ditransformasikan adalah himpunan vektor yang merupakan **basis** dari ruang vektor V maka metode Gramm–Schmidt akan menghasilkan **basis orthonormal** untuk V .

Sebelum membahas tentang metode ini, akan dibahas tentang **proyeksi orthogonal vektor terhadap ruang yang dibangun oleh himpunan vektor**.

Diketahui $H = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \}$ adalah himpunan vektor yang bebas linier dari ruang vektor V dengan $\dim \geq n$ dan $S = \{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n \}$ merupakan himpunan yang orthonormal . Jika W menyatakan ruang yang dibangun oleh $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$ maka untuk setiap vektor \bar{z}_1 dalam W , dapat dituliskan $\bar{z}_1 = k_1 \bar{w}_1 + k_2 \bar{w}_2 + \dots + k_n \bar{w}_n$ dengan k_1, k_2, \dots, k_n skalar.

Jika \bar{u} adalah sembarang vektor dalam V , maka tentunya \bar{u} dapat dituliskan sebagai jumlah dari dua vektor yang saling tegak lurus misalkan \bar{z}_1 dan \bar{z}_2 , jadi dapat dituliskan $\bar{u} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. Karena \bar{z}_1 dalam W , maka sebenarnya \bar{z}_1 merupakan proyeksi orthogonal \bar{u} terhadap W , sedangkan \bar{z}_2 merupakan komponen vektor \bar{u} yang tegak lurus terhadap W . Jadi untuk menentukan \bar{z}_1 , maka harus ditentukan nilai k_1, k_2, \dots, k_n sedemikian hingga nilai k_1 merupakan panjang proyeksi \bar{u} terhadap \bar{w}_1 , k_2 merupakan panjang proyeksi \bar{u} terhadap \bar{w}_2 dan seterusnya sehingga k_n merupakan panjang proyeksi \bar{u} terhadap \bar{w}_n . Proyeksi orthogonal \bar{u} terhadap \bar{w}_i adalah $\text{proy}_{w_i}(\bar{u}) = \langle \bar{u}, \bar{w}_i \rangle$, dikarenakan $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$ merupakan vektor – vektor yang orthonormal .

Jadi dapat dituliskan bahwa **proyeksi orthogonal \bar{u} terhadap W** adalah :

$\text{proy}_W(\bar{u}) = \bar{z}_1 = \langle \bar{u}, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 + \langle \bar{u}, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2 + \dots + \langle \bar{u}, \bar{w}_n \rangle \bar{w}_n$ dengan $\{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n \}$ merupakan himpunan orthonormal.

Komponen \bar{u} yang tegak lurus terhadap W adalah

$$\bar{z}_2 = \bar{u} - (\langle \bar{u}, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 + \langle \bar{u}, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2 + \dots + \langle \bar{u}, \bar{w}_n \rangle \bar{w}_n)$$

Misal diketahui $K = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \}$ adalah himpunan yang bebas linier, maka K dapat dirubah menjadi himpunan $S = \{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n \}$ yang orthonormal dengan menggunakan metode Gramm–Schmidt yaitu :

1. $\bar{w}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$, ini proses normalisasi yang paling sederhana karena hanya melibatkan satu vektor saja. Pembagian dengan $\|\bar{v}_1\|$ bertujuan agar \bar{w}_1 memiliki panjang = 1 , pada akhir langkah ini didapatkan \bar{w}_1 orthonormal.

$$2. \quad \bar{w}_2 = \frac{\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1}{\|\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1\|}$$

Pada akhir langkah ini didapatkan dua vektor \bar{w}_1 dan \bar{w}_2 yang orthonormal.

$$3. \quad \bar{w}_3 = \frac{\bar{v}_3 - \langle \bar{v}_3, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 - \langle \bar{v}_3, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2}{\|\bar{v}_3 - \langle \bar{v}_3, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 - \langle \bar{v}_3, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2\|}$$

•
•
•

$$n. \quad \bar{w}_n = \frac{\bar{v}_n - \langle \bar{v}_n, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 - \langle \bar{v}_n, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2 - \dots - \langle \bar{v}_n, \bar{w}_{n-1} \rangle \bar{w}_{n-1}}{\|\bar{v}_n - \langle \bar{v}_n, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 - \langle \bar{v}_n, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2 - \dots - \langle \bar{v}_n, \bar{w}_{n-1} \rangle \bar{w}_{n-1}\|}$$

Secara umum $\bar{w}_i = \frac{\bar{v}_i - \text{pro}_W(\bar{v}_i)}{\|\bar{v}_i - \text{pro}_W(\bar{v}_i)\|}$ dengan **W** merupakan ruang yang dibangun oleh $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{i-1}$.

Pada metode ini, pemilihan $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ tidak harus mengikuti urutan vektor yang diberikan tetapi bebas sesuai keinginan kita karena satu hal yang perlu diingat bahwa basis suatu ruang vektor tidak tunggal. Jadi dengan mengubah urutan dari $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ sangat memungkinkan didapatkan jawaban yang berbeda – beda. Pemilihan urutan dari $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ yang disarankan adalah yang mengandung hasil kali dalam yang bernilai 0 yaitu $\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = 0$, dalam kasus ini bisa diambil $\bar{v}_1 = \bar{v}_i$ dan $\bar{v}_2 = \bar{v}_j$ dan seterusnya.

Contoh 6.3.1

Diketahui $H = \{ \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \}$ dengan $\bar{a} = (1, 1, 1)$, $\bar{b} = (1, 2, 1)$, $\bar{c} = (-1, 1, 0)$

- Apakah H basis R^3 ?
- Jika ya, transformasikan H menjadi basis orthonormal dengan menggunakan hasil kali dalam Euclides!

Jawab

- Karena $\dim(R^3) = 3$ dan jumlah vektor dalam $H = 3$, maka untuk menentukan apakah H merupakan basis R^3 atau bukan, adalah dengan cara menghitung determinan matriks koefisien dari SPL $A\bar{x} = \bar{b}$ dengan \bar{b} adalah sembarang vektor

dalam R^3 , yaitu $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Jika $\det = 0$ maka berarti H bukan merupakan

basis R^3 , sebaliknya jika $\det \neq 0$ maka berarti vektor – vektor di H bebas linier dan membangun R^3 , jadi H merupakan basis R^3 .

Dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga, didapatkan

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Karena $\det = 1$, ini berarti H merupakan basis dari \mathbb{R}^3

- b. Hasil kali dalam antara \bar{a} , \bar{b} dan \bar{c}

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 4, \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle = 0, \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle = 1$$

Untuk memilih basis yang perhitungannya lebih sederhana dapat diambil

$$\bar{v}_1 = \bar{a}, \bar{v}_2 = \bar{c}, \bar{v}_3 = \bar{b}$$

$$a. \bar{w}_1 = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

$$b. \bar{w}_2 = \frac{\bar{c} - \langle \bar{c}, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1}{\|\bar{c} - \langle \bar{c}, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1\|} = \frac{\bar{c}}{\|\bar{c}\|} = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}$$

$$\{ \text{Karena } \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle = 0 \text{ maka } \langle \bar{c}, \bar{w}_1 \rangle = \frac{\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle}{\|\bar{a}\|} = \frac{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}{\|\bar{a}\|} = 0 \}$$

$$c. \bar{w}_3 = \frac{\bar{b} - \langle \bar{b}, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 - \langle \bar{b}, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2}{\|\bar{b} - \langle \bar{b}, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 - \langle \bar{b}, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2\|} = \frac{\bar{b} - \frac{1}{3} \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle \bar{a} - \frac{1}{2} \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \bar{c}}{\|\bar{b} - \frac{1}{3} \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle \bar{a} - \frac{1}{2} \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \bar{c}\|}$$

$$\bar{b} - \frac{1}{3} \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle \bar{a} - \frac{1}{2} \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{b} - \frac{1}{3} \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle \bar{a} - \frac{1}{2} \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \bar{c}\| = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Jadi } \bar{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Normalisasi himpunan orthogonal ke himpunan orthonormal

Diketahui V RHD dan $H = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \} \in V$ merupakan himpunan orthogonal dengan $\bar{v}_i \neq 0$ maka bisa didapatkan himpunan orthonormal yang didefinisikan sebagai

$S = \{ \bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n \}$ dengan $\bar{s}_i = \frac{\bar{v}_i}{\|\bar{v}_i\|}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Kalau dilihat secara seksama,

sebenarnya rumusan ini merupakan rumusan dari metode Gramm–Schmidt yang telah

mengalami reduksi yaitu untuk nilai $\text{proy}_W(v_i) = 0$ akibat dari $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ yang saling orthogonal. Proses untuk mendapatkan vektor yang orthonormal biasa disebut dengan **menormalisasikan vektor**. Jika $\dim(V) = n$, maka S juga merupakan basis orthonormal dari V .

Contoh 6.3.2

Diketahui dan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R^3$ dengan $\bar{a} = (2, -1, 1)$, $\bar{b} = (2, 5, 1)$, $\bar{c} = (-1, 0, 2)$. Jika R^3 merupakan RHD Euclides, Transformasikan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ke basis orthonormal !

Jawab

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 0, \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle = 0, \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle = 0$$

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}, \quad \|\bar{b}\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30},$$

$$\|\bar{c}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Misalkan $H = \{ \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \}$ maka H merupakan **himpunan orthonormal**
 $\text{Dim}(R^3) = 3$ jadi dapat ditentukan basis orthonormal untuk R^3 .

$$\text{Misalkan } \bar{s}_1 = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1), \bar{s}_2 = \frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, 1), \bar{s}_3 = \frac{\bar{c}}{\|\bar{c}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, 2)$$

Basis orthonormal untuk R^3 adalah $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, 2) \right\}$

VI.4 Perubahan Basis

Seperti diketahui bahwa suatu ruang vektor bisa memiliki beberapa basis. Dari sifat inilah tentunya jika terdapat sembarang vektor \bar{x} dalam suatu ruang vektor V yang memiliki himpunan vektor A dan B sebagai basisnya maka \bar{x} tentunya merupakan kombinasi linier dari vektor – vektor di A dan B . Kajian yang dilakukan sekarang ini adalah melihat hubungan antar kombinasi linier tersebut. Secara sistematis, langkah – langkahnya dapat dilihat seperti berikut ini;

Jika V ruang vektor, $S : \{ \bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n \}$ merupakan basis V maka untuk sembarang $\bar{x} \in V$, dapat dituliskan :

$$\bar{x} = k_1 \bar{s}_1 + k_2 \bar{s}_2 + \dots + k_n \bar{s}_n \text{ dengan } k_1, k_2, \dots, k_n \text{ skalar.}$$

k_1, k_2, \dots, k_n juga disebut koordinat \bar{x} relatif terhadap basis S .

$$[\bar{x}]_S = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \text{ disebut matriks } \bar{x} \text{ relatif terhadap basis } S.$$

Jika S merupakan basis orthonormal, maka

$$[\bar{x}]_S = \begin{bmatrix} \langle \bar{x}, \bar{s}_1 \rangle \\ \langle \bar{x}, \bar{s}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{x}, \bar{s}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Jika $A = \{ \bar{x}_1, \bar{x}_2 \}$ dan $B = \{ \bar{y}_1, \bar{y}_2 \}$ berturut – turut merupakan basis dari V , maka untuk sembarang $\bar{z} \in V$ bisa didapatkan $[\bar{z}]_A$ dan $[\bar{z}]_B$. Bagaimana hubungan $[\bar{z}]_A$ dan $[\bar{z}]_B$?

Misalkan $[\bar{x}_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ dan $[\bar{x}_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

Dari $[\bar{x}_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ didapatkan $\bar{x}_1 = a \bar{y}_1 + b \bar{y}_2 \dots\dots\dots (1)$

Dari $[\bar{x}_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ didapatkan $\bar{x}_2 = c \bar{y}_1 + d \bar{y}_2 \dots\dots\dots (2)$

Untuk $[\bar{z}]_A = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ maka didapatkan $\bar{z} = k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 \dots\dots\dots (3)$

Dengan melakukan substitusi dari persamaan 1 dan 2 ke persamaan 3 didapatkan :

$$\begin{aligned} \bar{z} &= k_1 (a \bar{y}_1 + b \bar{y}_2) + k_2 (c \bar{y}_1 + d \bar{y}_2) \\ &= (k_1 a + k_2 c) \bar{y}_1 + (k_1 b + k_2 d) \bar{y}_2 \end{aligned}$$

Ini berarti $[\bar{z}]_B = \begin{bmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = P [\bar{z}]_A$

P disebut matriks transisi dari basis A ke basis B .

Secara umum, jika $A = \{ \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \}$ dan $B = \{ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n \}$ berturut – turut merupakan basis dari ruang vektor V , maka matriks transisi basis A ke basis B adalah :

$$P = \begin{bmatrix} [\bar{x}_1]_B & [\bar{x}_2]_B & \dots & [\bar{x}_n]_B \end{bmatrix}$$

Jika P dapat dibalik, maka P^{-1} merupakan matriks transisi dari basis B ke basis A .

Contoh 6.4

Diketahui $A = \{ \bar{v}, \bar{w} \}$ dan $B = \{ \bar{x}, \bar{y} \}$ berturut – turut merupakan basis \mathbb{R}^2 , dengan $\bar{v} = (2, 2)$, $\bar{w} = (3, -1)$, $\bar{x} = (1, 3)$ dan $\bar{y} = (-1, -1)$

Tentukan

- Matriks transisi dari basis A ke basis B !
- Hitung $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_A$
- Hitung $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B$ dengan menggunakan hasil pada (b) !
- Matriks transisi dari basis B ke basis A !

Jawab

a. Misalkan $[\bar{v}]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ maka $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, didapatkan $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan untuk $[\bar{w}]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ maka $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, maka didapatkan $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$

Jadi matriks transisi dari basis A ke basis B adalah : $P = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

- b. Misalkan $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ maka ,didapatkan $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- c. Dari (a) dan (b) didapatkan $P = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sehingga $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B =$
- $$P \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
- d. Matriks transisi dari basis B ke basis A adalah P^{-1} dengan P merupakan matriks transisi terhadap basis A ke basis B .
- Jadi $P^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan matriks transisi dari basis B ke basis A.

Latihan 5

1. Diketahui $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2^2 b_2^2$ dengan $\bar{a} = (a_1, a_2)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2)$.
Tunjukkan sifat Hasil kali dalam yang **tidak dipenuhi** !
2. Diketahui $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3$ dengan $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ Periksa apakah $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ merupakan hasil kali dalam atau tidak ! jika tidak tentukan aksioma mana yang tidak memenuhi !
3. R^3 merupakan RHD dengan hasil kali dalam $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + u_3 v_3$ dengan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. W adalah subruang R^3 yang memiliki basis $B = \{(-2, 2, 2), (1, 3, -3)\}$
 - a. Transformasikan B menjadi basis orthonormal !
 - b. Misal $\bar{x} = (2, 2, -4)$ di R^3 , nyatakan $\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$ dengan $\bar{y} \in W$ dan \bar{z} orthogonal terhadap W !
4. R^3 merupakan RHD dengan hasil kali dalam $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 2u_3 v_3$ dengan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. W adalah subruang R^3 yang memiliki basis $C = \{\bar{b}_1 = (-1, 0, -1), \bar{b}_2 = (2, 1, 2)\}$
 - a. Hitung $\sin \beta$ jika β adalah sudut antara \bar{b}_1 dan \bar{b}_2 !
 - b. Tentukan jarak antara \bar{b}_1 dan \bar{b}_2 !
 - c. Misal $\bar{x} = (1, 2, -1)$ di R^3 , \bar{y} dan \bar{z} adalah komponen dari \bar{x} , dengan $\bar{y} \in W$ dan \bar{z} orthogonal terhadap W, Tentukan \bar{y} dan \bar{z} !
5. Diketahui $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ merupakan matriks transisi dari basis A terhadap basis B, dengan $A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ dan $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ merupakan basis R^2 . Jika $\bar{x} = 2\bar{a}_1 - \bar{a}_2$, tentukan $[\bar{x}]_B$!
6. Diketahui $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dan $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ basis R^3 . Jika $[\bar{x}]_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, Tentukan
 - a. \bar{x}
 - b. matriks transisi dari basis A ke basis B
 - c. $[\bar{x}]_B$

BAB VII Ruang Eigen

VII.1 Nilai Eigen suatu matriks

Diketahui A matriks berukuran $n \times n$, \bar{x} vektor tak-nol berukuran $n \times 1$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Karena A berukuran $n \times n$, maka $A\bar{x}$ akan berupa vektor yang berukuran $n \times 1$ juga. Bila terdapat skalar λ , $\lambda \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ ($A\bar{x}$ menghasilkan vektor yang besarnya λ kali \bar{x}). Semua nilai λ yang memenuhi persamaan tersebut sehingga ada nilai \bar{x} yang nyata (bukan vektor $\bar{0}$ saja) disebut *nilai eigen* (karakteristik).

Untuk menentukan nilai λ , dari persamaan $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ sebelumnya dirubah dahulu menjadi persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0} = (\lambda I - A)\bar{x}$. Agar persamaan tersebut memiliki penyelesaian tak-trivial (sejati), maka dapat ditentukan melalui nilai $\det(A - \lambda I)$ yaitu $\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0$. Persamaan $\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = 0$ ini disebut persamaan karakteristik. Banyaknya nilai eigen maksimal adalah n buah.

Dari nilai eigen yang telah diperoleh tersebut dapat ditentukan ruang solusi untuk \bar{x} dengan memasukkan nilai eigen yang diperoleh kedalam persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$. Ruang solusi yang diperoleh dengan cara demikian ini disebut juga dengan *ruang eigen*. Dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tertentu tersebut dapat dicari minimal sebuah *basis ruang eigen* yang saling bebas linear.

Contoh 7.1.1

$$\text{Diketahui } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai Eigen beserta basis ruang eigennya !

Jawab

Persamaan karakteristik dari A adalah $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} &= (\lambda-1)^2 \lambda - 2(\lambda-1) = (\lambda-1) [(\lambda-1)\lambda - 2] \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Jadi nilai eigen untuk A adalah : $-1, 1, 2$.

Basis ruang eigen diperoleh dengan memasukkan nilai eigen yang diperoleh kedalam persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$.

Untuk $\lambda = -1$

Didapatkan persamaan
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ruang eigen $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -s \\ s \end{bmatrix}$, basis ruang eigen bisa berupa $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda = 1$

Didapatkan persamaan
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ruang eigen $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix}$, basis ruang eigen bisa berupa $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda = 2$

Didapatkan persamaan
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ruang eigen $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ 2s \\ s \end{bmatrix}$, basis ruang eigen bisa berupa $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Jadi terdapat tiga buah basis ruang eigen yang bebas linear yang bersesuaian dengan nilai eigen -1 , 1 dan 2 .

Untuk kasus yang khusus, jika A memiliki n buah nilai eigen $= \lambda$, maka akan memiliki nilai eigen λ^k . Jika banyaknya nilai eigen dari A^k sebanyak n juga maka basis ruang eigennya tatap sama, tetapi jika jumlah nilai eigennya kurang dari n (ini terjadi jika ada nilai eigen yang saling berlawanan tanda), maka salah satu nilai eigennya akan memiliki basis ruang eigen yang berbeda.

Contoh 7.1.2

$$B = A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka nilai eigen untuk B adalah : $-1^2, 1^2, 2^2$ dengan basis ruang eigen untuk

$$\lambda = 1, \text{ basis ruang eigennya : } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 4, \text{ basis ruang eigennya : } \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pada contoh ini, untuk $\lambda = 1$, memiliki dua basis ruang eigen yang berasal dari nilai eigen -1 dan 1 . Karena berasal dari dua nilai eigen yang berbeda maka basis ruang eigennya juga mengalami sedikit perubahan yaitu untuk basis ruang

eigen dengan $\lambda = -1$. Basis ruang eigen $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ini merupakan vektor proyeksi

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ terhadap vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dalam hal ini basis ruang eigen untuk $\lambda = -1$ dibuat

saling orthogonal. Cara lain yang bisa digunakan untuk menentukan basis ruang eigen tentunya dengan memasukkan nilai $\lambda = -1$ kedalam persamaan karakteristik seperti cara sebelumnya.

VII.2 Diagonalisasi

Pada pembahasan kali ini adalah mengenai penentuan matriks diagonal D dan matriks pendagonal P yang berkaitan dengan basis ruang eigen yang telah dipelajari pada bahasan sebelumnya. Jika A matriks bujursangkar berukuran n, dan terdapat matriks diagonal D sedemikian hingga $D = P^{-1}AP$ sehingga dikatakan matriks A dapat didiagonalisasi. P merupakan matriks n x n yang kolom – kolomnya merupakan vektor – vektor kolom dari basis ruang eigen A. P disebut matriks yang mendiagonalisasi A, sedangkan D merupakan matriks diagonal yang elemen diagonalnya merupakan semua nilai eigen dari A.

Tidak semua matriks bujur sangkar dapat didiagonalisasi tergantung dari jumlah basis ruang eigen yang dimiliki. Jika matriks bujur sangkar berukuran n dan basis ruang eigen yang bebas linear berjumlah n juga, maka matriks tersebut dapat didiagonalisasi, jika jumlahnya kurang dari n maka tidak dapat didiagonalisasi. Pada saat matriks memiliki nilai eigen sejumlah n, maka basis ruang eigennya juga akan berjumlah n, sedangkan pada saat jumlah nilai eigennya kurang dari n, masih ada dua kemungkinan yaitu jumlah nilai eigennya sama dengan n atau jumlah nilai eigennya kurang dari n. Jadi pada saat jumlah nilai eigen sama dengan n maka matriks dapat didiagonalisasi,

sedangkan pada saat jumlah nilai eigen kurang dari n belum bisa ditentukan apakah matriks bisa didiagonalisasi atau tidak .

Secara umum untuk menentukan matriks pendagonal P dan matriks diagonal D adalah sebagai berikut :

Misal A matriks bujur sangkar $n \times n$ memiliki n buah basis ruang eigen yang bebas linear $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (λ_i tidak harus berbeda dengan λ_j), maka matriks pendagonal P bisa diambil sebagai $P = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_n]$ dengan matriks diagonalnya adalah :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Contoh 7.2.1

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan matriks yang mendiagonalisasi A dan matriks diagonalnya !

Jawab

Dari jawaban pada contoh 7.1.1 , didapatkan nilai eigen : -1 , 1 , dan 2 dengan basis ruang eigen yang bersesuaian berturut – turut adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Jadi matriks pendagonal P bisa ditentukan sebagai :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan matriks diagonalnya adalah } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kolom – kolom pada matriks P juga dapat dirubah– ubah urutannya sehingga kalau dihitung ada sebanyak 6 matriks yang memenuhi jawaban , selanjutnya matriks D akan mengikuti urutan dari matriks P .

Contoh 7.2.2

$$\text{Diketahui } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Apakah B dapat didiagonalisasi ? Jika dapat tentukan matriks yang mendiagonalisasi B beserta matriks diagonalnya !

Jawab

Persamaan karakteristik : $\det (\lambda I - B) = \bar{0}$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

Jadi nilai eigen : $-1, 2$

Karena hanya ada dua nilai eigen, maka belum bisa ditentukan apakah B dapat didiagonalisasi ataukah tidak. Untuk itu akan dicari banyaknya basis ruang eigen.

Untuk $\lambda = 2$, substitusi nilai $\lambda = 2$ ke persamaan $(\lambda I - B) \bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ruang eigen : } \bar{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$$\text{Jadi untuk } \lambda = 2 \text{ terdapat dua basis ruang eigen : } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = -1$, substitusi nilai $\lambda = -1$ ke persamaan $(\lambda I - B) \bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ruang eigen : } \bar{x} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} t$$

$$\text{Jadi untuk } \lambda = -1 \text{ terdapat satu basis ruang eigen : } \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi B dapat didiagonalisasi dengan matriks yang mendiagonalisasi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dengan matriks diagonal } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Contoh 7.2.3

$$\text{Diketahui } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawab

Persamaan karakteristik : $\det (\lambda I - C) = 0$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) = 0$$

Jadi nilai eigen : 1, 2

Karena hanya ada dua nilai eigen maka belum bisa ditentukan apakah C dapat didiagonalisasi ataukah tidak. Untuk itu akan diperiksa banyaknya basis ruang eigen.

Untuk $\lambda = 1$, substitusi nilai $\lambda = 2$ ke persamaan $(\lambda I - C) \bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ruang eigen : } \bar{x} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi untuk $\lambda = 1$, ada satu basis ruang eigen yaitu : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda = 2$, substitusi nilai $\lambda = 2$ ke persamaan $(\lambda I - C) \bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ruang eigen : } \bar{x} = \begin{bmatrix} -2s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi untuk } \lambda = 1, \text{ ada satu basis ruang eigen yaitu : } \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena hanya ada dua basis ruang eigen yang bebas linear, maka C tidak dapat didiagonalisasi

VII.3 Diagonalisasi orthogonal

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai diagonalisasi orthogonal akan didefinisikan tentang matriks orthogonal. Matriks bujur sangkar P disebut matriks orthogonal bila berlaku $P^t = P^{-1}$. Matriks A dapat didiagonalisasi secara orthogonal jika terdapat P orthogonal sehingga $P^{-1} A P = D$ dengan D adalah matriks diagonal.

Berbeda dengan masalah diagonalisasi sebelumnya, maka pada pembahasan kali ini ada sedikit perbedaan tentang matriks yang bisa didiagonalisasi ataukah tidak, yaitu :

$$P^{-1} A P = D$$

$$P D P^{-1} = A$$

$$P D P^t = A \quad (\text{ dari sifat } P^t = P^{-1}) \dots\dots\dots (1)$$

$$(P D P^t)^t = A^t \quad (\text{ kedua ruas ditransposekan })$$

$$P D P^t = A^t \quad \dots\dots\dots (2)$$

Dari persamaan 1 dan 2 didapatkan agar A bisa didiagonalisasi secara orthogonal maka matriks A harus memenuhi sifat $A = A^t$ (A harus matriks simetri).

Menentukan matriks P yang mendiagonalisasi secara orthogonal

Cara menentukan matriks P pada diagonalisasi orthogonal ini sebenarnya hampir sama dengan penentuan P pada diagonalisasi sebelumnya yaitu didasarkan pada basis ruang eigen yang telah diperoleh sebelumnya. Misalkan $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ merupakan basis ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ kemudian $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ merupakan himpunan orthonormal hasil transformasi dari $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ dengan hasil kali dalam Euclides, maka matriks yang

mendiagonalisasi secara orthogonal adalah $P = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \dots \ \bar{u}_n]$ sedangkan matriks diagonal D sama dengan matriks diagonal D pada bahasan sebelumnya.

Contoh 7.3.1

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan matriks yang mendiagonalisasi A secara orthogonal beserta matriks diagonalnya !

Jawab

Persamaan karakteristik : $\det (\lambda I - A) = \bar{0}$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 \lambda - \lambda = \lambda \{ (\lambda - 1)^2 - 1 \} = 0$$

Nilai eigen : 0, 2

Untuk $\lambda = 0$, substitusi nilai $\lambda = 0$ ke persamaan $(\lambda I - A) \bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ruang eigen : } \bar{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

Jadi untuk $\lambda = 0$ terdapat dua basis ruang eigen : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Latihan 7

1. Diketahui persamaan $A\bar{x} = \alpha \bar{x}$, dengan $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ dan α skalar, tentukan nilai α agar \bar{x} memiliki solusi banyak jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$!

2. Diketahui SPL $\begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1-a \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$

- a. Tentukan nilai a agar SPL memiliki solusi banyak dengan 1 atau 2 parameter !
b. Tulis solusi SPL dari nilai a didapat !
3. Tentukan nilai eigen dan basis ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya dari matriks – matriks berikut !

a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Diketahui matriks $A_{3 \times 3}$ memiliki nilai eigen 0, 1 dan ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut adalah $(s, s - t, t)$ dan $(2s, s, s)$. Tentukan !
a. Matriks yang mendiagonalkan A !
b. Matriks A !
5. Diketahui $H = \{ (1,0,1), (2,1,0), (0,1,1) \}$ merupakan basis ruang eigen dari nilai eigen $-1, 1$ dan 2 suatu matriks. Tentukan matriks yang dimaksud !
6. Dari soal nomor 3, tentukan
a. Matriks mana saja yang dapat didiagonalkan beserta matriks yang mendiagonalkan !
b. Matriks mana saja yang dapat didiagonalkan secara orthogonal beserta matriks yang mendiagonalkan secara orthogonal !

BAB VIII Transformasi Linear

VIII.1 Pendahuluan

Suatu fungsi yang memetakan suatu vektor di ruang vektor V ke ruang vektor W (dinotasikan dengan $T : V \rightarrow W$) disebut sebagai transformasi linear bila untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in V$ berlaku:

1. $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$
2. $T(k\bar{u}) = k T(\bar{u})$, dengan k skalar.

Contoh 8.1.1

Diketahui $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dengan $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \\ y \end{pmatrix}$, Apakah T merupakan transformasi linear?

Jawab

Misalkan $\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Syarat 1

$\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ maka

$$\begin{aligned} T(\bar{u} + \bar{v}) &= T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - y_2 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \end{aligned}$$

Syarat 2

Untuk sembarang skalar k , $k\bar{u} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$

$$T(k\bar{u}) = T\begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 - ky_1 \\ kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = k T(\bar{u})$$

Kedua syarat terpenuhi, jadi $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \\ y \end{pmatrix}$ merupakan transformasi linear.

Contoh 8.1.2

Apakah $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dengan $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ merupakan transformasi linear?

Jawab

Fungsi diatas bukan transformasi linear karena tidak memenuhi syarat ke-2

$$\text{yaitu untuk sembarang skalar } k, T(k\bar{u}) = \begin{pmatrix} k^2 x_1 \\ (kx_1)^2 \\ (ky_1)^2 \end{pmatrix} \neq k T(\bar{u}) = k \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1^2 \\ y_1^2 \end{pmatrix}$$

Beberapa istilah dalam transformasi linear

Diketahui ruang vektor V, W

- Transformasi linear yang bekerja pada ruang vektor yang sama, $T : V \rightarrow V$ disebut **operator linear**.
- Transformasi linear $T : V \rightarrow W$ dengan $T(\bar{u}) = \bar{0}$ disebut **transformasi nol**.
- Transformasi linear $T : V \rightarrow W$ dengan $T(\bar{u}) = A\bar{u}$ disebut transformasi matriks sedangkan A disebut matriks transformasi.

VIII.2 Kernel (inti) dan Jangkauan

Diketahui transformasi linear $T : V \rightarrow W$ dengan fungsi $T(\bar{u})$, $\bar{u} \in V$

Kernel dari T (disingkat $\text{Ker}(T)$) adalah himpunan \bar{u} sedemikian hingga $T(\bar{u}) = \bar{0}$ atau $\{ \bar{u} \mid T(\bar{u}) = \bar{0} \}$. **Ker (T)** juga disebut **ruang nol dari T** .

Himpunan dari \bar{b} sedemikian hingga $T(\bar{u}) = \bar{b}$ disebut Jangkauan dari T atau disingkat $R(T)$. $R(T)$ disebut juga dengan bayangan \bar{u} oleh $T(\bar{u})$

Contoh 8.2.1

Tentukan basis dan dimensi dari $\text{Ker}(T)$ dan $R(T)$ dari transformasi linear

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dengan } T(\bar{u}) = A\bar{u}, \text{ dengan } \bar{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ dan } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Jawab

a. Kernel

$\text{Ker}(T)$ adalah ruang nol dari $T(\bar{u}) = A\bar{u} = \bar{0}$. Jadi $\text{Ker}(T)$ merupakan ruang solusi dari SPL $A\bar{u} = \bar{0}$. Dengan melakukan eliminasi Gauss– Jordan

$$\text{didapatkan solusi SPL adalah } \bar{u} = \begin{bmatrix} s-2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$$\text{Jadi basis } \text{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ dan } \dim \text{Ker}(T) = 2$$

b. Jangkauan

$R(T)$ merupakan himpunan dari \bar{b} dengan $A\bar{u} = \bar{b}$. Kalau kita perhatikan maka $R(T)$ merupakan ruang kolom dari A . Dari eliminasi Gauss – Jordan pada A didapatkan $A \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Jadi basis $R(T)$ merupakan basis ruang kolom A yaitu : $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan $\dim R(T) = 1$.

VIII.3 Matriks transformasi

Ketika membahas masalah transformasi matriks, maka hal utama yang ingin diketahui tentunya adalah bayangan suatu vektor dari transformasi tersebut dan matriks transformasinya. Penentuan matriks transformasi tergantung dari faktor – faktor yang diketahui.

Contoh 8.3.1

Misal $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ merupakan basis R^3 . Transformasi linear $T : R^3 \rightarrow P_2$ memiliki fungsi $T(\bar{v}_i) = w_i$ dengan $\bar{v}_1 = (1, 1, -1)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, -1)$, $\bar{v}_3 = (0, 0, -1)$, $p(x) = 1 - x + x^2$, $q(x) = 1 + 2x^2$, $r(x) = 2x - x^2$.

- Tentukan matriks transformasi A sedemikian hingga $A\bar{v}_i = w_i$!
- Tentukan bayangan $(1, 2, 1)$ dari transformasi tersebut!
- Jika $[\bar{z}]_A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, tentukan bayangan \bar{z} !

Jawab

$A\bar{v}_i = w_i$, jika $B = [\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3]$ dan $C = [p(x) \ q(x) \ r(x)]$ maka $AB = C$. Karena $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ basis R^3 , maka B bujursangkar dan B^{-1} ada sehingga didapatkan $A = CB^{-1}$. Pada soal diatas

$$a. \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 2x \\ x^2 & 2x^2 & -x^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kemudian } B^{-1} \text{ dicari dan didapatkan } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } A = CB^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -x & -2x & -2x \\ -x^2 & -2x^2 & x^2 \end{bmatrix}$$

b. Bayangan dari (1,2,1) adalah

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -x & -2x & -2x \\ -x^2 & -2x^2 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5x \\ -4x^2 \end{bmatrix} = 2 - 5x - 4x^2$$

c. $[\bar{z}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ berarti $\bar{z} = -\bar{v}_1 - \bar{v}_2 + \bar{v}_3$, bayangan \bar{z} dapat ditentukan

dengan beberapa cara, yaitu :

1. $T(\bar{z}) = A \bar{z}$, dengan A adalah matriks transformasi pada jawaban (a)!

2. dapat dicari tanpa menggunakan A. Karena $[\bar{z}]_A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{k}$,

maka $\bar{z} = B \bar{k}$ sehingga $T(\bar{z}) = T(B \bar{k}) = AB \bar{k} = C \bar{k}$. Jadi

$$T(\bar{z}) = C \bar{k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 2x \\ x^2 & 2x^2 & -x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3x \\ -4x^2 \end{bmatrix} = -2 + 3x - 4x^2$$

Matriks baku / standar

Misal transformasi matriks $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dengan $T(\bar{x}) = A \bar{x}$ memiliki basis standar $S = \{ \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \}$. Maka matriks transformasi dari transformasi diatas (**matriks standar untuk T**) adalah

$$A = [T(\bar{e}_1) \ T(\bar{e}_2) \ \dots \ T(\bar{e}_n)]$$

Contoh 8.3.2

Diketahui transformasi matriks $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dengan $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ x-y \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix}$,

Tentukan matriks standar untuk T !

Jawab

$$T[\bar{e}_1] = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 1 - 0 \\ 1 + 0 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T[\bar{e}_2] = T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T[\bar{e}_3] = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks standar untuk $T = A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ x-y \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix}$

Matriks Transformasi terhadap basis A dan B

Diketahui ruang V, W dengan dimensi ruang vektor berturut-turut n dan m dan transformasi linear $T: V \rightarrow W$ dengan fungsi $T(\bar{x})$, $\bar{x} \in V$. Jika A, B merupakan basis V, W maka untuk setiap $\bar{x} \in V$ dapat ditentukan $[\bar{x}]_A$ dengan $[\bar{x}]_A \in V$. Karena $T(\bar{x}) \in W$ maka juga dapat ditentukan $[T(\bar{x})]_B$ dengan $[T(\bar{x})]_B \in B$.

Sekarang misalnya dimiliki transformasi linear yang lain $T: V \rightarrow W$ dengan fungsi $T([\bar{x}]_A) = [T(\bar{x})]_B = D [\bar{x}]_A$, maka matriks transformasi dari transformasi linear diatas (D) disebut **matriks T terhadap basis A dan B**.

Menentukan matriks T terhadap basis A dan B.

Misal $D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $A = \{ \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \}$, $B = \{ \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m \}$

Maka untuk $\bar{x} = \bar{a}_1$ didapatkan $T([\bar{a}_1]_A) = D [\bar{a}_1]_A = D \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} =$

$[T(\bar{a}_1)]_B$, kalau diperhatikan secara seksama maka vektor ini merupakan kolom pertama dari D . Secara umum **matriks Transformasi (T) terhadap basis A dan B** $= [[T(\bar{a}_1)]_B [T(\bar{a}_2)]_B \dots [T(\bar{a}_n)]_B]$.

Jika transformasi linear bekerja diruang vektor yang sama, $T: V \rightarrow V$, maka **matriks T terhadap basis A** $= [[T(\bar{a}_1)]_A [T(\bar{a}_2)]_A \dots [T(\bar{a}_n)]_A]$

Contoh 8.3.3

Diketahui transformasi linear $T: R^2 \rightarrow R^3$ dengan $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ -5x+13y \\ -7x+16y \end{bmatrix}$

Jika $A = \{ (3,1), (5,2) \}$ dan $B = \{ (1,0,-1), (-1,2,2), (0,1,2) \}$ berturut-turut merupakan basis R^2 dan R^3 .

- Tentukan matriks T terhadap basis A dan B !
- Untuk $\bar{x} = (2,1)$, tentukan $T([\bar{x}]_A)$!

Jawab

- a. Misal D adalah matriks T terhadap basis A dan B , maka D =

$$\left[\left[T \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]_B \left[T \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \right]_B \right]$$

$$T \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad T \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left[T \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]_B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_B = \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi matriks T terhadap basis A dan B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

- b. $[\bar{x}]_A = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ didapatkan $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\text{Jadi } T([\bar{x}]_A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Latihan 8

1. Periksa apakah $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$ dengan $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = (abc) + (a+b)x + (a+c)x^2$ merupakan transformasi linear ?
2. Periksa apakah $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{22}$ dengan $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & c-b \\ a-b & 2b+c \end{bmatrix}$ merupakan transformasi linear ?
3. V dibangun oleh vektor – vektor yang orthonormal $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$. Periksa apakah proyeksi orthogonal \bar{z} terhadap V merupakan transformasi linear !
4. Diketahui transformasi nol $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dengan $T(\bar{x}) = A\bar{x}$. Tentukan basis dan dimensi dari $\ker(T)$ dan $R(T)$!
5. Diketahui transformasi matriks $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ memiliki matriks transformasi $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. Tentukan basis dan dimensi dari $\ker(T)$ dan $R(T)$!
6. Transformasi linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ memiliki fungsi transformasi $T(\bar{a}_i) = \bar{b}_i$ dengan $\bar{a}_1 = (2, 1)$, $\bar{a}_2 = (3, 2)$, $\bar{b}_1 = (-1, 2, 2)$, $\bar{b}_2 = (-2, 1, 2)$. Tentukan basis dan dimensi dari $\ker(T)$ dan $R(T)$!
7. Transformasi linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_2$ memiliki fungsi transformasi $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = (a+b) + (2a-b)x + (a+2b)x^2$. Tentukan basis dan dimensi dari $\ker(T)$ dan $R(T)$!
8. Transformasi linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ memiliki fungsi transformasi $T(\bar{a}_i) = \bar{b}_i$ dengan $\bar{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\bar{a}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{a}_3 = (0, 1, -1)$, $\bar{b}_1 = (1, 3)$, $\bar{b}_2 = (-1, 1)$, $\bar{b}_3 = (1, 1)$. Jika $A = \{ \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \}$ basis \mathbb{R}^3 dan $B = \{ \bar{b}_1, \bar{b}_2 \}$ basis \mathbb{R}^2 .
 - a. Tentukan basis dan dimensi dari $\ker(T)$ dan $R(T)$!
 - b. Matriks T terhadap basis A dan basis B !

- c. $T(\bar{x}_A)$, dengan $\bar{x} = (2, 1, 2)!$
 d. $T(\bar{x}_A)$, dengan $\bar{x} = -3\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{a}_3$

9. Transformasi linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_{22}$ memiliki fungsi transformasi
 $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a \\ b & a-b \end{bmatrix}$. Jika $A = \{ (1, 1), (0, -1) \}$ merupakan basis \mathbb{R}^2

dan $W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ adalah basis M_{22} .

a. Matriks T terhadap basis A dan basis M !

- b. $T(\bar{x}_A)$, dengan $\bar{x} = (2, -2)!$

10. Transformasi linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_2$ memiliki fungsi transformasi

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = (a+b) + (a-b)x + (2a+2b)x^2$$

a. Matriks T terhadap basis A dan basis M !

- b. $T(\bar{x}_A)$, dengan $\bar{x} = (2, -2)!$