ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE & ENGINEERING
UNIVERSITY OF IOANNINA

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
Τ: 26510 08817 - F: 26510 08890

P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

Μάθημα: **ΜΥΥ504 - Υπολογιστικά Μαθηματικά**
Ακαδημαϊκό έτος: 2020-2021
Διδάσκων: Κ. Βλάχος
Ημερομηνία: 4 Δεκεμβρίου 2020
Παράδοση: 13 Ιανουαρίου 2021

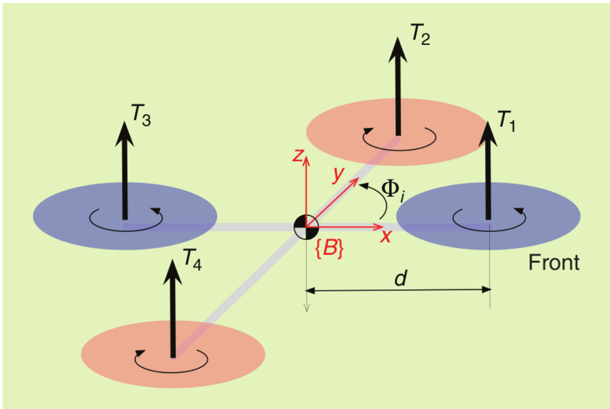
Ομαδική εργασία - Β

Ομάδες με ζυγό μεγαλύτερο Α.Μ.

Περιγραφή και δεδομένα

Μελετάμε το τετρακόπτερο που απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Η κίνηση του τετρακόπτερου ελέγχεται από τους 4 κινητήρες, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2. Για περισσότερες πληροφορίες, δείτε το [1].

Σχήμα 1: Τετρακόπτερο, [1]



Σχήμα 2: Μοντέλο τετρακόπτερου, [1]

Ένα *απλουστευμένο* μαθηματικό μοντέλο του τετρακόπτερου περιγράφεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$Mz'' = f_z - gM - C_z|z'|z' \tag{1}$$
$$I_z\psi'' = \tau_z - C_\psi|\psi'|\psi' \tag{2}$$
$$z(0) = z_0,\ \psi(0) = \psi_0 \tag{3}$$
$$z'(0) = \psi'(0) = 0 \tag{4}$$

όπου τα σύμβολα εξηγούνται στον Πίνακα 1. Η είσοδος στο ρομποτικό σύστημα είναι η δύναμη f_z στον κατακόρυφο Z άξονα, καθώς και η ροπή τ_z γύρω από τον κατακόρυφο Z άξονα, οι οποίες οφείλονται στην κατάλληλη περιστροφή των τεσσάρων κινητήρων, βλέπε Σχήμα 2. Προφανώς, λόγω της κίνησης του τετρακόπτερου, αναπτύσσονται μια δύναμη και μια ροπή αντίστασης, οι οποίες γενικά είναι αντίθετες στην κίνηση και ανάλογες του τετραγώνου της ταχύτητας του ρομπότ και είναι επίσης είσοδος στο τετρακόπτερο. Η έξοδος του συστήματος είναι η μετατόπιση στον κατακόρυφο άξονα, z, και ο προσανατολισμός του, ψ. Στον Πίνακα 2 δίνονται οι απαραίτητες αριθμητικές τιμές των παραμέτρων στις διαφορικές εξισώσεις (1)-(4).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
Τ: 26510 08817 - F: 26510 08890
P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

Πίνακας 1: Επεξήγηση συμβόλων στις εξισώσεις (1)-(4)

Σύμβολο	Επεξήγηση
z	μετατόπιση του τετρακόπτερου στον Z άξονα
ψ	προσανατολισμός του τετρακόπτερου ως προς τον Z άξονα
M	μάζα τετρακόπτερου
g	επιτάχυνση της βαρύτητας
I_z	ροπή αδράνειας τετρακόπτερου
f_z	συνολική δύναμη από τους τέσσερις κινητήρες στον Z άξονα
τ_z	συνολική ροπή από τους τέσσερις κινητήρες ως προς τον Z άξονα
C_z	συντελεστής αντίστασης του αέρα στον Z άξονα
C_ψ	συντελεστής αντίστασης του αέρα ως προς τον Z άξονα

Πίνακας 2: Αριθμητικές τιμές παραμέτρων στις εξισώσεις (1)-(4)

Παράμετρος	Τιμή
M	1 kg
I_z	0.08 kg m^2
g	9.81 m/s^2

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE & ENGINEERING
UNIVERSITY OF IOANNINA

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
Τ: 26510 08817 - F: 26510 08890

P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

Πρόβλημα 1

α΄) Να βρεθούν οι τύποι για την επίλυση του Π.Α.Τ. (1)-(4) με την Μέθοδο του Euler και την Τροποποιημένη Μέθοδο του Euler με τις παρακάτω αρχικές συνθήκες και εισόδους:

$$[f_z, \tau_z]^\mathsf{T} = [Mg + \text{A.M.}/1000, 0]^\mathsf{T}$$
$$[f_z, \tau_z]^\mathsf{T} = [Mg, -\text{A.M.}/10000]^\mathsf{T}$$

$$z_0 = \text{A.M.}/1000$$
$$\psi_0 = 0$$

και

$$C_z = 3 - (\text{A.M.}/5000)$$
$$C_\psi = 5 + (\text{A.M.}/5000)$$

όπου “Α.Μ.” είναι ο μεγαλύτερος των αριθμών μητρώου των μελών κάθε ομάδας. **Τα ζευγάρια των εισόδων, $[f_z, \tau_z]^\mathsf{T}$, θα εφαρμοστούν και τα δύο, και στις δύο μεθόδους**.

β΄) Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C που υλοποιεί τους παραπάνω τύπους, για βήμα $h = 0.001$, στο διάστημα $t \in [0, 30]$.

γ΄) Αντικαταστήστε τις εισόδους f_z και τ_z με τους παρακάτω τύπους και αναδιατυπώστε τις ίδιες μεθόδους για τις παρακάτω αρχικές συνθήκες και εισόδους.

$$f_z = Mg + K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(z')$$
$$\tau_z = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}(\psi')$$

με

$$K_{pz} = 5$$
$$K_{dz} = 15 - (\text{A.M.}/1000)$$
$$K_{p\psi} = 5$$
$$K_{d\psi} = 20$$
$$z_0 = \text{A.M.}/1000$$
$$\psi_0 = 0$$
$$z_{des} = \text{A.M.}/200$$
$$\psi_{des} = \text{A.M.}/3000$$

και

$$C_z = 3 + (\text{A.M.}/5000)$$
$$C_\psi = 5$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
Τ: 26510 08817 - F: 26510 08890
P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

όπου "Α.Μ." είναι ο μεγαλύτερος των αριθμών μητρώου των μελών κάθε ομάδας. Σε αυτό το ερώτημα, τα z_{des} και ψ_{des} περιγράφουν τον επιθυμητό στόχο (θέση και προσανατολισμός) του τετρακόπτερου και είναι σταθερές. Οι είσοδοι (f_z και τ_z) είναι έτσι δομημένες (υλοποιούν έναν απλό αλγόριθμο αυτομάτου ελέγχου κλειστού βρόχου, αναλογικού-διαφορικού τύπου) ώστε να τοποθετούν αυτόματα το ρομπότ στον επιθυμητό στόχο.

δ') Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C που υλοποιεί τους τύπους του ερωτήματος 1γ, για βήμα $h = 0.001$, στο διάστημα $t \in [0, 30]$.

ε') Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις όλων των λύσεων.

Πρόβλημα 2

Για να απλοποιήσω τη μελέτη της κάθετης κίνησης του τετρακόπτερου (στον Z άξονα), προσεγγίζω την (1) με την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$Mz'' = f_z - gM - C_z z' \quad \text{με} \tag{5}$$
$$f_z = Mg + K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(z') \tag{6}$$

α') Αφού αντικαταστήσετε την (6) στην (5), να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και να προσδιορισθούν *συμβολικά* οι πόλοι και τα μηδενικά της (5), υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες. **Θεωρούμε ότι η είσοδος στο σύστημα είναι το επιθυμητό ύψος, z_{des}, και η έξοδος είναι το ύψος, z, σε κάθε χρονική στιγμή**. Στη συνέχεια, υπολογίστε τους πόλους και τα μηδενικά, *αριθμητικά*, με τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους:

Παράμετρος	Τιμή
M	1 kg
C_z	3 + (A.M./5000)
K_{pz}	5
K_{dz}	15

β') Μελετήστε και απεικονίστε σχηματικά, στο μιγαδικό επίπεδο, την αλλαγή των πόλων και των μηδενικών της (5), καθώς τα K_{pz} και K_{dz} μεταβάλλονται από σχεδόν μηδενικές τιμές σε πολύ μεγάλες τιμές (διατηρώντας κάθε φορά το ένα από τα δύο σταθερό). Τι συμπεράσματα βγάζετε σχετικά με την μορφή της απόκρισης και την ευστάθεια του συστήματος;

γ') Βρείτε την αναλυτική λύση της (5) με τις αρχικές συνθήκες του Προβλήματος 1γ.

δ') Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C, το οποίο να υλοποιεί την αναλυτική λύση της (5), και υπολογίστε, μόνο για την (5), ξανά το ερώτημα 1γ. Να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων. Τι συμπεράσματα βγάζετε;

ε') Να γίνει η γραφική παράσταση της λύσης.

Αναφορές

[1] R. Mahony, V. Kumar and P. Corke. *Multirotor Aerial Vehicles: Modeling, Estimation, and Control of Quadrotor*. IEEE Robotics & Automation Magazine, vol. 19, no. 3, pp. 20-32, Sept. 2012.