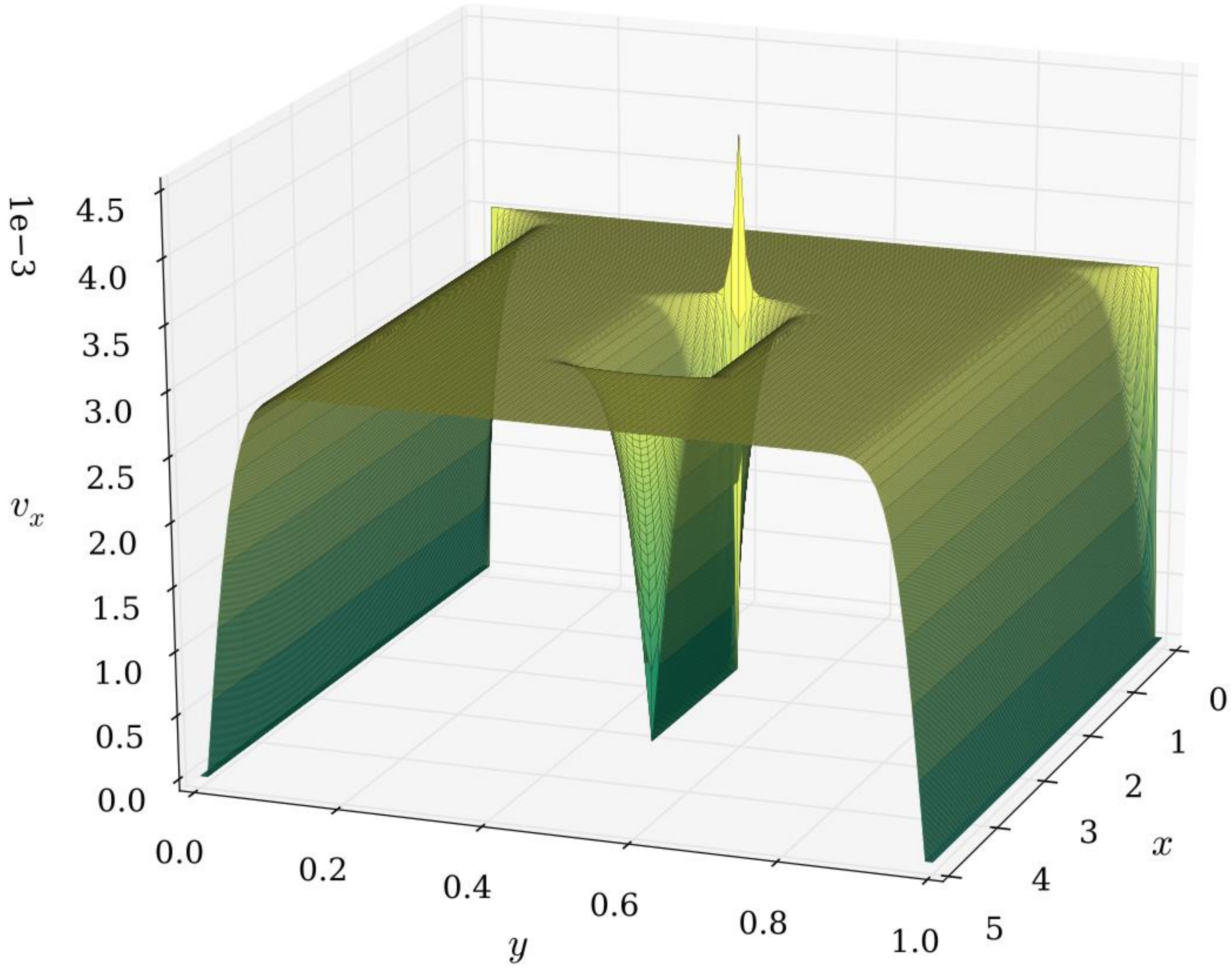
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΡΓΑΣΙΑ 2020



ΟΜΑΔΑ Β

ΚΩΤΣΗΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ 3018
ΧΑΤΖΗΠΑΡΑΣΚΕΥΑΪΔΗΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣ 3106

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΔΕΔΟΜΕΝΑ

$$Mz'' = f_z - gM - C_z|z'|z' \quad (1)$$

$$I_z y'' = \tau_z - C_y|y'|y' \quad (2)$$

$$z(0) = z0,\ \psi(0) = \psi\ 0 \quad (3)$$

$$z'(0) = \psi'(0) = 0 \quad (4)$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΤΙΜΗ
M	1 Kg
I_Z	0.08 Kg m
g	9.81 m/s^2

ΑΣΚΗΣΗ 1

α΄) Να βρεθούν οι τύποι για την επίλυση του Π.Α.Τ. (1)-(4) με την Μέθοδο του Euler και την Τροποποιημένη Μέθοδο του Euler με τις παρακάτω αρχικές συνθήκες και εισόδους:

I. $[f_z, \tau_z]^T = [Mg + A.M./1000, 0]^T$

II. $[f_z, \tau_z]^T = [Mg, -A.M./10000]^T$

$z_0 = A.M./1000$

$\psi_0 = 0$

και

$C_z = 3 - (A.M./5000)$

$C\psi = 5 + (A.M./5000)$

όπου “Α.Μ.” είναι ο μεγαλύτερος των αριθμών μητρώου των μελών κάθε ομάδας. Τα ζευγάρια των εισόδων, $[f_z, \tau_z]$ T, θα εφαρμοστούν και τα δύο, και στις δύο μεθόδους.

ΛΥΣΗ

I. Δεδομενα:

$[f_z, \tau_z]^T = [Mg + A.M./1000, 0]^T$

$\Rightarrow [f_Z, T_Z]^T = [1x9.81+3106/1000,0] = [9.81+3.106,0]=[12.916,0]$

$\Rightarrow [f_Z, T_Z]^T = [12.916,0]$

$z0 = AM/1000 = 3.106$

$z'(0) = y'(0) = 0$

$\psi\ 0 = 0$

$C_Z = 3 - (A.M./5000) = 3 – 0.6212 = 2.3788$

$C_\psi = 5 + (A.M./5000) = 5 + 0.6212 = 5.6212$

$(1) \Rightarrow \quad z'' = f_z - Mg - C_z |z'| z'$

Θέτω $z' = k$

Οπότε το ΠΑΤ είναι

$z' = k$

και $\quad k' = f_z - Mg - C_z |k| k$

με $\quad k0 = 0$ και $z0 = 3.106$

EULER:

$z_1 = z_0 + hk_0 \qquad k_1 = k_0 + hf(z_0, k_0) = k_0 + h(f_z - Mg - C_z |k_0| k_0)$

$z_2 = z_1 + hk_1 \qquad k_2 = k_1 + hf(z_1, k_1) = k_1 + h(f_z - Mg - C_z |k_1| k_1)$

$$\boxed{z_{n+1} = z_n + hk_n \qquad k_{n+1} = k_n + hf(z_n, k_n) = k_n + h(f_z - Mg - C_z |k_n| k_n)}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER:

$z_{n+1} = z_n + hk_n$

$k_{n+1} = k_n + hf(z_n+\frac{h}{2}, k_n + \frac{h}{2} k_n') = k_n + h f(z_n+\frac{h}{2}, k_n+\frac{h}{2} f(z_n, k_n)) =$

$= k_n + hf(z_n+\frac{h}{2}, k_n + \frac{h}{2}(f_z - Mg - C_z |k_n| k_n)) =$

$$\boxed{= k_n + h(f_z - Mg - C_z | k_n + \frac{h}{2}(f_z - Mg - C_z |k_n'| k_n')| k_n + \frac{h}{2}(f_z - Mg - C_z |k_n'| k_n'))}$$

$(2) \Rightarrow \quad \psi'' = (T_z - C_y |\psi'| \psi')/I_z$

$\psi'' = -(C_y / I_z) |\psi'| \psi'$

Θέτω $\psi' = r$

Οπότε το ΠΑΤ είναι

$\psi' = r$

και $r' = -(C_\psi / I_z)|r|r$

με $r0 = 0$ και $y0 = 0$

EULER:

$\psi_1 = \psi_0 + hr_0$ $\quad r_1 = r_0 + hf(\psi_0, r_0) = r_0 + h(-(C_\psi / I_z)|r_0|r_0)$

$\psi_2 = \psi_1 + hr_1$ $\quad r_2 = r_1 + hf(\psi_1, r_1) = r_1 + h(-(C_\psi / I_z)|r_1|r_1)$

$\boxed{\psi_{n+1} = y_n + hr_n \quad r_{n+1} = r_n + hf(\psi_n, r_n) = r_n + h(-(C_\psi / I_z)|r_n|r_n)}$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER:

$\boxed{y_{n+1} = y_n + hr_n}$

$r_{n+1}\ rk_n + hf(\psi_n+\frac{h}{2}, rk_n + \frac{h}{2} r_n') = r_n + h\, f(\psi_n+\frac{h}{2}, r_n+\frac{h}{2}f(\psi_n, r_n)) =$

$= r_n + hf(\psi_n+\frac{h}{2}, r_n + \frac{h}{2}(-(C_\psi / I_z)|r_n'|r_n')) =$

$\boxed{r_{n+1} = r_n + h(-(C_\psi / I_z)|\, r_n + \frac{h}{2}(-(C_\psi / I_z)|r_n'|r_n')|\, r_n + \frac{h}{2}(-(C_\psi / I_z)|r_n'|r_n'))}$

ii. Δεδομένα:

$[f_z, \tau_z]^T = [Mg,-AM/10000]^T$

$\Rightarrow [f_Z, T_Z]^T = [1x9.81, 3106/10000] = [9.81, 0.3106]$

$\Rightarrow [f_Z, T_Z]^T = [9.81, 0.3106]$

$z0 = AM/1000 = 3.106$

$z'(0) = y'(0) = 0$

$y0 = 0$

$C_Z = 3 - (A.M./5000) = 3 - 0.6212 = 2.3788$

$C_\psi = 5 + (A.M./5000) = 5 + 0.6212 = 5.6212$

$(1) \Rightarrow \quad z'' = Mg - Mg - C_z|z'|z'$

$z'' = -C_z|z'|z'$

Θέτω $z' = k$

Οπότε το ΠΑΤ είναι

$z' = k$

και $k' = -C_z|k|k$

με $k0 = 0$ **και** $z0 = 3.106$

EULER:

$z_1 = z_0 + hk_0 \qquad k_1 = k_0 + hf(z_0, k_0) = k_0 + h(-C_z|k_0|k_0)$

$z_2 = z_1 + hk_1 \qquad k_2 = k_1 + hf(z_1, k_1) = k_1 + h(-C_z|k_1|k_1)$

$$\boxed{z_{n+1} = z_n + hk_n \qquad k_{n+1} = k_n + hf(z_n, k_n) = k_n + h(-C_z|k_n|k_n)}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER:

$z_{n+1} = z_n + hk_n$

$k_{n+1} = k_n + hf(z_n+\frac{h}{2}, k_n+\frac{h}{2}k_n') = k_n + h\, f(z_n+\frac{h}{2}, k_n+\frac{h}{2}f(z_n,k_n)) =$

$= k_n + hf(z_n+\frac{h}{2}, k_n+\frac{h}{2}(3.106-2.3788|k_n|k_n)) =$

$$\boxed{= k_n+h(-C_z\,|k_n+\frac{h}{2}(-C_z|k_n|k_n)|\,k_n+\frac{h}{2}(-C_z|k_n|k_n))}$$

$(2) \Rightarrow \quad \psi'' = (T_z - C_\psi|\psi'|\,\psi')/I_Z$

Θέτω $\psi' = r$

Οπότε το ΠΑΤ είναι

$\psi' = r$

και $\quad r' = (T_z - C_\psi|r'|\,r')/I_Z$

με $\quad r0 = 0$ και $\psi0 = 0$

EULER:

$\psi_1 = \psi_0 + hr_0 \qquad r_1 = r_0 + hf(\psi_0, r_0) = r_0 + h(\,(T_z - C_\psi|r_0|\,r_0)/I_Z)$

$\psi_2 = \psi_1 + hr_1 \qquad r_2 = r_1 + hf(\psi_1, r_1) = r_1 + h(\,(T_z - C_\psi|r_1|\,r_1)/I_Z)$

$$\boxed{\psi_{n+1} = \psi_n + hr_n \qquad r_{n+1} = r_n + hf(\psi_n, r_n) = r_n + h(\,(T_z - C_\psi|r_n|\,r_n)/I_Z)}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER:

$$\boxed{\psi_{n+1} = \psi_n + hr_n}$$

$$r_{n+1}\ rk_n + hf(\psi_n+\tfrac{h}{2},rk_n+\tfrac{h}{2}r_n') = r_n + h\ f(\psi_n+\tfrac{h}{2},r_n+\tfrac{h}{2}f(y_n,r_n)) =$$

$$= r_n + hf(\psi_n+\tfrac{h}{2},\ r_n+\tfrac{h}{2}((T_z - C_\psi|r_n|\ r_n)/I_Z) =$$

$$\boxed{r_{n+1} = r_n+h([(T_z - C_\psi)/I_Z]|\ r_n+\tfrac{h}{2}([(T_z - C_\psi)/I_Z]|r_n\ |\ r_n\ )|r_n+\tfrac{h}{2}([(T_z - C_\psi)/I_Z]|r_n|r_n))}$$

β΄) Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C που υλοποιεί τους παραπάνω τύπους, για βήμα h = 0.001, στο διάστημα t ∈ [0, 30].

Έχει παραδοθεί το octave πρόγραμμα με όνομα ex1_b.m

γ΄) Αντικαταστήστε τις εισόδους fz και τz με τους παρακάτω τύπους και αναδιατυπώστε τις ίδιες μεθόδους για τις παρακάτω αρχικές συνθήκες και εισόδους.

fz = Mg + Kpz(zdes − z) − Kdz(z ′)

$\tau_z = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}(\psi\ ')$

με Kpz = 5

Kdz = 15 − (A.M./1000) = 11.894

Kpψ = 5

Kdψ = 20

z0 = A.M./1000 = 3.106

ψ0 = 0

zdes = A.M./200 = 15.53

ψdes = A.M./3000 = 1.035333

και   Cz = 3 + (A.M./5000) = 3.6212

Cψ = 5

Λύση

$$(1) \Rightarrow \quad z'' = Mg + K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(z') - Mg - C_z|z'|z'$$

$$z'' = K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(z') - C_z|z'|z'$$

Θέτω $z' = k$

Οπότε το ΠΑΤ είναι

$$z' = k$$

και $$k' = K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(k) - C_z|k|k$$

με $k0 = 0$ **και** $z0 = 3.106$

EULER:

$z_1 = z_0 + hk_0$ $\qquad$ $k_1 = k_0 + hf(z_0, k_0)$

$z_2 = z_1 + hk_1$ $\qquad$ $k_2 = k_1 + hf(z_1, k_1)$

$$\boxed{z_{n+1} = z_n + hk_n \qquad k_{n+1} = k_n + h(K_{pz}(z_{des} - z_n) - K_{dz}(k_n) - C_z|k_n|k_n)}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER:

$$z_{n+1} = z_n + hk_n$$

$$k_{n+1} = k_n + hf(z_n+\frac{h}{2}, k_n+\frac{h}{2}k_n') = k_n + h\, f(z_n+\frac{h}{2}, k_n+\frac{h}{2}f(z_n,k_n)) =$$

$$= k_n + hf(z_n+\frac{h}{2}, k_n+\frac{h}{2}(K_{pz}(z_{des} - z_n) - K_{dz}(k_n) - C_z|k_n|k_n)) =$$

Θετω $k_n+\frac{h}{2}(K_{pz}(z_{des} - z_n) - K_{dz}(k_n) - C_z|k_n|k_n) = \alpha_n$

$$\boxed{= k_n + h(K_{pz}(z_{des} - z_n+\frac{h}{2}) - K_{dz}(\alpha_n) - C_z|\alpha_n|\alpha_n)}$$

$$(2) \Rightarrow \quad \psi'' = (K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - \psi'(K_{d\psi} - C_{\psi}|\psi'|)) / I_z$$

Θέτω $\psi' = r$

Οπότε το ΠΑΤ είναι

$$\psi' = r$$

και $\quad r' = (K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - r(K_{d\psi} - C_{\psi}| r |)) / I_z$

με $\quad r0 = 0$ και $\psi0 = 0$

EULER:

$\psi_1 = \psi_0 + hr_0 \qquad r_1 = r_0 + hf(\psi_0, r_0)$

$\psi_2 = \psi_1 + hr_1 \qquad r_2 = r_1 + hf(\psi_1, r_1)$

$$\boxed{\psi_{n+1} = \psi_n + hr_n \qquad r_{n+1} = r_n + h((K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_n) - r_n(K_{d\psi} - C_{\psi}| r_n|)) / I_z)}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER:

$$\boxed{\psi_{n+1} = \psi_n + hr_n}$$

$r_{n+1}\ rk_n + hf(\psi_n+\frac{h}{2},rk_n +\frac{h}{2} r_n') = r_n + h\ f(\psi_n+\frac{h}{2},r_n+\frac{h}{2}f(y_n,r_n)) =$

$= r_n + hf(\psi_n+\frac{h}{2}, r_n +\frac{h}{2}((K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_n) - r_n(K_{d\psi} - C_{\psi}| r_n|)) / I_z) =$

Θέτω $r_n +\frac{h}{2}((K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_n) - r_n(K_{d\psi} - C_{\psi}| r_n|)) / I_z) = b_n$

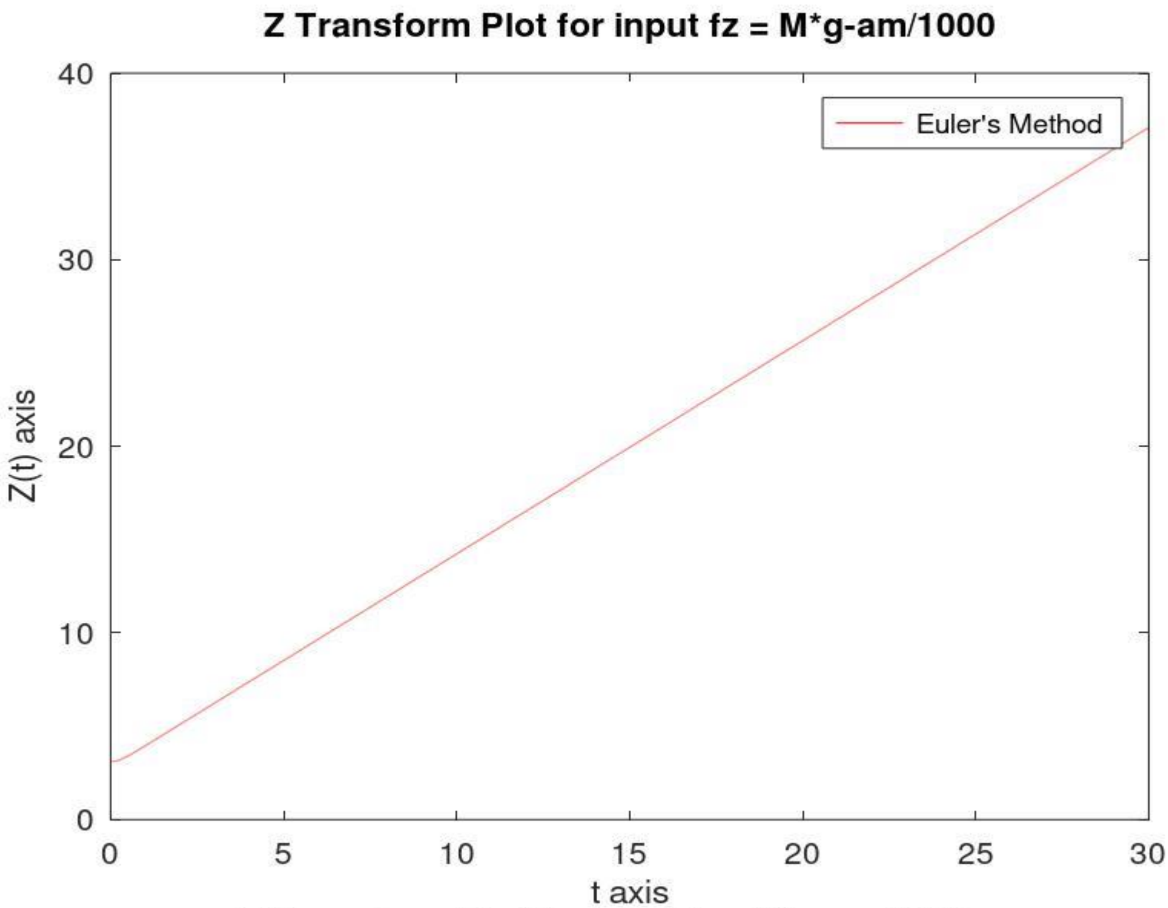
$$\boxed{r_{n+1} = r_n+h(K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_n+\frac{h}{2}) - b_n(K_{d\psi} - C_{\psi}| b_n|)) / I_z)}$$

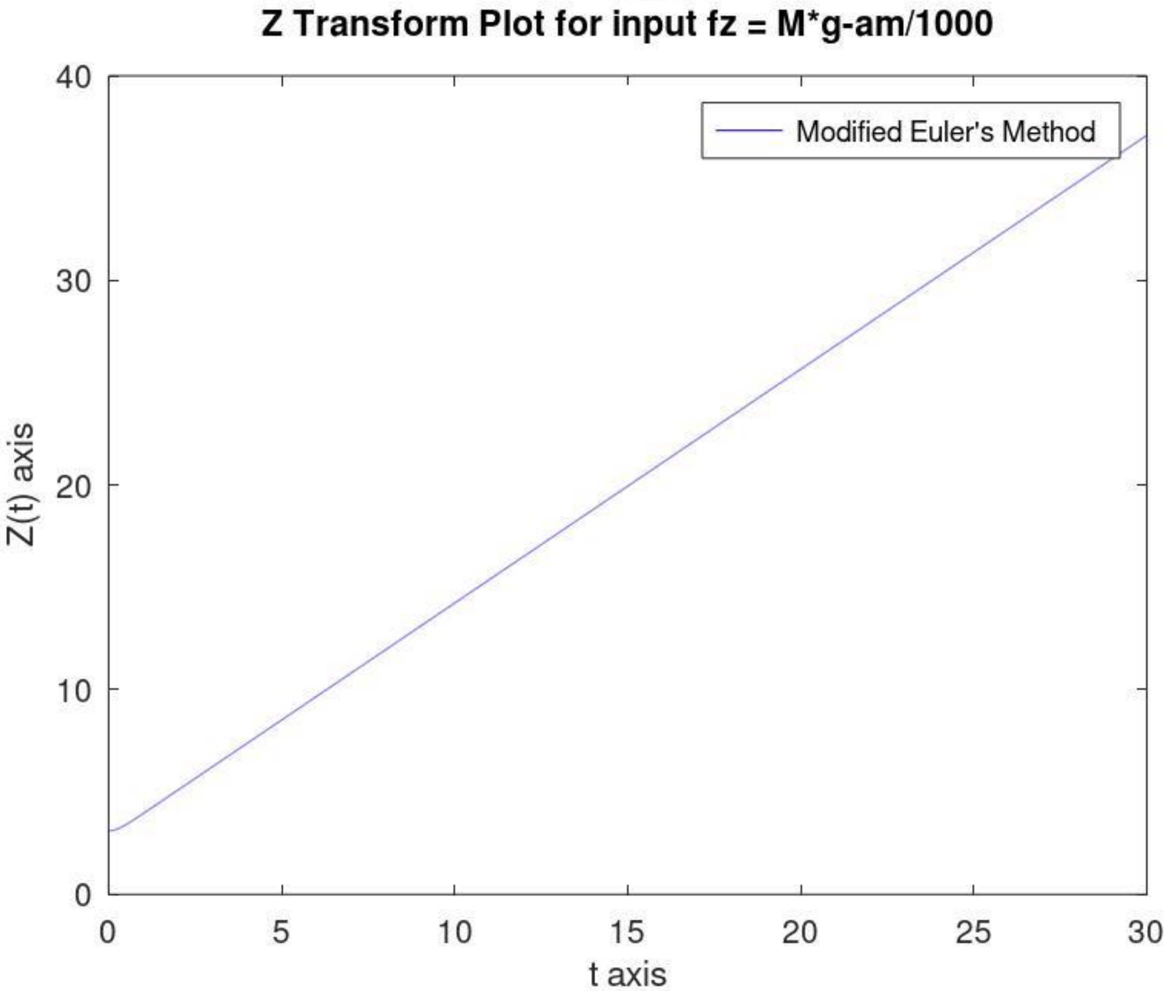
δ΄) Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C που υλοποιεί τους τύπους του ερωτήματος 1γ, για βήμα h = 0.001, στο διάστημα t ∈ [0, 30].

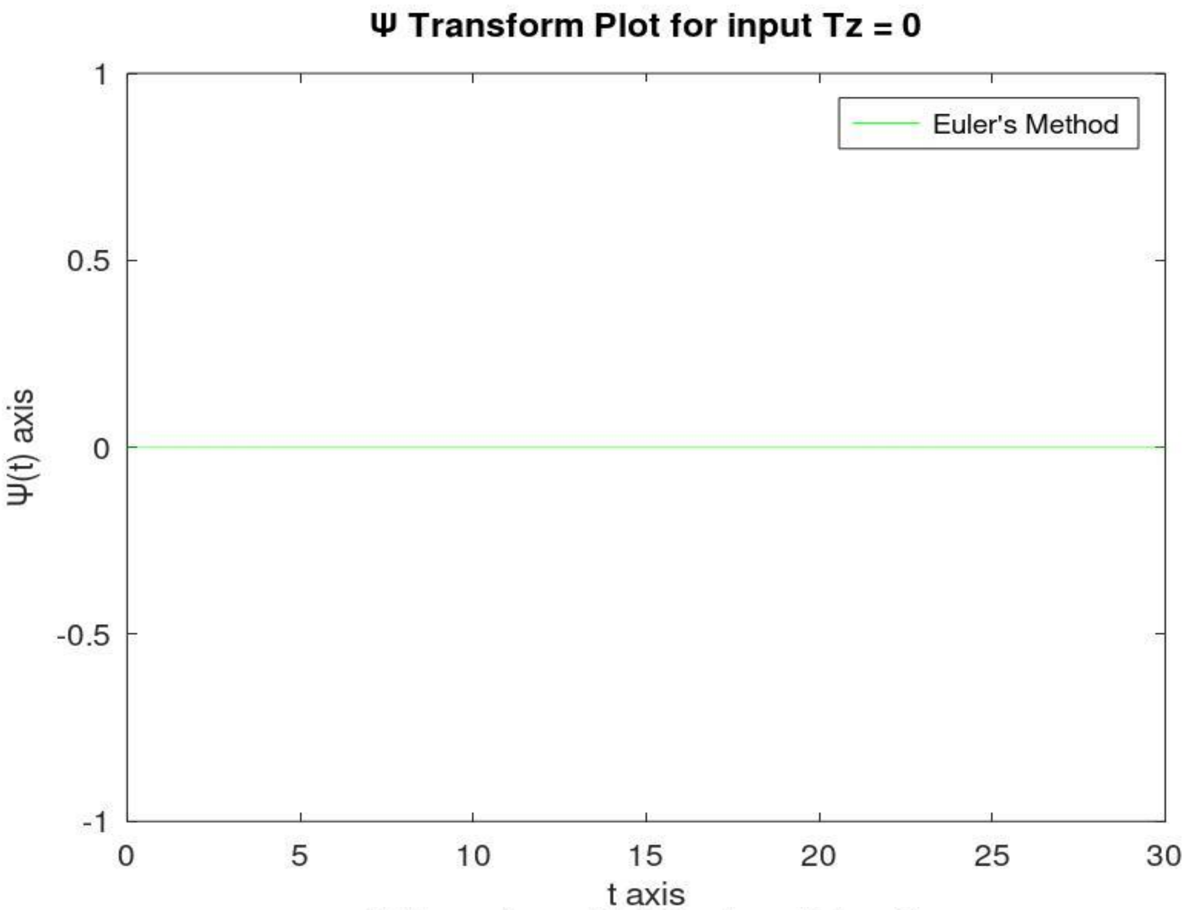
Έχει παραδοθεί το octave πρόγραμμα με όνομα ex1_d.m

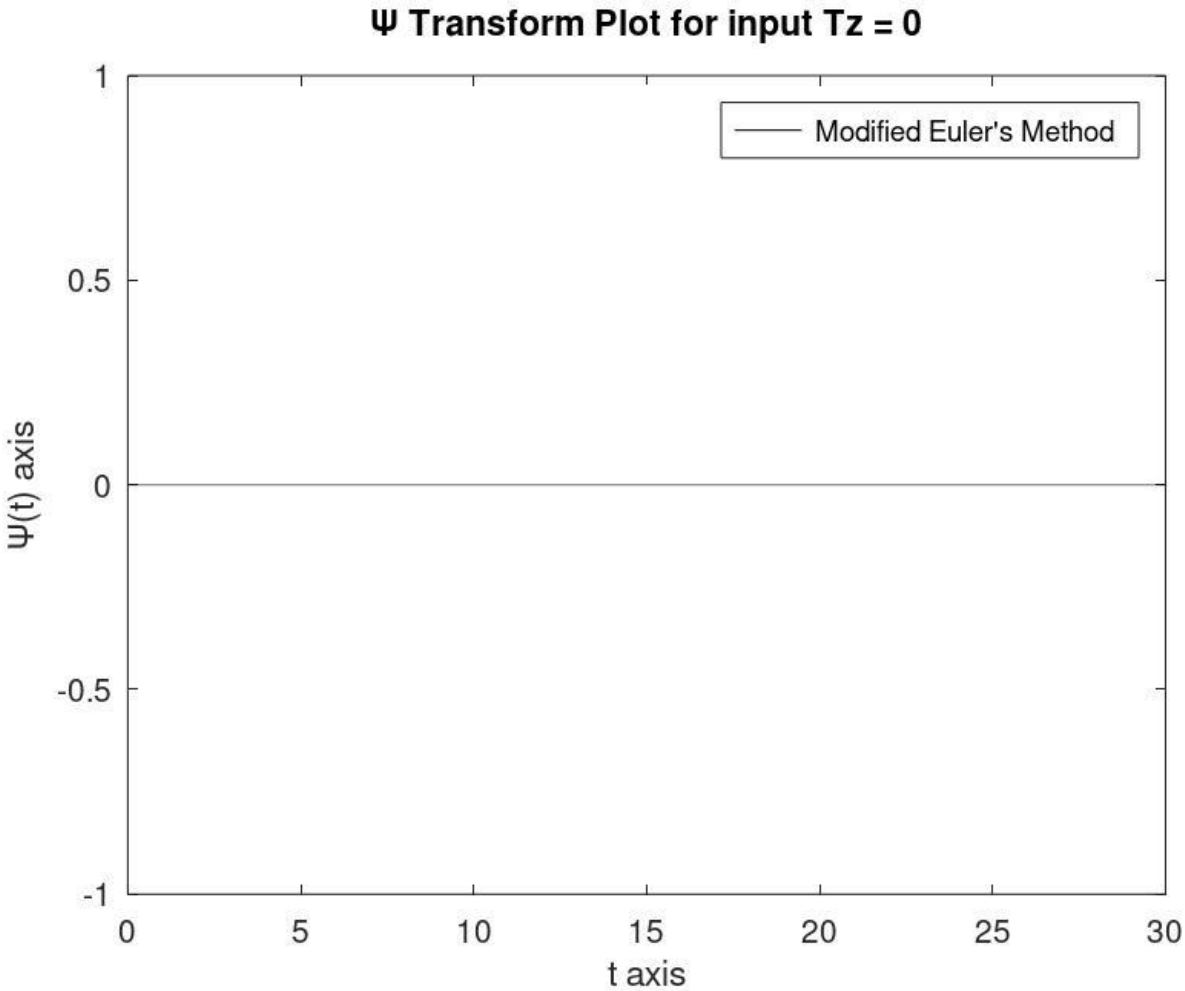
ε΄) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις όλων των λύσεων.

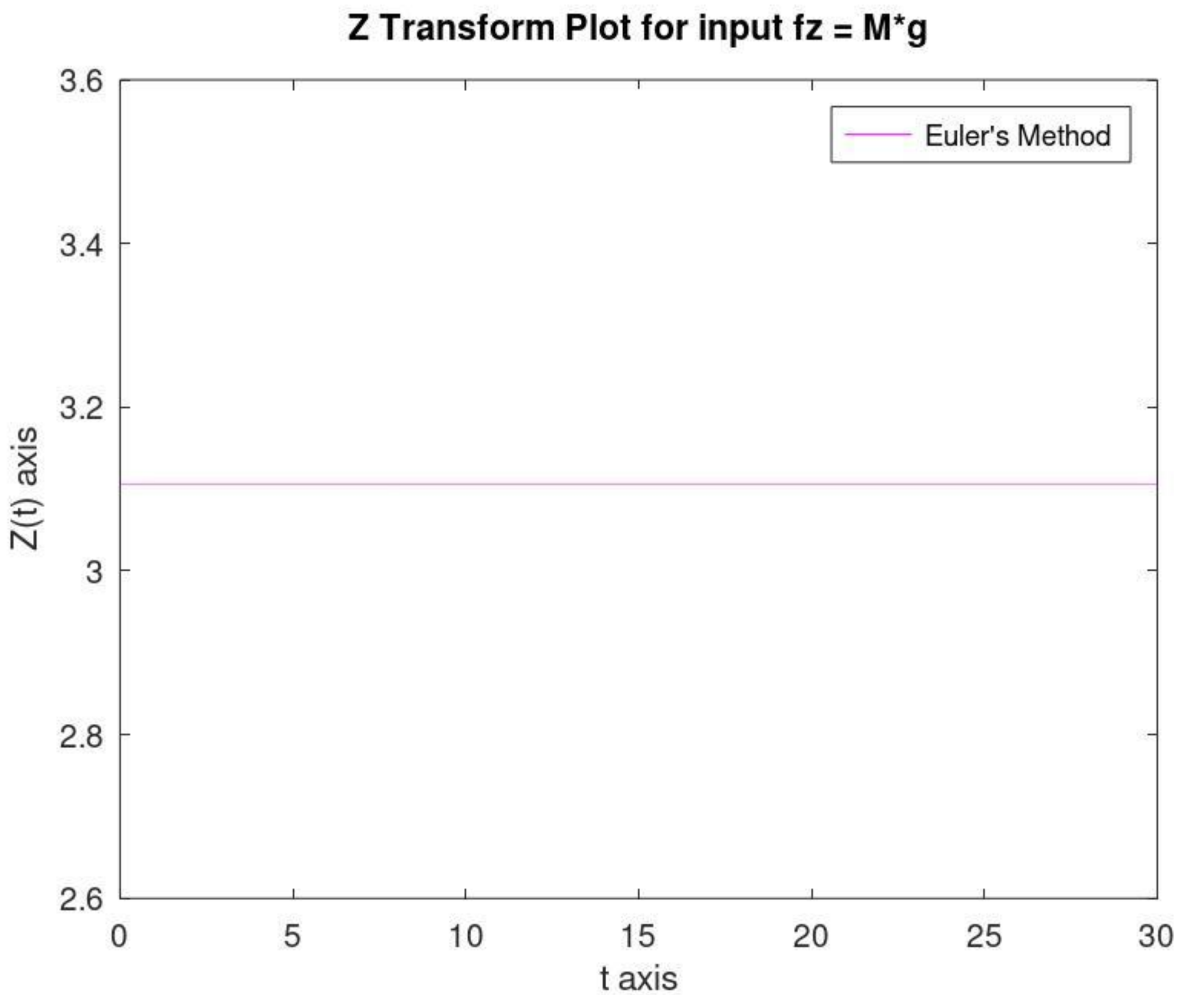
Διαγράμματα ερωτήματος 1α)

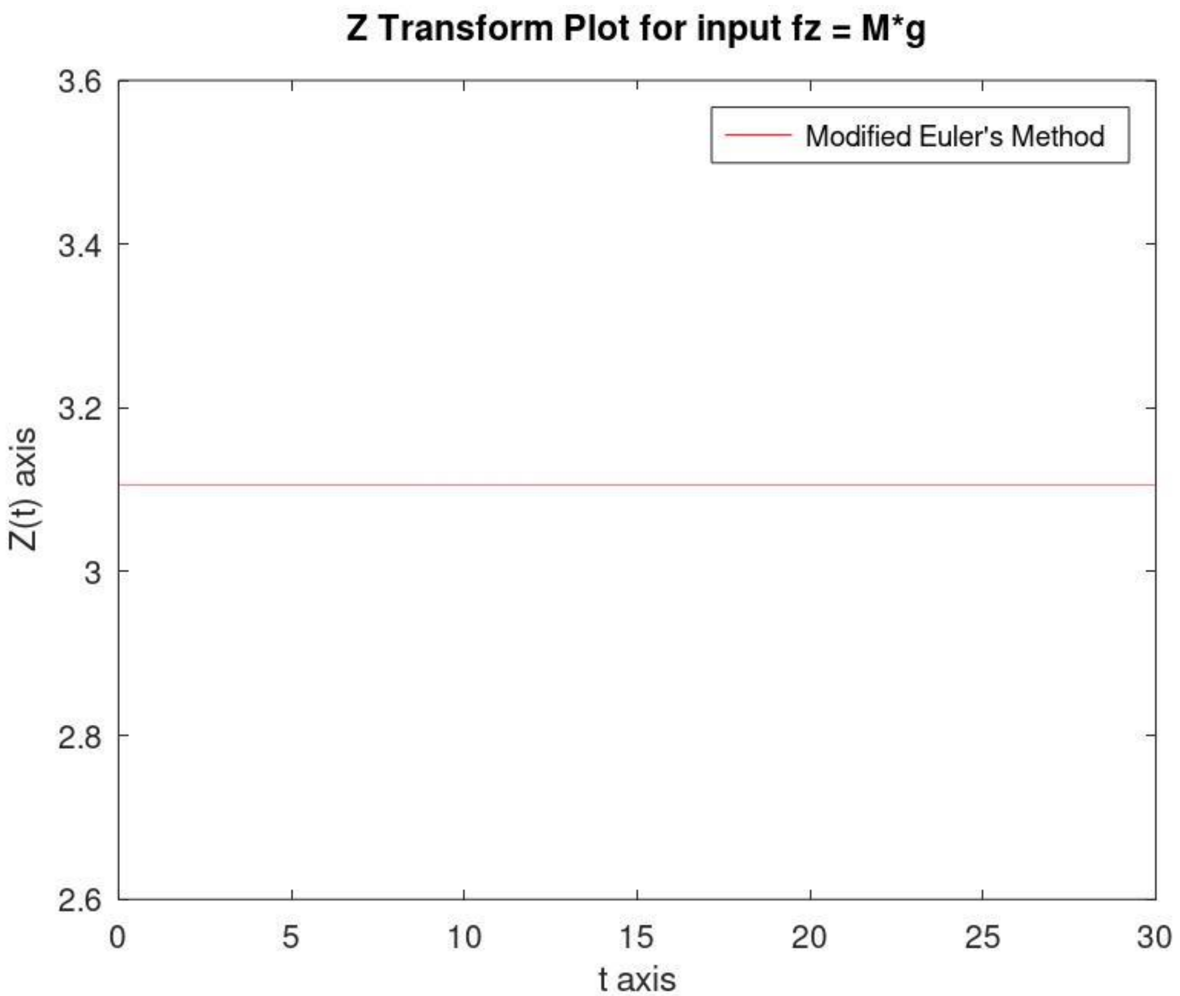

Z Transform Plot for input fz = M*g-am/1000
Euler's Method
Z(t) axis
t axis
0
10
20
30
40
5
15
25

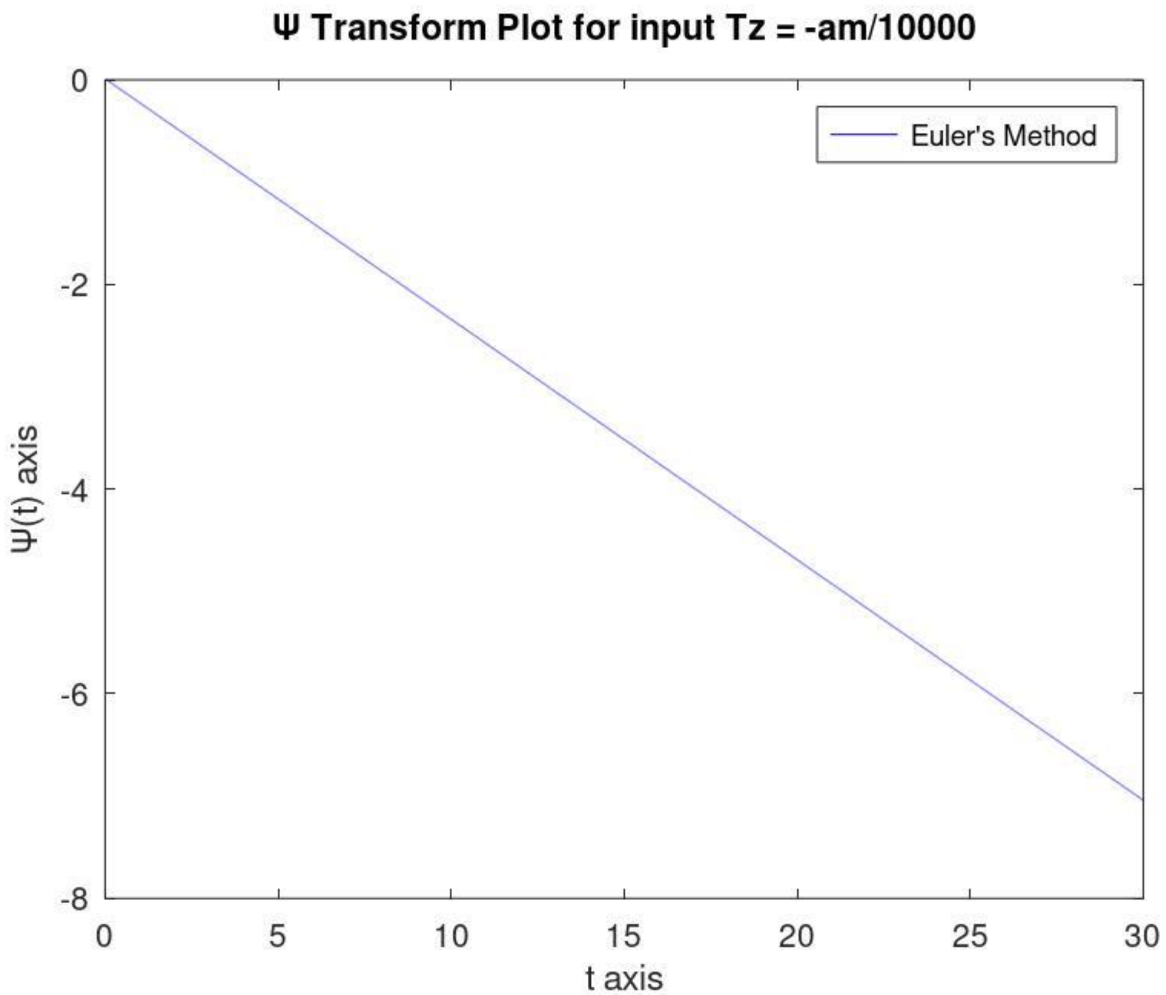

Z Transform Plot for input fz = M*g-am/1000
Modified Euler's Method
Z(t) axis
t axis
0
10
20
30
40
5
15
25


Ψ Transform Plot for input Tz = 0
Euler's Method
Ψ(t) axis
t axis
1
0.5
0
-0.5
-1
0
5
10
15
20
25
30

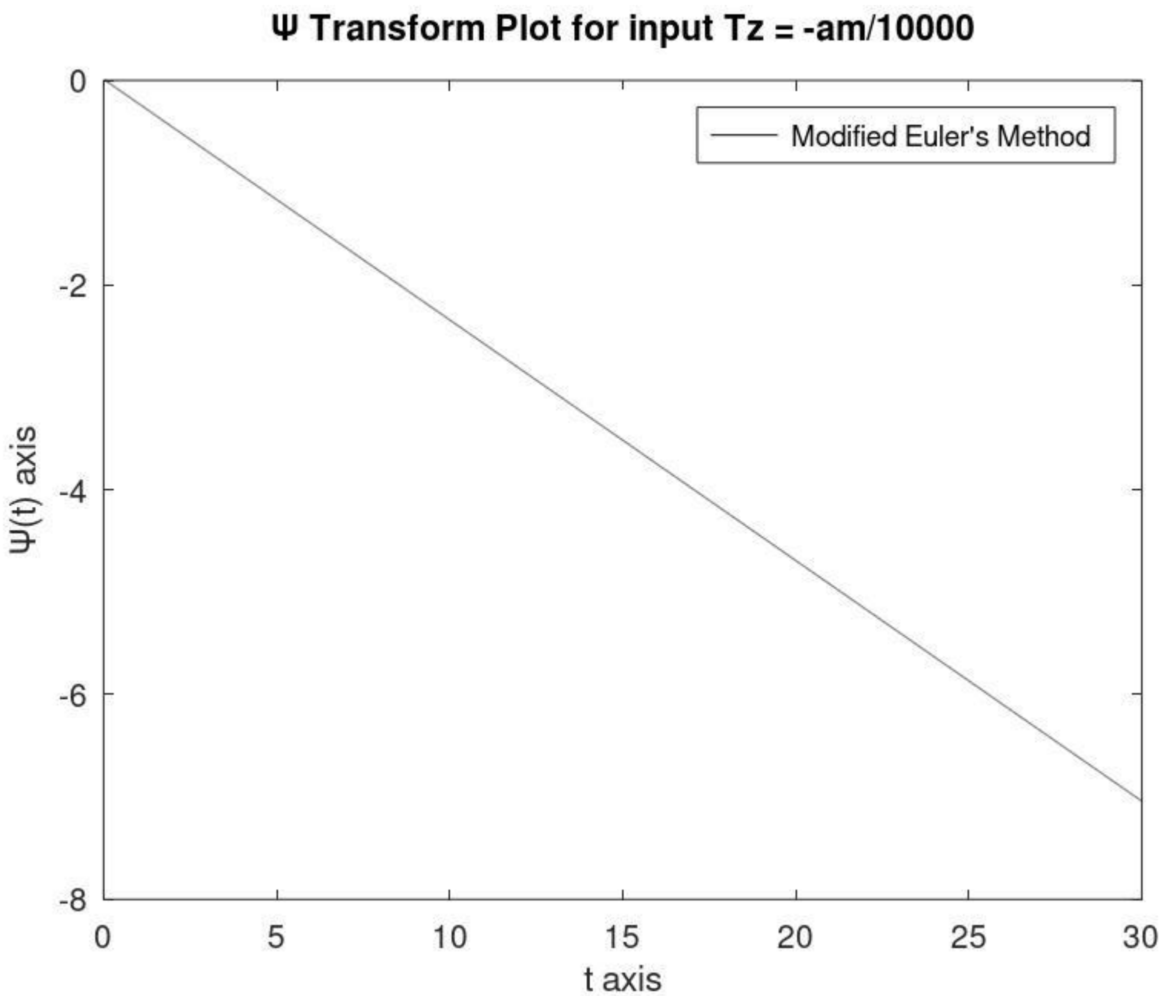

Ψ Transform Plot for input Tz = 0
Modified Euler's Method
Ψ(t) axis
t axis
1
0.5
0
-0.5
-1
0
5
10
15
20
25
30


Z Transform Plot for input fz = M*g
Euler's Method
Z(t) axis
t axis
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
0
5
10
15
20
25
30


Z Transform Plot for input fz = M*g
Modified Euler's Method
Z(t) axis
t axis
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
0
5
10
15
20
25
30



Ψ Transform Plot for input Tz = -am/10000
Euler's Method
Ψ(t) axis
t axis
0
-2
-4
-6
-8
0
5
10
15
20
25
30



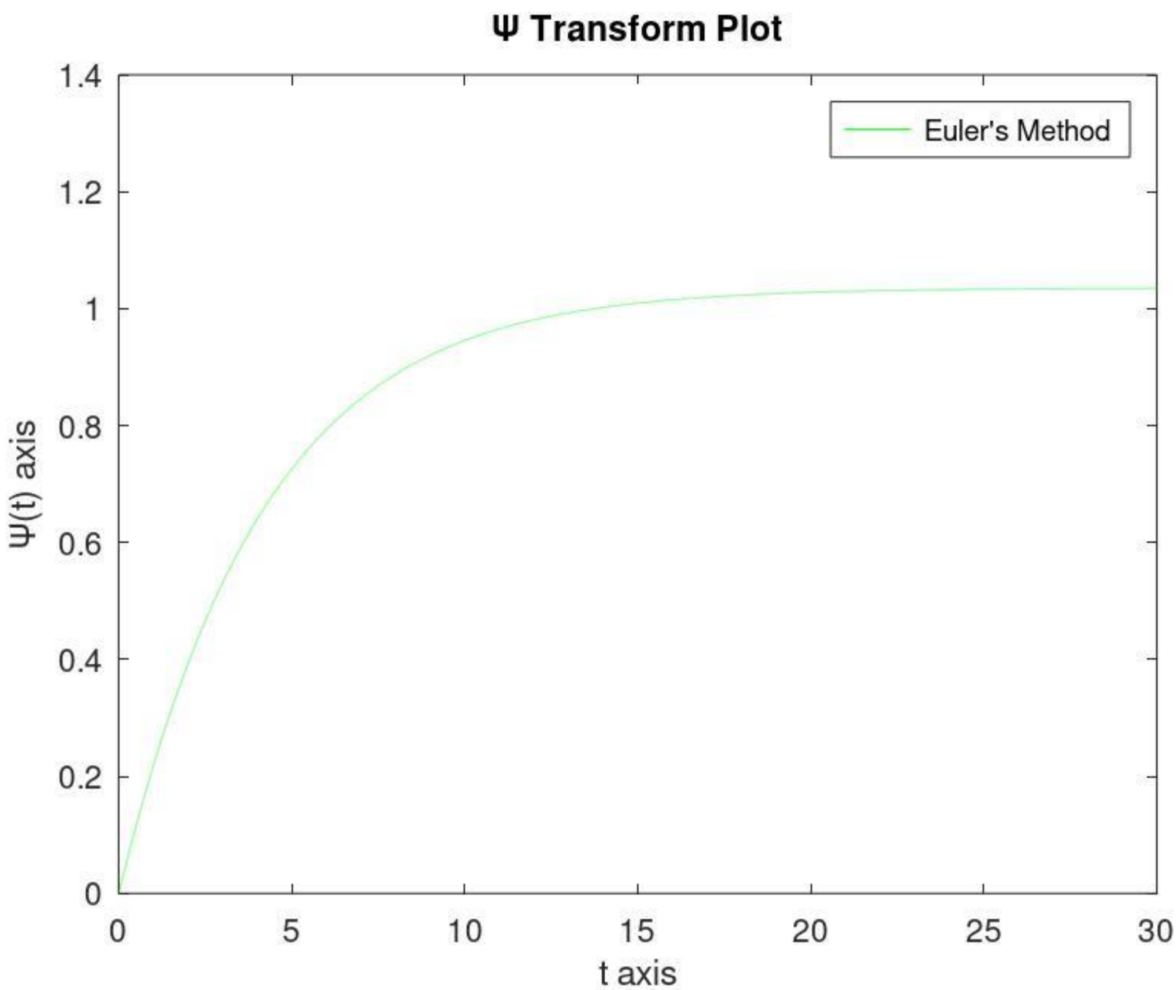
Ψ Transform Plot for input Tz = -am/10000
Modified Euler's Method
Ψ(t) axis
t axis
0
-2
-4
-6
-8
0
5
10
15
20
25
30

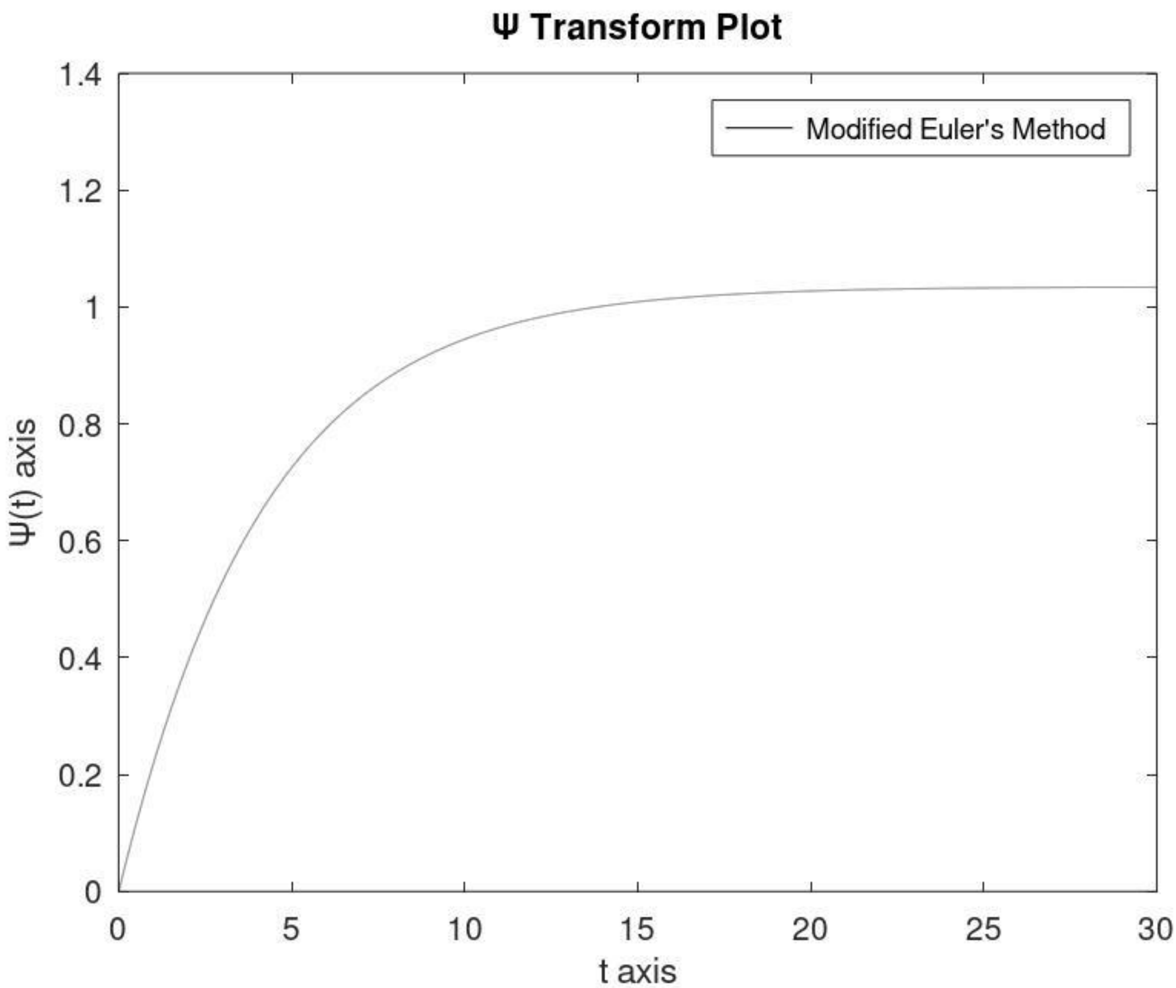
I. **Για είσοδο $[f_z, \tau_z]^T = [Mg + A.M./1000, 0]^T$ η γραφική παράσταση για το Ζ είναι μια ευθεία με θετική κλίση δηλαδή το τετρακόπτερο κινείται γραμμικά με κατεύθυνση προς τα πάνω. Η διαφορά με το διάγραμμα της τροποποιημένης Euler είναι στις τιμές της λύσης μιας και η μέθοδος αυτή είναι μεγαλύτερης ακρίβειας.**

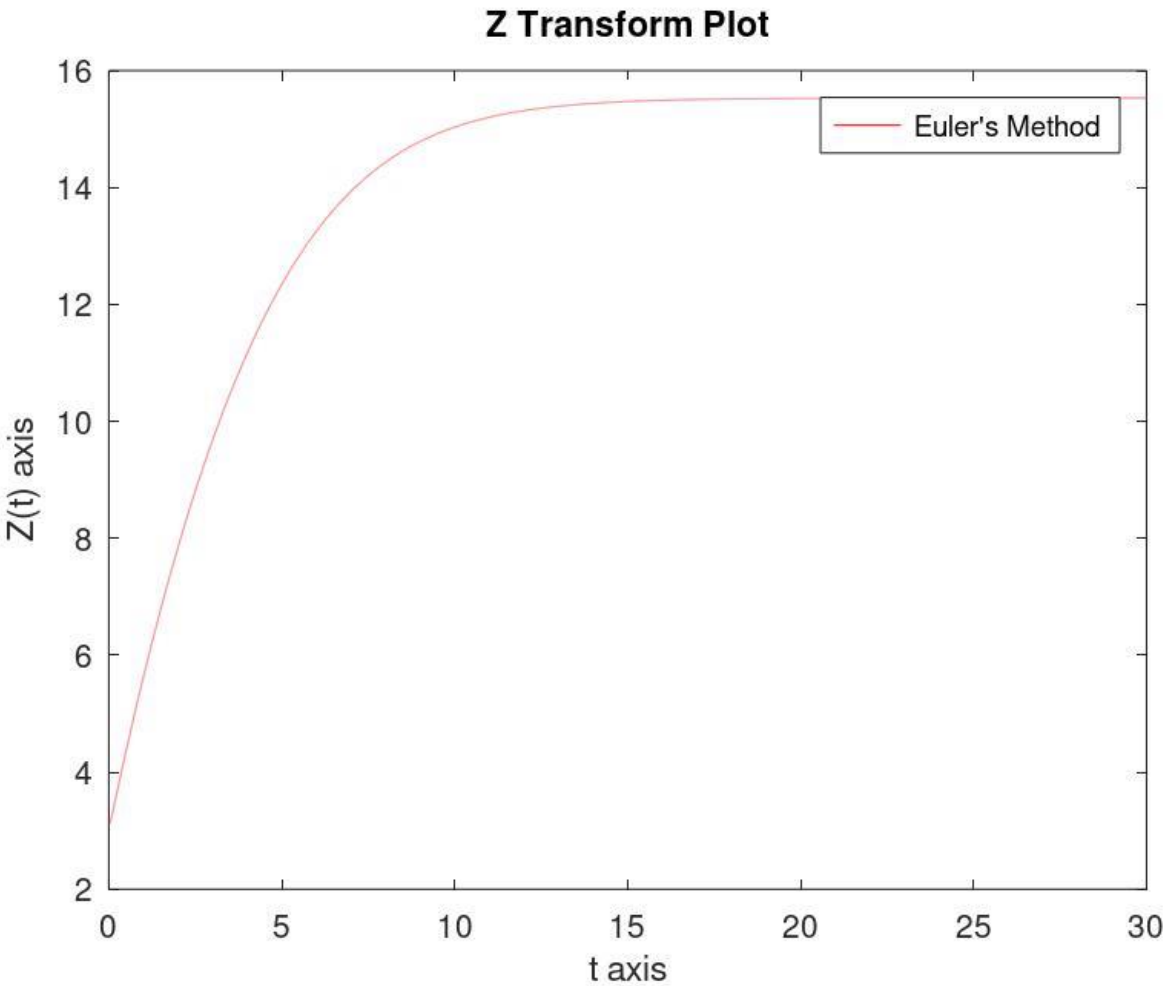
   Για το ψ η γραφική είναι η ευθεία ψ=0 δεν υπάρχει κάποια μεταβολή στον προσανατολισμό του τετρακοπτέρου ως προς τον άξονα Ζ, δηλάδή δεν περιστρέφεται.

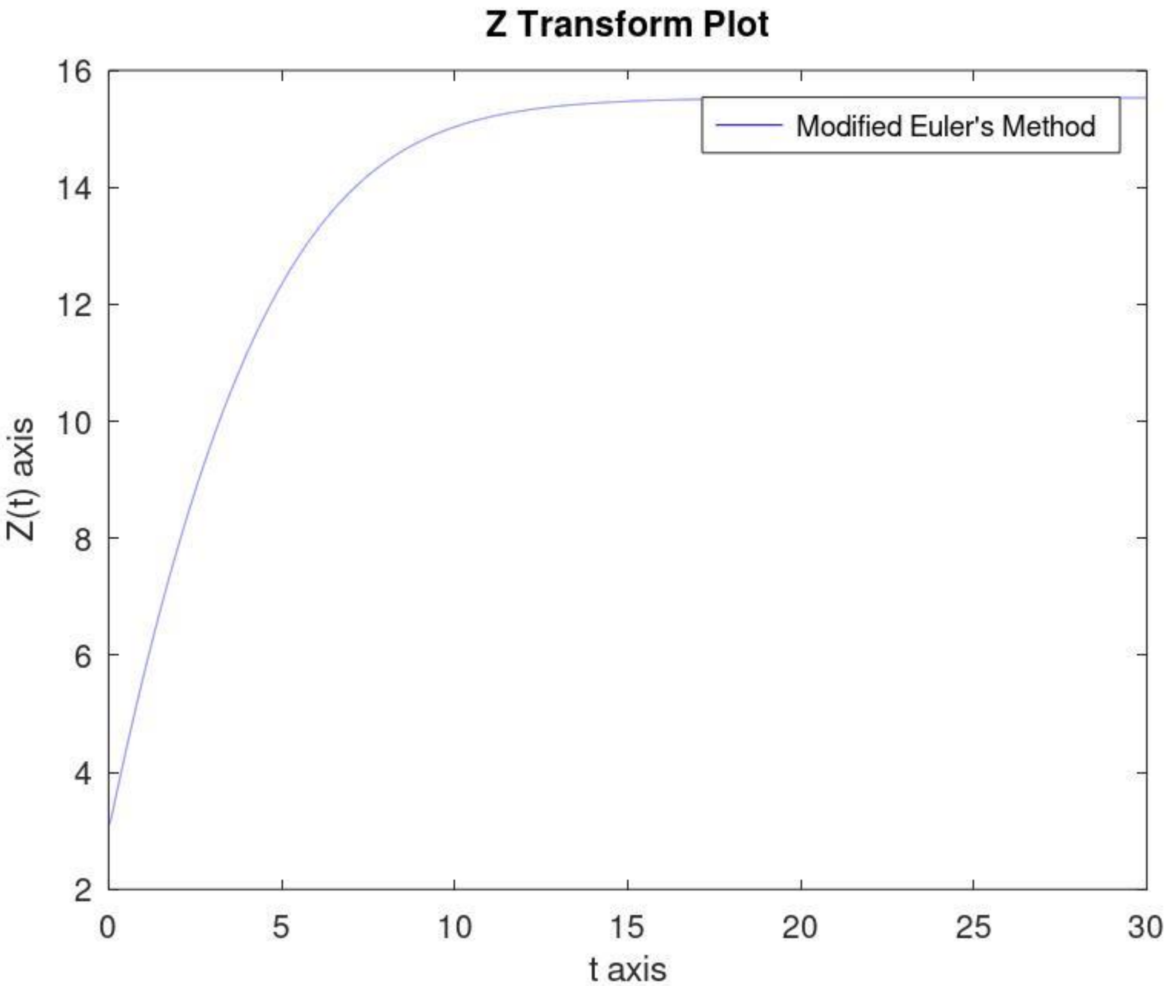
II. **Για είσοδο $[f_z, \tau_z]^T = [Mg ,- A.M./10000]^T$ η γραφική παράσταση για το Ζ είναι η ευθεία Ζ=3.106 οπότε το τετρακόπτερο διατηρεί σταθερό το ύψος του.**
   Όμως η γραφική παράσταση για το Ψ σε αυτή τη περίπτωση είναι μια ευθεία με αρνητική κλίση πράγμα που σημαίνει πως μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο ο προσανατολισμός του ως προς τον Ζ δηλαδή περιστρέφεται με φορά αντίθετη αυτής του ρολογιού.

Διαγραμματα ερωτηματος 1γ


Ψ Transform Plot
Euler's Method
Ψ(t) axis
t axis
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20
25
30


Ψ Transform Plot
Modified Euler's Method
Ψ(t) axis
t axis
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20
25
30


Z Transform Plot
Euler's Method
Z(t) axis
t axis
16
14
12
10
8
6
4
2
0
5
10
15
20
25
30


Z Transform Plot
Modified Euler's Method
Z(t) axis
t axis
16
14
12
10
8
6
4
2
0
5
10
15
20
25
30

Οι γραφικές παραστάσεις των Ζ,Ψ είναι και στις δυο περιπτώσεις καμπύλες οι οποίες αρχικά αυξάνουν την τιμή τους με διαφορετικό ρυθμό μέχρι που φτάνουν σε ένα σημείο οπού και σταθεροποιούνται. Αυτό σημαίνει πως το τετρακόπτερο αρχικά αυξάνει το ύψος του προς τον χρόνο ενώ ταυτόχρονα αλλάζει και τον προσανατολισμό του ως προς τον κάθετο άξονα Ζ, μέχρι που κάποια στιγμή σταθεροποιούνται και το δυο μεγέθη.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για να απλοποιήσω τη μελέτη της κάθετης κίνησης του τετρακόπτερου (στον Ζ άξονα), προσεγγίζω την (1) με την γραμμική διαφορική εξίσωση $Mz'' = f_z - gM - C_z z'$ με (5)

$f_z = Mg + K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(z')$ (6)

α΄) Αφού αντικαταστήσετε την (6) στην (5), να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και να προσδιορισθούν συμβολικά οι πόλοι και τα μηδενικά της (5), υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες. Θεωρούμε ότι η είσοδος στο σύστημα είναι το επιθυμητό ύψος, z_{des}, και η έξοδος είναι το ύψος, z, σε κάθε χρονική στιγμή. Στη συνέχεια, υπολογίστε τους πόλους και τα μηδενικά, αριθμητικά, με τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους:

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΤΙΜΗ
M	1 kg
Cz	3 + A.M/5000
K_{pz}	5
K_{dz}	15

ΛΥΣΗ

(5) (6) $\Rightarrow Mz'' = Mg + K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(z') - gM - C_z z'$

$\Rightarrow Mz'' = K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(z') - C_z z'$

$\Rightarrow Mz'' = K_{pz}(z_{des}) - K_{pz}(z) - z'(K_{dz} + C_z)$

$\Rightarrow Mz'' + K_{pz}(z) + z'(K_{dz} + C_z) = K_{pz}(z_{des})$

$\Rightarrow \frac{Mz'' + Kpz\,(z) + z'(Kdz + Cz)}{Kpz} = z_{des}$

$\Rightarrow (M/K_{pz})z'' + ((K_{dz} + C_z)/K_{pz})z' + z = z_{des}$

Z(t): Έξοδος

Z_{des}(t): Είσοδος

Εφόσον έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες τότε:

$$\left.\begin{aligned} L[z''] &= s^2 Z(s) \\ L[z'] &= s\,Z(s) \\ L[z] &= Z(s) \end{aligned}\right\} (M/K_{pz})s^2 Z(s) + ((K_{dz} + C_z)/K_{pz})\,s\,Z(s) + sZ(s) = Z_{des}(s)$$

$$\Rightarrow [(M/K_{pz})s^2 + ((K_{dz} + C_z)/K_{pz})s + 1]Z(s) = Z_{des}(s)$$

Αρα η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(s) = \frac{Z(t)}{Zdes(t)} = \frac{1}{(M/Kpz)s\text{^}2 + ((Kdz + Cz)/Kpz)s + 1}$$

Προφανώς δεν υπάρχουν μηδενικά καθώς δεν γίνεται να μηδενιστεί ο αριθμητής, όμως υπάρχουν δυο πόλοι , οι δυο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης του παρονομαστή οι οποίες είναι:

$$S1 = (-((K_{dz} + C_z)/K_{pz}) + \sqrt{((Kdz + Cz)/Kpz)^2 - 4(M/Kpz)}\,) / 2(M/K_{pz})$$

$$S1 = (-((K_{dz} + C_z)/K_{pz}) + \sqrt{((Kdz + Cz)/Kpz)^2 - 4(M/Kpz)}\,) / 2(M/K_{pz})$$

Αντικαθιστώντας:

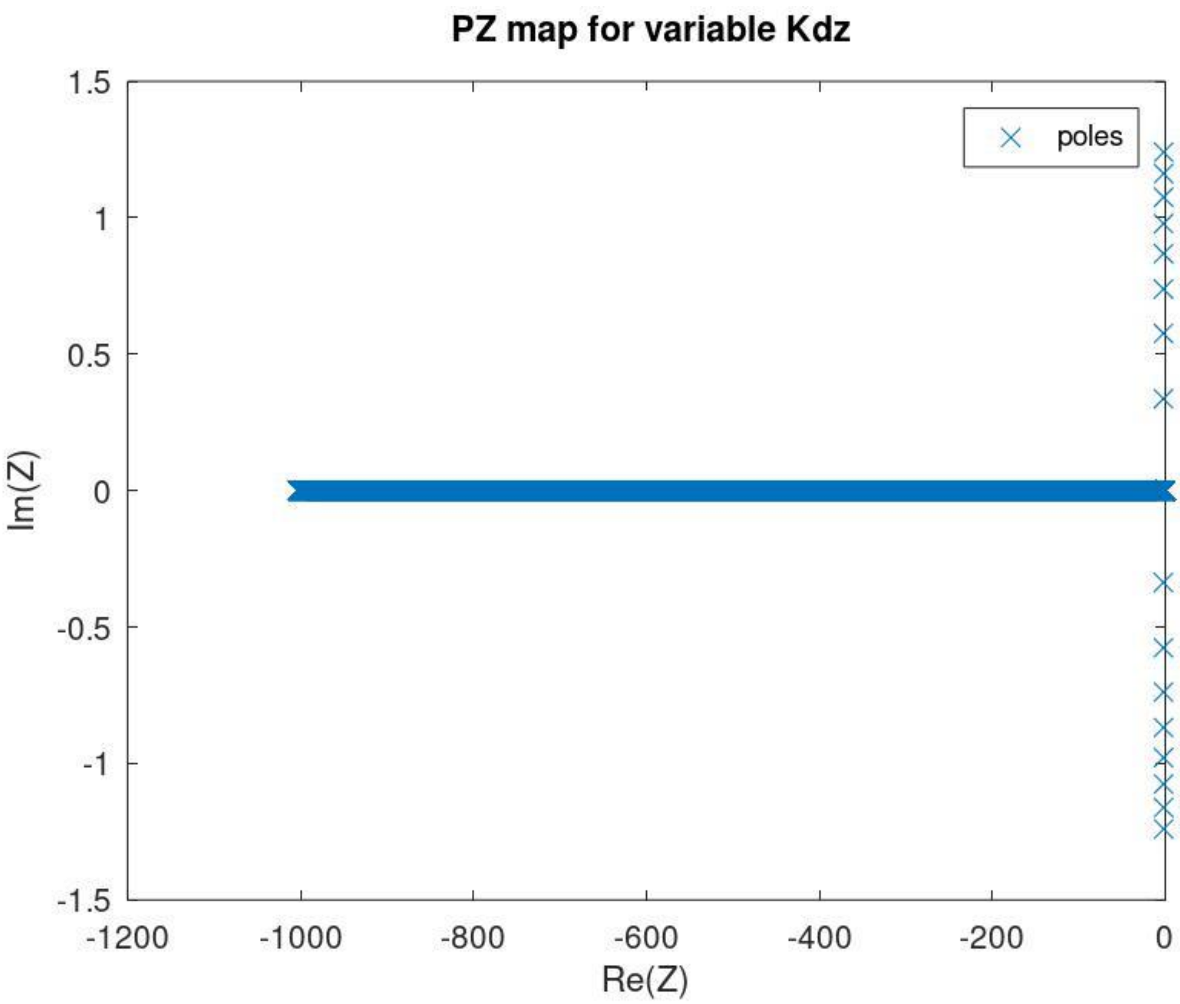
S1 = (((-15+3.6212)/5)) + $\sqrt{(((-15+3.6212)/5))^{2}-4(0.2\,)}$ **) / 2(0.2)**

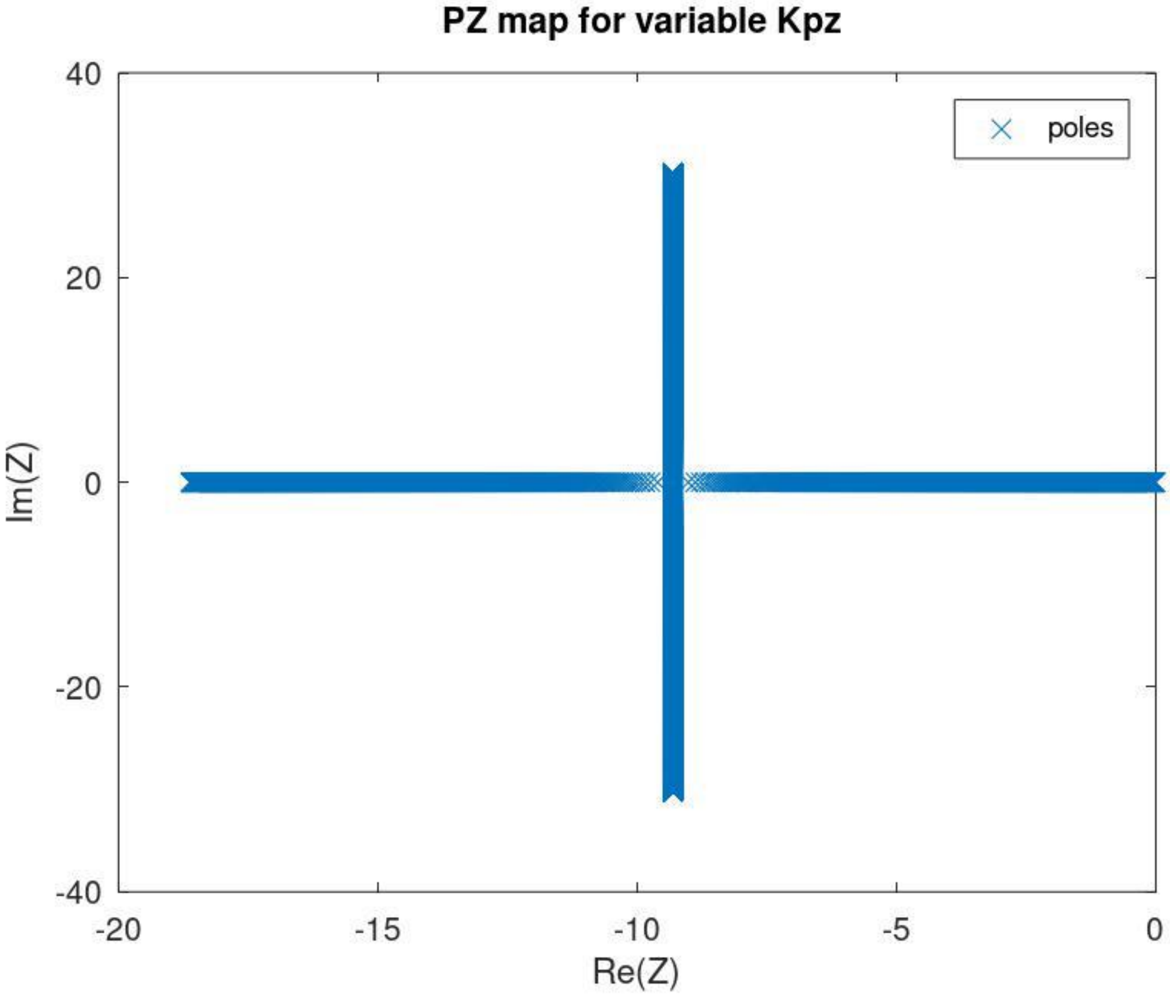
= (-3.72424 + 3.61254046)/0.4 = -0.27249885⇒ $\boxed{\textbf{S1 = -0.27249885}}$

S1 = (-3.72424 - 3.61254046)/0.4 = -18.2987012⇒ $\boxed{\textbf{S1 = -18.2987012}}$

β΄) Μελετήστε και απεικονίστε σχηματικά, στο μιγαδικό επίπεδο, την αλλαγή των πόλων και των μηδενικών της (5), καθώς τα Kpz και Kdz μεταβάλλονται από σχεδόν μηδενικές τιμές σε πολύ μεγάλες τιμές (διατηρώντας κάθε φορά το ένα από τα δύο σταθερό). Τι συμπεράσματα βγάζετε σχετικά με την μορφή της απόκρισης και την ευστάθεια του συστήματος;

Αρχική τιμη:0,1 Τελική τιμή: 1000 Βήμα: 0,1





Στην περίπτωση που έχουμε μεταβλητό K_{dz} και σταθερό K_{pz} αρχικά, παρατηρούμε ότι για τιμές $K_{dz} < 0{,}8$ έχουμε πόλους με μηδενικό πραγματικό μέρος. Αυτό σημαίνει πως παρουσιάζεται απόκριση χωρίς απόσβεση οπότε το σύστημα είναι στεθερό μιας και στο πεδίο του χρόνου η λύση του θα είναι μια ταλάντωση που δεν αποσβένει δηλαδή διατηρεί σταθερό το πλάτος της για όλες τις χρονικές στιγμές. Στην συνέχεια για όλες τις υπόλοιπες τιμές του K_{dz} παρατηρείται σταθερότητα στην συμπεριφορά των πόλων. Συγκεκριμένα, οι πόλοι είναι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί που σημαίνει πως παρουσιάζεται υπεραπόσβεση, συνεπώς το σύστημα πλέον είναι σταθερό μιας και η λύση του στο πεδίο του χρόνου είναι μια καμπύλη η οποία σταθεροποιείται με αργό ρυθμό σε κάποιο συγκεκριμένο σημείου ξεκινώντας από κάποιο αρχικό.

Στην δεύτερη περίπτωση οπού διατηρούμε το K_{dz} σταθερό, αρχικά οι πόλοι είναι αρνητικοί με μηδενικό φανταστικό μέρος οπότε η απόκριση και

η ευστάθεια του συστήματος χαρακτηρίζονται όπως προαναφέρθηκε. Όμως για K_{pz}>20 οι πόλοι του συστήματος πλέον έχουν και φανταστικό μέρος οπότε παρουσιάζεται το φαινόμενο της υποαπόσβεσης επομένως πλέον το σύστημα δεν είναι σταθερό μιας και στο πεδίο του χρόνου η λύση του περιγράφεται από μια φθίνουσα ημιτονοειδή καμπύλη η οποία αποσβένει, τείνει δηλαδή προς μηδενικό πλάτος.

Προφανώς, και στις δυο περιπτώσεις, υπάρχει από μια τιμή για τα K_{dz},K_{pz} για τις οποίες παρουσιάζεται ένας διπλός πόλος, αλλά στην περίπτωση μας δεν επιλέγονται. Συγκεκριμένα, οι τιμές αυτές είναι

$k_{dz} = K_{pz}\sqrt{\frac{4}{k_{pz}}} - C_z$

και

$K_{pz} = (K_{dz}-C_z)^2 / 4$

Για αυτές τις τιμές θα είχαμε το φαινόμενο της κρίσιμης απόκρισης και το σύστημα θα χαρακτηριζότανε ως σταθερό μιας και στο πεδίο του χρόνου η λύση του θα ήταν μια καμπύλη που θα συνέκλινε σε κάποια τιμή με αρκετά μεγάλο ρυθμό αύξησης.

γ΄) Βρείτε την αναλυτική λύση της (5) με τις αρχικές συνθήκες του Προβλήματος 1γ.

$Mz'' = f_z - gM - C_z z'$ (5)

$f_z = Mg + K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(z')$ (7)

$K_{pz} = 5$

$K_{dz} = 15 - (A.M./1000) = 11.894$

$z0 = A.M./1000 = 3.106$

$z_{des} = A.M./200 = 15.53$

$C_z = 3 + (A.M./5000) = 3.6212$

Από (5),(7) $\Rightarrow Mz'' = Mg + K_{pz}(z_{des} - z) - K_{dz}(z') - gM - C_z z'$

$\Rightarrow Mz'' = K_{pz}z_{des} - K_{pz}\, z - z'(K_{dz}(z') + C_z)$

$\Rightarrow Mz'' + K_{pz}\, z + z'(K_{dz} + C_z) = K_{pz}z_{des}$

$\Rightarrow z'' + 5\,z + z'(11.894 + 3.6212) = 5x15.53$

$\Rightarrow$ΔΕ: $z'' + 15.5152z' + 5\,z = 77.65$ (8)

Χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 + 15.5152r + 5 = 0$

$\Delta = 15.5152^2 - \sqrt{4x5} = 220.7214 > 0$

Προφανώς η ΧΑ έχεις δυο πραγματικές ρίζες

$r_1 = \frac{-15{,}5152+\sqrt{220{,}7214}}{2} = \frac{-15{,}5152+14.8566}{2} = -0.3293$

$r_2 = \frac{-15{,}5152-\sqrt{220{,}7214}}{2} = \frac{-15{,}5152-14.8566}{2} = -15.1859$

άρα η γενική λύση της ΔΕ: $z(t) = c_1e^{-0.3293t} + c_2e^{-15.1859}$

όμως επειδή η δε είναι μη ομογενής πρέπει να υπολογιστεί και η μερική λύση:

υποθέτω $Z(t) = A$ με $Z'(t)=0$ και $Z''(t) = 0$

αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (8) $\Rightarrow 5A = 77{,}65 \Rightarrow A = 15{,}53$

και αρά η γενική λύση είναι της μορφής

$$z(t) = 15.53 + c_1e^{-0.3293t} + c_2e^{-15.1859t} \quad (9)$$

με $z'(t) = (-0.3293\, c_1e^{-0.3293t})+(-15.1859c_2e^{-15.1859})$ (10)

από εκφώνηση $z'(0) = 0$ και $z(0) = 3.106$

(9) $\Rightarrow 3{,}106 = 15.53 + c_1e^{-0.3293x0} + c_2e^{-15.1859x0}$

$\Rightarrow 3.106 = 15.53 + c1 + c2 \Rightarrow c1 + c2 = -12.424$ (11)

(10) $\Rightarrow (-0.3293\, c_1e^{-0.3293t})+(-15.1859c_2e^{-15.1859}) = 0$

$\Rightarrow -0.3293\, c_1 - 15.1859c_2 = 0$ (12)

Λύνοντας το σύστημα των (11),(12) παίρνουμε:

c_1 = -12,6993

c_2 = 0,2753

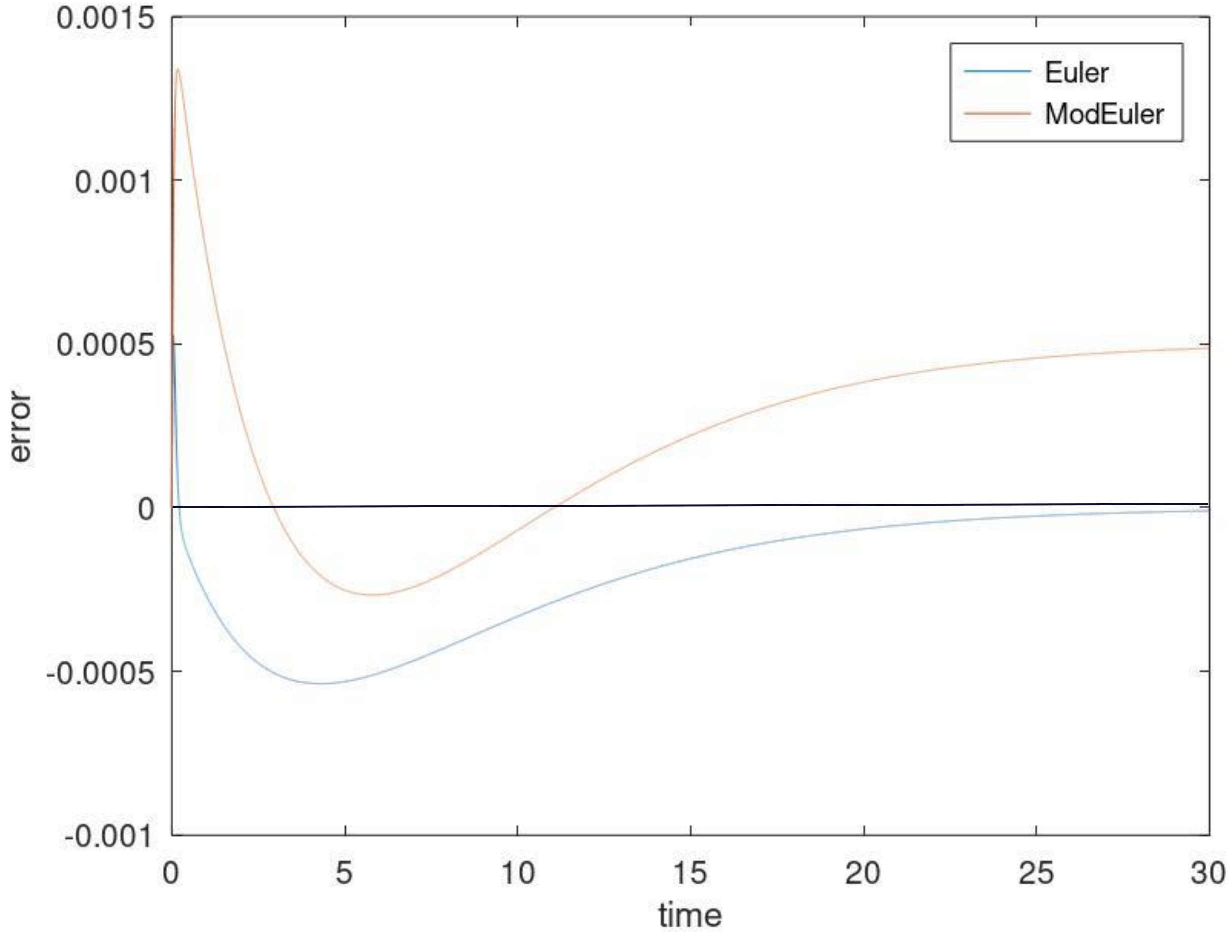
Τέλος, αντικαθιστώντας στην (9) καταλήγουμε στην γενική λύση:

$$\boxed{z(t) = -12{,}6993e^{-0.3293t} + 0{,}2753e^{-15.1859t} + 15.53}$$

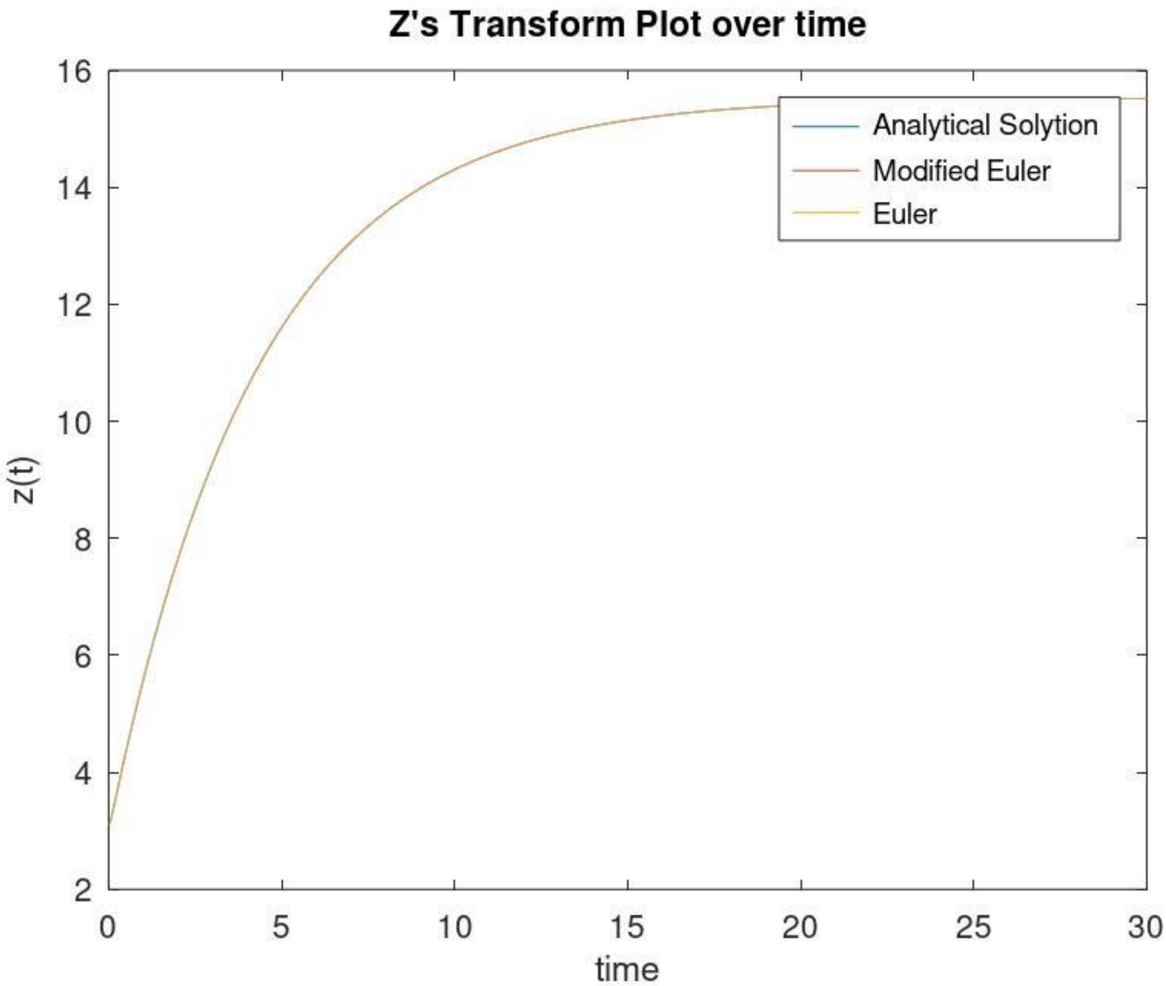
(έχει γίνει στρογγυλοποίηση των τιμών στα 4 δεκαδικά ψηφία)

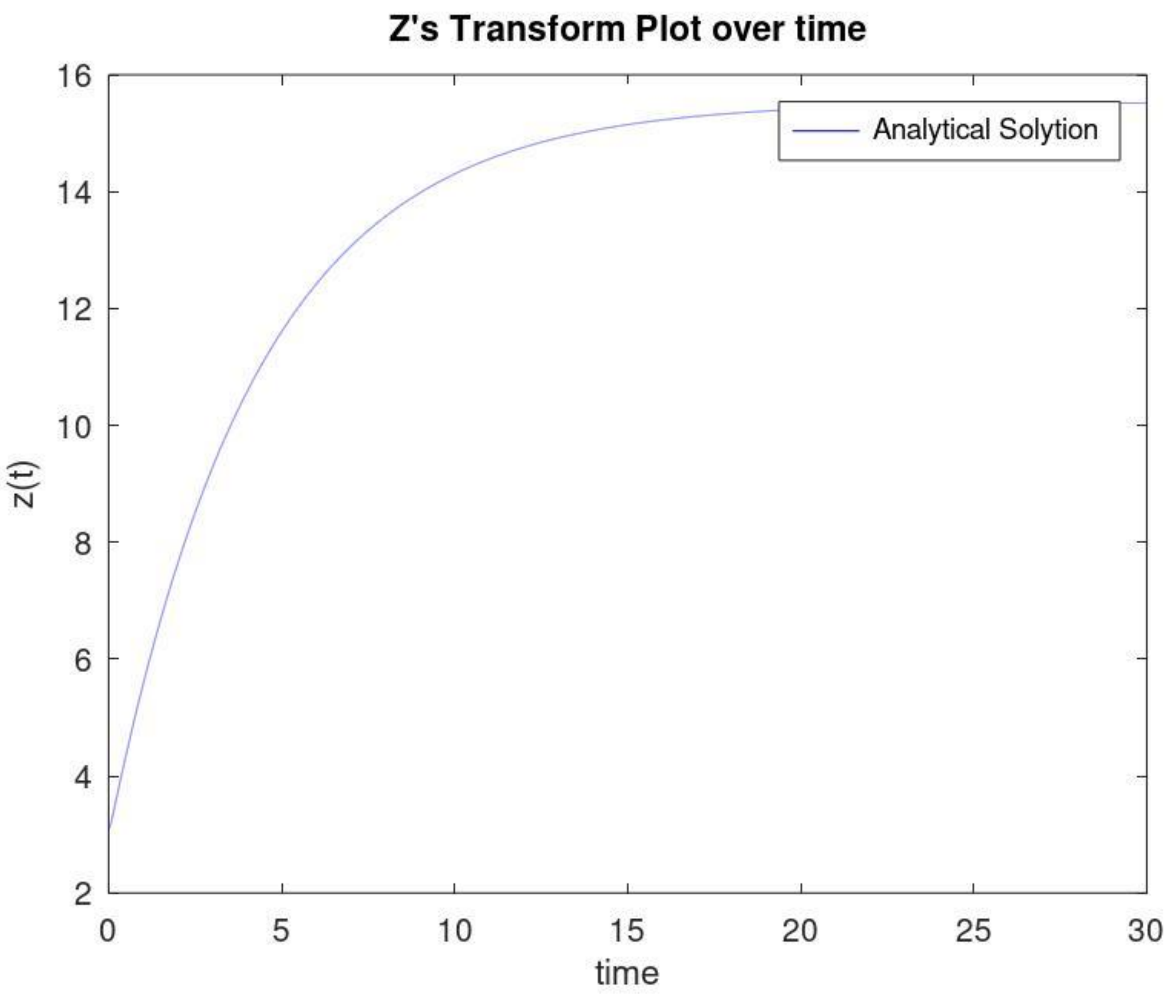
δ') Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C, το οποίο να υλοποιεί την αναλυτική λύση της (5), και υπολογίστε, μόνο για την (5), ξανά το ερώτημα 1γ. Να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων. Τι συμπεράσματα βγάζετε;

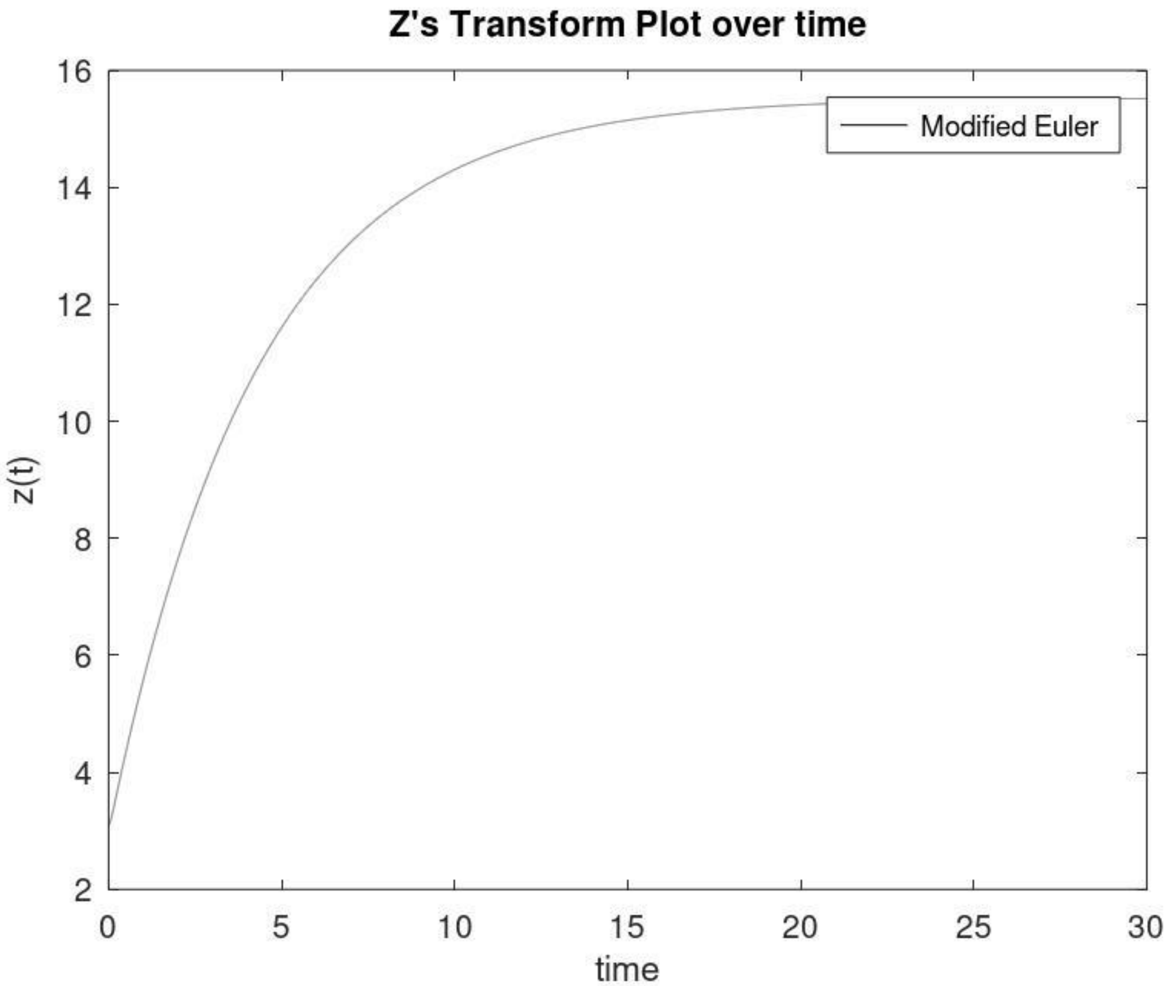
Έχει παραδοθεί το ex2_d.m και παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα για το λάθος της κάθε μεθόδου στον χρόνο, στα οποία φαίνεται πως αρχικά η μέθοδος Euler προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια την πραγματική λύση την διαφορικής στην συνέχεια έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στην τροποποιημένη μέθοδο και τελικά η Euler προς το τέλος την χρονικής διάρκειας είναι αυτή με την μεγαλύτερη ακρίβεια για το συγκεκριμένο πρόβλημα και τις συγκεκριμένες τιμές.



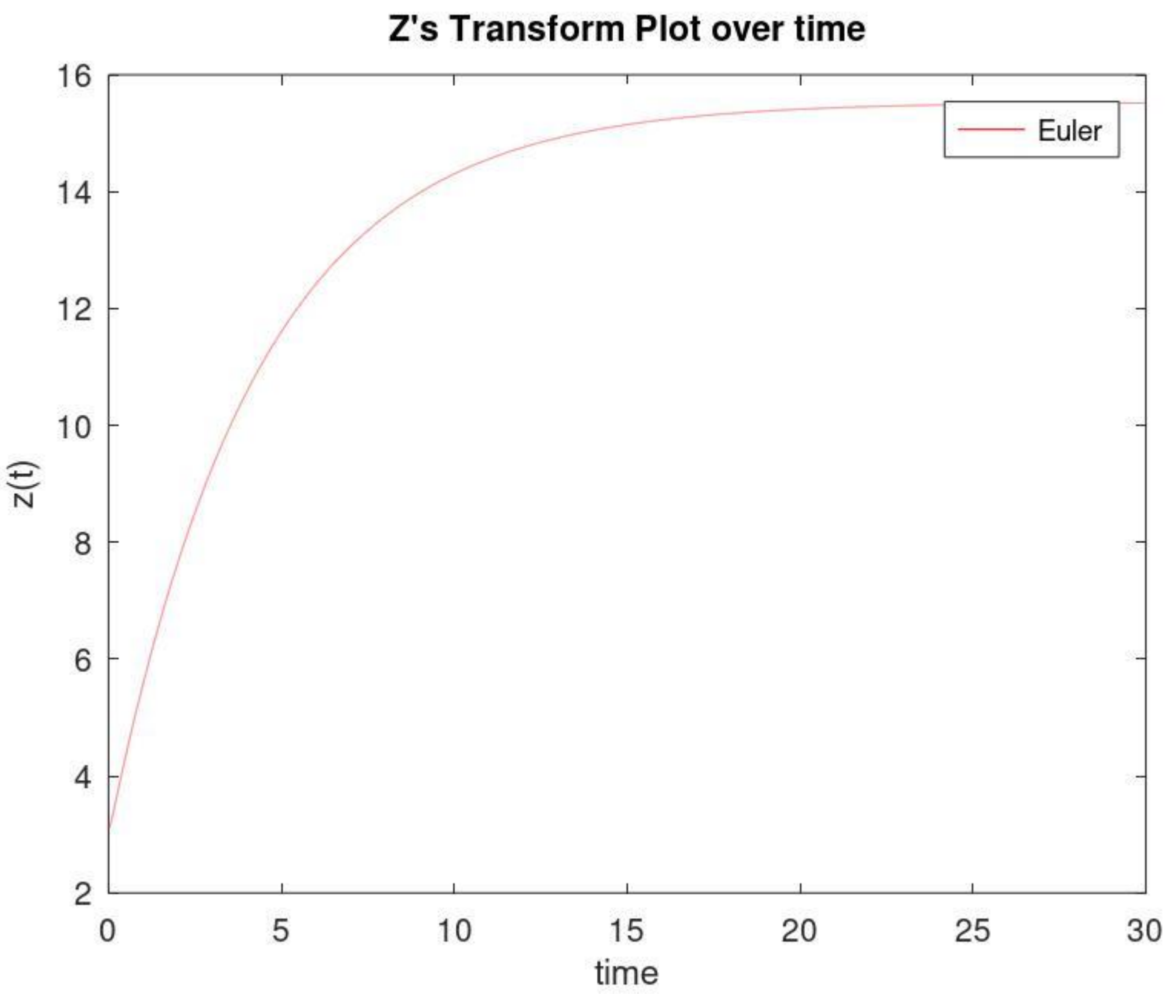
ε') Να γίνει η γραφική παράσταση της λύσης.


Z's Transform Plot over time
16
14
12
10
8
6
4
2
z(t)
0
5
10
15
20
25
30
time
Analytical Solytion
Modified Euler
Euler


Z's Transform Plot over time
Analytical Solytion
z(t)
time
16
14
12
10
8
6
4
2
0
5
10
15
20
25
30



Το τετρακόπτερο ξεκινάει από την θέση Z=3,106 και αυξάνει το ύψος του με διαφορετικό ρυθμό προς τον χρόνο μέχρι που σταθεροποιείται.


Z's Transform Plot over time
Euler
z(t)
time
16
14
12
10
8
6
4
2
0
5
10
15
20
25
30