UNIWERSYTET WROCŁAWSKI

Pracownia 1.19

Antoni Tomaszewski, Artur Derechowski

15 października 2018

1 OPIS PROBLEMU

Zadanie polega na napisaniu algorytmu Strassena mnożenia macierzy n*n i porównania go z klasycznym mnożeniem macierzy. Algorytm Strassena ma złożoność asymptotyczną

$$O(N^{\log 7})$$

co jest lepsze od klasycznego mnożenia w czasie

$$O(N^3)$$

, więc dla dużych macierzy algorytm Strassena powinien być szybszy.

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)^2(x+y) \\ &= (x^2+2xy+y^2)(x+y) \\ &= (x^3+2x^2y+xy^2)+(x^2y+2xy^2+y^3) \\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned} \tag{1.1}$$

2 ALGORYTM STRASSENA

mając dwie macierze X i Y aby wyznaczyć ich iloczyn można najpierw podzielić je na bloki

$$Z = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

gdzie Z jest iloczynem macierzy X i Y. Następnie trzeba zauważyć, że zamiast robić 8 mnożeń bloków macierzy wystarczy zrobić 7.

$$R = AE + BH, \qquad S = AG + BH, \qquad T = CE + DF, \qquad U = CG + DH \tag{2.2}$$

Tę samą macierz można przedstawić w ten sposób:

$$R = P5 + P4 - P2 + P6, \qquad S = P1 + P2, \qquad T = P3 + P4, \qquad U = P5 + P1 - P3 - P7 \tag{2.3}$$

gdzie:

$$\begin{gathered} P1 = A(G - H), \qquad P2 = (A + B)H, \qquad P3 = (C + D)E, \qquad P4 = D(F - E), \\ P5 = (A + D)(E + H), \qquad P6 = (B - D)(F + H), \qquad P7 = (A - C)(E + G) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Algorytm Strassena dzieli wtedy macierze na coraz mniejsze i wywołuje na nich mnożenie.

Widać, że algorytm Strassena działa najefektywniej dla macierzy rozmiaru 2^k. Wtedy zawsze można je dzielić na 2 i wywoływać rekurencyjnie Strassena dla mniejszych macierzy. Gdy macierz jest nieparzystego rozumiaru, to nie można jej pomnożyć, bo nie można jej podzielić na bloki. Problem pojawia się, gdy mamy więc macierz rozmiaru $2^k + 1$. Wtedy efektywnie tworzymy macierz 4 razy większą (resztę wypełniamy zerami), aby ją pomnożyć. Można to też zbadać (nie jest ujęte w opisie pracowni).

3 Analiza błędów

po implementacji algorytmu Strassena kolejną częścią pracowni jest analiza błędów algorytmu. Należy przeprowadzić obliczenia dla macierzy o rozmiarach od 4 do 500. Dla danej macierzy nieosobliwej trzeba też policzyć wartości błędów $\Delta(XX^{-1} - I)$ oraz $\Delta(X^{-1}X - I)$, gdzie

$$\Delta(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}^2$$

Jak te błędy mają się do klasycznego sposobu mnożenia macierzy?

Dla danych macierzy X Y Z, obliczyć także $\Delta((XY)V - X(YV))$. Porównać to z klasycznym mnożeniem macierzy. To sprawdzi, czy mnożenie Strassena dobrze zachowuje łączność mnożenia macierzy.

Czy generowane macierze powinny być losowe?
Chyba musimy też stworzyć algorytm liczenia macierzy odwrotnej.

4 Algorytm łączony

Nie jest to opisane w poleceniu pracowni, ale ciekawie byłoby pokazać dla jak dużych macierzy w naszej implementacji opłaca się bardziej stosowac algorytm Strassena od klasycznego. Można też się zastanowić wtedy nad algorytmem, który stosuje dzielenie Strassena do pewnego momentu, a gdy macierze są dostatecznie małe, to mnoży je klasycznie.

5 Forma

Programy mają być wykonane w języku Julia. Wykresy należy stworzyć w Jupyter Notebook i skonwertować do HTML.