

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет экономических наук

Марков Антон Алексеевич

*«Доверительное оценивание матрицы переходных вероятностей
в условиях ограниченности данных»*

Выпускная квалификационная работа - МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
по направлению подготовки 38.04.08 Финансы и кредит

Образовательная программа "Финансовые рынки и финансовые институты"

Рецензент
доцент, к.э.н.
Пильник Николай
Петрович

Руководитель
доцент, к.ф.-м.н.
Лапшин Виктор
Александрович

Москва 2019

Содержание

1. Введение	4
2. Общий подход к моделированию вероятностей дефолта	7
2.1. Задачи, рассматриваемые в главе	7
2.2. Общий подход к расчету ожидаемых кредитных убытков (ОКУ)	7
2.3. Обзор подходов к моделированию вероятности дефолта (PD).....	8
2.3.1. Модели на основе рыночных показателей	8
2.3.2. Модели на основе фундаментальных показателей	9
2.3.3. Современные подходы к оценке вероятности дефолта заемщика.....	10
2.3.4. Модели прогнозирования вероятности дефолта на весь срок жизни финансового инструмента	10
2.4. Выводы.....	11
3. Обзор подхода на основе марковских цепей	12
3.1. Задачи, рассматриваемые в главе	12
3.2. Обзор литературы – моделирование при помощи марковских цепей.....	12
3.3. Теоретические аспекты подхода, основанного на марковских цепях	12
3.4. Когортный метод	15
3.4.1. Математический аппарат метода	15
3.4.2. Возможные проблемы при работе с когортным методом и методы их устранения.....	16
3.4.3. Преимущества и недостатки когортного метода.....	19
3.5. Метод дюрации	20
3.5.1. Общее описание метода	20
3.5.2. Связь с когортным методом	22
3.5.3. Возможные проблемы при работе с методом дюрации и методы их устранения 23	
3.5.4. Преимущества и недостатки метода дюрации	24
3.6. Методы учета нелинейного времени при построении матриц переходных вероятностей	24
3.6.1. Математический аппарат метода	24
3.6.2. Преимущества и недостатки метода.....	25
3.7. Иные источники затруднений при оценивании	25
3.8. Различия между моделированием РИТ и ТТС. Учет прогнозной макрэкономической информации	26
3.9. Выводы по главе	27
4. Обзор методов доверительного оценивания матриц переходных вероятностей	28
4.1. Задачи, рассматриваемые в главе	28
4.2. Метод Вальда	28
4.3. Метод бутстрапа	28

4.4.	Метод ВМСМС	29
4.5.	Выводы по главе	32
5.	Эксперимент 1. Проверка корректности методов доверительного оценивания	33
5.1.	Задачи эксперимента	33
5.2.	Проверка адекватности ширины доверительных интервалов	33
5.2.1.	Методология проведения	33
5.2.2.	Предположения (параметры) эксперимента	34
5.2.3.	Результаты для метода Вальда	35
5.2.4.	Результаты для метода бутстрапа	36
5.2.5.	Результаты для метода ВМСМС	37
5.3.	Проверка стабильности расчетов при несбалансированной выборке	38
5.4.	Проверка сходимости результатов ВМСМС	38
5.5.	Выводы по Эксперименту 1	40
6.	Эксперимент 2. Построение взаимосвязи между количеством данных и шириной доверительных интервалов	42
6.1.	Задачи эксперимента	42
6.2.	Ход эксперимента	42
6.2.1.	Построение исходной выборки	42
6.2.2.	Анализ зависимости между шириной доверительного интервала и количеством имеющихся данных	43
6.2.3.	Объем данных, необходимый для оценки коэффициентов матрицы переходных вероятностей на заданном уровне точности	46
6.3.	Выводы по Эксперименту 2	47
7.	Эксперимент 3. Оптимальное разбиение выборки для наиболее достоверного оценивания ОКУ	48
7.1.	Задачи эксперимента	48
7.2.	Расчет доверительного интервала для ОКУ	48
7.3.	Поиск оптимального разбиения	50
7.3.1.	Методология проведения	50
7.3.2.	Результаты эксперимента	51
7.4.	Выводы по Эксперименту 3	52
8.	Заключение	54
9.	Список использованной литературы	57
	Приложение 1. Используемые в расчетах файлы	60

1. Введение

Одним из ключевых драйверов исследований по теме оценки кредитного риска была разработка и принятие Базельского соглашения в 1988 г. Именно с этим событием связано начало большинства исследований в этой области. Проблема оценки кредитных рисков стала особенно важной после международного кризиса 2008 г., когда было опубликовано большое количество работ по нашей теме. Сегодня тема также актуальна, особенно в связи с вступлением в 2018 г. в силу нового Международного стандарта финансовой отчётности (IFRS) 9 «Финансовые инструменты» (далее – МСФО 9).

Один из распространенных методов оценки (моделирования) кредитных рисков – построение матриц переходных вероятностей. Такие матрицы строятся для расчета вероятности ухудшения (улучшения) рейтинга заемщика, а также дефолта по его обязательствам, в том числе в течение нескольких лет. В нашей работе мы рассматриваем особенности применения метода матриц переходных вероятностей при оценке кредитного риска заемщиков.

Итак, ввиду широкой применимости метода одной из насущных проблем кредитных организаций является оценка достаточности данных при построении таких матриц. Мы рассматриваем проблему недостаточности данных как проблему увеличения неточности оценок параметров матрицы при недостатке данных, а также неточности оценки ожидаемых кредитных убытков (ОКУ).

В связи с этим в рамках работы мы ставим перед собой **цель** при помощи различных методов оценить влияние недостатка данных на доверительные оценки вероятностей дефолта (PD – probability of default) и ожидаемых кредитных убытков (ОКУ), а также определить, как можно уменьшить доверительный оценок параметров выше (PD и ОКУ) при помощи оптимальной сегментации портфеля.

Из цели работы непосредственно следуют её задачи:

- Рассмотреть в общем виде требования регулятора (ЦБ РФ) и МСФО 9 в части расчета ожидаемых кредитных убытков (ОКУ), провести общий обзор методов, применяемых при моделировании вероятности дефолта (выполнено в п. 2 настоящей работы).
- Рассмотреть основные методы построения матриц переходных вероятностей и внесения корректировок для большего соответствия наблюдаемым данным (выполнено в п. 3 настоящей работы).

- Определить возможные проблемы, связанные с недостаточностью данных, с которыми может столкнуться аналитик при оценке вероятностей дефолта при помощи матриц переходных вероятностей (выполнено в п. 3 настоящей работы).
- Рассмотреть различные методы построения доверительных интервалов для матриц переходных вероятностей (выполнено в п. 4 настоящей работы).
- Провести тестирование методов на адекватность. В частности, оценить:
 - среднюю долю случаев, в которых 95%-ный доверительный интервал «накрывает» истинное значение параметра для каждого из методов (выполнено в п. 5.2 настоящей работы),
 - влияние несбалансированности выборки на получаемые результаты (выполнено в п. 5.3 настоящей работы),
 - сходимость методов (актуально для методов, основанных на байесовском переоценивании) (выполнено в п. 5.4 настоящей работы).
- Построить взаимосвязь между количеством данных и шириной доверительных интервалов (выполнено в п. 6 настоящей работы).
- Оценить необходимый объем данных для оценивания параметров матрицы с заданной точностью (выполнено в п. 6 настоящей работы).
- Определить возможность и методологию применения доверительных оценок вероятностей дефолта (PD) для доверительного анализа ожидаемых кредитных убытков (ОКУ) на реальных данных (выполнено в п. 7.2 настоящей работы).
- Применить доверительные интервалы для вероятностей дефолта (PD) для построения доверительных интервалов для ожидаемых кредитных убытков (ОКУ) с целью нахождения оптимальной группировки данных, при которой ширина доверительного интервала для ожидаемых кредитных убытков (ОКУ) была бы минимальна.

При выполнении этих задач мы сможем лучше понять проблему, **актуальную**, как уже говорилось ранее, по ряду причин:

- оценка кредитных рисков подпадает под непосредственный контроль регулятора (ЦБ РФ) и МСФО 9,
- рассматриваемый в работе метод цепей Маркова и матриц переходных вероятностей является распространенной практикой в банковском секторе и требует дополнительного изучения в части доверительного оценивания,
- проблема данных и их достаточности является наиболее важной для аналитика, работающего в любой сфере,

- результаты расчетов кредитных рисков могут повлиять не только на уровень резервирования Банка, но и на его стратегическую политику, а также трансфертное ценообразование и ценообразование, основанное на оценке риска заемщика.

Новизна работы заключается прежде всего в части определения объема данных, необходимого для оценки вероятностей дефолта на заданном уровне точности (Эксперимент 2 – п. 6.2.3), а также демонстрации возможности применения данных методов для поиска оптимальной группировки заемщиков в укрупненные рейтинговые группы (Эксперимент 3 – п. 7.3).

Настоящая работа структурирована следующим образом.

Пункты 2 и 3 работы посвящены общему порядку расчета ожидаемых кредитных убытков в коммерческом банке, различным методам оценки вероятностей дефолта, а также различным методам построения матриц переходных вероятностей. Читатель, знакомый с порядком оценивания кредитных рисков и вероятностей дефолта в банковской сфере, может без особого ущерба для понимания пропустить пп. 2-3 настоящей работы.

П. 4 работы описывает и характеризует различные методы доверительного оценивания матриц переходных вероятностей, имеющиеся в литературе.

Пп. 5-7 посвящены различным экспериментам на случайно сгенерированных и реальных данных. Эксперимент 1 (п. 5) осуществляет тестирование методов построения доверительных интервалов для матриц переходных вероятностей. Эксперимент 2 (п. 6) посвящен составлению таблицы объемов необходимых данных для построения оценок на заданном уровне точности. Эксперимент 3 (п. 7) посвящен доверительному оцениванию ожидаемых кредитных убытков (ОКУ) и оптимальной группировке состояний заемщиков.

В п. 8 приводятся заключительные выводы по работе.

2. Общий подход к моделированию вероятностей дефолта

2.1. Задачи, рассматриваемые в главе

Настоящая глава ставит перед собой целью в общем виде рассмотреть требования регулятора (ЦБ РФ) и МСФО 9 в части расчета ожидаемых кредитных убытков (ОКУ). Кроме того, в главе проводится обзор методов, применяемых при моделировании вероятности дефолта.

2.2. Общий подход к расчету ожидаемых кредитных убытков (ОКУ)

Согласно требованиям Базельского комитета и МСФО (IFRS) 9 [43], размер ожидаемых кредитных убытков по портфелю Банка рассчитывается по следующей формуле:

$$ECL = PD \cdot LGD \cdot EAD \cdot D,$$

где

ECL – размер ожидаемых кредитных убытков (expected credit loss),

PD – вероятность дефолта,

LGD – уровень потерь при дефолте,

EAD – величина кредитного требования, подверженного риску дефолта,

D – дисконт-фактор.

При этом стоит отметить, что существуют некоторые отличия между требованиями Базельского комитета и стандарта МСФО 9. В частности, Базельский комитет требует создания резервов под обесценение активов на основе средних по экономическому циклу (through-the-cycle – TTC) значений элементов кредитного риска (PD, LGD, EAD, D), в то время как требования МСФО 9 включают в себя оценку кредитного риска на основе последних доступных данных (point-in-time, PIT-оценка) [42, 43]. Различия и взаимосвязь между двумя данными подходами будет подробнее рассмотрены в п. 3.8 настоящей работы.

Другим важным отличием требований МСФО 9 от базельских стандартов является необходимость расчета кредитного риска на весь срок жизни финансового инструмента в случае существенного увеличения кредитного риска по инструменту или заемщику. Данное требование актуально лишь для МСФО 9, но именно из-за этого требования модели кредитного скоринга банков должны иметь возможность оценить риска заемщика не только на ближайший год, но и до конца контрактного срока инструмента.

В рамках данной работы мы рассматриваем методы моделирования и доверительного оценивания вероятностей дефолта в соответствии с требованиями МСФО 9 (ввиду большей общности задачи).

В наиболее общем случае возможно наличие взаимосвязи между различными элементами кредитного риска. Тогда ожидаемые кредитные убытки (ОКУ) имеют многомерную функцию распределения от взаимозависимых факторов (PD, LGD, EAD, D).

Для упрощения расчета мы пренебрегаем данным фактом и сосредотачиваемся на моделировании вероятностей дефолта. В отношении прочих элементов кредитного риска (LGD, EAD, D) мы применяем упрощенный подход, принимая предпосылку о постоянстве данных элементов. В таком случае распределение вероятностей дефолта (PD) непосредственно связано с распределением ожидаемых кредитных убытков (ОКУ), как будет показано в п. 7.2.

2.3. Обзор подходов к моделированию вероятности дефолта (PD)

Существуют различные классификации моделей прогнозирования вероятностей дефолта заемщиков. В рамках работы мы воспользуемся классификацией, приведенной в работе Тотьмяниной [45].

Большинство моделей, прогнозирующих вероятность дефолта заемщиков, может быть разделено на 3 основные группы:

1. Модели на основе рыночных показателей (структурные модели вероятности дефолта и модели сокращенных форм).
2. Модели на основе фундаментальных показателей (модели на основе макроэкономических показателей, бухгалтерской и финансовой отчетности, модели на основе рейтингов – внутренних и внешних).
3. «Современные» (в терминологии Тотьмяниной [45]) подходы к оценке вероятности дефолта заемщика.

Отдельно хотелось бы выделить группу моделей, которые предполагают возможность прогнозирования вероятностей дефолта на весь срок жизни финансовых инструментов.

Рассмотрим каждую группу моделей по отдельности.

2.3.1. Модели на основе рыночных показателей

Существует целый ряд моделей, которые позволяют прогнозировать вероятность дефолта заемщика, основанные на рыночных ценах акций, облигаций и производных финансовых инструментов, торгуемых на ценные бумаги эмитента.

Один из способов прогнозирования вероятностей дефолта основывается на формуле Блэка-Шоулза для оценки опционов компании [6, 27] и ее модификациях. Другой метод (модели

сокращенных форм) оценивает вероятность дефолта в зависимости от разницы (спрэда) между доходностью по долгу эмитента и безрисковой процентной ставкой [19].

Существуют и иные подходы. Например, подход оценки интенсивностей дефолта на основе бутстрапа торгуемых кредитных дефолтных свопов уже вошел в классический курс по производным финансовым инструментам Халла [16]. Данный подход, в частности, позволяет определить вероятность (интенсивность) дефолта для заемщика на весь срок жизни финансового инструмента.

Большим преимуществом всех перечисленных методов является возможность получения рыночной оценки вероятности дефолта заемщика. Тем не менее, существенным недостатком всех моделей на основе рыночных показателей является необходимость наличия торгуемых ликвидных ценных бумаг и производных финансовых инструментов по заемщику. Очевидно, что подобная методология не подходит для значительной части корпоративного сегмента и совсем не подходит для малого и среднего бизнеса и розничного портфеля.

2.3.2. Модели на основе фундаментальных показателей

Модели на основе фундаментальных показателей чаще всего являются регрессионными моделями, демонстрирующими зависимость между некоторыми фундаментальными показателями и вероятностью дефолта заемщика.

В качестве фундаментальных показателей могут быть использованы:

- макроэкономические показатели (например, модель Уилсона [39, 40] и др.),
- данные бухгалтерской и финансовой отчетности (например, широко известная модель Альтмана [1]),
- внутренние и внешние рейтинги / свойства заемщиков.

Все модели, основанные на фундаментальных показателях заемщиков, основываются на индивидуальных особенностях каждого клиента и, соответственно, позволяют более точно оценить риски, которые понесет Банк на уровне каждого индивидуального контракта. В наилучшем случае Банк может использовать данные сведения не только при расчете резерва под обесценение (ОКУ), но и для выстраивания системы ценообразования на основе риска заемщика (RBP – risk-based pricing), трансфертного ценообразования, а также для принятия стратегических решений.

К сожалению, модели, основанные исключительно на макроэкономических показателях, не могут дать полной картины по клиенту, а полных или актуальных сведений о финансовом

состоянии, отчетности (в случае корпоративного клиента) или кредитной истории (для физических лиц) может не быть в Банке. Например, на практике очень распространена ситуация, когда заемщик, получив банковский кредит, перестает предоставлять финансовую отчетность и/или обновлять сведения о себе.

А таком случае для оценки рисков по уже выданным договорам обычно применяются поведенческие модели. Одна из самых популярных моделей такого рода является модель на основе матриц переходных вероятностей.

2.3.3. Современные подходы к оценке вероятности дефолта заемщика

В данную категорию Тотьмянина [45] включает в первую очередь непараметрические модели: модели нейронных сетей, методы нечеткой логики, метод k ближайших соседей и проч.

К сожалению, многие из подобных моделей, хотя могут давать лучшие по сравнению с традиционными подходами результаты, имеют склонность к переобучению и являются так называемыми «черными ящиками» (неинтерпретируемая модель, внутреннее устройство и механизм действия которой неизвестен либо чрезвычайно сложен для понимания). Наличие «черного ящика» при расчете рисков, с одной стороны, может привести к существенным потерям для Банка в случае операционной и прочих ошибок (например, переобучения модели) и, с другой стороны, вызывает большое число вопросов у регулятора и аудиторов.

Таким образом, данное направление развития риск-моделирования является перспективным, но на данный момент несколько проблематичным.

2.3.4. Модели прогнозирования вероятности дефолта на весь срок жизни финансового инструмента

Как уже упоминалось выше, многие модели из предыдущих разделов могут быть адаптированы для построения прогнозов вероятностей дефолта на 2 и более лет. В частности, метод, основанный на матрицах переходных вероятностей, может с легкостью быть перенесен на произвольный временной промежуток.

Отдельно хотелось бы отметить, что при невозможности или трудозатратности адаптации существующей в Банке модели для расчета многолетних вероятностей дефолта, возможно применение приближений в виде некоторого распределения.

В частности, в 1994 г. Carty and Fons на основе данных из Moody's Investor service proprietary database на временном горизонте 1976-1993 гг. обнаружили, что продолжительность пребывания в некотором рейтинге может быть приближено при помощи распределения

Вейбулла [12]. Данный подход стал одним из популярных методов оценки многолетних вероятностей дефолта, применяемых на практике.

2.4. Выводы

В рамках главы были выполнены задачи по обзору требований по расчету ожидаемых кредитных убытков (ОКУ) с точки зрения базельских стандартов и МСФО 9, а также был проведен обзор методов, применяемых при моделировании вероятности дефолта (PD).

В рамках анализа были выделены общие элементы и отличия между требованиями Базеля и МСФО. Кроме того, была приведена краткая классификация методов оценки вероятности дефолта заемщиков, преимущества и недостатки каждой группы методов.

Среди рассмотренных методов был выделен метод прогнозирования на основе матриц переходных вероятностей и цепей Маркова. В частности, к преимуществам данного метода можно отнести малая требовательность к исходным данным о заемщиках, возможность построения как ТТС, так и РИТ оценок, а также возможность построения прогноза вероятности дефолта на весь срок жизни финансового инструмента (требование МСФО 9).

Хотелось бы подчеркнуть, в каких целях обычно применяется подход на основе матриц миграций и, соответственно, применимы результаты настоящей работы:

- при использовании Банком внешних рейтингов (Moody's, S&P, Эксперт РА и проч.), модель применяется для расчета однолетних и многолетних вероятностей дефолта PD («на момент времени» РИТ или «по циклу» ТТС);
- в поведенческих моделях по розничному сегменту для расчета однолетних и многолетних вероятностей дефолта PD («на момент времени» РИТ или «по циклу» ТТС);
- в корпоративном и розничном сегментах Банка в качестве надстройки над однолетней моделью для расчета многолетних вероятностей дефолта PD.
- в качестве одного из инструментов для диагностики портфеля.

Отметим также, что именно требования МСФО включают требования построения прогнозов вероятности дефолта на весь срок жизни финансового инструмента (в случае резкого увеличения кредитного риска), основное применение наше исследование будет иметь именно в целях построения прогнозов для расчета резерва в соответствии с требованиями МСФО.

3. Обзор подхода на основе марковских цепей

3.1. Задачи, рассматриваемые в главе

Данная глава направлена на иллюстрацию теоретических аспектов моделирования вероятности дефолта (PD), а также их качественную взаимосвязь с проблемой ограниченности данных.

В главе приведено описание ключевых подходов к моделированию марковского процесса (метод когорт, метод дюрации, а также модификации последнего метода, предусматривающие гетерогенность во времени), их преимущества и возможные проблемы, а также способы разрешения возможных трудностей.

В п. 3.8 главы будут рассмотрены различия в калибровках моделей «по циклу» (TTC – through-the-cycle) и «на момент времени» (PIT – point-in-time) и учета прогнозной макроэкономической информации при прогнозировании вероятностей дефолта. Подобная калибровка является требованием МСФО 9 и позволяет уточнить прогноз на ближайшие несколько лет.

3.2. Обзор литературы – моделирование при помощи марковских цепей

Одной из первых работ, где модель на основе марковских цепей использовалась для оценки вероятности дефолта, является статья Jarrow and Turnbull [19]. Подход получил дальнейшее развитие в работах Jarrow, Lando and Turnbull [18], и Kijima [20].

При принятии допущения о распределении уровней дефолта (DR), выдвинутых Carty and Fons [12], модель, основанная на цепях Маркова, а также на предпосылке об экспоненциальном (геометрическом – в дискретном случае) распределении DR, должна быть модифицирована и дополнена, как это показано, например, в работе Vasileiou and Vassiliou [38], до полумарковского процесса (то есть процесса, где переходы аналогичны марковским, но подчиняются некоторому распределению – в данном случае – Вейбулла).

В рамках настоящей работы мы прежде всего рассматриваем базовую модель (марковский процесс) ввиду его простоты и широкой распространенности. При необходимости подход, выработанный в настоящем исследовании для базовой модели, может быть обобщен для полумарковских процессов и моделей, а также иных модификаций базовой модели.

3.3. Теоретические аспекты подхода, основанного на марковских цепях

Для определения теоретических аспектов подхода к моделированию введем некоторые определения (в данном случае приводятся определения из учебника Taylor and Karlin [36]).

Марковским процессом $\{X_t\}$ называется стохастический процесс, обладающий таким свойством, что для каждого момента времени t значения $X_s, s > t$ не зависят от значений $X_u, u < t$. Иными словами, вероятности будущих событий не изменятся при появлении дополнительной информации о прошлых событиях и зависят только от текущего момента, что само по себе является довольно жесткой предпосылкой.

Дискретной во времени марковской цепью называется процесс, принимающий конечное счетное множество значений и чей индекс во времени определяется как $T = (0, 1, 2, \dots)$ – некоторое счетное множество. Более формально, марковское свойство выражается как

$$\Pr\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = \Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

для $\forall n, i_0, \dots, i_{n-1}, i, j$.

Тогда вероятностью перехода из состояния i в состояние j за один шаг записывается как $P_{ij}^{n,n+1} = \Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$. При постоянстве вероятностей перехода из состояния i в состояние j (в нашем случае состояние соотносится с рейтингами) во времени говорят о стационарности переходных вероятностей или постоянной во времени дискретной марковской цепи (Homogeneous Discrete-Time Markov Chain Method – HDTMC Method). В таком случае

$$P_{ij}^{n,n+1} = \Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = P_{ij}.$$

Традиционно эти вероятности перехода записываются в виде матрицы переходных вероятностей:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

В таком случае по определению следует, что сумма вероятностей по строкам $\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$ для каждой строки i .

Для применения данного подхода при моделировании кредитных рисков под состояниями принимают рейтинги заемщиков (в случае корпоративного портфеля) или дни / группы просрочки (в случае розничного сегмента), а под переходами между состояниями – улучшения или ухудшения финансового положения заемщиков, приводящие к изменениям кредитных рейтингов / переходу из одной корзины просрочки в другую.

Рейтинги (группы просрочки) – ранжированный список из k значений, где 1 – наилучший рейтинг (нулевая просроченная задолженность), k – дефолт. При этом зачастую принимается предпосылка о дефолте как «поглощающем состоянии» ('absorbing state'), т.е.

$$P_{ni} = \begin{cases} 100\%, & \text{если } i = n \\ 0\%, & \text{если } i \neq n \end{cases}$$

Очевидно, что последний столбец матрицы показывает, с какой вероятностью заемщик с тем или иным рейтингом (группой просрочки) объявит дефолт. При этом, если мы принимаем предпосылку о дефолте как «поглощающем состоянии» и имеем матрицы перехода за 1, 2, ..., n временных промежутков, то вероятности дефолта для заемщиков непременно возрастают во времени, то есть являются кумулятивными вероятностями дефолта. Иными словами, в матрице, соответствующей тому, как будут мигрировать заемщики с разными рейтингами за m промежутков, последний столбец будет отражать именно CPD (cumulative probability of default), то есть кумулятивные вероятности дефолта за весь рассматриваемый период.

Данный показатель следует отличать от 2 других: маржинальных (безусловных) вероятностей дефолта MPD (Marginal probability of default) и условных вероятностей дефолта PD (probability of default). $MPD_{i,j}$ как безусловная вероятность отражает вероятность, с которой заемщик объявит дефолт за период (i, j) . Условная вероятность дефолта $PD_{i,j}$ же отражает вероятность, с которой заемщик объявит дефолт за период (i, j) при условии, что на момент i он не находился в дефолте.

Из вышесказанного следуют следующие зависимости:

$$MPD_{t,t+1} \triangleq CPD_{t+1} - CPD_t,$$

$$MPD_{t,t+1} = (1 - CPD_t) \cdot PD_{t,t+1},$$

$$PD_{0,1} = MPD_{0,1} = CPD_1.$$

Данная поправка важна, если оцениваются ожидаемые потери по контракту на весь срок его жизни T , как это, например, предписывается последним стандартом МСФО 9 для ссуд со значительным увеличением риска дефолта, так как в расчете будут участвовать именно MPD:

$$ECL = \sum_{t=1}^T MPD_t \cdot LGD_t \cdot EAD_t \cdot D_t,$$

где

ECL (Expected Credit Loss) – ожидаемые кредитные потери,

LGD (Loss Given Default) – доля потерь в случае дефолта, которая зависит от обеспечения и прочих факторов;

EAD (Exposure At Default) – требования под риском дефолта (на момент дефолта);

D – фактор дисконтирования.

3.4. Когортный метод

3.4.1. Математический аппарат метода

Когортный метод, благодаря своей простоте, в последние годы стал отраслевым стандартом в оценке матриц миграций и переходных вероятностей [29]. В таком случае для определения вероятности миграции из i рейтинга в j применяется наиболее простая формула:

$$P_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i},$$

где N_{ij} – количество заемщиков, перешедших из i -ого рейтинга в j -ый за период, N_i – количество заемщиков, которые на начало периода имели рейтинг i . Данная формула соответствует оценке, получаемой методом максимального правдоподобия для коэффициентов матрицы.

При этом, если заемщики, которые учитываются в матрице миграций, зафиксированы, а под миграцией рассматривается изменение рейтинга на конец периода относительно начала периода. Иными словами, если мы зафиксируем некоторое количество заемщиков в портфеле, имеющих вектор рейтингов X , то для применения когортного метода требуется найти вектор рейтингов Y этих же заемщиков на конец периода и сравнить его с вектором X . При этом автоматически выполняется требование, что сумма вероятностей по строкам $\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$ для каждой строки i .

Примечательно, что в практическом применении финансовыми кредитными организациями (прежде всего банками) заемщики могут «уходить» из кредитного портфеля (например, в результате погашения займа или в результате продажи задолженности, в т.ч. просроченной, третьей компании). Обычно при этом считается, что кредитный рейтинг заемщика на конец периода равен последнему рейтингу, присвоенному до ухода клиента из портфеля. Данное примечание актуально для финансово-кредитных организаций,

использующих внутренние рейтинговые системы для оценки заемщиков, т.к. в таком случае при уходе клиента из портфеля его рейтингование заканчивается.

Другим возможным подходом к анализу заемщиков, вышедших из портфеля, является добавление второго поглощающего состояния «вышел из портфеля». При этом, однако, может нарушаться независимость PD и EAD, что методологически не совсем корректно (хотя зачастую также применяется на практике).

Получив матрицу переходных вероятностей на единичный период 1, для получения прогноза CPD на срок n (обычно сроки измеряются в годах) используется возведение матрицы в соответствующую степень:

$$P_{0n} = P_{01}^n,$$

где P_{ij} – матрица (кумулятивных) переходных вероятностей на период от i до j .

3.4.2. Возможные проблемы при работе с когортным методом и методы их устранения

При работе с когортным методом могут возникать следующие проблемы:

- Нулевые вероятности миграций по большому количеству пар $(i - j)$.
- Нарушение монотонности по строкам и по последнему столбцу матрицы.
- Некорректное прогнозирование дефолтов на больших временных промежутках.
- Несовпадение модельных вероятностей дефолта с вероятностями, неявно заложенными в исходных рейтингах.

Рассмотрим каждый случай по отдельности.

Нулевые вероятности миграций по большому пар $(i - j)$

При наличии большого числа нулевых вероятностей переходов, или, что еще неприятнее, нулевых наблюдаемых вероятностей дефолта по высоким рейтингам, требуется уточнение модели для такого типа нарушений. Причиной такой проблемы, очевидно, является недостаток данных для построения модели. Для преодоления данной проблемы обычно применяется 2 вида решений.

Во-первых, производится попытка расширить период наблюдения и/или учесть большее количество миграций внутри периодов.

Тем не менее, подобное расширение выборки обычно не позволяет полностью избежать проблемы недостаточности данных. В таком случае применяется объединение рейтингов в

рейтинговые группы. Прежде всего «склеиваются» нотчи (например, рейтинги A+, A и A- объединяются в группу A). Однако и этого может быть недостаточно, и в таком случае может быть произведено еще большее укрупнение рейтинговых групп.

Если рейтинг с нулевым количеством дефолтов является промежуточным рейтинговым уровнем, вероятность дефолта возможно оценить при помощи интерполяции. Кроме того, для всех рейтингов ненулевые вероятности миграций могут быть получены при помощи метода дюрации и Байесовой переоценки вероятностей миграций. Эти методы больше подходят для маловероятных миграций (например, вероятностей дефолта заемщиков с высокими рейтингами) и рассматриваются в рамках Эксперимента 3. Кроме того, в рамках данного эксперимента мы сделали попытку найти оптимальное количество корзин для группировки изначальных данных по заемщикам.

При удачном разделении на группы вероятности могут быть оценены более точно, однако возникает необходимость обратного перехода то рейтинговых групп к рейтингам для получения оценки вероятности дефолта для каждого нотча. Обычно это выполняется при помощи нахождения средневзвешенных центров рейтинговых групп с последующей интерполяцией.

Интерполяция, в свою очередь, также может быть выполнена различными способами, от подгонки некоторой функции (многочлена, экспоненциальной, логарифмической и пр.) или иными методами (например, при помощи сплайнов).

Очевидно, что при интерполяции также присутствует риск увеличения ошибки при прогнозировании. Более того, не всегда очевидно, как возможно оценить доверительные интервалы для коэффициентов, полученных при помощи интерполяции.

Нарушение монотонности по строкам и по последнему столбцу матрицы

Очевидно, что вероятности дефолта заемщиков с более низкими рейтингами должны быть выше. Тем не менее, на практике это утверждение может нарушаться.

Представим, что в портфеле довольно низкое число заемщиков по рейтингам A+, A и A-. Само по себе событие дефолта по таким рейтингам – довольно редкое (0.10% на год в 1986-2016 гг., S&P [46]). Допустим, что за период наблюдения произошел 1 дефолт по заемщику с рейтингом A и не было дефолтов по заемщикам с рейтингами A+ и A-. В таком случае метод когорт покажет, во-первых, нулевую вероятность дефолта по заемщикам с рейтингом A+ и A- (см. предыдущий пункт) и, во-вторых, оценит вероятность дефолта по заемщикам с рейтингом A выше, чем с рейтингом A-, что контринтуитивно.

Аналогично, миграция в из рейтинга i в рейтинг $i+1$ (на 1 хуже) должна быть более вероятна, чем миграция в рейтинг $(i+2)$, то есть на 2 единицы хуже. Т.о., в матрице не должно наблюдаться немонотонностей по строкам, таких как выделенные жирным шрифтом в Таблице 1.

Таблица 1. Иллюстрация возможных немонотонностей при оценивании матрицы переходных вероятностей.

Рейт.группа	1	2	3	4	5	6	7
1	58,8%	16,1%	11,2%	11,4%	2,5%	0,0%	0,0%
2	10,2%	46,5%	28,0%	10,1%	1,8%	2,7%	0,6%
3	1,2%	14,0%	57,5%	17,0%	5,1%	3,3%	1,8%
4	0,4%	2,7%	17,8%	51,1%	16,3%	8,1%	3,5%
5	0,9%	1,1%	5,1%	19,4%	58,9%	9,4%	5,2%
6	0,0%	1,8%	3,4%	6,9%	6,2%	64,8%	16,9%
7	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%

Для устранения данной проблемы, как и в предыдущем случае, можно попробовать увеличить количество используемых данных (например, объединить подсегменты портфеля), провести подгонку некоторой кривой или даже подставить некоторые внешние значения (например, вместо последнего столбца подставить вероятности дефолтов, соответствующие рейтингам согласно модели рейтингования).

Некорректное прогнозирование дефолтов на больших временных промежутках

Считается, что метод когорт дает завышенные оценки вероятностей дефолтов на больших временных периодах (часто используется «правильно большого пальца», равное 9 годам). Тем не менее, в большинстве случаев отсутствует необходимость предсказывать риск на 9 лет вперед: ввиду сильного дисконтирования и особенностей вероятностей дефолта (MPD для заемщиков с существенным увеличением кредитного риска, для которых резерв считается на весь срок жизни контракта, близок к 0 начиная со 2-ого года) эффект от расчета будет нематериальным. Если такая необходимость все-таки существует, то возможно применить подгонку кривой Вейбулла либо включить нелинейность во времени в спецификацию модели марковских цепей (см. п. 1.6.).

Несовпадение модельных вероятностей дефолта с вероятностями, имплицитно заложенными в исходных рейтингах

Зачастую в банках для оценки вероятностей дефолта заемщиков строятся 2 модели. Первая является аппликативной рейтинговой моделью, она оценивает вероятность дефолта

заемщика на некоторый фиксированный промежуток времени (обычно на ближайший год) на основе фундаментальных характеристик заемщика (например, кредитной истории – в случае физ. лиц, и бухгалтерской и финансовой отчетности – в случае юр. лиц).

Вторая (поведенческая) модель строится для оценки вероятностей дефолта на 2, 3 и более лет и необходима, например, для создания резервов на весь срок жизни контракта (это, в частности, требуется стандартом МСФО 9 для контрактов с увеличившимся кредитным риском) [43]. Эта модель строится именно на основе уже полученных рейтингов и по сути является некоторой калибровкой первой модели.

В ряде случаев вероятности дефолтов, полученные по двум моделям на один промежуток (например, 1 год), не совпадают. Это прежде всего может говорить о неточности или некорректности одной из моделей. Если модели построены корректно, это может интерпретироваться как необходимость внесения калибровок в аппликативную модель.

3.4.3. Преимущества и недостатки когортного метода

Подводя итоге по когортному методу, можно сделать вывод о его основных преимуществах и недостатках.

Основными преимуществами данного метода являются простота его применения, распространенность (в последние годы он фактически стал отраслевым стандартом), интуитивная понятность и теоретическая обоснованность (помимо п. 1.4.1 о формальной обоснованности метода дополнительно сообщается в п. 1.5.2).

Недостатком метода по сравнению с последующими методами (методом дюрации без учета и с учетом нелинейности во времени) можно причислить отсутствие точного учета моментов промежуточных переходов из одного состояния в другое. Кроме того, принятие предпосылки о постоянстве во времени может стать серьезным ограничением при прогнозировании на длительные временные периоды (более 9 лет), что может быть устранено, например, при помощи учета нелинейности во времени в модели (см. п. 3.6).

Отдельная проблема, актуальная как для когортного, так и для последующих методов – **немарковость процесса** [23]. В литературе выделяются различные причины немарковости: эффект моментума (rating drift, momentum effect) [2] [23], "клейкость" рейтингов [26] и особенности политики рейтинговых агентств [25]. Также отмечается зависимость матриц от отрасли / страны / стадии экономического цикла [28].

В своей работе мы не рассматриваем проблему немарковости в нашей работе. Если что, можно разделить выборку по отраслям, а также скорректировать модель на различные

эффекты, как это демонстрируется, например, в [31] (корректировка на момент-эффект), в [13] (корректировка на экономический цикл, макроэкономические факторы) или в [9] (нелинейность во времени).

Поскольку в нашем исследовании мы самостоятельно формируем экспериментальную выборку, мы можем симулировать данные, которые бы удовлетворяли условию марковости. Обобщение результатов исследования для скорректированных марковских моделей может быть предметом отдельного исследования.

3.5. Метод дюрации

3.5.1. Общее описание метода

По аналогии с начислением непрерывных процентов, при оценке вероятностей дефолта также возможно перейти к непрерывному времени. Предположим, что непрерывный во времени марковский процесс принимает значения из ограниченного множества $E = \{1, \dots, m\}$ и описывается матрицей-генератором $Q = \{q_{ij}\}$.

Если начисление непрерывного процента вычисляется по формуле e^{rt} , то расчет вероятностей дефолта при непрерывном времени производится по формуле:

$$P_t(Q) = e^{Qt}, (1.)$$

где Q – матрица-генератор (transition rate matrix, intensity matrix или infinitesimal generator matrix).

При этом, как и в методе когорт, появляются некоторые ограничения на коэффициенты матрицы:

- элементы, лежащие вне главной диагонали, неотрицательны;
- сумма элементов по строкам равна 0.

В связи с такой постановкой вопроса требуется рассмотреть два дополнительных вопроса: во-первых, как оцениваются коэффициенты матрицы Q и как вычисляется матричная экспонента.

Оценка коэффициентов q_{ij} матрицы Q

Для оценки коэффициентов матрицы коэффициенты используется максимизация правдоподобия, описанная в ряде работ [5, 17]:

$$L_{\tau}^{(c)}(Q) = \prod_{i=1}^m \prod_{j \neq i} q_{ij}^{N_{ij}(\tau)} e^{-q_{ij} R_i(\tau)},$$

где $N_{ij}(\tau)$ – количество переходов из состояния (рейтинга) i в состояние (рейтинг) j за период $[0, \tau]$, пометка (с) означает непрерывность во времени (continuous time), а

$$R_i(t) = \int_0^t I\{X(s) = i\} ds$$

показывает, сколько времени в сумме заемщики находились в указанном рейтинге за период $[0, t]$.

В таком случае было показано [17], что оценкой коэффициентов матрицы Q , максимизирующей правдоподобие, является оценка:

$$\hat{q}_{ij}^{(c)}(\tau) = N_{ij}(\tau)/R_i(\tau),$$

которая возможно, очевидно, при $R_{ij}(\tau) > 0$. Если в некотором состоянии (рейтинге) i за весь период наблюдений $[0, \tau]$ не было наблюдений, то количественные методы не предоставляют возможности оценить коэффициенты матрицы Q без принятия дополнительных предпосылок. Данная проблема рассматривалась в п. 3.4.2 и будет дополнительно рассматриваться в п. 3.5.3.

Расчет матричной экспоненты

Метод 1. Согласно определению матричная экспонента определяется в соответствии с формулой Тейлора:

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k.$$

Стоит отметить, что данный ряд сходится не для всех матриц X .

Метод 2. Для квадратных матриц X возможно каноническое разложение матрицы (разложение матрицы в базисе собственных векторов) в виде:

$$X = V \Lambda V^{-1} = V \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot V^{-1},$$

где V – матрица, составленная из собственных векторов, Λ – диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены собственные числа матрицы X .

В таком случае матричная экспонента вычисляется по формуле:

$$e^Q = V e^{\Lambda} V^{-1} = V \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot V^{-1}$$

Существует ряд других методов расчета матричной экспоненты, включающие в себя, например, численное решение системы дифференциальных уравнений, соответствующей уравнению (1.), нахождение функции от матрицы через спектральное разложение матрицы, методом Сильвестра и проч. Тем не менее, ввиду накладываемых ограничений на матрицу-генератор (п. 3.5.1), методов 1-2 достаточно для оценки матричной экспоненты.

3.5.2. Связь с когортным методом

Связь метода дюрации с когортным методом двояка. Во-первых, представим, что

$$P^\tau = e^{Q \cdot \tau} (2.)$$

для некоторого $\tau > 0$, где P и Q – матрицы переходных вероятностей, полученная методом когорт и дюрации соответственно. Тогда обе матрицы можно представить в одном базисе собственных векторов, так что собственные значения будут зависеть друг от друга следующим образом:

$$\bar{\lambda}_i^\tau = e^{\tau \cdot \bar{\bar{\lambda}}_i},$$

где $\bar{\lambda}_i, \bar{\bar{\lambda}}_i$ – i -ые собственные значения матриц P и Q соответственно. Для положительных λ это равносильно:

$$\tau \cdot \ln(\bar{\lambda}_i) = \tau \cdot \bar{\bar{\lambda}}_i.$$

При предположении, что P и Q удовлетворяют естественным ограничениям для матриц переходных вероятностей и, как следствие, являются положительно-определенными матрицами, можно сделать вывод, что для любого времени t оба метода также дадут одинаковые результаты:

$$\begin{aligned} P(t) = P^t &= \bar{V} \cdot \bar{\Lambda}^t \cdot \bar{V}^{-1} = \bar{V} \cdot \bar{\Lambda}^t \cdot \bar{V}^{-1} = \bar{V} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1^t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{\lambda}_n^t \end{pmatrix} \cdot \bar{V}^{-1} \\ &= \bar{V} \cdot \begin{pmatrix} \exp(\ln(\bar{\lambda}_1^t)) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp(\ln(\bar{\lambda}_n^t)) \end{pmatrix} \cdot \bar{V}^{-1} \end{aligned}$$

$$= \bar{V} \cdot \begin{pmatrix} \exp(\bar{\lambda}_1 \cdot t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp(\bar{\lambda}_n \cdot t) \end{pmatrix} \cdot \bar{V}^{-1} = e^{Q \cdot t}$$

К сожалению, для любой матрицы переходных вероятностей P нельзя однозначно утверждать о существовании и единственности матриц-генератора Q . Эта проблема называется «встроенной проблемой» марковских цепей и будет отдельно рассматриваться в п. 3.5.3.

3.5.3. Возможные проблемы при работе с методом дюрации и методы их устранения

Для метода дюрации актуальны почти все проблемы, упоминавшиеся в п. 3.4.2 этой работы. В данной части мы хотели бы более подробно рассмотреть проблему регуляризации и «встроенную проблему» матрицы-генератора.

Во-первых, как показывают Бладт и Соренсен [8], возникает «встроенная» проблема неединственности или отсутствия матрицы-генератора Q , соответствующей матрице переходных вероятностей P . В частности, матрица переходных вероятностей может иметь корень, но не иметь стохастического корня, как указано в работе [24].

Тем не менее, если диагональные элементы матрицы P : $p_{ij} > 0.5$, что весьма вероятно, если матрица Q существует, она также будет и единственна, как это показано в работе Крейнера и Сидельниковой [21]. В той же работе приводятся 3 условия, при которых матрица-генератор для заданной матрицы переходных вероятностей не будет существовать:

- $\det P < 0$;
- $\det P > \prod p_{ii}$;
- если возможен переход из состояния i в состояние j , но при этом $p_{ij} = 0$.

Во-вторых, если нарушается одно из свойств матрицы-генератора (см. п. 3.5.1), существуют несколько способов их устранения. Наиболее распространенными и простыми являются диагональная и взвешенная корректировка, предложенные в работах Стормкиста [36] и Аратена и Ангбазо [4].

В обоих случаях все отрицательные элементы матрицы-генератора, не лежащие на главной диагонали, приравниваются к 0. На втором шаге при диагональной корректировке каждый диагональный элемент рассчитывается как сумма остальных элементов строки, взятых со знаком «минус»:

$$\hat{q}_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \hat{q}_{ij}$$

При взвешенной корректировке корректируются все элементы матрицы-генератора по формуле:

$$\hat{q}_{ij} = \hat{q}_{ij} - \left| \hat{q}_{ij} \right| \frac{\sum_{j=1}^n \hat{q}_{ij}}{\sum_{j=1}^n \left| \hat{q}_{ij} \right|} \text{ для } i, j = 1, \dots, n.$$

Существуют и более сложные методы регуляризации матрицы-генератора, описываемые, например, в работе Крейнера и Сидельниковой [21]: методы QOM (Quasi-optimization of the root matrix) и QOG (Quasi-optimization of the generator).

3.5.4. Преимущества и недостатки метода дюрации

Преимущества и недостатки метода дюрации во многом схожи с когортным методом: он также сравнительно прост в применении, и становится все более распространенным. Как и метод когорт, метод дюрации имеет серьезное теоретическое обоснование, так как формулы для коэффициентов являются MLE-оценками. Метод в целом может интерпретироваться и интуитивно: к методу когорт он относится как непрерывно прирастающий процент – к сложным процентам.

Как и метод когорт, метод дюрации основывается на предпосылке о постоянстве коэффициентов матрицы-генератора во времени, что также приводит к переоценке вероятностей дефолта на больших временных промежутках (более 9 лет).

В отличие от метода когорт, важным недостатком данного метода является «встроенная проблема» марковских цепей, которая, хоть и может быть решена теми или иными методами, могут несколько усложнить вычисления.

3.6. Методы учета нелинейного времени при построении матриц переходных вероятностей

3.6.1. Математический аппарат метода

При явном непостоянстве коэффициентов матрицы-генератора во времени возможна модификация метода в целях учета этих изменений. Одна из таких модификаций приводится в работе Блюма и Овербэка [9]. Скорректированная матрица-генератор в таком случае примет следующий вид:

$$Q_t \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\alpha_1, \beta_1}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{\alpha_n, \beta_n}(t) \end{pmatrix}_{n,n} \times G,$$

где Q_t – модифицированная матрица-генератор на момент t ,

G – матрица-генератор, полученная обычным методом дюрации,

$\psi_{\alpha_1, \beta_1}(t) = \frac{1-e^{-\alpha_1 t}}{1-e^{-\alpha_1}} \cdot t^{\beta_1-1}$ – функция, которую авторы предлагают использовать для учета нелинейности во времени. При этом коэффициенты α_i, β_i находятся как решение следующей оптимизационной задачи:

$$\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (cDR_{i,t} - \widehat{cPD}_{i,t})^2} \longrightarrow \min_{\alpha_i, \beta_i}$$

В остальном метод применяется так же, как метод дюрации, с тем исключением, что для оценки миграций используется скорректированная матрица-генератор.

3.6.2. Преимущества и недостатки метода

Поскольку данный метод является некоторой модификацией метода дюрации, то он наследует все его преимущества и недостатки, кроме 3:

- модель лучше «подгоняет» результаты; проблема переоценки вероятностей дефолта на больших промежутках времени разрешена;
- ввиду более точной подгонки под обучающую выборку увеличивается риск «сверхподгонки» ('overfitting');
- выбор функции от времени должен иметь теоретическое и эмпирическое обоснование; кроме того, требуется обоснование значимого улучшения прогноза по сравнению с более простыми моделями.

3.7. Иные источники затруднений при оценивании

Помимо всех упомянутых выше проблем хотелось бы отметить два других значимых факторы, которые могут вызвать затруднения при построении любых моделей:

- калибровка / внесение изменений в существующие модели. В лучшем случае это повлечет необходимость переоценки заемщиков за предыдущие периоды, в худшем – сократит выборку. Например, до изменения рейтинговой модели банк не собирал о

своих клиентах некоторых сведений, так что переоценка может быть осуществлена лишь приблизительно. При структурных изменениях в модели переоценка может стать невозможной.

- законодательные изменения могут потребовать изменить рейтинги, используемые при оценивании заемщиков. Например, по последним требованиям, вступившим в силу 14 июля 2017 г. [44], в качестве подтверждения качества заемщика банки должны ориентироваться на национальные рейтинги от агентств АКРА или «Эксперт РА» Первое в 2017 г. изменило рейтинговую модель [41], второе существует лишь с 2015 г. и потому обладает небольшой историей рейтингования. В обоих случаях могут возникнуть сложности с размером выборки при оценивании вероятностей дефолта.

3.8. Различия между моделированием PIT и TTC. Учет прогнозной макроэкономической информации

Как упоминалось в п. 2.2., одним из требований Базеля II был расчет вероятности «по циклу» (TTC – Through The Cycle). Показатели TTC основываются на всей релевантной информации, доступной на момент, и отражают вероятность дефолта на рассматриваемом горизонте прогнозирования с целью отразить долгосрочные средние значения кредитного цикла.

Требования новых стандартов МСФО 9, вступивших в силу 1 января 2018 г. [43], подразумевают расчет вероятностей дефолта «на момент времени», что означает, что оцениваемые показатели должны отражать (1) циклические изменения (что часто интерпретируется в качестве прогнозной макроэкономической информации) и (2) идиосинкратический риск заемщика.

Для перехода от оценок TTC к PIT применяются различные методы, от метода коэффициентного шкалирования (Variable scalar approach) до оценки при помощи якорных точек (Anchor point approach). Мы рассмотрим довольно популярный и теоретически обоснованный метод Байесова шкалирования. В таком случае оценка PD_i^{PIT} – вероятности дефолта PIT на момент i рассчитывается по формуле байесовой условной вероятности:

$$PD_i^{PIT} = \frac{(1 - CDT) \cdot DR^{PIT} \cdot PD_i^{TTC}}{CDT \cdot (1 - DR^{PIT}) \cdot (1 - PD_i^{TTC}) + (1 - CDT) \cdot DR^{PIT} \cdot PD_i^{TTC}},$$

где PD_i^{TTC} – (условная) вероятность дефолта TTC по рейтинговому грейду i ,

DR^{PIT} – прогнозный уровень дефолта в соответствии с некоторой макроэкономической моделью или экспертной оценкой;

CDT – средний уровень дефолта, рассчитанный по экономическому циклу.

В конце следует отметить, что макроэкономические модели обычно строятся на основе исторической макроэкономической информации и относятся к классу регрессионных моделей (DR прогнозируется на основе остальных данных). Для построения таких моделей существует целый спектр моделей, как параметрических (линейная, логлинейная и логарифмическая регрессии, логит- и пробит- модели, моделирование временных рядов на основе подходов Бокса-Дженкинса и/или Энгла-Грейнджера, модель Васичека, бета-регрессия), так и непараметрических.

3.9. Выводы по главе

В рамках главы мы рассмотрели основные подходы к моделированию вероятностей дефолта а также дали общий обзор теоретических основ и практических моментов, в том числе проблем, связанных с моделированием рисков в банковской отрасли.

Основным выводом, который можно сделать по главе, заключается в следующем: моделирование изменений рейтингов заемщиков как марковского процесса является одним из удобных и распространенных в отрасли подходов. Методы когорт и дюрации же, в свою очередь, являются наиболее популярными методами при моделировании марковских процессов.

Аналитик волен отдать предпочтение одному из двух методов в зависимости от условий. Метод когорт основан на дискретности срезов портфеля во времени и является более простым подходом. Метод дюрации может быть сложнее для реализации, однако также применим. Он основывается на непрерывности миграций во времени и позволяет учесть миграции, произошедшие в произвольный момент между срезами. Кроме того, оценки всех параметров матрицы переходных вероятностей будут при методе дюрации ненулевыми даже при отсутствии данных по соответствующим миграциям.

Для простоты вычислений и интерпретации чаще всего на практике ограничиваются именно когортным методом.

На основе описанных в данной главе теоретических основ и математического аппарата в п. 4 настоящего исследования будут рассмотрены ключевые методы доверительного оценивания матриц переходных вероятностей, а в пп. 5-7 будут произведены экспериментальные расчеты, в том числе и на реальных данных.

4. Обзор методов доверительного оценивания матриц переходных вероятностей

4.1. Задачи, рассматриваемые в главе

Настоящая глава ставит перед собой целью в общем виде рассмотреть различные методы построения доверительных интервалов для матриц переходных вероятностей.

В рамках исследования был проведен анализ литературы, в которой для решения доверительного оценивания матриц переходных вероятностей предлагается 3 различных метода: метод Вальда, метод бутстрапа и метод ВМСМС. Данные методы детально рассматриваются в пп. 4.2-4.3 настоящей работы соответственно.

4.2. Метод Вальда

Подход к доверительному оцениванию матрицы переходных вероятностей при помощи метода Вальда изложен в работе Бладта и Соренсена [7, 2009] и повторен в исследовании дос Рейс и Смита [34].

Аналитическая формула для интервалов Вальда приводится в работе Хансона и Шуерманна [15]:

$$CI_W = \widehat{PD}_R \pm \kappa \sqrt{\frac{\widehat{PD}_R (1 - \widehat{PD}_R)}{N_R}}$$

Таким образом, алгоритм расчета доверительных интервалов методом Вальда заключается в следующем:

Шаг 1. Оценить матрицу переходных вероятностей когортным методом, как показано в п. 3.4 настоящей работы.

Шаг 2. По формуле выше построить доверительный интервал для полученной матрицы.

Итак, мы имеем аналитическое представление для доверительного интервала. Очевидными плюсами такого решения являются общность полученного решения и скорость вычислений. тем не менее, перед использованием метод должен быть проверен на адекватность (см п. 5 – Эксперимент 1).

4.3. Метод бутстрапа

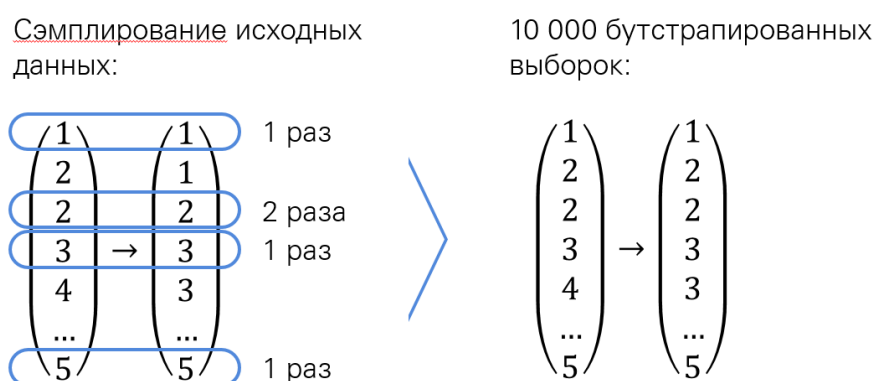
В работе Хансона и Шуерманна [15] также рассматривается применение бутстрапа для построения доверительных интервалов.

Суть метода заключается в следующем:

Шаг 1. Формирование из большого количества данных (в том числе построенных на нескольких срезах данных) двух векторов: исходный вектор состояний (рейтингов) v_0 и вектор состояний после миграций v_1 .

Шаг 2 (повторяется большое количество раз, «правилом большого пальца» является 10 000 итераций). Допустим, длина векторов v_0 и v_1 составляет k наблюдений. Тогда из построенной выборки $v_0 \rightarrow v_1$ случайным образом выбираются k наблюдений с повторениями (см. Рисунок 1).

Рисунок 1. Схема сэмплирования исходных данных методом бутстрапа



По построенным случайно сгенерированным векторам $\widetilde{v}_0 \rightarrow \widetilde{v}_1$ когортным методом оценивается матрица переходных вероятностей. Результаты сохраняются в некоторый массив.

Шаг 3. После большого количества (10 000) итераций шага 2 в массиве данных присутствует эмпирическое многомерное распределение для коэффициентов матрицы переходных вероятностей, полученное методом бутстрапа. Расчет завершен.

При принятии предположения о слабой взаимосвязи между коэффициентами и для демонстрационных целей возможно построение (95%-ного) доверительного интервала для каждого отдельного коэффициента матрицы, как если бы все коэффициенты были независимы. Как показано в п. 5 настоящего исследования, даже такое демонстрационное построение доверительных интервалов в среднем «накрывает» истинную матрицу переходных вероятностей в среднем в 95% случаев.

4.4. Метод ВМСМС

Кроме того, мы дополняем методологию построением доверительных интервалов симуляцией марковских цепей методом Монте-Карло с байесовским переоцениванием

(BMCMC). Перед проведением расчета требуется определить априорное и апостериорное распределения коэффициентов матрицы переходных вероятности, как, например, предлагается в работе Бладта и Соренсена [7]. Так, в качестве априорного распределения авторы предлагают:

$$\phi(Q) \propto \prod_{i=1}^m \prod_{j \neq i} q_{ij}^{\alpha_{ij}-1} e^{-q_{ij} \beta_i},$$

где

$\alpha_{ij} > 0, i, j \in E$ и $\beta_i > 0, i \in E$ – некоторым образом выбранные константы.

В таком случае коэффициент матрицы-генератора q_{ij} , который оценивается при помощи метода BMCMC, подчиняется Гамма-распределению с параметром формы α_{ij} и параметром масштаба $1/\beta_i$.

Такое семейство распределений является сопряженным априорным для модели с непрерывным времени (метод дюрации) на отрезке $[0, \tau]$, относящегося к группе экспоненциальных процессов, как показано в статье Кюхлера и Соренсена [22]. В таком случае апостериорное распределение для непрерывного процесса будет также относиться к семейству гамма-распределений:

$$p^*(Q) = L^{(c)}(Q) \phi(Q) \propto \prod_{i=1}^m \prod_{j \neq i} q_{ij}^{N_{ij}(\tau) + \alpha_{ij} - 1} e^{-q_{ij}(R_i(\tau) + \beta_i)},$$

где

где $N_{ij}(\tau)$ – количество переходов из состояния (рейтинга) i в состояние (рейтинг) j за период $[0, \tau]$, пометка (с) означает непрерывность во времени (continuous time), а

$$R_i(t) = \int_0^t I\{X(s) = i\} ds$$

показывает, сколько времени в сумме заемщики находились в указанном рейтинге за период $[0, t]$.

$\alpha_{ij} > 0, i, j \in E$ и $\beta_i > 0, i \in E$ – некоторым образом выбранные константы.

Отметим, что в работе [7] указывается слабое влияние коэффициентов α_{ij} и β_i на результаты расчета (т.е. априорное распределение является неинформативным) и предлагается выбор гиперпараметров $\alpha_{ij} = \beta_i = 1$.

Сам алгоритм сэмплирования и расчета доверительных интервалов следующий [7]:

Шаг 1. Произвести сэмплирование матрицы-генератора Q из априорного распределения.

Шаг 2. Симулировать скачки J (Markov Jump process), т.е. переходы наблюдений из одного состояния в другое.

Шаг 3. На основе J рассчитать $N_{ij}(\tau)$ и $R_i(t)$ (см. формулы выше).

Шаг 4. Произвести сэмплирование матрицы-генератора Q из апостериорного распределения для новых $N_{ij}(\tau)$ и $R_i(t)$.

Перейти к шагу 2.

Такое сэмплирование производится значительное количество раз и, ввиду сэмплирования скачков на шаге 2, требует значительного вычислительного времени. Зачастую используется 11 000 итераций: первые 1 000 итераций отводится на «прожиг» и исключается из финального рассмотрения, на 10 000 наблюдениях в дальнейшем строится эмпирическое распределение для матрицы-генератора. При этом должно выполняться условие сходимости метода. Проверка сходимости осуществляется в п. 5.4 настоящей работы.

Отдельно отметим, что для ВМСМС могут применяться различные методы сэмплирования прыжков на шаге 2, например, мы применяем простейший метод выборки с отклонением (accept-reject algorithm). В литературе также описываются альтернативные алгоритмы проведения симуляции Монте-Карло для ВМСМС, например, более эффективный и более сложный алгоритм бисекции (алгоритм основывается на аналитических формулах для вероятностей прыжков при разбиении интервала на две равные части. Однако ввиду большого – более 15 – количества случаев алгоритм сложен в реализации), как показано в работе Асмуссена и Хаболта [3]. Также возможно применение алгоритмов сэмплирования Гиббса [7 и 33] и Метрополиса-Гастингса [7].

Хотелось отметить, что расчет симуляция ВМСМС была совсем недавно реализована в отдельной библиотеке R (детали математического аппарата изложены в работе Пфойффера [30, 2017]).

Основным преимуществом метода ВМСМС является его связь с методом дюрации и возможность учета непрерывного времени при моделировании, а также ненулевые оценки вероятностей перехода из состояния в состояние даже при полном отсутствии данных по миграциям. Основным недостатком является высокая вычислительная сложность.

4.5. Выводы по главе

В настоящей главе была выполнена задача рассмотрения теоретических основ для различных методов построения доверительных интервалов для матриц переходных вероятностей.

В рамках исследования был проведен анализ литературы, в которой для решения доверительного оценивания матриц переходных вероятностей предлагается 3 различных метода: метод Вальда, метод бутстрапа и метод ВМСМС. Были рассмотрены преимущества и недостатки каждого из методов.

Так, метод Вальда является аналитическим и наиболее быстро вычислимым (но, как мы увидим в п. 5.2.3, дает неадекватные результаты). Метод бутстрапа сложнее в порядке вычислений, но при проверках показывает хорошие результаты. Метод ВМСМС может учитывать большее количество информации ввиду предпосылки о непрерывном времени, а также оценивает вероятность миграций на ненулевом уровне даже при полном отсутствии наблюдений, однако является наиболее сложным в реализации и затратным во времени.

5. Эксперимент 1. Проверка корректности методов доверительного оценивания

5.1. Задачи эксперимента

Эксперимент 1 ставит целью проверить адекватность доверительных интервалов, получаемых при помощи методов, рассматриваемых в литературе, а именно:

- метод Вальда;
- метод бутстрапа;
- метод ВМСМС.

Проверки осуществляется в 3 направлениях:

- доля случайно сгенерированных случаев, которые в действительности «накрываются» интервалом, соответствующим уровню доверия α (далее мы рассматриваем уровень доверия $\alpha = 5\%$) – пп. 6.2.1, 6.3.1;
- стабильность результатов при несбалансированной выборке – пп. 6.2.2, 6.3.2;
- сходимость результатов (проводится для проверки адекватности ВМСМС) – пп. 6.2.3, 6.3.3.

5.2. Проверка адекватности ширины доверительных интервалов

В данном разделе детально описывается методология каждой из проверок, осуществляемой в ходе Эксперимента 1.

5.2.1. Методология проведения

Для проверки адекватности ширины доверительных интервалов проводился эксперимент по следующему алгоритму:

Шаг 1. Исходя из общих представлений о рынке определялась матрица истинных переходных вероятностей.

Шаг 2. Определялся исходный набор состояний (рейтингов) v_0 , характеризующий наблюдения (заемщиков) до миграции на период $t = 0$. В рамках данной части эксперимента предполагалось, что в каждом состоянии (рейтинге) находилось n наблюдений (заемщиков).

Шаг 3. При помощи истинной матрицы миграций была проведена 10000-кратная симуляция миграций из состояний v_0 в состояния $v_1^1, \dots, v_1^{10\,000}$. В результате было получено 10 000 выборок вида $v_0 \rightarrow v_1^i, i = 1, \dots, 10\,000$.

Шаг 4. По каждой из построенных выборок строится 95%-ные доверительные интервалы для коэффициентов истинной матрицы миграций.

Шаг 5. Для каждого коэффициента истинной матрицы переходных вероятностей рассчитывается доля случаев, когда построенные доверительные интервалы «накрывают» коэффициенты истинной матрицы.

В случае, если коэффициенты истинной матрицы «накрыты» доверительными интервалами в ~95% случаев, метод построения доверительных интервалов может считаться адекватным и применяться в дальнейшем.

Примечание. В рамках несколько упрощенного подхода мы анализируем доверительные интервалы для коэффициентов истинной матрицы переходных вероятностей независимо друг от друга. В действительности коэффициенты данной матрицы зависимы друг от друга и подчиняются некоторому многомерному распределению. Тем не менее, поскольку результаты, продемонстрированные в п. 6.2.2., демонстрируют эффективность методов даже без поправки на взаимную зависимость коэффициентов матрицы, мы можем считать проверку выполненной.

5.2.2. Предположения (параметры) эксперимента

В рамках пп. 6.2.3-5 осуществляется проверка методов Вальда, бутстрапа и ВМСМС в части адекватности ширины доверительных интервалов, получаемых различными методами. Для проведения расчета были выбраны следующие параметры эксперимента.

В качестве истинной матрицы переходных вероятностей была выбрана матрица M (см. Таблицу 2), соответствующая матрице-генератору G (Таблица 3).

Таблица 2. Истинная матрица переходных вероятностей, используемая в эксперименте

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	95.18%	4.61%	0.20%	0.01%	0.00%
2	2.35%	92.89%	4.49%	0.26%	0.00%
3	0.12%	2.21%	90.62%	6.70%	0.35%
4	0.00%	0.12%	2.17%	90.56%	7.14%
5 (default)	-	-	-	-	100.00%

Примечание. Под «-» подразумевается значение вероятности, строго равное 0, под «0.00%» подразумевается значение вероятности, приближенно равное 0. Все значения, кроме последней строки, приводятся с точностью 2 знака после запятой.

Таблица 3. Истинная матрица-генератор, используемая в эксперименте

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	- 0.050	0.049	0.001	0.000	0.000
2	0.025	- 0.075	0.049	0.001	0.000
3	0.001	0.024	- 0.100	0.074	0.001
4	0.000	0.001	0.024	- 0.100	0.075
5 (default)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Примечание. Все значения приводятся точно (без приближения).

В качестве значений n (п. 6.2.1, Шаг 2: n – количество наблюдений в каждом состоянии исходной выборки) были выбраны 100, 500 и 1000 наблюдений в каждом состоянии (рейтинге).

На основе данной параметризации проводится эксперимент, результаты которого приводятся в пп. 6.2.3-5.

5.2.3. Результаты для метода Вальда

Проверка метода бутстрапа проводится в соответствии с методологией, описанной в п. 6.2.1, и параметризацией, приведенной в п. 6.2.2 настоящей работы. Результаты проверки приводятся в Таблицах 4-6.

Таблица 4. Доля случаев, в которых доверительные интервалы Вальда «накрывают» истинные коэффициенты матрицы. В каждом состоянии изначально $n = 100$ наблюдений

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	18.36%	18,03%	0.00%	100.00%	100.00%
2	0.00%	28.87%	17.85%	0.00%	100.00%
3	0.00%	0.00%	13.12%	30.20%	0.00%
4	100.00%	0.00%	0.00%	12.76%	29.66%
5 (default)	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

Примечание. *Курсивом* выделены нулевые или 100%-ные вероятности миграций

Таблица 5. Доля случаев, в которых доверительные интервалы Вальда «накрывают» истинные коэффициенты матрицы. В каждом состоянии изначально $n = 500$ наблюдений

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	45.39%	46.17%	30.47%	100.00%	100.00%
2	42.98%	44.67%	46.52%	30.69%	100.00%
3	30.57%	42.27%	48.73%	44.74%	30.49%
4	100.00%	29.82%	42.85%	50.58%	43.87%
5 (default)	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

Примечание. *Курсивом* выделены нулевые или 100%-ные вероятности миграций

Таблица 6. Доля случаев, в которых доверительные интервалы Вальда «накрывают» истинные коэффициенты матрицы. В каждом состоянии изначально $n = 1000$ наблюдений

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	60.85%	61.16%	55.20%	100.00%	100.00%
2	58.45%	59.52%	62.49%	54.95%	100.00%
3	55.34%	57.82%	63.10%	60.02%	55.64%
4	100.00%	55.82%	58.09%	62.32%	59.35%
5 (default)	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

Примечание. Курсивом выделены нулевые или 100%-ные вероятности миграций

По результатам проверки мы можем сделать вывод о недостаточной ширине доверительных интервалов, построенных методом Вальда. Результат согласуется с ранними исследованиями, например, с работой Хансона и Шуерманна [15].

5.2.4. Результаты для метода бутстрапа

Проверка метода бутстрапа проводится в соответствии с методологией, описанной в п. 6.2.1, и параметризацией, приведенной в п. 6.2.2 настоящей работы. Результаты проверки приводятся в Таблицах 7-9.

Таблица 7. Доля случаев, в которых доверительные интервалы (бутстрап) «накрывают» истинные коэффициенты матрицы. В каждом состоянии изначально $n = 100$ наблюдений

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	96.3%	95.9%	10.1%	100.0%	100.0%
2	92.4%	93.2%	95.3%	10.2%	100.0%
3	8.4%	89.8%	93.9%	92.9%	10.6%
4	100.0%	8.1%	92.1%	92.7%	93.9%
5 (default)	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Примечание. Курсивом выделены нулевые или 100%-ные вероятности миграций

Таблица 8. Доля случаев, в которых доверительные интервалы (бутстрап) «накрывают» истинные коэффициенты матрицы. В каждом состоянии изначально $n = 500$ наблюдений

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	93.9%	93.8%	40.5%	100.0%	100.0%
2	94.4%	95.0%	92.8%	38.7%	100.0%
3	36.1%	93.7%	95.1%	94.7%	41.0%
4	100.0%	42.6%	95.6%	95.3%	95.9%
5 (default)	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Примечание. Курсивом выделены нулевые или 100%-ные вероятности миграций

Таблица 9. Доля случаев, в которых доверительные интервалы (бутстрап) «накрывают» истинные коэффициенты матрицы. В каждом состоянии изначально $n = 1000$ наблюдений

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	93.8%	93.7%	63.8%	<i>100.0%</i>	<i>100.0%</i>
2	94.6%	95.3%	94.2%	62.4%	<i>100.0%</i>
3	65.1%	94.8%	95.0%	95.0%	62.8%
4	<i>100.0%</i>	59.7%	95.0%	95.2%	94.3%
5 (default)	<i>100.0%</i>	<i>100.0%</i>	<i>100.0%</i>	<i>100.0%</i>	<i>100.0%</i>

Примечание. Курсивом выделены нулевые или 100%-ные вероятности миграций

Проверка показала, что при увеличении выборки доля корректно оцененных доверительных интервалов действительно стремится к 95% (даже для миграций с малыми вероятностями перехода).

По результатам проверки мы можем сделать вывод об адекватности ширины доверительных интервалов, построенных методом бутстрапа.

5.2.5. Результаты для метода ВМСМС

Ввиду вычислительной сложности метода ВМСМС и значительного времени, требуемого для проведения расчетов, проверка метода бутстрапа проводилась несколько иначе, чем указано п. 6.2.1-2 настоящей работы.

Для сокращения времени, необходимого на вычисления, расчет был произведен для первых 1 539 (из 10 000) сгенерированных выборок. Кроме того, расчет производился лишь для случая n – количества наблюдений (заемщиков) в каждом изначальном состоянии (рейтинге) – равном 1 000.

Результаты проверки приводятся в Таблице 10.

Таблица 10. Доля случаев, в которых доверительные интервалы (ВМСМС) «накрывают» истинные коэффициенты матрицы. В каждом состоянии изначально $n = 1000$ наблюдений

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	90.1%	94.9%	91.0%	<i>0.0%</i>	<i>0.0%</i>
2	94.7%	93.6%	94.8%	92.6%	<i>0.0%</i>
3	88.8%	95.8%	94.2%	95.4%	89.9%
4	<i>0.0%</i>	89.5%	95.9%	94.1%	94.7%
5 (default)	<i>100.0%</i>	<i>100.0%</i>	<i>100.0%</i>	<i>100.0%</i>	<i>100.0%</i>

Примечание. Курсивом выделены нулевые или 100%-ные вероятности миграций

Проверка показала, что доверительные интервалы действительно в среднем «накрывают» истинную матрицу переходных вероятностей в 95% случаев (кроме случаев маловероятных миграций).

По результатам проверки мы можем сделать вывод об адекватности ширины доверительных интервалов, построенных методом ВМСМС.

5.3. Проверка стабильности расчетов при несбалансированной выборке

Ввиду некорректности метода Вальда для построения доверительных интервалов, проверка стабильности расчетов при несбалансированной выборке проводилась лишь для методов бутстрапа и ВМСМС.

Проверка проводилась согласно методике, указанной в пп. 6.1.1-6.1.2, за одним исключением. В исходной выборке предполагалось 5 000 наблюдений (заемщиков) в состоянии (рейтинге) «1» и по 1 000 наблюдений (заемщиков) в состояниях (рейтингах) «2»-«5». Шаги 1-4, а также истинная матрица переходных вероятностей совпадают с расчетами, приведенными в пп. 6.1.1-6.1.2.

Результаты проверки приведены в таблицах 11-12. По результатам проверки мы можем сделать вывод об отсутствии существенного влияния несбалансированности выборки на расчеты при помощи методов бутстрапа и ВМСМС.

Таблица 11. Доля случаев, в которых доверительные интервалы (бутстрап) «накрывают» истинные коэффициенты матрицы (случай несбалансированной выборки)

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	95.5%	95.5%	91.5%	100%	100%
2	94.2%	95.3%	95.0%	65.6%	100%
3	62.1%	94.8%	95.0%	94.3%	62.9%
4	100%	64.0%	95.7%	95.6%	95.7%
5 (default)	100%	100%	100%	100%	100%

Примечание. Курсивом выделены нулевые или 100%-ные вероятности миграций

Таблица 12. Доля случаев, в которых доверительные интервалы (ВМСМС) «накрывают» истинные коэффициенты матрицы (случай несбалансированной выборки)

Изначальное состояние (рейтинг)	Состояние (рейтинг) после миграции				
	1	2	3	4	5 (default)
1	94.9%	95.3%	94.1%	0.0%	0.0%
2	95.1%	94.6%	94.3%	93.2%	0.0%
3	89.1%	94.8%	95.6%	96.1%	89.9%
4	0.0%	88.3%	96.0%	95.2%	93.9%
5 (default)	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Примечание. Курсивом выделены нулевые или 100%-ные вероятности миграций

5.4. Проверка сходимости результатов ВМСМС

Для проверки сходимости результатов сэмплирования методом ВМСМС и адекватности полученных доверительных интервалов обычно проводятся 2 типа проверок:

- графический анализ ACF и PACF для ряда отдельных коэффициентов матрицы переходных вероятностей,
- формальный тест на основе статистики Гелмана.

В рамках графического анализа были построены графики ACF и PACF для коэффициентов диагонального (соответствующего миграции $1 \rightarrow 1$) и внедиагонального (соответствующего миграции $2 \rightarrow 3$) коэффициентов. Результаты представлены на Рисунках 2-5.

Рисунок 2. ACF для коэффициентов, соответствующих миграции $1 \rightarrow 1$ и полученных в результате симуляции ВМСМС

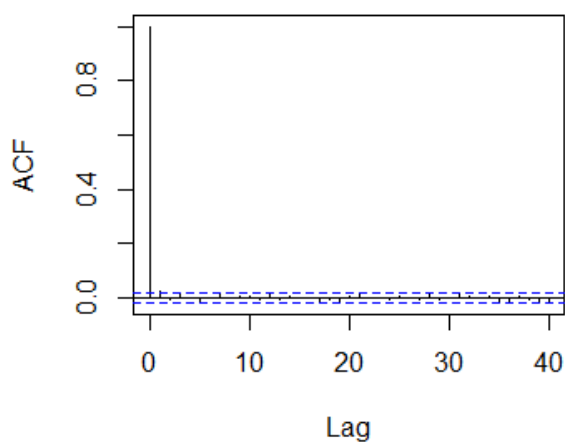


Рисунок 3. PACF для коэффициентов, соответствующих миграции $1 \rightarrow 1$ и полученных в результате симуляции ВМСМС

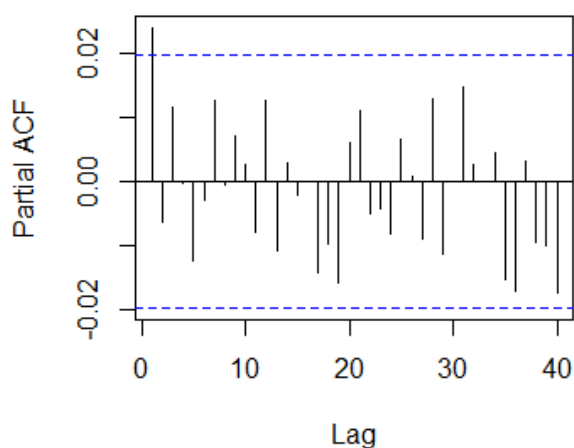


Рисунок 4. ACF для коэффициентов, соответствующих миграции $2 \rightarrow 3$ и полученных в результате симуляции ВМСМС

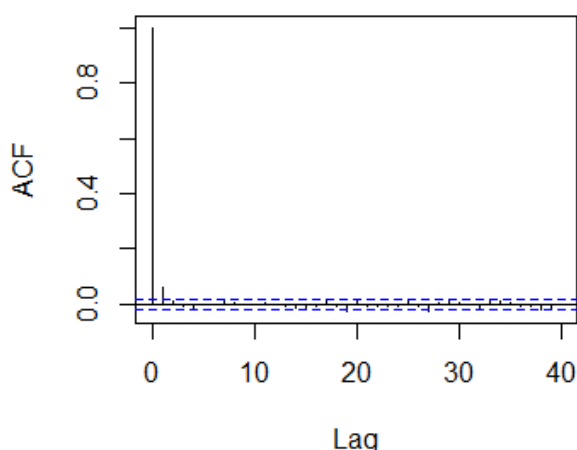
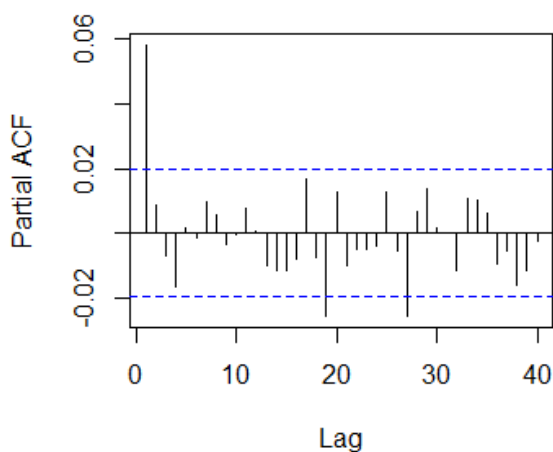


Рисунок 5. PACF для коэффициентов, соответствующих миграции $2 \rightarrow 3$ и полученных в результате симуляции ВМСМС



Аналогичные результаты наблюдаются по прочим коэффициентам матрицы переходных вероятностей. В результате графического анализа мы можем сделать вывод о сходимости и корректности используемого метода ВМСМС.

В результате расчета многомерной статистики Гелмана, предложенной в работе Брукса и Гелмана [11], было найдено значение, равное 1.0. Значение статистики должно стремиться к 1, «правило большого пальца» в литературе – критические значения 1.2 (Болкер, [10]) и 1.1 (Гелман и др. [14])

5.5. Выводы по Эксперименту 1

Итак, в рамках Эксперимента 1 было проведено тестирование методов Вальда, бутстрапа и ВМСМС по следующим критериям:

- доля случайно сгенерированных случаев, которые в действительности «накрываются» 95%-ным доверительным интервалом.

- стабильность результатов при несбалансированной выборке;
- сходимость результатов ВМСМС.

В ходе проверки было продемонстрировано, что метод бутстрапа и ВМСМС дают адекватные оценки доверительных интервалов, в том числе на несбалансированных выборках. Кроме того, метод ВМСМС обладает свойством сходимости, что было проверено графически и с помощью формального теста Гелмана.

Анализ показал, что доверительные интервалы Вальда для матрицы переходных вероятностей не соответствуют уровню доверия (являются слишком узкими). Данный метод далее не рассматривается в работе и не участвует в расчетах по Экспериментам 2 и 3.

В результате мы получаем, что ввиду отсутствия адекватного аналитического решения построение доверительных интервалов для матрицы переходных вероятностей составляет довольно трудоемкую задачу (особенно для больших объемов данных).

Тестирование, проведенное в рамках данной части эксперимента, заняло значительное время (несколько суток параллельных вычислений), что является неприемлемым сроком даже при оптимизации и наличии серверных решений для вычислений.

Таким образом, мы можем прийти к выводу о необходимости создания некоторых предварительных «ориентиров», табличных значений, которые возможно будет использовать на предварительных этапах анализа без реализации полноценного расчета доверительных интервалов, полный алгоритм должен быть выполнен лишь для доверительного оценивания и валидации финальной модели.

Созданию подобного рода «ориентиров» посвящена следующая часть настоящей работы (Эксперимент 2).

6. Эксперимент 2. Построение взаимосвязи между количеством данных и шириной доверительных интервалов

6.1. Задачи эксперимента

При построении моделей оценки вероятностей дефолта на основе матриц переходных вероятностей одной из основных проблем, с которыми сталкивается аналитик, является оценка, насколько имеющихся для анализа данных достаточно для оценки коэффициентов для некоторого заданного уровня точности.

Исходя из всего данной задачи, в рамках Эксперимента 2 мы ставим перед собой следующие задачи:

- Построить зависимость между количеством данных и шириной доверительных интервалов.
- Оценить необходимый объем данных для оценивания коэффициентов матрицы с заданной точностью, который мог бы быть ориентиром для аналитика.

6.2. Ход эксперимента

6.2.1. Построение исходной выборки

В рамках построения выборки проводилась генерация исходных данных следующим образом:

Шаг 1. Определялась истинная матрица переходных вероятностей (совпадает с п. 5.2.2).

Шаг 2. Поскольку эксперимент требует построения доверительных интервалов для разного объема данных, мы определили, что эксперимент будет проводиться для исходных данных объемом 200, 220, ..., 50 000 наблюдений (в каждом состоянии (рейтинге) на исходных момент (до миграции) находится равное число наблюдений). Всего было сформировано 2491 исходных векторов v_0^1, \dots, v_0^{2491} длиной 200, ..., 50 000 наблюдений соответственно.

Шаг 3. При помощи истинной матрицы переходных вероятностей (Шаг 1) была произведена генерация перехода наблюдений (заемщиков) из векторов v_0^1, \dots, v_0^{2491} в векторы v_1^1, \dots, v_1^{2491} .

Шаг 4. Для каждой из выборок был оценен доверительный интервал для каждого из коэффициентов при помощи методов бутстрапа и ВМСМС. Ввиду малого отличия между результатов данных методов далее рассматриваются результаты ВМСМС, которые также могут быть перенесены на метод бутстрапа.

Шаг 5. Для каждого из коэффициентов и каждой длины выборки рассчитываем ширину доверительного интервала. Полученные данные анализируются далее в пп. 6.2.2-6.2.3.

6.2.2. Анализ зависимости между шириной доверительного интервала и количеством имеющихся данных

Для проведения анализа зависимости между шириной доверительного интервала и количеством имеющихся данных прежде всего проводился визуальный анализ результатов. На Рисунках 6 и 7 представлены результаты точечные графики для коэффициентов, соответствующих миграциям $1 \rightarrow 1$ (высокая вероятность миграции) и $1 \rightarrow 2$ (низкая вероятность миграции). Графики для прочих коэффициентов матрицы переходных вероятности аналогичны двум рассматриваемым случаям.

Рисунок 6. Зависимость между шириной доверительного интервала для коэффициента матрицы миграций ($1 \rightarrow 1$) и количеством соответствующих миграций.

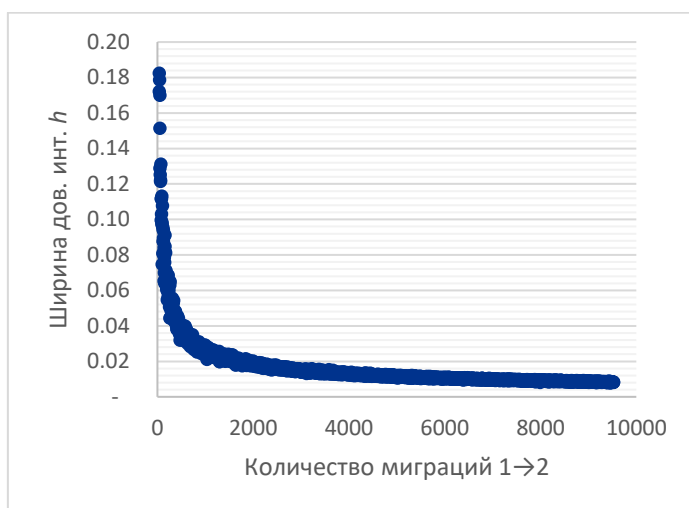
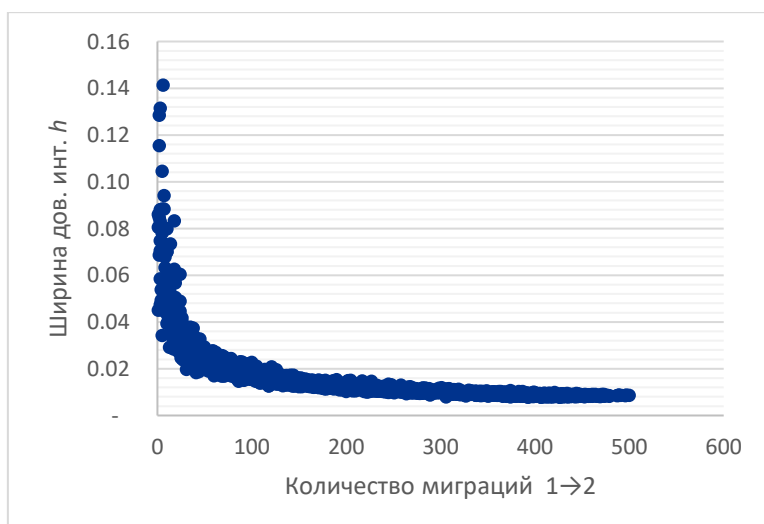


Рисунок 7. Зависимость между шириной доверительного интервала для коэффициента матрицы миграций ($1 \rightarrow 2$) и количеством соответствующих миграций.



Таким образом, мы можем наблюдать сильную нелинейную взаимосвязь между количеством наблюдений и шириной доверительных интервалов.

Обозначим ширину доверительного интервала за h . При возведении h в степень -2 , взаимосвязь приобретает линейный вид, как показано на Рисунках 8 и 9.

Рисунок 8. Зависимость между шириной доверительного интервала в степени -2 для коэффициента матрицы миграций ($1 \rightarrow 1$) и количеством соответствующих миграций.

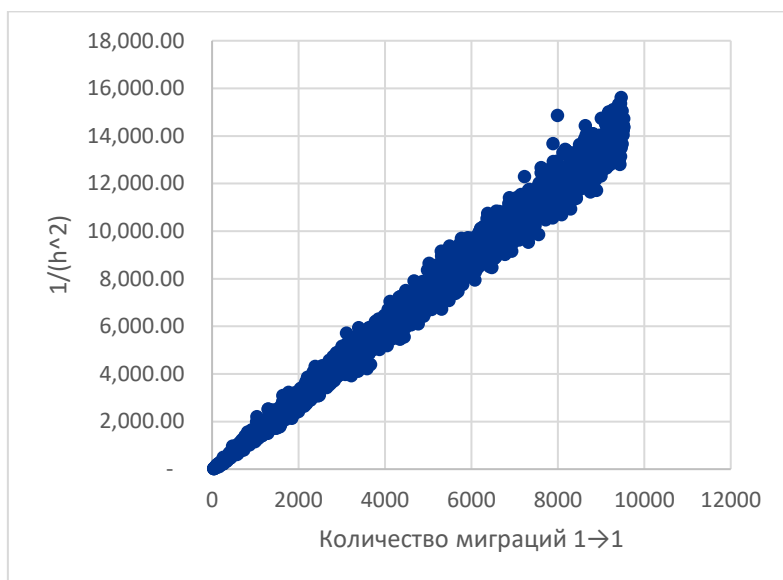
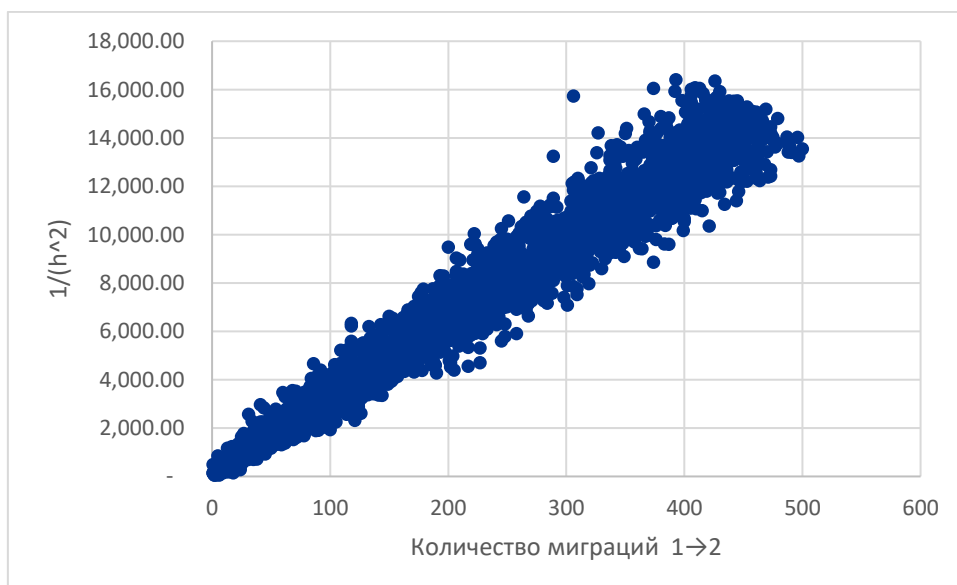


Рисунок 9. Зависимость между шириной доверительного интервала в степени -2 для коэффициента матрицы миграций ($1 \rightarrow 2$) и количеством соответствующих миграций.



В данном случае хочется сделать два примечания. Во-первых, такая взаимосвязь напрямую соотносится с формой доверительных интервалов Вальда рассматриваемых в п. 4.2. Во-вторых, возможно построить формулу линейной взаимосвязи между факторами. Тем не

менее, ввиду явной гетероскедастичности (дисперсия ошибки линейно зависит от количества наблюдений) при оценивании коэффициентов вместо МНК мы будем использовать взвешенный МНК (в качестве весов выступает количество миграций в степени (-1)).

При моделировании были оценены коэффициенты парных регрессий, имеющих следующую функциональную форму:

$$N_{migr}^{<i,j>} \sim \beta_0^{<i,j>} + \beta_1^{<i,j>} \cdot \frac{1}{h^2},$$

где

N_{migr} – количество миграций из состояния i в состояние j ,

h – ширина доверительного интервала,

$\beta_0^{<i,j>}, \beta_1^{<i,j>}$ – коэффициенты регрессии для соответствующего коэффициента матрицы переходных вероятностей.

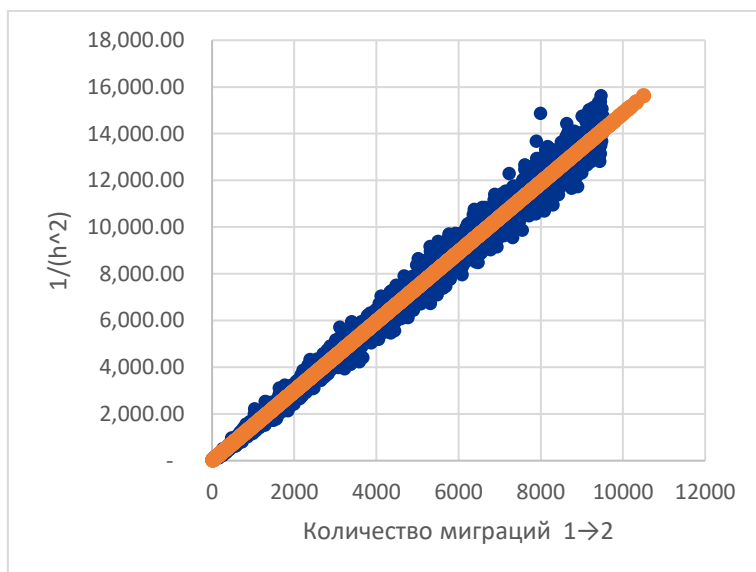
Коэффициенты значимы почти на любом уровне значимости, результаты приводятся в Таблице 13.

Таблица 13. Коэффициенты парных регрессий

Исходное состояние	Состояние после миграции	Вероятность миграции	Intercept $\beta_0^{<i,j>}$	$\beta_1^{<i,j>}$
1	1	95.2%	153.06	0.66
1	2	4.6%	9.49	0.03
2	1	2.4%	13.90	0.01
2	2	92.9%	86.81	0.93
2	3	4.5%	6.22	0.03
3	2	2.2%	13.33	0.01
3	3	90.6%	49.53	1.16
3	4	6.7%	6.35	0.06
4	3	2.2%	11.49	0.01
4	4	90.6%	26.63	1.18
4	5	7.1%	5.85	0.07

Пример применения полученного прогноза продемонстрирован на Рисунке 10.

Рисунок 10. Зависимость между шириной доверительного интервала в степени -2 для коэффициента матрицы миграций (1→2) и количеством соответствующих миграций. Добавлен тренд, построенный на основе коэффициентов из Таблицы 13.



6.2.3. Объем данных, необходимый для оценки коэффициентов матрицы переходных вероятностей на заданном уровне точности

На основе Таблицы 13 были составлены ориентиры для объема данных, необходимого для построения оценок коэффициентов на заданном уровне статистической значимости.

Таким образом, мы составили таблицу с необходимым объемом данных для оценки коэффициентов матрицы переходных вероятностей на заданном уровне точности (Таблица 14).

Таблица 14. Необходимый объем данных (миграций) для оценки коэффициентов матрицы переходных вероятностей на заданном уровне точности

Ширина дов. интервала, пп	(Истинная) вероятность миграции – Необходимое кол-во набл-х миграций					
	2.5%	5%	7%	91%	93%	95%
0.5	314	1,194	2,835	46,642	37,152	26,407
1.0	89	306	714	11,698	9,353	6,717
2.0	33	84	183	2,962	2,404	1,794
5.0	–	22	35	516	458	416

Примечание. В случаях «–», когда ширина доверительного интервала вдвое и более превышает оцениваемый коэффициент, последний считаем статистически незначимым.

6.3. Выводы по Эксперименту 2

Итак, в ходе эксперимента мы выявили взаимосвязь между шириной доверительного интервала и количеством соответствующих миграций. Как было выяснено в ходе эксперимента, функциональная зависимость в целом соответствует связи, заложенной в формулу доверительных интервалов Вальда:

$$h \sim \frac{1}{(\#migr)^2},$$

где

h – ширина доверительного интервала,

$\#migr$ – количество миграций, соответствующих рейтингу.

В рамках исследования в качестве первого приближения для необходимого количества данных возможно использовать Таблицу 14. Например, определив, что мы хотим оценить доверительный интервал для вероятности миграции, равной 5%, хотя бы с точностью 2.5 пп., нам потребуется в среднем около 84 наблюдений. Таблица построена на основе регрессионной зависимости между шириной доверительного интервала и количеством миграций. Данная таблица удобна, так как не требует длительных вычислений методом бутстрапа и/или ВМСМС.

В общем случае мы рекомендуем использовать таблицу на этапе подготовке данных, принятии решений об объединении сегментов для увеличения количества данных и т.д. На данном этапе будет затруднительно строить множество симуляций для каждого варианта группировки портфеля.

Тем не менее, Таблица 14 не учитывает взаимосвязь между коэффициентами внутри матрицы. Ввиду очевидной зависимости между коэффициентами одной матрицы переходных вероятностей (см. п. 3.4.1) в рамках валидации финальной модели мы рекомендуем провести симуляцию и построить полноценные доверительные интервалы методом бутстрапа/ВМСМС (в зависимости от предположений).

7. Эксперимент 3. Оптимальное разбиение выборки для наиболее достоверного оценивания ОКУ

7.1. Задачи эксперимента

Зачастую аналитик при построении матриц переходных вероятностей сталкивается с большим количеством состояний, в которых могут находиться заемщики. Для корпоративного портфеля состояниями являются корпоративные рейтинги, которые могут быть представлены на уровне нотчей. В результате корпоративная мастер-шкала может включать до 20-30 рейтинговых категорий.

В случае розничного портфеля каждый заемщик может быть охарактеризован с точностью до дней просрочки (т. е. 0, 1, ..., 90 и «90+» – дефолт).

Очевидно, что в случае как корпоративного, так и розничного портфелей большое значение приобретает группировка данных по корзинам для уточнения оценок вероятностей дефолта по каждой группе.

В рамках эксперимента мы ставили перед собой 2 задачи:

- продемонстрировать возможность применения рассматриваемых ранее методов не только для доверительного оценивания PD, но также и ожидаемых кредитных убытков (ОКУ),
- найти оптимальное разбиение портфеля на корзины в целях минимизации доверительного интервала для ожидаемых кредитных убытков (ОКУ).

7.2. Расчет доверительного интервала для ОКУ

Для демонстрации расчета были использованы данные розничного портфеля одного из крупного банка СНГ, прошедшие некоторую экспертную корректировку. Выбор именно розничного портфеля был обусловлен следующими факторами:

- Большой объем данных. Общее количество переходов в рамках портфеля насчитывало около 800 000.
- Более простая система контрактов в части структуры платежей.
- Отсутствие кредитных линий и необходимости учета условных обязательств и их возможность конвертации в кредитное требование в случае дефолта заемщика.
- Наличие распространенной группировки заемщиков в зависимости от дней просрочки (далее DPD – days past due):
 - DPD = 0 дней,

- $DPD = 1 \dots 30$ дней,
- $DPD = 31 \dots 60$ дней,
- $DPD = 61 \dots 90$ дней,
- $DPD > 91$ дней (соответствует дефолтному состоянию).

На основе данного портфеля и его группировки был произведен расчет матрицы переходных вероятностей, построены многомерные распределения коэффициентов матрицы при помощи методов бутстрапа и ВМСМС.

Для построения доверительного интервала для ожидаемых кредитных убытков (ОКУ) требуется переход от многомерного распределения вероятностей дефолтов к распределению ОКУ.

Как упоминалось в п. 2.2., согласно требованиям Базельского комитета и МСФО (IFRS) 9, размер ОКУ рассчитывается по следующей формуле:

$$ECL = PD \cdot LGD \cdot EAD \cdot D,$$

где

ECL – размер ожидаемых кредитных убытков (expected credit loss),

PD – вероятность дефолта,

LGD – уровень потерь при дефолте,

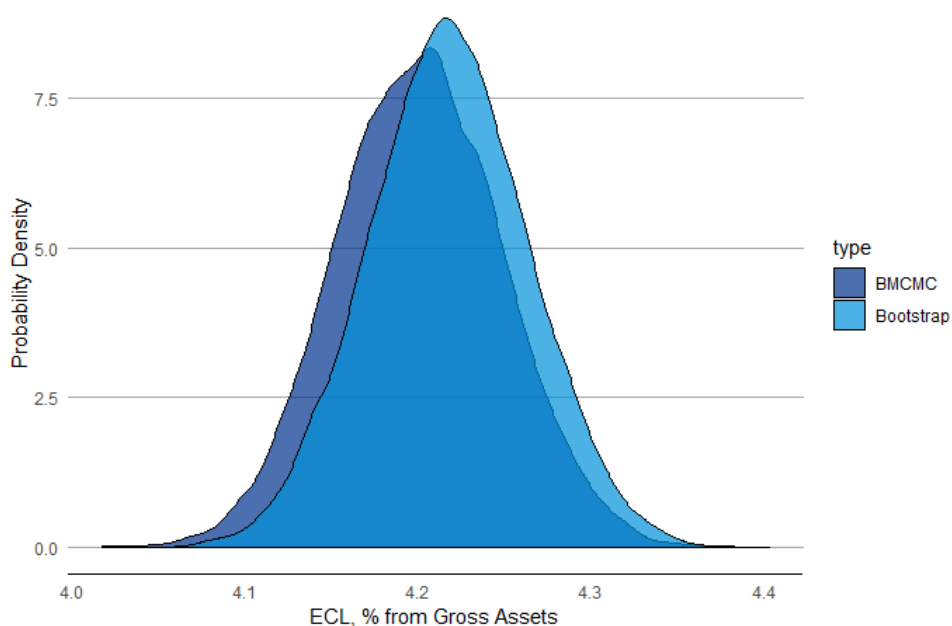
EAD – величина кредитного требования, подверженного риску дефолта,

D – дисконт-фактор.

В рамках упрощенного расчета мы используем некоторые дополнительные предпосылки. В частности, мы предполагаем $LGD = 65\%$, $EAD = 85\%$ от текущей задолженности, дисконт фактор соответствует дисконтированию на 1 год под 10% годовых: $D = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1.1} = 0.9091$.

Таким образом, в формуле расчета ОКУ все коэффициенты, кроме PD , являются константами. В таком случае возможно непосредственное применение эмпирического распределения матрицы переходных вероятностей для построения эмпирического распределения ОКУ. Такие эмпирические распределения, построенные на основе результатов доверительного оценивания PD при помощи методов бутстрапа и ВМСМС, приводятся на Рисунке 11.

Рисунок 11. Эмпирические распределения ОКУ, основывающиеся на доверительном оценивании PD при помощи методов бутстрапа и BMCMS.



На графике приведены эмпирические распределения ОКУ в % от общего объема активов.

Мы можем отметить, что полученные распределения, хоть и очень близки между собой, но тем не менее имеют значимое отличие. Данное отличие заключается в том, что бутстрап является дискретным методом и основывается на когортном методе построения матрицы переходных вероятностей. В основе BMCMS лежит предположение о непрерывном времени, т.е. используется метод дюрации.

В таком случае в результате применения бутстрапа мы получаем оценку матрицы переходных вероятностей, а в случае BMCMS – оценку матрицы-генератора. При этом зачастую экспонента матрицы-генератора не равна матрице переходных вероятностей, полученной методом бутстрапа, а последняя не имеет однозначно-определенной матрицы-генератора.

Таким образом, решение о корректности того или иного методов зависит прежде всего от наших предположений о подлежащем процессе.

7.3. Поиск оптимального разбиения

7.3.1. Методология проведения

Для формирования исходной выборки была построена дневная матрица переходных вероятностей размерностью 92x92 (см. Приложение 1). Матрица переходных вероятностей определялась как данная матрица, возведенная в степень 365.

Исходная выборка была сформирована следующим образом: на исходный вектор v_0 из 10 000 наблюдений дважды оказывалось воздействие матрицей переходных вероятностей. Полученные в результате v_1 и v_2 использовались при расчете доверительных интервалов для матрицы переходных вероятностей.

Поскольку количество исходных состояний очень велико (0, 1, ..., 90, 91+ - всего 92 состояния), мы провели группировку в 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 17, 20 группы. Логика формирования цифр следующая: в каждом случае есть отдельные группы «нет просрочки» - 0, «дефолт» - «91+». Состояния 1-90 (всего 90 состояний) были разделены поровну на 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18 групп. Для каждой из группировок были получены эмпирические распределения матрицы переходных вероятностей на основе векторов v_1 и v_2 методом бутстрапа и ВМСМС, были построены доверительные интервалы для ОКУ.

7.3.2. Результаты эксперимента

В результате проведенного эксперимента было построено 9 распределений ОКУ и 9 95%-ных доверительных интервалов. Результаты эксперимента приводятся на Рисунке 12.

Рисунок 12. Ширина доверительных интервалов для ОКУ в зависимости от количества корзин, на которые группируется DPD



Как мы можем обнаружить, минимальная ширина доверительного интервала для ОКУ достигается при разбиении исходной выборки на 5 частей. При разбиение выборки на большее и меньшее количество частей доверительный интервал для оценки ОКУ увеличивается.

Данное явление может иметь следующую интерпретацию: при малом количестве корзин, на которые разделяется выборка заемщиков, результатом оценки становится «средняя

температура по больнице», и доверительный интервал для ОКУ расширяется. Напротив, если разделить выборку на избыточное количество классов, данных для адекватной оценки коэффициентов перестает хватать, и доверительный интервал также расширяется.

Интересно, что оптимальное количество групп, на которое в данном случае оптимально разбить портфель, совпадает с наиболее распространенной разбивкой по корзинам. В общем случае результат может быть иным.

В рамках настоящей работы мы применяли простейший способ разбивки данных на группы: отдельно были выделены группа без просрочки и группа «дефолт». Наблюдения с количеством дней просрочки от 1 до 90 делились поровну в группы, являющиеся делителями 90. Тем не менее, даже в рамках подобного упрощенного подхода возможно сделать вывод о наличии некоторой оптимальной разбивки, при которой доверительный интервал для ОКУ является минимальным и, как следствие, оценка ОКУ является более эффективной относительно прочих оценок.

В дальнейшем возможно применение более сложных правил разбивки промежуточных состояний наблюдений, например, группировки соседних состояний с наименьшим количеством наблюдений, метода k-средних, деревьев решений и проч.

7.4. Выводы по Эксперименту 3

Итак, в рамках Эксперимента 3 мы продемонстрировали, как на основе эмпирического распределения коэффициентов матрицы переходных вероятностей возможно построить доверительный интервал для ожидаемых кредитных убытков (ОКУ).

При этом было обнаружено, что даже построенные на одних данных доверительные интервалы для ОКУ отличаются в зависимости от метода доверительного оценивания. Причиной этого являются фундаментальные предположения, лежащие в основе обоих методов: бутстрап основывается на дискретности времени (применяется когортный метод при оценке вероятностей миграций). ВМСМС использует предположение о непрерывности времени, в результате расчета оценивается не матрица переходных вероятностей, а матрица-генератор непрерывного процесса (как в методе дюрации). При этом матрица-генератор, полученная методом ВМСМС, может не соответствовать матрице переходных вероятностей, полученной методом бутстрапа.

В результате можно сделать вывод, что оба метода применимы для доверительного оценивания ОКУ, выбор оптимального метода сводится к выбору предпосылок процесса, порождающего имеющиеся данные.

Кроме того, в рамках Эксперимента 3 мы попытались решить проблему оптимальной разбивки исходных данных на укрупненные сегменты. Данная проблема часто встает перед аналитиками, сталкивающимися с проблемой недостатка данных.

В результате анализа было продемонстрировано, что существует некоторое количество разбиений исходных данных, минимизирующее доверительный интервал для ожидаемых кредитных убытков (ОКУ). При этом в рамках анализа применялась наиболее простая группировка заемщиков с днями просрочки 1-90 на равные группы.

Таким образом, мы хотим подчеркнуть возможность применения описанного метода (возможно, в несколько модифицированном и усложненном виде) для нахождения оптимальной группировки исходных данных по заемщикам. В случае корпоративного портфеля это может помочь найти оптимальную группировку рейтингов заемщиков. В случае розничного портфеля аналитик сможет предложить альтернативу традиционной схеме деления заемщиков по группам просрочки: «DPD = 0», «DPD = 1...30» и т. д. (см. п. 8.2.).

8. Заключение

Подведем итоги исследования.

В рамках работы выполнены все задачи, сформулированные в п. 1. В частности, было проведено:

- описание расчета ECL в части моделирования вероятности дефолта (отдельно рассмотрены вопросы оценок «на момент времени» РИТ и «по циклу» ТТС, моделирования многолетних вероятности дефолта);
- классификация и описание различных методов моделирования вероятности дефолта, место метода матриц переходных вероятностей в общем подходе к моделированию;
- описаны методы расчета матриц переходных вероятностей и различные способы их корректировки;
- описаны методы доверительного оценивания матриц переходных вероятностей, осуществлена проверка их адекватности, предложены различные пути их применения.

По итогам работы можно сделать следующие выводы:

1. Подход на основе матриц переходных вероятностей применим прежде всего в следующих случаях:
 - при использовании внешних рейтингов (Moody's, S&P, Эксперт РА и проч.), модель применяется для расчета однолетних и многолетних вероятностей дефолта PD («на момент времени» РИТ или «по циклу» ТТС);
 - в поведенческих моделях по розничному сегменту для расчета однолетних и многолетних вероятностей дефолта PD («на момент времени» РИТ или «по циклу» ТТС);
 - в корпоративном и розничном сегментах в качестве надстройки над однолетней моделью для расчета многолетних вероятностей дефолта PD.
 - в качестве одного из инструментов для диагностики портфеля.
2. Основные методы построения оценок – метод когорт и метод дюрации. Другие методы (например, методы, учитывающие нелинейность во времени – п. 3.6) могут привести к неинтерпретируемости или переобучению модели, но в ряде случаев используются для отражения особенностей имеющихся данных.
3. (Эксперимент 1) Тестирование показало, что наиболее адекватные методы построения доверительных интервалов – бутстрап и ВМСМС, основанные на методе когорт и дюрации соответственно. Метод бутстрапа использует свойство дискретности

марковской цепи во времени (срезы портфеля предоставляются на даты с некоторой периодичностью).

Метод ВМСМС сложнее и требует больших вычислений, однако:

- позволяет учесть дополнительную информацию о миграциях, произошедших между временными срезами,
- присваивает ненулевые оценки всем вероятностям миграций даже при полном отсутствии данных по соответствующей миграции.

4. Ввиду того, что оба адекватных метода доверительного оценивания коэффициентов матрицы переходных вероятностей требуют значительного времени, необходимо заранее построить некоторые табличные «ориентиры», которые можно будет использовать на подготовительных этапах анализа без необходимости проведения длительных расчетов. (Такого рода «ориентиры» построены в ходе Эксперимента 2.2).
5. (Эксперимент 2.1) Общая взаимосвязь между количеством миграций и шириной интервала имеет функциональную зависимость вида:

$$h \sim \frac{1}{(\#migr)^2},$$

где

h – ширина доверительного интервала,

$\#migr$ – количество миграций, соответствующих рейтингу.

Данная функциональная зависимость соответствует зависимости, лежащей в основе интервалов Вальда. Данная зависимость может быть численно оценена при помощи линейной регрессии (рекомендуется использовать взвешенный МНК).

6. (Эксперимент 2.2) Для определения необходимого объема данных в рамках предварительного анализа при построении модели во избежание долгих по времени вычислений доверительных интервалов мы рекомендуем воспользоваться Таблицей 14, построенной на основе установленных функциональных зависимостей (вывод 4).

Тем не менее, при валидации финальной модели рекомендуется построить доверительные интервалы методом бутстрапа или ВМСМС (в зависимости от предпосылок). Это вызвано тем, что рассчитанная таблица не может полностью учесть взаимосвязи между коэффициентами внутри одной матрицы переходных вероятностей.

7. (Эксперимент 3.1) В рамках расчета на основе реальных данных было продемонстрировано, как полученные доверительные интервалы и многомерное распределение финальной матрицы переходных вероятностей могут использоваться для доверительного оценивания ожидаемых кредитных убытков (ОКУ). Были оценены

данные по около 800 000 переходам (миграциям), была получена оценка ожидаемых кредитных убытков, равная 4.2 ± 0.1 млрд у.е. (95%-ный доверительный интервал).

8. (Эксперимент 3.2) Аналитики часто сталкиваются с проблемой необходимости группировки рейтинговых категорий в один укрупненный подсегмент. В рамках исследования мы продемонстрировали удобный метод для определения оптимальной группировки на основе минимизации ширины доверительного интервала для ожидаемых кредитных убытков. Метод может быть дополнен и модифицирован для большей эффективности, в том числе вычислительной. К сожалению, расчеты также требуют значительного времени.
9. Еще одна проблема, с которой может столкнуться риск-аналитик в ходе работы – нарушение марковости подлежащего процесса. В рамках работы проведен обзор ряда источников по данной проблеме, ее рассмотрение и корректировки для ее устранения могут стать темой последовательных исследований по данному вопросу.

9. Список использованной литературы

1. Altman E. I. Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy //The journal of finance. – 1968. – Т. 23. – №. 4. – С. 589-609.
2. Altman E. I., Kao D. L. The implications of corporate bond ratings drift //Financial Analysts Journal. – 1992. – Т. 48. – №. 3. – С. 64-75.
3. Asmussen S., Hobolth A. Markov bridges, bisection and variance reduction //Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2010. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2012. – С. 3-22.
4. Araten M., Angbazo L. Roots of transition matrices: Application to settlement risk //Chase Manhattan Bank. – 1997.
5. Billingsley P. Statistical inference for Markov processes. //University of Chicago Press, 1961. – Т. 2.
6. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities //Journal of political economy. – 1973. – Т. 81. – №. 3. – С. 637-654.
7. Bladt M., Sørensen M. Efficient estimation of transition rates between credit ratings from observations at discrete time points //Quantitative Finance. – 2009. – Т. 9. – №. 2. – С. 147-160.
8. Bladt M., Sørensen M. Statistical inference for discretely observed Markov jump processes //Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology). – 2005. – Т. 67. – №. 3. – С. 395-410.
9. Bluhm C., Overbeck L. Calibration of PD term structures: to be Markov or not to be //Risk. – 2007. – Т. 20. – №. 11. – С. 98-103.
10. Bolker B. M. Ecological models and data in R. //Princeton University Press – 2008.
11. Brooks S. P., Gelman A. General methods for monitoring convergence of iterative simulations //Journal of computational and graphical statistics. – 1998. – Т. 7. – №. 4. – С. 434-455.
12. Carty L. V., Fons J. S. Measuring changes in corporate credit quality //The Journal of Fixed Income. – 1994. – Т. 4. – №. 1. – С. 27-41
13. Delloye M., Fermanian J., Sbair M. Dynamic frailties and credit portfolio modelling: The authors estimate and discuss a reduced-form credit portfolio model in a proportional hazard framework //RISK-LONDON-RISK MAGAZINE LIMITED-. – 2006. – Т. 19. – №. 10. – С. 100.
14. Gelman A. et al. Inference from simulations and monitoring convergence //Handbook of Markov chain Monte Carlo. – 2011. – Т. 6. – С. 163-174.
15. Hanson S., Schuermann T. Confidence intervals for probabilities of default //Journal of Banking & Finance. – 2006. – Т. 30. – №. 8. – С. 2281-2301.

16. Hull J. Introduction to futures and options markets. – Englewood Cliffs, NJ: prentice Hall. – 1991.
17. Jacobsen, M. Statistical Analysis of Counting Processes. //Lecture Notes in Statistics 12. Springer-Verlag, New York. – 1982.
18. Jarrow R. A., Lando D., Turnbull S. M. A Markov model for the term structure of credit risk spreads //The review of financial studies. – 1997. – T. 10. – №. 2. – C. 481-523.
19. Jarrow R. A., Turnbull S. M. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk //The journal of finance. – 1995. – T. 50. – №. 1. – C. 53-85.
20. Kijima M. Monotonicities in a Markov chain model for valuing corporate bonds subject to credit risk //Mathematical Finance. – 1998. – T. 8. – №. 3. – C. 229-247.
21. Kreinin A., Sidelnikova M. Regularization algorithms for transition matrices //Algo Research Quarterly. – 2001. – T. 4. – №. 1/2. – C. 26. URL:
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.164.305&rep=rep1&type=pdf>
22. Küchler U., Sørensen M. Exponential families of stochastic processes and Lévy processes //Journal of statistical planning and inference. – 1994. – T. 39. – №. 2. – C. 211-237.
23. Lando D., Skødeberg T. M. Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations //journal of banking & finance. – 2002. – T. 26. – №. 2-3. – C. 423-444.
24. Lin L. Roots of stochastic matrices and fractional matrix powers : дис. – Manchester Institute for Mathematical Sciences, The University of Manchester, 2011. URL:
https://www.research.manchester.ac.uk/portal/files/54504098/FULL_TEXT.PDF
25. Löffler G. Avoiding the rating bounce: Why rating agencies are slow to react to new information //Journal of Economic Behavior & Organization. – 2005. – T. 56. – №. 3. – C. 365-381.
26. McNeil A. J. et al. Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools. – Princeton: Princeton university press, 2005. – T. 3.
27. Merton R. C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates //The Journal of finance. – 1974. – T. 29. – №. 2. – C. 449-470.
28. Nickell P., Perraudin W., Varotto S. Stability of rating transitions //Journal of Banking & Finance. – 2000. – T. 24. – №. 1-2. – C. 203-227.
29. Orwa, G. Mung'atu, J. Comparing the Efficiency of Cohort Time Homogeneous and Non-Homogeneous Techniques of Estimation in Credit Migration Matrices. //IOSR Journal of Mathematics – 2016
30. Pfeuffer M. ctmcd: An R Package for Estimating the Parameters of a Continuous-Time Markov Chain from Discrete-Time Data //R Journal. – 2017. – T. 9. – №. 2.

31. Pfeuffer M. et al. Capturing Model Risk and Rating Momentum in the Estimation of Probabilities of Default and Credit Rating Migrations //arXiv preprint arXiv:1809.09889. – 2018.
32. Pinsky M., Karlin S. An introduction to stochastic modeling. – Academic press, 2010.
33. Rao V., Teh Y. W. Fast MCMC sampling for Markov jump processes and continuous time Bayesian networks //arXiv preprint arXiv:1202.3760. – 2012.
34. dos Reis G., Smith G. Robust and consistent estimation of generators in credit risk //Quantitative Finance. – 2018. – Т. 18. – №. 6. – С. 983-1001.
35. Stromquist W. Roots of transition matrices. //Daniel H. Wagner Associates, Practical Paper. – 1996. URL: <http://walterstromquist.com/papers/TRANSIT.pdf>
36. Taylor H. M., Karlin S. An introduction to stochastic modeling //Academic press. – 2014. – P. 89
37. Trueck S., Rachev S. T. Rating based modeling of credit risk: theory and application of migration matrices. – Academic Press, 2009.
38. Vasileiou A., Vassiliou P. C. G. An inhomogeneous semi-Markov model for the term structure of credit risk spreads //Advances in Applied Probability. – 2006. – Т. 38. – №. 1. – С. 171-198.
39. Wilson T. C. Portfolio credit risk: part I. //Risk Magazine. – September, 1997 – С. 111–117.
40. Wilson T. C. Portfolio credit risk: part II. //Risk Magazine. – October, 1997 – С. 111–117.
41. АКРА и «Эксперт РА» сравняли шансы. – Ольга Адамчук. Ведомости – 12 мая 2017 г. URL: <https://www.vedomosti.ru/finance/articles/2017/05/12/689673-akra-ekspert-ra>
42. Алескеров Ф. Т. и др. Анализ математических моделей Базель II. – 2013. – С. 45-46
43. МСФО (IFRS) 9: «Финансовые инструменты» Краткий обзор стандарта. //Deloitte. – Сентябрь, 2016
44. Российские рейтинги ударили по резервам банков. – Пашутинская Е., Божко М., Маринин В. – РБК – 23 августа 2017 г. – URL: <https://www.rbc.ru/finances/23/08/2017/599c230f9a79473cd3f67dae>
45. Тотмянина К. М. Обзор моделей вероятности дефолта //Управление финансовыми рисками. – 2011. – №. 1. – С. 12-24.
46. 2016 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions. S&P. – 2016. URL: <https://www.spratings.com/documents/20184/774196/2016+Annual+Global+Corporate+Default+Study+And+Rating+Transitions.pdf/2ddcf9dd-3b82-4151-9dab-8e3fc70a7035>

Приложение 1. Используемые в расчетах файлы

Дневная матрица переходных вероятностей размерностью 92х92:

(полное представление – во вложенном файле)



(сокращенное представление)

Исходное состояние	Состояние (рейтинг) после миграции (шаг - 1 день)											
	0	1	2	3	4	5	...	87	88	89	90	91
0	99.90%	0.10%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	...	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
1	2.50%	0.00%	97.50%	0.00%	0.00%	0.00%	...	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	2.50%	0.00%	0.00%	97.50%	0.00%	0.00%	...	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
3	2.50%	0.00%	0.00%	0.00%	97.50%	0.00%	...	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
4	2.50%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	97.50%	...	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
5	2.50%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	...	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
...
86	2.40%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	...	97.60%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
87	2.39%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	...	0.00%	97.61%	0.00%	0.00%	0.00%
88	2.39%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	...	0.00%	0.00%	97.61%	0.00%	0.00%
89	2.39%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	...	0.00%	0.00%	0.00%	97.61%	0.00%
90	2.39%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	...	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	97.61%
91	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	...	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

Примечание. Оранжевым показаны ненулевые элементы матрицы