Практика 6

Алгебра логических значений

Пример алгебры дает множество $\{0,1\}$ истинностных значений высказываний с n-арными операциями F_{Φ}, которые являются функциями истинностных значений формул логики высказываний $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$, образованных с помощью n пропозициональных переменных $X_1,\ldots,X_n$.

Формула $\Phi = \neg X$ определяет унарную операцию $F_{\Phi} = F_{\neg X}(x)$, которая обозначается символом x' и называется *отрицанием* или *дополнением* переменной x.

Формулы $\Phi = X \vee Y$, $\Psi = X \wedge Y$ определяют бинарные операции $F_{\Phi} = F_{X \vee Y}(x,y)$, $F_{\Psi} = F_{X \wedge Y}(x,y)$, которые обозначаются соответственно символами $x \vee y$, $x \wedge y$ и называются *дизъюнкцией и конъюнкцией* переменных x,y.

Операция $x \vee y$ иногда называется также *объединением* или *суммой* переменных x,y и обозначается соответственно через $x \cup y$ или $x + y$.

Операция $x \wedge y$ иногда называется также *пересечением* или *произведением* переменных x,y и обозначается соответственно через $x \cap y$ или $x \cdot y$.

Алгебра ***B***=({0,1},∨,∧,′) впервые была введена в 19-ом веке английским математиком Дж.Булем с целью применения в логике математических методов.

Поэтому эта алгебра называется *алгеброй Буля* или *алгеброй логических значений.*

<u>Теорема.</u> Алгебра Буля ***B***=({0,1},∨,∧,′) удовлетворяет свойствам:

1) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ – ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции;

2) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ – коммутативность дизъюнкции и конъюнкции;

3) $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ – идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции;

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ – дистрибутивность соответственно конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

1) $(a')' = a$ – идемпотентность дополнения;

2) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ – законы де Моргана;

3) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ – законы поглощения;

4) $a \vee a' = 1$, $a \wedge a' = 0$ – характеристическое свойство дополнения,

5) $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 1 = a$ – характеристическое свойство наибольшего элемента 1,

6) $a \vee 0 = a$, $a \wedge 0 = 0$ – характеристическое свойство наименьшего элемента 0.

Булевы многочлены

Булевыми многочленами называются формулы, которые образованы из булевых переменных $x,y,\ldots$(принимающих значения 0,1) и символов булевых операций $+, \cdot, '$ по следующим правилам:

1) все булевы переменные $x,y,\ldots$ и символы 0,1 – булевы многочлены;

2) если p и q – булевы многочлены, то таковыми являются выражения: $(p)+(q)$, $(p)\cdot(q)$, $(p)'$.

При этом скобки в многочленах используются для указания порядка выполнения операций над переменными и по возможности опускаются с учетом следующего приоритета выполнения булевых операций: $'$, $\cdot$, $+$.

Определение. Отображение $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется булевой функцией от n переменных.

Такие функции можно задать 2^n-мерным булевым вектором.

В частности, каждый булев многочлен $p(x_1,\ldots,x_n)$ с n переменными $x_1,\ldots,x_n$ определяет булеву функцию $\overline{p}:\boldsymbol{B}^n\to\boldsymbol{B}$ по правилу:

если в $p(x_1,\ldots,x_n)$ вместо переменных $x_1,\ldots,x_n$ подставить произвольные значения $a_1,\ldots,a_n$ из множества $\boldsymbol{B}$, то в результате вычислений получится некоторый элемент $\overline{p}(a_1,\ldots,a_n)$ алгебры $\boldsymbol{B}$.

Такая функция называется *булевой полиномиальной функцией*, определяемой булевым многочленом $p(x_1,\ldots,x_n)$.

Нормальные формы булевых функций

Целью этого раздела является изучение алгоритма нахождения специальных форм для булевых функций.

Определение. *Литерой* называется выражение:

$$x^{\alpha}=\begin{cases} x, & \text{если} \quad \alpha=1, \\ x', & \text{если} \quad \alpha=0, \end{cases}$$

где x – булева переменная и значение $\alpha\in\{0,1\}$.

Определение. Литера, или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер, называется *конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*). Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все булевы переменные рассматриваемой формулы.

Определение. Дизъюнкт, или конъюнкция (совершенных) дизъюнктов, называется (*совершенной*) *конъюнктивной нормальной формой.* Для названия таких форм используются сокращения КНФ и СКНФ соответственно.

Определение. Конъюнкт, или дизъюнкция (совершенных) конъюнктов, называется (*совершенной*) *дизъюнктивной нормальной формой*. Для названия таких форм используются сокращения ДНФ и СДНФ соответственно.

Теорема. Если булева функция $f:\boldsymbol{B}^n\to\boldsymbol{B}$ не равна тождественно нулю, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной дизъюнктивной нормальной формы:

$$p_f = \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \boldsymbol{B}^n,\\ f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

которая называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно – СДНФ) *функции* f.

С другой стороны, если булева функция $f\colon \boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$ не равна тождественно единице, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной конъюнктивной нормальной формы

$$q_f = \prod_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \boldsymbol{B}^n,\\ f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0}} (x_1^{\alpha'_1} + \dots + x_n^{\alpha'_n}),$$

которая называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно – СКНФ) *функции* f.

Домашнее задание

Задача 1. Равносильными преобразованиями приведите каждый из следующих булевых многочленов к дизъюнктивной нормальной форме и к конъюнктивной нормальной форме:

1) $(x'(x+z)+x)(x+y)$;; 2) $(xz'+y)(y'z+xy)$.

Задача 2. Для следующих булевых функций найти СДНФ и СКНФ:

1) $f = (1,1,0,0,0,1,1,0)$; 2) $f = (0,1,0,1,0,1,1,0)$.

Задача 3. Используя СДНФ, найти булеву функцию, принимающую значение 1 на следующих наборах значений переменных и только на них:

1) F(0,0)=F(1,1)=1;

2) F(1,0)=1;

3) F(0,1,0)=F(1,0,1)=F(1,1,1)=1.

Используя СКНФ, найти формулу, принимающую значение 0 только на следующих наборах значений переменных:

1) F(0,1)=F(1,1)=0;

2) F(0,1)=0;

3) F(0,1,1)=F(1,1,1)=0;

Минимизация булевых многочленов

Для булевой функции f булевы полиномы СДНФ и СКНФ в общем случае не являются минимальными по числу вхождений в них булевых переменных.

Рассмотрим вопрос минимизации ДНФ p . Конъюнкт q называется *импликантом* формы p, если $pq = q$. Импликанты, минимальные по числу вхождений в них булевых переменных, называются *простыми импликантами*. Дизъюнкция всех простых импликант формы p называется *сокращенной ДНФ*.

Лемма 1. Любая ДНФ p эквивалентна некоторой сокращенной ДНФ.

Практически сокращенную ДНФ формы p можно получить *методом Квайна* с помощью последовательного применения следующих двух видов операций:

1) *операция склеивания,* которая для конъюнктов q и булевых переменных x определяется по формуле:

$$qx + qx' = qx + qx' + q;$$

2) *операция поглощения,* которая для конъюнктов q, булевых переменных x и значений $\alpha \in \{0,1\}$ определяется по формуле:

$$qx^{\alpha} + q = q.$$

Пример 1. Найдем сокращенную ДНФ для булева многочлена

$$p = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' + xyz.$$

В результате применения операции склеивания к различным парам конъюнктов многочлена p получим ДНФ

$$p = \overset{1}{x'yz'} + \overset{2}{x'yz} + \overset{3}{xy'z} + \overset{4}{xyz'} + \overset{5}{xyz} =$$

$$= \underset{1\text{-}2}{\overset{1}{x'y}} + \underset{1\text{-}4}{\overset{2}{yz'}} + \underset{2\text{-}5}{\overset{3}{yz}} + \underset{3\text{-}5}{\overset{4}{xz}} + \underset{4\text{-}5}{\overset{5}{xy}} = \underset{1\text{-}5}{y} + \underset{2\text{-}3}{y} + xz = y + xz$$

Здесь в исходной СДНФ над конъюнктами расставляем номера (выделено желтым маркером), чтобы под склейками внизу указывать, какие именно конъюнкты склеиваются (выделено зеленым маркером). При склейках на последующих шагах поступаем аналогичным образом.

В результате применения операции поглощения к различным парам конъюнктов последней ДНФ получим булев многочлен $xz + y$, который является сокращенной ДНФ булева многочлена p.

Пример 2. Найдем минимальную ДНФ (сокращенно МДНФ) для булева многочлена

$$p = x'yz' + x'yz + xy'z + xyz' + xyz .$$

В предыдущем примере показано, что булев многочлен $xz + y$ является сокращенной ДНФ исходного многочлена p . Значит, матрица Квайна имеет вид:

	$x'yz'$	$x'yz$	$xy'z$	xyz'	xyz
xz			*		*
y	*	*		*	*

По матрице видно, что минимальный набор импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна, состоит из конъюнктов xz и y. Значит, многочлен p имеет одну тупиковую ДНФ $xz + y$, которая является искомой минимальной ДНФ формы p .

Пример 3. Найдем минимальную ДНФ для булева многочлена

$$p = x'y'z' + x'y'z + xy'z + xyz .$$

В результате применения операции склеивания к различным парам конъюнктов многочлена p получим ДНФ

$$x'y'z' + x'y'z + xy'z + xyz + x'y' + y'z + xz .$$

В результате применения операции поглощения к различным парам конъюнктов последней ДНФ получим булев многочлен $x'y' + y'z + xz$, который является сокращенной ДНФ булева многочлена p.

Матрица Квайна в этом случае имеет вид:

	$x'y'z'$	$x'y'z$	$xy'z$	xyz
$x'y'$	*	*		
$y'z$		*	*	
xz			*	*

По матрице видно, что минимальный набор импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна, состоит из конъюнктов $x'y'$ и xz. Значит, многочлен p имеет одну тупиковую ДНФ $x'y' + xz$, которая является искомой минимальной ДНФ формы p .

Домашнее задание

Задача 1. Найти минимальную ДНФ для булевых многочленов:

1) $p = xyz + xy'z + xyz'$;

2) $p = xyz + x'yz + xy'z + xyz' + x'yz'$;

3) $p = xyz + x'yz + xy'z$;

4) $p = xyz' + x'yz + xy'z' + x'y'z + x'y'z'$;

Задача 2. Найти СДНФ и МДНФ для функции:

1) $f = (1,0,0,1,0,1,1,0)$;;

2) $f = (1,0,1,1,0,1,0,1)$.