



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Ковшаров Антон Павлович

«Исследование зависимости вероятности ошибки  
на блок от спектра графа Таннера для кодов с  
малой плотностью проверок на четность»

Научный руководитель:

канд. техн. наук, доцент, Буздалов Максим Викторович

Кафедра КТ

## Оглавление

1. Цели работы
2. Общие понятия
3. Алгоритм подсчета спектра
4. Экспериментальные исследования
5. Выводы



- ▶ Разработать критерий оценки эффективности МППЧ-кода на основе спектра циклов графа Таннера.
- ▶ Разработать алгоритм подсчета спектра графа Таннера.

Линейный  $(n, k)$  код

$G$  – порождающая матрица

$H$  – проверочная матрица

$G \cdot H^T = 0$  – проверка на четность

МППЧ-код – код с малой плотностью проверок на четность  
(мало единиц в  $H$ )

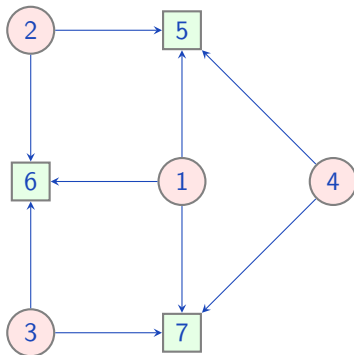
Пример

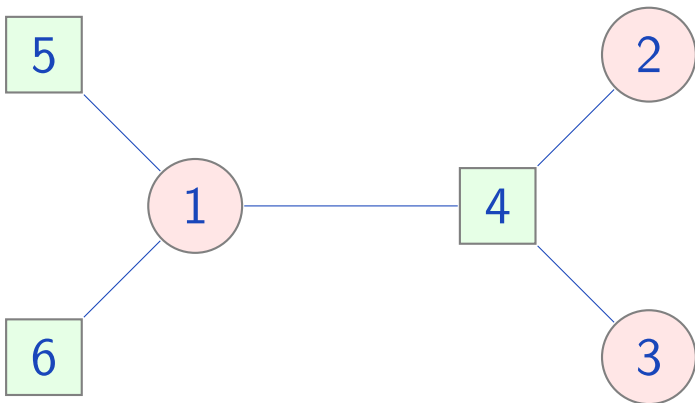
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

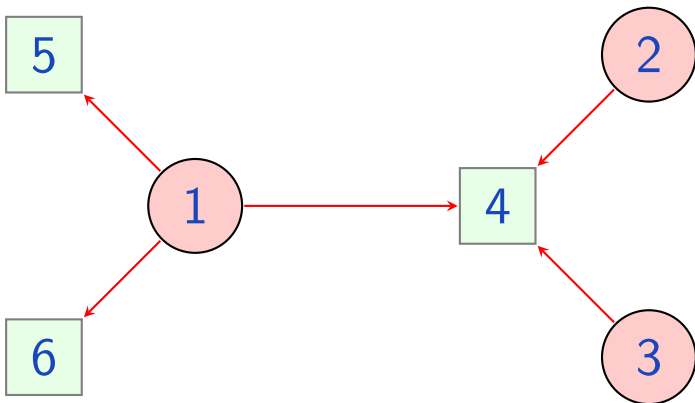
$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

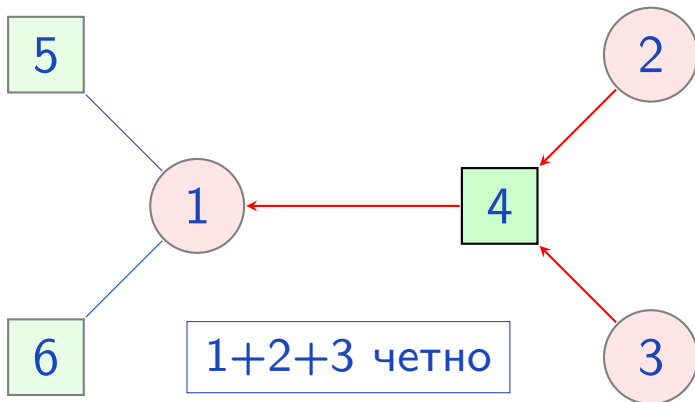
- ▶ Символьный узел – кодовый символ ○
- ▶ Проверочный узел – проверка на четность □
- ▶ Линия между если символ состоит в проверке

1	2	3	4	
1	1	0	1	5
1	1	1	0	6
1	0	1	1	7

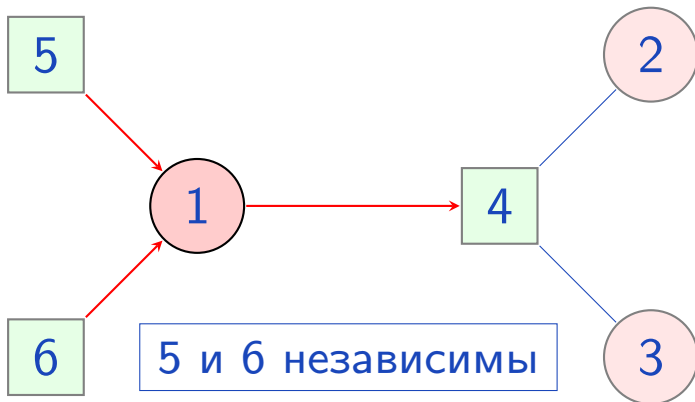


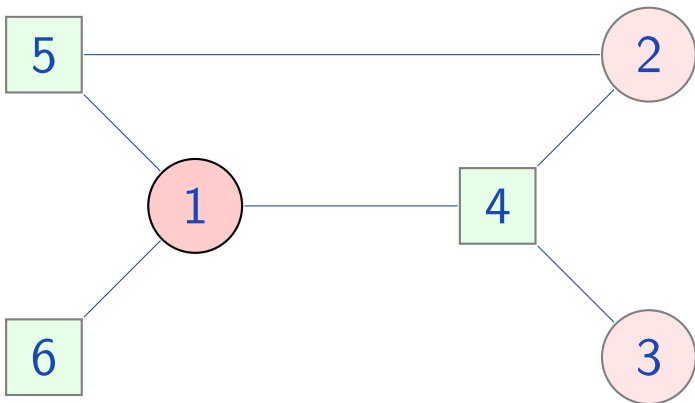


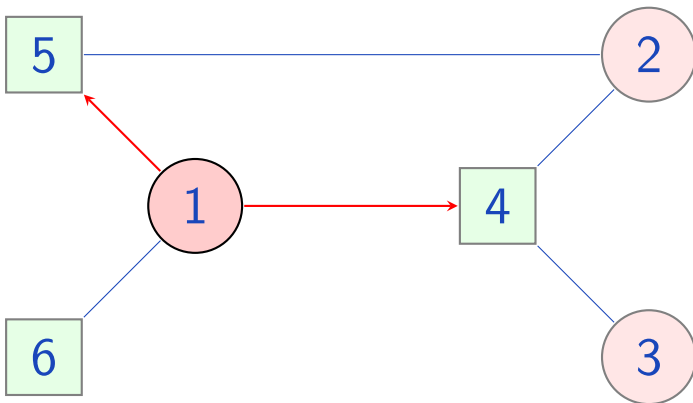


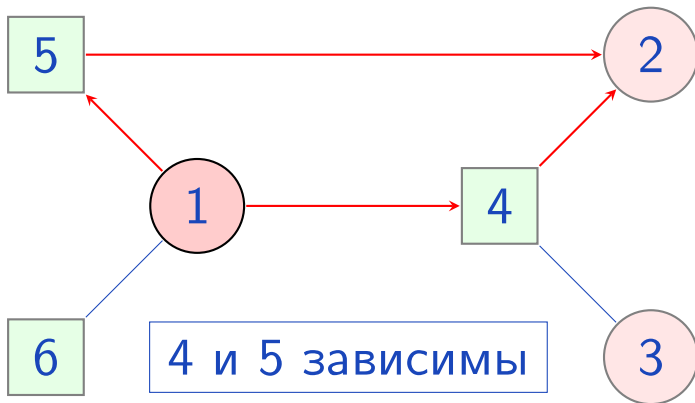


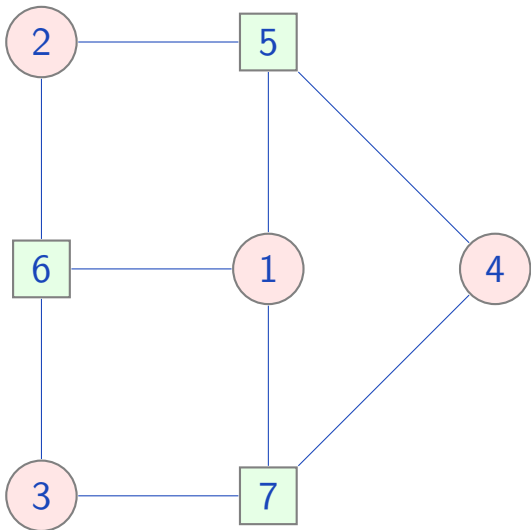




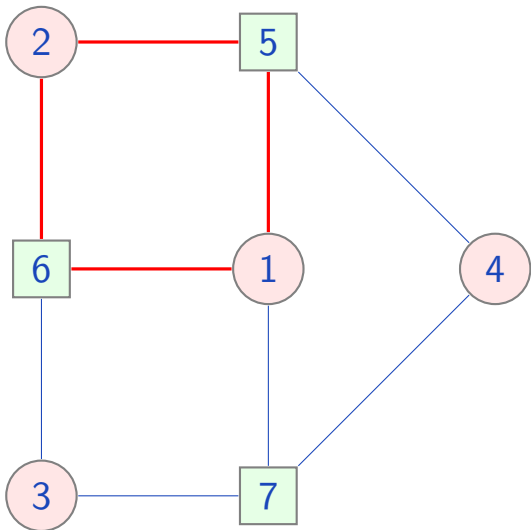




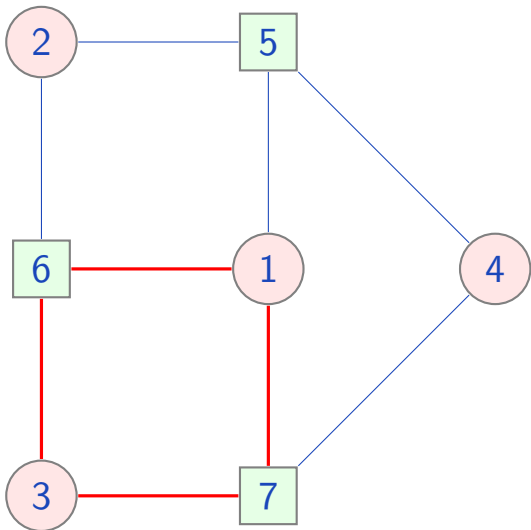




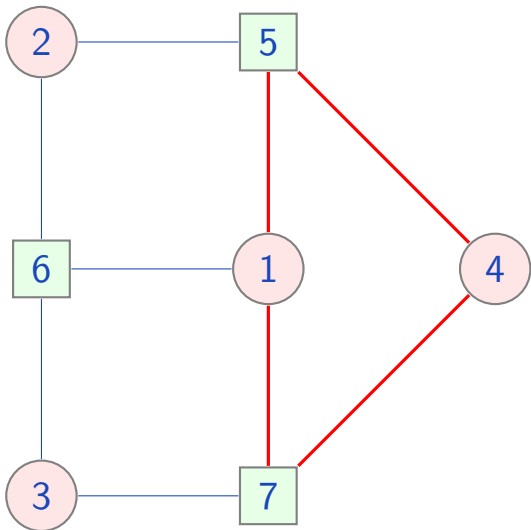
4: 0  
6: 0  
8: 0  
10: 0  
12: 0  
14: 0  
....



4: 1  
6: 0  
8: 0  
10: 0  
12: 0  
14: 0  
....

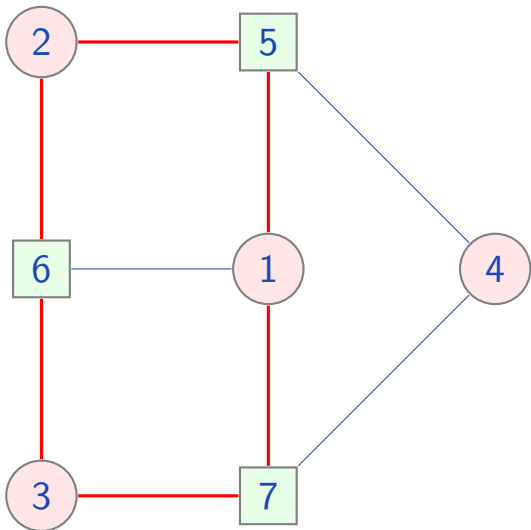


4: 2  
6: 0  
8: 0  
10: 0  
12: 0  
14: 0  
....

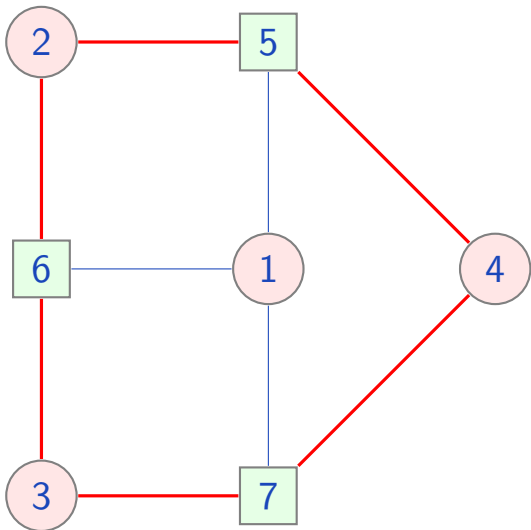


4: 3  
6: 0  
8: 0  
10: 0  
12: 0  
14: 0  
....

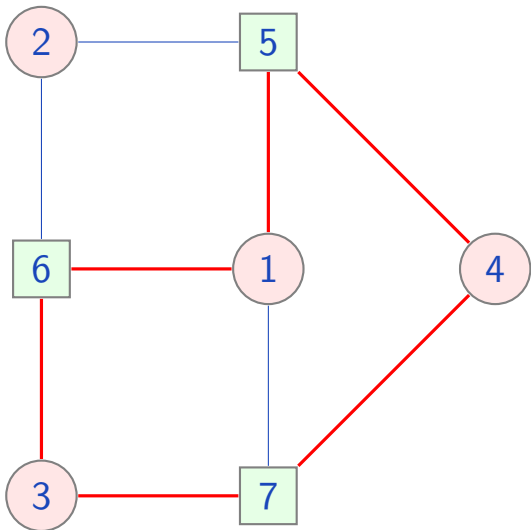




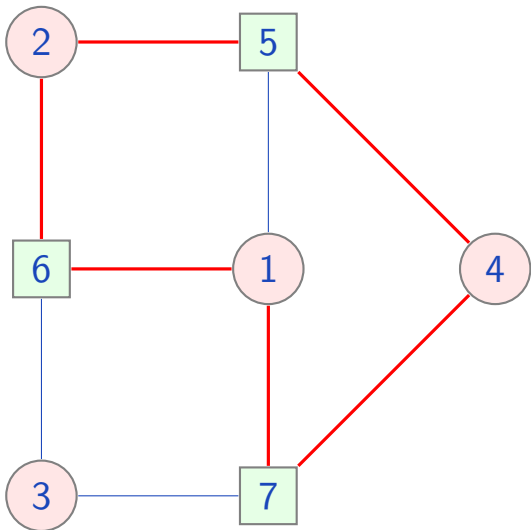
4: 3  
6: 1  
8: 0  
10: 0  
12: 0  
14: 0  
....



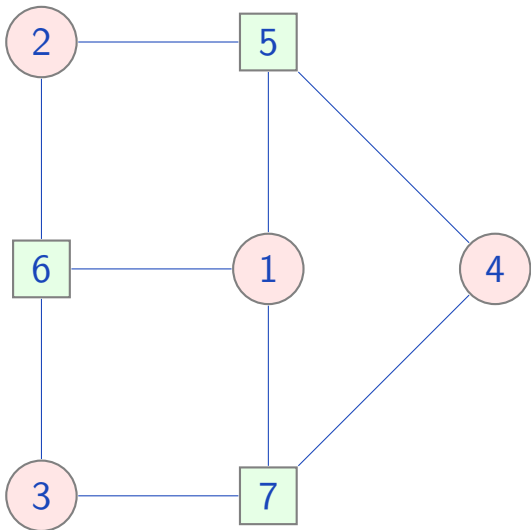
4: 3  
6: 2  
8: 0  
10: 0  
12: 0  
14: 0  
....



4: 3  
6: 3  
8: 0  
10: 0  
12: 0  
14: 0  
....

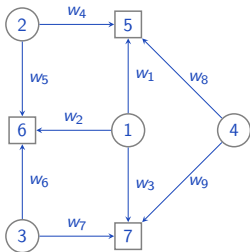


4: 3  
6: 4  
8: 0  
10: 0  
12: 0  
14: 0  
....



4: 3  
6: 4  
8: 6  
10: 12  
12: 29  
14: 48  
....

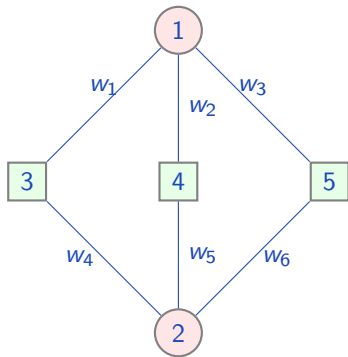
Состояние - направленное ребро  $w_i$



$$A = A_+ A_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{45} & 0 & 0 & 0 & \omega_{89} \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{54} & 0 & 0 & \omega_{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{76} & 0 & \omega_{98} & 0 \\ 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{89} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} & 0 & 0 & 0 & \omega_{67} & 0 & 0 \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} & \omega_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{98} & 0 \\ 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 & \omega_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 & 0 & 0 & \omega_{76} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

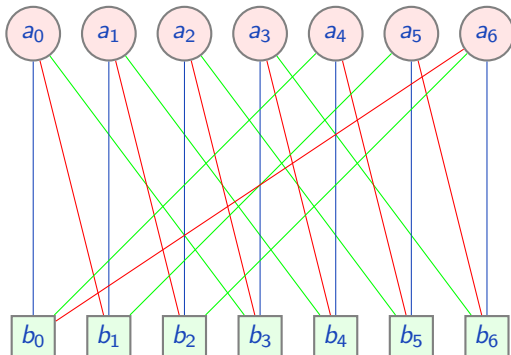
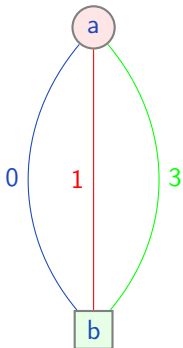
$$a_0^i = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i \text{ раз}}, 1, 0, \dots, 0)$$

$$a_{2L}^i = a_0^i \cdot A^L$$



$w_1 w_4 w_5 w_2 w_1 w_4 w_5 w_2$  - 4 раза

$w_1 w_4 w_5 w_2 w_1 w_4 w_6 w_3$  - 8 раз







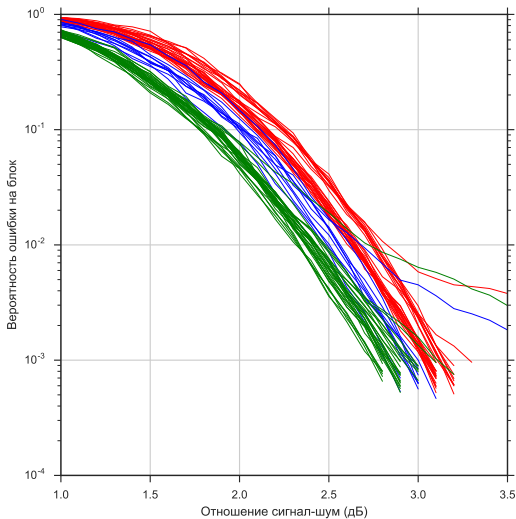
---

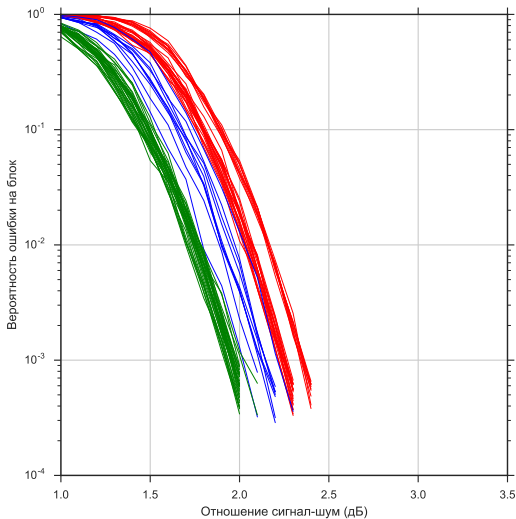
---

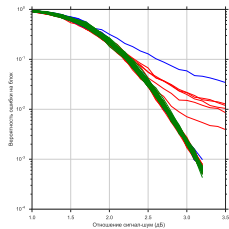
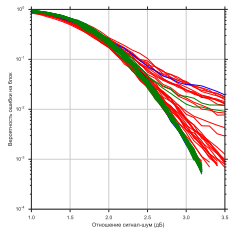
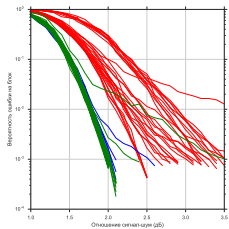
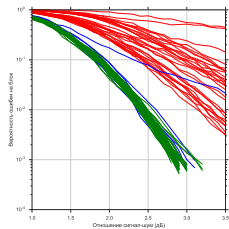
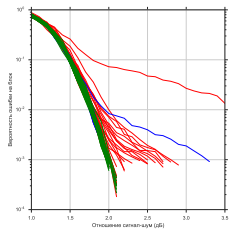
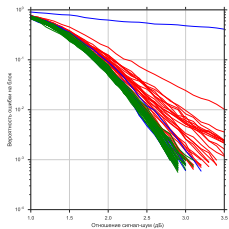
```
function COUNTCYCLES( $A, L_{\max}$ )  
   $E \leftarrow \text{SIZE}(A, 1)$   
  for  $L \leftarrow [1; \lfloor \frac{L_{\max}}{2} \rfloor]$  do  
    for  $i \leftarrow [0; E)$  do  
       $a_0^i \leftarrow (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$   
                $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{i \text{ раз}}$   
       $a_{2L}^i \leftarrow a_0^i \cdot A^L$   
       $b_{2L} \leftarrow b_{2L} + a_{2L}^i$   
    end for  
     $g_{2L} \leftarrow 0$   
    for  $d \leftarrow [1; 2L], d|2L$  do  
       $g_{2L} \leftarrow g_{2L} + \mu(d) \cdot T_d(b_{2L}/d)$   
    end for  
     $g_{2L} \leftarrow g_{2L}/2L$   
    for  $d \leftarrow [1; 2L], d|2L$  do  
      for  $w \leftarrow [0; M), \frac{w \cdot 2L}{d} = 0 \pmod{M}$  do  
         $C_{2L} \leftarrow C_{2L} + g_d^{(w)}(0)$   
      end for  
    end for  
  end for  
  return  $C$   
end function
```

---

Алгоритм	Длины циклов	Асимптотика
Alon, Yuster, Zwick	$3 \dots 7$	$O((MV)^\omega)$
Hallfod, Chug	$g, g + 2, g + 4$	$O(g(MV)^3)$
Karimi, Banihashemi	$g, g + 2, \dots, 2g - 2$	$O(gM^2E_b^2)$
Предложенный алгоритм	$g, g + 2, \dots, S$	$O(SME_b^3)$



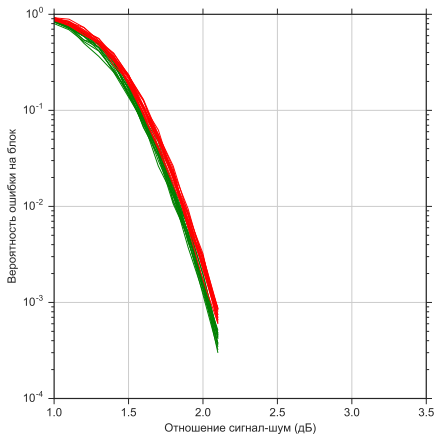
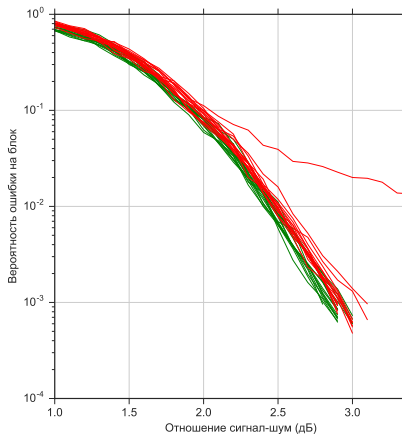




Ансамбль кодов	$t$	Уровень значимости $\alpha$
Ричардсон-Урбанке 4x8 576	4.50	$\alpha = 0.0001$
Ричардсон-Урбанке 4x8 2304	29.7	$\alpha < 0.0001$
Галлагер 4x8 576	2.57	$\alpha \approx 0.01$
Квазициклические коды 4x8 576	8.53	$\alpha < 0.0001$
Галлагер 3x6 576	6.57	$\alpha < 0.0001$
Галлагер 3x6 2304	3.32	$\alpha \approx 0.005$
Квазициклические коды 3x6 2304	9.92	$\alpha < 0.0001$
Квазициклические коды 3x6 576	12.92	$\alpha < 0.0001$



$$C_4 = 63, C_6 = 622, C_8 = 6961, C_{10} = 83856, \\ C_{12} = 1068487 / C_{12} = 1070468$$



Длина префикса	$t$	Уровень значимости $\alpha$
0	29.7	$\alpha < 0.0001$
1	5.05	$\alpha < 0.0001$
2	4.28	$\alpha < 0.0001$
3	3.05	$\alpha \approx 0.005$
4	3.36	$\alpha = 0.001$



- ▶ Сформулирован критерий оценки эффективности МППЧ-кода на основе спектра циклов графа Таннера.
- ▶ Разработан алгоритм подсчета спектра графа Таннера.
- ▶ Реализован итеративный декодер, позволяющий существенно сократить время исследования.
- ▶ Продемонстрировано, что в среднем код, имеющий лексикографически меньший спектр, имеет меньшую вероятность ошибки на блок.
- ▶ Представленный критерий и алгоритм его подсчета может быть использован для ускорения поиска хороших МППЧ-кодов.



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание

Вопросы?